ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2016

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 3, 2016, стр. 3-8.

WEIGHTED MAZUR-ULAM SPACES

P. S. BOTEZAT AND M. CRASMAREANU

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin, China
Faculty of Mathematics, University "Al. I. Cuza", Iaşi, 700506, Romania
E-mails: *sorin.botezat@gmail.com*, *mcrasm@uaic.ro*

Abstract. The notion of a Mazur-Ulam space, introduced by C. P. Niculescu in [6] by using the midpoints, is extended here for an arbitrary weight $\lambda \in (0, 1)$. A similar characterization in terms of a class of isometries and their unique fixed point is obtained for the rational case $\lambda = \frac{m}{n}$ and under more complicated conditions than that of in [6] or [7, p. 166].

MSC2010 numbers: 51K05, 51M25, 46B20.
Keywords: Weighted Mazur-Ulam space; isometry; fixed point; intermediate point.

The classical result of S. Mazur and S. Ulam [4], stating that every isometry between real normed linear spaces is a linear map up to translation, was recently reconsidered from the point of view of its extensions. Notice that this property is not true in the category complex linear spaces, for example, for the conjugation map in the complex plane. Note that the surjectivity hypothesis is essential and that without this assumption, J. A. Baker proved that every isometry from a normed real space into a strictly convex normed real space is a linear map up to translation.

An interesting framework to deal with the Mazur-Ulam theorem was developed in [6], see also [7, p. 165]. This approach is based on the notion of *midpoint* in a metric space, and therefore the notion of *Mazur-Ulam space* is naturally considered. The aim of this note is to extend this notion to a weighted case, by using an arbitrary, but fixed, intermediate point. On this way, several aspects of Mazur-Ulam spaces are generalized for a weight $\lambda \in (0, 1)$, the previous setting being obtained for $\lambda = \frac{1}{2}$. Also, for this special case $\lambda = \frac{1}{2}$, we derive some new aspects, for instance, we show that the midpoint is an example of metric center, in the sense of [9].

The present paper is divided into two sections. The first section is devoted to the *weighted Mazur-Ulam spaces* and their characterizations in terms of isometries with a unique fixed point satisfying some additional properties, but only for the rational λ. Two types of examples are provided: the real normed spaces and intervals with distances induced by a bijection. In the second class we recover the points provided by the geometric and harmonic means. The second section deals with the convexity between weighted Mazur-Ulam spaces, and the geometric convexity, discussed in [2], is interpreted in our setting.

Let (M,d) be a metric space and let $Isom(M,d)$ denote the group of isometries of (M,d). Recall that the points $x, y, z \in (M,d)$ are called *collinear* (in this order) if $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$.

Definition 1. Let $\lambda \in (0,1)$ be a fixed real number. A *λ-Mazur-Ulam space* (λMU-space for short) is defined to be a triple $(M, d, \sharp)$ with (M,d) a metric space and $\sharp : M \times M \to M$ satisfying for all $x, y \in M$ the following conditions:

A) (the idempotent property) $x\sharp x = x$;

B) (the λ-commutative property) $d(x\sharp y, y\sharp x) = |2\lambda - 1|d(x,y)$;

C) (the weighted property) the points x, $x\sharp y$, y are collinear and $d(x, x\sharp y) = \lambda d(x,y)$;

D) (the transformation property) $T(x\sharp y) = T(x)\sharp T(y)$ for all $T \in Isom(M,d)$.

The point $x\sharp y$ is called *the λ-intermediate point* between x and y.

Remark 1. i) For $\lambda = \frac{1}{2}$ we recover the notion of *Mazur-Ulam space* considered in [7, p. 166]. The point $x\sharp y$ is called *midpoint* by Niculescu, but it appears also with different names, e.g., *metric midpoint* (see [8] and also [1, p. 18]). If we ask for the uniqueness of midpoints, we obtain the class of metric spaces with UMP property for which the survey [3] is available.

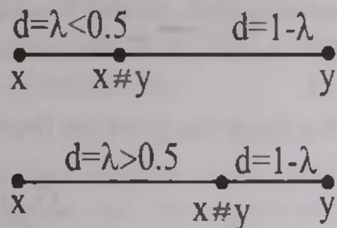
ii) From condition C) we derive: $d(y, x\sharp y) = (1-\lambda)d(x,y)$. The existence of $x\sharp y$ for every $\lambda \in (0,1)$ in [1, p. 18] is called *metric convexity* of (M,d), while the uniqueness of the λ-intermediate point is called *strict metric convexity*.

iii) The essence of Mazur-Ulam theorem is contained in condition D).

Example 1. Let (M,d) be a real normed space with distance: $d(x,y) = \|x-y\|$. With $x\sharp_\lambda y = (1-\lambda)x + \lambda y$ we obtain a λMU-space. A remarkable example of $\frac{1}{2}$MU-space, treated in [6] and [7, p. 167-168], is that of $(Sym^{++}(n,\mathbb{R}), d_{trace})$, where $Sym^{++}(n,\mathbb{R})$ denotes the set of all $n \times n$ dimensional positive definite matrices with the trace metric $d_{trace}(A,B) = \left(\sum_{k=1}^{n} \log^2 \lambda_k\right)^{1/2}$, where $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are the eigenvalues of AB^{-1}. The analogue of $(1-\lambda)x+\lambda y$ in this cone is the matrix $A\sharp_\lambda B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^\lambda A^{1/2}$.

Example 2. A large class of nonlinear examples can be obtained in the case where $M \subseteq \mathbb{R}$ is a real interval and $f : M \to f(M)$ is a bijection. Then $d_f : M \times M \to \mathbb{R}_+$ given by $d_f(x,y) = |f(x)-f(y)|$ is a distance on M, and with $x\sharp_f y = f^{-1}((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y))$ we get a λMU-space. The following two examples are of interest.

1.1) Let $M = \mathbb{R}_+^* = (0,+\infty)$ and $f(x) = \log x$. Then $f(M) = \mathbb{R}$ and $d_f(x,y) = |\log \frac{y}{x}|$. Hence $x\sharp_f y = x^{1-\lambda}y^\lambda$, and for $\lambda = \frac{1}{2}$ we have the Mazur-Ulam space (see [7, p. 166]), provided that the midpoint is equal to the geometric mean.



The cases $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

1.2) Let M be as in example 1.1), and let $f(x) = \frac{1}{x} = inv(x)$. Then $f(M) = M$ and $d_f(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$. Therefore $x\sharp_f y = \frac{xy}{\lambda x+(1-\lambda)y}$, and the case $\lambda = \frac{1}{2}$ gives $x\sharp y$ the harmonic mean M_{-1} of x and y (see [7, p. 1]), that is, $x\sharp y = \frac{2xy}{x+y} = M_{-1}(x,y)$. $\square$

Following the ideas of [7, p. 166], a characterization of λMU-spaces can be derived for the rational weights $\lambda = \frac{m}{n}$, where m,n are integers with $n > m \geq 1$ and $gcd(m,n) = 1$. Specifically, we have the following result.

Theorem 1. *Let (M,d) be a metric space. Suppose that for any pair $(a,b) \in M \times M$ there exists $G_{a,b} \in Isom(M,d)$ with the properties:*
(λMU1) *$d(G_{a,b}(a),b) = (m-1)d(a,b)$ and $d(G_{a,b}(b),a) = (n-m-1)d(a,b)$;*
(λMU2) *$G_{a,b}$ admits a unique fixed point $z^{a,b}$ and $d(G_{a,b}(x),x) = nd(x,z^{a,b})$ for all $x \in M$;*
(λMU3) *$d(G_{a,b}(x), G_{b,a}(x)) = |2m-n|d(a,b)$ for all $x \in M$;*
(λMU4) *the points a, $z^{a,b}$, b are collinear and $nd(a,z^{a,b}) = md(a,b)$;*
(λMU5) *$G_{Ta,Tb} \circ T = T \circ G_{a,b}$ for all $T \in Isom(M,d)$.*
Then $(M,d,\sharp)$ with $a\sharp b = z^{a,b}$ is a λMU-space.

Proof. We have to verify conditions A)–D) of Definition 1. For A), observe that by condition (λMU2) we have $nd(a, z^{a,b}) = d(G_{a,b}(a), a)$, while the condition ($\lambda$MU1) gives $d(G_{a,a}(a), a) = 0$.

B) From condition (λMU2) we have $nd(a\sharp b, b\sharp a) = d(G_{b,a}(a\sharp b), a\sharp b)$, and the fixed point property gives $d(G_{a,b}(a\sharp b), G_{b,a}(a\sharp b)) = |2m - n|d(a, b)$. Hence $d(a\sharp b, b\sharp a) = |2\lambda - 1|d(a, b)$.

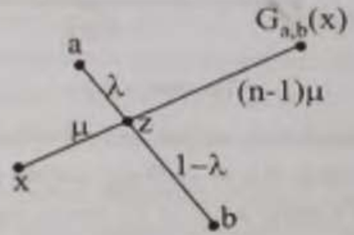
C) the condition (λMU4) is exactly the claimed property.

D) From the fixed point property and the condition (λMU5) we have $G_{Ta,Tb}(T(\sharp b)) = T(a\sharp b)$ which yields $T(a\sharp b) = T(a)\sharp T(b)$. $\square$

Remarks 2. i) In the Niculescu's works [6, 7] the function $G_{a,b}$ is an isometry, but this property was not used in the above proof of Theorem 1.

ii) The condition (λMU3) implies that the distance between $G_{a,b}(x)$ and $G_{b,a}(x)$ does not depend on $x \in M$.

iii) We have $nd(b, z^{a,b}) = (n - m)d(a, b)$ and also the collinearity of all four points $a, z^{a,b}, z^{b,a}, b$.



The collinearity of points.

iv) A comparison of Theorem 3.13.2 of [7, p. 166] and our Theorem 1 reveals the complexity of the arbitrary rational case of λ and the special case $\lambda = \frac{1}{2}$. More precisely, our $\frac{1}{2}$MU1-2 are exactly the conditions MU 1-2 of the above cited theorem from [7], while the condition $\frac{1}{2}$MU3 means that $G_{a,b} = G_{b,a}$.

v) Very close notion appears in [9, p. 100]: for $a, b \in (M, d)$ a point $z \in M$ is called a *metric center of* a and b if there exists a surjective isometry $\psi : M \to M$ such that $\psi(a) = b$, $\psi(b) = a$, and for every $S \subseteq M$ with $0 < \sup_{x\in S} d(x, z) < +\infty$ we have

$$\sup_{x\in S} d(x, z) < \sup_{x\in S} d(\psi(x), x). \tag{1}$$

Lemma 4 of [9] shows that z is the unique metric center of a and b, and also, it is the unique fixed point of ψ. For $\frac{1}{2}$MU-spaces provided by Theorem 3.13.2 of [7, p. 166], we have that the point $a\sharp b$ is the metric center of a and b since $G_{a,b}(a) = b$,

$G_{a,b}(b) = a$, and the right-hand side of (1) is the double of the left-hand side. Also, assuming that (M, d) is bounded we have that $a\sharp b$ is a *dissimilarity center of M* (see [9, p. 99] for the definition), and applying Lemma 1 of [9] we conclude that a bounded $\frac{1}{2}$MU-space provided by the isometrics $G_{.,.}$ has a "universal" midpoint z, that is, for all $a, b, c, d \in M$ we have $a\sharp b = c\sharp d = z$ and z is the unique fixed point of all elements of $Isom(M, d)$.

Example 3. Returning to the Examples 2 we consider:
3.1) $G^{\lambda}_{a,b}(x) = (n-m)a + mb - (n-1)x$. Then we have $G^{\lambda}_{a,b}(a) = (1-m)a + mb$ and $G^{\lambda}_{a,b}(b) = (n-m)a + (m+1-n)b$.
3.2) $G^{f}_{a,b}(x) = f^{-1}\left((n-m)f(a) + mf(b) - (n-1)f(x)\right)$. Then for $f(x) = \log x$ we have $G^{\log}_{a,b}(x) = \frac{a^{n-m}b^{m}}{x^{n-1}}$, while for $f(x) = \frac{1}{x}$ we have $G^{inv}_{a,b}(x) = \frac{abx}{(n-m)bx+max-(n-1)ab}$. Hence $G^{\log}_{a,b}(a) = a^{1-m}b^{m}$ and $G^{\log}_{a,b}(b) = a^{n-m}b^{m+1-n}$, and respectively, $G^{inv}_{a,b}(a) = \frac{ab}{ma+(1-m)b}$ and $G^{inv}_{a,b}(b) = \frac{ab}{(m+1-n)a+(n-m)b}$.

Example 4. Let (M, d) be a *metric absolute plane* according to [5, p. 236], that is, a set satisfying the axioms of incidence (in the plane), those of ordering, those of congruence and those of continuity. Then, in view of Theorem 1.4 of [5, p. 237], we conclude that an isometry with a unique fixed point is a product of two axial symmetries.

In this section we show that the weighted Mazur-Ulam spaces constitute a natural framework to deal with convexity.

Definition 2. Let $(M, d, \sharp)$ and $(M', d', \sharp')$ be two weighted Mazur-Ulam spaces with M' being a subinterval in the real line $\mathbb{R}$. A continuous function $f : M \to M'$ is called $(\sharp, \sharp')$-*convex* if for all $x, y \in M$ we have

$$f(x\sharp y) \le f(x)\sharp' f(y), \tag{2}$$

and it is called $(\sharp, \sharp')$-*concave* if the opposite inequality holds. In the equality case:

$$f(x\sharp y) = f(x)\sharp' f(y) \tag{3}$$

we call it $(\sharp, \sharp')$-*affine*.

Note that for $(M, d, \sharp) = (M', d', \sharp')$ given in Example 2.1, that is, in the case of real normed spaces, the relation (2.1) is the classical convexity of real functions, and (3) is the usual affinity property. Since the weights of M and M' can be different, we obtain a very large setting for the notions of convexity, concavity and affinity.

Example 5. A function $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is called *geometrically convex* if for all $\lambda \in (0, 1)$ and all $x, y \in (0, +\infty)$ we have (see [2, p. 154]:

$$g(x^{\lambda}y^{1-\lambda}) \leq g(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}. \tag{4}$$

It is noticed that g is geometrically convex if and only if its exponential conjugate $\log \circ g \circ \exp$ is convex on the real line $\mathbb{R}$.

It follows from (4) that

$$g(x\sharp^{\lambda}_{\log}y) \leq g(x)\sharp^{\lambda}_{\log}g(y), \tag{5}$$

and hence

$$g : (M = (0, \infty), d_{\log}, \sharp^{\bullet}_{\log}) \to (M = (0, \infty), d_{\log}, \sharp^{\bullet}_{\log})$$

is geometrically convex if and only if it is $(\sharp^{\lambda}_{\log}, \sharp^{\lambda}_{\log})$-convex for all $\lambda \in (0, 1)$.

Acknowledgments: The authors are grateful to Professor Dr. Constantin P. Niculescu and an anonymous referee for several useful remarks.

Список литературы

[1] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of distances. Second edition*, Springer, Heidelberg, 2013. MR2986282

[2] D. Gronau, J. Matkowski, *Geometrical convexity and generalizations of the Bohr-Mollerup theorem on the gamma function*, Math. Pannon., 4(1993), no. 2, 153-160. MR1258921 (95a:33003)

[3] Y. Kitai, *Unique midpoint property in metrizable spaces: a survey*, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci., 38(2005), 31-38. MR2130489

[4] S. Mazur, S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques dŸespaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 194(1932), 946-948. Zbl 0004.02103

[5] R. Miron, D. Brânzei, *Backgrounds of arithmetic and geometry. An introduction*, Series in Pure Mathematics, 23, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995. MR1412145 (97j:51001)

[6] C. P. Niculescu, *An extension of the Mazur-Ulam theorem*, in *Global analysis and applied mathematics*, 248-256, AIP Conf. Proc., 729, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2004. MR2215706 (2006j:54039)

[7] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex functions and their applications. A contemporary approach*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de MathЯmatiques de la SMC, 23, Springer, New York, 2006. MR2178902 (2006m:26001)

[8] P. Šemrl, *A characterization of normed spaces among metric spaces*, Rocky Mountain J. Math., 41(2011), no. 1, 293-298. MR2845946

[9] I. A. Vestfrid, *On bijective isometries*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys., 44 (2003), no. 2, 97-103. MR2102547 (2005h:46003)

Поступила 8 февраля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 3, 2016, стр. 9-27.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ МАЖОРАНТАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Э. РЕСТРЕПО

Institute of Mathematics, University of Antioquia, Medellin, Colombia
E-mails: *armen_jerbashian@yahoo.com*, *cocojoel89@yahoo.es*

Аннотация. В статье для дельта-субгармонических в полуплоскости функций построен аналог части теории М.М.Джрбашяна-В.С.Захаряна, относящейся к факторизации ω-весовых подклассов мероморфных функций ограниченного вида в круге. Введены ω-весовые классы дельта-субгармонических в верхней полуплоскости функций с ограниченной характеристикой типа Цудзи, найдены параметрические представления этих классов.

MSC2010 number: 31A05; 31A20.

Ключевые слова: гармоническая функция; дельта-субгармоническая функция; потенциал типа Грина; заряд.

1. Введение

Статья посвящена построению в полуплоскости, для дельта-субгармонических функций, аналога части теории М. М. Джрбашяна - В. С. Захаряна [1, 2], относящейся к факторизации ω-весовых подклассов мероморфных функций ограниченного вида в круге. Кроме того, результаты статьи распространяют на более общий случай дельта-субгармонических функций результаты [3], относящиеся к параметрическим представлениям подклассов гармонических функций ω-ограниченного вида в полуплоскости.

Рассматриваются классы дельта-субгармонических в полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций, чьи ω-частные производные подчинены условию роста функций класса $\mathfrak{N}^m$ Е. Д. Соломенцева [4], т.е.

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| dx < +\infty.$$

Для введения отмеченных производных, всюду ниже будем полагать, что $\omega(x)$ - функция класса Ω, т.е. $\omega(x) > 0$, не возрастает на $(0, +\infty)$ и

$$\omega(x) \asymp x^\alpha \quad \text{при некотором} \quad -1 < \alpha < 0 \quad \text{и любом} \quad x \geq \Delta_0 > 0$$

($\omega(x) \asymp x^\alpha$ означает, что $C_1 x^\alpha \le \omega(x) \le C_2 x^\alpha$ с некоторыми постоянными $C_{1,2} > 0$). Кроме того, будем полагать, что

$$\omega_1(x) = \int_0^x \omega(t)dt < +\infty, \quad 0 < x < +\infty.$$

Для $\omega(x) \in \Omega$ и функций $u(z)$ заданных в G^+ формально определяем оператор

$$L_\omega u(z) = -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(z), \quad \text{где} \quad L_{\omega_1} u(z) = \int_0^{+\infty} u(z + i\lambda) d\omega_1(\lambda). \tag{1.1}$$

Кроме того, будем использовать ядро типа Коши

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad \text{где} \quad I_\omega(t) = t \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \omega(\lambda) d\lambda. \tag{1.2}$$

Как нетрудно проверить, при $z \in G^+$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Im}\, z} C_\omega(z) = -C_{\omega_1}(z) \quad \text{и} \quad C_\omega(z) = \int_{\mathrm{Im}\, z}^{+\infty} C_{\omega_1}(\mathrm{Re}\, z + it)dt, \tag{1.3}$$

где, как и всюду ниже, $C_{\omega_1}(z)$ - ядро типа Коши из [5]. Кроме того, в частном случае степенных функций $\omega(x) = x^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$,

$$C_\omega(z) = C_\alpha(z) = \frac{1}{(-iz)^{1+\alpha}} \quad \text{и} \quad C_\omega(z)\Big|_{\omega(x)=1} = \frac{1}{-iz} \quad z \in G^+,$$

т.е. $C_\omega(z)$ превращается в обычное ядро Коши и имеем

$$L_\omega C_\omega(z) = \frac{1}{-iz}, \quad z \in G^+. \tag{1.4}$$

2. Факторы типа Бляшке

2.1. Полагая, что $\omega(x) \in \Omega$ и $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$ - фиксированная точка, введем в рассмотрение следующие факторы типа Бляшке:

$$\begin{aligned} b_\omega(z,\zeta) &= \exp\left\{-\int_0^\eta \left[C_\omega(z - \zeta + it) + C_\omega(z - \overline{\zeta} - it)\right]\omega(t)dt\right\}, \\ &= \exp\left\{-\int_{-\eta}^\eta C_\omega(z - \xi - it)\omega(\eta - |t|)dt\right\}, \quad \mathrm{Im}\, z > \eta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отметим, что для главной ветви логарифма обычного фактора Бляшке справедливо представление

$$\log b_0(z,\zeta) = \log \frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}} = \int_{-\eta}^\eta \frac{dt}{t + i(z - \xi)}, \quad z \ne \zeta. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *При любом $\omega(x) \in \Omega$ и любой фиксированной точки $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$ функция $b_\omega(z,\zeta)$ голоморфна в полуплоскости G^+, где имеет единственный нуль первого порядка в точке $z = \zeta$.*

Доказательство. Из (2.1), интегрированием по частям и используя формулу (29) из [5] получаем

$$b_\omega(z,\zeta) = \overline{b}_{\omega_1}(z,\zeta)\exp\{-G_\omega(z,\zeta)\}, \tag{2.3}$$

$$G_\omega(z,\zeta) = C_\omega(z-\overline{\zeta})\omega_1(2\eta) - \int_\eta^{2\eta} C_\omega(z-\zeta+it)\omega(t)dt + \int_0^\eta C_\omega(z-\overline{\zeta}-it)\omega(t)dt.$$

Здесь $\overline{b}_{\omega_1}(z,\zeta)$ - фактор типа Бляшке из [5]. Далее, в лемме 2.1 работы [3] доказано, что $C_\omega(z)$ - голоморфная в G^+ функция. Тем самым, при любом фиксированном $\zeta \in G^+$ функция $C_\omega(z-\overline{\zeta})$ голоморфна в G^+. Кроме того, из (1.2) следует, что $|C_\omega(z)| \le C_\omega(i\rho)$ при любом z с $\operatorname{Im} z \ge \rho > 0$. Поэтому $\left|C_\omega(z-\zeta+it)\right| \le C_\omega(i\rho)$ и $\left|C_\omega(z-\overline{\zeta}-it)\right| \le C_\omega(i\rho)$ при $\eta \le t \le 2\eta$ и $0 \le t \le \eta$ соответственно. Следовательно, функция $G_\omega(z,\zeta)$ голоморфна в G^+, и в (2.2) множитель $\exp\{-G_\omega(z,\zeta)\}$ голоморфен и не обращается в ноль в G^+. Голоморфность функции $F_\omega(z,\zeta)$ в G^+ и ее единственный, простой нуль в точке ζ следуют из тех же свойств $\overline{b}_{\omega_1}(z,\zeta)$, доказанных в лемме 3 работы [5]. □

Ниже мы даем полезную оценку для фактора типа Бляшке.

Лемма 2.1. *Если $\omega(t) \in \Omega$, то при любых $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$, $\rho > \eta$ и $\varepsilon \in (0, 1+\alpha)$*

$$|\log b_\omega(z,\zeta)| \le \frac{M_{\rho,\varepsilon}}{(\rho-\eta)^{2+\alpha-\varepsilon}} \int_0^\eta \omega(t)dt, \quad \operatorname{Im} z > 2\rho, \tag{2.4}$$

где постоянная $M_{\rho,\varepsilon} > 0$ зависит только от ρ и ε.

Доказательство. Нетрудно проверить, что ввиду второго равенства в (1.3) и оценки (3.2) из [8]

$$|C_{\omega_1}(z)| \le \frac{M_{\omega,\rho,\varepsilon}}{|z|^{2+\alpha-\varepsilon}}, \quad \operatorname{Im} z > \rho. \tag{2.5}$$

Из этого неравенства и представления (2.1) следует оценка (2.4). □

2.2. Теперь исследуем некоторые свойства фактора типа Бляшке $b_\omega(z,\zeta)$, выявляемые с применением оператора L_ω, определенного в (1.1).

Лемма 2.2. *Если $\omega(x) \in \Omega$ и $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$ - фиксированная точка, то функция $L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|$ гармонически продолжаема на всю конечную комплексную плоскость $\mathbb{C}$, кроме замкнутого отрезка прямой $[\zeta,\overline{\zeta}]$, соединяющей точки*

ζ и $\overline{\zeta}$, и в любой точке $z = x + iy \notin [\zeta, \overline{\zeta}]$ справедливы представления

$$L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| = \mathrm{Re} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\omega(\eta - |t|)}{t + i(z-\xi)} dt, \tag{2.6}$$

$$L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| = -2y \int_0^{\eta} \frac{y^2 + (x-\xi)^2 - t^2}{[t^2 + y^2 + (x-\xi)^2]^2 - 4t^2y^2} \omega(\eta - t) dt. \tag{2.7}$$

Если, дополнительно, $\omega(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на $(0,\eta]$, то функция $L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)|$ непрерывна в точках открытого отрезка $(\zeta, \overline{\zeta})$.

Доказательство. Представление (2.6) следует из (1.1), (1.4), (2.1), абсолютной сходимости интеграла внутри $G^+/[\zeta,\overline{\zeta}]$ и единственности гармонической функции. Гармоничность $L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)|$ вне отрезка $[\zeta, \overline{\zeta}]$ следует из равномерной сходимости интеграла (2.6) в любой области, удаленной от отрезка $[\zeta, \overline{\zeta}]$. Формула (2.7) следует прямым вычислением из (2.6). Заметим, что $L_\omega \log |b_\omega(-iz + \xi, \zeta)| = -L_\omega \log |b_\omega(iz + \xi, \zeta)|$, а при $z \notin [-\eta, \eta]$

$$L_\omega \log |b_\omega(iz + \xi, \zeta)| = -2\pi \mathrm{Im}\ \Phi_\omega(z), \quad \text{где} \quad \Phi_\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\omega(\eta - |t|)}{t - z} dt.$$

Тем самым, можно воспользоваться хорошо известными свойствами интеграла типа Коши (см. [6], Гл. I), которые гласят: $\Phi_\omega(x)$ - непрерывная на $(-\eta, \eta)$ функция класса Lip λ с любым $\lambda \in (0, 1)$. При любом $x \in (-\eta, \eta)$ существуют и конечны пределы $\lim\limits_{z\to x, z\in G^+} \Phi_\omega(z) = \Phi_\omega^+(z)$, $\lim\limits_{z\to x, z\in G^-} \Phi_\omega(z) = \Phi_\omega^-(z)$, связанные формулами Сохоцкого-Племеля $\Phi_\omega^+(z) - \Phi_\omega^-(z) = \omega(\eta - |x|)$, $\Phi_\omega^+(z) + \Phi_\omega^-(z) = 2\Phi_\omega(z)$. Эти пределы суть непрерывные функции класса Lip λ на $(-\eta, \eta)$ с любым $\lambda \in (0, 1)$. И наконец, если $\omega(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на $(0, \eta]$, то $\omega(|\eta| - t)$ удовлетворяет тому же условию на $(-\eta, \eta)$, и функция $L_\omega \log |b_\omega(iz + \xi, \zeta)| = -2\pi \mathrm{Im}\ \Phi_\omega(z)$ непрерывна в точках открытого отрезка $(\zeta, \overline{\zeta})$. □

Лемма 2.3. *При любом $\omega \in \Omega$ и любом фиксированном $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L_\omega \log |b_\omega(x + iy, \zeta)| dx = \begin{cases} -\int_0^{\eta} \omega(x) dx, & y \geq \eta, \\ -\int_{\eta - y}^{\eta} \omega(x) dx, & 0 < y < \eta, \end{cases} \tag{2.8}$$

что является непрерывной функцией от $y \in (0, +\infty)$. Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \big| L_\omega \log |b_\omega(x + iy, \zeta)| \big| dx \leq 3 \int_0^{\eta} \omega(x) dx, \quad 0 < y < +\infty. \tag{2.9}$$

Доказательство. Из (2.6) следует, что при $x + iy \notin [\zeta, \overline{\zeta}]$

$$L_\omega \log |b_\omega(x + iy, \zeta)| = \int_{-\eta}^{\eta} \frac{t - y}{(t-y)^2 + (x-\xi)^2} \omega(\eta - |t|) dt. \tag{2.10}$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|dx = \pi \int_{-\eta}^{\eta} \omega(\eta - |t|) \operatorname{sign}\,(t-y)dt,$$

и вычисляя последний интеграл приходим к (2.8). Для доказательства (2.9) заметим, что ввиду (2.6) при любом $y > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta}\left(\frac{|t-y|}{\pi}\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta}\frac{dx}{(t-y)^2+(x-\xi)^2}\right)\omega(\eta-|t|)dt < \int_0^\eta \omega(t)dt.$$

В силу (2.7) $L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| \leq 0$, если $|x-\xi| \geq \eta$, или $y \geq \eta$. Поэтому, ввиду (2.8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx = \int_0^\eta \omega(x)dx, \quad \eta \leq y < +\infty.$$

Для доказательства (2.9) при $0 < y < \eta$ заметим, что в силу (2.7) множество S_y^+ тех x, при которых $L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)| \geq 0$, лежит в интервале $(\xi-\eta, \xi+\eta)$. Следовательно

$$(2.11)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx = \left(2\int_{S_y^+} - \int_{-\infty}^{+\infty}\right) L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|dx$$

$$= 2\int_{S_y^+} L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|dx + 2\pi\int_{\eta-y}^{\eta}\omega(t)dt$$

$$< 2\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx + 2\pi\int_0^\eta \omega(t)dt \leq 6\pi\int_0^\eta \omega(t)dt. \qquad \square$$

Лемма 2.4. *Если $\zeta = \xi + i\eta \in G^+$ - фиксированная точка, а функция $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет условию Гельдера на $(0, \eta]$, то*

$$(2.12)\qquad \lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx = 0.$$

Доказательство. Ввиду (2.8) интеграл по $(-\infty, +\infty)$ в правой части первой строки формулы (2.11) стремится к нулю при $y \to 0$. Для доказательства того же для интеграла по S_y^+ воспользуемся неравенством

$$0 \leq \int_{S_y^+} L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|dx \leq \int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} \big|L_\omega \log |b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx.$$

В силу леммы 2.2, функция $L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)|$ непрерывна в замкнутом квадрате $\{z = x+iy : |x-\xi| \leq \eta, \eta/2 \geq y\}$ и поэтому там ограничена. Тем самым, ввиду теоремы Лебега об ограниченной сходимости и представления (2.7)

$$\limsup_{y\to 0}\int_{S_\zeta^1} L_\omega \log|b_\omega(x+iy,\zeta)|dx \le \lim_{y\to 0}\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta}\big|L_\omega \log|b_\omega(x+iy,\zeta)|\big|dx = 0. \qquad \square$$

2.3. Докажем еще три леммы, которыми воспользуемся позже.

