ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2016

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Վ. Ս. Աթաբեկյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Մ. Ս. Գինովյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան
Վ. Ս. Զաքարյան
Ա. Ա. Թալալյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ռ. Վ. Համբարձումյան
Հ. Մ. Հայրապետյան
Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Վ. Ա. Մարտիրոսյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян
Р. В. Амбарцумян
Н. У. Аракелян
В. С. Атабекян
Г. Г. Геворкян
М С. Гиновян
В. К. Оганян (зам. главного редактора)
Н. Б. Енгибарян
В. С. Закарян
В. А. Мартиросян
Б. С. Нахапетян
А. О. Оганнисян
Б. М. Погосян
А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 3–16.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ КУСОЧНО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НА R

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*; *karenkeryan@ysu.am*

Аннотация. Для допустимой последовательности $\mathcal{T}$ определяется ортонормированная система из кусочно линейных функций с нулевым интегралом на R. Найдены необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$, для того, чтобы соответствующая система была базисом в $H^1(R)$.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C25; 46E30.
Ключевые слова: Общая система Франклина; сходимость; безусловная базисность; пространства L^p.

1. Введение

В работе [1] введено понятие общей системы Франклина на R. Там же доказаны теоремы сходимости для этой системы. Для представления цели настоящей статьи, приведем некоторые определения и результаты из работы [1].

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой на R, если $\mathcal{T}$ всюду плотно в R и каждая точка $t \in R$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n < \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на R, которые линейны на $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$ и равны нулю вне (τ_0^n, τ_{n+1}^n). Ясно, что $\dim S_n = n$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина на R соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1А006

Для фиксированного n через N_i^n, $0 \le i \le n+1$, обозначим B-сплайны соответствующие π_n, т.е.

$$N_0^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_0^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_0^n) \cup [\tau_1^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_0^n, \tau_1^n]. \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_i^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_{i-1}^n] \cup [\tau_{i+1}^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_{i-1}^n, \tau_i^n] \quad \text{и} \quad [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n], \end{cases}$$

$$N_{n+1}^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_{n+1}^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_n^n] \cup (\tau_{n+1}^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_n^n, \tau_{n+1}^n]. \end{cases}$$

Ясно, что $N_i^n \in S_n$, $1 \le i \le n$, и образуют базис этого пространства. Очевидно также, что $N_i^n \notin S_n$, когда $i = 0$ или $n+1$.

Определение 1.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \ge 1\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_1(x) = \frac{1}{\|N_1^1\|_2} N_1^1(x)$ и для $n \ge 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина соответстующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Это определение почти повторяет определение общей системы Франклина на $[0, 1]$ (см. [2] [4]), частным случаем которого является классическая система Франклина (см. [6]).

При исследовании общей системы Франклина на $[0, 1]$ важную роль сыграли понятия регулярности последовательности $\mathcal{T}$. Эти понятия нам нужны также при изучении системы Франклина на R.

Определение 1.3. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной с параметром γ, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \le \gamma, \quad \textit{для всех} \;\; n \ge 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$.

Определение 1.4. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется регулярной по парам с параметром γ, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{i+2}^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n} \le \gamma, \quad \textit{для всех} \;\; n \ge 2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Так как последовательность $\mathcal{T}$ всюду плотна на R, то система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L^2(R)$.

В работе [1], в частности, доказано, что система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$ и безусловным базисом в $L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Доказаны также теоремы о локально равномерной сходимости рядов Фурье-Франклина непрерывных функций.

Однако система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не образует базис в $H^1(R)$, так как интегралы этих функций отличны от нуля. Стромберг [7] построил систему из кусочно линейных функций, образующих безусловный базис в $H^1(R)$. В настоящей работе определяется одна система из кусочно линейных функций, определяемая допустимой последовательностью $\mathcal{T}$. Находится необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$, при которых соответствующая система будет базисом в $H^1(R)$.

Условимся о некоторых обозначениях.

Через $c, C, C_1, C_\gamma, \ldots$, обозначаются постоянные зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$. Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C, такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные могут зависеть от γ. Через $\chi_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A.

Результаты настоящей работы без доказательств анонсированы в [5].

2. Определение общей системы Франклина и ее ядро Дирихле

Через S_n^0 обозначим множество функций из S_n с нулевым интегралом. Ясно, что $S_n^0 \subset S_n$, $S_{n-1}^0 \subset S_n^0$ и $\dim S_n^0 = n-1$. Поэтому, для $n \geq 3$, существует единственная (с точностью до знака) функция $F_n \in S_n^0$, со свойствами: $\|F_n\|_2 = 1$ и F_n ортогональна S_{n-1}^0. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина с нулевым интегралом.

Очевидно, что $N_i^n \notin S_n^0$ и поэтому нужно искать базис в S_n^0. Обозначим

$$M_i^n(t) = \frac{N_i^n(t)}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Тогда $\int_R M_i^n(t)dt = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и для

$$B_i^n(t) = M_i^n(t) - M_{i+1}^n(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.2}$$

имеем $B_i^n \in S_n^0$. Очевидно, функции B_i^n, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, линейно независимы и поэтому образуют базис в S_n^0.

Определение 2.1. *Система Франклина с нулевыми интегралами $\{F_n(t) : n \geq 2\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $F_2(t) = \frac{B_1^2(t)}{\|B_1^2\|_2}$ и для $n \geq 3$ функция $F_n(t)$ есть n-ая функция Франклина с нулевым интегралом, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Через $\mathcal{D}_n(t,\tau)$ обозначим ядро проектора из пространства $L^1(R)$ в пространство S_n^0, т.е. $\mathcal{D}_n(t,\tau)=\sum_{k=2}^{n}F_k(t)F_k(\tau)$. Очевидно, $\mathcal{D}_n(t,\tau)=\mathcal{D}_n(\tau,t.)$

Для исследования ядра Дирихле $\mathcal{D}_n(t,\tau)$, напомним некоторые свойства ядра Дирихле $K_n(t,\tau)$ системы Франклина $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}f_k(t)f_k(\tau)$.

Ясно, что если $g\in S_n$, то $g(t)=\int_R K_n(t,\tau)g(\tau)d\tau$. Поэтому имеет место

$$\int_R K_n(t,\tau)N_i^n(\tau)d\tau=N_i^n(t),\ \ i=1,2,...,n, \tag{2.3}$$

которое, с учетом линейности функции $K_n(t,\tau)$ по каждой переменной на отрезках $[\tau_i^n,\tau_{i+1}^n]$, равносильно

$$\int_R K_n(\tau_k^n,\tau)N_i^n(\tau)d\tau=N_i^n(\tau_k^n)=\delta_{ik},\ \text{когда}\ i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,n.$$

Учитывая линейность функции $K_n(\cdot,\tau)$ на интервалах $[\tau_i^n,\tau_{i+1}^n]$, получим

$$K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}N_k^n(t)K_n(\tau_k^n,\tau).$$

В работе [1] для $K_n(t,\tau)$ доказаны следующие леммы.

Лемма 2.1. *Для всех n и t выполняется*

$$\int_R |K_n(t,\tau)|d\tau\le 3.$$

Лемма 2.2. *Для всех $n\in N$, и $0\le i\le k\le n+1$ выполняются*

$$|K_n(\tau_k^n,\tau_i^n)|\le q^{|k-i|}\frac{4}{|\tau_{k+1}^n-\tau_{i-1}^n|}, \tag{2.4}$$

где $q=\frac{2}{3}$ и $\tau_{-1}^n=\tau_0^n$, $\tau_{n+2}^n=\tau_{n+1}^n$.

Фиксируем n и для удобства вместо $\mathcal{D}_n(t,\tau)$, $K_n(t,\tau)$, $N_i^n(t)$, $M_i^n(t)$, $B_i^n(t)$, τ_i^n, λ_i^n будем писать $\mathcal{D}(t,\tau)$, $K(t,\tau)$, $N_i(t)$, $M_i(t)$, $B_i(t)$, τ_i, λ_i. Поскольку S_n^0 состоит из кусочно линейных функций, то

$$\mathcal{D}(t,\tau)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{D}(\tau_i,\tau_j)N_i(t)N_j(\tau)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\mathcal{D}(\tau_i,\tau) \tag{2.5}$$

и

$$\mathcal{D}(\tau_i,\tau)=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}(\tau_i,\tau_j)N_j(\tau). \tag{2.6}$$

Выразим $\mathcal{D}(\tau_i,\tau)$ через $K(\tau_j,\tau)$. Очевидно, $\mathcal{D}(\tau_i,\cdot)\in S_n^0$ и оно однозначно определяется из условий

$$\int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)B_k(\tau)d\tau=B_k(\tau_i),\quad \text{когда}\ \ k=1,2,...,n-1, \tag{2.7}$$

$$(2.8)\qquad \int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)d\tau = 0.$$

Поскольку функции $K(\tau_i,\tau)$, $i=1,2,\dots,n$, линейно независимы и принадлежат S_n, то $\mathcal{D}(\tau_i,\tau)$ можно искать в виде суммы $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i K(\tau_j,\tau)$, где α_j^i искомые числа. Убедимся, что при подходящем выборе чисел a_i для

$$(2.9)\qquad \mathcal{D}(\tau_i,\tau) = K(\tau_i,\tau) - a_i\sum_{j=1}^{n} K(\tau_j,\tau)(\lambda_j+\lambda_{j+1})$$

выполняются (2.7), (2.8). Действительно, для любого a_i, из (2.1) - (2.3), имеем

$$\int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)B_k(\tau)d\tau = \int_R K(\tau_i,\tau)(M_k(\tau)-M_{k+1}(\tau))d\tau -$$
$$a_i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\int_R K(\tau_j,\tau)(M_k(\tau)-M_{k+1}(\tau))d\tau =$$
$$M_k(\tau_i)-M_{k+1}(\tau_i)-a_i(\lambda_k+\lambda_{k+1})M_k(\tau_k)+$$
$$a_i(\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2})M_{k+1}(\tau_{k+1}) = B_k(\tau_i)-a_i+a_i = B_k(\tau_i),$$

т.е. (2.7) выполнено. Если положить

$$(2.10)\qquad a_i := \frac{\int_R K(\tau_i,\tau)d\tau}{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\int_R K(\tau_j,\tau)d\tau},$$

то из (2.9) получаем (2.8).

