

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2016

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

FINE PROPERTIES OF FUNCTIONS FROM HAJLASZ-SOBOLEV CLASSES M_{α}^p , $p > 0$, I. LEBESGUE POINTS

S. A. BONDAREV, V. G. KROTOV

Belarusian State University

E-mail: bsa0393@gmail.com, krotov@bsu.by

Abstract. Let X be a metric measure space satisfying the doubling condition of order $\gamma > 0$. For a function $f \in L_{loc}^p(X)$, $p > 0$ and a ball $B \subset X$ by $I_B^{(p)} f$ we denote the best approximation by constants in the space $L^p(B)$. In this paper, for functions f from Hajlasz-Sobolev classes $M_{\alpha}^p(X)$, $p > 0$, $\alpha > 0$, we investigate the size of the set E of points for which the following limit exists: $\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(p)} f = f^*(x)$. We prove that the complement of the set E has zero outer measure for some general class of outer measures (in particular, it has zero capacity). A sharp estimate of the Hausdorff dimension of this complement is given. Besides, it is shown that for $x \in E$ $\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Similar results are also proved for the sets where the "means" $I_{B(x,r)}^{(p)} f$ converge with a specified rate.

MSC2010 numbers: 46E35, 43A85.

Keywords: Metric measure space; doubling condition; Sobolev space; Lebesgue point; capacity; outer measure; Hausdorff measure and dimension.

1. INTRODUCTION

The classical Lebesgue theorem (see [1, Chapter 1, §1]) states that for any function $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, almost all points are Lebesgue points, that is, for μ -almost everywhere $x \in \mathbb{R}^n$ the limit

$$(1.1) \quad \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f d\mu = f^*(x)$$

exists and the function f^* is equivalent to f , where μ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$.

For more regular functions, the sizes of the Lebesgue exceptional set (that is, the set of points for which the limit (1.1) does not exist), can be estimated more precisely. For instance, for functions from Sobolev space $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 < p < n/k$, this exceptional set has vanishing W_k^p -capacity, and its Hausdorff dimension is at most $n - kp$. Such type questions first were considered in [2], and then were generalized in [3]–[5]. A detailed history of similar results on $\mathbb{R}^n$ can be found in [6, Chapter 6.2].

Recently similar problems in more general situation, for Hajlasz Sobolev classes $M_\alpha^p(X)$, $p \geq 1$, $\alpha > 0$, on metric spaces with measure (see definition below) have been studied by a number of authors (see [7]–[14], and references therein).

In the present paper, we also study estimates of the size of the Lebesgue exceptional set for functions from Hajlasz Sobolev classes $M_\alpha^p(X)$, but for $p > 0$, in which case the functions from $M_\alpha^p(X)$ can be non-summable. To this end, we first introduce a generalization of the notion of Lebesgue points, which does not use the integral averages over balls.

2. THE BASIC NOTIONS AND NOTATION

Let (X, d, μ) be a metric space with a regular Borel measure μ and a metric d . We assume that the measure μ satisfies the doubling condition, that is, there exists a number $a_\mu > 0$, such that

$$(2.1) \quad \mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad r > 0.$$

Note that the condition (2.1) can be given the following quantitative form: under (2.1) for some $\gamma > 0$ (can be taken $\gamma = \log_2 a_\mu$) the following inequality holds:

$$(2.2) \quad \mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R.$$

The constant γ plays the role of the dimension of the space X .

For a ball $B \subset X$, by r_B and x_B we denote the radius and center of B , respectively, and by λB we denote the concentric with B ball of radius λr_B .

Throughout the paper we will use the notation

$$f_B = \int_B f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu$$

for the average of a function $f \in L_{\text{loc}}^1(X)$ over the ball $B \subset X$.

By letter c will be denoted various positive constants, possibly depending on some parameters, but these dependence will not be essential for us. Besides, the notation $A \lesssim B$ will mean $A \leq cB$.

It is easy to check (see, e.g., [15, Lemma 3]) that for any number $p > 0$, a ball $B \subset X$ and a function $f \in L^p(B)$ there exists a number $I_B^{(p)} f$ to satisfy

$$\left(\int_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p d\mu(y) \right)^{1/p} = \inf_I \left(\int_B |f(y) - I|^p d\mu(y) \right)^{1/p}.$$

Note that the number $I_B^{(p)} f$ generally is not uniquely defined. In this case we take any of the possible values of $I_B^{(p)} f$. The numbers $I_B^{(p)} f$ we play the role of integral averages f_B for nonsummable functions.

For a function $f \in L^p(X)$ by $D_\alpha[f]$ we denote the class of all nonnegative μ -measurable functions g , for each of which there exists a set $E \subset X$ with $\mu(E) = 0$, such that

$$|f(x) - f(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

The elements of $D_\alpha[f]$ are called generalized α -gradients of function f . We list some simple properties of the generalized α -gradients $D_\alpha[\cdot]$ that will be used below without additional comments and references:

$$D_\alpha[f] \subset D_\alpha[|f|], \quad D_\alpha[f + \text{const}] = D_\alpha[f].$$

$$g_f \in D_\alpha[f] \text{ and } g_v \in D_\alpha[v] \implies g_f + g_v \in D_\alpha[f + v],$$

$$g_f \in D_\alpha[f] \implies cg_f \in D_\alpha[cf], \quad c > 0,$$

if $g_i \in D_\alpha[f_i]$ and $\sup_i f_i < +\infty$ μ -almost everywhere, then

$$(2.3) \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} g_i \in D_\alpha \left[\sup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right].$$

We introduce the scale of Hajlasz Sobolev classes $M_\alpha^p(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \emptyset\}$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$. These spaces are normed as follows:

$$(2.4) \quad \|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf \{ \|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X) \}$$

(notice that for $0 < p < 1$ the expression (2.4) is only a pre-norm). For $\alpha = 1$ these spaces were introduced in the paper by P. Hajlasz [7], where it was shown that $M_1^p(\mathbb{R}^n)$ coincides with the classical Sobolev space $W_1^p(\mathbb{R}^n)$. For $\alpha > 0$ these spaces first were appeared in [16, 17].

For $\alpha > 0$ define the Hölder classes:

$$H_\alpha(X) = \left\{ \phi \in C(X) : \|\phi\|_{H_\alpha(X)} = \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{[d(x, y)]^\alpha} < +\infty \right\}.$$

Observe that in contrast to the classical cases $X = [0, 1]^n$ and $X = \mathbb{R}^n$, the class $H_\alpha(X)$ can be nonempty for some $\alpha > 1$. Notice also that the class $H_\alpha(X)$ is everywhere dense in $M_\alpha^p(X)$ for $p > 0$ and $0 < \alpha \leq 1$ (see [7, Theorem 5] for $p > 1$ and $\alpha = 1$), in the case $p > 0$ and $0 < \alpha \leq 1$ the proof is similar.

The classes M_α^p generate the capacities:

$$\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = \inf \left\{ \|f\|_{M_\alpha^p(X)}^p : f \in M_\alpha^p(X), f \geq 1 \text{ in the neighborhood of } E \subset X \right\}.$$

The capacities, together with the measure, the content and the Hausdorff dimension will play the role of "measuring instruments" of the sizes of exceptional sets.

Now we consider another way of estimating the complement of an exceptional set, which is based on the use of the so-called modified Hausdorff contents (see [19] and [22]).

Let $h : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ be a given increasing function with $h(+0) = 0$, which will be called a gauge function. The modified Hausdorff R -content of codimension h for a set $E \subset X$ is defined to be

$$\mathcal{H}_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{h(r_i)} : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\},$$

where the infimum is taken over all possible coverings of the set E by countable collections of balls, while the quantity $\mathcal{H}^h(E) = \lim_{R \rightarrow +0} \mathcal{H}_R^h(E)$ is called the modified Hausdorff measure of codimension h for E .

Recall that for a gauge function h and $0 < R \leq 1$ the classical Hausdorff (h, R) -content of a set $E \subset X$ is defined as follows:

$$H_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\},$$

where the infimum is taken over all possible coverings of the set E by countable collections of balls, while the quantity $H^h(E) = \lim_{R \rightarrow +0} H_R^h(E)$ is called the Hausdorff h -measure for E . For $h(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, we write H^α instead of H^{t^α} . The Hausdorff dimension is defined as follows:

$$\dim_H E = \inf \{s : H_1^s(E) = 0\}.$$

3. THE MAIN RESULTS

In the definition of Lebesgue points of a function $f \in L^p(X)$, $p > 0$, instead of the integral averages f_B , we use the best approximations $I_B^{(p)} f$. The next theorem shows that the results, proved for averages f_B , remain valid for such defined Lebesgue points.

Theorem 3.1. *Let $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$. Then there exists a set $E \subset X$ such that $\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = 0$ and for any $x \in X \setminus E$ the following limit exists:*

$$(3.1) \quad \lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x, r)}^{(p)} f = f^*(x).$$

Besides, we have

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

The result of Theorem 3.1 for classical Lebesgue points is well-known. In the case $X = \mathbb{R}^n$, $p > 1$, $\alpha = 1$ it was proved in [2], for $p > 1$, $\alpha = 1$ Theorem 3.1, without relation (3.2), was established in [8], for the case $p > 1$, $\alpha = 1$ and $1/q > 1/p - \alpha/\gamma$ it was proved in [9], for $p > 1$, $\alpha > 0$ in [10] [12], and for $p = 1$, $\alpha = 1$ in [13].

Remark 3.1. In addition to the result of Theorem 3.1, for any $x \in X \setminus E$ the following assertions hold:

1) if $0 < \theta \leq q$, then

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |f - I_{B(x,r)}^{(\theta)} f|^\theta d\mu = 0,$$

2) if $0 < \theta \leq q$, then

$$\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(\theta)} f = f^*(x),$$

3) if $p \geq \frac{\gamma}{\gamma-\alpha}$ (in this case $q \geq 1$), then

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q d\mu = 0.$$

in particular, we have $\lim_{r \rightarrow +0} f_{B(x,r)} = f^*(x)$.

When preparing the present paper, the preprint [18] was published, where a different approach to the definition of Lebesgue points was proposed. This approach is based on the use of the quantities

$$(3.3) \quad m_f^\delta(E) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > a\}) < \delta\mu(E)\}, \quad 0 < \delta \leq 1/2,$$

which are called δ -medians of a measurable function f over the set $E \subset X$ of finite measure.

The main result of [18] concerning the spaces $M_0^p(X)$ (in [18] also was considered Besov and Triebel-Lizorkin type spaces) is that the result of Theorem 3.1 holds when the best approximations $I_{B(x,r)}^{(p)} f$ are replaced by medians $m_f^\delta(B(x,r))$ for any $0 < \delta \leq 1/2$, that is, in Theorem 3.1 the relation (3.1) can be replaced by

$$(3.4) \quad \lim_{r \rightarrow +0} m_f^\delta(B(x,r)) = f^*(x).$$

We show that in a sense these two approaches are equivalent, and hence the above cited result from [18] can easily be deduced from our Theorem 3.1.

Corollary 3.1. *Let $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$. Then there exists a set $E \subset X$, such that $\text{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ and for any $x \in X \setminus E$ and any $0 < \delta \leq 1/2$ the relation (3.4) holds.*

A nonnegative function ν , defined on the σ algebra of Borel sets from X , is called an outer measure if it is monotone (that is, $E_1 \subset E_2$ implies $\nu(E_1) \leq \nu(E_2)$) and is subadditive with some constant a_ν , meaning that for any sequence of Borel sets E_k the following inequality holds: $\nu(\bigcup_k E_k) \leq a_\nu \sum_k \nu(E_k)$.

Let h be a given gauge function. We will use the following condition that connects the underlying measure μ and the outer measure ν : there exists a constant c_ν , such that

$$(3.5) \quad \nu(B) \leq c_\nu \frac{\mu(B)}{h(r_B)} \quad \text{for all balls } B \subset X, r_B \leq 1.$$

In the theorem that follows, in terms of the above condition, we give an estimate of the complement of the set of points at which the relation (3.1) is satisfied for functions from the classes $M_\alpha^p(X)$ for all $p > 0$ and $\alpha > 0$. We will consider gauge functions h of the following form:

$$(3.6) \quad h(t) = \left(\frac{t^\alpha}{\varphi(t)} \right)^p,$$

where $\varphi: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ is a positive increasing function for which $\varphi(t)t^{-\alpha}$ decreases.

Theorem 3.2. *Let $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$. Let ν be an outer measure satisfying condition (3.5) with a gauge function h of the form (3.6), such that*

$$(3.7) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(2^{-i}) < \infty.$$

Then there exists a set $E \subset X$ such that $\nu(E) = 0$ and for any $x \in X \setminus E$ the limit in (3.1) exists and the relation (3.2) is satisfied.

(Observe that $\nu = \text{Cap}_{\alpha,p}$ satisfies the condition (3.5) for $\varphi = 1$, for which (3.7) is not satisfied. Hence Theorem 3.1 cannot be deduced from Theorem 3.2. As an example of outer measure ν satisfying conditions of the theorem can be considered the modified Hausdorff measure $\mathcal{H}^h$, from which we obtain the following result.

Corollary 3.2. *Let $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$, and let a gauge function given by (3.6) satisfy the condition (3.7). Then there exists a set $E \subset X$ such that $\mathcal{H}^h(E) = 0$ and for any $x \in X \setminus E$ the limit in (3.1) exists and the relation (3.2) is satisfied.*

A similar result can be stated in terms of medians $m_f^\delta(B(x, r))$, instead of the best approximations $I_{B(x, r)}^{(p)} f$.

Corollary 3.3. *Let $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$, and let a gauge function given by (3.6) satisfy the condition (3.7). Then there exists a set $E \subset X$ such that $\mathcal{H}^h(E) = 0$ and for any $x \in X \setminus E$ the limit in (3.4) exists and the relation (3.2) is satisfied.*

Note that this result, without relation (3.2), for $\alpha \in (0, 1]$ and $p \in (0, 1)$ was proved in [22].

The classical content H_1^β satisfies the condition (3.5) with function $h(t) = t^{\gamma-\beta}$, at least locally. Indeed, we fix the ball $B_0 = B(x_0, R_0)$ and let B be a ball that is contained in B_0 , then by doubling condition we have $\mu(B) \geq \frac{\mu(B_0)}{R_0} r_B^\gamma$. Therefore

$$H_1^\beta(B) \leq r_B^\beta = r_B^{\beta-\gamma} r_B^\gamma \lesssim \frac{R_0^\gamma}{\mu(B_0)} r_B^{-(\gamma-\beta)} \mu(B).$$

Hence taking into account the subadditivity of the content H_1^β we can state the following result.

Corollary 3.4. *Let $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ and $f \in M_\alpha^p(X)$. Then there exists a set $E \subset X$, such that $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$ and for any $x \in X \setminus E$ the limit in (3.1) exists and the relation (3.2) is satisfied.*

Our next result estimates the sizes of the complement of a set on which the "averages" $I_{B(x, r)}^{(p)} f$ converge with a specified rate.

Theorem 3.3. *Let $0 < \alpha$, $0 < p < \gamma/\alpha$ be given, and let ν be an outer measure satisfying the condition (3.5) with h of the form (3.6) and a function φ satisfying (3.7). Then for any function $f \in M_\alpha^p(X)$ there exists a set $E \subset X$, such that $\nu(E) = 0$ and for all $x \in X \setminus E$ the following relations hold:*

$$(3.8) \quad \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} [f^*(x) - I_{B(x, r)}^{(p)} f] = 0,$$

$$(3.9) \quad \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} [m_f^\delta(B(x, r)) - f^*(x)] = 0, \quad 0 < \delta \leq 1/2,$$

$$(3.10) \quad \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} \left(\int_{B(x, r)} |f - f^*(x)|^q d\mu \right)^{1/q} = 0, \quad \text{where } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Notice that the set E in Theorem 3.3 satisfies the condition

$$\mathcal{H}^{(\alpha-\beta)p}(E) = H^{-(\alpha-\beta)p}(E) = 0$$

for $0 < \beta < \alpha$ (see [14, Theorem 2] in the case $p > 1$ and $\varphi(t) = t^\beta$).

Remark 3.2. All above stated results remain valid for the homogeneous versions $M_\alpha^p(X)$ of Hajlasz-Sobolev spaces, which are defined to be the sets of measurable functions f satisfying $D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \emptyset$.

4. AUXILIARY NOTIONS AND RESULTS

We first examine the behavior of the best approximations $I_{B(x,r)}^{(p)}f$.

Lemma 4.1. *If $f \in C(X)$, $x \in X$ and $p > 0$, then $\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(p)}f = f(x)$. If $f \in L^p(X)$, then the limit $\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(p)}f$ exists μ -almost everywhere.*

The first assertion is obvious, while the second was proved in [15, Lemma 7] (see also [24, Theorem 2] and [25, Lemma 2]). Lemma 4.1 shows that for nonsummable functions, in the definition of Lebesgue points the integral averages $f_{B(x,r)}$ can be replaced by the best approximations $I_{B(x,r)}^{(p)}f$.

The basic tools in the proofs of the main results play the L^p -oscillations:

$$A_p(f, B) = \left(\int_B |f - I_B^{(p)}f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

where $B \subset X$ is a ball, and the corresponding maximal operators:

$$\mathcal{A}_\alpha^{(p)}f(x) = \sup_{B \ni x} r_B^{-\alpha} A_p(f, B),$$

where the supremum is taken over all balls B containing the point x , and $\alpha \geq 0$, $f \in L_{\text{loc}}^p(X)$, $p > 0$.

Lemma 4.2. *Let $\alpha, p, \theta > 0$. The following assertions hold:*

1) *if $B_1, B_2 \subset X$ are two balls such that $B_1 \subset B_2$ and $0 < r_{B_1} \leq r_{B_2}$, then*

$$(4.1) \quad |I_{B_1}^{(p)}f - I_{B_2}^{(p)}f| \lesssim A_p(f, B_1) + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}} \right)^{\gamma/\theta} A_p(f, B_2);$$

2) *for any ball $B \subset X$ we have*

$$(4.2) \quad \mathcal{A}_\alpha(f, B) \leq r_B^\alpha \left(\int_B |\mathcal{A}_\alpha^{(\theta)}f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

if, in addition, $p < \gamma/\alpha$, then

$$(4.3) \quad \left(\int_B |f - r_B^{(\alpha)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \lesssim r_B^{(\alpha)} \left(\int_{2B} |A_\alpha^{(\theta)} f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{where} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Proof. The inequality (4.1) was proved in [15, Lemma 5]. The inequality (4.2) can be obtained by averaging over $y \in B$ of the obvious inequality

$$A_\theta(f, B) \leq r_B^{(\alpha)} A_\alpha^{(\theta)} f(y) \quad \text{for } y \in B,$$

while (4.3) is proved in [15, Theorem 2].

The next lemma follows from the so-called self-improvement property of the Poincaré inequality (see [15, Theorem 6]).

Lemma 4.3. *Let $1/\theta < 1/p + \alpha/\gamma$. Then for $f \in M_\alpha^p(X)$ and $g \in D_\alpha[f]$*

$$A_p(f, B) \lesssim r_B^{(\alpha)} \left(\int_{2B} g^\theta d\mu \right)^{1/\theta}.$$

Next, we present results containing descriptions of classes in terms of maximal functions $A_\alpha^{(\theta)}$ (see [23, Corollary 3.1], and also [15, Theorem 4]).

Lemma 4.4. *If $\alpha, p > 0$ and $f \in L^p(X)$, then*

- 1) *from $A_\alpha^{(\theta)} f \in L^p(X)$ for some $\theta > 0$ follows $f \in M_\alpha^p(X)$,*
- 2) *from $f \in M_\alpha^p(X)$ follows $A_\alpha^{(\theta)} f \in L^p(X)$ for $1/\theta > \max\{1/p - \alpha/\gamma, 0\}$.*

Lemma 4.5. *Let $\alpha, p > 0$. If $f \in M_\alpha^p(X)$, $\phi \in H_\alpha(X)$ and is bounded, then $f\phi \in M_\alpha^p(X)$. Besides, if $\phi(x) = 0$ for $x \in X \setminus E$, then for any function $g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X)$ we have*

$$(g \cdot \|\phi\|_\infty + |f| \cdot \|\phi\|_{H_\alpha(X)}) \chi_E \in D_\alpha[f\phi] \cap L^p(X).$$

The result of Lemma 4.5 is known for $p > 1$ (see [8, Lemma 5.20] and [9, Lemma 2.5]). The proof is similar in the case $p > 0$. The next classical lemma can be found in [26] (see also [27, Lemma 1.6]).

Lemma 4.6. *From each covering of the set $E \subset X$ by balls of bounded diameters can be selected at most countable set of mutually disjoint balls $\{B_i\}$ satisfying $E \subset \bigcup_i 5B_i$.*

For a measurable function h we introduce the h -"fractional" maximal function:

$$\mathcal{M}_{h,p} g(x) = \sup_{B \ni x} \left(h(r_B) \int_B |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

In the special case $h(t) \equiv 1$ we obtain the usual modified Hardy-Littlewood maximal function:

$$M_p g(x) = \sup_{B \ni x} \left(\int_B |g|^p d\mu \right)^{1/p},$$

for which for $0 < \theta < p$ the following standard estimates hold (see, e.g., [1, §1.3]):

$$(4.4) \quad \|M_\theta f\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}$$

In the next lemma we collect the necessary properties of h -“fractional” maximal function.

Lemma 4.7. *Let $p > 0$ and ν be an outer measure satisfying the condition (3.5). Then the following weak type inequality holds:*

$$(4.5) \quad \nu \{x \in X : M_{h,p} g(x) > \lambda\} \lesssim \left(\frac{1}{\lambda} \|g\|_{L^p(X)} \right)^p,$$

and $\nu(E_{h,p}[g]) = 0$ for any function $g \in L^p(X)$, where

$$E_{h,p}[g] := \left\{ x \in X : \lim_{r \rightarrow 0} h(r) \int_{B(x,r)} |g|^p d\mu > 0 \right\}.$$

Proof. We first prove the second assertion of the lemma. By subadditivity of measure ν , it is enough to show that $\nu(E_\lambda) = 0$ for $\lambda > 0$, where

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \lim_{r \rightarrow 0} h(r) \int_{B(x,r)} g^p d\mu > \lambda \right\}.$$

Let $0 < \delta \leq 1$. If $x \in E_\lambda$, then there exists a ball $B_x = B(x, r_x)$, where $r_x \in (0, \delta)$, such that

$$(4.6) \quad h(r_x) \int_{B_x} g^p d\mu > \lambda.$$

By Lemma 4.6, from the covering $\{B_x : x \in E_\lambda\}$ it can be selected at most countable subset of mutually disjoint balls $\{B_i = B_{x_i}\}$ satisfying $E_\lambda \subset \bigcup_i 5B_i$.

Hence taking into account the subadditivity of ν , and conditions (2.2), (3.5) and (4.6), we can write

$$\begin{aligned} \nu(E_\lambda) &\leq \nu \left(\bigcup_i 5B_i \right) \lesssim \sum_i \nu(5B_i) \lesssim \sum_i \mu(B_i) / h(r_i) \lesssim \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda} \sum_i \int_{B_i} g^p d\mu \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_i B_i} g^p d\mu \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

The last relation follows from absolute continuity of the integral and continuity of the gauge function h at zero, because by (4.6) we have

$$\mu\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i \frac{h(r_i)}{\lambda} \int_{B_i} g^p d\mu \leq \frac{h(\delta)}{\lambda} \int_X g^p d\mu \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \rightarrow 0.$$

Repeating the above arguments for the set $\{\mathcal{M}_{h,p}g > \lambda\}$, we obtain (4.5).

Lemma 4.8. Let $p > 0$, $0 \leq \beta < \alpha$, and let the outer measure ν satisfy the condition (3.5), where $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$. Then for $f \in L_{\text{loc}}^p(X)$ the following inequality holds:

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{A_n^{(\beta)} f > \lambda\} d\lambda \lesssim \|A_n^{(\beta)} f\|_{L_{\nu}(X)}^p.$$

This result can be found in [20] (see Theorem 2 and the remark at the end of §2 in [20]).

Lemma 4.9 ([10, 11]). Let $E \subset X$, $0 < \alpha \leq 1$, $\gamma > \alpha p$ and $p > 0$. Then the following assertions hold:

1) the capacity $\text{Cap}_{\alpha,p}$ is an outer measure and

$$\text{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf \{ \text{Cap}_{\alpha,p}(O) : E \subset O, O \text{ is open} \},$$

2) for $x \in X$, $0 < r \leq 1$ $\text{Cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \leq r^{-\alpha p} \mu(B(x,r))$,

3) for $0 < \beta \leq \alpha$ $\text{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0 \Rightarrow \text{Cap}_{\beta,p}(E) = 0$.

5. A WEAK INEQUALITY FOR CAPACITIES

To prove the main result of the paper, we need a number of results, which can also represent an independent interest. Such results are weak estimates of capacities, which will be obtained using a discrete maximal function. To define this notion, we need some preliminary work. We start with lemmas on coverings and on existence of partition of unity (see [9])

Lemma 5.1. There exists a number $N \in \mathbb{N}$, such that for any $r > 0$ a family of finite or countable balls $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^\infty$ can be found to satisfy

$$X \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r), \quad \sum_{i=1}^\infty \chi_{B(x_i, 6r)} \leq N.$$

Lemma 5.2. Let $0 < \alpha \leq 1$ and $r > 0$. For the balls $\{B(x_i, r)\}$ from Lemma 5.1 there exists a collection of functions $\{\phi_i\} \subset H_\alpha(X)$ possessing the following properties:

1) $0 \leq \phi_i \leq 1$.