Лемма 2.5. *Если $\omega(t)\in\Omega$, тогда при любом фиксированном $\zeta=\xi+i\eta\in G^+$ функция*

$$\varphi_\omega(z,\zeta) = L_\omega \log\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)},$$

где $b_0(z,\zeta)$ - обычный фактор Бляшке (2.2), *голоморфна в $\mathbb{C}\backslash\{\xi-ih: 0\le h<+\infty\}$.*

Доказательство. В силу формул (2.2) и (2.6)

$$L_\omega \log b_0(z,\zeta) = -\int_0^{+\infty}\frac{\omega(t)dt}{t-i(z-\zeta)} + \int_0^{+\infty}\frac{\omega(t)dt}{t-i(z-\overline{\zeta})},$$

$$L_\omega \log b_\omega(z,\zeta) = -\int_0^{\eta}\frac{\omega(t)dt}{t-i(z-\zeta)} + \int_0^{\eta}\frac{\omega(t)dt}{t+i(z-\overline{\zeta})}.$$

Тем самым, приходим к представлению

$$\varphi_\omega(z,\zeta) = \int_\eta^{+\infty}\left\{\frac{1}{t-i(z-\zeta)} - \frac{1}{t-i(z-\overline{\zeta})}\right\}\omega(t)dt + \int_0^{\eta}\left\{\frac{1}{t+i(z-\overline{\zeta})} - \frac{1}{t-i(z-\overline{\zeta})}\right\}\omega(t)dt, \tag{2.13}$$

откуда следует голоморфность $\varphi_\omega(z,\zeta)$ в надлежащей области. $\square$

Лемма 2.6. *Если $\omega(t)\in\Omega$, то при любом фиксированном $\zeta=\xi+i\eta\in G^+$*

$$\operatorname{Re}\varphi_\omega(z,\zeta)\le 0,\quad z\in\overline{G^+}\backslash\xi.$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим функцию $\varphi_\omega^*(z,\zeta)=\varphi_\omega(z-\xi,\zeta)$. Отнимая от (2.13) то же представление для $\varphi_0(z-\xi,\zeta)\equiv 0$ (обозначение для случая $\omega(x)\equiv 1$) умноженное на $\omega(\eta)$, получаем

$$\varphi_\omega^*(z,\zeta) = \int_\eta^{+\infty}\left\{\frac{1}{t-i(z-i\eta)} - \frac{1}{t-i(z+i\eta)}\right\}[\omega(t)-\omega(\eta)]dt + \int_0^{\eta}\left\{\frac{1}{t+i(z+i\eta)} - \frac{1}{t-i(z+i\eta)}\right\}[\omega(t)-\omega(\eta)]dt \equiv I_1+I_2. \tag{2.14}$$

Чтобы доказать, что $\operatorname{Re}\varphi_\omega^*(x,\zeta)\le 0$ $(-\infty<x<+\infty,\ x\ne 0)$, заметим, что

$$\operatorname{Re}\varphi_\omega^*(x,\zeta) = \left(\int_0^\eta + \int_\eta^{+\infty}\right)[\omega(t)-\omega(\eta)]d\log\left|\frac{t-\eta+ix}{t+\eta+ix}\right| := J_1+J_2.$$

Легко видеть, что при $0 < t < \eta$

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\left|\frac{t-\eta+ix}{t+\eta+ix}\right| = -2\eta\frac{x^2+\eta^2-t^2}{|(t+ix)^2-\eta^2|^2} < 0,$$

причем $\omega(t)-\omega(\eta) \geq 0$, поскольку функции $\omega(t)$ невозрастающая. Таким образом, $J_1(x) \leq 0$, $-\infty < x < +\infty$. Далее, интегрированием по частям получаем

$$J_2(x) = -\int_\eta^{+\infty}\log\left|\frac{(x+it)-i\eta}{(x+it)+i\eta}\right| d\omega(t) \leq 0.$$

Для распространения неравенства $\varphi^*(x,\zeta) \leq 0$ на все G^+ докажем оценку

$$|\varphi^*_\omega(z,\zeta)| \leq \frac{M_{\omega,\eta}}{|z|}, \quad z \in \overline{G^+}, \quad |z| > 2\eta, \tag{2.15}$$

где постоянная $M_{\omega,\eta} > 0$ зависит только от ω и η. Действительно, нетрудно видеть, что при $z \in \overline{G^+}$, $|z| > 2\eta$,

$$\begin{aligned}
|\varphi^*_\omega(z,\zeta)| &\leq \int_\eta^{+\infty}\frac{2\eta\omega(\eta)dt}{|[z+i(t-\eta)][z+i(t+\eta)]|} + \int_0^\eta \frac{2|z+i\eta|\omega(t)dt}{|[z+i(\eta-t)][z+i(t+\eta)]|}\\
&\leq 4\eta\omega(\eta)\int_\eta^{+\infty}\frac{dt}{(|z|+t-\eta)(|z|+t+\eta)} + 2^{3/2}\int_0^\eta\frac{\omega(t)dt}{|z|+\eta-t}\\
&< 4\eta\omega(\eta)\int_\eta^{+\infty}\frac{dt}{(|z|+t-\eta)^2} + \frac{2^{3/2}}{|z|}\int_0^\eta\omega(t)dt \leq \frac{M_{\omega,\eta}}{|z|}.
\end{aligned}$$

В силу этой оценки неположительность $\operatorname{Re}\varphi^*_\omega(z,\zeta)$ будет распространена на G^+ путем применения теоремы 1.1 Гл. 7, [7], если докажем, что

$$\liminf_{y\to+0}\int_{-1}^{1}|\operatorname{Re}\varphi^*_\omega(x+iy,\zeta)|dx < +\infty.$$

С этой целью заметим, что в (2.14)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}|\operatorname{Re} I_2(x+iy)|dx &\leq \int_0^\eta\omega(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{t-y-\eta}{(t-y-\eta)^2+x^2}+\frac{t+y+\eta}{(t+y+\eta)^2+x^2}\right\}dx\\
&= 2\pi\int_0^\eta\omega(t)dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Кроме того, с заменами переменных $\lambda = (t+y-\eta)/x$ и $t = 2\eta/x$ получаем

$$\int_{-1}^{1}|\operatorname{Re} I_1(x+iy)|dx \leq 16\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}\frac{dt}{t}\int_0^{+\infty}\frac{[(\lambda+1)^2+\lambda t]d\lambda}{(\lambda+1)^2(\lambda+t+1)^2} := K_1 + K_2.$$

Здесь

$$K_1 = 16\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}\frac{dt}{t}\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+t+1)^2} < 16\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)} < 8\omega(\eta) < +\infty.$$

и, с заменой перемешю $\lambda^2 = x$,

$$K_2 = 16\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}\frac{\lambda d\lambda}{(\lambda+1)^2(\lambda+t+1)^2}$$
$$< 8\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)[x+(t+1)^2]} = 16\eta\omega(\eta)\int_{2\eta}^{+\infty}\log(t+1)\frac{dt}{t^2}dt < +\infty.$$

□

Лемма 2.7. *Если $\omega(t)\in\Omega$ с $\alpha\in(-1,0)$, то при любом $\zeta=\xi+i\eta\in G^+$*

$$\log\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C_\omega(z-t)L_\omega\log|b_0(t,\zeta)|dt := -J_\omega(z,\zeta),\quad z\in G^+, \tag{2.16}$$

и при любых $\varepsilon\in(0,1+\alpha)$ и $\operatorname{Im} z>\rho>0$

$$|J_\omega(z,\xi)|\le A_{\omega,\rho}(1+\eta)\int_0^\eta\omega(t)dt, \tag{2.17}$$

где постоянная $A_{\omega,\rho}>0$ зависит только от p и функции ω.

Доказательство. По теореме Герглотца-Рисса

$$\mathrm{Re}\,\varphi_\omega(z,\zeta) = py + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varphi_\omega(t,\zeta)}{-i(z-t)}dt,\quad z=x+iy\in G^+,$$

где $p=\lim\limits_{y\to+\infty}y^{-1}\mathrm{Re}\,\varphi_\omega(iy,\zeta)=0$ в силу (2.15). С другой стороны, легко видеть, что

$$L_\omega\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C_\omega(z-t)\mathrm{Re}\,\varphi_\omega(t,\zeta)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varphi_\omega(t,\zeta)}{-i(z-t)}dt,\quad z\in G^+.$$

Кроме того, легко проверить, что функция $\log\left|\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)}\right|$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.1 из [3], и поэтому

$$\log\left|\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)}\right| = a_0 + a_1x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\,C_\omega(z-t)L_\omega\log\left|\frac{b_\omega(t,\zeta)}{b_0(t,\zeta)}\right|dt,\quad z\in G^+.$$

Рассматривая в этой формуле поведение левой стороны и интеграла справа при $|z|\to+\infty$ на лучах $z=re^{i\vartheta}$ ($|\vartheta-\pi/2|<\pi/2$), видим, что левая сторона, очевидно, стремится к нулю при $|z|\to+\infty$. В интеграле же $L_\omega\log\left|\frac{b_\omega(t,\zeta)}{b_0(t,\zeta)}\right|\in L^1(-\infty,+\infty)$, а для ядра справедлива оценка (2.5). Тем самым, интеграл тоже стремится к нулю при $|z|\to+\infty$, и поэтому $a_0=a_1=0$. Далее, ввиду (2.7) $L_\omega\log|b_\omega(t,\zeta)=0$ при любом $x\in(-\infty,+\infty)$, что приводит к формуле (2.16). Для доказательства (2.17), воспользуемся представлением (2.2) и вычислим

$$L_\omega\log|b_0(t,\zeta)| = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\omega(\sigma)d\sigma\int_{-\eta}^{\eta}\frac{d\lambda}{(i\sigma-i\lambda+t-\xi)^2}.$$

Отсюда

$$-J_\omega(z,\zeta) = -\int_0^{+\infty}\omega(\sigma)d\sigma\int_{-\eta}^{\eta}[I_1(\lambda)+I_2(\lambda)]d\lambda,$$

где по теореме о вычетах и формуле (1.3)

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_\omega(z+t)dt}{[t-(-\xi-i\lambda+i\sigma)]^2} = \begin{cases}-C_{\omega_1}(z-\xi-i\lambda+i\sigma), & \lambda<\sigma,\\ 0, & \lambda>\sigma;\end{cases}$$

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_\omega(z+t)dt}{[t-(-\xi+i\lambda-i\sigma)]^2} = \begin{cases}0, & \lambda<\sigma,\\ -C_{\omega_1}(z-\xi+i\lambda-i\sigma), & \lambda>\sigma.\end{cases}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}-J(z,\zeta) = &\int_0^{\eta}\omega(\sigma)d\sigma\int_{-\eta}^{\sigma}C_{\omega_1}(z-\xi-i\lambda+i\sigma)d\lambda\\ &+\int_{\eta}^{+\infty}\omega(\sigma)d\sigma\int_{-\eta}^{\eta}C_{\omega_1}(z-\xi-i\lambda+i\sigma)d\lambda\\ &+\int_0^{\eta}\omega(\sigma)d\sigma\int_{\sigma}^{\eta}C_{\omega_1}(z-\xi+i\lambda-i\sigma)d\lambda := K_1+K_2+K_3.\end{aligned}$$

Как можно проверить, с применением оценки (3.2) из [8] к $C_{\omega_1}(z)$ получаем, что при любых $\epsilon\in(0,1+\alpha)$ и $\operatorname{Im} z = y > \rho > 0$

$$|K_2| \le M_{\omega,\rho,\epsilon}\int_0^{+\infty}\omega(\lambda+\eta)\left\{\frac{1}{(y+\lambda)^{1+\alpha-\epsilon}} - \frac{1}{(y+\lambda+2\eta)^{1+\alpha-\epsilon}}\right\}d\lambda,$$

где постоянная $M_{\omega,\rho,\epsilon}>0$ зависит только от ω, ρ и ϵ. Далее, оценивая подынтегральное выражение получаем, что

$$|K_2| \le M'_{\omega,\rho,\epsilon}\frac{\eta}{1+\eta}\int_0^{+\infty}\frac{\omega(\lambda)d\lambda}{(\rho+\lambda)^{2+\alpha-\epsilon}} < M''_{\omega,\rho,\epsilon}\frac{\eta}{1+\eta} \le M'''_{\omega,\rho,\epsilon}\int_0^{\eta}\omega(t)dt$$

с аналогичными постоянными. Таким же образом, но значительно проще приходим к неравенствам

$$|K_{1,3}| \le M''''_{\omega,\rho,\epsilon}\eta\int_0^{\eta}\omega(t)dt.$$

Из установленных оценок следует неравенство (2.17). □

3. Потенциалы типа Грина

3.1. Начнем со следующей теоремы о сходимости потенциалов типа Грина.

Теорема 3.1. *Пусть $\omega(t)\in\Omega$ и $\nu(\zeta)\ge 0$ - борелева мера в полуплоскости G^+, с носителем в полосе, т.е.* $\sup\{\operatorname{Im}(\text{support }\nu)\} = D_0 < +\infty$, *и такая, что*

$$\iint_{G^+}\left(\int_0^{\operatorname{Im}\zeta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{3.1}$$

Тогда потенциал типа Грина

$$P_\omega(z) = \iint_{G^+} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta)$$

сходится в G^+, *где является субгармонической функцией с мерой Рисса* $\nu(\zeta)$.

Доказательство. В любой полуплоскости $G_\rho^+ = \{z : \operatorname{Im} z > \rho\}$ с $0 < \rho < \Delta$ определим потенциал типа Грина по формуле

$$P_\omega(z) = P_0(z,\rho) + U_\omega(z,\rho), \quad z \in G_\rho^+,$$

где

$$P_0(z,\rho) = \iint_{G_\rho^+} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\nu(\zeta) = \iint_{G_\rho^+} \log|b_0(z,\zeta)|d\nu(\zeta)$$

- обычный потенциал Грина, который, как хорошо известно, сходится в G^+ при условии Бляшке, что слабее (3.1), а

$$\begin{aligned} U_\omega(z,\rho) &= \iint_{G^+\setminus G_\rho^+} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \iint_{G_\rho^+} \log\left|\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)}\right| d\nu(\zeta) \\ &= U_\omega^{(1)}(z,\rho) + U_\omega^{(2)}(z,\rho). \end{aligned}$$

Докажем, что $P_\omega(z)$ сходится в G^+ в том смысле, что при любом $\rho \in (0,\Delta)$ потенциал $P_0(z,\rho)$ сходится в G^+, а функция $U_\omega(z,\rho)$ гармонична в G_ρ^+.

Отметим, что по теореме 2.1 подынтегральная функция $\log|b_\omega(z,\zeta)|$ в $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ гармонична в G_ρ^+. Поэтому, полагая, что $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ и $y > \rho_1$, где $\rho_1 > \rho$ фиксировано, а затем используя определение (2.1) функции $b_\omega(z,\zeta)$ получаем

$$\big|\log|b_\omega(z,\zeta)|\big| = \int_{-\eta}^{\eta} \big|C_\omega(z-\xi-it)\big|\omega(\eta-|t|)dt \le 2C_\omega(i(\rho_1-\rho)) \int_0^{\eta} \omega(t)dt.$$

Таким образом

$$|U_\omega^{(1)}(z,\rho)| \le \iint_{G^+\setminus G_\rho^+} \big|\log|b_\omega(z,\zeta)|\big|d\nu(\zeta) \le M \iint_{G^+\setminus G_\rho^+} \left(\int_0^{\eta} \omega(t)dt\right) d\nu(\zeta) < +\infty$$

с $M = 2C_\omega(i(\rho_1-\rho))$, т.е. в $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ модуль гармонической в G_ρ^+ подынтегральной функции обладает независимой от $z \in G_{\rho_1}^+$, интегрируемой мажорантой, и следовательно, функция $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ гармонична в G_ρ^+. Для доказательства гармоничности $U_\omega^{(2)}(z,\rho)$ в G^+, заметим, что здесь подынтегральная функция гармонична в G^+ при любом $\zeta \in G^+$, а интеграл равномерно сходится в G^+ в силу оценки (2.17). □

Теорема 3.2. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega$, *борелева мера* $\nu(\zeta) \ge 0$ *потенциала типа Грина* $P_\omega(z)$ *подчинена условию* (3.1) *и* $\sup\{\operatorname{Im}(\text{support } \nu)\} = D_0 < +\infty$. *Далее, пусть* *замыкание множества предельных точек множества* $\mathrm{Re}\left\{(\mathrm{support}\ \nu)\bigcap G_\rho^+\right\}$ *имеет нулевую меру Лебега при любом* $\rho > 0$. *Тогда функция* $L_\omega P_\omega(z)$ *гармонична в области*

$$(3.2)\qquad \mathcal{D} = \left\{z \in G^+ : z \notin \bigcup_{\zeta \in \mathrm{supp}\,\nu} [\zeta, \mathrm{Re}\,\zeta]\right\}$$

и представима абсолютно и равномерно сходящимся внутри $\mathcal{D}$ *интегралом*

$$(3.3)\qquad L_\omega P_\omega(z) = \iint_{G^+} L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \quad z \in \mathcal{D}.$$

Кроме того,

$$(3.4)\qquad \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} L_\omega P_\omega(iy) = -\iint_{G^+}\left(\int_0^{\mathrm{Im}\,\zeta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta).$$

Доказательство. Сначала покажем, чт функция

$$(3.5)\qquad F(z) = \iint_{G^+} L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta)$$

гармонична в $\mathcal{D}$. Действительно, любой компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ удален на какое-то расстояние $d > 0$ от множества $\bigcup_{\zeta\in\mathrm{supp}\,\nu}[\zeta, \mathrm{Re}\,\zeta]$. Отсюда, в силу формулы (2.6) получаем нужную мажоранту для модуля подынтегральной функции в (3.5) в любой точке $z \in \mathcal{K}$:

$$|F(z)| \le \iint_{G^+} |L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)||d\nu(\zeta) \le \frac{2}{d}\iint_{G^+}\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Таким образом, интеграл в (3.5) абсолютно и равномерно сходится внутри $\mathcal{K}$, где представляет гармоническую функцию, поскольку по лемме 2.2 функция $L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|$ гармонична в $G^+ \setminus [\zeta, \mathrm{Re}\,\zeta]$. По (2.6), (3.1) и неравенству $\bar\omega(t) \le [\omega(t)]^{-1}$ $(0 < t < +\infty)$ из леммы 4.2 работы [3], где $\bar\omega(t) \nearrow$ для $\bar\Delta = \max\{\Delta_0, D_0\}$

и любого $z \in \mathcal{K}$ получаем

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{\omega}}|F(z)| &= \int_0^{+\infty} |F(z+i\sigma)|d\tilde{\omega}(\sigma)\\
&= \iint_{G^+} \left(\frac{2}{d}\int_0^{2\tilde{\Delta}} d\tilde{\omega}(\sigma) + 4\int_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}(\sigma)}{\sigma}\right)\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\\
&\le \iint_{G^+} \left(\frac{2}{d}\tilde{\omega}(2\tilde{\Delta}) + 4\frac{\tilde{\omega}(\sigma)}{\sigma}\Big|_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} + 4\int_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}(\sigma)}{\sigma^2}d\sigma\right)\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\\
&\le \iint_{G^+} \left(\frac{2}{d\omega(2\tilde{\Delta})} + \frac{4}{\sigma\omega(\sigma)}\Big|_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} + 4\int_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2\omega(\sigma)}\right)\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\\
&\le \iint_{G^+} \left(\frac{2}{d\omega(2\tilde{\Delta})} + \frac{4}{C_1}\int_{2\tilde{\Delta}}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{2+\alpha}}\right)\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\\
&= M\iint_{G^+}\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta) < +\infty,
\end{aligned}
$$

где $M > 0$ - постоянная. Из (2.1) и формулы (4.3) леммы 4.2 [3] следует, что при любом z с $\operatorname{Im} z > D_0$

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{\omega}}F(z) &= \int_0^{+\infty} F(z+i\sigma)d\tilde{\omega}(\sigma) = \iint_{G^+}\left[\int_0^{+\infty} L_\omega \log|b_\omega(z+i\sigma,\zeta)|d\tilde{\omega}(\sigma)\right]d\nu(\zeta)\\
&= \iint_{G^+} L_{\tilde{\omega}}L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{G^+}\log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = P_\omega(z),
\end{aligned}
$$

и, тем самым, эта формула верна для всех $z \in \mathcal{D}$ в силу единственности гармонической функции. Более того, $L_{\tilde{\omega}}F(z)$ имеет гармоническое продолжение на множество $\bigcup_{\zeta\in supp\,\nu}[\operatorname{Re}\zeta,\zeta)$, и функция $P_\omega(z)$ субгармонична в G^+.

Далее, ввиду абсолютной и равномерной сходимости интегралов, представляющих функцию $F(z)$ в $\operatorname{Im} z > D_0$ легко доказать, что $L_\omega L_{\tilde{\omega}}F(z) = F(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > D_0$, а также проверить, что $P_\omega(z) \in M_\omega$. Следовательно, функция $L_\omega P_\omega(z)$ гармонична в $\mathcal{D}$ в силу леммы 2.2 работы [3]. Таким образом, $L_\omega L_{\tilde{\omega}}F(z) = F(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > D_0$, где $L_{\tilde{\omega}}F(z) = P_\omega(z)$ для всех $z \in \mathcal{D}$. Отсюда следует, что $L_\omega P_\omega(z) = F(z)$ при любом $\operatorname{Im} z > D_0$, где обе стороны равенства - функции, гармонические в $\mathcal{D}$. Эти функции совпадают в области $\mathcal{D}$ в силу единственности гармонической функции, что доказывает формулу (3.3). Соотношение (3.4) очевидно ввиду (2.10). □

Теорема 3.3. *Пусть функция $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет условию Гельдера на $(0,+\infty)$, а борелева мера $\nu(\zeta) \ge 0$ условию (3.1), и $\sup\{\operatorname{Im}(\text{support } \nu)\} = D_0 < +\infty$. Далее, пусть при любом $\rho > 0$ замыкание множества предельных точек* *множества* $\mathrm{Re}\left\{(\mathrm{support}\ \nu)\bigcap G^+_\beta\right\}$ *имеет нулевую меру Лебега. Тогда верны соотношения*

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|L_\omega P_\omega(x+iy)\right|dx<+\infty, \tag{3.6}$$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|L_\omega P_\omega(x+iy)\right|dx=0, \tag{3.7}$$

$$\sup_{\mathrm{Im}\ z>D_0+1}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial y}P_\omega(z+i\sigma)\right|\omega(\sigma)d\sigma<+\infty. \tag{3.8}$$

Доказательство. Ввиду (3.3), (2.9) и теоремы Фубини получим, что при $y>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|L_\omega P_\omega(x+iy)\right|dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}dx\iint_{G^+}\left|L_\omega\log\left|b_\omega(x+iy,\zeta)\right|\right|d\nu(\zeta)$$
$$=\iint_{G^+}d\nu(\zeta)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|L_\omega\log\left|b_\omega(x+iy,\zeta)\right|\right|dx\le2\pi\iint_{G^+}\left(\int_0^\eta\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)<+\infty.$$

Отсюда, ввиду теоремы Лебега об ограниченной сходимости и (2.12), следует (3.7). Для доказательства (3.8), заметим, что функция $\log|b_\omega(z,\eta)|$ гармонична в $G^+_{D_0}$, а интеграл $P_\omega(z)$ равномерно сходится в $G^+_{D_0+1}$, поскольку по (2.1) при $y>D_0+1$ имеем

$$\left|\log\left|b_\omega(x+iy,\zeta)\right|\right|<\int_{-\eta}^{\eta}\left|C_\omega(x-\xi+i(y-t))\right|\omega(\eta-|t|)dt<2C_\omega(i)\int_0^\eta\omega(t)dt.$$

Легко видеть, что в $G^+_{D_0+1}$ модуль производной $\log|b_\omega(z,\zeta)|$ имеет ту же оценку, где $C_\omega(i)$ заменено на $C_{\omega_1}(i)$. Следовательно, при $y>D_0+1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}P_\omega(x+iy)=\iint_{G^+}\frac{\partial}{\partial y}\log\left|b_\omega(x+iy,\zeta)\right|d\nu(\zeta).$$

Далее, ввиду оценки (3.2) из [8] при любых $\varepsilon\in(0,1+\alpha)$ и $y>D_0+1$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}P_\omega(x+iy)\right|\le\iint_{G^+}\left|\frac{\partial}{\partial y}\log\left|b_\omega(x+iy,\zeta)\right|\right|d\nu(\zeta)$$
$$\le2\iint_{G^+}d\nu(\zeta)\int_{-\eta}^{\eta}\left|C_\omega(x-\xi+i(y-t))\right|\omega(\eta-|t|)dt$$
$$\le2M_{\varepsilon,1}\iint_{G^+}d\nu(\zeta)\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\omega(\eta-|t|)dt}{|x-\xi+i(y-t)|^{2+\alpha-\varepsilon}},$$

откуда вытекает соотношение (3.8). □

4. Весовые классы дельта-субгармонических функций

Всюду ниже будем полагать, что функция $U(z)$ дельта-субгармонична в верхней полуплоскости G^+, т.е. является разностью $U(z)=U_1(z)-U_2(z)$ двух субгармонических в G^+ функций. Кроме того, будем полагать, что знакопеременная мера

Рисса, т.е. заряд $\nu(\zeta)$ функции $U(z)$ минимально разложен в смысле Жордана, т.е. $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) - \nu_-(\zeta)$, где $\nu_\pm(\zeta)$ - положительная и отрицательная вариации меры $\nu(\zeta)$ - суть неотрицательные борелевы меры с непересекающимися носителями в G^+. Будем говорить, что дельта-субгармонические в некоторой области функции $U(z)$ и $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$ равны, т.е. $U(z) = V(z)$, если $U_1(z) + V_2(z) = U_2(z) + V_1(z)$ всюду в этой области.

Ниже мы используем характеристики типа Цудзи вида

$$(4.1)\quad \mathfrak{L}(\rho, \pm L_\omega U) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\pm L_\omega U(x+i\rho)\right\}^+ dx + \iint_{G_\rho^+}\left(\int_0^{\operatorname{Im}\zeta}\omega(t)dt\right)d\nu_\mp(\zeta).$$

где $0 < \rho < +\infty$ и использовано обозначение $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a = a^+ - a^-$. Отметим, что это определение имеет смысл. Действительно, если функция $U(z)$ убывает достаточно быстро в бесконечности и ее заряд $\nu(\zeta)$ достаточно хорош, чтобы обеспечивать сходимость соответствующего потенциала типа Грина, то функция $u(z) = U(z) - P_\omega(z)$ гармонична в G^+, и

$$L_\omega U(z) = L_\omega u(z) + L_\omega P_\omega(z),$$

где $L_\omega u(z)$ и $L_\omega P_\omega(z)$ определены выше.