Оценим a_i. Из $\sum_{i=0}^{n+1}N_i(\tau)=\chi_{[\tau_0,\tau_{n+1}]}(\tau)$ и (2.3) получим

$$(2.11)\qquad \int_R K(\tau_j,\tau)d\tau = \int_R\sum_{m=0}^{n+1}K(\tau_j,\tau)N_m(\tau)d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1}K(\tau_j,\tau)N_0(\tau)d\tau + 1+$$
$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}K(\tau_j,\tau)N_{n+1}(\tau)d\tau = 1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_j,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_j,\tau_n).$$

Следовательно, из (2.10) имеем

$$(2.12)\qquad 1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_i,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_i,\tau_n) =$$
$$a_i\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})+\frac{\lambda_1}{6}\sum_{j=1}^{n}K(\tau_j,\tau_1)(\lambda_j+\lambda_{j+1})+\frac{\lambda_{n+1}}{6}\sum_{j=1}^{n}K(\tau_j,\tau_n)(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{j=1}^{n}K(\tau_j,\tau_m)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) = 2\int_R K(\tau,\tau_m)d\tau,$$

откуда, используя (2.11), получим

$$(2.13)\qquad \sum_{j=1}^{n}K(\tau_j,\tau_m)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) = \frac{\lambda_1}{3}K(\tau_m,\tau_1)+2+\frac{\lambda_{n+1}}{3}K(\tau_m,\tau_n).$$

Для $n \geq 3$ также имеем (см. (2.4)):

$$\left|\frac{\lambda_1}{3}K(\tau_m,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{3}K(\tau_m,\tau_n)\right| \leq \frac{4}{3}\left(q^m+q^{n-m}\right) \leq \frac{52}{27}. \tag{2.14}$$

Следовательно, из (2.12) и (2.13) получим

$$a_i = \frac{c_i}{\tau_{n+1}-\tau_0}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{54} \leq c_i \leq 2. \tag{2.15}$$

Откуда, применяя (2.9) и Лемму 2.1, получим

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} |\mathcal{D}(\tau_i,\tau)|d\tau \leq \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} |K(\tau_i,\tau)|d\tau + \frac{6}{\tau_{n+1}-\tau_0}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1}) \leq 15. \tag{2.16}$$

Из (2.5) и (2.16) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Для любого n выполняется*

$$\int_R |\mathcal{D}_n(t,\tau)|d\tau \leq 15.$$

Из (2.9) и (2.13) получаем другое представление для $\mathcal{D}(\tau_i,\tau)$:

$$\mathcal{D}(\tau_i,\tau) = K(\tau_i,\tau) - a_i\sum_{j=1}^{n} K(\tau_j,\tau)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) = \tag{2.17}$$

$$K(\tau_i,\tau) - a_i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\sum_{m=1}^{n} N_m(\tau)K(\tau_j,\tau_m) =$$

$$K(\tau_i,\tau) - 2a_i\sum_{m=1}^{n} N_m(\tau)\left(1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_1,\tau_m)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_n,\tau_m)\right).$$

3. Основные леммы

Напомним два эквивалентных определения пространства $H^1(R)$.

Пусть $\psi(t)=\max(0,1-|t|)$, $\psi_\zeta(t)=\frac{1}{\zeta}\psi(\frac{t}{\zeta})$. Для $f\in L^1(R)$ положим

$$f^*(t) = \sup_{\zeta>0}\left|\int_R f(\tau)\psi_\zeta(t-\tau)d\tau\right|.$$

Определение 3.1. (см. [8]) *Будем говорить, что $f\in H^1(R)$, если $f^*\in L^1(R)$. При этом полагаем $\|f\|_{H^1}=\|f^*\|_1$.*

Определение 3.2. *Говорят, что $\phi\in L^1(R)$ является атомом, если существует интервал $I\in R$, такой что $\operatorname{supp}\phi\subset I$, $\sup|\phi|\leq\frac{1}{|I|}$ и $\int_I\phi(t)dt=0$.*

Определение 3.3. *$f\in H^1(R)$, если существуют атомы ϕ_i и действительные числа c_i такие, что $f=\sum_{i=1}^\infty c_i\phi_i$. При этом полагается $\|f\|_{H^1}=\inf(\sum_{i=1}^\infty|c_i|)$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f атомами.*

Определение 3.3 впервые было дано в работе [9] и там же было доказано, что нормы в определениях 3.1 и 3.3 эквивалентны.

Далее нам будет полезна следующая простая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathrm{supp}\varphi \subset [\alpha, \beta]$ *и* $\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = d$. *Тогда для любого* $b > \beta + 2(\beta - \alpha)$ *имеет место*

$$\int_\alpha^b \varphi^*(t)dt \geq \frac{|d|}{9} \ln \frac{b-\beta}{\beta-\alpha}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Действительно, для $t > 2\beta - \alpha$ и $\zeta = 3(t-\beta)$ имеем

$$\varphi^*(t) \geq \left| \int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\psi_\zeta(t-\tau)d\tau \right| > |d| \frac{1}{9(t-\beta)}.$$

Интегрируя последнее неравенство получим (3.1). □

Пусть ϕ атом, т.е. для некоторого интервала I выполняются условия:

$$\mathrm{supp}\phi \subset I, \quad \sup|\phi(t)| \leq |I|^{-1}, \quad \int_I \phi(t)dt = 0. \tag{3.2}$$

Через $\mathcal{P}(\phi)$ обозначим проекцию ϕ на S_n^0, т. е. $\mathcal{P}(\phi)(t) = \int_R \mathcal{D}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau$. Обозначим также

$$K^1(t,\tau) = 2\sum_{i=1}^n N_i(t)a_i \sum_{m=1}^n N_m(\tau)\left(1 + \frac{\lambda_1}{6}K(\tau_1,\tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_n,\tau_m)\right), \tag{3.3}$$

$$P(\phi)(t) = \int_R K(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \quad \text{и} \quad P_1(\phi)(t) = \int_R K^1(t,\tau)\phi(\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

Тогда, из (2.17) будем иметь

$$\mathcal{P}(\phi)(t) = P(\phi)(t) - P_1(\phi)(t). \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Существует постоянная* $C_1 > 0$, *такая что*

$$\sup \|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} > C_1 \cdot \ln\Delta - 8,$$

где $\Delta = \max\limits_{1\leq i\leq n-1}\left\{\frac{\lambda_i+\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}}, \frac{\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}}{\lambda_i+\lambda_{i+1}}\right\}$, *а верхняя грань берется по всевозможным атомам* ϕ.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathcal{P}^*(\phi)(t) \geq P^*(\phi)(t) - P_1^*(\phi)(t). \tag{3.6}$$

Из (3.3), (2.15), (2.14) следует, что

$$|K^1(t,\tau)| \leq \frac{8}{\tau_{n+1}-\tau_0}. \tag{3.7}$$

Следовательно, с учетом (3.2), получим $|P_1(\phi)(t)| \le \frac{8}{\tau_{n+1}-\tau_0}$. Поэтому

$$|P_1^*(\phi)(t)| \le \frac{8}{\tau_{n+1} - \tau_0}. \tag{3.8}$$

Дословно повторяя шаги доказательства леммы 5.2 из работы [3], получим

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P^*(t)dt \ge C_1 \cdot \ln \Delta.$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.8), (3.6) получим, что

$$\sup \|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} \ge \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} \mathcal{P}^*(t)dt \ge C_1 \cdot \ln \Delta - 8.$$

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Допустим последовательность $\mathcal{T}$ регулярная по парам с параметром γ и существует такая постоянная $\theta > 0$, что для любой функции $F \in H^1(R)$ выполняется*

$$\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} \le \theta \cdot \|F\|_{H^1}. \tag{3.9}$$

Тогда существует постоянная $C_{\gamma,\theta} > 0$, такая что

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > C_{\gamma,\theta} \quad и \quad \frac{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > C_{\gamma,\theta}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Допустим противное: выполняется (3.9) и не выполняется (3.10). Тогда для любого натурального k существует n_k, такое что

$$\frac{\lambda_1^{n_k} + \lambda_2^{n_k}}{\tau_{n_k+1}^{n_k} - \tau_0^{n_k}} < \frac{1}{k} \quad или \quad \frac{\lambda_{n_k}^{n_k} + \lambda_{n_k+1}^{n_k}}{\tau_{n_k+1}^{n_k} - \tau_0^{n_k}} < \frac{1}{k}. \tag{3.11}$$

Фиксируем достаточно большое k (будет уточнено ниже) и допустим для n_k выполняется первое из неравенств (3.11). Далее, с целью упрощения записи, вместо n_k напишем n, а вместо λ_i^n, τ_i^n, $N_i^n(t)$ будем писать λ_i, τ_i, $N_i(t)$, соответственно. Итак, выполняются

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}} \le \gamma, \quad для \quad i = 1, 2..., n-1,$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}} < \frac{1}{k}. \tag{3.12}$$

Положим

$$\phi(x) = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}(N_1(x) - N_1(x + \lambda_1 + \lambda_2)).$$