2) $\phi_i(x) = 0$, $x \in X \setminus B(x_i, 6r)$.

3) $\phi_i(x) \geq c$, $x \in B(x_i, 3r)$, where constant $c > 0$ depends only on a_μ from (2.1).

4) $\|\phi_i\|_{H_\alpha(X)} \lesssim r^{-\alpha}$,

5) $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \equiv 1$.

Now we are ready to define the discrete maximal function. Let $r > 0$ and $\{B_i\}$ be a covering of X by balls $B(x_i, r)$ from Lemma 5.1, and let ϕ_i be the functions from Lemma 5.2. Define the discrete convolution of function f by

$$(5.1) \quad f_r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) |I_{B(x_i, 3r)}^{(p)} f|,$$

and the discrete maximal operator by

$$M^* f(x) = \sup_j f_{r_j}(x),$$

where $\{r_j\}$ are in some way enumerated sequence of rational numbers from $(0, 1)$.

Note that in the standard definition of the discrete maximal function (see [9], [13]) is used the integral averages. In our case, these averages are replaced by the elements of the best approximation $I_B^p f$. Now we proceed to prove a number of properties of the discrete convolution and discrete maximal function. We will follow the scheme from [13].

Lemma 5.3. *The operator of discrete convolution is bounded in the spaces $L^p(X)$ and $M_\alpha^p(X)$, that is,*

$$(5.2) \quad \|f_r\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)},$$

$$(5.3) \quad \|f_r\|_{M_\alpha^p(X)} \lesssim \|f\|_{M_\alpha^p(X)}.$$

Proof. We first prove the inequality (5.2). We have

$$\int_X |f_r|^p d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \phi_i^p |I_{3B_i}^{(p)} f|^p d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(6B_i) |I_{3B_i}^{(p)} f|^p.$$

Using the following easily verified inequality $|I_{3B_i}^{(p)} f|^p \lesssim f_{3B_i} |f|^p d\mu$ and taking into account the bounded multiplicity of the intersection of balls $6B_i$ (see Lemma 5.1), we obtain

$$\|f_r\|_{L^p(X)}^p \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \int_{3B_i} |f|^p d\mu \lesssim \int_X |f|^p d\mu,$$

and the inequality (5.2) follows.

To prove the inequality (5.3), we follow [13], and produce the α -gradient for f_r and prove that this gradient and the function f_r belong to $L^p(X)$. We use the notation $B_i = B(x_i, r)$, and represent f_r in the form

$$f_r(x) = |f(x)| + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[|I_{3B_i}^{(p)} f| - |f(x)| \right].$$

It is easy to see that $g + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \in D[f_r]$, where $g \in D[f]$ and g_i is the generalized α -gradient for $\phi_i \left[|I_{3B_i}^{(p)} f| - |f| \right]$. Using Lemma 4.5, with some constant $c > 0$ we have

$$\left(\frac{c}{r^\alpha} |f - I_{3B_i}^{(p)} f| + g \right) \chi_{6B_i} \in D \left[\phi_i \left(|I_{3B_i}^{(p)} f| - |f| \right) \right].$$

Let $x \in 6B_i$, then $3B_i \subset B(x, 9r)$. We write the obvious inequality

$$|f(x) - I_{3B_i}^{(p)} f| \leq |f(x) - I_{B(x, 9r)}^{(p)} f| + |I_{B(x, 9r)}^{(p)} f - I_{3B_i}^{(p)} f|,$$

and estimate the terms on the right-hand side separately.

If at a point x the relation (3.1) is satisfied, then using Lemma 4.3, we can write the following chain of inequalities

$$\begin{aligned} |f(x) - I_{B(x, 9r)}^{(p)} f| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |I_{B(x, 3^{2-j}r)}^{(p)} f - I_{B(x, 3^{1-j}r)}^{(p)} f| \lesssim \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} A_p(f, B(x, 3^{2-j}r)) \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j}}{3^{j\alpha}} M_\theta g. \end{aligned}$$

The parameter θ we choose to satisfy the condition of Lemma 4.3, that is,

$$(5.4) \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

To estimate the second term, we again use Lemma 4.3 to obtain

$$|I_{B(x, 9r)}^{(p)} f - I_{3B_i}^{(p)} f| \lesssim A_p(f, B(x, 9r)) \lesssim r^\alpha M_\theta g.$$

Thus, for almost all $x \in X$ (see Lemma 4.1) the inequality holds:

$$|f(x) - I_{3B_i}^{(p)} f| \lesssim r^\alpha M_\theta g, \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{\gamma},$$

implying that $c(g + M_\theta g) \in D[f_r]$. Taking into account (4.4), we obtain inequality (5.3). $\square$

Lemma 5.4. *The discrete maximal function acts boundedly in the space $M_\alpha^p(X)$, that is,*

$$(5.5) \quad \|M^* f\|_{M_\alpha^p(X)} \lesssim \|f\|_{M_\alpha^p(X)}.$$

Proof. In Lemma 5.3 it is shown that the function $c(g + M_\theta g)$ (where g is any α -gradient of function f , and θ satisfies (5.4)) is an α -gradient for the discrete convolution f_r for any r . Hence, by (2.3) this function is also an α gradient for $M^* f$. Write the inequality

$$f_r(x) \leq \sum_{i'} |I_{\alpha B_i}^{(p)} f|,$$

where i' indicates that the sum is over those indices i , for which $x \in 6B_i$ (by Lemma 5.1, the number of such indices is bounded by a constant, depending only on γ). We choose a number θ to satisfy (5.4), and estimate each term on the right-hand side of the inequality

$$|I_{\alpha B_i}^{(p)} f| \leq A_p(f, 3B_i) + \left(\int_{\alpha B_i} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq A_p(f, 6B_i) + M_\theta f(x).$$

Using the self-improvement property of the Poincaré inequality and Lemma 4.3, we obtain

$$f_r(x) \leq M_\theta g(x) + M_\theta f(x),$$

implying the inequality (5.5). The proof of Lemma 5.4 is complete. $\square$

Now we introduce one more maximal operator:

$$M_I f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} |I_B^{(p)} f|.$$

The next lemma asserts that for the operators $M_I f$, $M_p f$ and $A_0 f$ a weak type inequality by capacity holds.

Lemma 5.5. *Let $f \in M_\alpha^n(X)$, then*

$$(5.6) \quad \text{Cap}_{\alpha, p} \{x : (Tf)(x) > \lambda\} \leq \frac{\|f\|_{M_\alpha^n(X)}^p}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0,$$

where as T can be taken any of the operators $M_I f$, $M_p f$ or $A_0 f$.

Proof. Observe first that the inequality (5.6) for $T = A_0^{(p)}$ follows from Lemma 4.8. Indeed, for given $\lambda > 0$, by Lemmas 4.3 and 4.8 we get

$$\begin{aligned} \lambda \left(\text{Cap}_{\alpha, p} \{A_0^{(p)} f > \lambda\} \right)^{1/p} &\lesssim \left(\int_{\lambda/2}^{\lambda} t^{p-1} \text{Cap}_{\alpha, p} \{A_0^{(p)} f > t\} dt \right)^{1/p} \lesssim \\ &\lesssim \|A_0^{(p)} f\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{M_\alpha^n(X)}. \end{aligned}$$

To prove the inequality (5.6) for $T = M_I$, observe that

$$M_I f(x) \leq c \left(A_0^{(p)} f(x) + M^* f(x) \right).$$

From the previous inequality, using the fact that the assertion is already proved for $A_0^{(p)}$, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Cap}_{\alpha,p}(M_I f > \lambda) &\leq \text{Cap}_{\alpha,p}\left(A_0^{(p)} f > \frac{\lambda}{2c}\right) + \text{Cap}_{\alpha,p}\left(M^* f > \frac{\lambda}{2c}\right) \lesssim \\ &\lesssim \frac{\|f\|_{M_\alpha^p}^p}{\lambda^p} + \text{Cap}_{\alpha,p}\left(M^* f > \frac{\lambda}{2c}\right). \end{aligned}$$

Thus, it remains to show that

$$\text{Cap}_{\alpha,p}\left(M^* f > \frac{\lambda}{2c}\right) \lesssim \frac{\|f\|_{M_\alpha^p}^p}{\lambda^p}.$$

To prove the last inequality, we use the definition of capacity to obtain

$$\text{Cap}_{\alpha,p}\left(M^* f > \frac{\lambda}{2c}\right) \lesssim \left\| \frac{M^* f}{\lambda} \right\|_{M_\alpha^p}^p \lesssim \frac{\|f\|_{M_\alpha^p}^p}{\lambda^p}.$$

Therefore

$$\text{Cap}_{\alpha,p}(M_I f > \lambda) \lesssim \frac{\|f\|_{M_\alpha^p}^p}{\lambda^p}.$$

Finally, the inequality (5.6) for operator $M_p f$ follows from the above proved inequality and $M_p f(x) \lesssim A_0^{(p)} f(x) + M_I f(x)$. Lemma 5.5 is proved.

6. PROOF OF THEOREM 3.1 AND ITS COROLLARIES

We define

$$\Omega f(x) = \overline{\lim}_{0 < r < R \rightarrow 0} |I_{B(x,r)}^{(p)} f - I_{B(x,R)}^{(p)} f|,$$

and show that

$$\text{Cap}_{\alpha,p}\{x \in X : \Omega f(x) > 0\} = 0.$$

Taking into account that the Hölder class $H_\alpha(X)$ is everywhere dense in $M_\alpha^p(X)$, for $\varepsilon > 0$ the function f can be represented in the form $f = f_1 + f_2$, where $f_1 \in H_\alpha(X)$ and $\|f_2\|_{M_\alpha^p} < \varepsilon$.

For any $y, z \in X$ we write the obvious inequality

$$\begin{aligned} |I_{B(x,r)}^{(p)} f - I_{B(x,R)}^{(p)} f| &\leq |I_{B(x,r)}^{(p)} f - f(y)| + |I_{B(x,r)}^{(p)} f_1 - f_1(y)| + \\ &+ |I_{B(x,r)}^{(p)} f_2 - f_2(y)| + |I_{B(x,R)}^{(p)} f - f(z)| + |I_{B(x,R)}^{(p)} f_1 - f_1(z)| + \\ &+ |I_{B(x,R)}^{(p)} f_2 - f_2(z)| + |I_{B(x,r)}^{(p)} f_1 - I_{B(x,R)}^{(p)} f_1| + |I_{B(x,r)}^{(p)} f_2 - I_{B(x,R)}^{(p)} f_2|, \end{aligned}$$

and average it by $y \in B(x, r)$ and $z \in B(x, R)$ to obtain

$$\begin{aligned} |I_{B(x,r)}^{(p)} f - I_{B(x,R)}^{(p)} f| &\lesssim A_p(f, B(x, r)) + A_p(f_1, B(x, r)) + \\ &+ A_p(f_2, B(x, r)) + A_p(f, B(x, R)) + A_p(f_1, B(x, R)) + \\ &+ A_p(f_2, B(x, R)) + |I_{B(x,r)}^{(p)} f_1 - I_{B(x,R)}^{(p)} f_1| + |I_{B(x,r)}^{(p)} f_2 - I_{B(x,R)}^{(p)} f_2|. \end{aligned}$$

The first six terms can be estimated similarly as follows. Using the inequality (4.2) and Lemmas 4.2, 4.7 and 4.9, we conclude that the following relation is fulfilled $\text{Cap}_{\alpha, p}$ -almost everywhere:

$$A_p(f, B(x, r)) \leq r^\alpha \left(\int_{B(x, r)} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow +0.$$

Besides, in view of continuity of f_1 and Lemma 4.1, for any $x \in X$ we have

$$\lim_{0 < r < R \rightarrow 0} |I_{B(x, r)}^{(p)} f_1 - I_{B(x, R)}^{(p)} f_1| = 0.$$

Therefore, $\text{Cap}_{\alpha, p}$ -almost everywhere

$$\Omega f(x) \leq \Omega f_2(x) \leq M_I f_2(x).$$

Also, by Lemma 5.5 for any $\lambda > 0$ we have

$$\text{Cap}_{\alpha, p}\{\Omega f > \lambda\} \leq \text{Cap}_{\alpha, p}\{M_I f_2 > \lambda\} \leq \left(\frac{\|f_2\|_{M_I^p}}{\lambda} \right)^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^p.$$

Hence for any $\lambda > 0$ we have $\text{Cap}_{\alpha, p}\{\Omega f > \lambda\} = 0$, and the result follows. Theorem 3.1 is proved.

Now we prove the assertions in Remark 3.1. Observe first that the assertion 1) immediately follows from Hölder inequality. To prove the assertion 2), the inequality

$$|I_{B(x, r)}^{(\theta)} f - I_{B(x, r)}^{(q)} f|^\theta \lesssim |f(y) - I_{B(x, r)}^{(q)} f|^\theta + |f(y) - I_{B(x, r)}^{(\theta)} f|^\theta$$

we average by $y \in B(x, r)$ to obtain

$$|I_{B(x, r)}^{(\theta)} f - I_{B(x, r)}^{(q)} f| \lesssim A_q(f, B(x, r)).$$

The right-hand side of the last inequality tends to 0 as $r \rightarrow +0$, which implies 2), since in view of (3.1) and (3.2) we have $I_{B(x, r)}^{(q)} f \rightarrow f^*(x)$.

To prove the assertion 3), for $q \geq 1$ we write the obvious inequality

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x, r)} |f - I_{B(x, r)}|^\theta d\mu \right)^{1/q} &\leq \left(\int_{B(x, r)} |f - I_{B(x, r)}^{(p)} f|^\theta d\mu \right)^{1/q} + \\ &+ |I_{B(x, r)}^{(p)} f - I_{B(x, r)} f| \leq \left(\int_{B(x, r)} |f - I_{B(x, r)}^{(p)} f|^q d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

and observe that by Theorem 3.1, the right-hand side of the last inequality tends to 0 as $r \rightarrow +0$, implying the assertion 3).

To prove Corollary 3.1, we need an inequality for the difference of the best approximations $I_B^{(p)} f$ and medians $m_f^\delta(B)$.

Lemma 6.1. *For any ball $B \subset X$ and any function $f \in L_{\text{loc}}^p(X)$ the following inequality holds:*

$$(6.1) \quad |m_f^\delta(B) - I_B^{(p)} f| \leq \left(\frac{1}{\delta} \int_B |f - I_B^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Proof. The result easily follows from the following elementary properties of medians m_f^δ (see [21], and also [18, Lemma 2.7]):

$$m_f^\delta(B) + a = m_{f+a}^\delta(B) \quad \text{for } a \in \mathbb{R}, \quad |m_f^\delta(B)| \leq m_{|f|}^\delta(B),$$

$$m_{|f|}^\delta(B) \leq \left(\frac{1}{\delta} \int_B |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad p > 0.$$

Indeed, using the above properties, for any ball $B \subset X$ we have

$$|m_f^\delta(B) - I_B^{(p)} f| \leq m_{|f - I_B^{(p)} f|}^\delta(B) \leq \left(\frac{1}{\delta} \int_B |f - I_B^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

implying (6.1).

Now, the result of Corollary 3.1 follows from Theorem 3.1, since by the inequality (4.2) of Lemma 4.2, and Lemmas 4.7 and 6.1 (see also property 2) of capacities from Lemma 4.9), for all $0 < \delta \leq 1/2$ we have

$$\text{Cap}_{\alpha,p} \{x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} |m_f^\delta(B(x,r)) - I_{B(x,r)}^{(p)} f| > 0\} = 0.$$

7. PROOF OF THEOREM 3.2

Let the numbers $0 < \tau < 1$ and $n \in \mathbb{N}$ be such that $2^{-n} < \tau \leq 2^{-n+1}$. Then by Lemma 4.2 (see the inequalities (4.1) and (4.2)) we have

$$|I_{B(x,\tau)}^{(p)} f - I_{B(x,2^{-n})}^{(p)} f| \lesssim \tau^\alpha \left(\int_{B(x,\tau)} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Hence, we can use Lemma 4.7 to obtain

$$\nu \{x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} |I_{B(x,r)}^{(p)} f - I_{B(x,2^{-n})}^{(p)} f| > 0\} = 0,$$

showing that it is enough to check that the sequence $\{I_{B(x,2^{-n})}^{(p)}\}$ converges ν -almost everywhere.

Let $m > n$ and $B_n = B(x, 2^{-n})$. We again use the inequalities (4.1) and (4.2), to estimate the difference $|I_{B_n}^{(p)} f - I_{B_m}^{(p)} f|$, to obtain

$$\begin{aligned} |I_{B_n}^{(p)} f - I_{B_m}^{(p)} f| &\leq \sum_{i=n}^{m-1} |I_{B_i}^{(p)} f - I_{B_{i+1}}^{(p)} f| \lesssim \sum_{i=n}^{m-1} 2^{-in} \left(\int_{B_i} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \lesssim \\ &\lesssim \sum_{i=n}^{m-1} 2^{-in} \left(\int_{B_i} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \lesssim \sum_{i=n}^{m-1} \varphi(2^{-i}) \cdot \left(h(2^{-i}) \int_{B_i} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \lesssim \\ &\lesssim M_{h,p} f(x) \sum_{i=n}^{\infty} \varphi(2^{-i}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$ at each point $x \in X$ for which $M_{h,p} f(x) < \infty$, and hence, by Lemma 4.7, the convergence is ν -almost everywhere. Theorem 3.2 is proved.

To prove Corollary 3.2 it is enough to show that the limit (3.1) exists $\mathcal{H}_1^h$ -almost everywhere, since the conditions $\mathcal{H}_1^h(E) = 0$ and $\mathcal{H}^h(E) = 0$ are equivalent. So, it remains to apply Theorem 3.2 with $\nu = \mathcal{H}_1^h$. Corollary 3.3 immediately follows from Lemma 6.1.

8. PROOF OF THEOREM 3.3

We prove the convergence for the elements of the best approximation, that is, the equality (3.8). Then the result for medians (3.9) will follow from (3.8) and Lemma 6.1.

Let E_1 be the complement of the set of points $x \in X$ satisfying the relation:

$$\lim_{r \rightarrow +0} [f(x) - I_{B(x,r)}^{(p)} f] = 0.$$

It follows from Theorem 3.2 that $\nu(E_1) = 0$.

Let $x \in X \setminus E_1$, $0 < r < 1$ and $B_j = B(x, 2^{-j}r)$. Applying the inequalities (4.1) and (4.2), from Lemma 4.2 we obtain

$$\begin{aligned} [\varphi(r)]^{-1} |f(x) - I_{B(x,r)}^{(p)} f| &\leq [\varphi(r)]^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} |I_{B_{j+1}}^{(p)} f - I_{B_j}^{(p)} f| \lesssim \\ &\lesssim [\varphi(r)]^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_p(f, B_j) \lesssim \frac{r^\alpha}{\varphi(r)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-ja} \left(\int_{B_j} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p} \lesssim \\ &\lesssim \sup_{t < r} \left(h(t) \int_{B(x,t)} |A_\alpha^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

and the last term tends to 0 as $r \rightarrow +0$, provided that

$$\lim_{r \rightarrow +0} h(r) \int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_n^{(p)} f]^p d\mu = 0.$$

Applying Lemma 4.7 with $g = \mathcal{A}_n^{(p)} f$, we obtain $\nu(E_2) = 0$, where

$$E_2 = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} h(r) \int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_n^{(p)} f]^p d\mu > 0 \right\}.$$

Thus, on the complement of the set $E = E_1 \cup E_2$ the relation (3.8) is fulfilled.

Now we prove the relation (3.10). It follows from inequality (4.3) that

$$[\varphi(r)]^{-1} \left(\int_{B(x,r)} |f - I_{B(x,r)}^{(p)} f|^q d\mu \right)^{1/q} \lesssim \left(h(r) \int_{B(x,r)} [\mathcal{A}_n^{(p)} f]^p d\mu \right)^{1/p},$$

and for $x \in X \setminus E_2$ the right-hand side of the last inequality tends to 0 as $r \rightarrow +0$.

Therefore for any $x \in X \setminus E$ we can write

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} \left(\int_{B(x,r)} |f - f(x)|^q d\mu \right)^{1/q} &\lesssim \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} |f(x) - I_{B(x,r)}^{(p)} f| + \\ &+ \lim_{r \rightarrow +0} [\varphi(r)]^{-1} \left(\int_{B(x,r)} |f - I_{B(x,r)}^{(p)} f|^q d\mu \right)^{1/q} = 0, \end{aligned}$$

and (3.10) follows. Theorem 3.3 is proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Stein, *Singular Integrals and Differential Properties of Functions*, Moscow, Mir (1973).
- [2] H. Federer, W. Ziemer, "The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p -th power summable", *Indiana Univ. Math. J.*, **22**, no. 2, 139–158 (1972).
- [3] T. Bagby, W. P. Ziemer, "Pointwise differentiability and absolute continuity", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **191**, 129–148 (1974).
- [4] C. P. Calderón, E. B. Fabes, N. M. Riviere, "Maximal smoothing operators", *Indiana Univ. Math. J.*, **23**, no. 10, 889–898 (1974).
- [5] N. G. Meyers, "Taylor expansion of Bessel potentials", *Indiana Univ. Math. J.*, **23**, no. 11, 1043–1049 (1974).
- [6] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1996).
- [7] P. Hajlasz, "Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces", *Potential Anal.* **5**, no. 4, 403–415 (1996).
- [8] P. Hajlasz, J. Kinnunen, "Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces", *Rev. Mat. Iberoam.* **14**, no. 3, 601–622 (1998).
- [9] J. Kinnunen, V. Latvala, "Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces", *Rev. Mat. Iberoam.* **18**, no. 3, 685–700 (2002).
- [10] M. A. Prokhorovich, "Capacities and Lebesgue points for fractional Sobolev classes on metric spaces with measure", *Vestn. NAN Belarusi*, no. 1, 19–23 (2006).
- [11] M. A. Prokhorovich, "Hausdorff Dimension of Lebesgue Sets for W_α^p Classes on Metric Spaces", *Mat. Zametki*, **82**, no. 1, 99–107 (2007).
- [12] M. A. Prokhorovich, "Hausdorff Measures and Lebesgue Points for the Sobolev Classes W_α^p , $\alpha > 0$, on Spaces of Homogeneous Type", *Mat. Zametki*, **85**, no. 4, 616–621 (2009).

- [13] J. Kinnunen, H. Tuominen, "Pointwise behaviour of $M^{1,1}$ Sobolev functions", *Math. Zeit.* **257**, no. 3, 613 – 630 (2007).
- [14] V. G. Krotov, M. A. Prokhorovich, "The Rate of Convergence of Steklov Means on Metric Measure Spaces and Hausdorff Dimension", *Mat. Zametki*, **89**, no. 1, 145 – 148 (2011).
- [15] V. G. Krotov, A. I. Porabkovich, "Estimates of L^p -Oscillations of Functions for $p > 0$ ", *Mat. Zametki*, **97**, no. 3, 407 – 420 (2015).
- [16] J. Hu, "A note on Hajlasz-I-Sobolev spaces on fractals", *J. Math. Anal. Appl.* **280**, no. 1, 91 – 101 (2003).
- [17] D. Yang, "New characterization of Hajlasz Sobolev spaces on metric spaces", *Sci. China (ser. A)* **46**, no. 5, 675 – 689 (2003).
- [18] T. Heikkinen, P. Koskela, H. Tuominen, "Approximation and quasicontinuity of Besov and Triebel-Lizorkin functions", preprint 2015, <http://arxiv.org/abs/1505.05680>.
- [19] T. Heikkinen, H. Tuominen, "Approximation by Holder functions in Besov and Triebel-Lizorkin spaces", preprint 2015, <http://arxiv.org/abs/1504.02585>.
- [20] V. G. Krotov, "Weighted L^p -inequalities for sharp-maximal functions on metric spaces with measure", *Izv. NAN Armenii, Mat.* **41**, no. 2, 25 – 42 (2006).
- [21] J. Poelhuis, A. Torchinsky, "Medians, continuity, and vanishing oscillation", *Studia Math.* **213**, no. 3, 227 – 242 (2012).
- [22] N. Karak, "Generalized Lebesgue points for Sobolev functions", preprint 2015, <http://arxiv.org/abs/1506.08026>.
- [23] A. Gogatishvili, P. Koskela, Y. Zhou, "Characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin Spaces on Metric Measure Spaces", *Forum Math.* **25**, no. 4, 787 – 819 (2013).
- [24] V. G. Krotov, "A quantitative form of Lusin's C -property", *Ukr. Mat. J.*, **62**, no. 3, 388 – 396 (2010).
- [25] V. G. Krotov, "Criteria for compactness in L^p -spaces, $p \geq 0$ ", *Mat. Sb.*, **203**, no. 7, 129 – 148 (2012).
- [26] R. Coifman, G. Weiss, "Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes", *Lecture Notes in Math.* **242**, Springer-Verlag: Berlin-New York (1971).
- [27] D. Deng, Y. Han, *Harmonic Analysis on Spaces of Homogeneous Type*, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg (2009).