Определение 4.1. *Пусть функция $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет условию Гельдера на $(0, +\infty)$. Тогда $\mathfrak{N}_\omega^m$ - класс всех дельта-субгармонических в G^+ функций $U(z)$ таких, что:*

(i) *Ассоциированный с $U(z)$ заряд ν таков, что $\operatorname{Im}\{\operatorname{supp}\nu\} \le D_0 < +\infty$, и при любом $\rho > 0$ замыкание множества предельных точек множества $\operatorname{Re}\{(\operatorname{supp}\nu) \cap G_\rho^+\}$ имеет нулевую меру Лебега.*

(ii) *$U(z) \in M_\omega$, т.е. существует угловая область $\Delta(\delta_0, R_0) = \{z : |\pi/2 - \arg z| \le \delta_0, |z| \ge R_0\}$ с $0 < \delta_0 \le \pi/2$ и $0 < R_0 < +\infty$ такая, что*

$$(4.2)\qquad \sup_{z\in\mathcal{K}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial y}U(z+i\sigma)\right|\omega(\sigma)d\sigma < +\infty$$

для любого компакта $\mathcal{K} \subset G \cap \Delta(\delta_0, R_0)$.

(iii) *Имеет место соотношение*

$$(4.3)\qquad \sup_{\rho>0}\left[\mathfrak{L}(\rho, L_\omega U) + \mathfrak{L}(\rho, -L_\omega U)\right] = S < +\infty.$$

Замечание 4.1. *Приведенное выше определение распространяет определение 3.1 работы [3] класса $\mathfrak{N}_\omega^m$ гармонических функций на случай дельта-субгармонических функций.*

Замечание 4.2. *Условие (4.3) определения 4.1 обеспечивает выполнение ограничения (3.1) на $\nu_\pm$ в любой полуплоскости G^+_ρ. Тем самым, по теореме 3.1 потенциал $P_\omega(z)$ суженного в G^+_ρ заряда ν сходится в G^+, и, следовательно, функции $[L_\omega U(z)]^\pm$, фигурирующие в (4.3), определены в G^+.*

Замечание 4.3. *В отличие от теории в единичном круге [1, 2, 9], основанной на равновесии неванлинновских характеристик роста и убывания, такое равновесие для харатеристик Цудзи, т.е. формула Б.Я.Левина, не выполняется для всех функций дельта-субгармонических в полуплоскости (см. гл. 3 в [7]). Поэтому естественно определять класс $\mathfrak{N}^m_\omega$ ограничением (4.3) на обе характеристики Цудзи - как роста, так и убывания, аналогично гл. 4 в [7].*

В следующей теореме установлены параметрические представления классов $\mathfrak{N}^m_\omega$.

Теорема 4.1. *При любом $\omega \in \Omega$ класс $\mathfrak{N}^m_\omega$ совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$U(z) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\{C_\omega(z-t)\}d\mu(t) + \iint_{G^+} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \tag{4.4}$$

где $z = x + iy \in G^+$, a_0 и a_1 - вещественные числа, функция $\mu(t)$ ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, а $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) - \nu_-(\zeta)$, где $\nu_\pm(\zeta) \geq 0$ борелевские меры в G^+ такие, что $\mathrm{Im}\{\mathrm{supp}\,\nu_\pm\} \leq D_0 < +\infty$, при любом $\rho > 0$ замыкание множества предельных точек множества $\mathrm{Re}\{(\mathrm{supp}\,\nu_\pm) \cap G^+_\rho\}$ имеет нулевую меру Лебега, и

$$\iint_{G^+}\left(\int_0^{\mathrm{Im}\zeta}\omega(x)dx\right)d\nu_\pm(\zeta) < +\infty. \tag{4.5}$$

Мера $\mu(t)$ в (4.4) восстанавливается формулой обращения Стильтьеса:

$$\mu(x) = \lim_{y\to+0}\int_0^x L_\omega U(t+iy)dt \quad \text{п.в.} \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{4.6}$$

а для чисел a_0 и a_1 имеет место соотношение

$$\lim_{y\to+\infty} U(x+iy) = a_0 + a_1 x, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $U(z) \in \mathfrak{N}^m_\omega$. Тогда, ввиду (4.3) и теоремы 3.1, при любом $\rho > 0$ потенциалы типа Грина

$$\iint_{G^+} \log|b_\omega(z - i\rho,\zeta)|d\nu_\pm(\zeta + i\rho) = \iint_{G^+_\rho} \log|b_\omega(z - i\rho, \zeta - i\rho)|d\nu_\pm(\zeta)$$

сходятся G_ρ^+, и функция

$$U_0(z) = U(z) - \iint_{G_\rho^+} \log\left|b_\omega(z - i\rho, \zeta - i\rho)\right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в G_ρ^+. В силу (3.8) интеграл в правой части этой формулы принадлежит M_ω. Поэтому также $U_0(z) \in M_\omega$, а по теореме 3.2

$$L_\omega U_0(z) = L_\omega U(z) - \iint_{G_\rho^+} L_\omega \log\left|b_\omega(z - i\rho, \zeta - i\rho)\right| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathcal{D},$$

где $\mathcal{D}$ - область (3.2), а функция $L_\omega U_0(z)$ гармонична в полуплоскости G_ρ^+ по лемме 2.2 из [3]. Кроме того,

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|L_\omega U_0(x + iy)\right| dx \le \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|L_\omega U(x + iy)\right| dx$$

$$+ \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \iint_{G_\rho^+} L_\omega \log\left|b_\omega(x + iy - i\rho, \zeta - i\rho)\right| d\nu(\zeta) \right| dx := A + B,$$

где

$$A \le \sup_{y>0} \left[\mathfrak{L}(y, L_\omega U) + \mathfrak{L}(y, -L_\omega U)\right] < +\infty,$$

в силу (4.3), а $B < +\infty$ в силу (3.6). Следовательно, по теореме Е. Д. Соломенцева [4] (см. также теорему 2.1 в [3])

$$L_\omega U_0(z + i\rho) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_\rho(t)}{(x - t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^+,$$

где $\mu_\rho(t)$ ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$. Аналогично лемме 1.3 из гл. 3 [7], нетрудно доказать, что $d\mu_\rho(t) = L_\omega U_0(t + i\rho)dt$. Отсюда, ввиду (3.7) и включения $L_\omega U(t + i\rho) \in L^1(-\infty, +\infty)$ вытекающего из (4.3), заключаем, что при любом $z = x + iy \in G^+$

$$L_\omega U(z + i\rho) = \iint_{G_\rho^+} L_\omega \log\left|b_\omega(z, \zeta - i\rho)\right| d\nu(\zeta) + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\omega U(t + i\rho)dt}{(x - t)^2 + y^2} dt. \tag{4.8}$$

Далее, ввиду (4.7)

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} \iint_{G_\rho^+} L_\omega \log\left|b_\omega(iy, \zeta - i\rho)\right| d\nu(\zeta) = -\iint_{G_\rho^+} \left(\int_0^{\eta-\rho} \omega(t)dt\right) d\nu(\zeta),$$

и отсюда приходим к формуле Б. Я. Левина: при любом $\rho > 0$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} L_\omega U(iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L_\omega U(t + i\rho)dt - \iint_{G_\rho^+} \left(\int_0^{\eta-\rho} \omega(t)dt\right) d\nu(\zeta), \tag{4.9}$$

где предел существует и конечен. Отметим, между прочим, что в терминах характеристик типа Цудзи (4.1) формула (4.9) есть равновесие

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{2} L_\omega U(iy) + \mathfrak{L}(\rho, -L_\omega U) = \mathfrak{L}(\rho, L_\omega U).$$

Теперь заметим, что из условия (4.3) следует (4.5). Действительно, по (4.3)

$$\sup_{\rho>0}\iint_{G^+_{\rho_0}}\left(\int_0^{\eta-\rho}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\le S$$

при любом фиксированном $\rho_0>0$ и любом $\rho\in(0,\rho_0)$. Поэтому

$$\iint_{G^+_{\rho_0}}\left(\int_0^{\eta}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\le\liminf_{\rho\to 0}\iint_{G^+_{\rho_0}}\left(\int_0^{\eta-\rho}\omega(t)dt\right)d\nu(\zeta)\le S,$$

что влечет (4.5). Следовательно, потенциалы типа Грина с $\nu_\pm$ сходятся и

$$\lim_{\rho\to+0}\iint_{G^+_\rho}L_\omega\log|b_\omega(z,\zeta-i\rho)|d\nu(\zeta)=\iint_{G^+}L_\omega\log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta),\quad z\in\mathcal{D},$$

поскольку потенциал по $G^+\setminus G^+_\rho$ исчезает, и, в силу (2.6), модули подынтегральных функций на обеих сторонах приведенного выше соотношения имеют интегрируемые мажоранты в любой точке $z\in\mathcal{D}$. Далее, по хорошо известным теоремам вещественного анализа существуют последовательность $\rho_k\downarrow 0$ и функция $\mu(t)$ ограниченной вариации на $(-\infty,+\infty)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L_\omega U(t+i\rho_k)dt}{(x-t)^2+y^2}dt=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}dt,\quad z=x+iy\in G^+.$$

Таким образом, для любой точки $z=x+iy\in\mathcal{D}$ предельный переход в (4.8) приводит к формуле

$$L_\omega U(z)=\iint_{G^+}L_\omega\log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta)+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}. \tag{4.10}$$

Теперь заметим, ввиду сходимости потенциала типа Грина функция

$$V(z)=U(z)-\iint_{G^+}\log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta)$$

гармонична в G^+. Кроме того, $V(z)\in M_\omega$, так как $U(z)\in M_\omega$ и потенциал тоже принадлежит M_ω в силу (3.8). Далее, ввиду определения 4.1 и неравенства (3.8) $V(z)$ удовлетворяет соотношению (4.2). Следовательно, $V(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{N}^m_\omega$ гармонических функций и, в силу теоремы 3.1 из [3], получаем

$$V(z)=a_0+a_1x+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\,C_\omega(z-t)d\mu_1(t),\quad z=x+iy\in G^+,$$

где a_0 и a_1 - вещественные числа, а $\mu_1(t)$ - функция ограниченной вариации на $(-\infty,+\infty)$. Применив оператор L_ω к обеим частям последнего равенства, ввиду (4.10) заключаем, что меры $\mu_1(t)$ и $\mu(t)$ совпадают. Итак, представление (4.4) доказано. Соотношение (4.7) для чисел a_0 и a_1 следует из того же соотношения теоремы 3.1 [3] для гармонических функций, так как соответствующий предел для потенциала типа Грина равняется нулю. Формула обращения Стильтьеса (4.6) очевидна ввиду соотношения (3.7) для потенциала типа Грина.

Обратно, если $U(z)$ - вида (4.4) с требуемыми параметрами, то $U(z) \in \mathfrak{N}^m_\omega$ в силу теоремы 3.1 из [3] и свойств (3.8), (3.6) потенциала типа Грина. □

Замечание 4.4. *В частном случае дискретной меры теорема 4.1 переходит в утверждение о том, что класс тех мероморфных в G^+ функций $f(z)$, для которых $\log|f(z)| \in \mathfrak{N}^m_\omega$ при каком-либо $\omega \in \Omega$, совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$(4.11)\quad f(z) = \frac{B_\omega(z,\{a_k\})}{B_\omega(z,\{b_n\})} \exp\left\{a_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)d\mu(t) + iC\right\}, \quad z \in G^+,$$

где $\mu(t)$ ограниченной вариации на $(-\infty,+\infty)$, a_0, a_1 и C - вещественные числа, а последовательности $\{a_k\}, \{b_n\} \subset G^+$ удовлетворяют условию типа Бляшке

$$\sum_k \int_0^{\operatorname{Im} a_k} \omega(t)dt < +\infty, \quad \sum_n \int_0^{\operatorname{Im} b_n} \omega(t)dt < +\infty.$$

Если факторизация (4.11) *имеет место, то*

$$\mu(x) = \lim_{y\to+0} \int_0^x L_\omega \log|f(t+iy)|dt \quad \text{п.в.} \quad x \in (-\infty,+\infty),$$
$$\lim_{y\to+\infty} \log|f(x+iy)| = a_0 + a_1 x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Замечание 4.5. *Дополнительные к включению $\mathfrak{N}^m_\omega$ условия*

$$\lim_{y\to+\infty} U(x_{1,2}+iy) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to+\infty} \log|f(x_{1,2}+iy)| = 0 \quad \text{при каких-либо} \quad x_1 \neq x_2$$

сужают рассмотренные выше классы дельта-субгармонических и мерморфных функций к некоторым подклассам функций ограниченного вида. Граничным свойствам рассмотренных классов авторы намерены посвятить отдельное исследование.

Abstract. The paper is devoted to the construction in the half-plane, for delta-subharmonic functions, of an analog of the part of the theory of M. M. Djrbashian-V. S. Zakarian, which relates to the factorization of the ω-weighted subclasses of meromorphic functions of bounded type in the unit disc. Some ω-weighted classes of delta-subharmonic functions with bounded Tsuji type characteristics are introduced in the upper half-plane and the descriptive representations of these classes are found.

Список литературы

[1] M. M. Džrbašjan, "Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc", in: Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), 2, Canad. Math. Congress, Montreal (1975).

[2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и Граничные Свойства Функций Мероморфных в Круге, Наука, Москва (1993).

[3] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика (в печати).

[4] Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, серия матем., 5, 73 – 91 (1959).

[5] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω-Bounded Type in the Half-Plane" CMFT: Calculation Methods and Function Theory, 7, 2, 205 – 238 (2007).

[6] Ф. Д. Гахов, Краевые Задачи, ГИФМЛ, Москва (1958).

[7] A. M. Jerbashian, Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane, Springer, Advances in Complex Analysis and Applications, 4 (2005).

[8] A. M. Jerbashian, "On $A^p_{\omega,\gamma}$ spaces in the half-plane", in: Operator Theory: Advances and Applications, 158, 141 – 158, Birkhäuser Verlag, Basel/Switzerland, (2005).

[9] А. М. Джрбашян, "Расширение теории факторизации М. М. Джрбашяна", Изв. НАН Армении, Математика, 30 (2), 39 – 61 (1995).

Поступила 11 января 2015

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 3. 2016, стр. 28-40.

GENERALIZATIONS OF KÖTHE-TOEPLITZ DUALS AND NULL DUALS OF NEW DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

S. ERFANMANESH AND D. FOROUTANNIA

Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran
E-mails: *saedeh.erfanmanesh@gmail.com; foroutan@vru.ac.ir*

Abstract. The main purpose of the paper is to generalize the notions of the Köthe-Toeplitz duals and Null duals of sequence spaces by introducing the concepts of αEF-, βEF-, γEF-duals and NEF-duals, where $E=(E_n)$ and $F=(F_n)$ are two partitions of finite subsets of the positive integers. These duals are computed for the classical sequence spaces l_∞, c and c_0. The other purpose of the paper is to introduce the sequence spaces $X(E,\Delta)=\left\{x=(x_k): \ \left(\sum_{i\in E_k} x_i-\sum_{i\in E_{k-1}} x_i\right)_{k=1}^{\infty}\in X\right\}$, where $X\in\{l_\infty, c, c_0\}$ We investigate the topological properties of these spaces, establish some inclusion relations between them, and compute the NEF-(or Null) duals for these spaces.

MSC2010 numbers: 40A05, 40C05, 46A45.

Keywords: Semi-normed sequence space; difference sequence space; matrix domain; α-, β-, γ- and N-duals.

1. Introduction

Let ω denote the space of all real-valued sequences. Any vector subspace of ω is called a sequence space. Let l_∞, c and c_0 be the spaces of bounded, convergent and null sequences $x=(x_k)$, respectively, endowed by the norm $\|x\|_\infty=\sup_{k\geq 1}|x_k|$. We write bs and cs for the spaces of all bounded and convergent series, respectively. Kizmaz [6] defined the difference sequence space

$$X(\Delta)=\{x=(x_k)\mid \Delta x\in X\},$$

for $X\in\{l_\infty, c, c_0\}$, where $\Delta x=(x_k-x_{k-1})_{k=1}^{\infty}$ and $x_0=0$. Observe that $X(\Delta)$ is a Banach space with the norm $\|x\|_\Delta=\sup_{k\geq 1}|x_k-x_{k-1}|$. For a sequence space X, the matrix domain X_A of an infinite matrix A is defined by

$$X_A=\{x=(x_n)\in\omega \ : \ Ax\in X\}, \tag{1.1}$$

which is a sequence space. The new sequence space X_A generated by the limitation matrix A from a sequence space X can be the extension or the contraction or the overlap of the original space X. A matrix $A=(a_{nk})$ is said to be a triangle matrix if $a_{nk} = 0$ for $k > n$ and $a_{nn} \neq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. If A is a triangle matrix, then one can easily observe that the sequence spaces X_A and X are linearly isomorphic, that is, $X_A \cong X$.

In the summability theory, the β-dual of a sequence space is very important in connection with inclusion theorems. The notion of a dual sequence space was introduced by Köthe and Toeplitz [8], and was extended to vector-valued sequence spaces by Maddox [9]. For the sequence spaces X and Y, the set $M(X,Y)$ defined by

$$M(X,Y) = \{a = (a_k) \in \omega \ : \ (a_k x_k)_{k=1}^{\infty} \in Y \quad \forall x = (x_k) \in X\}$$

is called the multiplier space of X and Y.

With the above notation, the α-, β- γ and N-duals of a sequence space X, denoted by X^α, X^β, X^γ and X^N, respectively, are defined as follows:

$$X^\alpha = M(X,l_1), \ \ X^\beta = M(X,cs), \ \ X^\gamma = M(X,bs), \ \ X^N = M(X,c_0).$$

Let $E = (E_n)$ be a partition of finite subsets of the positive integers such that

$$\max E_n < \min E_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

For $X \in \{l_p, l_\infty, c, c_0\}$ with $1 \leq p < \infty$, we define the sequence space $X(E)$ by

$$X(E) = \left\{ x = (x_k) \in \omega \ : \ \left(\sum_{i \in E_k} x_i \right)_{k=1}^{\infty} \in X \right\}.$$

The seminorms $\|\cdot\|_{p,E}$ on the sequence space $l_p(E)$ $(1 \leq p < \infty)$, and $\|\cdot\|_{\infty,E}$ on the space $X(E)$ for $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$ are defined by formulas:

$$\|x\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad \|x\|_{\infty,E} = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|.$$

It is worthwhile to note that in the special case $E_n = \{n : n = 1, 2, \cdots\}$, we have $X(E) = X$. Recently the Köthe-Toeplitz duals for these spaces were computed by Erfanmanesh and Foroutannia. In the past, several authors have studied the Köthe-Toeplitz duals of sequence spaces that are the matrix domains of triangle matrices in the classical spaces l_p, l_∞, c and c_0. For instance, some matrix domains of the difference operator have been studied in [2, 3, 10, 12]. In these papers the matrix domains are obtained by triangle matrices, and hence these spaces are normed sequence spaces. For more details on the domains of triangle matrices in some sequence spaces, we refer the reader to Chapter 4 of [1]. Note that the matrix domains considered in this paper are specified by a certain non-triangle matrix, so we should not expect that the related spaces are normed sequence spaces.

In this paper, the concepts of the Köthe-Toeplitz duals and Null duals are generalized and the αEF-, βEF-, γEF- and NEF-duals are determined for the classical sequence spaces l_∞, c and c_0. Also, the normed sequence space $X(\Delta)$ is extended to the semi-normed space $X(E,\Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. We consider some topological properties of this space and derive inclusion relations. Moreover, we compute the NEF-(or Null) duals for the space $X(E,\Delta)$. The obtained results are generalizations of some results of Malkowsky and Rakocevic [11] and Kizmaz [7].

2. The αEF-, βEF-, γEF- and NEF-duals of sequence spaces

In this section, we generalize the concept of multiplier space to introduce new generalizations of Köthe-Toeplitz duals and Null duals of sequence spaces. Furthermore, we determine these duals for the sequence spaces l_∞, c and c_0.

Definition 2.1. *Let $E = (E_n)$ and $F = (F_n)$ be two partitions of finite subsets of the positive integers satisfying condition (1.2). For the sequence spaces X and Y, the set $M_{E,F}(X,Y)$ defined by*

$$M_{E,F}(X,Y) = \left\{ a = (a_k) \in \omega \ : \ \left(\sum_{i \in F_k} a_i \sum_{i \in E_k} x_i \right)_{k=1}^{\infty} \in Y \quad \forall x = (x_k) \in X \right\}$$

is called the generalized multiplier space of X and Y.

With the above notation, the αEF-, βEF-, γEF- and NEF-duals of a sequence space X, denoted by $X^{\alpha EF}$, $X^{\beta EF}$, $X^{\gamma EF}$ and X^{NEF}, respectively, are defined by

$$X^{\alpha EF} = M_{EF}(X, l_1), \ \ X^{\beta EF} = M_{EF}(X, cs),$$

$$X^{\gamma EF} = M_{EF}(X, bs), \ \ X^{NEF} = M_{EF}(X, c_0).$$

It should be noted that in the special case $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, we have $M_{E,F}(X,Y) = M(X,Y)$, and hence

$$X^{\alpha EF} = X^{\alpha}, \qquad X^{\beta EF} = X^{\beta}, \qquad X^{\gamma EF} = X^{\gamma}, \qquad X^{NEF} = X^{N}.$$

Lemma 2.1. *Let $X, Y, Z \subset \omega$ and let $\{X_\delta : \delta \in A\}$ be any collection of subsets of ω. Then the following statements hold:*

(i) $X \subset Z$ implies $M_{E,F}(Z,Y) \subset M_{E,F}(X,Y)$,

(ii) $Y \subset Z$ implies $M_{E,F}(X,Y) \subset M_{E,F}(X,Z)$,

(iii) $X \subset M_{E,F}(M_{F,E}(X,Y), Y)$,

(iv) $M_{E,F}(X,Y) = M_{E,F}(M_{F,E}(M_{E,F}(X,Y),Y),Y)$,
(v) $M_{E,F}(\bigcup_{\delta\in A} X_\delta, Y) = \bigcap_{\delta\in A} M_{E,F}(X_\delta, Y)$.

Proof. The statements (i) and (ii) immediately follow from the definition of generalized multiplier space.
(iii) Let $x \in X$. We have $\left(\sum_{i\in E_k} a_i \sum_{i\in F_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in Y$ for all $a \in M_{F,E}(X,Y)$, and consequently $x \in M_{E,F}(M_{F,E}(X,Y),Y)$.
(iv) By applying (iii) with X replaced by $M_{F,E}(X,Y)$, we obtain

$$M_{E,F}(X,Y) \subset M_{E,F}(M_{F,E}(M_{E,F}(X,Y),Y),Y).$$

Conversely, due to (iii), we have $X \subset M_{F,E}(M_{E,F}(X,Y),Y)$. So, in view of part (i), we conclude that

$$M_{E,F}(M_{F,E}(M_{E,F}(X,Y),Y),Y) \subset M_{E,F}(X,Y).$$

(v) Observe first that in view of part (i), $X_\delta \subset \bigcup_{\delta\in A} X_\delta$ for all $\delta \in A$ implies

$$M_{E,F}(\bigcup_{\delta\in A} X_\delta, Y) \subset \bigcap_{\delta\in A} M_{E,F}(X_\delta, Y).$$

Conversely, if $a \in \bigcap_{\delta\in A} M_{E,F}(X_\delta, Y)$, then $a \in M_{E,F}(X_\delta, Y)$ for all $\delta \in A$. Hence

$$\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in Y,$$

for all $\delta \in A$ and for all $x \in X_\delta$. This implies $\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in Y$ for all $x \in \bigcup_{\delta\in A} X_\delta$, and hence $a \in M_{E,F}(\bigcup_{\delta\in A} X_\delta, Y)$. Thus $\bigcap_{\delta\in A} M_{E,F}(X_\delta, Y) \subset M_{E,F}(\bigcup_{\delta\in A} X_\delta, Y)$. □

Remark 2.1. *If $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, then we have Lemma 1.25 from* [11].

Letting † to denote either of the symbols α, β, γ or N, from now on we will use the following notation

$$(X^{\dagger EF})^{\dagger EF} = X^{\dagger\dagger EF}.$$

Corollary 2.1. *Let $X, Y \subset \omega$ and $\{X_\delta : \delta \in A\}$ be any collection of subsets of ω, and let † denote either of the symbols α, β, γ or N. Then the following statements hold:*
(i) $X^{\alpha EF} \subset X^{\beta EF} \subset X^{\gamma EF} \subset \omega$; in particular, $X^{\dagger EF}$ is a sequence space.
(ii) $X \subset Z$ implies $Z^{\dagger EF} \subset X^{\dagger EF}$.
(iii) $X \subset X^{\dagger\dagger EE}$.

(iv) $X^{\dagger EE} = X^{\dagger\dagger\dagger EE}$.

(v) $\left(\bigcup_{\delta\in\Lambda} X_\delta\right)^{\dagger EF} = \bigcap_{\delta\in\Lambda} X_\delta^{\dagger EF}$.

Remark 2.2. *If $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, then we have Corollary 1.26 from [11].*

Below, we determine the generalized multiplier space for some sequence spaces. To this end, we first recall the following result from [4]. Also, from now on, we denote the cardinal number of the set E_k by $|E_k|$.

Theorem 2.1 ([4], Corollary 2.5). *The following statements hold.*
(i) Let $\sup_n |E_n| < \infty$, then we have $X \subset X(E)$ for $X \in \{l_\infty, c_0\}$.
(ii) If $E_n = \{Nn - N + 1, Nn - N + 2, \cdots, Nn\}$ for all n, then $c \subset c(E)$.
(iii) If, in addition, $|E_n| > 1$ for an infinite number of n, then the inclusion relations in parts (i) and (ii) are strict.

Theorem 2.2. *If $\sup_k |E_k| < \infty$, then the following statements hold:*
(i) $M_{E,F}(c_0, X) = l_\infty(F)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$.
(ii) $M_{E,F}(l_\infty, X) = c_0(F)$, where $X \in \{c, c_0\}$.
(iii) If, in addition, $E_n = \{Nn - N + 1, Nn - N + 2, \cdots, Nn\}$ for all n, then $M_{E,F}(c, c) = c(F)$.

Proof. (i) Since $c_0 \subset c \subset l_\infty$, by applying Lemma 2.1(ii), we obtain

$$M_{E,F}(c_0, c_0) \subset M_{E,F}(c_0, c) \subset M_{E,F}(c_0, l_\infty).$$

So, it is enough to verify the inclusions $l_\infty(F) \subset M_{E,F}(c_0, c_0)$ and $M_{E,F}(c_0, l_\infty) \subset l_\infty(F)$. Assume first that $a \in l_\infty(F)$ and $x \in c_0$. Then by Theorem 2.1 we have $x \in c_0(E)$, and hence $\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right) = 0$, implying that $a \in M_{E,F}(c_0, c_0)$. Thus, we have $l_\infty(F) \subset M_{E,F}(c_0, c_0)$.

Now let $a \notin l_\infty(F)$. Then there is a subsequence $\left(\sum_{i\in F_{k_j}} a_i\right)_{j=1}^\infty$ of the sequence $\left(\sum_{i\in F_k} a_i\right)_{k=1}^\infty$ such that $\left|\sum_{i\in F_{k_j}} a_i\right| > j^2$ for $j = 1, 2, \cdots$. If the sequence $x = (x_i)$ is defined by

$$x_i = \begin{cases} \frac{(-1)^j j}{\sum_{i\in F_{k_j}} a_i} & if\ i = \min E_{k_j} \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

for $i = 1, 2, \cdots$, then we have $x \in c_0$ and $\sum_{i\in E_{k_j}} x_i \sum_{i\in F_{k_j}} a_i = (-1)^j j$, for all j. Hence

$$\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^\infty \notin l_\infty,$$

showing that $M_{E,F}(c_0, l_\infty) \subset l_\infty(F)$.

(ii) By Lemma 2.1(ii) we have

$$M_{E,F}(l_\infty, c_0) \subset M_{E,F}(l_\infty, c).$$

Hence, it is enough to verify the inclusions $c_0(F) \subset M_{E,F}(l_\infty, c_0)$ and $M_{E,F}(l_\infty, c) \subset c_0(F)$. Assume first that $a \in c_0(F)$. Then by Theorem 2.1 we have

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in l_\infty,$$

that is, $a \in M_{E,F}(l_\infty, c_0)$. Thus $c_0(F) \subset M_{E,F}(l_\infty, c_0)$.

Now let $a \notin c_0(F)$. Then there are a real number $b > 0$ and a subsequence $\left(\sum_{i\in F_{k_j}} a_i\right)_{j=1}^{\infty}$ of the sequence $\left(\sum_{i\in F_k} a_i\right)_{k=1}^{\infty}$ such that $\left|\sum_{i\in F_{k_j}} a_i\right| > b$ for all for $j = 1, 2, \cdots$. Defining the sequence $x = (x_i)$ as in part (ii), we have $x \in l_\infty$ and $\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \notin c$, which implies $a \notin M_{E,F}(l_\infty, c)$ and shows that $M_{E,F}(l_\infty, c) \subset c_0(F)$.