Очевидно, что ϕ является атомом и поэтому $\|\phi\|_{H^1} = 1$. Оценим $\|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1}$ снизу. Пусть опять $P(\phi)(t)$ и $P_1(\phi)(t)$ определяются формулами (3.4) и имеет место представление (3.5). Из (3.3), (2.14) и (2.15), получим

$$(3.13) \qquad \frac{1}{729} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i(t) \sum_{j=1}^{n} N_j(\tau)}{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1})} < K^1(t,\tau) < 8 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i(t) \sum_{j=1}^{n} N_j(\tau)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1}}.$$

Из этого следует, что

$$(3.14) \qquad |P_1(\phi)(t)| < \frac{8}{\tau_{n+1} - \tau_0},$$

откуда получим

$$(3.15) \qquad |P_1^*(\phi)(t)| < \frac{8}{\tau_{n+1} - \tau_0}.$$

Заметим, что $P(\phi) = P(\frac{1}{2(\lambda_1+\lambda_2)} N_1) = \frac{1}{2(\lambda_1+\lambda_2)} N_1$, следовательно, используя (3.14) и (3.12), будем иметь для $k \geq 64$

$$(3.16) \qquad \int_{\tau_0}^{\tau_2} \mathcal{P}(\phi)(t)dt > \frac{1}{4} - 8\frac{\tau_2 - \tau_0}{\tau_{n+1} - \tau_0} > \frac{1}{8}.$$

Положим $P_2(t) := \mathcal{P}(\phi)(t) \cdot \chi_{[\tau_0,\tau_2]}(t)$, и

$$(3.17) \qquad P_3(t) := \mathcal{P}(\phi)(t) \cdot \chi_{[\tau_2,\tau_{n+1}]}(t) = P_1(\phi)(t) \cdot \chi_{[\tau_2,\tau_{n+1}]}(t).$$

Применяя Лемму 3.1, из (3.16) получим

$$(3.18) \qquad \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P_2^*(t)dt > C \ln \frac{\tau_{n+1} - \tau_2}{\tau_2 - \tau_0} > C \ln(k-1).$$

Откуда, применяя (3.15) и (3.17), получим

$$\|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} \geq \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P^*(\phi)(t)dt \geq C \ln(k-1) - 8,$$

что противоречит (3.9), если взять $k \geq 64$, так чтобы $C\ln(k-1) - 8 > \theta$. Лемма 3.3 доказана. □

4. Доказательство основного результата

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ соответствующая система Франклина с нулевыми интегралами. Тогда для того, чтобы система $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ была базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно выполнение условий:*

(i) *последовательность $\mathcal{T}$ регулярна по парам с параметром γ,*

(ii) *существует постоянная $\theta > 0$, такая что для всех n выполняются*

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > \theta \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > \theta.$$

Доказательство. **Необходимость** условий (i), (ii) следует из лемм 3.2, 3.3.

Достаточность. Из всюду плотности последовательности $\mathcal{T}$ следует, что $\bigcup_n S_n^0$ всюду плотно в $H^1(R)$. Поэтому достаточно доказать, что существует постоянная $C_{\gamma,\theta}$, такая что для любого n и любого $F \in H^1(R)$ выполняется

$$\|\mathcal{P}_n(F)\|_{H^1} \le C_{\gamma,\theta}\|F\|_{H^1}. \tag{4.1}$$

Учитывая определение 3.3, достаточно доказать (4.1) в случае, когда F является атомом, т.е.

$$\operatorname{supp} F \subset [x,y], \quad \sup|F(t)| \le \frac{1}{y-x} \quad \text{и} \quad \int_x^y F(t)dt = 0. \tag{4.2}$$

Зафиксируем n. В дальнейших записях для простоты индекс n опускаем, т.е. вместо τ_i^n, λ_i^n, $\mathcal{P}_n(F)$, будем писать τ_i, λ_i, $\mathcal{P}(F)$, соответственно.

Возможны следующие случаи.

(1) $x < \tau_1$,

(2) $y > \tau_n$,

(3) $[x,y] \subset [\tau_j, \tau_k]$, где $1 \le j < k \le n$.

В первом случае обсудим два подслучая: $y > \tau_3$ или $y \le \tau_3$. В первом подслучае из второго условия теоремы и из регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам имеем

$$|[x,y]| \ge \lambda_2 + \lambda_3 > \frac{1}{\gamma}(\lambda_1 + \lambda_2) > \frac{\theta}{\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0). \tag{4.3}$$

Следовательно $\sup|F(t)| < c_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}$ и с учетом леммы 2.3, получаем

$$|\mathcal{P}(F)(t)| \le C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}.$$

Принимая во внимание $\operatorname{supp}\mathcal{P}(F) \subset [\tau_0, \tau_{n+1}]$, $\int_R \mathcal{P}(F)(t)dt = 0$, получим $\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} < C_{\theta,\gamma}$. Во втором подслучае ($y \le \tau_3$) из (2.4) получим

$$|P(F)(t)| \le \int_x^y |K(t,\tau)||F(\tau)|d\tau \le \max_{\tau\in[x,y]}|K(t,\tau)| < \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2} < C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}.$$

Из (3.4) и (3.7) следует

$$|P_1(F)(t)| < \frac{C}{\tau_{n+1} - \tau_0}.$$

Следовательно $|\mathcal{P}(F)(t)| \le C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}$. Отсюда, с учетом $\operatorname{supp}\mathcal{P}(F) \subset [\tau_0, \tau_{n+1}]$ и $\int_R \mathcal{P}(F)(t)dt = 0$, имеем $\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} < C_{\theta,\gamma}$.

Второй случай доказывается аналогично первому.

Третий случай. Допустим $P(F)(t) = \int_R K(t,\tau)F(\tau)d\tau$ имеет представление

$$P(F)(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i(t).$$

Обозначим $N_i^- = N_i \cdot \chi_{[\tau_{i-1}^n, \tau_i^n]}$, $N_i^+ = N_i \cdot \chi_{(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]}$. Рассмотрим функции

$$\psi_i = \frac{1}{3}\alpha_{i-1}N_{i-1}^+ + \frac{2}{3}\alpha_i N_i + \frac{1}{3}\alpha_{i+1}N_{i+1}^-, \quad \text{для} \quad 1 \le i \le n. \tag{4.4}$$

где $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$. Учитывая, что $N_i = N_i^- + N_i^+$, из (4.4) получим

$$P(F)(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) + \frac{\alpha_1}{3}N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3}N_n^+(t). \tag{4.5}$$

Обозначим $L_i = \mathrm{supp} N_i$. Напомним, что $\mathrm{supp} N_i = [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$, для $1 \le i \le n$.

Нетрудно вычислить, что для $1 \le i \le n$

$$\int_R \psi_i(t)dt = \int_R P(F)(t)N_i(t)dt = \int_R F(t)N_i(t)dt. \tag{4.6}$$

Заметим, что если $1 \le i < j$ или $k < i \le n$, то $\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset$. Поэтому

$$\int_R F(t)N_i(t)dt = 0.$$

Следовательно, из (4.6) получим

$$\int_R \psi_i(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad 1 \le i < j \text{ или } k < i \le n.$$

Поэтому

$$\|\psi_i\|_{H^1} \le \|\psi_i\|_\infty |L_i|, \quad \text{когда} \quad 1 \le i < j \text{ или } k < i \le n. \tag{4.7}$$

Оценим норму $\left\|\sum_{\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset} \psi_i\right\|_{H^1}$. Для $i < j$ из (2.4) и регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам с параметром γ имеем

$$\|\psi_i\|_\infty \le \max_{t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]} |P(F)(t)| \le \max_{\substack{t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}] \\ \tau \in [\tau_j, \tau_k]}} |K(t,\tau)| \le q^{j-i+2}\frac{4\gamma}{|L_i|}. \tag{4.8}$$

Аналогично получается

$$\|\psi_i\|_\infty \le q^{i-k+2}\frac{4\gamma}{|L_i|}, \quad \text{когда} \quad i > k. \tag{4.9}$$

Из (4.7) – (4.9) следует

$$\left\|\sum_{\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset} \psi_i\right\|_{H^1} < C_\gamma.$$

Обозначим

$$\psi(t) = \sum_{i=j}^{k} \psi_i(t). \tag{4.10}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{i=j}^{k} N_i(t) = 1, \quad \text{когда} \quad t \in [\tau_j, \tau_k]. \tag{4.11}$$

Поэтому из (4.10), (4.6), (4.11), (4.2) следует

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_{k+1}} \psi(t)dt = \sum_{i=j}^{k} \int_{I_i} F(t)N_i(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau_k} F(t)\sum_{i=j}^{k} N_i(t)dt = 0.$$

Отсюда, используя $\operatorname{supp}\psi \subset [\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]$, имеем $\|\psi\|_{H^1} \le \|\psi\|_\infty(\tau_{k+1}-\tau_{j-1})$. Чтобы оценить $\|\psi\|_\infty$ рассмотрим два подслучая: $k - j \le 3$ и $k - j \ge 4$. В первом подслучае из регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам с параметром γ мы будем иметь

$$|[\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]| \sim_\gamma |[\tau_l, \tau_{l+2}]|, \text{ для } j-1 \le l \le k-1.$$

Следовательно, из (2.4) и $\|F\|_1 \le 1$, получим

$$\sup|\psi(t)| \le \max_{j-1\le l\le k+1}\{|\alpha_l|\} \le \max_{j-1\le l\le k+1}|P(F)(\tau_l)| \le \max_{\substack{j-1\le l\le k+1\\ s\le t\le u}}|K(t, \tau_l)| \le \frac{C_\gamma}{\tau_{k+1}-\tau_{j-1}}.$$

Откуда получим оценку $\|\psi\|_{H^1} < C_\gamma$. Во втором подслучае мы имеем $[\tau_{j+1}, \tau_{k-1}] \subset [x, y] \subset [\tau_j, \tau_k]$ и $k - 1 \ge (j + 1) + 2$. Следовательно, используя сильную регулярность по парам с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ и Лемму 2.1 получим $|\operatorname{supp}\psi| \subset [\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]$ и

$$\sup|\psi(t)| \le 3\sup|F(t)| \le \frac{3}{\tau_{k-1}-\tau_{j+1}} \le \frac{C_\gamma}{\tau_{k+1}-\tau_{j-1}},$$

откуда будем иметь $\|\psi\|_{H^1} \le C_\gamma$.