Поступила 3 февраля 2016

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ПЛОСКОСТИ С ОДНОЙ ВЕРШИНОЙ АНИЗОТРОПНОСТИ

Г. А. КАРАПЕТЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет

E-mail: Garik_Karapetyan@yahoo.com

Аннотация. В данной статье получены подходящие интегральные представления для функций из Соболевских мультианизотропных пространств и применены для получения теорем вложения для этих пространств.

MSC2010 number: 12E10

Ключевые слова: интегральное представление; теорема вложения; соболевское мультианизотропное пространство.

ВВЕДЕНИЕ

Теоремы вложения функциональных пространств для дифференцируемых функций возникла в работах С.Л. Соболева [1], [2], где с помощью проекционного оператора доказывались теоремы вложения для изотропных функциональных пространств. В дальнейшем, исходя из различных вопросов физики и техники, изучались более общие пространства, которые назывались анизотропными пространствами С. Л. Соболева. Для таких пространств были получены интегральные представления (см., например, [3] – [7]). Все эти результаты и истории вопроса можно найти в книге [8]. В дальнейшем, применяя полученные интегральные представления, были доказаны различные теоремы вложения для этих пространств (см. например, [4] – [7], [9] – [11] и монографию [8]). В дальнейшем, когда Л. Хермандер [12] ввел класс гипоеллиптических операторов, стали изучать мультианизотропные пространства С. Л. Соболева. Долгое время не удавалось получить подходящее интегральное представление для функций из этих классов. В данной работе получено такое интегральное представление для функций из мультианизотропных пространств, с применением которого получены теоремы вложения. При получении соответствующего интегрального представления, используются ранее полученные интегральные представления [13] и [14].

1. ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть R^2 — двумерное пространство, Z_+^2 множество двумерных мультииндексов, т.е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$, если α_1, α_2 целые неотрицательные числа. Для $\xi, \eta \in R^2, \alpha \in Z_+^2, t > 0$ обозначим через $t^\alpha = (t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2})$, $(\xi, \eta) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$, $D_t = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$ обобщенная соболевская производная.

Для конечного набора мультииндексов через H обозначим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки данного набора. H называется вполне правильным, если а) содержит точки в начале координат и во всех координатных осях. б) внешние нормали всех одномерных некоординатных сторон имеют положительные координаты.

Пусть H вполне правильный многоугольник. Через $H_i^1, i = 1, \dots, M$ обозначим некоординатные стороны многоугольника H . Пусть $\mu^i, i = 1, \dots, M$ такая внешняя нормаль стороны H_i^1 , что уравнение данной стороны задается формулой $(\alpha; \mu^i) = 1, i = 1, \dots, M$. Обозначим также $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2})$.

Известно (см. [15]), что если оператор $P(D)$ с вещественными коэффициентами гипоеллиптичен, то характеристический многогранник данного оператора вполне правильный, и вершины имеют четные координаты. Для таких операторов в работе [14] было получено интегральное представление через гипоеллиптический оператор. В настоящей работе будем применять идеи работы [14].

Будем рассматривать случай, когда многоугольник H имеет одну вершину анизотропности, т.е. вершинами многоугольника H являются точки $(0; 0); (l_1; 0); (0; l_2)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$. H_1^1 сторона соединяющая точки $(l_1; 0); \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и задается формулой $(\mu^1; \beta) = 1$, H_2^1 сторона проходящая через точки $(0; l_2); \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и задается формулой $(\mu^2; \beta) = 1$.

Для $\nu > 0$ и натурального k обозначим

$$(1.1) \quad P(\nu; \xi) = P(\nu; \xi_1, \xi_2) = (\nu \xi_1^{l_1})^{2k} + (\nu \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2})^{2k} + (\nu \xi_2^{l_2})^{2k}$$

$$(1.2) \quad G_0(\xi; \nu) = e^{-P(\nu; \xi)}, \quad G_{1,j} = 2k(\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-P(\nu; \xi)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\alpha^1 = (l_1, 0), \alpha^2 = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha^3 = (0, l_1)$. Очевидно, что для любого значения параметра $\nu > 0; G_0, G_{1,j} \in S, j = 1, 2, 3$, где $S = S(R^2)$ множество быстро убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций. Далее обозначим через $\tilde{G}_0(t; \nu), \tilde{G}_{1,j}(t, \nu), j = 1, 2, 3$ преобразования Фурье соответственно

функций $G_0(\xi; \nu); G_{1,j}(\xi; \nu)$, т.е.

$$(1.3) \quad \hat{G}_{1,j}(t; \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(t;\xi)} G_{1,j}(\xi; \nu) d\xi, j = 1, 2, 3$$

Как известно, преобразование Фурье переводит S на S , т.е. $\hat{G}_0(t; \nu); \hat{G}_{1,j}(t; \nu) \in S$. Изучим свойства $G_0, G_{1,j}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть θ и σ такие числа, что $\theta \cdot \mu_1^2 = 1$; $\sigma \cdot \mu_2^2 = 1$, а N такое натуральное число, что $N\theta$ и $N\sigma$ четные. Тогда для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ и любого такого числа N существуют постоянные числа a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) такие, что для любого ν : $0 < \nu < 1$ имеют место неравенства

$$(1.4) \quad |D^m \hat{G}_{1,j}(t; \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m; \mu^i))} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})} (a_1 |\ln \nu| + a_2),$$

при $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$(1.5) \quad |D^m \hat{G}_{1,j}(t; \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m; \mu^i))} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{N\sigma})} (b_1 |\ln \nu| + b_2),$$

при $\alpha_1 > \alpha_2$,

$$(1.6) \quad |D^m \hat{G}_{1,j}(t; \nu)| \leq \nu^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m; \mu^i))} (c_1 |\ln \nu| + c_2) \frac{1}{\left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1^{N\theta}\right)\right) \left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2^{N\sigma}\right)\right)},$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Доказательство. Сначала для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ изучим поведение интеграла

$$\int_{R^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi_1 d\xi_2$$

относительно $\nu \in (0; 1)$.

Для этого достаточно изучить интеграл

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-((\nu \xi_1^2)^{2\theta} + (\nu \xi_2^2)^{2\sigma} + (\nu \xi_1^2 \cdot \xi_2^{2\sigma})^{2\alpha})} d\xi_1 d\xi_2.$$

Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$ интеграл I примет вид

$$\begin{aligned} I &= \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k_1+1} - \eta_1^{2k_1+1} \eta_2^{2k_2+1} - \nu^{2k_1+1-2_2-\mu_2^1} \eta_1^{2k_1+1} \eta_2^{2k_2+1}} d\eta_1 d\eta_2 \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - m_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2k_1+1}} (\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2)^{m_2} e^{-(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2)^{2k_2+1}} \times \\ &\quad \times d(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2) d\eta_1 \leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty t^{m_2} e^{-t^{2k_2+1}} dt \int_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - m_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2k_1+1}} d\eta_1 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}, \end{aligned}$$

т.к. $m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - m_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > -1$.

Если же $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$ аналогичным образом получим, что $I \leq C \nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))}$. Изучим случай, когда $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_1+1}{m_2+1}$.

Так как

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{\epsilon_1}; \frac{l_1 - \alpha_1}{\alpha_2 \cdot l_1} \right),$$

$$\mu^2 = \left(\frac{l_2 - \alpha_2}{\alpha_1 \cdot l_2}; \frac{1}{l_2} \right)$$

и $\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} > 1$, то $\mu_1^1 > \mu_1^2$; $\mu_2^1 < \mu_2^2$. Разделим I на следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\nu^{-\mu_1^1}} d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^1}} d\xi_2 + \int_0^{\nu^{-\mu_1^1}} d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^1}}^\infty d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^1}}^\infty d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^1}} d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^1}}^\infty d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^1}}^\infty d\xi_2 = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

В I_1 произведя замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, получим

$$I_1 \leq \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^1 \int_0^1 \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k_1+1} - \eta_1^{2k_1+1} \eta_2^{2k_2+1}} d\eta_1 d\eta_2 \leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}$$

В I_2 произведя замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$, имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} \int_0^{\nu^{\mu_1^2 - \mu_1^1}} \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^{\infty} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_2^{2k_2}} e^{-\left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{2k\alpha_1}} d\eta_1 d\eta_2 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} \int_0^{\infty} \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^{\infty} e^{-\eta_2^{2k_2}} e^{-\left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{2k\alpha_1}} \left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{m_1} \times \\ &\times \eta_2^{m_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m_1 + 1)} d\left(\eta_1 \eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right) d\eta_2 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} \int_0^{\infty} t^{m_1} e^{-t^{2k\alpha_1}} dt \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^{\infty} \frac{e^{-\eta_2^{2k_2}}}{\eta_2} d\eta_2 \leq \\ &\leq \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} (c_1 |\ln \nu| + c_2) \end{aligned}$$

т.к. $m_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m_1 + 1) = -1$, а $\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1} < 1$.

В I_3 после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \int_1^{\infty} \int_0^1 e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right)^{2k\alpha_2}} d\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right) \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right)^{m_2} e^{-\eta_1^{2k_1}} \times \\ &\times \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} d\eta_1 \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_2}} t^{m_2} dt \int_1^{\infty} \frac{e^{-\eta_1^{2k_1}}}{\eta_1} d\eta_1 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))}. \end{aligned}$$

Наконец, для I_4 сделав преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$ получим

$$\begin{aligned} I_4 &= \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right)^{m_2} e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right)^{2k\alpha_2}} \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2k_1}} \times \\ &\times d\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \eta_2\right) d\eta_1 \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \int_0^{\infty} t^{m_2} e^{-t^{2k\alpha_2}} dt \int_1^{\infty} \frac{e^{-\eta_1^{2k_1}}}{\eta_1} d\eta_1 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \end{aligned}$$

Из полученных оценок для I_k , $k = 1, 2, 3, 4$ с некоторыми постоянными c_1, c_2 имеет место неравенство

$$I \leq \nu^{-\max_{i=1,2} (|\mu^i| + (m; \mu^i))} (c_1 |\ln \nu| + c_2).$$

Применяя полученную оценку докажем лемму 1.1. Рассмотрим $G_{1,1}^*(t; \nu)$. Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ имеем

$$D^m G_{1,1}^*(t; \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-i(t, \xi)} e^{-((\nu \xi_1^{l_1})^{2k} + (\nu \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2})^{2k} + (\nu \xi_2^{l_2})^{2k})} 2k (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} d\xi_1 d\xi_2.$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Если k такое число, что $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{m_1 + (2k-1)l_1}{m_2}$, то производя замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, имеем

$$\begin{aligned} |D^m G_{1,1}^*(t; \nu)| &\leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1 + (2k-1)l_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1} \eta_2^{2k\alpha_2}} d\eta_1 d\eta_2 \leq \\ &\leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))} \end{aligned}$$

Случай $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \geq \frac{m_1 + (2k-1)l_1}{m_2}$ оценивается как и выше при оценке I.

Оценим $\nu^{-N} t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} D^m G_{1,1}^*(t; \nu)$. По свойству преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} \nu^{-N} t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} D^m G_{1,1}^*(t; \nu) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \nu^{-N} D_{\xi_1}^{N\alpha_1} D_{\xi_2}^{N\alpha_2} e^{-i(t, \xi)} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

которое после интегрирования по частям сводится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \nu^{-N} e^{-i(t, \xi)} D_{\xi_1}^{N\alpha_1} D_{\xi_2}^{N\alpha_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2,$$

и вопрос сводится к оценке интеграла

$$\nu^{-N} \int_{R^2} \left| D_{\xi_1}^{N\alpha_1} D_{\xi_2}^{N\alpha_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \right) \right| d\xi_1 d\xi_2.$$

Для производной функции $\Phi(\xi) e^{P(\nu, \xi)}$ имеет место формула

$$D_\xi^\alpha (\Phi(\xi) e^{P(\nu, \xi)}) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} C_{|\alpha|}^{|\beta|} D^\beta \Phi(\xi) \sum_{\sigma^1 + \dots + \sigma^{|\gamma|} = \gamma} e^{P(\nu, \xi)} \prod_{j=1}^{|\gamma|} D^{\sigma^j} (P(\nu, \xi)),$$

где $C_{|\alpha|}^{|\beta|}$ некоторые биномиальные коэффициенты, а произведение берется для тех σ^j , для которых $|\sigma^j| > 0$. Следовательно, нужно оценить следующие интегралы

$$\begin{aligned} (1.7) \quad \nu^{-N} \sum_{\beta + \gamma = N\alpha} C_{|N\alpha|}^{|\beta|} \int_0^\infty \int_0^\infty D_\xi^\beta \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} \right) \\ \sum_{\sigma^1 + \dots + \sigma^{|\gamma|} = \gamma} e^{P(\nu, \xi)} \prod_{j=1}^{|\gamma|} D_{\xi}^{\sigma^j} \left(\sum_{r=1}^3 (\nu \xi^{n_r})^{2k} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим суммы в формуле (1.8). Степень ξ_1 -го в данном слагаемом обозначим ρ_1 , а степень ξ_2 -го - ρ_2 . Если а) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, б) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$, в) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, как и выше, разделим интеграл на отдельные слагаемые и в каждом сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$ или $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$. В каждом из случаев вычислим степень ν . (Заметим, что если $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$, то $D_\xi^\beta = \nu^{(\mu^1, \beta)} D_\eta^\beta$).

В случае а) имеем

$$\nu^{-N + (N\alpha; \mu^1) + (2k-1)(1-l_1 \cdot \mu^1)} \prod_{r=1}^3 \nu^{2k(1 - (\alpha^r; \mu^1))} \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))},$$

так $(N\alpha; \mu^1) = N$, $l_1 \cdot \mu^1 = 1$; $1 - (\alpha^r; \mu^1) \geq 0$ то имеем, что степень ν больше или равна чем $-(|\mu^1| + (m; \mu^1))$, следовательно, в случае а) имеем, что

$$\nu^{-N} t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} |D^m \hat{G}_{1,1}(t; \nu)| \leq C \nu^{-\max_{1 \leq r \leq 3} (|\mu^r| + (m; \mu^r))}$$

В случае б) сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$, тогда в степени ν все μ^1 заменятся на μ^2 и так как $l_1 \cdot \mu_1^2 < 1$, $(N\alpha; \mu^2) = N$, $1 - (\alpha^r; \mu^2) \geq 0$, то опять получается аналог случая а).

В случае в) после разделения интеграла на отдельные слагаемые, как и выше, имеем, что для некоторых постоянных a_1 и a_2 имеет место неравенство

$$(1.8) \quad |D^m \hat{G}_{1,1}(t; \nu)| \leq \nu^{-\max_{1 \leq r \leq 3} (|\mu^r| + (m; \mu^r))} (a_1 |\ln \nu| + a_2)$$

Оценка выражения $\nu^{-N} t_1^{N\theta} \hat{G}_{1,1}(t; \nu)$ производится аналогично, если заметить, что $N\theta \cdot \mu_1^1 - N > 0$. В итоге имеем, что для некоторых a_1 и a_2

$$\nu^{-N} t_1^{N\theta} |D^m \hat{G}_{1,1}(t; \nu)| \leq \nu^{-\max_{1 \leq r \leq 3} (|\mu^r| + (m; \mu^r))} (a_1 |\ln \nu| + a_2),$$

что и доказывает оценку (1.5). Неравенство (1.6) доказывается аналогично. Докажем неравенство (1.7). Для этого оценим

$$\begin{aligned} I &= \left(1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1)^{N\theta}\right) \left(1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2)^{N\sigma}\right) D^m \hat{G}_{1,1}(t; \nu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(t; \xi)} \left(1 + \nu^{-N} D_1^{N\theta} + \nu^{-N} D_2^{N\sigma} + \nu^{-2N} (D_1 D_2)^{2N\alpha} + \nu^{-2N} (D_1 D_2)^{N\alpha} D_1^{N\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \nu^{-2N} (D_1 D_2)^{N\alpha} D_2^{N\sigma} + \nu^{-2N} D_1^{N\theta} D_2^{N\sigma}\right) \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \left(\nu \xi_1^{l_1}\right)^{2k} e^{-P(\nu; \xi)}\right) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Здесь каждое слагаемое оценивается как и в предыдущем случае, кроме последних трех слагаемых, где при вычислении степени ν нужно учитывать, что если делается преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1}$, то $N\theta \cdot \mu_1^1 > N$, $N\sigma \cdot \mu_2^1 = N$, а при преобразовании $\xi = \nu^{-\mu^2}$ $N\theta \cdot \mu_2^1 = N$, $N\sigma \cdot \mu_2^1 > N$ и во всех слагаемых степень ν будет

больше или равно чем $-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m; \mu^i))$, следовательно, для некоторых постоянных c_1, c_2 имеем оценку

$$I \leq C\nu^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m; \mu^i))} (c_1 \ln |\nu| + c_2).$$

□

Замечание 1.1. В неравенствах (1.5) – (1.7) множитель $|\ln \nu|$ появляется только в тех случаях, когда в формуле (1.8) есть слагаемое, для которого $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$. В остальных случаях неравенства (1.5)–(1.7) справедливы без множителя $|\ln \nu|$.

Лемма 1.2. Пусть как и в лемме 1.1 θ и σ такие числа, что $\theta \cdot \mu_1^2 = 1$; $\sigma \cdot \mu_2^2 = 1$, а N такое натуральное число, что $N\theta$ и $N\sigma$ четные. Тогда, существуют постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что для любого ν : $0 < \nu < 1$ имеют место оценки

$$(1.9) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})} \leq C_1 \nu^{|\mu^2|}, \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2$$

$$(1.10) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{N\sigma})} \leq C_2 \nu^{|\mu^1|}, \quad \text{при } \alpha_1 > \alpha_2$$

$$(1.11) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt_1 dt_2}{(1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1^{N\theta})) (1 + \nu^{-N} ((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2^{N\sigma}))} \leq \nu^{|\mu^1|} (C_3 |\ln \nu| + C_4), \quad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

Доказательство. Достаточно оценить интегралы от нуля до бесконечности.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$, обозначим через

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})}.$$

После преобразования $\tau = \nu^{\mu^2} t$, имеем

$$I = \nu^{|\mu^2|} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\tau_1 d\tau_2}{1 + \tau_1^{N\alpha_1} \tau_2^{N\alpha_2} + \tau_1^{N\theta}} = \nu^{|\mu^2|} \int_0^\infty \frac{d\tau_1}{\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}} \int_0^\infty \frac{d\left(\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \tau_2\right)}{1 + \left(\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \tau_2\right)^{N\alpha_2} + \tau_1^{N\theta}}$$

Обозначим $\eta_1 = \tau_1, \eta_2 = \tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \tau_2$, имеем

$$I \leq C\nu^{|\mu^2|} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\eta_1 d\eta_2}{\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} (1 + \eta_2^{N\alpha_2} + \eta_1^{N\theta})}.$$

Т.к. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$, то интеграл сходится и $I \leq C\nu^{|\mu^1|}$.

Аналогично доказывается неравенство (1.11). Докажем неравенство (1.12). Так как $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то $|\mu^1| = |\mu^2|$. $\mu_1^1 > \mu_1^2$, следовательно $\mu_2^1 < \mu_2^2$, и интеграл разделим на следующие слагаемые

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1^{N\theta}\right)\right) \left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2^{N\sigma}\right)\right)} = \\ &= \int_0^{\nu^{\mu_1^1}} dt_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^2}} dt_2 + \int_{\nu^{\mu_1^1}}^\infty dt_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^2}} dt_2 + \int_0^{\nu^{\mu_1^1}} dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^2}}^\infty dt_2 + \int_{\nu^{\mu_1^1}}^\infty dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^2}}^\infty dt_2 = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Теперь оценим каждое слагаемое по отдельности.

В I_1 произведя замену переменных $t = \nu^{\mu^2} \eta$, имеем

$$I_1 \leq C\nu^{|\mu^2|} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \leq C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

После преобразования $t = \nu^{\mu^2} \eta$ I_2 примет вид

$$I_2 = \nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty d\eta_1 \int_0^1 \frac{d\eta_2}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \leq C\nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty \frac{d\eta_1}{1 + \eta_1^{N\theta}} \leq C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

Для I_3 сделаем преобразование $t = \nu^{\mu^1} \eta$, имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_1^1 - \mu_1^2}}^\infty d\eta_2 \int_0^{\nu^{\mu_2^1 - \mu_2^2}} \frac{d\eta_1}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}} \leq \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_1^1 - \mu_1^2}}^\infty \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{d(\eta_1 \eta_2)}{1 + (\eta_1 \eta_2)^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}} \\ &\leq \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_1^1 - \mu_1^2}}^\infty \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\alpha}} + \nu^{|\mu^1|} \int_1^\infty \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}} = \nu^{|\mu^1|} (c_1 |\ln \nu| + c_2). \end{aligned}$$

В I_4 сделаем преобразование $t = \nu^{\mu^2} \eta$. Тогда

$$I_4 \leq C\nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + \eta_2^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \leq C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

Лемма 1.2 доказана. $\square$

Лемма 1.3. Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ и любого натурального числа N существуют постоянные числа C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ такие, что для любого

$\nu > 1$ имеют место неравенства

(1.12)

$$\left| D^m G_{1,j}^*(t; \nu) \right| \leq C_1 \nu^{-\min_{i=1,2} (|\mu^i| + (m; \mu^i))} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1})}, \text{ при } \alpha_1 < \alpha_2$$

(1.13)

$$\left| D^m G_{1,j}^*(t; \nu) \right| \leq C_2 \nu^{-\min_{i=1,2} (|\mu^i| + (m; \mu^i))} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2})}, \text{ при } \alpha_1 > \alpha_2$$

(1.14)

$$\left| D^m G_{1,j}^*(t; \nu) \right| \leq C_3 \nu^{-\min_{i=1,2} (|\mu^i| + (m; \mu^i))} \times \frac{1}{\left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1^{Nl_1} \right)\right) \left(1 + \nu^{-N} \left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2^{Nl_2} \right)\right)}, \text{ при } \alpha_1 = \alpha_2$$

$$(1.15) \quad \left| D^m G_{1,j}^*(t; \nu) \right| \leq C_4 \nu^{-(|\lambda| + (m; \lambda))} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (t_1^{Nl_1} + t_2^{Nl_2})}$$

Доказательство. Как и в лемме 1.1 для получения оценок (1.13)-(1.15), например для $G_{1,1}^*(t; \nu)$, нужно оценить интеграл

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \left(\nu \xi_1^{l_1} \right)^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi_1 d\xi_2.$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1} \eta$ и из того, что $l_1 \cdot \mu_1^1 = 1$, имеем

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))}.$$

Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^2} \eta$ имеем

$$I = \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)} \eta_1^{l_1} \right)^{2k-1} e^{-\eta_2^{2k\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1} \eta_2^{2k\alpha_2}} \times \\ \times e^{-\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)} \eta_1^{l_1} \right)^{2k}} d\eta_1 d\eta_2.$$

Функция $\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)} \eta_1^{l_1} \right)^{2k-1} \cdot e^{-\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)} \eta_1^{l_1} \right)^{2k}}$ как функция от двух переменных равномерно ограничено по ν и по η_1 . Следовательно, имеем оценку

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_2^{2k\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1} \eta_2^{2k\alpha_2}} d\eta_1 d\eta_2 \leq C \nu^{-(|\mu^2| + (m; \mu^2))},$$

так как $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$. Случай $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_1+1}{m_2+1}$ оценивается аналогично.

Для оценки $\nu^{-N} t_1^{N\alpha_1} t_1^{N\alpha_2} G_{1,1}(t; \nu)$ нужно исследовать интеграл

$$\nu^{-N} \int_0^\infty \int_0^\infty D_1^{N\alpha_1} D_2^{N\alpha_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Как и при доказательстве леммы 1.1, применяя формулу производной функции $\Phi(\xi) e^{P(\xi)}$ получим, что нужно оценить интегралы типа (1.8). Обозначим степень ξ_1 через ρ_1 , а степень ξ_2 - ρ_2 .