(iii) Suppose that $a \in c(F)$. By applying Theorem 2.1, we conclude that

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right) \quad \text{exists for all} \quad x \in c.$$

So $a \in M_{E,F}(c, c)$ and $c(F) \subset M_{E,F}(c, c)$.

Now we assume $a \notin c(F)$, and define the sequence x by $x = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots)$. It is easy to see that $x \in c$ and $\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} = \left(\sum_{i\in F_k} a_i\right)_{k=1}^{\infty} \notin c$. Thus, $a \notin M_{E,F}(c, c)$, showing that $M_{E,F}(c, c) \subset c(F)$. □

Remark 2.3. *If $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, then we have Example 1.28 from* [11].

As an immediate consequence of Theorem 2.2, we have the following result.

Corollary 2.2. (i) *If $\sup_k |E_k| < \infty$, then $c_0^{NEF} = l_\infty(F)$ and $l_\infty^{NEF} = c_0(F)$.*
(ii) *If $E_n = \{Nn - N + 1, Nn - N + 2, \cdots, Nn\}$ for all n, then $c^{NEF} = c_0(F)$.*

Now we proceed to obtain the αEF-, βEF- and γEF-duals for the sequence spaces l_∞, c and c_0.

Theorem 2.3. *Suppose that $\sup_k |E_k| < \infty$, and let † denote one of the symbols α, β, γ. Then we have $c_0^{\dagger EF} = c^{\dagger EF} = l_\infty^{\dagger EF} = l_1(F)$.*

Proof. We only prove the statement for the case $\dagger = \beta$, the other cases can be proved similarly. By Corollary 2.1(ii) we have $l_\infty^{\beta EF} \subset c^{\beta EF} \subset c_0^{\beta EF}$. Hence, it is enough to show that $l_1(F) \subset l_\infty^{\beta EF}$ and $c_0^{\beta EF} \subset l_1(F)$. Let $a \in l_1(F)$ and $x \in l_\infty$ be given. Then by Theorem 2.1 we have $x \in l_\infty(F)$. Hence

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right| \leq \sup\left|\sum_{i\in E_k} x_i\right| \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i\in F_k} a_i\right| < \infty.$$

showing that $\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in cs$. Thus, we have $a \in l_\infty^{\beta EF}$ and $l_1(F) \subset l_\infty^{\beta EF}$. To prove the inclusion $c_0^{\beta EF} \subset l_1(F)$, it is enough to show that for a given $a \notin l_1(F)$ a sequence $x \in c_0$ can be found to satisfy $\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \notin cs$. To show the existence of a sequence $x \in c_0$ with the above property, observe first that since $a \notin l_1(F)$, we may choose an index subsequence (n_j) from $\mathbf{N}$ with $n_0 = 0$ and

$$\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\left|\sum_{i\in F_k} a_i\right| > j, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

Now we define the sequence $x \in c_0$ such that the first element of the set E_k is equal to $\frac{1}{j} sgn \sum_{i\in F_k} a_i$ and the remaining elements are zero, whenever $n_{j-1} \leq k < n_j$. Then we have

$$\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\left(\sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i\right) = \frac{1}{j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}\left|\sum_{i\in F_k} a_i\right| > 1,$$

for $j = 1, 2, \cdots$. Therefore $\left(\sum_{i\in E_k} x_i \sum_{i\in F_k} a_i\right)_{k=1}^{\infty} \notin cs$ and $a \notin c_0^{\beta EF}$, showing that $c_0^{\beta EF} \subset l_1(F)$. □

Remark 2.4. *If $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, then we have Theorem 1.29 from [11].*

Definition 2.2. *A subset X of ω is said to be E-normal if $y \in X$ and $|\sum_{i\in E_k} x_i| \leq |\sum_{i\in E_k} y_i|$, for $k = 1, 2, \cdots$, together imply $x \in X$. In the special case where $E_n = \{n\}$ for all n, the set X is called normal.*

Example 2.1. The sequence spaces c_0 and l_∞ are normal, but they are not E-normal. Indeed, taking $x = (1, -1, 2, -2, \cdots)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \cdots)$ and $E_n = \{2n-1, 2n\}$ for all n, we have $|\sum_{i\in E_n} x_i| \leq |\sum_{i\in E_n} y_i|$ and $y \in c_0, l_\infty$, while $x \notin c_0, l_\infty$.

Example 2.2. The sequence spaces $c_0(E)$ and $l_\infty(E)$ are E-normal, but they are not normal. Indeed, taking $x = (1, 1, 2, 2, \cdots)$, $y = (1, -1, 2, -2, \cdots)$ and $E_n = \{2n-1, 2n\}$ for every n, it is easy to see that $|x_i| \leq |y_i|$ and $y \in c_0(E), l_\infty(E)$, while $x \notin c_0(E), l_\infty(E)$.

Example 2.3. The sequence spaces c and $c(E)$ are neither E-normal nor normal.

Theorem 2.4. *Let X be a E-normal subset of ω. Then we have*

$$X^{\alpha EF} = X^{\beta EF} = X^{\gamma EF}.$$

Proof. By Corollary 2.1(i) we have $X^{\alpha EF} \subset X^{\beta EF} \subset X^{\gamma EF}$. Hence, to prove the statement, it is enough to verify the inclusion $X^{\gamma EF} \subset X^{\alpha EF}$. Let $z \in X^{\gamma EF}$ and $x \in X$ be given. We define a sequence y such that $\sum_{i\in E_k} y_i = (sgn \sum_{i\in F_k} z_i) \left|\sum_{i\in E_k} x_i\right|$ for $k = 1, 2, \cdots$. It is clear that $\left|\sum_{i\in E_k} y_i\right| \leq \left|\sum_{i\in E_k} x_i\right|$ for all k. Consequently $y \in X$, because X is E-normal. So, we obtain

$$\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i\in F_k} z_i \sum_{i\in E_k} y_i\right)\right| < \infty.$$

Furthermore, by the definition of the sequence y, we have $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i\in F_k} z_i \sum_{i\in E_k} x_i\right| < \infty$. Taking into account that $x \in X$ is arbitrary, we conclude that $z \in X^{\alpha EF}$.

This completes the proof of the theorem. □

Remark 2.5. *If $E_n = F_n = \{n\}$ for all n, then we have Remark 1.27 from* [11].

3. Generalized difference sequence space

Suppose $E = (E_n)$ is a sequence of finite subsets of the positive integers that satisfy the condition (1.2). For every sequence space X, we define the generalized difference sequence space $X(E, \Delta)$ as follows:

$$X(E,\Delta) = \left\{ x = (x_k) \;:\; \left(\sum_{i\in E_k} x_i - \sum_{i\in E_{k-1}} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in X \right\},$$

where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. The seminorm $\|\!|.|\!\|_{E,\Delta}$ on $X(E, \Delta)$ is defined by

$$\|\!|x|\!\|_{E,\Delta} = \sup_k \left|\sum_{i\in E_k} x_i - \sum_{i\in E_{k-1}} x_i\right|. \tag{3.1}$$

It should be noted that the function $\|\!|.|\!\|_{E,\Delta}$ cannot be a norm. Since if $x = (1, -1, 0, 0, \cdots)$ and $E_n = \{2n-1, 2n\}$ for all n, then $\|\!|x|\!\|_{E,\Delta} = 0$ while $x \neq 0$. It is also important to note that in the special case $E_n = \{n : n = 1, 2, \cdots\}$ we have $X(E, \Delta) = X(\Delta)$ and $\|\!|x|\!\|_{E,\Delta} = \|x\|_\Delta$.

If the infinite matrix $A = (a_{nk})$ is defined by

$$a_{nk} = \begin{cases} -1 & if\; k \in E_{n-1} \\ 1 & if\; k \in E_n \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

then with the notation of (1.1), we can redefine the spaces $l_\infty(E)$, $c(E)$ and $c_0(E)$ as follows:

$$l_\infty(E,\Delta) = (l_\infty)_A, \qquad c(E,\Delta) = (c)_A, \qquad c_0(E,\Delta) = (c_0)_A.$$

The purpose of this section is to consider some properties of the sequence spaces $X(E,\Delta)$ and to derive some inclusion relations for these spaces. Also, we characterize the N-duals of $X(E,\Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. We begin with the following result which plays an essential role in our study of the spaces $X(E,\Delta)$.

Theorem 3.1. *For $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$ the sequence spaces $X(E,\Delta)$ are complete semi-normed linear spaces with respect to the semi-norm defined by (3.1).*

Proof. The result can be obtained by a direct verification, and so we omit the details.

It can easily be checked that the absolute property does not hold on the space $X(E,\Delta)$, that is, $\|x\|_{E,\Delta} \neq \||x|\|_{E,\Delta}$ for at least one sequence in this space, where $|x| = (|x_k|)$. Thus, $X(E,\Delta)$ is a sequence space of non-absolute type.

Theorem 3.2. *Let $M = \{x = (x_n) : \sum_{j\in E_n} x_j = 0, \forall n\}$. For $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$ the quotient space $X(E,\Delta)/M$ is linearly isomorphic to the space $X(\Delta)$.*

Proof. Consider the map

$$T : X(E,\Delta) \longrightarrow X(\Delta), \quad x \longrightarrow \left(\sum_{j\in E_n} x_j\right)_{n=1}^{\infty},$$

and observe that T is a linear and surjective map. So, the desired result follows from the first isomorphism theorem. $\square$

Note that if $|E_n| > 1$ only for a finite number of n, then we have $X(\Delta) = X(E,\Delta)$.

In the following, we derive some inclusion relations for the spaces X, $X(E)$, $X(\Delta)$ and $X(E,\Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$.

Theorem 3.3. *The following statements hold.*

(i) If $\sup_n |E_n| < \infty$, then $X \subset X(E,\Delta)$ for $X \in \{l_\infty, c_0\}$.

(ii) If $E_n = \{Nn-N+1, Nn-N+2, \cdots, Nn\}$ for all n, then $c \subset c(E,\Delta)$.

(iii) If $|E_n| > 1$ for an infinite number of n, then the inclusion relations in parts (i) and (ii) are strict.

(iv) We have $X(E) \subset X(E,\Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. Moreover, these inclusions are strict.

(v) If $E_n = \{Nn-N+1, Nn-N+2, \cdots, Nn\}$ for all n, then $X(\Delta) \subset X(E,\Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. Moreover, these inclusions are strict when $N > 1$.

Proof. Parts (i) and (ii) can easily be obtained by applying Theorem 2.1.

(iii) Since by assumption $|E_n| > 1$ for an infinite number of n, one can choose a sequence (n_j) with $|E_{n_j}| > 1$ for $j = 1, 2, \cdots$. Define a sequence $x = (x_k)$ as follows:

$$x_k = \begin{cases} j, & \text{if} \quad k = \min E_{n_j} \\ -j, & \text{if} \quad k = \min E_{n_j} + 1 \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

It is obvious that $\sum_{i\in E_n} x_i = 0$, hence $x \in X(E, \Delta)$, while $x \notin X$ for $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$, showing that the inclusions in parts (i) and (ii) are strict.

(iv) Putting $E_n = \{n\}$ in parts (i) and (ii), it can be concluded that $X \subset X(\Delta)$. Let $x \in X(E)$ be given. It is easy to check that $\left(\sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in X$ and $\left(\sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in X(\Delta)$. Thus, $x \in X(E, \Delta)$, and hence $X(E) \subset X(E, \Delta)$. Moreover, if the sequences $x = (x_k)$ and $y = (y_k)$ are defined as follows:

$$x_k = \begin{cases} j, & \text{if } k = \min E_j \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad y_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k = \min E_j \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

then we have $x \in X(E, \Delta) - X(E)$ for $X \in \{l_\infty, c\}$ and $y \in c_0(E, \Delta) - c_0(E)$.

(v) Taking into account that

$$\begin{aligned} \sum_{i\in E_n} x_i - \sum_{i\in E_{n-1}} x_i &= (x_{nN} - x_{nN-1}) + 2(x_{nN-1} - x_{nN-2}) + \cdots + N(x_{nN-N+1} - x_{nN-N}) \\ &+ (N-1)(x_{nN-N} - x_{nN-N-1}) + \cdots + (x_{nN-2N+2} - x_{nN-2N+1}), \end{aligned}$$

it is clear that $x \in X(\Delta)$ implies $x \in X(E, \Delta)$. Moreover, if $N > 1$ then we define the sequence $x = (x_k)$ as follows:

$$x_k = \begin{cases} n, & \text{if} \quad k = nN - N + 1 \\ 1-n, & \text{if} \quad k = nN - N + 2 \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and observe that $x \in X(E, \Delta) - X(\Delta)$. □

Below, we compute the N-dual of the difference sequence spaces $X(E, \Delta)$, where $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$. In order to do this, we first give a preliminary lemma.

Lemma 3.1. *The following statements hold.*

(i) If $x \in l_\infty(\Delta)$, then $\sup_k \left|\frac{x_k}{k}\right| < \infty$.

(ii) If $x \in c(\Delta)$, then $\frac{x_k}{k} \to \xi$ $(k \to \infty)$, where $\Delta x_k \to \xi$ $(k \to \infty)$.

(iii) If $x \in c_0(\Delta)$, then $\frac{x_k}{k} \to 0$ $(k \to \infty)$.

The proof is trivial and so is omitted.

Theorem 3.4. *The following equalities hold:*

$$c^{NEF}(E,\Delta) = l_\infty^{NEF}(E,\Delta) = \left\{ a = (a_k) \;:\; \left(k \sum_{i\in F_k} a_i \right)_{k=1}^{\infty} \in c_0 \right\} := d_1.$$

Proof. We first show that $c^{NEF}(E,\Delta) = d_1$. To this end, assume $a \in c^{NEF}(E,\Delta)$, and observe that

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i = 0,$$

for all $x \in c(E,\Delta)$. We choose the sequence x such that $\sum_{i\in E_k} x_i = k$ for all k, so $x \in c(E,\Delta)$ and hence $\lim_{k\to\infty} k\sum_{i\in F_k} a_i = 0$. Thus $c^{NEF}(E,\Delta) \subset d_1$. Now let $a \in d_1$. Since $\left(\sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in c(\Delta)$ for every $x \in c(E,\Delta)$, and there is a real number ξ such that

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j\in E_k} x_j - \sum_{j\in E_{k-1}} x_j \right) = \xi,$$

by Lemma 3.1 we have

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in F_k} a_i \sum_{j\in E_k} x_j = \lim_{k\to\infty} k \sum_{i\in F_k} a_i \frac{\sum_{j\in E_k} x_j}{k} = 0.$$

Therefore $a \in c^{NEF}(E,\Delta)$, and hence $d_1 \subset c^{NEF}(E,\Delta)$.

Now we show that $l_\infty^{NEF}(E,\Delta) = d_1$. It is clear that $c(E,\Delta) \subset l_\infty(E,\Delta)$, implying that $l_\infty^{NEF}(E,\Delta) \subset c^{NEF}(E,\Delta) = d_1$. Let $a \in d_1$ and $x \in l_\infty(E,\Delta)$. Then we have $\left(\sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty(\Delta)$ and $\sup_k \left| \frac{\sum_{i\in E_k} x_i}{k} \right| < \infty$ by Lemma 3.1. Therefore

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in F_k} a_i \sum_{i\in E_k} x_i = \lim_{k\to\infty} k \sum_{i\in F_k} a_i \frac{\sum_{j\in E_k} x_j}{k} = 0,$$

implying that $a \in l_\infty^{NEF}(E,\Delta)$. □

Corollary 3.1. *The following equalities hold:*

$$c^{N}(\Delta) = l_\infty^{N}(\Delta) = \{ a = (a_k) \;:\; (ka_k) \in c_0 \}.$$

Proof. The result follows from Theorem 3.4 with $E_n = F_n = \{n\}$ for all n. □

Let X and Y be two sequence spaces, and let $A = (a_{nk})$ be an infinite matrix of real numbers a_{nk}, where $n, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$. We say that A defines a matrix mapping from X into Y, denoted by $A : X \to Y$, if for every sequence $x = (x_k) \in X$ the sequence $Ax = \{(Ax)_n\}$ exists and is in Y, where $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$ for $n = 1, 2, \cdots$. By (X, Y) we denote the class of all infinite matrices A such that $A : X \to Y$.

Theorem 3.5 ([11], Theorem 1.36). *We have $A \in (c_0, c_0)$ if and only if the following conditions hold:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

and

$$\sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right) < \infty \quad .$$

Theorem 3.6. *We have*

$$c_0^{NEF}(E, \Delta) = \left\{ a = (a_k) \ : \ \left(k \sum_{i\in F_k} a_i \right)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty \right\} := d_2.$$

Proof. Let $a \in d_2$. Since $\left(\sum_{i\in E_k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in c_0(\Delta)$ for all $x \in c_0(E, \Delta)$, by Lemma 3.1 we have $\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i\in E_k} x_i}{k} = 0$. Therefore

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in F_k} a_i \sum_{j\in E_k} x_j = \lim_{k\to\infty} k \sum_{i\in F_k} a_i \frac{\sum_{j\in E_k} x_j}{k} = 0,$$

implying that $a \in c_0^{NEF}(E, \Delta)$.

Now let $a \in c_0^{NEF}(E, \Delta)$ and $x \in (E, \Delta)$ be given. Then there exists only one sequence $y = (y_k) \in c_0$ such that $\sum_{j\subset E_k} x_j = \sum_{j=1}^{k} y_j$. Therefore

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in F_k} a_i y_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{i\in F_k} a_i \sum_{j\subset E_k} x_j = 0,$$

for all $y = (y_k) \in c_0$. Defining the matrix $A = (a_{kj})_{k=1}^{\infty}$ by

$$a_{kj} = \begin{cases} \sum_{i\in F_k} a_i & \text{if } \ 1 \le j \le k \\ 0 & \text{if } \ j > k, \end{cases}$$

we have $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} y_j = 0$ for all $y \in c_0$. Hence we can apply Theorem 3.5 to conclude that $A = (a_{kj}) \in (c_0, c_0)$ and

$$\sup_k \left| k \sum_{i\in F_k} a_i \right| = \sup_k \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in F_k} a_i \right| = \sup_k \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \right| < \infty.$$

Corollary 3.2 ([7], Lemma 2). *We have $c_0^N(\Delta) = \{a = (a_k) \ : \ (ka_k) \in l_\infty\}$.*

Proof. The result follows from Theorem 3.6 with $E_n = F_n = \{n\}$ for all n. □

Список литературы

[1] F. Başar, Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, Istanbul (2012).

[2] F. Başar, B. Altay and M. Mursaleen, "Some generalizations of the space bvp of p-bounded variation sequences", Nonlinear Anal., **68**, no. 2, 273 – 287 (2008).

[3] V. K. Bhardwaj, S. Gupta and R. Karan, "Kothe-Toeplitz duals and matrix transformations of Cesàro difference Sequence Spaces of second order", J. Math. Anal., **5**, no. 2, 1 – 11 (2014).

[4] S. Erfanmanesh and D. Foroutannia, "Some new semi-normed sequence spaces of non-absolute type and matrix transformations", Proceedings of IAM, **4 (2)**, 96 – 108 (2015).

[5] D. Foroutannia, "On the block sequence space $l_p(E)$ and related matrix transformations", Turk. J. Math., **39**, 830 – 841 (2015).

[6] H. Kizmaz, "On certain sequence spaces I", Canad. Math. Bull., **25**, no. 2, 169 – 176 (1981).

[7] H. Kizmaz, "On certain sequence spaces II", Internat. J. Math. Math. Sci., **18**, no. 2, 721 – 724 (1995).

[8] G. Kothe and O. Toeplitz, "Lineare Raume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen", Jour. Reine Angew. Math., **171**, 193 – 226 (1934).

[9] I. J. Maddox, "Generalized Kothe-Toeplitz Duals", Internat. J. Math. Math. Sci., **3**, 423 – 432 (1980).

[10] E. Malkowsky, Mursaleen and S. Suantai, "The dual spaces of sets of difference sequences of order m and matrix transformations", Acta Math. Sinica (Engl. Ser.), **23**, no. 3, 521 – 532 (2007).

[11] E. Malkowsky and V. Rakočević, "An introductionn into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness", Zbornik Radova, Matematički Institut SANU, Belgrade, **9**, no. 17, 143 – 243 (2000).

[12] M. Mursaleen and A. K. Noman, "On some new difference sequence spaces of non-absolute type", Math. Comput. Modelling, **52**, no. 3-4, 603 – 617 (2010).

Поступила 11 октября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 3. 2016, стр. 41-55.

REGULARITY IN ORLICZ SPACES FOR NON-DIVERGENCE DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS ON HOMOGENEOUS GROUPS

X. FENG

School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Shanxi, China
E-mail: *fxj467@mail.nwpu.edu.cn*

Abstract. Let G be a homogeneous group, and let $X_1, X_2, \cdots, X_{p_0}$ be left-invariant real vector fields on G that are homogeneous of degree one with respect to the dilation group of G and satisfy Hormander's condition. We establish a regularity result in the Orlicz spaces for the following equation: $Lu(x) = \sum_{j=1}^{p_0} a_{ij}(x)X_iX_ju(x) = f(x)$, where $a_{ij}(x)$ are real valued, bounded measurable functions defined on G, satisfying the uniform ellipticity condition, and belonging to the space $VMO(G)$ (Vanishing Mean Oscillation) with respect to the subelliptic metric induced by the vector fields X_1, X_2, $\cdots$, X_{p_0}.

MSC2010 numbers: 35R03, 49N60.

Keywords: Orlicz estimate; homogeneous group; non-divergence degenerate elliptic equation.

1. Introduction and main results

Let[1] G be a homogeneous group, and let $X_1, X_2, \cdots, X_{p_0}$ form a system of C^∞ real vector fields defined on $\mathbb{R}^N$ ($p_0 \leq N$), which are left invariant with respect to the left translations on G and are homogeneous of degree one with respect to the dilation group of G. Also, assume that they satisfy the finite rank condition at every point of $\mathbb{R}^N$, that is,

$$rank\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_{p_0})(x) = N, \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

where $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_{p_0})$ denotes the Lie algebra generated by the fields $X_1, \ldots, X_{p_0}$.

[1]This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11271299 and 11001221), the Mathematical Tianyuan Foundation of China (No. 11126027), Natural Science Foundation of Shanxi Province (No. 2014021009-1) and the Scientific and Technologial Innovation Programs of Higher Education Institutions in Shanxi (No. 2015101).

Our aim is to establish regularity results in the Orlicz spaces for solutions of the following equation

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(x)X_iX_ju(x) = f(x), \ x \in G, \tag{1.1}$$

where $p_0 < N$, $A = (a_{ij}(x))$ are real valued, bounded measurable functions defined in G, satisfying very weak regularity conditions, namely, they belong to the class $VMO(G)$ defined with respect to the homogeneous distance. Also, the matrix $(a_{ij}(x))$ is assumed to satisfy the condition:

$$a_{ij} = a_{ji}, \ \ \nu^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu|\xi|^2,$$

for every $i, j = 1, \dots, p_0$, $\xi \in \mathbb{R}^{p_0}$, $\nu > 0$ and a.e. $x \in G$.

In 1967, Hörmander [12] investigated the operator $L_1 = \sum_{i=1}^{p_0} X_i^2 + X_0$, and pointed out that the finite rank condition implies the hypoellipticity of L_1. In [8], Folland proved that homogeneous hypoelliptic operators on nilpotent groups have homogeneous fundamental solutions. Later, Bramanti and Brandolini [4] have obtained L^p estimates for the operator L on homogeneous groups. The Orlicz spaces originally introduced by Orlicz [17] as generalizations of L^p spaces in Euclidean groups, have been extensively studied in the literature (see [1, 13, 14, 22] and references therein). The theory of Orlicz spaces plays a major role in a wide range of areas (see [18]). A number of papers are devoted to regularity theory of elliptic equations in the Orlicz spaces (see [2, 13, 21]. Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces were obtained by Gogatishvili and Kokilashvili in [10].

Definition 1.1. *For a measurable function $f \in L^1_{loc}(G)$, denote*

$$\eta_f(\mathcal{R}) = \sup_{B_r \subset G} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y) - f_{B_r}|\, dy, \ \mathcal{R} > 0, \tag{1.2}$$

where f_{B_r} is the average of f over B_r. A function f is said to belong to the class $BMO(G)$ (Bounded Mean Oscillation on G), if $\|f\|_* := \sup_{\mathcal{R}} \eta_f(\mathcal{R}) < +\infty$, while we say that $f \in VMO(G)$ (Vanishing Mean Oscillation), if $\lim_{\mathcal{R}\to 0} \eta_f(\mathcal{R}) = 0$.

The class of all functions $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ which are increasing and convex we denote by Φ.

Definition 1.2. *A function $\phi \in \Phi$ is said to be a Young function if*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\phi(t)} = 0.$$

Definition 1.3. *A Young function $\phi \in \Phi$ is said to satisfy the global ∇_2 condition, denoted by $\phi \in \nabla_2$, if there exists a number $a > 1$ such that $\phi(t) \le \frac{\phi(at)}{2a}$ for every $t > 0$.*

Definition 1.4. *A Young function $\phi \in \Phi$ is said to satisfy the global Δ_2 condition, denoted by $\phi \in \Delta_2$, if there exists a positive constant K such that for every $t > 0$*

$$\phi(2t) \le K\phi(t). \tag{1.3}$$

Lemma 1.1 ([6]). *Let ϕ be a Young function. Then $\phi \in \nabla_2 \cap \Delta_2$ if and only if there exist constants $A_2 \ge A_1 > 0$ and $\alpha_1 \ge \alpha_2 > 1$ such that for any $0 < s \le t$*

$$A_1 \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha_1} \le \frac{\phi(s)}{\phi(t)} \le A_2 \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha_2}. \tag{1.4}$$

Moreover, the condition (1.2) implies that for $0 < \theta_1 \le 1 \le \theta_2 < \infty$

$$\phi(\theta_1 t) \le A_2 \theta_1^{\alpha_2} \phi(t) \text{ and } \phi(\theta_2 t) \le A_1^{-1} \theta_2^{\alpha_1} \phi(t). \tag{1.5}$$

A simple example of functions $\phi(t)$ satisfying the $\Delta_2 \cap \nabla_2$ condition is the power function $\phi(t) = t^p$ with $p > 1$. Moreover, we remark that the $\Delta_2 \cap \nabla_2$ condition makes the function grow moderately. For instance, $\phi(t) = |t|^p(1 + |\log|t||) \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ for $p > 1$.

Definition 1.5. *Let ϕ be a Young function. The Orlicz class $K^\phi(G)$ is defined to be the set of measurable functions g satisfying the condition:*

$$\int_G \phi(|g|)dx < \infty,$$

and the Orlicz space $L^\phi(G)$ is defined to be the linear hull of $K^\phi(G)$.

In this class we consider the following analog of the Luxemburg norm:

$$\|u\|_\phi = \inf\{k > 0 : \int_G \phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right) dx \le 1\}. \tag{1.6}$$

Observe that, in general, $K^\phi \subset L^\phi$. However, if ϕ satisfies the global Δ_2 condition, then we have $K^\phi = L^\phi$. Moreover, if $g \in L^\phi(G)$, then $\int_G \phi(|g|)dx$ can be written in the form (see [21]):

$$\int_G \phi(|g|)dx = \int_0^\infty |\{x \in G : |g| > \lambda\}| d[\phi(\lambda)]. \tag{1.7}$$

Lemma 1.2 ([6]). *Let U be a bounded domain in G and $\phi \in \nabla_2 \cap \Delta_2$. Then*

$$L^{\alpha_1}(U) \subset L^\phi(U) \subset L^{\alpha_2}(U) \subset L^1(U),$$

where $\alpha_1 \ge \alpha_2 > 1$ are as in Lemma 1.1.

For $p \in [1, \infty]$ we define

$$\|Du\|_{L^p(G)} = \sum_{j=1}^{p_0} \|X_j u\|_{L^p(G)}, \quad \|D^2 u\|_{L^p(G)} = \sum_{i,j=1}^{p_0} \|X_i X_j u\|_{L^p(G)}.$$

Similarly can be defined $\|D^m u\|_\phi$ for $m = 1, 2$.

Definition 1.6. *Let ϕ be a Young function. The Orlicz-Sobolev space $S^{2,\phi}(G)$ is defined to be the set of those functions $u \in L^\phi(G)$ whose derivatives $D^h u$ also belong to $L^\phi(G)$ for all $0 < h \leq 2$ such that $\|u\|_{S^{2,\phi}(G)} = \sum_{h=0}^{2} \|D^h u\|_\phi$ is finite.*

As in the case of ordinary Sobolev spaces, $S_0^{2,\phi}(G)$ is defined to be the closure of $C_0^\infty(G)$ in $S^{2,\phi}(G)$.