Итак, для завершения доказательства теоремы достаточно оценить (см. (4.5)) $\|\frac{\alpha_1}{3}N_1^- + \frac{\alpha_n}{3}N_n^+ - P_1(F)\|_{H^1}$ в третьем случае. Из (4.6) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\int_R \psi_i(t)dt = \int_R F(t)\sum_{i=1}^{n} N_i(t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_n} F(t)dt = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\int_R \left(\frac{\alpha_1}{3}N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3}N_n^+(t) - P_1(F)(t)\right)dt = 0 \tag{4.12}$$

Используя (2.4), неравенство $\|F\|_1 \le 1$ и условие (ii) из Теоремы 4.1 получаем

$$|\alpha_1| \le \frac{C_\theta}{\tau_{n+1}-\tau_0}, \quad |\alpha_n| \le \frac{C_\theta}{\tau_{n+1}-\tau_0}. \tag{4.13}$$

Теперь оценим $P_1(F)(t)$. Так как в этом случае $\mathrm{supp} F \subset [\tau_1, \tau_k] \subset [\tau_1, \tau_n]$, и $\sum_{i=1}^{n} N_i(\tau) = 1$, для $\tau \in [\tau_1, \tau_n]$ следовательно, имеем

$$\int_R F(\tau) \sum_{i=1}^{n} N_i(\tau) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_n} F(\tau) d\tau = 0,$$

откуда используя (3.3), (3.4) (см. также (2.15), (2.14)), получим

$$(4.14) \qquad |P_1(F)(t)| =$$

$$\left| 2 \int_R F(\tau) \sum_{i=1}^{n} N_i(t) a_i \sum_{m=1}^{n} N_m(\tau) \left(\frac{\lambda_1}{6} K(\tau_1, \tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6} K(\tau_n, \tau_m) \right) d\tau \right| \leq$$

$$2 \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} |a_i| \cdot \left| \frac{\lambda_1}{6} K(\tau_1, \tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6} K(\tau_n, \tau_m) \right| \leq \frac{C}{\tau_{n+1} - \tau_0}.$$

Из (4.13), (4.14) следует

$$\left| \frac{\alpha_1}{3} N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3} N_n^+(t) - P_1(F)(t) \right| \leq \frac{C_\theta}{\tau_{n+1} - \tau_0},$$

которое комбинируя с (4.12) получим

$$\left\| \frac{\alpha_1}{3} N_1^- + \frac{\alpha_n}{3} N_n^+ - P_1(F) \right\|_{H^1} \leq C_\theta.$$

Теорема 4.1 доказана. □

Замечание 4.1. *Несмотря на то, что определения системы Франклина на $[0,1]$ и на R с нулевым интегралом аналогичны, однако, необходимые и достаточные условия для базисности этих систем соответственно в пространствах $H^1[0,1]$ и $H^1(R)$ не аналогичны. В работе [10] доказано, что общая система Франклина является базисом в $H^1[0,1]$, тогда и только тогда, когда порождающая последовательность $\mathcal{T}$ является регулярной по парам. Для периодической общей системы Франклина теорема такого же характера доказана в [11].*

Пример последовательности удовлетворяющий условиям (i), (ii) Теоремы 4.1. Пусть ξ_m, $m = 1, 2, \ldots$, возрастающая последовательность положительных чисел. Определим допустимую последовательность $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ следующим образом. На первом шаге положим $t_0 = 0$, $t_1 = -\xi_1$, $t_2 = \xi_1$. На втором шаге добавим точки $t_3 = -\xi_2$, $t_4 = -\xi_1/2$, $t_5 = \xi_1/2$, $t_6 = \xi_2$, допустим $\mathcal{T}_{2^n-2} = \{t_i : 0 \leq i \leq 2^n - 2\}$ определено. На n-ом шаге положим $t_{2^n-1} = -\xi_n$.

Потом добавим слева на право средние точки интервалов образованные точками $\mathfrak{T}_{2^n-2}$. И положим $t_{2^{n+1}-2} = \xi_n$. Продолжая так до бесконечности получим допустимую последовательность $\mathfrak{T}$. Ясно, что если

$$0 < \inf_{m>1} \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{\xi_m - \xi_{m-1}} \quad \text{и} \quad \sup_{m>1} \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{\xi_m - \xi_{m-1}} < \infty, \tag{4.15}$$

тогда последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярна (следовательно, и сильно регулярна по парам). Очевидно, что последовательность $\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию (ii), тогда и только тогда

$$\inf_{m>1} \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} > 1. \tag{4.16}$$

Так как для $\xi_m = s^m$, при $s > 1$, условия (4.15), (4.16) удовлетворены, следовательно, последовательность $\mathfrak{T}$ определенная как выше для $\xi_m = s^m$, при $s > 1$, будет удовлетворять условиям Теоремы 4.1, а соответствующая система Франклина с нулевым средними $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ будет базисом в $H^1(R)$.

Abstract. For an admissible sequence $\mathfrak{T}$ we define an orthonormal system consisting of piecewise linear functions with vanishing integrals on R. Necessary and sufficient conditions on $\mathfrak{T}$ are found for the corresponding system to be a basis in $H^1(R)$.

Список литературы

[1] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, "Об одном обобщении общей системы Франклина на R", Известия НАН Армении, Серия Математика, **40**, no.6, 29-42 (2014).

[2] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math. **25**, 129 - 143 (1997).

[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **374**, 1 - 59 (1998).

[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., **104**, 161 - 204 (2004).

[5] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян "Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно линейных функций", Доклады НАН Армении, **114**, no. 3, 187 - 191 (2014)

[6] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 - 528 (1928).

[7] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, vol. I, II, Chicago, Ill., 475 - 494 (1981).

[8] C. Fefferman, E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Mathematica, 129, 137 - 193 (1972).

[9] R. R. Coifman, "A real variable characterization of H^p", Studia Math., **51**, 269 - 274 (1974).

[10] G.G.Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin system as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math. **167**, 259 - 292 (2005).

[11] K. A. Keryan, M. P. Pogosyan, "A general Franklin periodic system as a basis in $H^1[0,1]$", Известия НАН Армении, Серия Математика, **40**, no. 1, 56 - 79 (2005)

Поступила 27 апреля 2015

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 17-31.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ МАЖОРАНТАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Э. РЕСТРЕПО

Institute of Mathematics, University of Antioquia, Medellin, Colombia
E-mails: *armen_jerbashian@yahoo.com; cocojoel89@yahoo.es*

Аннотация. Введены некоторые ω-весовые классы гармонических в верхней полуплоскости функций, найдены представления этих классов. Дано описание граничных значений функций из рассматриваемых классов посредством понятия ω-емкости, в частном случае переходящего в аналог α-емкости Фростмана.

MSC2010 numbers: 31A05, 31A20.

Ключевые слова: гармонические функции; граничное поведение.

1. Введение

Данная статья частично распространяет на случай полуплоскости результаты [1, 2], относящиеся к граничным свойствам подклассов мероморфных функций ω-ограниченного вида в единичном круге. А именно, подобные результаты получены для некоторых ω-весовых классов гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в верхней полуплоскости. Кроме того, в статье дано ω-весовое, гармоническое расширение результатов [3], относящихся к факторизации и граничным значениям мероморфных функций α-ограниченного вида в полуплоскости.

Ниже рассматриваются некоторые классы гармонических в G^+ функций, чьи частные ω-производные принадлежат классу $\mathfrak{N}'''$ Е. Д. Соломенцева [4], т. е. удовлетворяют условию

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|dx<+\infty.$$

Для введения отмеченных производных, всюду ниже будем полагать, что $\omega(x)$ - функция класса Ω, т. е. $\omega(x)>0$, невозрастает на $(0,+\infty)$ и

$$\omega(x)\asymp x^{\alpha}\quad\text{при некотором}\quad -1<\alpha<0\quad\text{и любом}\quad x\geq\Delta_0>0$$

($\omega(x) \asymp x^\alpha$ означает, что $C_1 x^\alpha \leq \omega(x) \leq C_2 x^\alpha$ с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2). Кроме того, полагаем, что

$$\omega_1(x) \equiv \int_0^x \omega(t)dt < +\infty, \quad 0 < x < +\infty.$$

Отметим, что в Ω в частности содержатся все функции вида $\omega(x) = x^\alpha$ при $-1 < \alpha < 0$.

Полагая, что $\omega(x) \in \Omega$ и функция $u(z)$ задана в G^+, формально введем оператор

$$L_\omega u(z) = -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(z), \tag{1.1}$$

где

$$L_{\omega_1} u(z) = \int_0^{+\infty} u(z + i\lambda)\, d\omega_1(\lambda) \tag{1.2}$$

- оператор, рассмотренный в [5]. Отметим, что в [5] рассмотрено также некое ядро типа Коши, связанное с оператором (1.2), с неубывающим на $(0, +\infty)$ функциональным параметром $\omega(x)$. Легко видеть, что интегрированием по частям в знаменателе подынтегрального выражения ядра из [5] получаем

$$C_\omega(z) \equiv \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) \equiv t \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \omega(\lambda) d\lambda. \tag{1.3}$$

Всюду ниже будем пользоваться именно этим определением ядра $C_\omega(z)$, что, между прочим, применимо и в случае неубывающего функционального параметра $\omega(x)$, рассмотренного в [5].