Если а) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{\mu^1} \eta$, имеем

$$\nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1)) - N} \int_0^\infty \int_0^\infty \nu^N D_\eta^\beta \left(\eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} 2k (\nu^{1-l_1 \mu_1^1} \eta_1^{l_1})^{2k-1} \right) \cdot \\ \sum_{\sigma^1 + \dots + \sigma^3 = \gamma} e^{-\eta_1^{2k l_1}} e^{-\eta_1^{2k l_1} \eta_2^{2k l_2}} e^{-\left(\nu^{1-l_1 \mu_1^1} \eta_1^{l_1} \right)^{2k}} \prod_{j=1}^{|\gamma|} D_\eta^{\sigma_j} \sum_{r=1}^3 \left(\nu^{1-(\alpha^r, \mu^1)} \eta^{\alpha^r} \right)^{2k} d\eta_1 d\eta_2$$

Выделим те множители $\nu^{1-(\alpha^r, \mu^1)} \eta^{\alpha^r}$, для которых $(\alpha^r, \mu^1) < 1$ (т.е. это $\alpha_3 = (0; l_2)$). Для данного множителя имеем выражение: $\left(\nu^{1-l_1 \mu_1^1} \eta_1^{l_1} \right)^{2k} e^{-\left(\nu^{1-l_1 \mu_1^1} \eta_1^{l_1} \right)^{2k}}$, которое равномерно ограничено и, следовательно, в этом случае, для интеграла I имеем:

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^1| + (m; \mu^1))}.$$

Случай $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$ оцениваются аналогично. Опсним теперь $\nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G_{1,1}(t; \nu)$. Для этого нужно оценить интеграл

$$\nu^{-N} \int_0^\infty \int_0^\infty D_1^{Nl_1} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} (\nu \xi_1^{l_1})^{2k-1} e^{-P(\nu, \xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь, аналогично, учитывая то, что если делается преобразование $\xi = \nu^{\mu^2} \eta$, то в степени ν появится показатель $-N + Nl_1 - \mu_1^2$, по так как $Nl_1 - \mu_1^2 < N$ и $\nu > 1$, то степень $\nu^{-N + Nl_1 - \mu_1^2}$ можно оценить через единицу. Остальные рассуждения аналогичны. Неравенства (1.14) и (1.15) доказываются аналогично. Докажем неравенство (1.16). После преобразования $\xi = \nu^{-\lambda} \eta$ имеем, что $I \leq C \nu^{-(|\lambda| + (m; \lambda))}$. При оценке $\nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G_{1,1}(t; \nu)$ в степени ν кроме $-(|\lambda| + (m; \lambda))$ появляются выражения типа $(1 - (\alpha^r; \lambda)) 2k$ ($r = 1, 2, 3$), которые неположительны ($(\alpha^r; \lambda) \geq 1$) и так как $\nu > 1$, то $\nu^{(1 - (\alpha^r; \lambda)) 2k} \leq 1$. В итоге имеем опять оценку

$$\left| \nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G_{1,1}(t; \nu) \right| \leq C \nu^{-(|\lambda| + (m; \lambda))}.$$

□

Аналогично, как и в лемме 1.2, в случае $\nu > 1$ имеем:

Лемма 1.4. Для произвольного натурального числа N и мультииндекса $m = (m_1; m_2)$ существуют постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что для любого $\nu > 1$

$$(1.16) \quad \int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1})} \leq C_1 \nu^{|m|}, \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2,$$

$$(1.17) \quad \int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2})} \leq C_2 \nu^{|m|}, \quad \text{при } \alpha_1 > \alpha_2,$$

$$(1.18) \quad \int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{(1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1})) (1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2}))} \leq C_3 \nu^{|m|},$$

при $\alpha_1 = \alpha_2$.

$$(1.19) \quad \int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N\lambda_1} + t_2^{N\lambda_2})} \leq C_4 \nu^{|m|}.$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству леммы 1.2. □

2. УСРЕДНЕНИЕ ФУНКЦИИ С ЯДРОМ, ПОРОЖДЕННЫМ НАБОРОМ МУЛЬТИИНДЕКСОВ

Для любой функции U рассмотрим усреднение с ядром усреднения $\bar{G}_0(t; \nu)$

$$(2.1) \quad U_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} U(t) \bar{G}_0(t - x; \nu) dt$$

Функция $U_\nu(x)$ обладает следующим классическим свойством, характерным для усреднения.

Лемма 2.1. Пусть $1 < p < \infty$, тогда если $f \in L_p(R^2)$, то $f_\nu \in L_p(R^2)$ и $\|f_\nu\| \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\nu > 1$. Так как $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $L_p(R^2)$, то для произвольного $\epsilon > 0$ существует $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(R^2)$ такая, что $\|f - \phi_\epsilon\|_{L_p(R^2)} < \epsilon$.

Применяя неравенство Юнга, оценим $\|f_\nu\|_{L_p}$. Имеем

$$\begin{aligned}\|f_\nu\|_{L_p} &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \hat{G}_0(t-x; \nu) f(t) dt \right\|_{L_p} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{R^2} \hat{G}_0(t-x; \nu) (f(t) - \phi_\epsilon(t)) dt \right\|_{L_p} + \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{R^2} \hat{G}_0(t-x; \nu) \phi_\epsilon(t) dt \right\|_{L_p} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{G}_0\|_{L_1} \|f - \phi_\epsilon\|_{L_p} + \frac{1}{2\pi} \|\phi_\epsilon\|_{L_1} \|\hat{G}_0(t; \nu)\|_{L_p} = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Оценим I_1 . Из оценки (1.20) при $m=0$, $N>2$ имеем, что

$$\int_{R^2} |\hat{G}_0(t; \nu)| dt \leq C \nu^{-|\lambda|} \int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N} (t_1^{N_{11}} + t_2^{N_{12}})} \leq C_1,$$

которая получится после замены в интеграле переменных $t = \nu^\lambda \eta$. Следовательно, $I_1 \leq C_1 \epsilon$.

Оценим I_2 . Опять применяя неравенство (1.20) имеем

$$\begin{aligned}I_2 &\leq C_\epsilon \nu^{-|\lambda|} \left(\int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{(1 + \nu^{-N} (t_1^{N_{11}} + t_2^{N_{12}}))^p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq C_\epsilon \nu^{-|\lambda| + \frac{|\lambda|}{p}} \left(\int_{R^2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{(1 + \eta_1^{N_{11}} + \eta_2^{N_{12}})^p} \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Т. к. $p > 1$, и интеграл сходится, то I_2 стремится к нулю, когда $\nu \rightarrow +\infty$. $\square$

Лемма 2.2. Если $f \in L_p(R^2)$, $1 \leq p < \infty$, то $f_\nu \in L_p(R^2)$ и $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|f_\nu - f\|_{L_p(R^2)} = 0$.

Доказательство. Так как $\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \hat{G}_0(t; \nu) dt = G_0(0; \nu) = 1$, то $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} f(x) \times \times \hat{G}_0(t; \nu) dt$ и для разности $f_\nu - f$ имеем

$$f_\nu(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} (f(x+\tau) - f(x)) \hat{G}_0(\tau; \nu) d\tau.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского получим:

$$\|f_\nu - f\|_{L_p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_{L_p} |\hat{G}_0(\tau; \nu)| d\tau.$$

Как и при доказательстве леммы 1.1, можно показать, что для любого натурального числа N существует такое число $C > 0$, что

$$(2.2) \quad |\hat{G}_0(\tau; \nu)| \leq C \nu^{-|\lambda| + (1 - (a, \lambda))2k} \frac{1}{1 + \nu^{-N} (\tau_1^{N_{11}} + \tau_2^{N_{12}})}$$

Пусть $M > 0$ произвольный параметр, $\rho_\lambda(x) = (x_1^{2l_1} + x_2^{2l_2})^{\frac{1}{2}}$. Последний интеграл представим в виде

$$\begin{aligned} \|f_\nu - f\|_{L_\nu} &\leq C \int_{\rho_\lambda(\tau) \leq \nu M} \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_{L_\nu} |G_0(\tau; \nu)| d\tau \\ &+ C \int_{\rho_\lambda(\tau) \geq \nu M} \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_{L_\nu} |G_0(\tau; \nu)| d\tau = A_1(\nu) + A_2(\nu) \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (2.2), для $A_2(\nu)$ имеем

$$A_2(\nu) \leq 2C \|f\|_{L_{p(R^2)}} \nu^{-|\lambda| + (1 - (\alpha, \lambda))2k} \int_{\rho_\lambda(\tau) \geq \nu M} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{1 + \nu^{-N} (\tau_1^{Nl_1} + \tau_2^{Nl_2})},$$

который после преобразования $\tau = \nu^\lambda \eta$ примет вид

$$A_2(\nu) \leq 2C \|f\|_{L_{p(R^2)}} \nu^{(1 - (\alpha, \lambda))2k} \int_{\rho_\lambda(\eta) \geq M} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + \eta_1^{Nl_1} + \eta_2^{Nl_2}}.$$

Пусть $M = \nu^{-1+\gamma}$, где $\gamma \in (0, 1)$ пока произвольное число. Оценим последний интеграл с помощью λ сферического преобразования (см. [8]), т. е. обозначим $\eta_1 = r^{\lambda_1} \omega_1$, $\eta_2 = r^{\lambda_2} \omega_2$, где $\omega_1^{2l_1} + \omega_2^{2l_2} = 1$. Если $a = \min(\omega_1^{2Nl_1} + \omega_2^{2Nl_2})$ на многообразии $\omega_1^{2l_1} + \omega_2^{2l_2} = 1$, то для $A_2(\nu)$ имеем

$$\begin{aligned} A_2(\nu) &\leq 2C \|f\|_{L_p(R^1)} \nu^{(1 - (\alpha, \lambda))2k} \int_{\nu^{-1+\gamma}}^{\infty} \int_{\rho_\lambda(\omega)=1} \frac{r^{|\lambda|-1} dr}{1 + r^N a} \left(\sum_{i=1}^2 \lambda_i^2 \omega_i^2 \right) d\omega \\ &\leq \int_{\nu^{-1+\gamma}}^{\infty} r^{|\lambda|-1-N} dr C \nu^{(1 - (\alpha, \lambda))2k} \|f\|_{L_p(R^2)} = C \nu^{(N-|\lambda|)(1-\gamma) + (1 - (\alpha, \lambda))2k} \|f\|_{L_p(R^2)} \end{aligned}$$

Пусть N такое число, что показатель ν положительный, тогда $A_2(\nu) \rightarrow 0$, когда $\nu \rightarrow 0$.

Оценим $A_1(\nu)$. Применяя лемму 1.1 для случая $\alpha_1 < \alpha_2$, $m = 0$, $N = 0$, имеем

$$A_1(\nu) \leq C \sup_{\rho_\lambda(\eta) \leq \nu^\gamma} \|f(\cdot + \eta) - f(\cdot)\|_{L_p(R^2)} \nu^{-\max_{i=1,2} |\mu^i|} \int_{\rho_\lambda(\eta) \leq \nu^\gamma} d\eta_1 d\eta_2.$$

Так как $|\lambda| > \max_{i=1,2} |\mu^i|$ (это следует из выпуклости многоугольника H), то существует число γ ; $\gamma \in (0, 1)$ такое, что $\gamma|\lambda| > \max_{i=1,2} |\mu^i|$.

После λ сферического преобразования имеем

$$A_1(\nu) \leq C \nu^{\gamma|\lambda| - \max_{i=1,2} |\mu^i|} \sup_{\rho_\lambda(\eta) \leq \nu^\gamma} \|f(\cdot + \eta) - f(\cdot)\|_{L_p(R^2)}.$$

Учитывая, что показатель степени ν положительный, а функция f из L_p непрерывна в целом при $1 \leq p < \infty$ (см. [8]), то имеем, что $A_1(\nu) \rightarrow 0$, когда $\nu \rightarrow 0$.

В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ в оценке $A_1(\nu)$ появится множитель $|\ln \nu|$, который не нарушает сходимости $A_1(\nu)$ к нулю. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $f \in L_p(R^2)$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда существует последовательность $\nu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\nu_k}(x) = f(x)$ для почти всех $x \in R^2$.

Доказательство. Результат непосредственно следует из L_p сходимости (тогда для подпоследовательности $f_{\nu_k}(x)$ сходимость к $f(x)$ почти всюду). $\square$

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ЯДРОМ, ПОРОЖДЕННЫМ НАБОРОМ МУЛЬТИИНДЕКСОВ

Теорема 3.1. Пусть для функции f существуют производные $D^{\alpha^i} f, i = 1, 2, 3$, где α^i вершины вполне правильного многоугольника H и $D^{\alpha^i} f \in L_p(R^2)$ ($1 \leq p < \infty$), $i = 1, 2, 3$. Тогда для почти всех $x \in R^2$ имеет место представление

$$(3.1) \quad f(x) = f_h(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \int_{\epsilon}^h d\nu \int_{R^2} D^{\alpha^i} f(t) \hat{G}_{1,i}(t-x; \nu) dt$$

Доказательство. Из формулы Ньютона-Лейбница и из усреднения (2.1) имеем

$$(3.2) \quad f_h(x) - f_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^h \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{R^2} f(x+t) \bar{G}_0(t; \nu) dt d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^h \int_{R^2} f(x+t) \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{G}_0(t; \nu) dt d\nu$$

Вычислим $\frac{\partial}{\partial \nu} \bar{G}_0(t; \nu)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \bar{G}_0(t; \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(t, \xi)} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-P(\nu, \xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{R^2} e^{-i(t, \xi)} e^{-P(\nu, \xi)} (-2k) \nu^{2k-1} \xi^{2k\alpha^j} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 D_i^{\alpha^j} \int_{R^2} e^{-i(t, \xi)} e^{-P(\nu, \xi)} (-2k) (\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{j=1}^3 D_i^{\alpha^j} \hat{G}_{1,j}(t; \nu) \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (3.2) получим

$$f_h(x) - f_{\epsilon}(x) = \int_{\epsilon}^h \left(\int_{R^2} f(x+t) \sum_{j=1}^3 D_i^{\alpha^j} \hat{G}_{1,j}(t; \nu) dt \right) d\nu.$$

Так как для функции f существуют обобщенные производные $D^{\alpha_i} f$, то по определению обобщенной производной имеем

$$(3.3) \quad f_h(x) - f_*(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\int_{R^2} D_i^{\alpha_i} f(x+t) G_{1,j}(t; \nu) dt \right) d\nu$$

Применяя в соотношении (3.3) следствие 2.1, завершаем доказательство теоремы 3.1. $\square$

4. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Докажем теорему вложения для функций, принадлежащих мультианизотропному пространству $W_p^H(R^2) = \{f; f \in L_p(R^2), D^{\alpha_i} f \in L_p(R^2), i = 1, 2, 3\}$, которая при $H = \{\alpha: |\alpha| \leq m\}$ совпадает с соответствующими теоремами вложения из работы [1]; [2], а при $H = \{\alpha: (\alpha; \mu) \leq 1\}$ совпадает с теоремами вложения для анизотропных пространств (см., например, [8]).

Теорема 4.1. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$ или $1 \leq p < \infty$ при $q = \infty$; $m = (m_1; m_2)$ - мультииндекс. Обозначим через

$$\chi = \max_{i=1,2} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^2| \cdot \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad \text{если } \alpha_1 < \alpha_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,2} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^1| \cdot \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad \text{если } \alpha_1 > \alpha_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,2} \left((m, \mu^i) - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) |\mu^i| \right) \quad \text{если } \alpha_1 = \alpha_2.$$

Тогда, при $\chi < 1$ $D^m W_p^H(R^2) \hookrightarrow L_q(R^2)$, т.е. любая функция $f \in W_p^H(R^2)$ имеет обобщенную производную $D^m f$, принадлежащую классу $L_q(R^2)$. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$ или $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{m_1+1}{m_2+1}$ имеет место неравенство

$$(4.1) \quad \|D^m f\|_{L_q(R^2)} \leq h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{i=1}^3 \|D^{\alpha_i} f\|_{L_p(R^2)} + h^{-\chi} (b_1 |\ln h| + b_2) \|f\|_{L_p(R^2)},$$

где постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 не зависят от f и h , а b_1, b_2 не зависят также от q , а h - произвольный положительный параметр.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Тогда в силу представления (3.3) имеем

$$(4.2) \quad D^m f_h(x) - D^m f_*(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{\frac{h}{2}}^h d\nu \int_{R^2} D^{\alpha_i} f(t) D^m G_{1,j}(t-x; \nu) dt$$

В правой части данного представления, применяя неравенство Юнга, получим:

$$\|D^m f_h - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \leq \sum_{j=1}^3 \int_{\epsilon}^h d\nu \|D^{\alpha'} f\|_{L_p(R^2)} \|D^m G_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(R^2)}$$

где $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Оценим $\|D^m G_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(R^2)}$. Используя неравенство (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \|D^m G_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(R^2)} &\leq \nu^{-\max_{1 \leq j \leq 3} (|\mu'| + (m, \mu'))} (a_1 |\ln \nu| + a_2) \times \\ &\times \left(\int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

После преобразования $t = \nu^2 \tau$, учитывая лемму 1.2, получим

$$\|D^m G_{1,j}(\cdot, \nu)\|_{L_r(R^2)} \leq \nu^{-\max_{1 \leq j \leq 3} (|\mu'| + (m, \mu')) + \frac{|\mu|^2}{r}} (a_1 |\ln \nu| + a_2) \leq \nu^{-\chi} (a_1 |\ln \nu| + a_2).$$

Подставляя полученную оценку в (4.2) имеем

$$(4.3) \quad \|D^m f_h - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \leq h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{j=1}^3 \|D^{\alpha'} f\|_{L_p(R^2)}$$

т.е. при $h \rightarrow 0$ $D^m f_h$ фундаментальна в $L_q(R^2)$. Но по лемме 2.2 $f_\epsilon \rightarrow f$ в $L_p(R^2)$ ($1 \leq p < \infty$) при $\epsilon \rightarrow 0$. Отсюда, и из известного свойства обобщенной производной по Соболеву (см. лемма 6.2 работы [8]) получим, что существует обобщенная производная $D^m f \in L_q(R^2)$ и $\|D^m f - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Отсюда, и из неравенства (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \|D^m f\|_{L_q(R^2)} &\leq \|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} + \|D^m f - D^m f_h\|_{L_q(R^2)} \\ &\leq \|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} + h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{j=1}^3 \|D^{\alpha'} f\|_{L_p(R^2)}. \end{aligned}$$

Оценим теперь $\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)}$. Применив интегральное представление 2.1, свойство функции $\tilde{G}_0(t; \nu)$ (см. лемму 1.1) и неравенство Юнга, имеем:

$$\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} \leq C \|f\|_{L_p(R^2)} \|\tilde{G}_0(\cdot, h)\|_{L_r(R^2)}.$$

Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то в силу неравенства (1.5) имеем, что

$$\|D^m \hat{G}_0(\cdot, \nu)\|_{L_\nu(R^2)} \leq C \nu^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m, \mu^i))} (b_1 |\ln \nu| + b_2) \cdot \left(\int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N} (t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

После преобразования $t = \nu^{\alpha^2} \eta$, и учитывая, что $N\theta \cdot \mu_1^2 = N, (N\alpha: \mu^2) = N$ получим:

$$\|D^m f_h\|_{L_\nu(R^2)} \leq h^{-\max_{i=1,2}(|\mu^i| + (m, \mu^i)) + \frac{|\mu^2|}{r}} (b_1 |\ln h| + b_2) \cdot \left(\int_{R^2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{\left(1 + (\eta_1^{N\alpha_1} \eta_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L_\nu(R^2)}.$$

Так как последний интеграл сходится (см. лемму 1.2) имеем:

$$\|D^m f_h\|_{L_\nu(R^2)} \leq C_2 h^{-\kappa} (b_1 |\ln \nu| + b_2) \|f\|_{L_\nu(R^2)}.$$

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Замечание 4.1. 1) В неравенстве (4.1) логарифмический множитель появляется только в том случае, когда в формуле (1.8) появляется слагаемое, для которого $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. В других случаях постоянные a_1 и b_1 можно взять нулями.

2) В случае $\alpha_1 = \alpha_2$, если также в формуле (1.8) есть такое слагаемое, для которого $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то в неравенстве (4.1) появляются множители типа $(a_1 (\ln h)^2) + a_2 |\ln h| + a_3$ в первом слагаемом и $(b_1 (\ln h)^2) + b_2 |\ln h| + b_3$ во втором слагаемом.

3) В неравенстве (4.1) при $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ появлении логарифмического множителя естественно как покажет следующий пример.

Пример 4.1. Пусть $f(x_1, x_2) = e^{-(\nu x_1^{i_1})^{2k} - (\nu x_2^{i_2})^{2k} - (\nu x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})^{2k}}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тогда $f \in S$, и, следовательно, $f \in W_2^H(R^2)$. Имеем

$$\left(\int_{R^2} (D^{(1,1)} f(x_1, x_2))^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \sim C \cdot \nu^{\max_{i=1,2} \frac{|\mu^i|}{2}} \ln |\nu|,$$

$$\left(\int_{R^2} (f(x_1, x_2))^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \sim C \cdot \nu^{-\max_{i=1,2} \frac{|\mu^i|}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(\int_{R^2} \left(D^{\alpha^i} f(x_1, x_2) \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \sim C \cdot \nu^{1 - \max_{i=1,2} \frac{|\mu^i|}{2}},$$

и для оценки $D^{1,1} f$ через f и $D^{\alpha^i} f$ необходимо в правой части неравенства (4.1) добавить логарифмический множитель.

Отсюда можно получить вложения $D^{\alpha} W_p^H(R^2) \hookrightarrow C(R^2)$, а именно:

Теорема 4.2. Пусть $1 \leq p < \infty$; $m = (m_1; m_2)$ - мультииндекс. Обозначим через

$$\chi = \begin{cases} \max_{i=1,2} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^2| \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right), & \text{при } \alpha_1 < \alpha_2, \\ \max_{i=1,2} (|\mu^i| + (m, \mu^i)) - |\mu^1| \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right), & \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \\ \max_{i=1,2} \left(\frac{|\mu^i|}{p} + (m, \mu^i) \right), & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Тогда, если $\chi < 1$, то $D^m W_p^H(R^2) \hookrightarrow C(R^2)$ т.е. для любого $f \in W_p^H(R^2)$ производная $D^m f$ почти всюду непрерывна в R^2 и имеет место неравенство

$$\sup_{x \in R^2} |D^m f(x)| \leq h^{1-\chi} (a_1 |\ln h| + a_2) \sum_{i=1}^3 \|D^{\alpha^i}\|_{L_p(R^2)} + h^{-\chi} (b_1 |\ln h| + b_2) \|f\|_{L_p(R^2)}.$$

Доказательство. Применяя неравенство (4.3) при $q = \infty$ имеем, что функции $D^m f$, фундаментальны в $L_{\infty}(R^2)$ и, следовательно, сходятся к $D^m f$. Но так как функции $D^m f$, непрерывны, то сходимость $L_{\infty}(R^2)$ совпадает с равномерной сходимостью и предельная функция $D^m f$ непрерывна. Так как $D^m f$ определена лишь с точностью до эквивалентности, то в теореме на самом деле утверждается непрерывность производной исходной функции почти всюду. Теорема 4.2 доказана. $\square$

Abstract. In this paper we obtain appropriate integral representations for functions from Sobolev multianisotropic spaces, and apply them to obtain embedding theorems for these spaces.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сб., 4(36):3, 471 - 497 (1938).
- [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск (1962).
- [3] С. М. Никольский, "Об одной задаче С. Л. Соболева", Сиб. Мат. ж. 3, no. 6, 845 - 857 (1962).

- [4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", Bull. Amer. Math., 368 - 370 (1961).
- [5] В. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^1(G)$ ", Сиб. мат. ж., 8, no. 3, 573 - 586 (1967).
- [6] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб. 73, (115), no. 4, 585 - 599 (1967).
- [7] Ю. Г. Решетняк, "Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций", Сиб. мат. 12, no. 2, 420 - 432 (1971).
- [8] О. В. Бесов, Д. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М.: Наука (1975).
- [9] О. В. Бесов, "Продолжение функций из L_p^1 и W_p^1 ", тр. МИАН СССР 89, 5 - 17 (1967).
- [10] В. П. Ильин, "Интегральные представления функций классов $L_p^1(G)$ и теоремы вложения", Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 19, 95 - 155 (1970).
- [11] В. И. Буренков, "Теоремы вложения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве", Итоги науки, Математический анализ, М. Из-во ВИНТИ АН СССР, 71 - 155 (1966).
- [12] L. Hormander, "On the theory of general partial differential operators", Acta. Math. 94, 161 - 248 (1955).
- [13] С. В. Успенский, Б. Н. Чистяков, "О выходе на полином решений одного класса псевдо-дифференцируемых уравнений при $|x| \rightarrow \infty$ ", Сиб. мат. ж., 16, no. 5, 1053 - 1070 (1975).
- [14] Г. А. Карапетян, "О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений", тр. МИАН СССР, 1087, 116 - 129 (1989).
- [15] С. М. Никольский, "Об устойчивых граничных значениях дифференцируемых функций многих переменных", Мат. сб. 61 (103), no. 2, 224 - 252 (1963).

Поступила 13 ноября 2015

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ В $H^1(R)$ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ФРАНКЛИНА С НУЛЕВЫМИ СРЕДНИМИ

К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: katenketyan@yahoo.com

Аннотация. Определяется общая система Франклина на Λ с нулевыми средними, порожденная допустимой последовательностью T . Найдено необходимое и достаточное условие на T при котором соответствующая система является безусловным базисом в $H^1(R)$.

MSC2010 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: система Франклина; безусловный базис; пространство $H^1(R)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье исследуются свойства ортонормальной сплайн системы второго порядка с произвольными узлами. Систематические исследования таких систем началось с работ З. Инсельского [2], [3] о классической системе Франклина, которая является ортонормальной системой кусочно-линейных непрерывных функций с диадическими узлами. В 1975 г. С. В. Бочкаревым [1] была доказана безусловная базисность классической системы Франклина в $L^p[0, 1]$, для $1 < p < \infty$, а в 1982г. П. Войтанчик [19] доказал безусловную базисность этой системы в $H^1[0, 1]$.