In this paper, by using the same techniques as in [20, 21], an approximation argument and the reverse Holder inequality, we obtain Orlicz estimates for solutions of equation (1.1). The main result of the paper is the following theorem.

Theorem 1.1. *Assume that $\phi \in \Phi$ is a Young function and $\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. If $f \in L^\phi(G)$ and $u \in S^{2,\phi}(G)$ is a solution of equation*

$$Lu - \mu u = f \text{ in } G,$$

then there exist positive constants μ_0 and c such that for any $\mu > \mu_0$, we have

$$\int_G \phi(|D^2 u|) + \phi(|Du|) + \phi(|u|) dx \leq c \int_G \phi(|f|) dx, \tag{1.8}$$

where the constant c depends only on G, ν, μ_0 and ϕ.

The paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the notion of homogenous groups. In Section 3 we derive several lemmas, which are used to prove the main result. Section 4 is devoted to the proof of the main result - Theorem 1.1.

2. Homogenous groups

Given a pair of smooth mappings:

$$[(x, y) \mapsto x \circ y] : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N; \quad [x \mapsto x^{-1}] : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

The space $\mathbb{R}^N$ together with these mappings forms a group with the identity being the origin. Next, assume that there exist $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_N$, such that the dilation $D(\varrho) : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (\varrho^{\omega_1} x_1, \ldots \varrho^{\omega_N} x_N)$ is a group automorphism, for all $\varrho > 0$. The space $\mathbb{R}^N$ with this structure is called a homogeneous group and is denoted by G. For more details on the subject we refer to [4, 19].

A homogeneous norm $\|\cdot\|$ on G is defined as follows. For any $x \in G\backslash\{0\}$ we set

$$\|x\| = \rho \Leftrightarrow |D(1/\rho)x| = 1,$$

where $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm, and also let $\|0\| = 0$. Then we have

(i) $\|D(\varrho)x\| = \varrho\|x\|$ for every $x \in G$, $\varrho > 0$;

(ii) there exist constants $c_1, c_2 \geq 1$ such that for every $x, y \in G$,

$$\|x^{-1}\| \leq c_1\|x\|;$$

$$\|x \circ y\| \leq c_2(\|x\| + \|y\|).$$

In view of the above properties, it is natural to define the quasidistance $d(\cdot,\cdot)$ by

$$d(x,y) = \|y^{-1} \circ x\|. \tag{2.1}$$

We denote the ball with respect to d by

$$B_r(x) = \{y \in G : d(x,y) < r\}. \tag{2.2}$$

Note that $B(0,r) = D(r)B(0,1)$ and

$$|B(x,r)| = r^Q|B(0,1)|, \tag{2.3}$$

where $x \in G$, $r > 0$, and

$$Q = \omega_1 + \cdots + \omega_N, \tag{2.4}$$

which is called the homogeneous dimension of G. By (2.3), the doubling is valid, that is, $|B(x,2r)| \leq c|B(x,r)|$, $x \in G$, $r > 0$, and therefore (G, dx, d) is a space of homogenous type.

In what follows, we will define another homogenous group S, whose underlying manifold is $\mathbb{R}^{N+1}$, endowed with the composition law

$$(x,t) \odot (y,\tau) = (x \circ y, t + \tau), \quad (x,t)^{-1} = (x^{-1}, -t)$$

for any $(x,t),(y,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$. The dilation on $\mathbb{R}^{N+1}$ is defined by $\mathcal{D}(\varrho) : (x,t) \mapsto (D(\varrho), \varrho t)$ for all $\varrho > 0$.

Example 2.1. *Consider the Heisenberg group $G(\mathbb{R}^3, \circ, D(\lambda))$, where*

$$(x_1, y_1, t_1) \circ (x_1, y_1, t_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + 2(x_2y_1 - x_1y_2)),$$

$$D(\lambda)(x,y,t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t),$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t};\ [X_1, X_2] = -4\frac{\partial}{\partial t}.$$

It is easy to check that X_1, X_2 are left invariant with respect to the left translations on G and are homogeneous of degree one with respect to the dilation group of G. Moreover, they satisfy the finite rank condition at every point of $\mathbb{R}^3$, that is,

$$rank\mathcal{L}(X_1, X_2)(x) = 3, \ x \in \mathbb{R}^3.$$

3. Some lemmas

For convenience, in this section we assume that $u \in C_0^\infty(B_{R_0})$ with some constant $R_0 > 0$ is a solution of equation (1.1). Let $p = (1 + \alpha_2)/2 > 1$. In fact, in the subsequent proof we can choose any constant p with $1 < p < \alpha_2$. Now we define

$$\lambda_0^p = \int_G |D^2u|^p dx + M^p \int_G |f|^p dx,$$

where $M > 1$ is a large enough constant to be determined later. For any $\lambda > 0$ we set

$$u_\lambda = u/(\lambda_0\lambda), \ f_\lambda = f/(\lambda_0\lambda), \tag{3.1}$$

and observe that u_λ still will be a solution of equation (1.1) with f_λ instead of f. Next, for any ball B in G we define

$$J_\lambda[B] = \frac{1}{|B|}\left(\int_B |D^2u_\lambda|^p dx + M^p \int_B |f_\lambda|^p dx\right)$$

and $E_\lambda(1) = \{x \in G : |D^2u_\lambda| > 1\}$. Since $|D^2u_\lambda| \leq 1$ for $x \in G\backslash E_\lambda(1)$, we focus on the level set $E_\lambda(1)$.

By using methods similar to that of applied in [21], we can prove the following three lemmas.

Lemma 3.1. *For any $\lambda > 0$ there exists a family of disjoint balls $\{B_{\rho_i}(x_i)\}_{i\geq 1}$ with $x_i \in E_\lambda(1)$ and $\rho_i = \rho(x_i, \lambda) > 0$ such that*

$$J_\lambda[B_{\rho_i}(x_i)] = 1, \ J_\lambda[B_\rho(x_i)] < 1 \text{ for any } \rho > \rho_i;$$

and

$$E_\lambda(1) \subset \bigcup_{i\geq 1} B_{5\rho_i}(x_i) \cup \text{negligible set}.$$

Lemma 3.2. *Under the conditions of Lemma 3.1 we have*

$$\begin{aligned} |B_{\rho_i}(x_i)| \ &\leq \ \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\Big(\int_{\{x\in B_{\rho_i}(x_i):|D^2u_\lambda|>1/2\}} |D^2u_\lambda|^p dx \\ &+ \ M^p \int_{\{x\in B_{\rho_i}(x_i):|f_\lambda|>1/(2M)\}} |f_\lambda|^p dx\Big). \end{aligned}$$

Lemma 3.3. *If $\phi \in \Phi$ satisfies the global $\Delta_2 \cap \nabla_2$ condition, then for any $b_1, b_2 > 0$ we have*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mu^p}\left(\int_{\{x\in G:|g|>b_1\mu\}} |g|^p dx\right) d[\phi(b_2\mu)] \leq C(b_1, b_2, \phi) \int_G \phi(|g|)dx.$$

Lemma 3.4 ([9]). *Let $g \in L^q(B_{2R})$ for some $R > 0$ and $q > 1$, and let $f \in L^r(B_{2R})$ for $r > q$. Assume that the following estimate holds*

$$\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} g^q dx \leq c\left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} g dx\right)^q + \frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} f^q dx + \theta\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} g^q dx,$$

where $c > 1$ and $0 \leq \theta < 1$. Then there exist $C = C(G, c, q, r, \theta)$ and $\varepsilon = \varepsilon(G, c, q, r, \theta)$ such that $g \in L^p(B_1)$ for $p \in [q, q+\varepsilon)$ and

$$\left(\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} g^p dx\right)^{1/p} \leq C\left\{\left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} g^q dx\right)^{1/q} + \left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} f^p dx\right)^{1/p}\right\}.$$

Lemma 3.5 ([4]). *Let Ω be a bounded domain in G and $\Omega' \subset\subset \Omega$. If $u \in S^{2,p}(\Omega)$ and $Lu \in S^{k,s}(\Omega)$ for some positive integer k, $1 < p < \infty$ and $s > Q/2$, then*

$$\|u\|_{\Lambda^{k,\alpha}(\Omega')} \leq c\{\|Lu\|_{S^{k,r}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\},$$

where $r = \max(p, s)$, $\alpha \in (0,1)$, c is a positive constant and Q is as in (2.4).

Lemma 3.6 ([7]). *Let $p \geq 1$ and $u \in S^{2,p}(B_r)$, and let $\mathcal{P}_2$ be the class of polynomials of homogeneous degree less that 2. Then there exists a polynomial $P \in \mathcal{P}_2$ such that*

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |(u-P)(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq cr^2\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |D^2u(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{3.2}$$

for all $1 \leq p < \frac{Q}{2}$ and $q = \frac{pQ}{Q-2p}$, where Q is as in (2.4) and c is a constant independent of B_r and u.

Lemma 3.7. *For any $\varepsilon > 0$ there exists a small enough number $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ such that if $u \in C_0^\infty(B_{R_0})$ is a solution of equation (1.1) in G, and*

$$\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |A - \bar{A}_{B_4}|dx \leq \delta, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |D^2u|^p dx \leq 1, \quad \frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |f|^p dx \leq \delta^p,$$

then there exists $N_1 > 1$ such that

$$\int_{B_2} |D^2(u-v)|^p dx \leq \varepsilon \tag{3.4}$$

and

$$\sup_{B_1} |D^2 v| \leq N_1, \tag{3.5}$$

where v is a solution of equation $\sum_{i,j=1}^{p_0}(a_{ij})_{B_4}X_iX_jv = 0$ in B_4.

Proof. We first consider the following Dirichlet problem

$$
\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{p_0}(a_{ij})_{B_4}X_iX_jw(x) = -f + \sum_{i,j=1}^{p_0}(a_{ij}(x) - (a_{ij})_{B_4})X_iX_ju, & \text{if } x \in B_4, \\ w(x) = 0, & \text{if } x \in \partial B_4. \end{cases} \tag{3.6}
$$

In the paper [3], J. Bony proved that there exists a solution for the above problem. Then $v = u + w$ satisfies

$$
\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{p_0}(a_{ij})_{B_4}X_iX_jv(x) = 0, & \text{if } x \in B_4, \\ v(x) = u(x), & \text{if } x \in \partial B_4. \end{cases} \tag{3.7}
$$

Applying the L^p estimates given in [4] to (3.6), we can write

$$
\begin{aligned}
\int_{B_2} |D^2 w|^p dx &\le \int_{B_4} \Big| - f + \sum_{i,j=1}^{p_0} (a_{ij}(x) - (a_{ij})_{B_2})X_iX_ju\Big|^p dx \\
&\le c\left(\int_{B_4} |f|^p dx + \sum_{i,j=1}^{p_0} \int_{B_4} |(a_{ij}(x) - (a_{ij})_{B_2})X_iX_ju|^p dx\right) \\
&\le c\left(\delta^p + \int_{B_4} |D^2u|^p dx\right) \le c.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Let $P \in \mathcal{P}_2$. By using the local L^p estimates given in [4], we obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} |D^2u|^p dx &\le c\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |u - P|^p dx + \frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |f|^p\right) \\
&\le c\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |u - P|^p dx + c\delta^p.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

By Lemma 3.6, for $1 < p \le \frac{Q}{Q-2}$, we get

$$
\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |u - P|^p dx\right)^{1/p} \le c\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |D^2u| dx, \tag{3.10}
$$

while for $p > \frac{Q}{Q-2}$, we have

$$
\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |u - P|^p dx\right)^{1/p} \le c\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |D^2u|^{\frac{pQ}{Q+2p}} dx\right)^{\frac{Q+2p}{pQ}}. \tag{3.11}
$$

Hence we obtain the weak reverse Hölder inequality

$$
\left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} |D^2u|^p dx\right)^{1/p} \le c\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |D^2u|^{\frac{pQ}{Q+2p}} dx\right)^{\frac{Q+2p}{pQ}}. \tag{3.12}
$$

In view of (3.9)-(3.12) and Lemma 3.4 we conclude that there exist positive constants ε_0 and C such that

$$
\left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} |D^2u|^{p+\varepsilon_0} dx\right)^{\frac{1}{p+\varepsilon_0}} \le c\left(\frac{1}{|B_4|}\int_{B_4} |D^2u|^p dx\right)^{1/p} + c\delta^p \le C. \tag{3.13}
$$

Next, it follows from (1.2) and (3.3) that

$$\begin{aligned}(3.14)\qquad &\left(\int_{B_2} |a_{ij}(x)-(a_{ij})_{B_2}|^{\frac{p(p+\varepsilon_0)}{\varepsilon_0}}dx\right)^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}\\ &\le (2\nu)^{\frac{p(p+\varepsilon_0)-\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}\left(\int_{B_2}|a_{ij}(x)-(a_{ij})_{B_2}|dx\right)^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}} \le \delta^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}.\end{aligned}$$

Hence by (3.8) and (3.14) we can write

$$\int_{B_2}|D^2w|^p dx \le c\left(\int_{B_4}|f|^p dx + \sum_{i,j=1}^{p_0}\int_{B_4}|(a_{ij}(x)-(a_{ij})_{B_4})X_iX_ju|^p dx\right)\le$$

$$\le c\left\{\delta^p + \left(\sum_{i,j=1}^{p_0}\int_{B_4}|a_{ij}(x)-(a_{ij})_{B_4}|^{\frac{p(p+\varepsilon_0)}{\varepsilon_0}}dx\right)^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}\left(\int_{B_4}|D^2u|^{p+\varepsilon_0}dx\right)^{\frac{p}{p+\varepsilon_0}}\right\}$$

$$\le c\left(\delta^p + \delta^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}\right),$$

which implies that (3.4) holds by choosing $c\left(\delta^p + \delta^{\frac{\varepsilon_0}{p+\varepsilon_0}}\right) < \varepsilon$.

Next, we show that (3.5) is valid. Indeed, let $P \in \mathcal{P}_2$ be chosen so that (3.2) holds for $\vartheta = v - P$. Then ϑ satisfies the equation $\sum_{i,j=1}^{p_0}(a_{ij})_{B_4}X_iX_jv = 0$ in B_4. Note that $\vartheta \in C^\infty(B_4)$, and using Lemma 3.5 for $k=2$ and $B_1 = \Omega' \subset\subset \Omega = B_2$, we obtain

$$\|\vartheta\|_{\Lambda^{2,\alpha}(B_1)} \le c\|\vartheta\|_{L^p(B_2)}. \tag{3.15}$$

By (3.15) and Lemma 3.6, we get

$$\begin{aligned}(3.16)\qquad \|D^2v\|_{L^\infty(B_1)} &\le \|\vartheta\|_{\Lambda^{2,\alpha}(B_1)} \le c\|\vartheta\|_{L^p(B_2)}\\ &\le c\left(\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|D^2v(x)|^p dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

with a constant c independent of v. Finally, it follows from (3.4), (3.16) that (3.5) holds, and N_1 is independent of v. □

By applying the scaling method on homogenous groups, from Lemma 3.7 we can deduce the following result.

Lemma 3.8. *For any $\varepsilon > 0$ there exists a small enough number $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ such that if $u \in C_0^\infty(B_{R_0})$ is a solution of equation (1.1) in G, and*

$$\frac{1}{|B_{20\rho_i}(x_i)|}\int_{B_{20\rho_i}(x_i)}|A - \bar{A}_{B_{20\rho_i}(x_i)}|dx \le \delta, \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{|B_{20\rho_i}(x_i)|}\int_{B_{20\rho_i}(x_i)}|D^2u_\lambda^i|^p dx \le 1,\quad \frac{1}{|B_{20\rho_i}(x_i)|}\int_{B_{20\rho_i}(x_i)}|f_\lambda^i|^p dx \le \delta^p. \tag{3.18}$$

then there exists $N_1 > 1$ such that

$$\int_{B_{10\rho_i}(x_i)} |D^2(u_\lambda^i - v_\lambda^i)|^p dx \le \varepsilon, \quad \sup_{B_{5\rho_i}(x_i)} |D^2 v_\lambda^i| \le N_1, \tag{3.19}$$

where $v_\lambda^i \in S^{2,p}(B_{20\rho_i}(x_i))$ is a solution of equation $\sum_{i,j=1}^{m}(a_{ij})_{B_{20\rho_i}} X_i X_j v = 0$ in $B_{20\rho_i}(x_i)$.

Proof. Denoting

$$u_\lambda^i(x) = \frac{16}{(20\rho_i)^2} u_\lambda\left(D\left(\frac{20\rho_i}{4}\right)x\right), \quad f_\lambda^i(x) = f_\lambda\left(D\left(\frac{20\rho_i}{4}\right)x\right), \quad A^i(x) = A\left(D\left(\frac{20\rho_i}{4}\right)\right),$$

we can use the arguments of the proof of Lemma 3.7 to complete the proof.

Lemma 3.9. *Let $\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ and $f \in L^\phi(G)$. Assume that $u \in C_0^\infty(B_{R_0})$ with some constant $R_0 > 0$ is a solution of equation (1.1). Then there exists a positive constant c such that*

$$\int_G \phi(|D^2 u|)dx \le c \int_G \phi(|f|)dx.$$

Proof. Since $a_{ij} \in VMO(G)$, we can choose ρ_i small enough such that (3.17) holds. By Lemma 3.2, it is easy to see that, (3.18) is valid. It follows from (3.1), (3.19) that for any $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
&|\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2 u| > 2N_1\lambda\lambda_0\}| = |\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2 u_\lambda| > 2N_1\}| \\
\le\ & |\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2(u_\lambda - v_\lambda^i)| > N_1\}| + |\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2 v| > N_1\}| \\
=\ & |\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2(u_\lambda - v_\lambda^i)| > N_1\}| \le \frac{1}{N_1^p} \int_{B_{10\rho_i}(x_i)} |D^2(u_\lambda - v_\lambda^i)|^p dx \\
\le\ & c\varepsilon |B_{\rho_i}(x_i)|.
\end{aligned}$$

Setting $\mu = \lambda\lambda_0$, we can use Lemma 3.2 and (3.1) to obtain

$$\begin{aligned}
&|\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2 u| > 2N_1\mu\}| \\
\le\ & \frac{c\varepsilon}{\mu^p}\left(\int_{\{x\in B_{\rho_i}(x_i):|D^2u|>\mu/2\}} |D^2 u|^p dx + M^p \int_{\{x\in B_{\rho_i}(x_i):|f|>\mu/(2M)\}} |f|^p dx\right).
\end{aligned}$$

Then recalling the fact that the balls $B_{5\rho_i}(x_i)$ are disjoint,

$$\bigcup_{i\ge 1} B_{5\rho_i}(x_i) \cup \text{negligible set} \supset E_\lambda(1) = \{x \in G : |D^2 u_\lambda| > 1\},$$

and that $E_\lambda(N) \subset E_\lambda(1)$ for any $N > 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&|\{x \in G : |D^2 u| > 2N_1\mu\}| \le \sum_i |\{x \in B_{5\rho_i}(x_i) : |D^2 u| > 2N_1\mu\}| \\
\le\ & \frac{c\varepsilon}{\mu^p}\left(\int_{\{x\in G:|D^2u|>\mu/2\}} |D^2 u|^p dx + M^p \int_{\{x\in G:|f|>\mu/(2M)\}} |f|^p dx\right).
\end{aligned}$$

Furthermore, recalling (1.7) and Lemma 3.2, we can write

$$\begin{aligned}\int_G \phi(|D^2u|)dx &= \int_0^\infty |\{x\in G: |D^2u|>2N_1\mu\}|d[\phi(2N_1\mu)]\\ &\le c\varepsilon\int_0^\infty \frac{1}{\mu^p}\left(\int_{x\in G:|D^2u|>\mu/2}|D^2u|^p dx\right)d[\phi(2N_1\mu)]\\ &\quad +cM^p\int_0^\infty \frac{1}{\mu^p}\left(\int_{x\in G:|f|>\mu/(2M)}|f|^p dx\right)d[\phi(2N_1\mu)]\\ &\le c_1\varepsilon\int_G \phi(|D^2u|)dx + c_2\int_G\phi(|f|)dx,\end{aligned}$$

where $c_1 = c_1(G,\phi)$ and $c_1 = c_2(G,\phi,\varepsilon,M)$.

Finally, choosing a suitable ε such that $c_1\varepsilon < 1/2$, we obtain

$$\int_G \phi(|D^2u|)dx \le c\int_G \phi(|f|)dx.$$

4. Proof of the main result

In order to prove our main result, we first establish a lemma by using the method applied in [15, 16].

Lemma 4.1. *Let the functions ϕ and f be as in Theorem 1.1, and let $u\in C_0^\infty(B_{R_0/2})$ be a solution of equation $Lu-\mu u = f$ in G. Then there exist positive constants μ_0 and c, depending only on G,ϕ,ν,R_0, such that*

$$\begin{aligned}&\mu^{\alpha_2}\int_G\phi(|u|)dx+\mu^{\alpha_2/2}\int_G\phi(|\nabla u|)dx+\int_G\phi(|D^2u|)dx\\ &\le c\int_G\phi(|Lu-\mu u|)dx = c\int_G\phi(|f|)dx\end{aligned} \tag{4.1}$$

for any $\mu\ge\mu_0$, where α_2 is as in (1.4).

Proof. Define $\tilde u(z) = \tilde u(x,t) = u(x)\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)$, $\tilde L\tilde u(z) = Lu(x) + (\tilde u_t)_t$, where $\varphi\in C_0^\infty(-R_0/2,R_0/2)$ is a cut-off function. It is easy to check that the coefficients matrix of the operator $\tilde L$

$$\tilde A_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{pmatrix} A_{n\times n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

satisfies (1.2) and the VMO condition. Moreover, we have $\tilde L\tilde u(z) = \tilde f$, where

$$\tilde f = \varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)(L-\mu) + u(x)\varphi''(t)cos(\sqrt{\mu}t) - 2\sqrt{\mu}u(x)\varphi'(t)sin(\sqrt{\mu}t).$$

For convenience, we denote $D^2_{zz}\tilde u(x,t) = \{D^2\tilde u(x),(Xu)t,\tilde u_{tt}\}$, where

$$D^2\tilde u = D^2_{xx}\tilde u = \{XiXju\}_{i,j=1}^N,\ (Xu)t = \{(Xiu)t\}_{i=1}^N.$$

It follows from Lemma 3.9 that

$$\int_S \phi(|D^2_{zz}\bar{u}|)dz \le C\int_S \phi(|f|)dz, \tag{4.2}$$

where $dz = dxdt$. According to (1.5), we get

$$\phi(|D^2u(x)|) \le K(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)|)^{-\alpha_1}\phi(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)D^2u(x)|).$$

Since $XiXju = \varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)XiXju(x)$ and $cost$ is a periodic function, we have

(4.3)

$$\begin{aligned}
&\int_G \phi(|D^2u(x)|)dx \\
&= \left(\frac{1}{K}\int_{\mathbb{R}}(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)|)^{\alpha_1}dt\right)^{-1}\int_S \frac{1}{K}(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)|)^{\alpha_1}\phi(|D^2u(x)|)dxdt \\
&\le C\int_S \phi(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)D^2u(x)|)dxdt = C\int_S \phi(|D^2_{xx}\bar{u}|)dz \le C\int_S \phi(|D^2_{zz}\bar{u}|)dz,
\end{aligned}$$

where the constant C depends only on N, ϕ. Similarly, we can obtain

$$\begin{aligned}
\int_G \phi(|Du(x)|)dx &\le C\int_S \phi(|\varphi(t)cos(\sqrt{\mu}t)Du(x)|)dxdt \\
&\le C\sum_{i=1}^{N}\int_S \phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}|Xiu)t(z) - Xiu\varphi'(t)cos(\sqrt{\mu}t)|\right)dxdt \\
&\le \frac{C}{\mu^{\alpha_2/2}}\left(\int_S \phi(|\bar{u}_{xt}(z)|)dz + \int_G \phi(|D_x u|)dx\right),
\end{aligned}$$

which implies that

$$\mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|Du(x)|)dx \le C\int_S \phi(|(Xu)t(z)|)dz \le C\int_S \phi(|D^2_{zz}\bar{u}(z)|)dz. \tag{4.4}$$

Since

$$\begin{aligned}
&\int_G \phi(|u(x)|)dx \\
&\le C\int_S \phi(\frac{1}{\sqrt{\mu}}|\bar{u}_{tt}(z) - u(x)(\varphi''(t)cos(\sqrt{\mu}t) - 2\sqrt{\mu}\varphi'(t)sin(\sqrt{\mu}t)|)dxdt,
\end{aligned}$$

then by choosing $\mu > \mu_0$ large enough we obtain

$$\mu^{\alpha_2}\int_G \phi(|Du(x)|)dx \le C\int_S \phi(|D^2_{zz}\bar{u}(z)|)dz. \tag{4.5}$$

Combining (4.2)-(4.5) and taking $\mu \ge \mu_0 > 0$ large enough, we conclude that

$$\begin{aligned}
&\mu^{\alpha_2}\int_G \phi(|u|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|\nabla u|)dx + \int_G \phi(|D^2u|)dx \\
&\le C\int_S \phi(|D^2_{zz}\bar{u}(z)|)dz \le C\int_S \phi(|f|)dz.
\end{aligned}$$

Moreover, noting that

$$-\sqrt{\mu}\varphi'(t)sin(\sqrt{\mu}t) = u(x)((\varphi'(t)cos(\sqrt{\mu}t))_t - \varphi''(t)cos(\sqrt{\mu}t)),$$

we have

$$\int_S \phi(|f|)dz \leq C\left(\int_G \phi(|Lu - \mu u|)dx + \int_G \phi(|u|)dx\right).$$

Finally, combining the last two inequalities, and taking $\mu \geq \mu_0 > 0$ large enough, we complete the proof of Lemma 4.1.

To prove Theorem 1.1, we also need the following result from [5].

Lemma 4.2 ([5]). *Let (X, d, μ) be space of homogenous type. Then for every $r_0 > 0$ and $\mathcal{K} > 1$ there exist $\varrho \in (0, r_0)$ a positive integer $\mathcal{M}$ and a sequence of points $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ such that*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \varrho) = X; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B(x_i, \mathcal{K}\varrho)}(z) \leq \mathcal{M}, \ \forall\, x \in X.$$

Proof of Theorem 1.1. For $x_0 \in G$ let $\rho \in C_0^{\infty}(B_{R_0/2}(x_0))$. Denote

$$v(x) = u(x)\rho(x).$$

It follows that

$$Lv(x) - \mu v(x) = f\rho + 2a_{ij}XiuXi + a_{ij}uXiXj \equiv g.$$

Assume that $\mu \geq \mu_0 > 0$. It follows from Lemma 4.1 that

$$\mu^{\alpha_2}\int_G \phi(|v|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|\nabla v|)dx + \int_G \phi(|D^2 v|)dx \leq C\int_G \phi(|g|)dx$$
$$\leq C(\int_G \varphi(|f\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx + \int_G \phi(|u\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx + \int_G \phi(|Du\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx).$$

Taking into account that

$$\int_G \phi(|\rho Du|)dx \leq \int_G \phi(|Dv|)dx + \int_G \phi(|uD\rho|)dx,$$

$$\int_G \phi(|\rho D^2 u|)dx \leq C\left(\int_G \phi(|D^2 v|)dx + \int_G \phi(|DuD\rho|)dx + \int_G \phi(|uD^2\rho|)dx\right),$$

we obtain

$$\mu^{\alpha_2}\int_G \phi(|v|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|\rho Du|)dx + \int_G \phi(|\rho D^2 u|)dx$$
$$\leq C(\int_G \varphi(|f\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|u\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx + \int_G \phi(|Du\chi_{B_{R_0/2}(x_0)}|)dx).$$

Hence, using Lemma 4.2, we can write

$$\mu^{\alpha_2}\int_G \phi(|u|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|Du|)dx + \int_G \phi(|D^2u|)dx$$
$$= \mu^{\alpha_2}\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,R_0/2)} \phi(|u|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,R_0/2)} \phi(|Du|)dx$$
$$+ \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,R_0/2)} \phi(|D^2u|)dx$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^{\alpha_2}\int_{B(x_i,R_0/2)} \phi(|u|)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^{\alpha_2/2}\int_{B(x_i,R_0/2)} \phi(|Du|)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i,R_0/2)} \phi(|D^2u|)dx$$
$$\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int_{B(x_i,R_0)} \phi(|f|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_{B(x_i,R_0)} \phi(|u|)dx + \int_{B(x_i,R_0)} \phi(|Du|)dx\Big)$$
$$\leq CM\Big(\int_G \phi(|f|)dx + \mu^{\alpha_2/2}\int_G \phi(|u|)dx + \int_G \phi(|Du|)dx\Big).$$

By choosing $\mu \geq \mu_0 > 0$ large enough, we conclude that (1.8) is valid. □

Acknowledgement. The author would like to thank the anonymous referee for constructive comments and suggestions which improved the presentation of the original manuscript.