2. Предварительные результаты

2.1. Начнем с некоторых свойств ядра $C_\omega(z)$.

Лемма 2.1. *Если $\omega(x) \in \Omega$, то функция $C_\omega(z)$ голоморфна в G^+, и при любом $\rho > 0$ существует постоянная $M_{\rho,\omega} > 0$, зависящая только от ρ и ω, такая, что*

$$|C_\omega(x + iy)| \leq \frac{M_{\rho,\omega}}{y^{1+\alpha}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > \rho. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $0 < \rho < y < +\infty$ -любые числа. Тогда при $0 < t < 1/\Delta_0$

$$\left|\frac{e^{i(x+iy)t}}{I_\omega(t)}\right| = \frac{e^{-yt}}{t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\omega(x)dx} \leq \frac{1}{C_1} \frac{e^{-\rho t}}{t\int_{1/t}^{+\infty} e^{-xt}x^\alpha dx} \leq \frac{1}{C_1} \frac{e^{-\rho t} t^\alpha}{\int_1^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda^\alpha d\lambda},$$

а при $1/\Delta_0 < t < +\infty$

$$\left|\frac{e^{i(x+iy)t}}{I_\omega(t)}\right| = \frac{e^{-yt}}{t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\omega(x)dx} \leq \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \frac{e^{-\rho t}}{t\int_0^{\Delta_0} e^{-xt}dx} \leq \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \frac{e^{-\rho t}}{1 - e^{-t\Delta_0}}.$$

Таким образом, при любом $\rho > 0$ подынтегральное выражение в (1.3) имеет суммируемую мажоранту. Тем самым, интеграл (1.3) равномерно сходится в полуплоскости $y > \rho$, и $C_\omega(z)$ голоморфно в G^+. Кроме того, аналогично получаем, что для достаточно большого $y > 0$ и любого $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|C_\omega(z)| \leq \frac{1}{C_2}\int_0^{1/\Delta_0} \frac{e^{-yt}t^\alpha dt}{\int_1^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda^\alpha d\lambda} + \frac{1}{\omega(\Delta_0)}\int_{1/\Delta_0}^{+\infty} \frac{e^{-yt}dt}{1-e^{-t\Delta_0}}$$
$$\leq \frac{1}{C_3}\int_0^{1/\Delta_0} e^{-yt}t^\alpha dt + \frac{1}{C_4\omega(\Delta_0)}\int_{1/\Delta_0}^{+\infty} e^{-yt}dt$$
$$\leq \frac{1}{y^{1+\alpha}C_3}\int_0^{y/\Delta_0} e^{-u}u^\alpha du + \frac{1}{yC_4\omega(\Delta_0)}\int_{y/\Delta_0}^{+\infty} e^{-u}du \leq \frac{K_\omega}{y^{1+\alpha}},$$

где $K_\omega > 0$ - постоянная, зависящая только от ω, т. е. верна оценка (2.1). □

В частном случае $\omega(x) = x^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, как нетрудно убедиться,

$$C_\omega(z) \equiv C_\alpha(z) = \frac{1}{(-iz)^{1+\alpha}} \quad \text{и} \quad C_\omega(z)\Big|_{\omega(x)\equiv 1} = \frac{1}{-iz}, \quad z \in G^+,$$

т. е. $C_\omega(z)$ переходит в обыкновенное ядро Коши. Кроме того,

$$L_\omega C_\omega(z) = \frac{1}{-iz}, \quad z \in G^+.$$

Действительно, если $\omega(x) \in \Omega$, то по теореме Фубини

$$L_\omega C_\omega(z) = -L_{\omega_1}\frac{\partial}{\partial y}C_\omega(z) = -\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}C_\omega(z+i\sigma)d\omega_1(\sigma) =$$
$$-\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{i(z+i\sigma)t}dt}{t\int_0^{+\infty}e^{-tx}d\omega_1(x)}\right)d\omega_1(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{\int_0^{+\infty}e^{-\sigma t}d\omega_1(\sigma)}{\int_0^{+\infty}e^{-tx}d\omega_1(x)}dt = \frac{1}{-iz}.$$

2.2. Для применения L_ω к другим функциям нужны некоторые определения.

Определение 2.1. *Область $G \subseteq \mathbb{C}$ назовем ∞-звездообразной, если вместе с любой точкой $z \in G$ в G содержится также интервал $z + ih$, $0 < h < +\infty$.*

Определение 2.2. *Функция $u(z)$, заданная в ∞-звездообразной области G, принадлежит классу M_ω ($\omega(x) \in \Omega$), если существует угловая область $\Delta(\delta_0, R_0) = \{z : |\pi/2 - \arg z| \leq \delta_0, |z| \geq R_0\}$ с какими-либо $0 < \delta_0 \leq \pi/2$ и $0 < R_0 < +\infty$, такая, что*

$$\sup_{z\in\mathcal{K}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial y}u(z+i\sigma)\right|\omega(\sigma)d\sigma < +\infty \tag{2.2}$$

для любого компакта $\mathcal{K} \subset G \cap \Delta(\delta_0, R_0)$.

Лемма 2.2. *Если $\omega(x) \in \Omega$, а функция $u(z) \in M_\omega$ гармонична в ∞-звездообразной области G, то также функция $L_\omega u(z)$ гармонична в G.*

Доказательство. Если $\mathcal{K}$ - какой-либо компакт в G, то при некотором $d_0 > 0$ компакт $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} + id_0$ содержится внутри области $G \cap \Delta(\delta_0, R_0)$. Тем самым, при любом $z \in \mathcal{K}$ для функции $u_1(z) \equiv \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy)$ получаем

$$L_{\omega_1}|u_1(z)| = \int_0^{d_0} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(z+i\sigma)\right| \omega(\sigma)d\sigma + \int_{d_0}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(z+i\sigma)\right| \omega(\sigma)d\sigma \equiv I_1 + I_2,$$

где

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} I_1 \leq \max_{z\in\mathcal{K},\, 0\leq\sigma\leq d_0} |u_1(z+i\sigma)| \int_0^{d_0} \omega(\sigma)d\sigma < +\infty,$$

а по (2.2)

$$\int_{d_0}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(z+i\sigma)\right| \omega(\sigma)d\sigma = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(z+id_0+i\sigma)\right| \omega(\sigma+d_0)d\sigma$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u((z+id_0)+i\sigma)\right| \omega(\sigma)d\sigma \leq \sup_{z\in\mathcal{K}_0} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(z+i\sigma)\right| \omega(\sigma)d\sigma < +\infty,$$

поскольку функция $\omega(x)$ невозрастающая. Отсюда, применением теоремы Фубини заключаем, что для любого $z \in G$ и достаточно малого $r > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega u(z+re^{i\theta})d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{\omega_1}\frac{\partial}{\partial y} u(z+re^{i\theta})d\theta =$$

$$-\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial y} u(z+re^{i\theta}+i\lambda)d\theta\right)d\omega_1(\lambda) = -\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y} u(z+i\lambda)d\omega_1(\lambda) = L_\omega u(z).$$

Таким образом, функция $L_\omega u(z)$ гармонична во всей области G. □

Для доказательства того, что оператор L_ω - взаимнооднозначное отображением на некотором классе гармонических в ∞-звездообразно области функций, понадобится приведенный ниже результат, который является базовым для установленных в дальнейшем представлений.

Теорема 2.1. **(Е. Д. Соломенцев [4]).** *Класс $\mathfrak{N}'''$ субгармонических в G^+ функций $u(z)$ подчиненных условию*

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|dx < +\infty$$

совпадает с множеством функций представимых в виде

$$u(z) = \iint_{G^+} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\nu(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \quad z = x+iy \in G^+,$$

где $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty,+\infty)$, а $\nu(\xi) \geq 0$ - борелевская мера на G^+ такая, что

$$\iint_{G^+} \operatorname{Im}\zeta\, d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Лемма 2.3. *Пусть ∞-звездообразная область G содержит все полуплоскости $G_\rho^+ = \{z = x + iy : y > \rho\}$ с $\rho \geq \rho_0$, где $\rho_0 > 0$ фиксировано. Тогда оператор L_ω является взаимнооднозначным отображением, с точностью до слагаемого $a_0 + a_1 x$ с вещественными постоянными a_0, a_1, на множестве гармонических в G функций $u(x+iy) \in M_\omega$, подчиненных условию*

$$\sup_{y > \rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy) \right| dx < +\infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. При выполнении условия (2.3) гармоническая в G функция $u_1(z) = \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy)$ принадлежит классу $\mathfrak{N}^m$ в G_ρ^+ при любом $\rho > \rho_0$. Тем самым, из теоремы 2.1 следует, что при любом $z \in G_\rho^+$

$$u_1(z) = \mathrm{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_1(t+i\rho)}{t + i\rho - z} dt = \mathrm{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t+i\rho) dt \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho - t)\sigma} d\sigma$$

$$= \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z-i\rho)\sigma} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\sigma} u_1(t+i\rho) dt \right] d\sigma \equiv \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z-i\rho)\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma,$$

где ввиду (2.3) функция $\varphi(\sigma)$ ограничена в $0 \leq \sigma < +\infty$. Поэтому

$$L_\omega u(z) = -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy) = -\int_0^{+\infty} u_1(z + i\lambda) d\omega_1(\lambda)$$

$$= -\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} d\omega_1(\lambda) \int_0^{+\infty} e^{i(z + i\lambda - i\rho)\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma$$

$$= -\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z-i\rho)\sigma} \left[\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) \right] d\sigma$$

для любого $z = x + iy \in G_\rho^+$, где преобразование Лапласа

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{i(z-i\rho)\sigma} \left[\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) \right] d\sigma$$

является голоморфной в G_ρ^+ функцией. а из тождества $L_\omega u(z) \equiv 0$ в полуплоскости G_ρ^+ $(\rho > \rho_0)$ следует, что $F(z) \equiv iC$ где C -вещественная постоянная.