Распространение этих результатов для произвольной последовательности узлов, т.е для общей системы Франклина, началось с работ [4], [8]. В [9] Г. Г. Геворкян и А. Камонт доказали, что общая система Франклина является безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, для $1 < p < \infty$. Ими также были получены простые геометрические характеристики последовательности узлов, для которых соответствующая общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0, 1]$ (см. [10]). При доказательстве этих результатов важную роль сыграли характеристические интервалы связанные с каждой общей функцией Франклина.

¹Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1A006

В работе [12] был введен аналог общей системы Франклина на действительной оси с нулевыми средними. Там была получена геометрическая характеристизация последовательностей узлов, для которых соответствующая система Франклина на R с нулевым средним является базисом в $H^1(R)$. Надо отметить, что эта характеристизация не является аналогом той, полученной на отрезке $[0, 1]$ в [10].

Основной целью этой работы является характеристизация последовательностей узлов для которых соответствующая общая система Франклина на R с нулевыми средними является безусловным базисом в $H^1(R)$.

Материал организован следующим образом. Во втором параграфе приведены необходимые определения и формулировка основного результата. В третьем параграфе доказаны некоторые свойства функций Франклина на R с нулевым средним. В четвертом параграфе исследуется гладкость мультипликаторов ядер Дирихле. А в последнем пятом параграфе приведено доказательство основного результата.

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определение 2.1. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = (t_n : n \geq 0)$ назовем допустимой на R , если $\mathcal{T}$ всюду плотно в R и каждая точка $t \in R$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз.

Пусть $\mathcal{T} = (t_n : n \geq 0)$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = (t_i : 0 \leq i \leq n+1)$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = (\tau_{n,i} : \tau_{n,i} < \tau_{n,i+1}, 0 \leq i \leq n)$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n^0 обозначим пространство функций с нулевым средним, которые непрерывны на R , линейны на $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ и равны нулю вне $(\tau_{n,0}, \tau_{n,n+1})$. Ясно, что $\dim S_n^0 = n-1$ и $S_{n-1}^0 \subset S_n^0$. Следовательно, существует единственная (с точностью до знака) функция $F_n \in S_n^0$, которая ортогональна S_{n-1}^0 и $\|F_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n -ой функцией Франклина с нулевым средним на R , соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Определение 2.2. Система функций Франклина с нулевыми средними $(F_n(t))_{n \geq 2}$ соответствующим разбиению $\mathcal{T}$ определяется следующим образом: для $n \geq 2$ функция $F_n(t)$ есть n -ая функция Франклина с нулевым средним, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

При исследовании общей системы Франклина на $[0, 1]$ важную роль сыграли понятия регулярности последовательности T . Эти понятия нам нужны также при изучении системы Франклина на R . Введем понятия регулярностей на R .

Определение 2.3. Допустимая последовательность T называется сильно регулярной на R с параметром γ , если для всех $n \geq 2$,

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

и

$$(2.1) \quad \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_{n+1}^n} > \gamma^{-1}, \quad \frac{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_{n+1}^n} > \gamma^{-1},$$

здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}$.

Определение 2.4. Допустимая последовательность T называется регулярной по парам на R с параметром γ , если для всех $n \geq 2$ имеет место (2.1) и

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+2}^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Основным результатом [12] является следующая характеристика последовательностей, для которых система (F_n) является базисом в $H^1(R)$.

Теорема 2.1 ([12]). Пусть T допустимая последовательность и $(F_n(t))_{n=2}^\infty$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Тогда для того, чтобы система $(F_n(t))_{n=2}^\infty$ была базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность T была сильно регулярной по парам на R с некоторым параметром γ .

В этой работе нами получены характеристики последовательностей, для которых система (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$. Основным результатом этой статьи является следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть T допустимая последовательность и $(F_n(t))_{n=2}^\infty$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Тогда для того, чтобы система $(F_n(t))_{n=2}^\infty$ была безусловным базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность T была сильно регулярной на R с некоторым параметром γ .

Отметим, что доказательства безусловной базисности в действительном пространстве Харди общей системы Франклина на $[0, 1]$ в [10], а также ортонормальной системы сплайнов высшего порядка в [11] основываются на эквивалентности

следующих четырех условий. Чтобы сформулировать эти условия, дадим необходимые определения. Пусть $(f_n)_{n \geq 0}$ общая система Франклина на $[0, 1]$ соответствующая допустимой последовательности. Для последовательности коэффициентов $(a_n)_{n \geq 0}$ положим

$$P := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S := \sup_{m \geq 0} \left| \sum_{n=0}^m a_n f_n \right|.$$

Для $f \in L^1[0, 1]$ обозначим через Pf и Sf функции P и S соответствующие последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, f_n \rangle$. В работе [10] было доказано эквивалентность следующих условий для сильно регулярных последовательностей:

- (A) $P \in L^1[0, 1]$.
- (B) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ безусловно сходится в $L^1[0, 1]$.
- (C) $S \in L^1[0, 1]$.
- (D) Существует функция $f \in H^1[0, 1]$ такая, что $a_n = \langle f, f_n \rangle$.

В нашем случае, т.е. для системы Франклина с нулевым средним, аналоги всех импликаций доказанные в работе [10] можно получить, кроме быть может импликации $(C) \Rightarrow (D)$. Проблема в том, что при доказательстве импликации $(C) \Rightarrow (D)$ используется следующее важное свойство функций Франклина на $[0, 1]$, которое, вообще говоря, не верно для функций Франклина с нулевым средним. Определение функции Франклина на $[0, 1]$ аналогично определению данному выше функции Франклина с нулевым средним, с той разницей, что соответствующие пространства кусочно-линейных функций могут иметь средние отличные от нуля. Поэтому по определению каждая функция Франклина ортогональна всем таким кусочно-линейным, непрерывным функциям, что нельзя сказать о функции Франклина с нулевым средним (в этом случае кусочно-линейные функции должны также иметь нулевую среднюю).

В настоящей работе, вместо эквивалентности этих четырех условий мы доказываем гладкость мультипликаторов ядер Дирихле общей системы Франклина на R с нулевыми средними. Такой подход был применен также в [16].

Условимся в некоторых обозначениях. Через $c, C, C_1, C_2, \dots$ обозначаются постоянные зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$.

Записи $a \sim b$, $a \lesssim b$, $a \gtrsim b$ означают, что существуют положительные постоянные c и C , такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, $a \leq C \cdot b$, $a \geq c \cdot b$ соответственно, а записи $a \sim_\gamma b$, $a \lesssim_\gamma b$, $a \gtrsim_\gamma b$ означают, что эти постоянные могут зависеть от γ .

Через $1_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A .

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ НАЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе мы получим оценки для обратной матрицы Грама системы B -сплайнов, откуда получим оценки функции Франклина с нулевым интегралом. А также дадим определение пространства Харди и укажем на свойство гладкости ядра, при котором соответствующий интегральный оператор будет ограниченным из $H^1(R)$ в $H^1(R)$.

3.1. Некоторые свойства B -сплайнов и матрицы Грама. Пусть $\mathcal{T}$ разбиение действительной оси $\mathcal{T} = (\tau_{-m-1} < \dots < \tau_0 < \dots < \tau_{n+1})$, где $m, n \geq -1$.

Через λ_i обозначим длину отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ для $-m \leq i \leq n+1$, а через N_i , $(-m-1 \leq i \leq n+1)$ обозначим B -сплайны соответствующие $\mathcal{T}$, т.е.

$$N_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } t = \tau_i, \\ 0, & \text{когда } t \in (-\infty, \tau_{i-1}) \cup [\tau_{i+1}, \infty), \\ \text{линейна на } [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ и } [\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases} \text{ для } -m \leq i \leq n$$

и

$$N_{-m-1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } t = \tau_{-m-1}, \\ 0, & \text{когда } t \notin [\tau_{-m-1}, \tau_{-m}), \\ \text{линейна на } [\tau_{-m-1}, \tau_{-m}), \end{cases} \quad N_{n+1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } t = \tau_{n+1}, \\ 0, & \text{когда } t \notin (\tau_n, \tau_{n+1}], \\ \text{линейна на } (\tau_n, \tau_{n+1}]. \end{cases}$$

Матрицу Грама системы $(N_i)_{i=-m}^n$ обозначим через G , т.е. $G = (\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-m}^n$, где $\langle f, g \rangle = \int_R f(x)g(x)dx$, а обратную $G^{-1} = (a_{ij})_{i,j=-m}^n$. Очевидно, что система $(N_j^*)_{j=-m}^n$, определенная следующим образом

$$(3.1) \quad N_j^* = \sum_{i=-m}^n a_{ij} N_i,$$

биортогональна системе $(N_i)_{i=-m}^n$.

Прямыми вычислениями можно получить, что $\langle N_i, N_i \rangle = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{6}$, $\langle N_i, N_{i+1} \rangle = \frac{\lambda_{i+1}}{6}$, и $\langle N_i, N_j \rangle = 0$, при $|i - j| > 1$. Следовательно, коэффициенты a_{ij} удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(3.2) \quad \lambda_j a_{i,j-1} + 2(\lambda_j + \lambda_{j+1}) a_{i,j} + \lambda_{j+1} a_{i,j+1} = 6\delta_{ij}, \quad \text{для } -m \leq i, j \leq n,$$

определив $a_{i,-m-1} = a_{i,n+1} = 0$.

Нам понадобятся следующие свойства коэффициентов a_{ij} .

Утверждение 3.1. Для любых i и j имеют место следующие соотношения

$$(3.3) \quad 3 \leq a_{i,i}(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \leq 4;$$

$$(3.4) \quad a_{i,j} = (-1)^{i+j} |a_{i,j}|;$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j+1}|, & j \geq i, \\ |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j-1}|, & j \leq i; \end{cases}$$

Более того

$$(3.6) \quad \begin{cases} \left(2 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_{j+2}}{\lambda_{j+1}}\right) |a_{i,j+1}| \leq |a_{i,j}| \leq \left(2 + 2 \frac{\lambda_{j+2}}{\lambda_{j+1}}\right) |a_{i,j+1}|, & j \geq i, \\ \left(2 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right) |a_{i,j-1}| \leq |a_{i,j}| \leq \left(2 + 2 \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right) |a_{i,j-1}|, & j \leq i; \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \begin{cases} |a_{i,j}| \leq 4q^{j-i} \frac{1}{\lambda_i + \dots + \lambda_{j+1}}, & \text{где } j \geq i, \\ |a_{i,j}| \leq 4q^{i-j} \frac{1}{\lambda_j + \dots + \lambda_{i+1}}, & \text{где } j \leq i; \end{cases}$$

для $q = \frac{2}{3}$, и

$$(3.8) \quad |a_{i,j}| \leq \frac{4}{2^{|i-j|}} \cdot \frac{1}{\max(\lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_j + \lambda_{j+1})}.$$

Доказательство. Заметим, что $|a_{i,n-1}| \geq 2|a_{i,n}|$ и $a_{i,n-1} \cdot a_{i,n} < 0$ (см. (3.2)). Откуда многократным использованием равенства (3.2) получим, что $|a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j+1}|$, и $a_{i,j+1} \cdot a_{i,j} < 0$ для $j \geq i$. Аналогично можно доказать, что, $|a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j-1}|$, и $a_{i,j-1} \cdot a_{i,j} < 0$ для $j \leq i$. Неравенства (3.5) доказаны. Совмещая вышесказанное с (3.2) получим, что $a_{i,i} > 0$, следовательно имеет место (3.4), более того, имеем

$$2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i} \geq 6 = \lambda_i a_{i,i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i} + \lambda_{i+1}a_{i,i+1} \geq \frac{3}{2}(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i}.$$

Итак, неравенство (3.3) также доказано. Неравенства (3.6) являются следствием (3.2), (3.4) и (3.5), а (3.8) вытекает из (3.3) и (3.5).

Чтобы удостовериться в справедливости (3.7), заметим, что для $j \geq i$, из (3.6) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} |a_{i,j}| &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \lambda_{j+1}} |a_{i,j-1}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{\lambda_j \lambda_{j-1}}{(\lambda_j + \lambda_{j+1})(\lambda_{j-1} + \lambda_j)} |a_{i,j-2}| \\ &\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i} \cdot \frac{\lambda_j \lambda_{j-1} \dots \lambda_{i+1}}{(\lambda_j + \lambda_{j+1})(\lambda_{j-1} + \lambda_j) \dots (\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})} |a_{i,i}| \leq \\ &\quad 4q^{j-i} \cdot \frac{\lambda_{i+1} \dots \lambda_j}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}) \dots (\lambda_{j-1} + \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_{j+1})}, \end{aligned}$$

откуда используя неравенство

$(\lambda_i + \lambda_{i+1})(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}) \cdots (\lambda_{j-1} + \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_{j+1}) \geq (\lambda_i + \dots + \lambda_{j+1})\lambda_{i+1} \cdots \lambda_j$
(член $\lambda_k \cdot \lambda_{i+1} \cdots \lambda_j$ получается умножая вторые слагаемые первых $k-i$ скобок с первыми слагаемыми остальных скобок) получим первое неравенство в (3.7). Второе неравенство в (3.7) доказывается аналогично.

Утверждение 3.2. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда

$$(3.9) \quad \left\| \sum_{j=-m}^n a_j N_j \right\|_p \sim \left(\sum_{j=-m}^n |a_j|^p (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \right)^{1/p} = \left\| \left(a_j (\lambda_j + \lambda_{j+1})^{1/p} \right)_{j=-m}^n \right\|_{\ell^p}$$

и

$$(3.10) \quad \left\| \sum_{j=-m}^n a_j N_j^* \right\|_p \sim \left(\sum_{j=-m}^n |a_j|^p (\lambda_j + \lambda_{j+1})^{1-p} \right)^{1/p} = \left\| \left(a_j (\lambda_j + \lambda_{j+1})^{1/p-1} \right)_{j=-m}^n \right\|_{\ell^p}.$$

Неравенство (3.9) является Леммой 4.2 из [7], глава 5, которое говорит о L^p стабильности B -сплайнов, а неравенство (3.10) вытекает из знаменитого результата А. Шадрина [17] о гипотезе де Боора (для вывода неравенства (3.10) из этого результата см. [5]).

3.2. Оценки функции Франклина. Пусть $\mathcal{T}$ разбиение действительной оси: $\mathcal{T} = (\tau_{-m-1} < \dots < \tau_0 < \dots < \tau_{n+1})$, где $m, n \geq -1$, а $\bar{\mathcal{T}}$ получается из $\mathcal{T}$ отбрасыванием τ_0 . Через $(\bar{N}_i, -m \leq i \leq n-1)$ обозначим B -сплайны соответствующие $\bar{\mathcal{T}}$. Связь между функциями N_i и $\bar{N}_i$ следующая:

$$(3.11) \quad \bar{N}_i(t) = \begin{cases} N_i(t), & \text{для } -m \leq i \leq -2, \\ N_{-1}(t) + \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_{-1}} N_0(t), & \text{для } i = -1, \\ N_1(t) + \frac{\tau_0 - \tau_{-1}}{\tau_1 - \tau_{-1}} N_0(t), & \text{для } i = 0, \\ N_{i+1}(t), & \text{для } 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Через $M_i(t)$ обозначим функции $N_i(t)$ в L^1 нормировке, а

$$B_i(t) = M_i(t) - M_{i-1}(t), \text{ где } -m+1 \leq i \leq n.$$

Обозначим $\Delta = [\tau_{-m-1}, \tau_{n+1}]$. Пространство кусочно-линейных с узлами из $\mathcal{T}$ и непрерывных функций с нулевыми средними, обращающиеся в ноль вне $\Delta = [\tau_{-m-1}, \tau_{n+1}]$ обозначим через S^0 .

Аналогично определяются функции $\tilde{M}_i, \tilde{B}_i$ и пространство $\tilde{S}^0$. Для того, чтобы определить функцию ортогональную к $\tilde{S}^0$ принадлежащую пространству S^0 с L^2 нормой равной 1, определим функцию $\varphi \in S^0 = \text{span}\{B_i : -m+1 \leq i \leq n\}$, которая ортогональна $\tilde{S}^0$. Функцию φ будем искать в следующем виде

$$\varphi = \sum_{j=-m}^n \alpha_j N_j^*.$$

где система $(N_j^*)_{j=-m}^n$ биортогональна к $(N_j)_{j=-m}^n$ (см. (3.1)).

Для того, чтобы φ была ортогональной к $\tilde{S}^0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \varphi, \tilde{B}_i \rangle = 0, \text{ при } -m+1 \leq i \leq n-1,$$

последнее равносильно независимости $\langle \varphi, \tilde{M}_i \rangle$ от i . Будем считать, что $\langle \varphi, \tilde{M}_i \rangle =$

2. Следовательно $\alpha_i = 2 \cdot \|N_i\|_1 = \lambda_i + \lambda_{i+1}$, для $i \leq -2$ и $i \geq 2$. Обозначая $a = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} - 1$, из (3.11) получим следующее представление для φ :

$$(3.12) \quad \varphi = \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^* + a ((\lambda_0 + \lambda_1) N_0^* - \lambda_0 N_1^* - \lambda_1 N_{-1}^*).$$

Пусть $\varphi_1(t) = \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t)$, $\varphi_2(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t)$ и

$$F = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2}, \quad f_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi\|_2}, \quad f_2 = \frac{\varphi_2}{\|\varphi\|_2}.$$

Ясно, что функция $F \in \tilde{S}^0$, ортогональна $\tilde{S}^0$, т.е. F это функция Франклина с нулевым средним. Чтобы сформулировать оценки для функций f_1, f_2 нам понадобятся некоторые обозначения.

Следуя работе Г. Г. Геворкяна и А. Камовт [9] мы каждой функции будем ассоциировать канонический интервал J следующим образом. Пусть I^* есть наикратчайший из интервалов $[\tau_{-2}, \tau_0]$, $[\tau_{-1}, \tau_1]$, $[\tau_0, \tau_2]$. Пусть $I^* = [\tau_i, \tau_{i+2}]$. Через J обозначим тот из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$, который имеет наибольшую длину.

Через $d(x, y)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T} = (\tau_{-m-1} < \dots < \tau_0 < \dots < \tau_{n+1})$, которые принадлежат $[x, y]$, а через $d(x)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}$ между x и J .

Для отрезка $I = [x, y]$ через $e(I)$ обозначим $\min(d(\tau_{-m-1}, x), d(y, \tau_{n+1}))$, а через $d(I)$ обозначим $\min(d(x), d(y))$. При этих обозначениях имеем следующее утверждение.

Утверждение 3.3. Функция $F \in S^0$ ортогональна S^0 . Кроме того для последовательности J сильно регулярной по парам на R с параметром γ для функций f_1, f_2 разложения F в сумму имеют следующие оценки:

$$(3.13) \quad a) \quad |f_1(x)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} q^{e(J)}, \quad b) \quad |f_1(x) - f_1(y)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} q^{e(|x,y|)+e(J)},$$

$$(3.14) \quad |f_2(x)| \lesssim \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \text{dist}(x, J)} \cdot q^{d(x)},$$

$$(3.15) \quad |f_2(\tau_0)|, |f_2(\tau_{\pm 1})| \sim_\gamma |J|^{-1/2} \text{ и } \text{sgn} f_2(\tau_i) = (-1)^i \text{sgn} f_2(\tau_0).$$

Отметим, что функция f_2 в разложении $F = f_1 + f_2$ имеет некоторые общие свойства с общей функцией Франклина определенной на $[0, 1]$. Например, для общей функции Франклина на $[0, 1]$ неравенства типа (3.14) также удовлетворяются и она также меняет свой знак на каждом интервале линейности как и f_2 (см. (3.15)). Соответствующие свойства общей функции Франклина доказаны в [9]. Для доказательства этого свойства, нам понадобится оценка для a из равенства (3.12).

Лемма 3.1. При принятых обозначениях и для последовательности J сильно регулярной по парам на R с параметром γ имеем:

$$(3.16) \quad |a| \gtrsim_\gamma \frac{|\Delta|}{|J|} q^{-e(J)} \gtrsim 1.$$

Доказательство. Сперва докажем следующее неравенство

$$(3.17) \quad \int_R \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t) dt \geq \sum_{j=-m}^{n+1} \lambda_j = |\Delta|.$$

Действительно, из

$$(3.18) \quad \int_R N_j^*(t) dt = \sum_{i=-m}^n \langle N_j^*, N_i \rangle + \langle N_j^*, N_{-m-1} \rangle + \langle N_j^*, N_{n+1} \rangle = 1 + \frac{\lambda_{-m}}{6} a_{j,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{6} a_{j,n}$$

и $\sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) a_{j,k} = 2 \int_R N_k^*(t) dt$ получим, что

$$\begin{aligned} & \int_R \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t) dt = \\ &= \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) + \frac{\lambda_{-m}}{3} \left(1 + \frac{\lambda_{-m}}{6} a_{-m,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{6} a_{-m,n} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda_{n+1}}{3} \left(1 + \frac{\lambda_{-m}}{6} a_{n,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{6} a_{n,n} \right) \geq \sum_{j=-m}^{n+1} \lambda_j = |\Delta|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (3.8).

Воспользовавшись (3.18) и (3.5) получим, что

$$\left| \int_R ((\lambda_0 + \lambda_1) N_0^*(t) - \lambda_0 N_1^*(t) - \lambda_1 N_{-1}^*(t)) dt \right| =$$

$$\left| \frac{\lambda_{-m}}{6} ((\lambda_0 + \lambda_1) a_{0,-m} - \lambda_0 a_{1,-m} - \lambda_1 a_{-1,-m}) + \frac{\lambda_{n+1}}{6} ((\lambda_0 + \lambda_1) a_{0,n} - \right.$$

$$\left. - \lambda_0 a_{1,n} - \lambda_1 a_{-1,n}) \right| \leq (\lambda_0 + \lambda_1) |\Delta| \max(|a_{-1,-m}|, |a_{1,n}|),$$

откуда, используя (3.8), сильную регулярность по парам на R последовательности T и определение интервала J , получим

$$\left| \int_R ((\lambda_0 + \lambda_1) N_0^*(t) - \lambda_0 N_1^*(t) - \lambda_1 N_{-1}^*(t)) dt \right| \leq \frac{(\lambda_0 + \lambda_1) |\Delta| q^{\min(m,n)}}{\min(\lambda_{-m} + \lambda_{-m+1}, \lambda_{n+1} + \lambda_n)}$$

$$\lesssim_\gamma (\lambda_0 + \lambda_1) q^{\min(m,n)} \lesssim_\gamma |J| q^{\varepsilon(J)}.$$

Так как $\varphi \in S^0$, поэтому $\int_R \varphi(t) dt = 0$, откуда используя равенство (3.12) вместе с последним неравенством и (3.17) получим (3.16).

Доказательство Утверждения 3.3. Сперва докажем

$$(3.19) \quad \|\varphi\|_2 \sim_\gamma |a| (\lambda_0 + \lambda_1)^{1/2} \sim_\gamma |a| |J|^{1/2}.$$

Заметим, что из сильной регулярности по парам на R следует $|J| \sim_\gamma \lambda_j + \lambda_{j+1}$, где $j = -1, 0, 1$. Откуда, используя (3.10) получим, что

$$(3.20) \quad \|\varphi_1\|_2 \sim \left(\sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \right)^{\frac{1}{2}} \sim |\Delta|^{\frac{1}{2}}, \quad \|\varphi_2\|_2 \sim |a| \left(\sum_{j=-1}^1 (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \right)^{\frac{1}{2}} \sim_\gamma |a| |J|^{\frac{1}{2}}.$$

Из этого, используя (3.16), получим оценку сверху для $\|\varphi\|_2$

$$\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi_2\|_2 \lesssim_\gamma |a| |J|^{1/2}.$$

Чтобы оценить $\|\varphi\|_2$ снизу рассмотрим два случая:

Случай 1: $|a| \geq C \cdot \left(\frac{|\Delta|}{|J|} \right)^{1/2}$, где постоянную C выберем чуть позже. Из (3.20) имеем $\|\varphi_1\|_2 \leq C_1 |\Delta|^{1/2}$ и $\|\varphi_2\|_2 \geq c_\gamma |a| |J|^{1/2}$. Выбрав $C > 2 \frac{C_1}{c_\gamma}$, будем иметь

$$\|\varphi\|_2 \geq \|\varphi_2\|_2 - \|\varphi_1\|_2 \gtrsim_\gamma |a| |J|^{1/2}.$$

Случай 2: $|a| \leq C \cdot \left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$. Из (3.10) и сильной регулярности по парам на R , получаем

$$\|\varphi\|_2^2 \gtrsim \sum_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq -1, 0, 1}} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gtrsim |\Delta| \gtrsim |a|^2 |J|,$$

что и завершает доказательство (3.19).

Используя (3.19) и (3.16), будем иметь

$$(3.21) \quad \|\varphi\|_2 \gtrsim |a| |J|^{1/2} \gtrsim \frac{|\Delta|}{|J|^{1/2} q^{-n(J)}}.$$

Из (3.10) следует, что $\|\varphi_1\|_\infty \lesssim 1$, откуда, используя (3.21), получим (3.13a).