Список литературы

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (2003).
[2] E. Azroul, A. Benkirane, M. Tienari, "On the regularity of solutions to the Poisson equations in Orlicz spaces", Bull. Belg. Math. Soc. **7**, 1 – 12 (2000).
[3] J. M. Bony, "Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérées", Ann. Inst. Fourier, **19**, 227 – 304 (1969).
[4] M. Bramanti, L. Brandolini, "L^p estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups", Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **58**, 389 – 434 (2000).
[5] M. Bramanti, G. Cupini, E. Lanconelli, E. Priola, "Global L^p estimates for degenerate Ornstein-Uhlenbeck operators", Mathematische Zeitschrift, **266**, 789 – 816 (2010).
[6] S. Byun, F. Yao, S. Zhou, "Gradient estimates in Orlicz space for nonlinear elliptic equations", J. Funct. Anal. 255, 1851 – 1873 (2008).
[7] W. S. Cohn, G. Lu, P. Wang, "Sub-elliptic global high order Poincaré inequalities in stratified Lie groups and applications", J. Funct. Anal. **249**, 393 – 424 (2007).
[8] G. B. Folland, "Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups", Arkiv for Math. **13**, 161 – 207 (1975).
[9] U. Gianazza, "Regulariaty for nonlinear equations involving square Hömander operators", Nonlinear Anal. **23**, 49 – 73 (1994).
[10] A. Gogatishvili, V. Kokilashvili, "Criteria of weighted inequatities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces", Georgian Mathematical Journal **1**, 641 – 673 (1994).
[11] J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer, New York (2001).

[12] L. Hormander, "Hypoelliptic second order differential equations", Acta Math. **119**, 147 – 171 (1967).
[13] H. Jia, D. Li, L. Wang, "Regularity theory in Orlicz spaces for the Poissson equation", Manuscripta Math. **122**, 265 – 275 (2007).
[14] V. Kokilashvili, M. Krbec, Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces, World Scientific (1991).
[15] N. V. Krylov, "Parabolic and elliptic equations with VMO coefficients", Commun. Partial Diff. Equs. **32**, 453 – 475 (2007).
[16] N. V. Krylov, "Second-order elliptic equations with variably partially VMO coefficients", J. Funct. Anal. **257**, 1695 – 1712 (2009).
[17] W. Orlicz, "Uber eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus B", Bull. Int. Acad. Pol. Ser. A **8**, 207 – 220 (1932).
[18] M. Rao, Z. Ren, Applications of Orlicz Spaces, Marcel Dekker Inc., New York (2000).
[19] E. M. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1993).
[20] L. Wang, "A geometric approach to the Calderón-Zygmund estimates", Acta Math. Sinica **19**, 383 – 396 (2003).
[21] L. Wang, F. Yao, S. Zhou and H. Jia, Optimal regularity for the poisson equation, Proc. Amer. Math. Soc. **137**, 2037 – 2047 (2009).
[22] M. Weber, "Stochastic processes with values in exponential type Orlicz Spaces", Ann. Prob. **16**, 1365 – 1371 (1988).

Поступила 28 августа 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 3, 2016, стр. 56-64.

NORMAL FAMILIES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS AND SHARED FUNCTIONS

PEIYAN NIU AND YAN XU

Nanjing Normal University, Nanjing, China
Anhui Science and Technology University, Chuzhou, China
E-mails: *niupeiyan1983@126.com*; *xuyan@njnu.edu.cn*

Abstract. The paper is devoted to the normal families of meromorphic functions and shared functions. Generalizing a result of Chang (2013), we prove the following theorem. Let h ($\not\equiv 0, \infty$) be a meromorphic function on a domain D and let k be a positive integer. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+2$, such that for each pair of functions f and g from $\mathcal{F}$, f and g share the value 0, and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share the function h. If for every $f \in \mathcal{F}$, at each common zero of f and h the multiplicities m_f for f and m_h for h satisfy $m_f \geq m_h + k + 1$ for $k > 1$ and $m_f \geq 2m_h + 3$ for $k = 1$, and at each common pole of f and h, the multiplicities n_f for f and n_h for h satisfy $n_f \geq n_h + 1$, then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.

MSC2010 numbers: 30D45.

Keywords: Meromorphic function; normal family; shared function.

1. Introduction

Let[1] D be a domain in $\mathbb{C}$ and $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on D. The family $\mathcal{F}$ is said to be normal on D if any sequence $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ contains a subsequence $\{f_{n_j}\}$ that converges spherically locally uniformly on D to a meromorphic function or ∞ (see [3], [5], [10]).

Let $f(z)$ and $g(z)$ be two meromorphic functions on D. We say that f and g share a value or a function h on D if the equations $f(z) = h(z)$ and $g(z) = h(z)$ have the same solutions (ignoring multiplicity) on D.

The Gu's normality criterion (see [2]), which originally was conjectured by Hayman [3], states that a family $\mathcal{F}$ of meromorphic functions defined on D is normal if $f \neq 0$ and $f^{(k)} \neq 1$ for every $f \in \mathcal{F}$. Generalizing the Gu's normality criterion, Yang [11] has proved the following theorem.

[1]Research supported by NSFC(Grant Nos.11171045, 11471163) and Doctoral Fund of Ministry of Education of China(Grant No.20123207110003).

Theorem A. *Let k be a positive integer, h ($\not\equiv 0$) be a holomorphic function on D, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions defined on D. If $f \neq 0$ and $f^{(k)} \neq h$ for every $f \in \mathcal{F}$, then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.*

Following Schwick [6], in recent years a number of normality criteria concerning shared values or functions have been proved. For instance, Chang [1] has extended Theorem A by proving the following theorem.

Theorem B. *Let k be a positive integer and h ($\not\equiv 0$) be a holomorphic function on a domain D. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+2$, such that for each pair of functions f and g from $\mathcal{F}$, f and g share the value 0, and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share the function h. Suppose additionally that for every $f \in \mathcal{F}$, at each common zero of f and h the multiplicities m_f for f and m_h for h satisfy $m_f \geq m_h + k + 1$ for $k > 1$ and $m_f \geq 2m_h + 3$ for $k = 1$. Then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.*

We naturally arise the following question: *Does the assertion of Theorem B still hold if the sharing function h is meromorphic?* The example that follows shows that the answer, generally, is negative.

Example 1.1. *Let $k, l \in \mathbb{N}$, $D = \{z : |z| < 1\}$, $h(z) = \frac{1}{z^{k+l}}$, and*

$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = \frac{1}{nz^l}, z \in D\}.$$

Since $f_n(z) \neq 0$, then f_n and f_m share 0 in D. We have

$$f_n^{(k)}(z) - h(z) = \frac{(-1)^k \cdot l(l+1)(l+2)\cdots(l+k+1) - n}{nz^{k+l}}.$$

It is clear that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0$, and hence only at $z = 0$ we have $f_n^{(k)}(z) = h(z)$ for $n \geq n_0$. Thus, $f_n^{(k)}$ and $f_m^{(k)}$ share the function $h(z)$ in D for $n, m \geq n_0$, but the family $\mathcal{F}$ is not normal at 0.

The main results of this paper are the following theorems.

Theorem 1.1. *Let h ($\not\equiv 0, \not\equiv \infty$) be a meromorphic function on a domain D and let k be a positive integer. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+2$, such that for each pair of functions f and g from $\mathcal{F}$, f and g share the value 0, and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share the function h. If for every $f \in \mathcal{F}$, at each common pole of f and h the multiplicities n_f for f and n_h for h satisfy $n_f \geq n_h + 1$, then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.*

Since normality is a local property, combining Theorem B and Theorem 1.1, we obtain the following generalization of Theorem B.

Theorem 1.2. *Let h ($\not\equiv 0, \infty$) be a meromorphic function on a domain D and let k be a positive integer. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+2$, such that for each pair of functions f and g from $\mathcal{F}$, f and g share the value 0, and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share the function h. If for every $f \in \mathcal{F}$, at each common zero of f and h the multiplicities m_f for f and m_h for h satisfy $m_f \geq m_h + k + 1$ for $k > 1$ and $m_f \geq 2m_h + 3$ for $k = 1$, and at each common pole of f and h, the multiplicities n_f for f and n_h for h satisfy $n_f \geq n_h + 1$, then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.*

Throughout the paper, we use the following notation: by $\mathbb{N}$ we denote the set of positive integers, $\Delta(0, \delta) := \{z : |z| < \delta\}$, $\Delta'(0,\delta) := \{z : 0 < |z| < \delta\}$, $\overline{\Delta}(0,\delta) := \{z : |z| \leq \delta\}$, $\Delta := \Delta(0, 1)$. We write $f_n \xrightarrow{\chi} f$ on D to indicate that the sequence $\{f_n\}$ convergence to f in the spherical metric uniformly on compact subsets of D, and $f_n \longrightarrow f$ on D if the convergence is in the Euclidean metric.

2. Lemmas

In this section we state a number of lemmas that will be used in the proofs of our main results.

Lemma 2.1 ([4]). *Let k be a positive integer and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D, all of whose zeros have multiplicity at least k. Suppose that there exists $A \geq 1$ such that $|f^{(k)}(z)| \leq A$ whenever $f(z) = 0, f \in \mathcal{F}$. If the family $\mathcal{F}$ is not normal at $z_0 \in D$, then for each α, $0 \leq \alpha < k$, there exist a sequence of complex numbers $z_n \in D$, $z_n \to z_0$, a sequence of positive numbers $\rho_n \to 0$, and a sequence of functions $f_n \in \mathcal{F}$ such that*

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^\alpha} \xrightarrow{\chi} g(\zeta)$$

on $\mathbb{C}$, where $g(\zeta)$ is a nonconstant meromorphic function on $\mathbb{C}$, all of whose zeros have multiplicity at least k, such that $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$. Moreover, $g(\zeta)$ has order at most 2. (Here $g^\#(\zeta) = |g'(\zeta)|/(1 + |g(\zeta)|^2)$ is the spherical derivative of g.)

In [7], Y. Xu proved that a family $\mathcal{F}$ of meromorphic functions on D is normal if for every $f \in \mathcal{F}$, all the poles of f are multiple and all the zeros of f have multiplicity at least $k+1$, and $f^{(k)}(z) \neq h(z)$ in D, where $h(z)$ ($\neq 0, \not\equiv \infty$) is a meromorphic function on D.

Using arguments similar to that of applied in [7], we can prove the following result.

Lemma 2.2. *Let k be a positive integer and let h ($\neq 0, \not\equiv \infty$) be a meromorphic function in a domain D. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions defined on D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+2$. If for every function $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)}(z) \neq h(z)$ on D, then the family $\mathcal{F}$ is normal on D.*

Lemma 2.3 ([8]). *Let k be a positive integer, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in D, all of whose zeros have multiplicity at least k, and there exists $M > 0$ such that $|f^{(k)}(z)| \leq M$ whenever $f(z) = 0$, $f \in \mathcal{F}$. If $\mathcal{F}_k = \{f^{(k)} : f \in \mathcal{F}\}$ is normal, then $\mathcal{F}$ is also normal in D.*

Lemma 2.4 ([3]). *Let f be a meromorphic function on $\mathbb{C}$. If $f \neq 0$ and $f^{(k)} \neq 1$, then f is a constant.*

Lemma 2.5 ([12]). *Let f be a transcendental meromorphic function, and let φ be a small meromorphic function of f. Then for $k \in \mathbb{N}$ the following inequality holds:*

$$T(r, f) \leq 3N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 4N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi}\right) + S(r, f),$$

where T, N, S are the standard notations in the Nevanlinna value distribution theory of meromorphic functions.

Lemma 2.6. *Let $k,\ l \in \mathbb{N}$, and let $f \neq 0$ be a rational function on $\mathbb{C}$, such that 0 is a pole of f with multiplicity at least $l+1$. Then the function $f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l}$ has at least one zero.*

Proof. We assume that $f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}$. Then by the conditions we have

$$f(z) = \frac{C_1}{z^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_t)^{n_t}}, \tag{2.1}$$

where $C_1 \neq 0$ is a constant, $z_i \in \mathbb{C}$ ($2 \leq i \leq t$) are distinct and non-zero, and $t, n_i \in \mathbb{N}$ with $t \geq 1$ and $n_1 \geq l+1$. If $t = 1$, then we have

$$f(z) = \frac{C_1}{z^{n_1}}, \qquad f^{(k)}(z) = \frac{C_2}{z^{n_1+k}},$$

where $C_2 \neq 0$ is a constant. It is clear that $f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l}$ has at least one zero because $n_1 + k > l$, which is a contradiction. Next, we consider the case $t \geq 2$. From (2.1) we have

$$f^{(k)}(z) = \frac{C_1 P(z)}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}, \tag{2.2}$$

where $P(z)$ is a polynomial of degree $(t-1)k$.

By the assumption $f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}$ and $n_1 \geq l+1$, and hence we have

$$f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l} = \frac{C_3}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}, \tag{2.3}$$

where $C_3 \neq 0$ is a constant. Therefore

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{z^{n_1+k-l}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k} + C_3}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}} \\ &= \frac{Q(z)}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Next, it follows from (2.2) and (2.4) that $C_1 P(z) = Q(z)$, implying that $deg(C_1 P(z)) = deg(Q(z))$. On the other hand, we have

$$deg(C_1 P(z)) = (t-1)k, \quad deg(Q(z)) = n_1 + n_2 + \cdots + n_t + tk - l.$$

This contradicts the condition $n_1 \geq l+1$, and the result follows. □

Lemma 2.7. *Let $\{f_n\}$ be a sequence of zero-free meromorphic functions on $\triangle(0,\delta)$, such that $\{f_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$, but it is not normal at $z=0$. Let l be a positive integer. Define a sequence $\{F_n\}$ by $F_n(z) = z^l f_n(z)$. If 0 is a pole of $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ with multiplicity at least $l+1$, then $\{F_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$ and is not normal at $z=0$.*

Proof. It is evident that $\{F_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$. Suppose that $\{F_n\}$ is normal at $z=0$, then $\{F_n\}$ is normal on $\triangle(0,\delta)$. We may assume that $F_n(z) \longrightarrow F(z)$ on $\triangle(0,\delta)$. Since $\{f_n\}$ is a sequence of zero-free meromorphic functions on $\triangle(0,\delta)$ such that $\{f_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$ but not normal at $z=0$, the maximum modulus principle implies that $f_n(z) \longrightarrow 0$ on $\triangle'(0,\delta)$. In view of equality $F_n(z) = z^l f_n(z)$ we have $F(z) \equiv 0$, which contradicts the condition $F_n(0) = \infty$, because 0 is a pole of $f_n(z)$ ($n \in \mathbb{N}$) with multiplicity at least $l+1$. □

3. Proof of Theorem 1.1

Suppose that the family $\mathcal{F}$ is not normal at a point $z_0 \in D$, then there exists a sequence $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ such that no subsequence of $\{f_n\}$ is normal at z_0.

By Theorem B, the point z_0 must be a pole of $h(z)$. We may assume that $z_0 = 0$, $D = \Delta$, and $h(z) = \frac{\varphi(z)}{z^l}$, where l is a positive integer and $\varphi(z)$ is analytic on Δ with $\varphi(0) = 1$ and $\varphi(z) \neq 0$ for all $z \in \Delta$.

We claim that there exists $0 < \delta < 1$ such that $f_1 \neq 0$ and $f_1^{(k)}(z) \neq h(z)$ on $\Delta'(0, \delta)$. Otherwise, there exist points $z_n \to 0$ ($z_n \neq 0$) such that $f_1(z_n) = 0$ or $f_1^{(k)}(z_n) = h(z_n)$, and hence $f_1(z) \equiv 0$ or $f_1^{(k)}(z) \equiv h(z)$. By the sharing conditions, either $f_n(z) \equiv 0$ or $f_n^{(k)}(z) \equiv h(z)$ for all n. If $f_n(z) \equiv 0$. then $\{f_n\}$ is a constant sequence, so that the family $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0, \delta)$, and we get a contradiction. Thus, $f_n^{(k)}(z) \equiv h(z)$ for all n, and $\{f_n^{(k)}\}$ is normal on $\Delta(0, \delta)$. By Lemma 2.3, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0, \delta)$ since the zeros of $\{f_n\}$ have multiplicity at least $k + 2$, which contradicts our assumption. Next, it follows from the assumption that for each n

$$f_n \neq 0, \quad f_n^{(k)}(z) \neq h(z) \quad (z \in \Delta'(0, \delta)) \tag{3.1}$$

Hence, by (3.1) and Theorem A, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0, \delta)$.

If there exists a subsequence of $\{f_n\}$, which we still denote by $\{f_n\}$, such that $f_n(0) \neq \infty$ for all n, then by (3.1) and $h(0) = \infty$ we have $f_n^{(k)}(z) \neq h(z)$ on $\Delta(0, \delta)$. Since the zeros of $\{f_n\}$ have multiplicity at least $k+2$, by Lemma 2.2, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0, \delta)$, yielding a contradiction.

So, $f_n(0) = \infty$ for n large enough. We may assume that $f_n(0) = \infty$ for all n. Then 0 is a common pole of $f_n(z)$ and $h(z)$, and the multiplicity of $f_n(z)$ is at least $l + 1$. Therefore

$$f_n(z) \neq 0, \quad f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0, \quad (z \in \Delta(0, \delta)). \tag{3.2}$$

Notice that $f_n^{(k)}(z) \neq h(z)$ and $f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0$ are not equivalent because $h(z)$ is meromorphic. Let $F_n(z) = z^l f_n(z)$, $z \in \Delta(0, \delta)$, then $F_n(z) \neq 0$ on $\Delta(0, \delta)$ since 0 is a pole of $f_n(z)$ with multiplicity at least $l+1$. Because $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0, \delta)$ and is not normal at $z = 0$, by Lemma 2.7, the family $\{F_n\}$ is normal on $\Delta'(0, \delta)$ and is not normal at $z = 0$. Hence, by Lemma 2.1, there exist a subsequence of $\{F_n\}$, which we continue to call $\{F_n\}$, a sequence of points $z_n \to 0$, and a sequence of positive numbers $\rho_n \to 0$, such that

$$g_n(\zeta) = \frac{F_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^k} = \frac{(z_n + \rho_n \zeta)^l f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^k} \xrightarrow{\chi} g(\zeta) \tag{3.3}$$

on $\mathbb{C}$, where g is a nonconstant meromorphic function. Now we consider two cases.

Case 1. $z_n/\rho_n \to \infty$. We claim that: 1. $g(\zeta) \neq 0$; 2. $g^{(k)}(\zeta) \neq 1$. Since $F_n(z) \neq 0$ on $\Delta(0, \delta)$, for sufficiently large n we have $g_n(\zeta) \neq 0$. By Hurwitz's theorem, either have

$$f^{(k)}(z) = \frac{C_1 P(z)}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}, \tag{2.2}$$

where $P(z)$ is a polynomial of degree $(t-1)k$.

By the assumption $f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}$ and $n_1 \geq l+1$, and hence we have

$$f^{(k)}(z) - \frac{1}{z^l} = \frac{C_3}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}, \tag{2.3}$$

where $C_3 \neq 0$ is a constant. Therefore

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{z^{n_1+k-l}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k} + C_3}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}} \\ &= \frac{Q(z)}{z^{n_1+k}(z-z_2)^{n_2+k}\cdots(z-z_t)^{n_t+k}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Next, it follows from (2.2) and (2.4) that $C_1P(z) = Q(z)$, implying that $deg(C_1P(z)) = deg(Q(z))$. On the other hand, we have

$$deg(C_1P(z)) = (t-1)k, \quad deg(Q(z)) = n_1 + n_2 + \cdots + n_t + tk - l.$$

This contradicts the condition $n_1 \geq l+1$, and the result follows. □

Lemma 2.7. *Let $\{f_n\}$ be a sequence of zero-free meromorphic functions on $\triangle(0,\delta)$, such that $\{f_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$, but it is not normal at $z=0$. Let l be a positive integer. Define a sequence $\{F_n\}$ by $F_n(z) = z^l f_n(z)$. If 0 is a pole of $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ with multiplicity at least $l+1$, then $\{F_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$ and is not normal at $z=0$.*

Proof. It is evident that $\{F_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$. Suppose that $\{F_n\}$ is normal at $z=0$, then $\{F_n\}$ is normal on $\triangle(0,\delta)$. We may assume that $F_n(z) \longrightarrow F(z)$ on $\triangle(0,\delta)$. Since $\{f_n\}$ is a sequence of zero-free meromorphic functions on $\triangle(0,\delta)$ such that $\{f_n\}$ is normal on $\triangle'(0,\delta)$ but not normal at $z=0$, the maximum modulus principle implies that $f_n(z) \longrightarrow 0$ on $\triangle'(0,\delta)$. In view of equality $F_n(z) = z^l f_n(z)$ we have $F(z) \equiv 0$, which contradicts the condition $F_n(0) = \infty$, because 0 is a pole of $f_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$ with multiplicity at least $l+1$. □

3. Proof of Theorem 1.1

Suppose that the family $\mathcal{F}$ is not normal at a point $z_0 \in D$, then there exists a sequence $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ such that no subsequence of $\{f_n\}$ is normal at z_0.

By Theorem B, the point z_0 must be a pole of $h(z)$. We may assume that $z_0 = 0$, $D = \Delta$, and $h(z) = \frac{\varphi(z)}{z^l}$, where l is a positive integer and $\varphi(z)$ is analytic on Δ with $\varphi(0) = 1$ and $\varphi(z) \neq 0$ for all $z \in \Delta$.

We claim that there exists $0 < \delta < 1$ such that $f_1 \neq 0$ and $f_1^{(k)}(z) \neq h(z)$ on $\Delta'(0,\delta)$. Otherwise, there exist points $z_n \to 0$ ($z_n \neq 0$) such that $f_1(z_n) = 0$ or $f_1^{(k)}(z_n) = h(z_n)$, and hence $f_1(z) \equiv 0$ or $f_1^{(k)}(z) \equiv h(z)$. By the sharing conditions, either $f_n(z) \equiv 0$ or $f_n^{(k)}(z) \equiv h(z)$ for all n. If $f_n(z) \equiv 0$, then $\{f_n\}$ is a constant sequence, so that the family $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0,\delta)$, and we get a contradiction. Thus, $f_n^{(k)}(z) \equiv h(z)$ for all n, and $\{f_n^{(k)}\}$ is normal on $\Delta(0,\delta)$. By Lemma 2.3, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0,\delta)$ since the zeros of $\{f_n\}$ have multiplicity at least $k+2$, which contradicts our assumption. Next, it follows from the assumption that for each n

$$f_n \neq 0, \quad f_n^{(k)}(z) \neq h(z) \quad (z \in \Delta'(0,\delta)) \tag{3.1}$$

Hence, by (3.1) and Theorem A, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0,\delta)$.

If there exists a subsequence of $\{f_n\}$, which we still denote by $\{f_n\}$, such that $f_n(0) \neq \infty$ for all n, then by (3.1) and $h(0) = \infty$ we have $f_n^{(k)}(z) \neq h(z)$ on $\Delta(0,\delta)$. Since the zeros of $\{f_n\}$ have multiplicity at least $k+2$, by Lemma 2.2, $\{f_n\}$ is normal on $\Delta(0,\delta)$, yielding a contradiction.

So, $f_n(0) = \infty$ for n large enough. We may assume that $f_n(0) = \infty$ for all n. Then 0 is a common pole of $f_n(z)$ and $h(z)$, and the multiplicity of $f_n(z)$ is at least $l+1$. Therefore

$$f_n(z) \neq 0, \quad f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0, \quad (z \in \Delta(0,\delta)). \tag{3.2}$$

Notice that $f_n^{(k)}(z) \neq h(z)$ and $f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0$ are not equivalent because $h(z)$ is meromorphic. Let $F_n(z) = z^l f_n(z)$, $z \in \Delta(0,\delta)$, then $F_n(z) \neq 0$ on $\Delta(0,\delta)$ since 0 is a pole of $f_n(z)$ with multiplicity at least $l+1$. Because $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0,\delta)$ and is not normal at $z=0$, by Lemma 2.7, the family $\{F_n\}$ is normal on $\Delta'(0,\delta)$ and is not normal at $z=0$. Hence, by Lemma 2.1, there exist a subsequence of $\{F_n\}$, which we continue to call $\{F_n\}$, a sequence of points $z_n \to 0$, and a sequence of positive numbers $\rho_n \to 0$, such that

$$g_n(\zeta) = \frac{F_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^k} = \frac{(z_n + \rho_n\zeta)^l f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^k} \xrightarrow{\chi} g(\zeta) \tag{3.3}$$

on $\mathbb{C}$, where g is a nonconstant meromorphic function. Now we consider two cases.

Case 1. $z_n/\rho_n \to \infty$. We claim that: 1. $g(\zeta) \neq 0$; 2. $g^{(k)}(\zeta) \neq 1$. Since $F_n(z) \neq 0$ on $\Delta(0,\delta)$, for sufficiently large n we have $g_n(\zeta) \neq 0$. By Hurwitz's theorem, either

$g(\zeta) \neq 0$ or $g(\zeta) \equiv 0$. Since g is a nonconstant meromorphic function, Claim 1 follows.

To prove Claim 2, observe first that

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z) &= \left(\frac{F_n(z)}{z^l}\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j F_n(z)^{(k-j)}\left(\frac{1}{z^l}\right)^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \rho_n^j g_n^{(k-j)}\left(\frac{z-z_n}{\rho_n}\right)\frac{(-1)^j l(l+1)\cdots(l+j-1)}{z^{l+j}}, \end{aligned}$$

where $F_n(z) = \rho_n^k g_n(\frac{z-z_n}{\rho_n})$. Since $\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta} \to 0$, we can write

$$\begin{aligned} (z_n+\rho_n\zeta)^l f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta) &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j\left(\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}\right)^j g_n^{(k-j)}(\zeta)(-1)^j l(l+1)\cdots(l+j-1) \\ &= g_n^{(k)}(\zeta) + \sum_{j=1}^{k} c_j\left(\frac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}\right)^j g_n^{(k-j)}(\zeta) \longrightarrow g^{(k)}(\zeta) \qquad (3.4) \end{aligned}$$

on $\mathbb{C}\setminus g^{-1}(\infty)$, where $c_j = (-1)^j l(l+1)\cdots(l+j-1)C_k^j$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$.

Thus

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)} = \frac{(z_n+\rho_n\zeta)^l f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{\varphi(z_n+\rho_n\zeta)} \longrightarrow g^{(k)}(\zeta) \qquad (3.5)$$

on $\mathbb{C}\setminus g^{-1}(\infty)$.

Assuming $g^{(k)}(\zeta) \equiv 1$, we obtain that $g(\zeta)$ is a polynomial of degree k, which contradicts Claim 1. Thus, $g^{(k)}(\zeta) \not\equiv 1$. Suppose that $g^{(k)}(\zeta_0) = 1$, where $\zeta_0 \in \mathbb{C}$. Then by Hurwitz's theorem and (3.5), there exist points $\zeta_n \to \zeta_0$ such that $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n) = h(z_n+\rho_n\zeta_n)$ for sufficiently large n. By (3.1), we have $z_n+\rho_n\zeta_n = 0$, and hence $\zeta_n = -z_n/\rho_n \to \infty$, yielding a contradiction. Claim 2 is proved.

It follows from Claims 1, 2 and Lemma 2.4 that $g(\zeta)$ is a constant, which contradicts the fact that g is a nonconstant meromorphic function.

Case 2. $z_n/\rho_n \not\to \infty$. Taking a subsequence if necessary, we can assume that $z_n/\rho_n \to \alpha$, where α is a finite complex number. By (3.3), we have on $\mathbb{C}$

$$h_n(\zeta) := \frac{\zeta^l f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k-l}} = g_n\left(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n}\right) \xrightarrow{\chi} g(\zeta-\alpha).$$

Setting $G_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k-l}}$, we have on $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$G_n(\zeta) = \frac{\zeta^l f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k-l}}\cdot\frac{1}{\zeta^l} \xrightarrow{\chi} \frac{g(\zeta-\alpha)}{\zeta^l} = G(\zeta) \qquad (3.6)$$

Clearly, $G(\zeta) \not\equiv 0$. Otherwise $g(\zeta-\alpha) \equiv 0$, implying that $g(\zeta) \equiv 0$, and yielding a contradiction.

It follows from (3.2) that $G_n(\zeta) \neq 0$ for sufficiently large n. Hence by maximum modulus principle, the relation (3.6) also holds on $\mathbb{C}$. Thus, 0 is a pole of $G(\zeta)$ with multiplicity at least $l+1$ since 0 is a pole of $f_n(z)$ with multiplicity at least $l+1$.

Now, we claim that: 3. $G(\zeta) \neq 0$; 4. $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \neq 0$.