Теперь заметим, что функция $\varphi(\sigma)$ ограничена в $0 \leq \sigma < +\infty$. а ввиду свойств $\omega(\lambda)$ функция

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} \omega(\lambda) d\lambda$$

ограничена и непрерывна в $0 < \delta < \sigma < +\infty$, каково бы не было $\delta > 0$. Кроме того, по теореме Абеля (см. напр. [6]. стр. 182. Следствие 1а) из асимптотики $\omega(\lambda) \asymp \lambda^\alpha$ $(\lambda \to +\infty, -1 < \alpha < 0)$ следует. что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} \omega(\lambda) d\lambda \asymp \frac{1}{\sigma^{1+\alpha}} \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to +\infty.$$

Таким образом, генерирующая функция преобразования Лапласа $F(z)$, т. е.

$$\varphi(\sigma)\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda}d\omega_1(\lambda), \quad 0<\sigma<+\infty,$$

ограничена, и поэтому $|F(iy)| \leq My^{-1}$ при $y \to +\infty$, где $M > 0$ - постоянная. Тем самым, $C = 0$, и ввиду единственности генерирующей функции

$$\varphi(\sigma)\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda}d\omega_1(\lambda) \equiv 0, \quad 0<\sigma<+\infty,$$

где очевидно

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda}d\omega_1(\lambda) > 0, \quad 0<\sigma<+\infty.$$

Таким образом $\varphi(\sigma) \equiv 0$ $(0<\sigma<+\infty)$, т. е.

$$u_1(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}u(x+iy) = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{i(x-i\rho)\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma \equiv 0, \quad y>\rho.$$

Однако, функция $u_1(x+iy) = \partial u(x+iy)/\partial y$ гармонична во всей полуплоскости G, и, тем самым, $\partial u(z)/\partial y \equiv 0$, $z = x+iy \in G$. Отюда следует, что

$$u(z) \equiv a_0 + a_1 x, \quad z = x+iy \in G,$$

где a_0 и a_1 - вещественные постоянные, зависящие лишь от функции $u(z)$. □

3. Представления

Основной результат этого раздела относится к представлениям определенных ниже классов гармонических функций.

Определение 3.1. $\mathfrak{N}^m_\omega$ $(\omega(x)\in\Omega)$ *- класс вещественных, гармонических в* G^+ *функций* $u(z)$, *принадлежащих* M_ω *и удовлетворяющих условию* (2.3) *для некоторых* $\rho_0 > 0$, *и*

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\big|L_\omega u(x+iy)\big|dx < +\infty. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. 1°. *Класс* $\mathfrak{N}^m_\omega$ *совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$u(z) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\, C_\omega(z-t)d\mu(t), \quad z = x+iy\in G^+, \tag{3.2}$$

где a_0 *и* a_1 *- вещественные числа, а* $\mu(t)$ *- функция ограниченного изменения на* $(-\infty,+\infty)$.

2°. *Если имеет место представление* (3.2), *то при любом* $z = x + iy \in G^+$

$$u(z) = a_0 + a_1 x + \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{itz} \left[\frac{1}{\pi} \left(t \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} \omega(\sigma) d\sigma \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d\mu(\lambda) \right] dt. \tag{3.3}$$

При этом,

$$\lim_{y \to +\infty} u(x + iy) = a_0 + a_1 x, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{3.4}$$

а мера $\mu(t)$ *в формулах* (3.2) *и* (3.3) *может быть найдена при помощи следующего аналога формулы обращения Стилтьеса:*

$$\mu(t) = \lim_{y \to +0} \int_0^t L_\omega u(x + iy) dx, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. 1°. Пусть справедливо представление (3.2). Ввиду оценки (2.1) интеграл в (3.2) равномерно сходится внутри G^+, и, тем самым, функция $u(z)$ гармонична в G^+. Далее, легко видеть, что при любом $z = x + iy \in G^+$

$$\frac{\partial}{\partial y} C_\omega(z) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{izt} dt}{\int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega_1(x)} = -C_{\omega_1}(z), \tag{3.6}$$

где $C_{\omega_1}(z)$ - ядро из [7], с неубывающей функцией $\omega_1(x) \asymp x^{1+\alpha}$ при $x \to +\infty$, удовлетворяющей условиям леммы 3.1 в [7]. Поэтому, ввиду (2.1), теоремы Фубини и оценки (3.2) из [7] заключаем, что при любом $z \in G^+_\rho$ при любом фиксированном $\rho > 0$ и любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + is) \right| d\omega_1(s) &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z + is - t) d\mu(t) \right| d\omega_1(s) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_1}(z + is - t) d\mu(t) \right| \omega(s) ds \\
&\le \left(\frac{M_{\rho,\omega,\varepsilon}}{\rho^{2+\alpha-\varepsilon}} \int_0^{\Delta_0} \omega(s) ds + M'_{\rho,\omega,\varepsilon} \int_{\Delta_0}^{+\infty} s^{-2+\varepsilon} ds \right) \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty,
\end{aligned}$$

где $M_{\rho,\omega,\varepsilon}, M'_{\rho,\omega,\varepsilon} > 0$ - постоянные, зависящие только от ρ, ω и ε. Тем самым, $u(z) \in M_\omega$.

Далее, используя простую двустороннюю оценку $(a + b)^\lambda \asymp a^\lambda + b^\lambda$ $(a, b, \lambda \ge 0)$, аналогично заключаем, что для любых $y > \rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1 + \alpha)$ имеется постоянная $M_{\rho,\omega} > 0$, при которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} u(x+iy)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t) d\mu(t)\right| dx$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega_1}(z-t)| |d\mu(t)| \right) dx \leq M_{\rho,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{|z-t|^{1+\varepsilon}}$$
$$\leq M'_{\rho,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|^{1+\varepsilon} + \rho_0^{1+\varepsilon}} ds \leq M_{\rho,\rho_0,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(|u|+1)^{1+\varepsilon}} du < +\infty,$$

где $M'_{\rho,\omega} > 0$ и $M_{\rho,\rho_0,\omega} > 0$ - другие постоянные. Отсюда следует (2.3).

Теперь заметим, что при любом $z = x + iy \in G^+$

$$\begin{aligned}
L_\omega u(z) &= -\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} u(z+is)\right] d\omega_1(s) \\
&= -\mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z+is-t) d\mu(t)\right] d\omega_1(s) \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_1}(z+is-t) d\mu(t)\right] d\omega_1(s) \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z+is-t)\xi} d\xi}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\xi} d\omega_1(\sigma)}\right) d\mu(t)\right] d\omega_1(s) \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)\xi} \left(\frac{\int_0^{+\infty} e^{-s\xi} d\omega_1(s)}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\xi} d\omega_1(\sigma)}\right) d\xi\right] d\mu(t) \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)\xi} d\xi\right] d\mu(t) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z},
\end{aligned}$$

где все интегралы абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+. Тем самым

$$L_\omega u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^+, \tag{3.7}$$

откуда следует условие (3.1):

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |L_\omega u(x+iy)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| = \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty.$$

Тем самым, $u(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$.

Обратно, пусть $u(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$. Тогда $u(z) \in M_\omega$, и по лемме 2.2 функция $L_\omega u(z)$ гармонична в G^+. Кроме того, $L_\omega u(z)$ удовлетворяет условию (3.1), и поэтому по теореме 2.1 имеет место представление вида (3.7), где $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$. Отюда получаем

$$L_\omega u(z) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z} = \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)s} ds\right] d\mu(t), \quad z \in G^+,$$

а также, что в любой точке $z \in G^+$

$$L_\omega u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(t) \int_0^{+\infty} d\omega_1(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z-t+i\lambda)s} ds}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma s}\omega(\sigma) d\sigma}$$

$$= -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z-t+i\lambda)s} ds}{s \int_0^{+\infty} e^{-\sigma s}\omega(\sigma) d\sigma} \right) d\mu(t) \right] d\omega_1(\lambda)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z + i\lambda - t) d\mu(t) \right] d\omega_1(\lambda) \equiv L_\omega u^*(z).$$

где, очевидно,

$$u^*(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z + i\lambda - t) d\mu(t) \in \mathfrak{N}_\omega^m.$$

Очевидно также, что $u(z) - u^*(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$ и $L_\omega(u(z) - u^*(z)) \equiv 0$, $z \in G^+$. Тем самым, представление (3.2) следует ввиду леммы 2.3.

2°. Представление (3.3) следует из (3.2). Далее, (3.4) следует из (3.3) и (2.1), а (3.5) - классическя формула обращения Стилтьеса для меры $\mu(t)$ в (3.7). □

4. Граничные значения

4.1. Начнем с предварительных определений и лемм.

Определение 4.1. *Пусть $E \subsetneq (-\infty, +\infty)$ - измеримое по Борелю множество (B-множество) и $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что E - множество положительной ω-емкости, или $C_\omega(E) > 0$, если существует борелева мера (B-мера) $\tau \geq 0$ с носителем в E ($\tau \prec E$) такая, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau(t) = 1 \tag{4.1}$$

и

$$S_1 \equiv \sup_{z \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z - t)| d\tau(t) < +\infty. \tag{4.2}$$

Если нет такой меры, т. е. $S_1 = +\infty$ для любой неотрицательной B-меры $\tau \prec E$, подчиненной условию (4.1), то скажем, что E - нулевой ω-емкости, или $C_\omega(E) = 0$.