Теперь докажем (3.13b). Функция $f_1(x)$ кусочно линейная, поэтому достаточно доказать (3.13b), где x и y являются узлами. Используя (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau_k) &= \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(\tau_k) = \sum_{j=-m}^n a_{k,j} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \\ &= 2 \sum_{j=-m}^n a_{k,j} \int_R N_j(t) dt = 2 \int_R N_k^*(t) dt, \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись (3.18) и (3.8), будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\tau_k) - \varphi_1(\tau_l)| &= \left| \frac{\lambda_{-m}}{3} a_{k,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{3} a_{k,n} - \frac{\lambda_{-m}}{3} a_{l,-m} - \frac{\lambda_{n+1}}{3} a_{l,n} \right| \leq \\ &\leq 2(q^{k+m} + q^{n-k} + q^{l+m} + q^{n-l}) \leq 8q^{\varepsilon(|\tau_k, \tau_l|)}. \end{aligned}$$

Используя (3.21), из последнего неравенства получим $|f_1(\tau_k) - f_1(\tau_l)| \lesssim \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} \times \times q^{\varepsilon(|\tau_k, \tau_l|) + \varepsilon(J)}$.

Теперь докажем неравенство (3.14). Из (3.19) следует, что

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0|a_{1,i}| + \lambda_1|a_{-1,i}|) \frac{1}{|J|^{1/2}},$$

откуда, используя (3.7) и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ , получим для $i \geq 0$

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma \frac{q^i}{\lambda_{-1} + \dots + \lambda_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{|J|^{1/2}}.$$

Из определения интервала J имеем $\lambda_0 + \lambda_1 \lesssim_\gamma |J|$, следовательно из линейности f_2 на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, будем иметь для $x \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|f_2(x)| \leq \max(|f_2(\tau_{i-1})|, |f_2(\tau_i)|) \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2} q^i}{\lambda_{-1} + \dots + \lambda_{i+1}} \lesssim \frac{|J|^{1/2} q^{d(x)}}{|J| + \text{dist}(x, J)}.$$

Аналогично доказывается оценка для $x \leq \tau_0$.

$$+\frac{\lambda_{n+1}}{3}\left(1+\frac{\lambda_{-m}}{6}a_{n,-m}+\frac{\lambda_{n+1}}{6}a_{n,n}\right)\geq\sum_{j=-m}^{n+1}\lambda_j=|\Delta|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (3.8).

Воспользовавшись (3.18) и (3.5) получим, что

$$\begin{aligned}&\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0N_1^*(t)-\lambda_1N_{-1}^*(t))dt\right|=\\&\left|\frac{\lambda_{-m}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,-m}-\lambda_0a_{1,-m}-\lambda_1a_{-1,-m})+\frac{\lambda_{n+1}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,n}-\right.\\&\left.-\lambda_0a_{1,n}-\lambda_1a_{-1,n})\right|\leq(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|\max(|a_{-1,-m}|,|a_{1,n}|),\end{aligned}$$

откуда, используя (3.8), сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ и определение интервала J , получим

$$\begin{aligned}\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0N_1^*(t)-\lambda_1N_{-1}^*(t))dt\right|&\lesssim\frac{(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|q^{\min(m,n)}}{\min(\lambda_{-m}+\lambda_{-m+1},\lambda_{n+1}+\lambda_n)}\\&\lesssim_\gamma(\lambda_0+\lambda_1)q^{\min(m,n)}\lesssim_\gamma|J|q^{\sigma(J)}.\end{aligned}$$

Так как $\varphi\in S^0$, поэтому $\int_R\varphi(t)dt=0$, откуда используя равенство (3.12) вместе с последним неравенством и (3.17) получим (3.16).

Доказательство Утверждения 3.3. Сперва докажем

$$(3.19)\quad\|\varphi\|_2\sim_\gamma|a|(\lambda_0+\lambda_1)^{1/2}\sim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Заметим, что из сильной регулярности по парам на R следует $|J|\sim_\gamma\lambda_j+\lambda_{j+1}$, где $j=-1,0,1$. Откуда, используя (3.10) получим, что

$$(3.20)\quad\|\varphi_1\|_2\sim\left(\sum_{j=-m}^n(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac{1}{2}}\sim|\Delta|^{\frac{1}{2}},\quad\|\varphi_2\|_2\sim|a|\left(\sum_{j=-1}^1(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac{1}{2}}\sim_\gamma|a||J|^{\frac{1}{2}}.$$

Из этого, используя (3.16), получим оценку сверху для $\|\varphi\|_2$

$$\|\varphi\|_2\leq\|\varphi_1\|_2+\|\varphi_2\|_2\lesssim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Чтобы оценить $\|\varphi\|_2$ снизу рассмотрим два случая:

Случай 1: $|a|\geq C\cdot\left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$, где постоянную C выберем чуть позже. Из (3.20) имеем $\|\varphi_1\|_2\leq C_1|\Delta|^{1/2}$ и $\|\varphi_2\|_2\geq c_\gamma|a||J|^{1/2}$. Выбрав $C>2\frac{C_1}{c_\gamma}$, будем иметь

$$\|\varphi\|_2\geq\|\varphi_2\|_2-\|\varphi_1\|_2\gtrsim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Случай 2: $|a| \leq C \cdot \left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$. Из (3.10) и сильной регулярности по парам на R , получаем

$$\|\varphi\|_2^2 \gtrsim \sum_{\substack{j=-m \leq j \leq n \\ j \neq -1, 0, 1}} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gtrsim |\Delta| \gtrsim |a|^2 |J|,$$

что и завершает доказательство (3.19).

Используя (3.19) и (3.16), будем иметь

$$(3.21) \quad \|\varphi\|_2 \gtrsim |a| |J|^{1/2} \gtrsim \frac{|\Delta|}{|J|^{1/2}} q^{-e(J)}.$$

Из (3.10) следует, что $\|\varphi_1\|_\infty \lesssim 1$, откуда, используя (3.21), получим (3.13a).

Теперь докажем (3.13b). Функция $f_1(x)$ кусочно линейная, поэтому достаточно доказать (3.13b), где x и y являются узлами. Используя (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau_k) &= \sum_{j=-m}^n (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(\tau_k) = \sum_{j=-m}^n a_{k,j} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \\ &= 2 \sum_{j=-m}^n a_{k,j} \int_R N_j(t) dt = 2 \int_R N_k^*(t) dt, \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись (3.18) и (3.8), будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\tau_k) - \varphi_1(\tau_l)| &= \left| \frac{\lambda_{-m}}{3} a_{k,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{3} a_{k,n} - \frac{\lambda_{-m}}{3} a_{l,-m} - \frac{\lambda_{n+1}}{3} a_{l,n} \right| \leq \\ &\leq 2(q^{k+m} + q^{n-k} + q^{l+m} + q^{n-l}) \leq 8q^{e((\tau_k, \tau_l))}. \end{aligned}$$

Используя (3.21), из последнего неравенства получим $|f_1(\tau_k) - f_1(\tau_l)| \lesssim \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} \times \times q^{e((\tau_k, \tau_l)) + e(J)}$.

Теперь докажем неравенство (3.14). Из (3.19) следует, что

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0|a_{1,i}| + \lambda_1|a_{-1,i}|) \frac{1}{|J|^{1/2}},$$

откуда, используя (3.7) и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ , получим для $i \geq 0$

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim \frac{q^i}{\lambda_{-1} + \dots + \lambda_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{|J|^{1/2}}.$$

Из определения интервала J имеем $\lambda_0 + \lambda_1 \lesssim_\gamma |J|$, следовательно из линейности f_2 на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, будем иметь для $x \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|f_2(x)| \leq \max(|f_2(\tau_{i-1})|, |f_2(\tau_i)|) \lesssim \frac{|J|^{1/2} q^i}{\lambda_{-1} + \dots + \lambda_{i+1}} \lesssim \frac{|J|^{1/2} q^{d(x)}}{|J| + \text{dist}(x, J)}.$$

Аналогично доказывается оценка для $x \leq \tau_0$.

Заметим, что из (3.4) следует $\operatorname{sgn} f_2(\tau_i) = (-1)^i \operatorname{sgn} f_2(\tau_0)$, и чтобы доказать (3.15) нам остается убедиться, что (см. (3.19)) $|\varphi_2(\tau_0)|, |\varphi_2(\tau_{\pm 1})| \gtrsim_{\gamma} |a|$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda_0 \geq \lambda_1$.

Из (3.4) имеем $|\varphi_2(\tau_i)| \geq |a| \cdot ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0|a_{1,i}|)$, откуда, используя (3.3), получим $|\varphi_2(\tau_0)| \geq |a| \cdot (\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,0}| \geq 3|a|$, и $|\varphi_2(\tau_1)| \geq |a| \cdot \lambda_0|a_{1,1}| \geq \frac{|a|}{2}(\lambda_0 + \lambda_1)|a_{1,1}| \gtrsim_{\gamma} |a| \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)|a_{1,1}| \gtrsim_{\gamma} |a|$, и также, принимая во внимание, что (см. (3.6)) $4(\lambda_0 + \lambda_{-1})|a_{0,-1}| \geq 2\lambda_0 a_{0,0} \geq (\lambda_0 + \lambda_1)a_{0,0} \geq 3$, получим

$$|\varphi_2(\tau_{-1})| \geq |a| \cdot (\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,-1}| \gtrsim_{\gamma} |a|(\lambda_0 + \lambda_{-1})|a_{0,-1}| \geq |a|.$$

Утверждение 3.3 доказано.

3.3. Некоторые свойства канонических интервалов. Пусть $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ допустимая последовательность точек. Через $J_n, \Delta_n, f_{n,1}, f_{n,2}, c_n, d_n$ обозначим интервалы, функции и величины соответствующие функции F_n и $\mathcal{T}_n = (t_i : 0 \leq i \leq n)$. Более того пусть $(\tau_{n,i})_{i=0}^n$ получается из $(t_i)_{i=0}^n$ перестановкой в порядке возрастания, т.е.

$$(\tau_{n,i} : 0 \leq i \leq n) = (t_i : 0 \leq i \leq n) \quad \text{и} \quad \tau_{n,0} < \tau_{n,1} < \dots < \tau_{n,n}.$$

Для $n \geq 4$ и для $0 \leq i \leq n-1$ обозначим $D_{n,i} = [\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$, а множество всех $D_{n,i}$ через $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D} = \{D_{n,i} : 0 \leq i \leq n-1, n \geq 4\}$.

Через $\mathcal{I}_n$ обозначим отрезок линейности F_n , у которого левый конец t_n , когда t_n не является правым концом Δ_n , в противном случае через $\mathcal{I}_n$ обозначим отрезок линейности F_n , у которого правый конец t_n . Длину отрезка $\mathcal{I}_n$ обозначим через λ_n .

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность узлов из R сильно регулярная на R с параметром γ , а $(F_n, n \geq 2)$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Для фиксированного интервала $\Delta = D_{n,i}$ и для n, i и $k \geq 0$ положим $N(\Delta, k) = \{n \geq 0 : F_n \text{ линейна на } \Delta \text{ и } d_n(\Delta) = k\}$. Тогда

$$\sum_{n \in N(\Delta, k)} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(J_n, \Delta)} \lesssim_{\gamma} k + 1.$$

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность узлов из R сильно регулярная на R с параметром γ , а $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ различные интервалы из семейства $\mathcal{D}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \lesssim_{\gamma} |I_1|.$$

Лемма 3.2 взята из [10] (см. Лемму 3.4), а Лемма 3.3 следует из того, что длина отрезков уменьшается как геометрическая прогрессия. Отметим, что для вложенного семейства канонических отрезков, несмотря на то, что некоторым различным функциям Франклина на R с нулевым средним может соответствовать один и тот же канонический интервал, сумма их длин также будет сопоставима самому длинному каноническому интервалу из этого семейства, даже если допустимая последовательность не является сильно регулярной по парам на R , однако, здесь мы можем обойтись без этого свойства.

Замечание 3.1. При различных n и m , интервалы J_n и J_m не могут совпасть. Поэтому в силу Леммы 3.3 для сильно регулярной последовательности на R с параметром γ при $J_{n_1} \supset J_{n_2} \supset \dots \supset J_{n_k} \supset \dots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} \lesssim \lambda_{n_1}.$$

3.4. Пространство Харди $H^1(R)$. Следуя Койфману и Вейссу [6], функцию $a(x)$ назовем q -атомом, если существует отрезок I такой, что

$$(i) \operatorname{supp} a \subset I, \quad (ii) \|a\|_q \leq |I|^{1/q-1}, \quad (iii) \int_R a(x) dx = 0.$$

Определение 3.1. Пространство всех функций $f \in L^1(R)$, представимые в виде $f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$, где a_j являются q -атомами и $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$, обозначим $H^{1,q}$. Норма для $f \in H^{1,q}$ определена следующим образом:

$$\|f\|_{H^{1,q}} := \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| : f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \text{ где } a_j \text{ есть } q\text{-атомы} \right\}.$$

Равенство $H^{1,q} = H^{1,\infty}$, для $1 < q < \infty$ с эквивалентными нормами является фундаментальным фактом в теории пространств Харди (см. Теорему А в [6]).

Одно из преимуществ представления $H^1(R)$ в виде атомических разложений ощутимо при исследовании вопросов ограниченности операторов Кальдерона-Зигмунда на H^1 . Очевидно, что оператор T будет ограниченным, если T отображает атомы в атомы. Койфман и Вейсс заметили, что для определенного класса операторов T , при всех атомах a , функция Ta имеет схожую с атомами структуру, которую они называли молекулой. Дадим определение молекулы.

Определение 3.2. Для данного $\varepsilon > 0$, назовем $m(x)$ ε -молекулой для $H^1(R)$ с центром x_0 , если

$$\int_{\mathbb{R}} |m(x)|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}} |m(x)|^2 |x - x_0|^{1+\varepsilon} dx \right)^{1/\varepsilon} \leq 1 \text{ и } \int_{\mathbb{R}} m(x) dx = 0.$$

Ясно, что каждый 2-атом является ε -молекулой для всякого $\varepsilon > 0$. Более важно, что $\|m\|_{H^1} \leq c$ для всех ε -молекул m (см. [6]). Следующий результат [6] сыграет важную роль при доказательстве теоремы 2.2.

Утверждение 3.4. Пусть $T : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ ограниченный оператор заданный

$$(Tf)(x) = \int_R K(x, y)f(y)dy.$$

Если для всех 2-атомов a имеет место равенство $\int_R (Ta)(x)dx = 0$ и если существует $\varepsilon > 0$, для которого ядро $K(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \frac{|x - x'|^\varepsilon}{|x - y|^{1+\varepsilon}},$$

для всех $C|x - x'| < |x - y|$, тогда для некоторой константы c произведение $c \cdot Ta$ является ε -молекулой для всех атомов a .

4. Гладкость ядра K_ω

Основная цель этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Утверждение 4.1. Пусть $\mathcal{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ , а $K_\omega(x, y) := \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n F_n(x)F_n(y)$, где $\omega \in \{-1, 1\}^N$. Тогда существует постоянные $\varepsilon > 0$ и C_γ такие, что

$$|K_\omega(x, y) - K_\omega(x', y)| \leq C_\gamma \frac{|x - x'|^\varepsilon}{|x - y|^{1+\varepsilon}},$$

для всех $(2\gamma^2 + 1)|x - x'| < |x - y|$.

Введем следующие обозначения

$$K_{1,\omega}(x, y) := \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_{n,1}(x)f_{n,1}(y), \quad K_{2,\omega}(x, y) := \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_{n,2}(x)f_{n,1}(y),$$

$$K_{3,\omega}(x, y) := \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_{n,1}(x)f_{n,2}(y), \quad K_{4,\omega}(x, y) := \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_{n,2}(x)f_{n,2}(y).$$

Возьмем $\frac{2}{3} = q < q_1 < 1$, тогда существует $\alpha > 0$ такая, что $\gamma^\alpha < \frac{1}{q_1}$.

Для доказательства утверждения 4.1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ . Тогда существует постоянная C_γ такая, что

$$|K_{i,\omega}(x, y) - K_{i,\omega}(x', y)| \leq C_\gamma \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}},$$

для всех $(\gamma + 1)|x - x'| < |x - y|$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ . Тогда существует постоянная C_γ такая, что

$$|K_{1,\omega}(x, y) - K_{1,\omega}(x', y)| \leq C_\gamma \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}},$$

для всех $(2\gamma^2 + 1)|x - x'| < |x - y|$.

Очевидно, что Утверждение 4.1 с $\varepsilon = \alpha$ следует из Лемм 4.1 и 4.2.

Доказательство Леммы 4.1 для $i = 1$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Введем следующие обозначения:

$$n_0 = \min\{n : \Delta_n \supset [x', y]\}, \quad n_1 = \min\{n \geq n_0 : d_n(x, x') \geq 2\}.$$

Ясно, что $n_0 \leq n_1$ и $\sum_{n_0 \leq n < n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0 \leq n < n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|, \quad K = \sum_{n \geq n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{1,\omega}(x, y) - K_{1,\omega}(x', y)| \leq I + K$. Достаточно доказать, что

$$(4.1) \quad I, K \lesssim_\gamma \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}}.$$

Начнем с оценки для I . Разобьем множество $\{n : n_0 \leq n < n_1\}$ на две части:

$$T_1 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n([x, x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\},$$

$$T_2 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n([x, x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \sum_{n \in T_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n , который содержит точку x . Так как $|f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \leq |x - x'| \max_{x \in [x, x']} |f'_{n,1}(x)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R и (??), (3.13), получим

$$(4.2) \quad I_1 \lesssim_\gamma \sum_{n \in T_1} \frac{|x - x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x, x']) + e_n(J_n)} \lesssim \sum_{n \in T_1} \frac{|x - x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x, x']) + e_n(J_n)}.$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x, x'])$ из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R имеем

$$(4.3) \quad \min_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} |\Delta_n| \sim_\gamma \max_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} |\Delta_n|.$$

Действительно, при $n \in T_1, e_n([x, x']) = k$ количество точек левее x из $\mathcal{T}_n$ остается неизменным (как и отрезок $[\tau_{n,0}, \tau_{n,1}]$), поэтому из сильной регулярности

последовательности $\mathcal{T}$ на R будем иметь, что $\max |\Delta_n| \sim \max |\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| = \min |\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| \sim \min |\Delta_n|$. Из (4.3) и Замечания 3.1 будем иметь

$$(4.4) \quad \sum_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \leq \frac{\sum_{n: e_n([x, x'])=k} \lambda_n}{\min |\Delta_n|} \lesssim 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x - x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^{1-\alpha} \lesssim 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \lesssim \gamma^{\alpha e_n([x, x'])} \leq \frac{1}{q_1^{e_n([x, x'])}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.2), (4.4) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} \left(\frac{|x - x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \frac{1}{|x - y|} \cdot q^k \\ &\lesssim \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \cdot q^k \\ &\lesssim \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{q_1} \right)^k \lesssim \gamma \frac{|x - x'|^\alpha}{|x - y|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2 , что завершит доказательство оценки (4.1) для I . Теперь перейдем к оцениванию K . Разобьем множество $\{n : n \geq n_1\}$ на две части:

$$S_1 = \{n : n \geq n_1, e_n([x, x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\}, \quad S_2 = \{n : n \geq n_1, e_n([x, x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n \in S_i} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Из (3.12), (3.13) и сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует

$$(4.5) \quad K_1 \lesssim \sum_{n \in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x, x']) + e_n(J_n)} \lesssim \sum_{n \in S_1} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x, x']) + e_n(J_n)}.$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x, x'])$ аналогично (4.4) будем иметь

$$(4.6) \quad \sum_{n \in S_1, e_n([x, x'])=k} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \leq \frac{\sum_{n \in S_1, e_n([x, x'])=k} \lambda_n}{\min |\Delta_n|} \lesssim 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x - x'|}{|x - y|} \right)^\alpha \geq \left(\frac{|x - x'|}{|\Delta_n|} \right)^\alpha \gtrsim \gamma q_1^{e_n([x, x'])}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (4.5), (4.6) получим

$$\begin{aligned} K_1 &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in S_1, x_n(y, x') \leq k} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{q}{q_1}\right)^k \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha} \\ &\lesssim \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{q_1}\right)^k \lesssim \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_2 , что завершит доказательство оценки (4.1) для K . Лемма 4.1 для $i = 1$ доказана.

Доказательство Леммы 4.1 для $i = 2$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Ясно, что $n_0 \leq n_1$ и $\sum_{n < n_0} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0 \leq n < n_1} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|, \quad K = \sum_{n \geq n_1} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{2,\omega}(x, y) - K_{2,\omega}(x', y)| \leq I + K$. Докажем, что

$$(4.7) \quad I, K \lesssim \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Начнем с оценки для I . Разобьем множество $\{n : n_0 \leq n < n_1\}$ на две части:

$$T_1 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n(J_n) = d_n(\tau_{n,0}, \min J_n)\},$$

$$T_2 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n(J_n) = d_n(\max J_n, \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_i = \sum_{n \in T_i} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n , который содержит точку x . Так как $|f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \leq |x-x'| \max_{x \in [x,x']} |f'_{n,2}(x)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R и (3.13), (3.14), получим

$$(4.8) \quad I_1 \lesssim \sum_{n \in T_1} \frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{|J_n|}{|\Delta_n| \cdot (|J_n| + \text{dist}(x, J_n))} \cdot q^{e_n(J_n) + d_n(x)}.$$

Заметим, что для $n \in T_1$ при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(x) = s$ количество точек слева точки x равно $l + s$ или $l - s$, откуда применяя Лемму 3.2 по отдельности в обоих случаях для интервала $\Delta = \Gamma_{n,x}$, получим

$$(4.9) \quad \sum_{\substack{n \in T_1 \\ e_n(J_n)=l, d_n(x)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(x, J_n)} \lesssim l + s + 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{l+s} \lesssim_\gamma 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^n \lesssim_\gamma \gamma^{e_n(J_n)+d_n(x)} \leq \frac{1}{q_1^{e_n(J_n)+d_n(x)}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.8), (4.9) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim_\gamma \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1, \\ e_n(J_n)=l, \ d_n(x)=s}} \left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^n \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(x, J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot q^{l+s} \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1, \\ e_n(J_n)=l, \ d_n(x)=s}} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^n \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(x, J_n)} \cdot q^{l+s} \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty} (l+s+1) \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2 , что завершит доказательство оценки (4.7) для I . Теперь перейдем к оцениванию K . Разобьем множество $\{n : n \geq n_1\}$ на две части: $S_1 = \{n : n \geq n_1, \ e_n(J_n) = d_n(\tau_{n,0}, \min J_n)\}$, $S_2 = \{n : n \geq n_1, \ e_n(J_n) = d_n(\max J_n, \tau_{n,n})\}$.

Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n \in S_i} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Из (3.13), (3.14), получим

$$\begin{aligned} (4.10) \quad K_1 &\lesssim_\gamma \sum_{n \in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n| \cdot (|J_n| + \text{dist}(x, J_n))} \cdot q^{e_n(J_n)+d_n(x)} + \\ &\sum_{n \in S_2} \frac{|J_n|}{|\Delta_n| \cdot (|J_n| + \text{dist}(x', J_n))} \cdot q^{e_n(J_n)+d_n(x')} =: K_3 + K_4. \end{aligned}$$

Дадим оценку для K_3 , подобная оценка будет также верна и для K_4 .

Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(x) = s$, аналогично неравенству (4.9), будем иметь

$$(4.11) \quad \sum_{\substack{n \in S_1, \\ e_n(J_n)=l, \ d_n(x)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(x, J_n)} \lesssim_\gamma l + s + 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^\alpha \gtrsim_\gamma \left(\frac{|\Delta_n| \cdot \gamma^{-(e_n(J_n)+d_n(x))}}{|\Delta_n|}\right)^\alpha = \gamma^{-\alpha \cdot (e_n(J_n)+d_n(x))} \geq q_1^{e_n(J_n)+d_n(x)}.$$

Комбинируя это неравенства с (4.10), (4.11) получим

$$K_3 \lesssim_\gamma \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1, \\ e_n(J_n)=l, \ d_n(x)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(x, J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^\alpha$$

$$\lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty} (l+s+1) \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_4 , откуда получим $K_1 \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}$. Эта оценка также верна и для K_2 , что завершит доказательство оценки (4.7) для K . Лемма 4.1 для $i = 2$ доказана.

Доказательство Леммы 4.1 для $i = 3$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Ясно, что $n_0 \leq n_1$ и $\sum_{n < n_0} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0 \leq n < n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|, \quad K = \sum_{n \geq n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{3,\omega}(x, y) - K_{3,\omega}(x', y)| \leq I + K$. Докажем, что

$$(4.12) \quad I, K \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Начнем с оценки для I . Разобьем множество $\{n : n_0 \leq n < n_1\}$ на две части:

$$T_1 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n([x, x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\},$$

$$T_2 = \{n : n_0 \leq n < n_1, e_n([x, x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \sum_{n \in T_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n , который содержит точку x . Так как $|f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \leq |x-x'| \max_{\tau \in [x, x']} |f'_{n,1}(\tau)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R и (3.13), (3.14), получим

$$(4.13) \quad I_1 \lesssim \sum_{n \in T_1} \frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{|J_n|}{|\Delta_n| \cdot (|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot q^{e_n([x, x']) + e_n(J_n) + d_n(y)}.$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x, x'])$ и $n \in T_1$ имеем

$$(4.14) \quad \min_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} |\Delta_n| \sim \max_{n \in T_1, e_n([x, x'])=k} |\Delta_n|.$$

И вправду, при $n \in T_1, e_n([x, x']) = k$ количество точек левее x из $\mathcal{T}_n$ остается неизменным (как и отрезок $[\tau_{n,0}, \tau_{n,1}]$), поэтому из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R будем иметь, что $\max |\Delta_n| \sim \max |\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| = \min |\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| \sim \min |\Delta_n|$.

Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(y) = s$ количество узлов слева или справа от y остается неизменным, откуда применяя Лемму 3.2 для

ближайшего интервала $\Delta = D_{n,s}$ к y находящийся в той стороне от y , в которой количество узлов не меняется, будем иметь

$$(4.15) \quad \sum_{\substack{n \in T_1 \\ e_n(J_n)=l, d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n)} \lesssim_\gamma s+1.$$

Из сильной регулярности последовательности T на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^{1-\alpha} \lesssim_\gamma 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha \cdot e_n([x,x'])} \leq \frac{1}{q_1^{e_n([x,x'])}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.13), (4.15) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim_\gamma \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1, e_n([x,x'])=k \\ e_n(J_n)=l, d_n(y)=s}} \left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot q^{k+l+s} \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1, e_n([x,x'])=k \\ e_n(J_n)=l, d_n(y)=s}} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|} \right)^\alpha \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n)} \cdot q^{k+l+s} \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} (s+1) \left(\frac{q}{q_1} \right)^{k+l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2 , что завершит доказательство оценки (4.12) для I . Теперь докажем оценку для K из (4.12).

Разобьем множество $\{n : n \geq n_1\}$ на две части:

$$S_1 = \{n : n \geq n_1, e_n([x, x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\},$$

$$S_2 = \{n : n \geq n_1, e_n([x, x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n \in S_i} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Из (3.13), (3.14), получим

$$(4.16) \quad K_1 \lesssim_\gamma \sum_{n \in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n| \cdot (|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot q^{e_n([x,x']) + e_n(J_n) + d_n(y)}.$$

Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(y) = s$, аналогично неравенству (4.15), будем иметь

$$(4.17) \quad \sum_{\substack{n \in S_1 \\ e_n(J_n)=l, d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n)} \lesssim_\gamma s+1.$$

Из сильной регулярности последовательности T на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|} \right)^\alpha \gtrsim_\gamma \gamma^{-\alpha \cdot e_n([x,x'])} \geq q_1^{e_n([x,x'])}.$$

Комбинируем это неравенства с (4.16), (4.17) получим

$$K_1 \lesssim \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in T_1 \\ \min\{d_n(x), d_n(x')\} = k \\ \max\{J_n\} = l, \quad d_n(y) = s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n)} \frac{1}{|x - y|} \cdot \left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l+s} \left(\frac{|x - x'|}{|x - y|}\right)^{\alpha} \\ \lesssim \gamma \frac{|x - x'|^{\alpha}}{|x - y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} (s+1) \left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l+s} \lesssim \gamma \frac{|x - x'|^{\alpha}}{|x - y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_2 , что завершит доказательство оценки (4.12) для K . Лемма 4.1 для $i = 3$ доказана.

Доказательство Леммы 4.2. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Введем следующие обозначения: через $\Gamma = [x, x']$ и $n_{\Gamma} = \max\{n, \#(T_n \cap \Gamma) \leq 1\}$. Ясно, что $|K_{4,\omega}(x, y) - K_{4,\omega}(x', y)| \leq I + K$, где

$$I = \sum_{n \leq n_{\Gamma}} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| |f_{n,2}(y)|, \quad K = \sum_{n > n_{\Gamma}} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| |f_{n,2}(y)|.$$

Докажем, что для I и K имеют место следующие оценки:

$$(4.18) \quad I, K \lesssim \gamma \frac{|x - x'|^{\alpha}}{|x - y|^{1+\alpha}}.$$

Начнем с оценивания I . Через Γ_n обозначим единственный интервал с узлами из T_n содержащий точку x . Из (3.14) и сильной регулярности на R последовательности T будем иметь

$$(4.19) \quad I \lesssim |x - x'| \sum_{n \leq n_{\Gamma}} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|)(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot \frac{q^{d_n(x) + d_n(y)}}{|\Gamma_n|}.$$

Разобьем множество $\{n : n \leq n_{\Gamma}\}$ на три части:

$$T_1 = \{n : n \leq n_{\Gamma}, \min J_n < x\},$$

$$T_2 = \{n : n \leq n_{\Gamma}, J_n \subset [x, y]\},$$

$$T_3 = \{n : n \leq n_{\Gamma}, \max J_n > y\}.$$

Суммы соответствующие множествам T_1 , T_2 и T_3 правой части (4.19) обозначим через I_1 , I_2 , I_3 , т.е.

$$I_i = |x - x'| \sum_{n \in T_i} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|)(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot \frac{q^{d_n(x) + d_n(y)}}{|\Gamma_n|}$$

для $i = 1, 2, 3$.

Дадим оценку сверху для I_1 . При фиксированных $d_n(x', y) = k$, $d_n(x) = l$ пусть $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_r$ совокупность всех разных интервалов Γ_n , $n \leq n_{\Gamma}$. Из определения α и сильной регулярности на R последовательности T будем иметь

$$|x - x'|^{1-\alpha} \cdot |x - y|^{\alpha} \lesssim \gamma |L_r|^{1-\alpha} \cdot (\gamma^k |L_r|)^{\alpha} < |L_r| \cdot \frac{1}{q_1}.$$

Следовательно, применив лемму 3.2 к интервалам L , получим

$$\sum_{i=1}^r \sum_{n: \Gamma_n=L_i, d_n(x',y)=k, d_n(x)=l} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|} \cdot \frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|} \lesssim_\gamma$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{1+l}{|L_i|} \cdot q^{k+l} \lesssim_\gamma \frac{1+l}{|L_r|} \cdot q^{k+l} \leq \left(\frac{q}{q_1}\right)^k \cdot (1+l)q^l \cdot \frac{|x-x'|^{\alpha-1}}{|x-y|^\alpha}.$$

Отсюда, просуммировав через k и l , и приняв во внимание, что $|J_n| + \text{dist}(y, J_n) > |x-y|$ для $n \in T_1$, получим

$$(4.20) \quad I_1 \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Теперь оценим I_2 . Так как $(|J_n| + \text{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|)(|J_n| + \text{dist}(y, J_n)) > |J_n| \cdot |x-y|$ при $n \in T_2$, следовательно

$$I_2 \lesssim |x-x'| \sum_{n \in T_2} \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}.$$

Поэтому, принимая во внимание, что для $n \in T_2$ аналогично случаю $n \in T_1$ имеет место следующее неравенство

$$|x-x'|^{1-\alpha} \cdot |x-y|^\alpha \lesssim_\gamma |\Gamma_n|^{1-\alpha} \cdot (\gamma^{k+l} |\Gamma_n|)^\alpha < |\Gamma_n| \cdot \frac{1}{q_1^{k+l}},$$

и для фиксированных $d_n(x) = k$ и $d_n(y) = l$ существует не более одного n удовлетворяющего этому случаю, получим

$$I_2 \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n: d_n(x)=k, d_n(y)=l} \frac{|x-x'|^{1-\alpha} \cdot |x-y|^\alpha}{|\Gamma_n|} q^{k+l}$$

$$(4.21) \quad \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l} \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Для завершения оценивания I остается оценить I_3 . При фиксированных $d_n(x, y) = k$, $d_n(y) = l$ пусть $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_r$ совокупность всех разных интервалов Γ_n , $n \in T_3$. Из сильной регулярности на R последовательности T следует, что

$$|x-x'|^{1-\alpha} \cdot |x-y|^\alpha \lesssim_\gamma |L_r|^{1-\alpha} \cdot (\gamma^k |L_r|)^\alpha < |L_r| \cdot \frac{1}{q_1^k}.$$

Поскольку при фиксированных L_i и k , самый правый интервал линейности F_n содержащийся в $[x, y]$ не меняется, то назначив этот интервал через R_n , применив лемму 3.2 к этому интервалу и воспользовавшись последней оценкой получим

$$\sum_{i=1}^r \sum_{n: \Gamma_n=L_i, d_n(x,y)=k, d_n(y)=l} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(y, J_n) + |\Gamma_n|} \cdot \frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|} \lesssim_\gamma$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{q^{k+l}}{|L_i|} \sum_{n: \Gamma_n = L_i, d_n(x, y) = k, d_n(y) = l} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(R_n, J_n)} \lesssim \gamma$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{1+l}{|L_i|} \cdot q^{k+l} \lesssim \gamma \frac{1+l}{|L_r|} \cdot q^{k+l} \leq \left(\frac{q}{q_1}\right)^k \cdot (1+l)q^l \cdot \frac{|x-x'|^{a-1}}{|x-y|^a}.$$

Отсюда, просуммировав через k и l , и приняв во внимание $|J_n| + \text{dist}(x, J_n) > |x-y|$, получим, что

$$(4.22) \quad I_3 \lesssim \gamma \frac{|x-x'|^a}{|x-y|^{1+a}}.$$

Из неравенств (4.20) - (4.22) следует оценка (4.18) для I . Теперь оценим K . Из (3.14) и сильной регулярности на R последовательности $\mathcal{T}$ будем иметь

$$(4.23) \quad K \lesssim \sum_{n > n_1} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(x, J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x) + d_n(y)}$$

$$+ \sum_{n > n_1} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(x', J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x') + d_n(y)} = K_1 + K_2.$$

Достаточно оценить K_1 , аналогичная оценка будет также верна и для K_2 . Действительно, точка $x'' = x' + 2\gamma^2(x' - x)$ принадлежит интервалу $[x', y]$ в силу условия леммы 4.2 и согласно сильной регулярности на R при $n > n_1$ будем иметь, что $\#\{([x', x''] \cap \mathcal{T}_n)\} \geq 2$.

Разобьем множество $\{n : n > n_1\}$ на три части:

$$S_1 = \{n : n > n_1, \min J_n < x\},$$

$$S_2 = \{n : n > n_1, J_n \subset [x, y]\},$$

$$S_3 = \{n : n > n_1, \max J_n > y\}.$$

Часть сумм по множествам индексов S_1, S_2, S_3 соответствующие сумме K_1 обозначим через $K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}$, т.е.

$$K_{1,i} = \sum_{n \in S_i} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(x, J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x) + d_n(y)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Дадим оценку сверху для $K_{1,1}$.

Заметим, что при фиксированных $d_n(x, x') = l$, $d_n(x', y) = s$ будем иметь $|x - x'| \geq \frac{1}{\gamma} |\Gamma_n|$, и $|x - y| \lesssim \gamma^{l+s} |\Gamma_n|$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^a \lesssim \gamma^{a(l+s)} < \frac{1}{q_1^{l+s}}.$$

Используя это неравенство и приняв во внимание $|J_n| + \text{dist}(y, J_n) > |x-y|$, применив лемму 3.2 к интервалу линейности F_n , который самый близкий к x и

находиться в $[x, x']$, получим следующую оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in S_1 \\ d_n(x)=k, \quad d_n(x, x')=l, \quad d_n(x', y)=s}} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(x, J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} q^{k+l+s} \\ \lesssim \frac{1}{|x-y|} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) q^{k+l+s} \lesssim \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|} \right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1} \right)^{l+s}.$$

Отсюда, просуммировав через l и s , получим, что

$$(4.24) \quad K_{1,1} \lesssim \gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Теперь оценим $K_{1,2}$.

Заметим, что при фиксированных $d_n(x) = l$, $d_n(y) = s$ как и при оценивании $K_{1,1}$ будем иметь $|x-x'| \geq \frac{1}{\gamma} |\Gamma_n|$, и $|x-y| \lesssim \gamma^{l+s} |\Gamma_n|$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|} \right)^\alpha \lesssim \gamma^{\alpha(l+s)} < \frac{1}{q_1^{l+s}}.$$

Используя это неравенство, приняв во внимание $(|J_n| + \text{dist}(x, J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n)) > |J_n||x-y|$ при $n \in S_2$ и то, что существует не более одного $n \in S_2$ для фиксированных $d_n(x) = l$, $d_n(y) = s$, получим следующую оценку

$$(4.25) \quad K_{1,2} \lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x-y|} q^{l+s} \lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x-y|} \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|} \right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1} \right)^{l+s} \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Для завершения оценивания K_1 остается оценить $K_{1,3}$. Зафиксируем $d_n(x, y) = l$, $d_n(y) = s$. Из сильной регулярности на R последовательности (t_n) следует, что $|x-y| \lesssim |x-x'| \gamma^l$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|} \right)^\alpha \lesssim \gamma^{\alpha l} < \frac{1}{q_1^l}.$$

При фиксированном $d_n(x, y) = l$ в отрезок точки не добавляются, поэтому применяя лемму 3.2 к интервалу линейности F_n находящийся в $[x, y]$ и ближайший к y при фиксированном $d_n(x, y) = l$, и последнее неравенство вместе с $|J_n| + \text{dist}(x, J_n) > |x-y|$ получим следующую оценку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n \in S_3 \\ d_n(x,y)=l, \quad d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \text{dist}(x, J_n))(|J_n| + \text{dist}(y, J_n))} q^{l+s} \\ \lesssim \frac{1}{|x-y|} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) q^{l+s} \lesssim \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|} \right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1} \right)^l.$$

Отсюда, просуммировав через l , получим, что

$$(4.26) \quad K_{1,3} \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Из неравенств (4.24)–(4.26) вытекает справедливость оценки (4.18) для K . Лемма 4.2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2.

Чтобы доказать Теорему 2.2 мы воспользуемся следующими свойствами.

Утверждение 5.1. Пусть T - допустимая последовательность узлов, а $(F_n)_{n \geq 2}$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Если для некоторой последовательности (a_n) ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n F_n$ безусловно сходится в L^1 , тогда $P := \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 F_n^2 \right)^{1/2} \in L^1$. Более того

$$\|P\|_1 \lesssim \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n a_n F_n \right\|_1.$$

Утверждение 5.2. Пусть T - допустимая последовательность узлов, которая сильно регулярна по парам на R с некоторым параметром $\gamma > 1$, но не удовлетворяет какому-либо условию сильной регулярности на R . Тогда соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними $(F_n)_{n \geq 2}$ удовлетворяет условию

$$\sup \left\| \sup_{n \geq 2} |a_n(\phi) F_n| \right\|_1 = \infty,$$

где супремум берется по всем атомам ϕ и $a_n(\phi) = (\phi, F_n)$.

Утверждение 5.1 является следствием неравенства Хинчина. Для доказательства утверждения 5.2 нам понадобится следующий результат.

Лемма 5.1. Пусть T - допустимая последовательность узлов, которая сильно регулярна по парам на R с некоторым параметром $\gamma > 1$, но не удовлетворяет какому-либо условию сильной регулярности на R . Пусть k и ℓ любые натуральные числа. Тогда для всех $A \geq 2$ существуют числа $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$ такие что если τ_{n_j, i_j} новая точка в T_{n_j} , которая не присутствует в T_{n_j-1} , и

$$S_j := [\tau_{n_j, i_j-3}, \tau_{n_j, i_j-2}], \quad \Lambda_j := [\tau_{n_j, i_j-2}, \tau_{n_j, i_j-1}],$$

$$L_j := [\tau_{n_j, i_j-1}, \tau_{n_j, i_j}], \quad R_j := [\tau_{n_j, i_j}, \tau_{n_j, i_j+1}],$$

тогда для всех $0 \leq i < j \leq \ell - 1$ имеют место

$$(1) R_i \cap R_j = \emptyset, \quad (2) \Lambda_i = \Lambda_j, \quad (3) (2\gamma - 1)|L_j| \geq |S_j| \geq \frac{|L_j|}{2\gamma}, \quad (4) |R_j| \leq (2\gamma - 1)|L_j|, \\ (5) |L_j| \leq 4(\gamma + 1) \cdot |R_j|, \quad (6) \min(|L_j|, |R_j|) \geq \Lambda|\Lambda_j|, \quad (7) e_{n_j}(J_{n_j}) \geq k.$$

Доказательство Леммы 5.1. В более общем случае пункты 1-6 доказаны в [11] (см. Лемму 6.2). Здесь мы докажем только 7-ой пункт.

Положим $m = [8\gamma(2\gamma - 1)(\gamma + 1)] + 1$. Пусть для последовательности $(n_j)_{j=1}^{\ell + km - 1}$ удовлетворяются пункты 1-6. Докажем, что

$$(5.1) \quad S_i \neq S_j, \quad \text{при } i \geq j + m.$$

Заметим, что для этого достаточно показать

$$(5.2) \quad |L_i| < \frac{1}{2\gamma(2\gamma - 1)}|L_j|, \quad \text{при } i \geq j + m.$$

Действительно, из пункта 2 следует, что $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_j$, а из пункта 3 будем иметь $|S_i| \leq (2\gamma - 1)|L_i| < \frac{1}{2\gamma}|L_j| \leq |S_j|$.

Допустим $|L_i| \geq \frac{1}{2\gamma(2\gamma - 1)}|L_j|$ для некоторого $i \geq j + m$. Заметим, что из пункта 2 следует, что $|L_\tau| \leq |L_j|$ для $\tau \geq j$, откуда используя пункт 5 получим

$$|R_{j+1}| + \dots + |R_i| \geq \frac{1}{4(\gamma + 1)}(|L_{j+1}| + \dots + |L_i|) \geq |L_i| \frac{m}{4(\gamma + 1)} \geq |L_j|.$$

Так как L_j включает попарно непересекающиеся множества L_i и $R_{j+1}, \dots, R_i$, то $|L_j| \geq |L_i| + |R_{j+1}| + \dots + |R_i| > |L_j|$, противоречие. Неравенство (5.2) доказано.

Из (5.1) и пункта 2 следует, что $i_{j+m} > i_j$, откуда получим, что

$$(5.3) \quad i_{j+mk} \geq i_j + k \geq k.$$

Ясно, что количество точек из $\mathcal{T}_{n_{mk}}$ в $[\tau_{n_{mk}, i_{mk}+1}, \tau_{n_{mk}, i_{mk}}]$ больше k . Из этого используя (5.3) получим, что $e_{n_j}(J_{n_j}) \geq k$ при $mk \leq j \leq mk + \ell - 1$.

Итак, последовательность $(n_j)_{j=mk}^{\ell + mk - 1}$ длины ℓ удовлетворяет условиям 1-7.

Перейдем к доказательству утверждения 5.2.

Доказательство утверждения 5.2. Пусть ℓ любое натуральное число, а $k \in \mathbb{N}$ и число $A \geq 2$ будут выбраны позже. Тогда согласно Лемме 5.1 существует последовательность $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$ для которой все условия Леммы 5.1 выполнены. Обозначим $\tau := \tau_{n_0, i_0 - k}$, $x := \tau - |\Lambda_0|$ и $y := \tau + |\Lambda_0|$. Ясно, что функция

$$\phi = \frac{1}{2|\Lambda_0|}(\mathbf{1}_{[x, \tau]} - \mathbf{1}_{[\tau, y]})$$

является атомом. Докажем, что для любого $0 \leq j \leq \ell - 1$ имеет место

$$(5.4) \quad |a_{n_j}(\phi)| = |\langle \phi, F_{n_j} \rangle| \sim_{\gamma} |L_j|^{-1/2}.$$

Интегрируя по частям получим

$$\begin{aligned} a_{n_j}(\phi) &= \int_x^y \phi(t)(f_{n_j,2}(t) - f_{n_j,2}(\tau)) dt + \int_x^y \phi(t)f_{n_j,1}(t) dt \\ &= \frac{1}{2|\Lambda_0|} \int_x^{\tau} (x-t)f'_{n_j,2}(t) dt - \frac{1}{2|\Lambda_0|} \int_{\tau}^y (y-t)f'_{n_j,2}(t) dt + \int_x^y \phi(t)f_{n_j,1}(t) dt. \end{aligned}$$

Для того, чтобы дать оценку для $|a_{n_j}(\phi)|$ снизу, мы дадим оценки абсолютным значениям $I_1 := \frac{1}{2|\Lambda_0|} \int_x^{\tau} (x-t)f'_{n_j,2}(t) dt$ снизу и $I_2 := \frac{1}{2|\Lambda_0|} \int_{\tau}^y (y-t)f'_{n_j,2}(t) dt$, $I_3 := \int_x^y \phi(t)f_{n_j,1}(t) dt$ сверху.

Из (3.15), принимая во внимание пункты 4 и 5 Леммы 5.1 и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$, будем иметь

$$(5.5) \quad |f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j-1})|, |f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j})|, |f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j+1})| \sim |J_{n_j}|^{-\frac{1}{2}} \sim_{\gamma} |L_j|^{-\frac{1}{2}},$$

откуда используя знакопеременность функции $f_{n_j,2}$ получим, обозначив производную $f_{n_j,2}$ на Λ_0 и L_j соответственно ξ_j и η_j ,

$$|\xi_j| \sim_{\gamma} \frac{|L_j|^{-\frac{1}{2}}}{|\Lambda_0|} \text{ и } |\eta_j| \sim_{\gamma} \frac{1}{|L_j|^{-\frac{3}{2}}}.$$

Из этого и пункта 6 Леммы 5.1 следует, что существуют постоянные $C_{\gamma}, c_{\gamma} > 0$ такие, что

$$(5.6) \quad |I_1| \geq 3c_{\gamma}|L_j|^{-\frac{1}{2}} \text{ и } |I_2| \leq C_{\gamma}|\Lambda_0| \cdot |L_j|^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{C_{\gamma}}{A}|L_j|^{-\frac{1}{2}}.$$

А из неравенства (3.13) и пункта 7 Леммы 5.1 следует, что существует постоянная $C_{\gamma,1} > 0$ такая, что

$$(5.7) \quad |I_3| \leq C_{\gamma,1} \frac{|L_j|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_{n_j}|} \cdot q^{c_{n_j}(J_{n_j})} \leq C_{\gamma,1}|L_j|^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{c_{n_j}(J_{n_j})} \leq C_{\gamma,1}q^k|L_j|^{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь выбрав числа k и $A \geq 2$ так, чтобы выполнялись неравенства $C_{\gamma,1}q^k \leq c_{\gamma}$ и $\frac{C_{\gamma}}{A} \leq c_{\gamma}$, из неравенств (5.6), (5.7) получим

$$|a_{n_j}(\phi)| \geq |I_1| - |I_2| - |I_3| \geq c_{\gamma}|L_j|^{-\frac{1}{2}}.$$

Из неравенств (3.13), (5.5), пункта 7 Леммы 5.1 и сильной регулярности по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ следует существование констант $c'_{\gamma}, C'_{\gamma} > 0$, что

$$\int_{R_j} |f_{n_j,2}(t)| dt \geq 2c'_{\gamma}|L_j|^{\frac{1}{2}}, \text{ и } \|f_{n_j,1}(t)\|_1 \leq C'_{\gamma}|L_j|^{\frac{1}{2}}q^k.$$

Будем считать, что k настолько большое, что $C_\gamma q^k \leq c'_\gamma$, откуда используя (5) получаем

$$\int_{R_j} |a_{n_j}(\phi)| |F_{n_j}(t)| dt \geq c_\gamma |I_{j,j}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{L_j} |f_{n_j,2}(t)| dt - \|f_{n_j,1}(t)\|_1 \right) \geq c_\gamma c'_\gamma.$$

Из последнего неравенства и пункта 1 Леммы 5.1 вытекает, что

$$\int_R \sup_n |a_n(\phi) F_n(t)| dt \geq \sum_{j=1}^{\ell} \int_{R_j} |a_{n_j}(\phi) F_{n_j}(t)| dt \gtrsim_\gamma \ell.$$

Так как для каждого ℓ мы можем построить атом, для которого справедливо последнее неравенство, следовательно Свойство 5.2 доказано.

Доказательство теоремы 2.2. Начнем с доказательства необходимости. Минимальность системы (F_n) очевидна. Чтобы доказать полноту (F_n) в $H^1(R)$, достаточно убедиться, что любой атом можно аппроксимировать линейной комбинацией (F_n) сколь угодно хорошо. Заметим, что любой атом можно аппроксимировать непрерывной функцией с нулевым средним и компактным носителем по норме $H^1(R)$, а последнюю можно аппроксимировать полиномом по системе (F_n) по норме L_∞ , следовательно и по норме $H^1(R)$, так как носитель компактен. Пусть $f \in H^1(R)$ и $f = \sum_{n=2}^{\infty} a_n F_n$. Равномерная ограниченность операторов $S_{n,\omega} = \int_R \sum_{k=2}^n \omega_k F_k(x) F_k(y) f(y) dy = \sum_{k=2}^n \omega_k a_k F_k$, где $\omega \in \{-1, 1\}^N$, для сильно регулярной последовательности $\mathcal{T}$ на R следует из Утверждений 4.1 и 3.4.