Observe first that Claim 3 follows from Hurwitz's theorem. Indeed, since $G_n(\zeta) \neq 0$ for sufficiently large n, by Hurwitz's theorem, either $G(\zeta) \equiv 0$ or $G(\zeta) \neq 0$. But $G(\zeta) \equiv 0$ contradicts the fact that g is a nonconstant meromorphic function, and the result follows. To prove Claim 4, observe that by (3.6) we have

$$G_n^{(k)}(\zeta) = \rho_n^l f_n^{(k)}(\rho_n\zeta).$$

In view of (3.2), for sufficiently large n, we can write

$$(3.7) \quad G_n^{(k)}(\zeta) - \frac{\varphi(\rho_n\zeta)}{\zeta^l} = G_n^{(k)}(\zeta) - \rho_n^l h(\rho_n\zeta) = \rho_n^l(f_n^{(k)}(\rho_n\zeta) - h(\rho_n\zeta)) \neq 0.$$

Also, on $\mathbb{C}\backslash G^{-1}(\infty)$ we have

$$(3.8) \quad G_n^{(k)}(\zeta) - \frac{\varphi(\rho_n\zeta)}{\zeta^l} \longrightarrow G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l}.$$

Next, by Hurwitz's theorem, either $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \equiv 0$ or $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}\backslash G^{-1}(\infty)$. If $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \equiv 0$ on $\mathbb{C}\backslash G^{-1}(\infty)$, then we conclude that $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \equiv 0$ on $\mathbb{C}$. (Otherwise $G^{(k)}(\zeta_0) - \frac{1}{\zeta_0^l} \neq 0$ for $\zeta_0 \in G^{-1}(\infty)$. But $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \to 0$ as $\zeta \to \zeta_0$ since $G^{-1}(\infty)$ is discrete, yielding a contradiction). This contradicts the fact that 0 is a pole of $G(\zeta)$ with multiplicity at least $l+1$.

Thus, $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}\backslash G^{-1}(\infty)$. Since 0 is a pole of $G(\zeta)$ with multiplicity at least $l+1$, we conclude that $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l} \neq 0$ on $\mathbb{C}$, and Claim 4 follows.

It follows from Claims 3, 4 and Lemma 2.5 that $G(\zeta)$ is a rational function. Finally, in view of Lemma 2.6, we conclude that $G^{(k)}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^l}$ has at least one zero, which yields a contradiction. □

Acknowledgment: We would like to thank a referee for their valuable comments and suggestions.

Список литературы

[1] J. M. Chang, "Normality of meromorphic functions and uniformly discrete exceptional sets", Compute. Methods Funct. Theory, 13, 47 – 63 (2013).

[2] Y. X. Gu, "A normal criterion of meromorphic families", Scientia, Math.Issue I, 13, 276 – 274 (1979).

[3] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, (1964).

[4] X. C. Pang and L. Zalcman, "Normal families and shared values", Bull. London Math. Soc., 32, 325 – 331 (2000).

[5] J. Schiff, Normal Families, Springer, Berlin (1993).

[6] W. Schwick, "Sharing values and normality", Arch Math., **59**, 50 – 54 (1992).
[7] Y. Xu, "Normal families and exceptional functions", J. Math. Anal. Appl., **329**, 1343 – 1354 (2007).
[8] Y. Xu, "A normality relationship between two families and its applications", Publ. Math. Debrecen., **13**, 99 – 105 (2013).
[9] Y. Xu, "Picard values and derivatives of meromorphic functions", Kodai Math. j. **28**, 1 – 9 (2005).
[10] L. Yang, Value Distribution Theory, Springer-Verlag & Science Press, Berlin (1993).
[11] L. Yang, "Normality of families of meromorphic function", Sci. Sinica A9, **13**, 898 – 908 (1986).
[12] L. Yang, "Normality for families of meromorphic functions", Sci. Sinica Ser. A29, **12**, 1263 – 1274 (1986).

Поступила 4 февраля 2015

Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 3. 2016, стр. 65-84.

О ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ СЕЛЕКЦИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Аннотация. В этой статье рассматривается вопрос о существовании производной по направлению селекций для некоторых многозначных отображений со звездными графиками.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: Многозначное отображение; звездное множество; шатер; касательный конус.

1. Введение

Статья посвящена изучению свойств производных многозначных отображений и отысканию достаточных условий, при которых существуют производные многозначных отображений, графики которых являются шатрами Болтянского различной гладкости ([2], [3]). Попытки дать различные определения производной многозначного отображения предпринимали очень многие ученые: среди них Хукухара, Демьянов, Рубинов, Пшеничный и многие другие. Однако использовать касательный конус к графику были предложены независимо в двух работах: Ж. П. Обеном [12] и Е.С. Половинкиным [8]. В работе [17] также используется указанная выше концепция производной в которой касательный конус к графику отображения выбирается в виде некоторого шатра Болтянского. В работах [7], [9] вводятся понятия производных многозначного отображения, опирающиеся на различные касательные конусы к графику отображения. В частности, введено и изучено понятие регулярного касательного конуса, развивающее понятие шатра Болтянского. Отметим также, что в работах [5], [6] Б. Н. Пшеничным развивается метод шатров и успешно применяется к задачам негладкой оптимизации.

В настоящей статье рассматриваются достаточные условия, при которых многозначное отображение содержит непрерывные однозначные селекции, производные которых по направлениям содержатся в многозначной производной. Задача существования селекций многозначных отображений, обладающих определенными свойствами, весьма интересна и находит разнообразные приложения во многих областях математики. В частности, задача о существовании непрерывной селекции многозначных отображений, восходящая к классической теореме Э. Майкла ([13]) (полунепрерывное снизу многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями допускает непрерывную селекцию), получила в дальнейшем широкое развитие и многочисленные приложения.

Приведены некоторые специальные классы множеств, для которых показано, что контингентный конус к ним являются строго дифференцируемым шатром(теоремы 2.1, 2.2). Доказана теорема о пересечении строго дифференцируемых шатров(теорема 2.3). Следует отметить, что соответствующие теоремы для гладких локальных шатров доказаны в работах [3], [5] (теорема 1.4, §2, глава 5, стр.205).

Обобщена классическая теорема о неявных функциях для систем неравенств.

В §4 установлен оригинальный результат: если a- многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком, то существует селекция этого отображения, удовлетворяющая условию Гельдера с константой 1/2 (теорема 4.1).

В статье приняты известные определения и обозначения выпуклого анализа. Обозначим через $B_\varepsilon(x)$ замкнутый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in R^n$; $< v, u >$- скалярное произведение векторов $v, u \in R^n$. $\overline{M}$ – замыкание множества M. Пусть $\partial^0 g(x)$- субдифференциал Кларка (см. [4], определение обобщенного градиента, §2.1, глава 2, стр. 34) функции g в точке x. Если $a : R^n \to R^{2^m}$- многозначное отображение, то

$$graf(a) = \{(x, y) \in R^{n+m} : y \in a(x)\}, \qquad dom(a) = \{x \in R^n : a(x) \neq \emptyset\}.$$

Однозначное отображение $y : R^n \to R^m$ называется селекцией для многозначного отображения a, если $y(x) \in a(x)$ $x \in dom(a)$.

Определение 1.1. [14]. *Пусть M- подмножество пространства R^n. Тогда множество*

$$M^0 = \{x \in M : \forall y \in M \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1]\}$$

называется ядром звездности множества M. Если $M^0 \neq \emptyset$, то M называется звездным множеством. Если $int M^0 \neq \emptyset$, то M называется звездным телом.

Положим $\rho(x, M) = inf\{\|x-y\| : y \in M\}$, $Pr_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$.

Определение 1.2. [7]. *Контингентный конус $K_M(x_0)$ для M в точке $x_0 \in M$ определяется следующим образом:*

$$K_M(x_0) = lim_{\lambda\downarrow 0} sup \frac{M - x_0}{\lambda} = \{\overline{x} \in R^n : lim_{\lambda\downarrow 0} inf \rho(\overline{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

т.е. вектор $\overline{x} \in K_M(x_0)$, если для любых $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ существуют $u \in B_\epsilon(\overline{x})$, $h \in (0, \alpha]$ такие, что $x_0 + hu \in M$.

Приведем определение шатра (см. [2], определение 34.1, §9, глава 4, стр. 278).

Определение 1.3. *Конус $K \subseteq K_M(x_0)$ называется шатром для M в $x_0 \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что*

$$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \text{ если } \overline{x} \in K \bigcap U \text{ и } \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \text{ при } \overline{x} \to 0.$$

Шатер K называется липшицевым, если r является липшицевым отображением. Шатер K называется строго дифференцируемым, если r строго дифференцируемо в нуле, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|r(\overline{x_1}) - r(\overline{x_2})\| < \epsilon\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\| \ \forall \overline{x_1}, \overline{x_2} \in B_\delta(0) \subseteq U.$$

В дальнейшем, если $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ многозначное отображение, график которого есть выпуклый замкнутый конус K, то положим $a^*(y^*) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K^*\}$, где $K^* = \{z^* \in R^{n+m} : < z^*, u > \geq 0 \ \forall u \in K\}$ (см. определение локально сопряженного отображения в [5], §2, глава 3, стр.102). В дальнейшем нам понадобится следующие результаты.

Теорема 1.1. [17] *Пусть $M \subseteq R^n$- звездное тело и $x_0 \in M^0$. Тогда конус $K_M(x_0) = \overline{con(M - x_0)}$ является шатром для M в точке x_0. Здесь*

$$con(M - x_0) = \{y \in R^n : y = \lambda(x - x_0), x \in M, \lambda > 0\}.$$

Теорема 1.2. *(следствие 1 теоремы 3.1 [10]). Пусть многозначное отображение $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ с выпуклыми замкнутыми значениями липшицево на компактном множестве $E \subset R^n$, т.е. существует число $L > 0$ такое, что любых $x_1, x_2 \in E$ имеет место включение $a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$. Предположим также, что $\int a(x) \neq \emptyset$ $x \in E$. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in graf(a)$, $x_0 \in$*

E существует липшицево отображение $y(x)$, определенное на E, такое, что $y(x_0) = y_0$, $y(x) \in a(x)$, $x \in E$.

2. Шатры и производные многозначных отображений

Пусть $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ многозначное отображение и $(x_0, y_0) \in graf(a)$.

Определение 2.1. *Пусть $K \subseteq K_{graf(a)}(x_0, y_0)$-замкнутый конус. K-производной от многозначного отображения a в точке его графика $(x_0, y_0) \in graf(a)$ называется отображение $D^K a(x_0, y_0) : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ вида*

$$D^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \equiv \{\overline{y} \in R^m : (\overline{x}, \overline{y}) \in K\},\ \overline{x} \in R^n.$$

В дальнейшем, если $K = K_{graf(a)}(x_0, y_0)$, то положим

$$D^{K_{graf(a)}}(z_0) \equiv D^K a(x_0, y_0).$$

Определение 2.2. [11]. *Многозначное отображение a называется псевдолипшицевым в точке $(x_0, y_0) \in graf(a)$, если существуют окрестности V и U соответственно для точек y_0 и x_0 и константа $L \geq 0$ такие, что*

$$a(x_1) \bigcap V \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\| B_1(0)\ \ \forall x_1, x_2 \in U.$$

В дальнейшем многозначное отображение $a^0 : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ определяется по правилу: $a^0(x) \equiv \{y \in R^m : (x, y) \in (graf(a))^0\}$, $x \in R^n$.

Утверждение 2.1. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ - отображение со звездным и замкнутым графиком. Предположим, что $(x_0, y_0) \in graf(a^0)$ и $x_0 \in int\, dom(a^0)$. Тогда $\overline{y} \in D^{K_{graf(a)}}(z_0)(\overline{x})$ в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(\overline{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2[17] многозначное отображение a псевдолипшицево в $(x_0, y_0) \in graf(a)$ и следовательно, в силу предложения 3[7] $\overline{y} \in D^{K_{graf(a)}}(z_0)(\overline{x})$ тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{\alpha \downarrow 0} \rho(\overline{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Допустим, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Поскольку график отображения a является звездным множеством, то

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a(x_0 + \alpha_2\overline{x}) + (1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}) y_0 \subseteq a(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x_0 + \alpha_2\overline{x}) + (1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}) x_0) = a(x_0 + \alpha_1\overline{x}).$$

Отсюда следует, что функция $\alpha \to \rho(\overline{y}, (a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0/\alpha))$ невозрастает. Следовательно,

$$\liminf_{\alpha\downarrow 0} \rho(\overline{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \rho(\overline{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0)}{\alpha}) = 0.$$

Следствие 2.1. *Пусть $y(x)$- дифференцируемая по направлению селекция для a такая, что $y(x_0) = y_0$. Тогда*

$$y'(x_0, \overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \;\; \forall \overline{x} \in R^n.$$

Следствие 2.2. *Пусть отображение a с выпуклыми значениями удовлетворяет всем условиям предложения 2.1. Тогда для любого $\overline{x} \in R^n$ множество $D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$ выпукло.*

Доказательство. По предположению множество $\alpha^{-1}(a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0)$ выпукло. Отсюда следует, что функция $v \to \rho(v, \frac{a(x_0+\alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha})$ выпукла. Так что для любых $\mu \in [0, 1]$ и $v_1, v_2 \in D^{K_{graf(a)}}(z_0)(\overline{x})$ имеем

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \rho(\mu v_1 + (1-\mu)v_2, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) \le$$

$$\mu \lim_{\alpha\downarrow 0} \rho(v_1, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) + (1-\mu) \lim_{\alpha\downarrow 0} \rho(v_2, \frac{a(x_0 + \alpha\overline{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Следовательно, $\mu v_1 + (1-\mu)v_2 \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$. □

Определение 2.3. [1] *Функция $g : R^n \to R$ называется строго дифференцируемой в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки x_0 такая, что*

$$| g(y) - g(z) - < g'(x_0), y - z > | \le \varepsilon \|y - z\| \;\; \forall y, z \in V,$$

где $g'(x_0)$ градиент функции g в точке x_0.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$M \equiv \{x \in R^n : g(x) \le 0\}, \; \partial M \equiv \{x \in R^n : g(x) = 0\},$$

где g строго дифференцируемая функция в точке x_0, $g(x_0) = 0$ и $g'(x_0) \ne 0$. Тогда подпространство $H \equiv \{\overline{x} \in R^n :< g'(x_0), \overline{x} >= 0\}$ и полупространство ${}_M(x_0) \equiv \{\overline{x} \in R^n :< g'(x_0), \overline{x} > \le 0\}$ являются строго дифференцируемыми шатрами для множеств ∂M и M в точке x_0, соответственно.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы. Поскольку $g'(x_0) \neq 0$, то найдется такой вектор $w, \|w\| = 1$, что $< g'(x_0), w >< 0$. Так как g строго дифференцируема, то существует функция $R(\overline{x}) = o(\overline{x})$ такая, что

$$(2.1) \qquad g(x_0 + \overline{x}) = g(x_0) + < g'(x_0), \overline{x} > + R(\overline{x}).$$

Положим $\omega(\lambda) = sup\{R(\overline{x}) : \|\overline{x}\| \leq \lambda\}$. Очевидно, что $\omega(\lambda)$ монотонно неубывает и $\omega(\lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$ и $R(\overline{x}) \leq \omega(\|\overline{x}\|)$. Если $\overline{x} \in H$ и $\mu > 0$, то из (2.1) получим

$$g(x_0 + \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) = g(x_0) + < g'(x_0), \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w > + R(\overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) \leq$$

$$\leq \|\overline{x}\|\mu < g'(x_0), w > + \omega(\|\overline{x}\|(1 + \mu\|w\|)) = \|\overline{x}\|(\mu < g'(x_0), w > +$$

$$+ \frac{\omega(\|\overline{x}\|(1 + \mu\|w\|)}{\|\overline{x}\|}).$$

Выберем $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках стало меньше, чем $1/2\mu < g'(x_0), w >$ когда $\|x\| \leq \delta_1$. Так что

$$(2.2) \quad g(x_0 + \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) \leq 1/2\mu\|\overline{x}\| < g'(x_0), w >< 0, \forall \overline{x} \in H \bigcap B_{\delta_1}(0), \ \overline{x} \neq 0.$$

Аналогично, существует такое число $\delta_2 > 0$, что

$$(2.3) \qquad g(x_0 + \overline{x} - \mu\|\overline{x}\|w) > 0 \text{ при } \overline{x} \in H \bigcap B_{\delta_2}(0), \ \overline{x} \neq 0.$$

Положим $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для фиксированного $\overline{x} \in H \bigcap B_\delta(0)$ рассмотрим функцию $q(\overline{x}, \beta) \equiv g(x_0 + \overline{x} + \beta\|\overline{x}\|w)$ на сегменте $[-\mu, \mu]$. Из соотношений (2.2)-(2.3) следует, что $q(\overline{x}, \mu) < 0, \ q(\overline{x}, -\mu) > 0$. Следовательно, существует $\beta(\overline{x}) \in [-\mu, \mu]$ такая, что $q(\overline{x}, \beta(\overline{x})) = 0$. Теперь покажем, что точка $\beta(\overline{x})$ определяется однозначно. Для этого сначала заметим, что для фиксированного $\overline{x}$ функция $q(\overline{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β. Действительно, поскольку g строго дифференцируема в x_0, то для заданного $\varepsilon < | < g'(x_0), w > |$ и достаточно малых $\overline{x} \neq 0$ имеем

$$\limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{q(\overline{x}, \beta + \tau) - q(\overline{x}, \beta)}{\tau} =$$

$$= \limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{g(x_0 + \overline{x} + (\beta + \tau)\|\overline{x}\|w) - g(x_0 + \overline{x} + \beta\|\overline{x}\|w)}{\tau} \leq$$

$$\leq \|\overline{x}\|(< g'(x_0), w > + \varepsilon) < 0$$

Отсюда следует, что функция $q(\overline{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β и следовательно $\beta(\overline{x})$ определяется однозначно. Заметим также, что $\beta(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$. Теперь определим отображение r следующим образом: $r(\overline{x}) = \rho(\overline{x})w \ \forall \overline{x} \in R^n$, где $\rho(\overline{x}) = \beta(Pr_H(\overline{x}))\|Pr_H(\overline{x})\|$. По определению r для достаточно малых $\overline{x} \in H$ имеем $g(x_0 + \overline{x} + r(\overline{x})) = 0$. Нетрудно доказать также, что

$$\lim_{\overline{x}\to 0} \frac{\|r(\overline{x})\|}{\|\overline{x}\|} = 0.$$

Наконец докажем, что отображение r строго дифференцируемо в нуле. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in H \bigcap B_\delta(0)$ имеет место

$$| < g'(x_0), (\rho(\overline{x_1}) - \rho(\overline{x_2}))w > | = |g(x_0 + \overline{x_1} + \rho(\overline{x_1})w) - g(x_0 + \overline{x_2} + \rho(\overline{x_2})w)$$

$$- < g'(x_0), \overline{x_1} - \overline{x_2} + (\rho(\overline{x_1}) - \rho(\overline{x_2}))w > | \le \varepsilon(\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\| + \|w\||\rho(\overline{x_1}) - \rho(\overline{x_2})|).$$

Поскольку $\|w\| = 1$, то отсюда получим

$$|\rho(\overline{x_1}) - \rho(\overline{x_2})| \le \frac{\varepsilon}{|< g'(x_0), w >| - \varepsilon}\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|.$$

Теперь если $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in B_\delta(0)$, то

$$|\rho(\overline{x_1}) - \rho(\overline{x_2})| \le \frac{\varepsilon}{|< g'(x_0), w >| - \varepsilon}\|Pr_H(\overline{x_1}) - Pr_H(\overline{x_2})\| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{|< g'(x_0), w >| - \varepsilon}\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|.$$

Первое утверждение теоремы доказано. Определим отображение ψ следующим образом: $\psi(\overline{x}) = r(Pr_H^w(\overline{x})) = \alpha(\overline{x})w \ \forall \overline{x} \in R^n$, где $\alpha(\overline{x}) = \rho(Pr_H^w(\overline{x}))$. Pr_H^w-оператор проектирования на H по направлению вектора w. Пусть θ-угол, между вектором w и подпространством H. Тогда для любого $x, y \in R^n$ справедливо неравенство

$$\|Pr_H^w(x) - Pr_H^w(y)\| \le \frac{1}{\sin\theta}\|x - y\|,$$

т.е. отображение ψ строго дифференцируемо в нуле. Допустим, что $\overline{x} \in K_M(x_0)$. Используя теорему о среднем значении для липшицевой функции, получим

(2.4)

$$g(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) = g(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) - g(x_0 + Pr_H^w(\overline{x}) + \psi(\overline{x})) =< y^*, \overline{x} - Pr_H^w(\overline{x}) >,$$

где $y^* \in \partial^0 g(\zeta)$, ζ- некоторая точка из отрезка $[x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x}), x_0 + Pr_H^w(\overline{x}) + \psi(\overline{x})]$. Если $\overline{x} \in K_M(x_0)$, то для некоторого $\lambda(\overline{x}) \ge 0$ имеем $\overline{x} - Pr_H^w(\overline{x}) = \lambda(\overline{x})w$. Так как отображение $\partial g^0(x)$ полунепрерывно сверху и $< g'(x_0), w >< 0$, то из (2.4) следует, что для достаточно малых $\overline{x} \in K_M(x_0)$ имеет место неравенство

$$g(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) = \lambda(\overline{x}) < y^*, w >\le 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть $\Omega = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i \in I\}$, где I- конечное множество индексов, функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в точке $x_0 \in \Omega$. Предположим, что существует вектор w, $\|w\| = 1$ такой, что $< g_i'(x_0), w >< 0$, $\forall i \in I(x_0)$, где $I(x_0) = \{i \in I : g_i(x_0) = 0\}$. Тогда конус*

$$K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n :< g_i'(x_0), \overline{x} >\leq 0, \ i \in I(x_0)\}$$

является строго дифференцируемым шатром для Ω в x_0.

Доказательство. Для каждого $i \in I(x_0)$ построим отображение $\psi_i(\overline{x}) = \alpha_i(\overline{x})w$, определенное вблизи нуля, так как было сделано при доказательстве теоремы 2.1. Таким образом для достаточно малых $\overline{x} \in K_i \equiv \{\overline{x} \in R^n :< g'(x_0), \overline{x} >\leq 0\}$ имеет место неравенство: $g_i(x_0 + \overline{x} + \psi_i(\overline{x})) \leq 0$.

Так как отображения ψ_i строго дифференцируемы в нуле, то для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta_i > 0$, что

$$(2.5) \qquad \|\psi_i(\overline{x}) - \psi_i(\overline{y})\| < \epsilon\|\overline{x} - \overline{y}\| \ \text{при} \ \|\overline{x}\| \leq \delta_i, \ \|\overline{y}\| \leq \delta_i, \ i \in I(x_0).$$

Обозначим $\alpha(\overline{x}) = \max_{i\in I(x_0)} \alpha_i(\overline{x})$, $\psi(\overline{x}) = \alpha(\overline{x})w$, $\delta = \min_{i\in I(x_0)} \delta_i$. Учитывая соотношение (2.5), имеем

$$\|\psi(\overline{x}) - \psi(\overline{y})\| = \| \max_{i\in I(x_0)} \alpha_i(\overline{x}) - \max_{i\in I(x_0)} \alpha_i(\overline{y})\| \leq$$

$$\leq \max_{i\in I(x_0)} \|\psi_i(\overline{x}) - \psi_i(\overline{y})\| \leq \epsilon\|\overline{x} - \overline{y}\| \ \text{при} \ \|\overline{x}\| \leq \delta, \ \|\overline{y}\| \leq \delta.$$

Значит, отображение ψ строго дифференцируемо в нуле и $\lim_{\overline{x}\to 0} \psi(\overline{x})/\|\overline{x}\| = 0$ при $\overline{x} \to 0$. Остается доказать, что $x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x}) \in \Omega$ при достаточно малых $\overline{x} \in K_\Omega(x_0)$. Имеем

$$g_i(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) - g_i(x_0 + \overline{x} + \psi_i(\overline{x})) =< \psi(\overline{x}) - \psi_i(\overline{x}), y^* >,$$

где $y^* \in \partial^0 g_i(\theta)$ а θ- некоторая точка отрезка, соединяющего точки $x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})$ и $x_0 + \overline{x} + \psi_i(\overline{x})$. Поскольку $\alpha(\overline{x}) \geq \alpha_i(\overline{x})$ и $< y^*, w >< 0$, если $\overline{x}$ достаточно близка к нулю, то имеем $g_i(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) \leq g_i(x_0 + \overline{x} + \psi_i(\overline{x})) \leq 0$. Итак, если $\overline{x} \in K_\Omega(x_0)$ достаточно близка к нулю, то для всех $i \in I(x_0)$ выполнены неравенства $g_i(x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x})) \leq 0$, и поэтому $x_0 + \overline{x} + \psi(\overline{x}) \in \Omega$.

Теорема 2.3. *(о пересечении строго дифференцируемых шатров). Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 являются строго дифференцируемыми шатрами соответственно для множеств $M_1 \subseteq R^n$ и $M_2 \subseteq R^n$ в точке $x_0 \in M_1 \cap M_2$.*

Предположим также, что

$$K_1 - K_2 = R^n. \tag{2.6}$$

Тогда конус $Q \equiv K_1 \cap K_2$ является строго дифференцируемым шатром к множеству $M \equiv M_1 \cap M_2$ в точке x_0.

Доказательство. Сначала покажем, что существуют положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : R^n \longrightarrow K_1$, $P_2 : R^n \longrightarrow K_2$ такие, что любого $x \in R^n$ имеет место равенство:

$$x = P_1(x) - P_2(x) \; \forall x \in R^n. \tag{2.7}$$

Положим $a(x) \equiv \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}$. Имея ввиду соотношение (2.6), легко заметить, что a- многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и $dom(a) = R^n$. Следовательно, в силу предложения 2.4 из [17] существует липшицево, положительно однородное отображение P_1, такое, что $P_1(x) \in a(x) \; \forall x \in R^n$. Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$. Очевидно, что отображение P_2 липшицево, положительно однородно и $P_2(x) \in K_2 \; \forall x \in R^n$. Таким образом соотношение (2.7) доказано. Итак, существуют числа $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такие, что

$$\|P_1(x_1) - P_1(x_2)\| \le L_1\|x_1 - x_2\|, \; \|P_2(x_1) - P_2(x_2)\| \le L_2\|x_1 - x_2\| \; \forall x_1, x_2 \in R^n.$$

Кроме того, поскольку конусы K и H являются шатрами, то существуют отображения

$$\varphi_i(\bar{x}) \equiv x_0 + \bar{x} + r_i(\bar{x}), \; \frac{r_i(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \to 0, i = 1, 2,$$

(отображения r_i, $i = 1, 2$ строго дифференцируемы в нуле) и число $\delta > 0$ такие, что $\varphi_i(\bar{x}) \in M_i \; \forall \bar{x} \in Q \cap B_\delta(0)$. Теперь рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме:

$$q(\bar{x}, y) \equiv \varphi_1(\bar{x} + P_1(y)) - \varphi_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0. \tag{2.8}$$

Имея ввиду соотношение (2.7), уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$q(\bar{x}, y) = y + r_1(\bar{x} + P_1(y)) - r_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0. \tag{2.9}$$

Покажем, что уравнение (2.9) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.3.1 о неявных функциях (см. [1], §2.3, глава 2, стр. 161). Действительно, имеем

a) q-непрерывное отображение и $q(0, 0) = 0$.

b) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta_1 > 0$ и окрестность U нуля такие, что если $\bar{x} \in U$ и $\|y'\| \le \delta_1$, $\|y''\| \le \delta_1$, то $\|q(\bar{x}, y') - q(\bar{x}, y'') - (y' - y'')\| \le \varepsilon\|y' - y''\|$.

Следовательно, по вышеуказанной теореме существуют число $C > 0$, окрестность $\overline{V}$ нули и отображение $y(\overline{x})$, определенное в этой окрестности, такие, что $q(\overline{x}, y(\overline{x})) = 0$ и $\|y(\overline{x})\| \leq Cy(\overline{x}, 0)$ $\forall \overline{x} \in \overline{V}$. Отсюда следует, что

$$y(\overline{x})/\|\overline{x}\| \to 0, \text{ когда } \overline{x} \to 0. \tag{2.10}$$

Положим теперь

$$\varphi(\overline{x}) = \varphi_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x}))) = x_0 + \overline{x} + P_1(y(\overline{x})) + r_1(\overline{x} + P_1 y((\overline{x}))) = x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}),$$

где $r(\overline{x}) = P_1(y(\overline{x})) + r_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x})))$. В силу (2.10) и того, что $r_1(\overline{x}) = o(\overline{x})$, $r(\overline{x})$ обладает тем же свойством. Так как K_1, K_2-выпуклые конусы , то имеем

$$\overline{x} + P_1(y(\overline{x})) \in K_1, \ \overline{x} + P_2(y(\overline{x})) \in K_2 \ \ \forall \overline{x} \in Q.$$

Далее, поскольку конусы K_1 и K_2 являются шатрами соответственно для множеств M_1 и M_2, то при достаточно малых $\overline{x} \in Q$ имеем

$$\varphi(\overline{x}) = \varphi_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x}))) = \varphi_2(\overline{x} + P_2(y(\overline{x}))) \in M_1 \cap M_2.$$

Осталось доказать, что отображение $r(\overline{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Для этого достаточно доказать, что таковым является отображение $y(\overline{x})$. Действительно, имеем $y(\overline{x}) + r_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x}))) - r_2(\overline{x} + P_2(y(\overline{x}))) = 0$ $\forall \overline{x} \in \overline{V}$.