Лемма 4.1. *Пусть B-множества $E_1, E_2 \subset (-\infty, +\infty)$ таковы, что $C_\omega(E_1) = C_\omega(E_2) = 0$ при некотором $\omega \in \Omega$. Тогда $C_\omega(E_1 \cup E_2) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\tau \prec E_1 \cup E_2$ - неотрицательная B-мера, подчиненная условию (4.1). Тогда интеграл (4.1), взятый по E_1 или E_2, должен равняться некоему числу $M \in (0, 1]$. К примеру, пусть это будет интеграл по E_1. Тогда также мера $\tau_1 = M^{-1}\tau\big|_{E_1}$ с носителем в E_1 должна удовлетворять (4.1). Однако, $C_\omega(E_1) = 0$ и, тем самым

$$\sup_{z\in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)|d\tau(t) \geq M \sup_{z\in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)|d\tau_1(t) = +\infty.$$

□

Лемма 4.2. *При любом $\omega \in \Omega$ уравнение Вольтерра*

$$\int_0^x \omega(x-t)d\widetilde{\omega}(t) \equiv 1, \quad -\infty < x < +\infty,$$

имеет неубывающее решение $\widetilde{\omega}(x)$ такое, что $\widetilde{\omega}(0) = 0$ и $\widetilde{\omega}(x) \leq [\omega(x)]^{-1}$ для всех $-\infty < x < +\infty$. Кроме того,

$$C_\omega(z) = L_{\widetilde{\omega}}\left(\frac{1}{-iz}\right), \quad z \in G^+, \tag{4.3}$$

для оператора

$$L_{\widetilde{\omega}} f(z) \equiv \int_0^{+\infty} f(z+i\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma).$$

Доказательство. Взяв $\Omega_1(x) \equiv 1$, $\Omega_2(x) \equiv \omega(x)$ в теореме 1.2 работы [8], заключаем, что функция $\widetilde{\omega}(x)$ с отмеченными свойствами существует. Тем самым

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\mu}\left(\int_0^{\mu} \omega(\mu-\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma)\right)d\mu = 1/t, \quad 0 < t < +\infty. \tag{4.4}$$

Однако, при любом $t > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma}d\widetilde{\omega}(\sigma)\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\omega(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t\mu}d\mu\int_0^{\mu}\omega(\mu-\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma) \tag{4.5}$$

ввиду абсолютной сходимости этих интегралов, что очевидно для тех, которые содержат $\omega(\lambda)d\lambda$, или $d\widetilde{\omega}(\sigma)$, поскольку для любого $t \in (-\infty, +\infty)$ найдутся числа $M_1 > 0$ и $\alpha \in (-1, 0)$ такие, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma}d\widetilde{\omega}(\sigma) = e^{-t\sigma}\widetilde{\omega}(\sigma)\Big|_{\sigma=0}^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma}\widetilde{\omega}(\sigma)d\sigma \leq t\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t\sigma}d\sigma}{\omega(\sigma)} =$$

$$= t\left(\int_0^{\Delta_0} + \int_{\Delta_0}^{+\infty}\right)\frac{e^{-t\sigma}d\sigma}{\omega(\sigma)} \leq \frac{t}{\omega(\Delta_0)}\int_0^{\Delta_0} e^{-t\sigma}d\sigma + M_1 t\int_{\Delta_0}^{+\infty} e^{-t\sigma}\sigma^{-\alpha}d\sigma < +\infty.$$

В силу (4.4) и (4.5)

$$\frac{1}{I_\omega(t)} = \left(t\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\omega(\lambda)d\lambda\right)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma}d\widetilde{\omega}(\sigma)$$

при любом $t \in (0, +\infty)$, и, следовательно,

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\frac{dt}{I_\omega(t)} = \int_0^{+\infty} e^{izt}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma}d\widetilde{\omega}(\sigma)\right)dt.$$

Для завершения доказательства остается заметить,что при любом $z \in G^+$

$$L_{\widetilde{\omega}}\left(\frac{1}{-iz}\right) = \int_0^{+\infty} d\widetilde{\omega}(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{i(z+\sigma)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{izt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\widetilde{\omega}(\sigma)\right) dt,$$

где интегралы абсолютно сходятся, поскольку

$$\int_0^{+\infty} d\widetilde{\omega}(\sigma) \int_0^{+\infty} \left|e^{i(z+i\sigma)t}\right| dt \le \int_0^{+\infty} \frac{d\widetilde{\omega}(\sigma)}{y+\sigma} < +\infty, \quad z = x + iy \in G^+,$$

ввиду неравенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\widetilde{\omega}(\sigma)}{1+\sigma} \le \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \int_0^{\Delta_0} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2} + M_2 \int_{\Delta_0}^{+\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2 \sigma^\alpha} < +\infty$$

справедливых при некоторых числах $M_2 > 0$ и $\alpha \in (-1, 0)$. □

Лемма 4.3. *Пусть $\omega \in \Omega$ и пусть $C_\omega(E) > 0$ для B-множеств $E \subsetneq (-\infty, +\infty)$. Далее, пусть B-мера $\tau \prec E$ удовлетворяет условиям* (4.1) *и* (4.2). *Тогда, для любого $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x-t)| d\tau(t) \le S_1 \equiv \sup_{z \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\tau(t) < +\infty.$$

Доказательство. В силу (4.3) $\mathrm{Re}\, C_\omega(z) \geq 0$, $z \in G^+$, и, тем самым, функция $C_\omega(z)$ обладает некасательными граничными значениями почти во всех точках $-\infty < x < +\infty$. Далее по лемме Фату

$$+\infty > \liminf_{y \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x+iy-t)| d\tau(t) \ge \int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{y \to +0} |C_\omega(x+iy-t)| d\tau(t)$$
$$\ge \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x-t)| d\tau(t)$$

при любом $x \in (-\infty, \infty)$, и, тем самым,

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\tau(t) \ge \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x-t)| d\tau(t).$$

Переход к супремуму по $x \in (-\infty, +\infty)$ завершает доказательство. □

4.2. Для доказательства основной теоремы данного раздела нужна также

Лемма 4.4. *Пусть $\omega \in \Omega$, а $f(z)$ - голоморфная в G^+ функция вида*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t) d\mu(t), \quad z \in G^+,$$

где $\mu(t)$ - функция ограничного изменения на $(-\infty, +\infty)$. Тогда множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, где некасательное граничное значение $f(x)$ не существует в виде конечного предела, обладает нулевой ω-емкостью.

Доказательство. В силу (4.3), $\operatorname{Re} C_\omega(z) \geq 0$, $z \in G^+$. Тем самым, $f(z)$ является разностью двух голоморфных в G^+ функций с неотрицательными вещественными частями. Следовательно, $f(z)$ ограниченного вида в G^+ и поэтому имеет конечные некасательные граничные значения почти во всех точках $-\infty < x < +\infty$. Далее, в силу теоремы Линделефа существование конечного некасательного предела в какой-либо точке $x \in (-\infty, +\infty)$ эквивалентно существованию того же предела в перпендикулярном направлении:

$$\lim_{y \to +0} f(x+iy) \; (= f(x)). \tag{4.6}$$

Для доказательства существования последнего предела вне множества нулевой ω-емкости, запишем

$$f(x+iy) = f(x+i\lambda) - i\int_y^\lambda f'(x+i\sigma)d\sigma \tag{4.7}$$

с любыми y, λ $(0 < y < \lambda < +\infty)$. Так как $\omega \in \Omega$, то при помощи оценки (3.6) и вычислении, аналогичного приведенному в начале доказательства теоремы 3.1, заключаем, что при любых $y > \rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1+\alpha)$

$$\int_y^{+\infty} |f'(x+i\sigma)|d\sigma = \int_y^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(x+i\sigma-t)d\mu(t) \right| d\sigma$$

$$\leq \int_y^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega_1}(x+i\sigma-t)||d\mu(t)| \right) d\sigma \leq M_{\rho,\omega} \int_y^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{|x+i\sigma-t|^{1+\varepsilon}}$$

$$\leq M'_{\rho,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{[|x-t|+y]^\varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1+\varepsilon}} \leq M''_{\rho,\omega} y^{-\varepsilon} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) < +\infty,$$

где $M_{\rho,\omega}$, $M'_{\rho,\omega}$ и $M''_{\rho,\omega}$ - положительные постоянные. Поэтому, предельным переходом $\lambda \to +\infty$ в (4.7) получаем

$$f(x+iy) = f(x+i\infty) - i\int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{4.8}$$

где интеграл абсолютно сходится и $f(x+i\infty)$ - конечный предел.