Теперь докажем обратное, т.е. если (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$, тогда последовательность (t_n) должна быть сильно регулярной на R . Сперва заметим, что если (t_n) не сильно регулярна по парам на R , то в силу Теоремы 2.1 (F_n) не является базисом в $H^1(R)$. Остается рассмотреть тот случай, когда (t_n) сильно регулярна по парам на R , но не сильно регулярна на R . Допустим (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$. Тогда, для $f = \sum a_n F_n$ и $\epsilon \in \{-1, 1\}^N$, функция $f_\epsilon := \sum \epsilon_n a_n F_n$ тоже принадлежит $H^1(R)$. Так как $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{H^1}$, следовательно ряд $\sum a_n F_n$ также безусловно сходится в $L^1(R)$, откуда, используя утверждение 5.1, получим

$$\|Pf\|_1 \lesssim \sup_{\epsilon} \|f_\epsilon\|_1 \leq \sup_{\epsilon} \|f_\epsilon\|_{H^1} \lesssim \|f\|_{H^1},$$

а последнее неверно даже для атомов в силу Свойства 5.2. Теорема 2.2 доказана.

Автор выражает благодарность профессорам Г. Г. Геворкяну и А. Камонт за полезные обсуждения.

Abstract. We define a general Franklin system of functions on R with vanishing means, generated by an admissible sequence $\mathcal{T}$. A necessary and sufficient condition on $\mathcal{T}$ is found for the corresponding general Franklin system of functions on R with vanishing means to be an unconditional basis in the space $H^1(R)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Borchkarev, "Some inequalities for the Franklin series", *Anal. Math.* **1**, 249 – 257 (1975).
- [2] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", *Studia Math.* **23**, 141 – 157 (1963).
- [3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system, II", *Studia Math.* **27**, 289 – 323 (1966).
- [4] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", *Funct. Approx. Comment. Math.* **25**, 129 – 143 (1997).
- [5] Z. Ciesielski, "Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots", *Function spaces (Poznan, 1998)*, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **213**, Dekker, New York, 133 – 140 (2000).
- [6] R. Coifman and G. Weiss, "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **83**, 569 – 645 (1977).
- [7] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, "Constructive approximation", *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, **303**, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [8] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)* **374**, 1 – 59 (1998).
- [9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ", *Studia Math.* **164**, 161 – 204 (2004).
- [10] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ", *Studia Math.* **167**, 259 – 292 (2005).
- [11] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, "Unconditionality of orthogonal spline systems in H^1 ", *Studia Math.* **226**, 123 – 154 (2015).
- [12] Г. Г. Геворкян, К. Керян, "Об одной системе из кусочно линейных функций с нулевым интегралом на R ", в печати.
- [13] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", *Math. Ann.* **100**, 522 – 528 (1928).
- [14] K. A. Keryan, M. P. Pogosyan, "A general Franklin periodic system as a basis in $H^1[0, 1]$ " [in Russian], *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **40**, no. 1, 61 – 84 (2005).
- [15] K. A. Keryan, "The unconditional bases property of a general Franklin periodic system in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ " [in Russian], *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **40**, no. 1, 61 – 84 (2005).
- [16] G. Kyriazis, K. Park, P. Petrushev, "Anisotropic Franklin bases on polygonal domains", *Math. Nachr.* **279**, 1099 – 1127 (2006).
- [17] A. Shadrin, "The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor's conjecture", *Acta Math.* **187**, no. 1, 59 – 137 (2001).
- [18] J. O. Strömberg, "A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces", *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund*, Vol. 1, II Chicago, Ill., 475 – 494 (1981).

Поступила 10 июля 2015

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ В $\mathbb{R}^2$ ФУНКЦИЯМИ

А. А. ВАРДАНЯН

Институт Математики ИАН Армении

E-mail: anushvardanyan@ysu.am

Аннотация. В этой работе исследуется задача равномерного приближения функции заданной на вещественной оси $\mathbb{R}$ гармоническими функциями на $\mathbb{R}^2$ имеющими оптимальный рост на бесконечности. Рост приближающих функций зависит от роста и дифференциальных свойств приближаемой функций на $\mathbb{R}$. Отметим, что эта задача впервые рассматривается в настоящей работе.

MSC2010 number: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: равномерное приближение; гармонические функции.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой работе рассматривается задача равномерного приближения на вещественной оси функций с определенными дифференциальными свойствами на вещественной оси, гармоническими функциями имеющими оптимальный рост на бесконечности.

В работе С. Гардинера [1] рассматривалась возможность равномерного приближения данной функции на неограниченных множествах гармоническими функциями из $\mathbb{R}^2$.

Подход к решению задачи является конструктивным, ибо в ходе решения задачи нами построен явный вид приближающих функций. Аналогичная задача для целых и мероморфных функций исследовалась соответственно в работах [2] и [3].

В работе [4] функция, определенная на $\mathbb{R}$ и имеющая непрерывный дифференциал 3-ой степени, приближается гармоническими функциями в данной полосе содержащей $\mathbb{R}$. Здесь приближающие функции гармоничны на $\mathbb{R}^2$.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и предварительные сведения, а второй - основные результаты со своими доказательствами.

1.1. Некоторые обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ будем идентифицировать с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, положив $z = x + iy$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Для множества $E \subset \mathbb{R}^2$, замыкание, внутренность и границу E в $\mathbb{R}^2$ обозначим соответственно через $\bar{E}$, E° и ∂E .

Также положим:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \text{ и } \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\};$$

$$D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \text{ для } r > 0;$$

$$S_\delta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \delta\} \text{ для } \delta > 0 - \text{полоса.}$$

Пусть E — замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ положим

$$m_f(r) = m_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r} = \sup_{z \in E \cap D_r} |f(z)|.$$

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим $A(E) = C(E) \cap H(E^\circ)$ и $A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ)$, где $H(E)$ класс гармонических функций на E .

Для $f \in C(\mathbb{R})$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ и $\delta \geq 0$ положим

$$(1.1) \quad \Delta_{1,f}(\xi, \delta) := \max_{|\eta| \leq \delta} |f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta)|.$$

В дальнейшем для $x \in \mathbb{R}$ обозначим

$$(1.2) \quad \omega_{1,f}(x, \delta) := \max_{|t-x| \leq \delta} \Delta_{1,f}(\xi, \delta).$$

1.2. Приближения на $\mathbb{R}$ гармоническими функциями. В этом параграфе рассмотрим задачу приближения функции $f \in A(S_h)$ на $\mathbb{R}$ функциями v гармоническими на $\mathbb{R}^2$ с оценкой роста на $\mathbb{R}^2$.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [4].

Теорема 1.1. Пусть функция $f \in C^4(\mathbb{R})$ и $0 < \delta \leq 1$. Тогда существует функция $v_\delta \in H(S_\delta)$, удовлетворяющая неравенствам:

$$(1.3) \quad |f(x) - v_\delta(x)| < 5\delta^4 \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

и

$$(1.4) \quad |v_\delta(z)| < 3M_f(x+1) + 3 \exp\left(5 + 8\sqrt{M_{f^{(4)}}(x, 2)}\right) \text{ для } z = x + iy \in S_\delta.$$

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1.1. Для $h > 0$ и $b > 1$ существует гармоническая функция $w(z, \zeta) \in H(\mathbb{C})$ для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, такая что

$$(1.5) \quad \left| \ln \frac{1}{|z - \zeta|} - w(z, \zeta) \right| < \frac{1}{b|\eta|^2} \text{ для } z \in \mathbb{R} \text{ и } |z| \leq |\zeta|/2, |\eta| \geq 1$$

и

$$(1.6) \quad \ln |w(z, \zeta)| < c \ln(|z| + 1) + c \ln^+ b|\eta| + 3 \exp\left(5 + \frac{c}{|\eta|^2}\right) \text{ для } z \in \mathbb{C}.$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ и $c > 0$ абсолютная постоянная.

Доказательство. Заметим, что функции $-\ln|z - \zeta|$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.1 и ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, существуют функции $w_\delta = w_\delta(z, \zeta)$, которые гармоничны в полосе S_δ для фиксированного ζ ($|\eta| > 1$), где число δ будет зависеть от ζ . Учитывая, что

$$\left| \ln \frac{1}{|x - \zeta|} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \right| < \max\{2 \ln^+(x - \xi), \ln |\eta|\} \text{ для } x \in \mathbb{R}$$

и

$$\left| \left(\ln \frac{1}{|x - \zeta|} \right)' \right| = \left| \frac{\xi - x}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \right| < \frac{1}{2|\eta|}$$

получаем

$$(1.7) \quad \left| \left(\ln \frac{1}{|x - \zeta|} \right)_x^{(4)} \right| = \left| -\frac{1}{(x - \xi)^2 + \eta^2} + \frac{4(x - \xi)^2 + 4}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^2} + \frac{16(x - \xi)^2}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^3} - \frac{12(x - \xi)^2}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^3} - \frac{24(x - \xi)^4}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^4} \right| < \frac{2}{|\eta|^2} + \frac{25}{2|\eta|^4} < \frac{15}{|\eta|^2}.$$

Отсюда взяв $\delta = b|\zeta|^2$ для $\zeta \in \mathbb{C}$, ($|\eta| > 1$), из оценок (1.4) и (1.7) получаем

$$(1.8) \quad |w_\delta(z, \zeta)| < 3 \max\{2 \ln^+(x - \xi), \ln |\eta|\} + 3 \exp\left(5 + \frac{c}{b\delta}\right) \text{ для } z \in S_\delta.$$

Из (1.8) следует, что функция $w_\delta(z, \zeta)$ на $\mathbb{R}$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ограничена функцией $\ln(|x| + 1)$. Обозначим

$$l_\delta := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta = \delta\}, \quad l_{-\delta} := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta = -\delta\},$$

$$P_\delta := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta \geq \delta\}, \quad P_{-\delta} := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta \leq -\delta\} \text{ для } \delta > 0.$$

Для полушлюскости P_δ и для функции w_δ на l_δ применив теорему Дирихле, мы можем определить функцию w_δ как гармоническую функцию на P_δ . Тогда учитывая, что

$$\int_0^1 \frac{y^2 \ln^+ t}{y^2 + (t - x)^2} dt < -cy \ln \delta,$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная, можем определить w_δ как гармоническую функцию на всей $\mathbb{C}$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C}$ так, чтобы

$$\ln M_{w_\delta}(r) < 3 \exp \left(5 + \frac{c}{|\eta|^2} \right) + 3 \ln^+ r + 2 \ln^+ \sqrt{b} |\zeta|.$$

Теперь мы должны доказать оценку (1.5) для $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in \mathbb{C}$.

Для случая $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in S_\delta$ оценка (1.5) непосредственно следует из доказательства Теоремы 1 работы [3].

Учитывая, что

$$(1.9) \quad \left| \ln \frac{1}{|z - \zeta|} - w(z, \zeta) \right| < \delta \text{ для } z \in I_\delta \text{ и фиксированного } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

и принцип максимума для гармонических функций, получим (1.5) для $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in \mathbb{C}$.

Теперь докажем оценку (1.6). Из решения задачи Дирихле имеем, что рост функции w_δ на Π_δ и $\Pi_{-\delta}$ удовлетворяет неравенству

$$w_\delta(z, \zeta) < 3 \ln(|z| + 1) + 2 \ln^+ \sqrt{b} |\zeta|.$$

С учетом (1.8) мы получим оценку (1.6). Лемма 1.1 доказана. $\square$

Теперь сформулируем первый результат об гармоническом приближении функциями, определенными на $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.2. Пусть $u \in H(S_h)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция v гармоническая на $\mathbb{R}^2$ такая, что

$$(1.10) \quad |u(x, 0) - v(x, 0)| < 6\varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

Рост функции v на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет для $r > 0$ неравенству

$$(1.11) \quad \ln |v(x, y)| < 2 \ln M_u(|z| + 2h) + c \ln r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $c > 0$ зависит лишь от h .

Доказательство. Заменив v на $\varepsilon^{-1}v$ и u на $\varepsilon^{-1}u$, мы можем доказательство теоремы привести к случаю $\varepsilon = 1$.

Пусть теперь γ будет границей S_h , положительно ориентированной относительно начала координат, и для $r \geq 0$, γ_r будет часть γ в $\mathbb{C} \setminus D_r$ с индуцированной ориентацией; отметим, что $\gamma_r = \gamma$, если $r \leq h$. Введем следующие функции

$$(1.12) \quad I_r(z) = \int_{\gamma_r} u(\zeta) \left[w(z, \zeta) - \ln \frac{1}{|z - \zeta|} \right] d\zeta \text{ for } (z, \zeta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

где функцию $w(z, \zeta)$ выбираем по Лемме 1.1.

Для доказательства теоремы, мы должны оценить $I_r(z)$ на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}^2$.

Пологая $b = M_u(|\zeta|)$ и используя (1.5) получаем

$$(1.13) \quad |I_r(x)| < \int_{\partial E_r} |u(\zeta)| \frac{1}{b|\eta|^2} d\zeta < c_1 \int_{|\eta| \geq h} |\eta|^{-2} d\eta = c(h) < +\infty.$$

Пусть теперь $z = x + iy \in \overline{D}_\rho$ и $r > r_0 = \max\{2\rho, \rho + h\} + 1$. Из (1.5) и (1.12) следует

$$|I_r(z)| < c \int_{\gamma_r} \frac{1}{|\eta|^2} d\zeta < c \frac{1}{r - r_0} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Поскольку функция $I_0(z) - I_r(z)$ это интеграл вдоль конечного пути $\gamma \setminus \gamma_r$, то она определяет гармоническую функцию на $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma \setminus \gamma_r)$. Следовательно, интеграл $I_0(z)$ равномерно сходится на $\overline{D}_\rho \setminus \gamma$ для любого $\rho > 0$ и определяет гармоническую функцию. $I_0 \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$; аналогично $I_r \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$ для любого $r \geq 0$.

Рассмотрим теперь функцию $v \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$, определенную формулой

$$(1.14) \quad v(z) = \begin{cases} I_0(z) + u(z) & \text{для } z \in S_h^0 \\ I_0(z) & \text{для } z \in \mathbb{R}^2 \setminus S_h \end{cases}.$$

Из определения (1.12), с учетом (1.6), получаем $|I_r(x)| < c(h)$ для $x \in \mathbb{R}$. Таким образом оценка (1.10) доказана.

Функцию v по формуле Коши-Грина представим в следующем виде:

$$(1.15) \quad v(z) = I_r(z) + I'_r(z) + I''_r(z),$$

где

$$I'_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \setminus \gamma_r} u(\zeta) w(z, \zeta) d\zeta,$$

$$I''_r(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_r} u(\zeta) \ln|z - \zeta| d\zeta,$$

$$l_r = \partial D_r \cap S_h.$$

Очевидно, что интегралы являются гармоническими функциями на D_r , следовательно, v допускает гармоническое продолжение на D_r для любого $r > h$, и более того $v \in H(\mathbb{R}^2)$. При этом формула (1.15) для $v(z)$ не зависит от r , если $z \in D_r$. Так как функция $u \in H(S_h)$, то по теореме Коши-Грина получаем

$$(1.16) \quad 2\pi u(z) = \int_{\partial E_r} \left[u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln|\zeta - z| - \frac{\partial}{\partial n} u(\zeta) \ln|\zeta - z| \right] ds,$$

где n обозначает внутреннюю единичную нормаль к ∂E_r , где $E_r = S_h \cap D_r$. Этот интеграл на $\mathbb{R}^2 \setminus S_h$ будет равен нулю. Из (1.14)-(1.16) для $z \in E_r$ получим следующее представление:

$$2\pi v(z) = \int_{\partial E_r} \left[u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln|\zeta - z| - \frac{\partial}{\partial n} u(\zeta) \ln|\zeta - z| \right] ds$$

$$+ \int \int_{E_r} (\Delta)(\zeta) w(\zeta, z) d\sigma_\zeta + \int \int_{S_1 \setminus E_r} (\Delta u)(\zeta) w(\zeta, z) d\sigma_\zeta,$$

где функция $w(\zeta, z)$ определена в (3). В этой формуле все ядра гармонические функции по z для $z \in E_r^u$. Следовательно функция $v(z)$ будет гармонична на $\mathbb{R}^2$. Теперь оценим функцию v для любого $z \in \mathbb{R}^2$. С учетом оценки (1.5), возьмем $r = 2|z|$ для $z \in \mathbb{R}^2$, из определения (1.12) получим, что

$$(1.17) \quad |I_r(z)| < c(h).$$

С учетом (1.6), получим:

$$(1.18) \quad |I_r'(z)| < c_1(h) \{M_u(r) + r\}.$$

По той же схеме:

$$(1.19) \quad |I_r''(z)| < c_2(h) M_u(r),$$

где $c_1(h) > 0$ и $c_2(h) > 0$.

Таким образом из (1.15), с учетом (1.17) – (1.19), получим оценку (1.11). $\square$

2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении на вещественной оси гармоническими функциями. Следующая теорема доказана в работе [3].

Теорема 2.1. Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для $h > 0$ существует функция $v \in H(S_h)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(x) - v(x)| < 5\varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R},$$

рост которой для $z = x + iy \in S_h$ ограничен неравенством

$$|v(x)| < 3m_f(x, h) + 3\varepsilon \exp \left(5 + 2\sqrt{(2h)^3 \varepsilon^{-1} \omega_{1,f(x)}(x, h)} \right).$$

Сопоставляя Теорему 1.2 и Теорему 2.1, мы получим основной результат работы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для $h > 0$ существует функция w гармоническая на $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая

$$|f(x) - w(x)| < \varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

рост которой для $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$ ограничен неравенством

$$\ln |w(x, y)| < 2 \ln m_f(|z| + 2h) + c \ln r + c\varepsilon \sqrt{(2h)^3 \varepsilon^{-1} \omega_{1,f(x)}(x, h)}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $c > 0$ зависит лишь от h .

Из Теоремы 2.2 получаем следующий результат.

Теорема 2.3. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $0 < \delta \leq 1$. Тогда существует гармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция v_δ , такая что

$$(2.1) \quad |f(x) - v_\delta(x, 0)| < 5\delta^4 \text{ для } x \in \mathbb{R},$$

и для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(2.2) \quad \ln |v_\delta(x, y)| < 3 \ln m_f(x, 1) + c \ln(\tau + 1) + 24 \sqrt{m_{f^{(4)}}(x, 2)} + 15,$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная.

В работе [2] доказано, что если функция $f \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет некоторым дифференциальным свойствам, то ее можно приблизить целыми функциями порядка 1 и этот порядок нельзя уменьшить. Далее в работе [3] было доказано, что функцию f можно приблизить мероморфными функциями с ростом $T(r) = \log^2(r)$ и его рост нельзя уменьшить. В случае гармонического приближения можно получить следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть функции $f \in C^4(\mathbb{R})$ и $f^{(4)}$ ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда функцию f можно равномерно приблизить на $\mathbb{R}$ гармоническими функциями $w \in H(\mathbb{R}^2)$ так, что $M_w(r) \leq Ar$, где $A > 0$ абсолютная постоянная.

Abstract. In this paper we investigate the problem of uniform approximation of a function given on the real axis $\mathbb{R}$ by harmonic functions on $\mathbb{R}^2$ with optimal growth at infinity. The growth of approximating functions depends on the growth of the approximated function and its differential properties on $\mathbb{R}$. Note that this problem is first considered in the present work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Gardiner. "Harmonic approximation and its applications". Approximation, Complex Analysis, and Potential Theory, 191 – 219 (2001).
- [2] Н. У. Аракелян. "О равномерном и касательном приближении на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста". Математический Сборник, 113(155), no. 1 (9), 3 – 40 (1980).
- [3] Р. А. Аветисян и Н. У. Аракелян. "Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси". Известия АН Арм. ССР, серия Математика, 25, no. 6, 534 – 548 (1990).
- [4] N. H. Arakelian and A. Vardanyan. "Uniform approximation on the real axis by functions harmonic in a stripe and having optimal growth", Analysis, 27, 285 – 299 (2007).

Поступила 11 мая 2016

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 51

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

номер

Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в паре из C^n	
К. Л. Аветисян, Н. Т. Гапоян	5
Задача Римана в весовых пространствах $f \in L^1(\rho)$	
Г. М. Айрапетян, В. Г. Петросян	5
Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля	
Т. Н. Арутюнян	4
Magnetic bi-harmonic differential operators on Riemannian manifolds and the separation problem	
Н. А. Атия	5
Fujimoto's theorem - A further study	
A. BANERJEE	4
Fine properties of functions from Hajlasz-Sobolev classes M_{α}^p , $p > 0$, I. Lebesgue points	
S. A. BONDAREV, V. G. KROTOV	6
Weighted Mazur-Ulam spaces	
P. S. BOTEZAT, M. CRASMAREANU	3
Наилучшие равномерные приближения на вещественной оси гармоническими в R^2 функциями	
А. А. ВАРДАНЯН	6
Об одной системе кусочно линейных функций с нулевыми интегралами на R	
Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН	2
О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша	
М. Г. ГРИГОРЯН, К. А. НАВАСАРДЯН	1
The Ricci Flow as a geodesic on the manifold of Riemannian metrics	
H. GHANREMANI-GOL, A. RAZAVI	5
On the robustness to small trends of parameter estimation for continuous-time stationary models with memory	
M. S. GINOVYAN AND A. A. SANAKYAN	5
О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости	
А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Э. РЕСТРЕПО	2
О некоторых классах дельта-субгармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости	
А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Э. РЕСТРЕПО	3
Generalizations of Kothe-Toeplitz duals and null duals of new difference sequence spaces	
S. ERFANMANESH, D. FOROUTANNIA	3
Интегральное представление и теоремы вложения для мультианизотропных пространств в плоскости с одной вершинной анизотропности	
Г. А. КАРАПЕТИАН	6

Спектральная устойчивость полуэллиптических операторов высшего порядка Г. А. КАРАПЕТЯН, Н. С. САРИБЕКЯН	1
О безусловной базисности в $H^1(R)$ системы функций Франклина с нулевыми средними К. А. КЕРЯН	6
Сравнение двумерных многочленов В. Н. МАРГАРЯН	1
О интегрируемых с весом решений одного класса почти гипозеллиптических уравнений Т. В. МАРГАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН	4
О сравнении с весом двумерных многочленов В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН	2
Simulation of a random fuzzy queuing system with multiple servers B. FATHI-VAJARGAN AND S. GHASEMALIPOUR	2
Two results on the normality criterion concerning holomorphic functions FENG LC, JUNFENG XU	1
Regularity in Orlicz spaces for non-divergence degenerate elliptic equations on homogeneous groups X. FENG	3
Analytic summability of real and complex functions M. H. HOOSHMAND	5
Normal families of meromorphic functions and shared functions P. NIU AND Y. XU	3
Weakly symmetry of a class of g -natural metrics on tangent bundles E. PEYGHAN	4
Frames and non linear approximations in Hilbert spaces K. T. POUMAI, S. K. KAUSHIK	1
О метрическом типе измеримых функций и сходимости по распределению Ф. А. ТАЛАЛЯН	5
On the convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series in the space H_p G. TERPNADZE	2
Об инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств А. ТУМАНЯН	4
О производных по направлению селекций многозначных отображений Р. А. ХАЧАТРЯН	3
Existence theorems of periodic solutions for second-order difference equations containing both advance and retardation L. YANG, YU. ZHANG, SH. YUAN, H. SHI	2
Uniqueness theorems for solutions of Painlevé transcendents X. B. ZHANG, Y. HAN AND J. F. XU	4

Cover to cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 51, No. 5, 2016

CONTENTS

H. GHAHREMANI-GOL, A. RAZAVI, The Ricci Flow as a geodesic on the manifold of Riemannian metrics.....	215
H. A. ATIA, Magnetic bi-harmonic differential operators on Riemannian manifolds and the separation problem.....	222
F. A. TALALYAN, On the metric type of measurable functions and convergence in distribution.....	227
M. S. GINOVYAN AND A. A. SAHAKYAN, On the robustness to small trends of parameter estimation for continuous-time stationary models with memory.....	232
K. L. AVETISYAN, N. T. GAPOYAN, Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in $\mathbb{C}^n$	242
H. M. HAYRAPETYAN, V. G. PETROSYAN, Riemann problem in the weighted spaces $L^1(\rho)$	249
M. H. HOOSHIKAND, Analytic summability of real and complex functions.....	262-268

ИЗВЕСТИЯ ИАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 51, номер 6, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

S. A. BONDAREV, V. G. KROTOV, Exquisite properties of functions from Hajlash–Sobolev classes M_α^p , $p > 0$, I. Lebesgue points	3
Г. А. КАРАПЕТЯН, Интегральное представление и теоремы вложения для мультянизотропных пространств в плоскости с одной вершиной анизотропии	23
К. А. КЕРЯН, О безусловной базисности в $H^1(R)$ системы функций Франклина с нулевыми средними	43
А. ВАРДАНЫАН, Наилучшие равномерные приближения на вещественной оси гармоническими в $\mathbb{R}^2$ функциями	72
Содержание тома 51, номера 1 – 6, 2016	79–80

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 51, No. 6, 2016

CONTENTS

S. A. BONDAREV, V. G. KROTOV, Exquisite properties of functions from Hajlash–Sobolev classes M_α^p , $p > 0$, I. Lebesgue points	3
Г. А. КАРАПЕТЯН, Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex	23
К. А. КЕРЯН, On unconditional basis property in the space $H^1(R)$ of a system of Franklin functions with vanishing means	43
А. ВАРДАНЫАН, The best uniform approximation of functions on the real axis by harmonic in $\mathbb{R}^2$ functions	72
Author Index to Volume 51, numbers 1 – 6, 2016	79–80