Отсюда так как отображения r_i, $i = 1, 2$ строго дифференцируемы в нуле, то для заданного $\epsilon >$ существует окрестность $\overline{U} \subseteq \overline{V}$ нуля, такая, что для любых $x_1, x_2 \in \overline{U}$ имеем

$$\|y(\overline{x_1}) - y(\overline{x_2})\| \leq \|r_1(\overline{x_1} + P_1(y(\overline{x_1}))) - r_1(\overline{x_2} + P_1(y(\overline{x_2})))\| +$$

$$\|r_2(\overline{x_1} + P_2(y(\overline{x_1}))) - r_2(\overline{x_2} + P_2(y(\overline{x_2})))\| \leq 2\epsilon(\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\| + C\|y(\overline{x_1}) - y(\overline{x_2})\|),$$

где $C = \max\{L_1, L_2\}$. Отсюда следует, что

$$\|y(\overline{x_1}) - y(\overline{x_2}\| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - 2\epsilon C}\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|,$$

т.е. отображение $y(\overline{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Теорема 2.3 доказана.

Следствие 2.3. *Пусть множество M задано системой уравнений*

$$g_i(x) = 0, \ i \in I,$$

где I- конечное множество индексов. Пусть $x_0 \in M$ и функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в x_0. Предположим также, что градиенты $g_i'(x_0)$, $i \in I$ линейно независимы. Тогда подпространство $H = \{\overline{x} \in R^n :< g_i'(x_0), \overline{x} >= 0, \ i \in I\}$ является строго дифференцируемым шатром к множествуM в точке x_0.

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ОТ СЕЛЕКЦИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Утверждение 3.1. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *- отображение со звездным замкнутым графиком. Предположим, что* $(x_0, y_0) \in graf(a^0)$, $x_0 \in int\ dom(a)$ *и множество* $a(x_0)$ *ограничено. Тогда* $dom(D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)) = R^n$ *и существует* $L > 0$ *такое, что*

$$D^{K_{graf(a^0)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \subseteq D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) + L\|\overline{x}\|B_1(0)\ \forall \overline{x} \in R^n. \tag{3.1}$$

Доказательство. Сначала покажем, что существуют окрестность $B_\delta(x_0)$ точки x_0 и константа $L > 0$ такие, что

$$a^0(x_0) \subseteq a(x) + L\|x - x_0\|B_1(0)\ \forall x \in B_\delta(x_0). \tag{3.2}$$

Так как $x_0 \in int\ dom(a)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $B_\delta(x_0) \subseteq dom(a)$. Для $x \in B_\delta(x_0)$ положим

$$\overline{x} = x_0 + \delta\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} = (1 - \frac{\delta}{\|x - x_0\|})x_0 + \frac{\delta}{\|x - x_0\|}x.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\|x - x_0\|}{\delta}\overline{x} + (1 - \frac{\|x - x_0\|}{\delta})x_0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\|x - x_0\|}{\delta}a(\overline{x}) + (1 - \frac{\|x - x_0\|}{\delta})a^0(x_0) \subseteq a(x).$$

Так что для любого $\overline{y} \in a(\overline{x}), y^0 \in a^0(x_0)$ имеет место включение

$$y_0 \in a(x) - \frac{\|x - x_0\|}{\delta}(\overline{y} - y_0).$$

Поскольку, по предложению 3.1 из [17] отображение a ограничено, то отсюда немедленно следует соотношение (3.2). Теперь допустим, что $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда для фиксированного $\overline{x} \in R^n$ и достаточно малых $\alpha > 0$ из (3.2) следует, что

$$y_0 \in a^0(x_0) \subseteq a(x_0 + \alpha\overline{x}) + L\alpha\|\overline{x}\|B_1(0).$$

Отсюда, для каждого $\alpha > 0$ найдется такой элемент $y_\alpha \in a(x_0 + \alpha\overline{x})$, что $(y_\alpha - y_0)/\alpha \in L\|\overline{x}\|B_1(0)$. Значит, существует последовательность $(y_{\alpha_n} - y_0)/\alpha_n$, сходящийся к некоторому элементу $D^{graf(a)}(x_0, y_0)(\overline{x})$. Таким образом доказано, что $dom(D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)) = R^n$. Теперь доказательство включения (3.1) можно проводить таким же путем как доказательство теоремы 2 из [7].

Следствие 3.1. *Пусть выполнены все условия предложения 3.1. Тогда существует положительно однородное отображение* $P : R^n \to R^m$ *и константа* $L > 0$ *такие, что* $P(\overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$ *и* $\|P(\overline{x})\| \leq L\|\overline{x}\|$ $\forall \overline{x} \in R^n$.

Утверждение 3.2. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *- отображение, график которого является такой выпуклый замкнутый конус, что* $dom(a) = R^n$. *Пусть* $(x_0; y_0) \in graf(a)$ $(x_0 \neq 0)$. *Тогда существует непрерывное и положительно однородное отображение* $P : R^n \to R^m$ *и константа* $L > 0$ *такие, что* $P(x_0) = y_0$ *и* $P(x) \in a(x)$ *и* $\|P(x)\| \leq L\|x\|$, $x \in R^n$.

Доказательство. Известно, что (см. [11], теорема 1, глава 3, стр. 136) многозначное отображение a полунепрерывно снизу на R^n. Поэтому согласно теореме Майкла существует непрерывное отображение $z(x)$ такое, что $z(x_0) = y_0$ и $z(x) \in a(x)$, $x \in R^n$.

Определим отображение P по правилу: $P(x) = \frac{\|x\|}{\|x_0\|} z(\frac{\|x_0\| x}{\|x\|})$, если $x \neq 0$ и $P(0) = 0$. Легко видеть, что P положительно однородно и непрерывно. С другой стороны, поскольку график отображения a есть конус, то $P(x) \in a(x)$. Далее, если

$$L = \frac{\max_{x \in B_{\|x_0\|}(0)} \|z(x)\|}{\|x_0\|},$$

тогда $\|P(x)\| \leq L\|x\|$ $\forall x \in R^n$.

Утверждение 3.3. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *- отображение, график которого является такой выпуклый замкнутый конус, что* $dom(a) = R^n$. *Пусть* $(x_0, y_0) \in graf(a)$ $(x_0 \neq 0)$ *и для каждого* $x \in R^n$ $int a(x) \neq \emptyset$. *Тогда существует липшицевое и положительно однородное отображение* $P : R^n \to R^m$ *такое, что* $P(x_0) = y_0$ *и* $P(x) \in a(x)$, $x \in R^n$.

Доказательство. В силу теоремы 1 из [11] (следствие 3, стр.136) отображение a липшицево на R^n. Следовательно оно липшицево на компакте $E \equiv B_{\|x_0\|}(0)$. Поэтому согласно теореме 1.2 существует липшицевая селекция z, проходящая через точку $(x_0; y_0)$. т.е. $z(x) \in a(x)$, $x \in E$, $y(x_0) = y_0$. Рассмотрим снова отображение P, определенное в предложении 3.2. Оно липшицево на R^n (доказательство этого факта можно сделать таким же путем как доказательство предложения 4.2 из [17]). Следовательно, отображение P удовлетворяет всем требованиям нашего утверждения.

Утверждение 3.4. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *- многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями и график которого является звездным множеством и пусть* $(x_0, y_0) \in graf(a^0)$ *и* $x_0 \in int\, dom(a^0)$.
Тогда для каждого $(\hat{x}, \hat{y}) \in graf(D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0))$ $(\hat{x} \neq 0)$ *найдется непрерывное и положительно однородное отображение* P *такое, что* $P(\hat{x}) = \hat{y}$ *и*

$$P(\overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \ \forall \overline{x} \in R^n.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2[17] отображение a псевдолипшицево в (x_0, y_0). Следовательно, по теореме 2 из [7] отображение $D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)$ удовлетворяет условию Липшица на R^n. Следовательно, в силу следствии 2 предложения 2.1, оно имеет выпуклые значения. По известной теореме Майкла существует непрерывное отображение $z(\overline{x})$ такое, что $z(\hat{x}) = \hat{y}$, $z(\overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$ $\forall \overline{x} \in R^n$. Положим

$$P(\overline{x}) = \frac{\|\overline{x}\|}{\|\hat{x}\|} z\left(\frac{\|\hat{x}\|\overline{x}}{\|\overline{x}\|}\right), \text{ если } \overline{x} \neq 0 \text{ и } P(0) = 0.$$

Повторяя доказательство предложения 3.2, получим требуемый результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *- многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями, график которого является звездным телом. Пусть*

$$(x_0, y_0) \in graf(a^0), x_0 \in int\, dom(a^0).$$

Тогда для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in graf(D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0))$ $(\hat{x} \neq 0)$ *существует дифференцируемое по направлению отображение* y, *определенное в некоторой окрестности* V *точки* x_0 *такое, что* $y(x_0) = y_0$, $y(x) \in a(x)$ $\forall x \in V$.

$$y'(x_0, \overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \ \forall \overline{x} \in R^n, \ \ y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.1 конус $K_{graf(a)}(x_0, y_0)$ является шатром к графику отображения a в точке (x_0, y_0). Это означает, что существует отображение $r(\overline{z}) \equiv r(\overline{x}, \overline{y}) = (r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y})) = o(\overline{z})$, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что $z_0 + \overline{z} + r(\overline{z}) \in graf(a)$ для $\overline{z} \in K_{graf(a)}(z_0) \bigcap U$, т.е.

$$y_0 + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \in a(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})) \ \forall\, (\overline{x}, \overline{y}) \in K_{graf(a)}(x_0, y_0) \bigcap U.$$

Здесь, вместо $\overline{y}$ поставим $P(\overline{x})$, определенное в предложении 3.4. После постановки для достаточно малых $\overline{x}$ получим

$$y_0 + P(\overline{x}) + r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) \in a(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, P(\overline{x}))) \,. \tag{3.3}$$

Так как a является псевдолипшицевым в точке (x_0, y_0), то из (3.3) следует, что найдется константа $L > 0$ и окрестность нуля $\overline{V}$ такие, что

$$(3.4) \qquad y_0 + P(\overline{x}) + r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) \in a(x_0 + \overline{x}) + L\|r_1(\overline{x}, P(\overline{x}))\|B_1(0) \ \forall \overline{x} \in \overline{V}.$$

Поскольку $r_1(\overline{x}, P(\overline{x})) = o(\overline{x})$ и $r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) = o(\overline{x})$, то из (3.4) следует, что существует такое отображение $r_3(\overline{x}) = o(\overline{x})$, что

$$y_0 + P(\overline{x}) + r_3(\overline{x}) \in a(x_0 + \overline{x}) \ \forall \overline{x} \in \overline{V}.$$

Таким образом, если $V = x_0 + \overline{V}$, то положим $y(x) \equiv y_0 + P(x - x_0) + r_3(x - x_0)$, $x \in V$. Легко заметить, что отображение y удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ - многозначное отображение и выпуклый замкнутый конус $K \subseteq K_{graf(a)}(x_0, y_0)$ является строго дифференцируемым шатром к $graf(a)$ в точке (x_0, y_0). Предположим также, что $dom(D^K a(x_0, y_0)) = R^n$ и для каждого $\overline{x} \in R^n$ $int D^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \neq \emptyset$.*

Тогда для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in K$ $(\hat{x} \neq 0)$

1. существует липшицево отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x)$, $\forall x \in V$, $y(x_0) = y_0$. 2. Существует производная $y'(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по переменной $\overline{x}$ на R^n и $y'(x_0, \overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})$ $\forall \overline{x} \in R^n$, $y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}$.

Доказательство. По предложению 3.3 существует положительно однородное и липшицевое отображение P такое, что $P(\overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})$, $\overline{x} \in R^n$, $P(\hat{x}) = \hat{y}$. Так как выпуклый конус K является строго дифференцируемым шатром к $graf(a)$ в точке (x_0, y_0), то существует строго дифференцируемое в нуле отображение $r(\overline{z}) \equiv (r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y})) = o(\overline{z})$ такое, что для достаточно малых $\overline{z} \in K$ имеет место включение: $y_0 + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \in a(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y}))$.

Покажем, что уравнение

$$q(\overline{x}, u) \equiv u + r_1(\overline{x} + u, P(\overline{x} + u)) = 0$$

удовлетворяет всем требованиям вышеуказанной теоремы 2.3.1 из [1] о неявных функциях. Действительно, имеем

a) q-непрерывное отображение и $q(0,0) = 0$.

b) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и окрестность U нуля такие, что если $\overline{x} \in U$ и $\|u'\| \leq \delta$, $\|u''\| \leq \delta$, то $\|q(\overline{x}, u') - q(\overline{x}, u'') - (u' - u'')\| \leq \varepsilon\|u' - u''\|$. Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существуют число $C > 0$, окрестность $\overline{V}$ нуля и отображение $u(\overline{x})$, определенное в этой окрестности, такие, что $q(\overline{x}, u(\overline{x})) = 0$ и $\|u(\overline{x})\| \leq Cq(\overline{x}, 0)$, $\overline{x} \in \overline{V}$. Отсюда следует, что $u(\overline{x})/\|\overline{x}\| \to 0$ когда $\overline{x} \to 0$. Можно доказать(как это было сделано при доказательстве теоремы 2.3), что отображение $u(\overline{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Положим $h(\overline{x}) = (\overline{x} + u(\overline{x}), P(\overline{x} + u(\overline{x})))$. Очевидно, что $h(\overline{x}) \in K$. Следовательно, при достаточно малых $\overline{x}$

$$y_0 + P(\overline{x} + u(\overline{x})) + r_2(h(\overline{x})) \in a(x_0 + \overline{x} + u(\overline{x}) + r_1(h(\overline{x}))) = a(x_0 + \overline{x}).$$

Поэтому, если положим

$$V = x_0 + \overline{V}, \ y(x) = y_0 + P(x - x_0 + u(x - \overline{x_0})) + r_2(h(x - x_0)) \ \forall x \in V,$$

то легко заметить, что отображение y липшицево и удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Следствие 3.2. *Пусть многозначное отображение a задано при помощи систем неравенств: $a(x) = \{y \in R^m / g_i(x, y) \leq 0, \ i \in I\}$, где I- конечное множество индексов.*

Пусть$(x_0, y_0) \in graf(a)$ и функции g_i, $i \in I$ строго дифференцируемы в (x_0, y_0). Положим $I(x_0, y_0) = \{i \in I / g_i(x_0, y_0) = 0\}$. Предположим также, что существует вектор $w \in R^n$ такой, что

$$< g'_{iy}(x_0, y_0), w >< 0, \ \ i \in I(x_0, y_0). \tag{3.5}$$

При условии (3.5) по теореме 1.12 из [5] (§1, глава 4, стр. 140) для любого фиксированного $\overline{x} \in R^n$ система

$$< g'_{iy}(x_0, y_0), \overline{y} > + < g'_{ix}(x_0, y_0), \overline{x} >< 0, \ i \in I(x_0, y_0)$$

разрешима относительно $\overline{y}$, т.е. $intD^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \neq \emptyset$. При сделанных предположениях согласно теореме 2.2 выпуклый конус

$$K = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in R^{n+m} / < g'_{iy}(x_0, y_0), \overline{y} > + < g'_{ix}(x_0, y_0), \overline{x} >\leq 0, \ i \in I(x_0, y_0)\}$$

является строго дифференцируемым шатром к $graf(a)$ в точке (x_0, y_0). Теперь используя результат теоремы 3.2 получим следующее утверждение.

Теорема 3.3. *(о неявных функциях для систем неравенств). Пусть выполнены вышеуказанные предположения. Тогда для каждого $(\overline{x}, \overline{y}) \in K$, $(\overline{x} \neq 0)$.*

1. существует липшицево отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $g_i(x, y(x)) \leq 0$, $\forall x \in V$, $y(x_0) = y_0 >$.

2. Существует производная $y'(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по переменной $\overline{x}$ на R^n и $y'(x_0, \overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})$ $\forall \overline{x} \in R^n$, $y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}$.

Теорема 3.4. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ - многозначное отображение, график которого есть звездное тело. Пусть K - касательный конус Кларка(см.[11], определение 3. §1. глава 7. стр.397) к множеству $graf(a)$ в точке $(x_0, y_0) \in graf(a)$. Предположим также, что $dom(D^K a(x_0, y_0)) = R^n$.*
Тогда для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in K (\hat{x} \neq 0)$
1. существует отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x)$, $\forall x \in V$, $y(x_0) = y_0$. 2. Существует производная $y'(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по переменной $\overline{x}$ на R^n и

$$y'(x_0, \overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \;\; \forall \overline{x} \in R^n, \;\; y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}.$$

Доказательство. При сделанных предположениях по теореме 2 [11](§5. глава 7, стр. 418) многозначное отображение a псевдолипшицево в точке (x_0, y_0). А по теореме 4.3[17] конус K является липшицевым шатром к множеству $graf(a)$ в точке (x_0, y_0). Заметим также, что для каждого $\overline{x} \in R^n$ $int D^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \neq \emptyset$. Тогда по предложению 3.3 существует липшицево и положительно однородное отображение $P : R^n \to R^m$ такое, что $P(\hat{x}) = \hat{y}$ и $P(\overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})$ $\forall \overline{x} \in R^n$. Теперь повторяя доказательство теоремы 3.1 получим требуемый результат. □

Отметим, что в вышеуказанных предложениях существенным требованием является условие: $dom(a) = R^n$. Поэтому важным является следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть $a_1 : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$, $a_2 : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ – многозначные отображения, графики которых являются такие выпуклые замкнутые конусы K_1, K_2, что $dom(a_1) = dom(a_2) = R^n$. Предположим также, что $int a_1(0) \cap a_2(0) \neq \emptyset$. Тогда $dom(a_1 \cap a_2) = R^n$.*

Доказательство. Положим $K = K_1 \cap K_2$, $a(x) = a_1(x) \cap a_2(x)$, $x \in R^n$. В работе [5] (см. теорема 2.2. §2) доказано, что условия $dom(a_1) = R^n$, $dom(a_2) = R^n$ эквивалентны условиям $a_1^*(0) = a_2^*(0) = \{0\}$. Так как $int a_1(0) \cap a_2(0) \neq \emptyset$, то для некоторого вектора u имеют место: $u \in int a_1(0)$, $u \in a_2(0)$. Поэтому, в силу теоремы 5.9 из [15], глава 5. стр. 155

$$(0, u) \in int graf(a_1) \cap graf(a_2) = int K_1 \cap K_2.$$

Отсюда, в силу теоремы 3.2 (см. [5], §3, глава 1) имеем $K^* = (K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$. Поэтому $a^*(0) = \{x^* : (-x^*, 0) \in K^* = K_1^* + K_2^*\}$. Это означает, что существуют векторы $(x_1^*, y_1^*) \in K_1, (x_2^*, y_2^*) \in K_2$, такие, что $-x^* = x_1^* + x_2^*$, $y_1^* + y_2^* = 0$. Поскольку $u \in int a_1(0)$, то существует окрестность $B_\delta(u)$, такая, что $(0, v) \in K_1\ \forall v \in B_\delta(u)$. Значит, $< x_1^*, 0 > + < y_1^*, v > \geq 0$, т.е.

$$(3.6) \qquad < y_1^*, u > + < y_1^*, w > \geq 0\ \forall w \in B_\delta(0).$$

С другой стороны, поскольку $(0, u) \in K$, то $< u, y_1^* > \geq 0$, $< u, y_2^* > \geq 0$. Поскольку $y_1^* = -y_2^*$, то отсюда следует, что $< y_1^*, u >= 0$. Учитывая это и соотношение (3.6), получим $< y_1^*, w > \geq 0\ \forall w \in B_\delta(0)$. Отсюда немедленно следует, что $y_1^* = 0$. Следовательно, $y_2^* = 0$. Окончательно, получаем $a^*(0) = \{0\}$.

Следствие 3.3. *Пусть $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$ выпуклые и положительно однородные функции, определенные на R^n а $g(x)$ линейная функция. Пусть существует вектор w такой , что $f_i(w) < 0$, $i = 1, 2, ..., k, g(w) = 0$. Тогда для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{k+1}) \in R^{k+1}$ система*

$$f_i(x) \leq \alpha_i, i = 1, 2, ..., k, \ g(x) = \alpha_{k+1}$$

разрешима.

4. О СЕЛЕКЦИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЫПУКЛЫМИ ЗАМКНУТЫМИ ГРАФИКАМИ

Теорема 4.1. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$-отображение с выпуклым замкнутым графиком определено в некоторой окрестности U точки x_0. Пусть $(x_0, y_0) \in graf(a)$. Тогда*

1. существуют число $L > 0$ и отображение y, определенное в некоторой окрестности $\overline{U} \subseteq U$ точки x_0, такие, что $y(x) \in a(x)$, $x \in \overline{U}$, $y(x_0) = y_0$ и

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|^{1/2}\ \forall x_1, x_2 \in \overline{U}.$$

2. Существует производная $y'(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по $\overline{x}$ на R^n и $y'(x_0, \overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})\ \forall \overline{x} \in R^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $b : R^n \to 2^{R^m}$, определенное по правилу: $b(x) \equiv a(x) \bigcap B_1(y_0)$ $\forall x \in U$. Поскольку a является полунепрерывным снизу отображением, то существует окрестность $\overline{U} \subseteq U$ такая, что $b(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in \overline{U}$. Отсюда b - выпуклое отображение с выпуклыми компактными значениями. Следовательно, оно является липшицевым отображением с некоторой константой L_1 (см. [5], теорема 1.2, стр. 100). Значит, $dom(D^{K_{graf(b)}}(x_0, y_0)) = R^n$ (см. предложение 3.1). В силу теоремы 1.1 конус $K_{graf(a)}(x_0, y_0)$ является шатром к множеству $graf(a)$ в точке (x_0, y_0). Легко заметить, что $K_{graf(a)}(x_0, y_0) = K_{graf(b)}(x_0, y_0)$. Отсюда, существует отображение $r(\overline{z}) = r(\overline{x}, \overline{y}) \equiv (r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y})) = o(\overline{z})$ такое, что для достаточно малых $(\overline{x}, \overline{y}) \in K_{graf(a)}(x_0, y_0)$ имеет место включение:

$$y_0 + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \in b(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})) \tag{4.1}$$

Так как b липшицевое отображение, то из (4.1) немедленно следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых$(\overline{x}, \overline{y}) \in K_{graf(a)}(x_0, y_0) \bigcap B_\delta(0)$ имеет место включение:

$$y_0 + \overline{y} \in b(x_0 + \overline{x}) + \varepsilon\sqrt{\|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2} B_1(0). \tag{4.2}$$

Заметим также, что отображение $D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть z_s-селектор Штейнера для отображения $D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)$. Известно (см. например [10], лемма 2.1.4, стр. 192), что это отображение удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L_2. Определим отображение P по следующему правилу: $P(\overline{x}) = \|\overline{x}\| z_s(\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|})$, если $\overline{x} \neq 0$ и $P(0) = 0$. Очевидно, что $P(\overline{x}) \in D^{K_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$ $\forall \overline{x}$ и $P(\lambda \overline{x}) = \lambda P(\overline{x})$ при $\lambda \geq 0$. Покажем, что отображение P удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L_3 > 0$. Действительно, имеем

$$\|P(\overline{x_1}) - P(\overline{x_2})\| \leq \|\overline{x_1}\|(z_s(\frac{\overline{x_1}}{\|\overline{x_1}\|}) - z_s(\frac{\overline{x_2}}{\|\overline{x_2}\|})) + \|z_s(\frac{\overline{x_2}}{\|\overline{x_2}\|})\|(\|\overline{x_1}\| - \|\overline{x_2}\|) \leq$$

$$\leq \|\overline{x_1}\| L_2 |\frac{\overline{x_1}}{\|\overline{x_1}\|} - \frac{\overline{x_2}}{\|\overline{x_2}\|}| + C\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\| \leq (2L_2 + C)\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|, \tag{4.3}$$

где $C = \max_{\overline{x} \in B_1(0)} \|z_s(\overline{x})\|$. Из соотношений (4.2)-(4.3) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$y_0 + P(\overline{x}) \subseteq b(x_0 + \overline{x}) + \varepsilon\sqrt{\|\overline{x}\|^2 + \|P(\overline{x})\|^2} B_1(0) \subseteq b(x_0 + \overline{x}) + \varepsilon\sqrt{1 + L_3^2}\|\overline{x}\| B_1(0)$$

$\forall \overline{x} \in B_\delta(0)$. Пусть $y(x) = Pr_{b(x)}(y_0 + P(x - x_0))$. Для каждого $\overline{x}$, $\|\overline{x}\| = 1$ имеем

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{y(x_0 + \lambda \overline{x}) - y_0}{\lambda} = P(\overline{x}).$$

Осталось доказать, что отображение y удовлетворяет условию Гельдера. В работе [15] (определение 4(11), стр. 134) определено ρ- расстояние между множествами C и D следующим образом:

$$\hat{d}_\rho(C, D) \equiv inf\{\eta \geq 0 : C \bigcap B_\rho(0) \subseteq D + B_\eta(0), D \bigcap B_\rho(0) \subseteq C + B_\eta(0)\}.$$

Доказано (см. [15], упражнение 7.67, стр. 290), что, если множества C и D- выпуклые компакты и $y(x)$- непрерывное отображение на $B_\delta(0)$, то существует число $\rho > 0$ такое, что

$$\|Pr_C y(x) - Pr_D y(x)\| \leq 3\rho^{1/2} \hat{d}_\rho^{1/2}(C, D) \ \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Так как b- липшицевое отображение с некоторой константой L_3 и множество $b(x)$- компакт, то число ρ можно выбрать настолько большим, что $b(x) \subseteq B_\rho(0)$, $x \in B_\delta(x_0)$. Итак, если x_1, $x_2 \in B_\delta(x_0)$, то

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| = \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_1 - x_0)) - Pr_{b(x_2)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| \leq$$

$$\leq \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_1 - x_0)) - Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| +$$

$$+ \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_2 - x_0)) - Pr_{b(x_2)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| \leq$$

$$\leq L_3\|x_1 - x_2\| + 3\rho^{1/2}\hat{d}_\rho^{\ 1/2}(b(x_1), b(x_2)) \leq \|x_1 - x_2\|^{1/2}(L_3\|x_1 - x_2\|^{1/2} + 3(L_1\rho)^{1/2})$$

$$\leq ((2\delta)^{1/2}L_3 + 3(L_1\rho)^{1/2})\|x_1 - x_2\|^{1/2} \leq L\|x_1 - x_2\|^{1/2},$$

где $L = ((2\delta)^{1/2}L_3 + 3(L_1\rho)^{1/2})$.

Abstract. The paper is devoted to the question of existence of directional derivatives of selections of some set-valued mappings with starlike graphs.

Список литературы

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Москва, Наука (1979).

[2] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, Москва, Наука (1973).

[3] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", УМН, **30**, но. 3, 3 – 55 (1975).

[4] Ф. Кларк, Негладкая Оптимизация, Москва, Наука (1988).

[5] Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука (1982).

[6] Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Известия НАН Армении, Математика, **18**, но. 4, 318 – 325 (1983).

[7] Е. С. Половинкин, "О некоторых свойствах производных многозначных отображений", ТРУДЫ МФТИ, **4**, no. 4, 144 – 154 (2012).

[8] Е. С. Половинкин, Теория Многозначных Отображений, Москва, Изд-во МФТИ (1983).
[9] Е. С. Половинкин, Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения, Москва, Физматлит (2014).
[10] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, Москва, Физматлит (2004).
[11] Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Наука (1988).
[12] J.-P. Aubin, "Contingent derivstives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear and differential inclusions", Advances in Math. Suppl. Studies, Acad. Press, 160 – 272 (1981).
[13] E. Michael, "Continuous selections", Ann. Math., **63**, 281 – 361 (1956).
[14] К. Лейхтвейс, Выпуклые Множества, Москва, Наука (1985).
[15] R. T. Rockafellar, J. B. Wets, Variational Analysis, Springer- Verlag, Berlin (1997).
[16] А. Р. Хачатрян, "Представление липшицевых многозначных отображений", Известия НАН Армении. Математика, **39**, но. 3, 61 – 71 (2004).
[17] Р. А. Хачатрян, "О многозначных отображениях со звездными графиками", Известия НАН Армении. Математика, **47**, но. 1, 51 – 78 (2012).

Поступила 29 июня 2015

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 51, No. 2, 2016

Contents

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 51, номер 3, 2016

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 51, No. 3, 2016

Contents