Пусть E_0 - множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, для которых

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma \right| = +\infty,$$

и пусть E - множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, где (4.6) не является конечным пределом. Тогда $E \subsetneq E_0$ в силу (4.8), и равенство $C_\omega(E_0) = 0$ влечет $C_\omega(E) = 0$. Действительно, если $C_\omega(E) > 0$, то существовала бы неотрицательная B-мера $\tau \prec E$, для которой были бы верны (4.1) и (4.2). Но $E \subsetneq E_0$, поэтому $\tau \prec E_0$, и получаем $C_\omega(E_0) > 0$ ввиду определения 4.1. Таким образом, остается показать, что $C_\omega(E_0) = 0$. Предположим обратное: $C_\omega(E_0) > 0$. Тогда найдется неотрицательная B-мера $\tau_0 \prec E_0$, для которой верны (4.1) и (4.2). По (4.1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_0(x) = \int_{E_0} d\tau_0(x) = 1.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma \right| d\tau_0(x) = +\infty. \tag{4.9}$$

С другой стороны, в силу (4.3) $C'_\omega(z) = -\int_0^\infty \frac{d\tilde{\omega}(t)}{(z+it)^2}$. Поэтому, применив теорему Фубини и (4.3) получим

$$\int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} C'_\omega(x+i\sigma-t)d\sigma \right) d\mu(t)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} d\tilde{\omega}(\lambda) \int_y^{+\infty} \frac{d\sigma}{(x+i\sigma-t+i\lambda)^2} \right) d\mu(t)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(i\int_0^{+\infty} d\tilde{\omega}(\lambda) \int_{y+\lambda}^{+\infty} d_s \frac{1}{(x-t+is)} \right) d\mu(t) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}(\lambda)}{z-t+i\lambda} \right) d\mu(t)$$

$$= -i\int_{-\infty}^{+\infty} L_{\tilde{\omega}}\left(\frac{1}{z-t}\right) d\mu(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)d\mu(t).$$

Следовательно, для любого $z = x + iy \in G^+$

$$\left| \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)||d\mu(t)|,$$

и по определению (1.3) ядра $C_\omega(z)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma \right| d\tau_0(x) \le \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{C_\omega(x+iy-t)}||d\mu(t)|$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(t+iy-x)||d\tau_0(x)| \le S_1 \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty.$$

Отсюда, по лемме Фату

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} f'(x+iy)dy \right| d\tau_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lim_{y\to 0} \int_y^{+\infty} f'(x+iy)dy \right| d\tau_0(t)$$

$$\le \liminf_{y\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^{+\infty} f'(x+iy)dy \right| d\tau_0(t) \le S_1 \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty,$$

что противоречит (4.9). □

Приведенная ниже теорема дает описание граничного поведения функций классов $\mathfrak{N}^m_\omega$ $(\omega(x) \in \Omega)$ в терминах ω-емкостей.

Теорема 4.1. *Любая функция $u(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$ $(\omega \in \Omega)$ имеет ненулевые, конечные, некасательные граничные значения во всех точках $x \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой ω-емкости.*

Доказательство. Утверждение очевидно в силу леммы 4.4 и представления (3.2) функции $u(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$, где a_0 и a_1 - вещественные постоянные, а $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$. □

Замечание 4.1. *Ввиду* (3.4), *сужение класса $\mathfrak{N}_\omega^m$ дополнительным условием*

$$\lim_{y \to +\infty} u(x_{1,2} + iy) = 0 \quad \text{при каких либо значениях} \quad x_1 \neq x_2$$

является классом гармонических в G^+ функций, представимых только интегралом правой части формулы (3.2). *Однако,* $\operatorname{Re} C_\omega(z) \geq 0$, $z \in G^+$, *ввиду* (4.3), *и поэтому функции суженного класса имеют неотрицательные гармонические мажоранты в G^+ и обладают граничными свойствами теоремы 4.1.*

Ниже приводим еще одну теорему о граничных значениях функций классов $\mathfrak{N}_\omega^m$.

Теорема 4.2. *Пусть $\omega \in \Omega$, B-множество $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ положительной ω-емкости, и пусть $a_1 = 0$ в представлении* (3.2) *функции $u(z) \in \mathfrak{N}_\omega^m$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| d\tau(x) < +\infty \tag{4.10}$$

для той же B-меры τ, что в (4.2), *для которой $C_\omega(E) > 0$.*

Доказательство. Очевидно

$$|u(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\mu(t) + a_0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

и, тем самым, пользуясь теоремой Фубини и неравенством (4.2) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| d\tau(x) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{C_\omega(x+iy-t)}| d\tau(x) + M_{a_0}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(t+iy-x)| d\tau(x) + M_{a_0} \leq \frac{S_1}{2\pi} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu + M_{a_0} < +\infty.$$

Следовательно, применив теорему 4.1 и лемму Фату приходим к (4.10). □

Abstract. Some ω-weighted classes of harmonic functions are introduced in the upper half-plane, the representations of these classes are found. A description of the boundary values of the functions from the considered classes is given by means of a notion of ω-capacity on the real axis, which becomes an analog of Frostman's α-capacity in a particular case.

Список литературы

[1] M. M. Džrbašjan, "Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc", in: Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), **2**, Canad. Math. Congress, Montreal (1975).

[2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и Граничные Свойства Функций Мероморфных в Круге, Наука, Москва (1993).

[3] A. M. Jerbashian, Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane, Springer, Advances in Complex Analysis and Applications, **4** (2005).

[4] Е. Д. Соломенцев, "О классах функций субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, Сер. Мат., **5**, 73 – 91 (1959)

[5] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω-Bounded Type in the Half-Plane" CMFT: Calculation Methods and Function Theory, **7**, no. 2, 205 – 238 (2007).

[6] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton (1946).

[7] A. M. Jerbashian, "On $A^p_{\omega,\gamma}$ Spaces in the Half-Plane", in: Operator Theory: Advances and Applications, **158**, 141 – 158, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland (2005).

[8] А. М. Джрбашян, "О вложении классов N_ω типа Неванлинны", Изв. РАН. **63**, no. 4, 59 – 78 (1999).

Поступила 11 января 2015

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 32-41.

О СРАВНЕНИИ С ВЕСОМ ДВУМЕРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com*, *jolisourire@yandex.ru*

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия для сравнения с весом двумерных многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: сравнение многочленов; гиперболичность по весу.

1. Обозначения и определения

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N - множество натуральных чисел, $N_0 := N \cup \{0\}$, N_0^n, $n \in N$, множество n - мерных мультииндексов, т. е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0$, $j = 1, ..., n$, E^n и R^n - $n-$мерные вещественные эвклидово пространства точек $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $R_+^n := \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$, $R_0^n := \{\xi \in R^n, \xi_1 \cdot ... \cdot \xi_n \neq 0\}$, $\mathbb{C}^n := R^n \times iR^n$ ($i^2 = -1$). Для любых $\xi, \eta \in R^n$, $\nu \in R_+^n$, $t > 0$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\|\xi\| := \left(\xi_1^2 + ... + \xi_n^2\right)^{1/2}$, $(\xi, \eta) := \xi_1\eta_1 + ... + \xi_n\eta_n$, $|\nu| := \nu_1 + ... + \nu_n$, $|\xi|^\nu := |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}$, $t \cdot \xi := (t \cdot \xi_1, ..., t \cdot \xi_n)$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$.

Характеристическим многогранником (х. м.) конечного набора $A \subset R_+^n$ называется минимальный выпуклый многогранник $\Re \subset R_+^n$, содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат. Полный многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется правильным (вполне правильным (в. п.)), если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)-$мерных некоординатных граней неотрицательны (положительны). Для в. п. многоугольника $\Re \subset R_+^n$ через $\Lambda(\Re)$ обозначим множество нормалей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ $(n-1)-$мерных некоординатных граней $\Re$, для которых $\min\{\lambda_j, j = 1, ..., n\} = 1$. Через $B(n)$ обозначим множество в. п. многогранников $\Re \subset R_+^n$, для которых

$$max\{(\nu, \lambda), \nu \in \Re\} := d_\Re(\lambda) \leq 1, \quad \lambda \in \Lambda(\Re).$$

Для многогранника $\Re \in B(n)$ обозначим $\Re^0$ - множество вершин $\Re$ и $\partial\Re := \{\nu \in \Re, \exists\lambda \in \Lambda(\Re), (\nu, \lambda) = d_\Re(\lambda)\}$. Определим функцию

$$h_\Re(\xi) = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi|^\nu.$$

Числа $d_0(\Re) := \max\{d_\Re(\lambda) : \lambda \in \Lambda(\Re)\}$, $\rho_0(\Re) := \max\{|\nu| : \nu \in \Re^0\}$, $\rho_1(\Re) := \min\{|\nu| : 0 \neq \nu \in \Re^0\}$ называются соответственно формальным, максимальным и минимальным порядками функции $h_\Re$. Так как, очевидно, $0 \in \Re^0$ и $d_0(\Re) \leq 1$ ($\Re \in B(n)$), то с некоторой постоянной $C \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} C^{-1} \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_1(\Re)} &\leq h_\Re(\xi) \leq C \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_0(\Re)} \leq \\ &\leq C \cdot (1 + \|\xi\|)^{d_0(\Re)} \leq C \cdot (1 + \|\xi\|), \qquad \xi \in R^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, $\gamma_\alpha \in \mathbb{C}$, многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) := \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$. Представим многочлен P в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi), \tag{1.2}$$

где $m := \max\{|\alpha|, \alpha \in (P)\}$- порядок многочлена P, а P_j - однородный многочлен порядка j, $j = 0, ..., m$. Точка $\tau \in R^n$ называется нулем многочлена P порядка $\ell(\tau) \in N$, если

$$P^{(\alpha)}(\tau) := (D^\alpha P)(\tau) = 0 \text{ для любого } \alpha \in N_0^n, |\alpha| < \ell(\tau)$$

и $\sum_{|\alpha| = \ell(\tau)} |P^{(\alpha)}(\tau)| \neq 0$. По определению, при $P(\tau) \neq 0$ будем считать, что $\ell(\tau) = 0$. Для однородного многочлена P обозначим $\sum(P) := \{\tau \in R^n : \|\tau\| = 1, P(\tau) = 0\}$.

Пусть $k \in N_0$, $n \in N$, $k \leq n$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, если $k \geq 1$, и $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$, если $k < n$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что многочлен $Q(\xi)$ $h_\Re$ ($\Re \in B(n-k)$) слабее многочлена P и писать $Q \prec^{h_\Re} P$, если с некоторой постоянной $C > 0$*

$$\tilde{Q}(\xi, h_\Re(\xi'')) \leq C \cdot \tilde{P}(\xi, h_\Re(\xi'')), \quad \xi \in R^n,$$

где для данного многочлена q и числа $t > 0$

$$\tilde{q}(\xi, t) = \sqrt{\sum_\alpha |q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}}.$$

Определение 1.2 (см. [1], определение 12.3.3). *Многочлен P, представленный в виде (1.2), называется гиперболическим (по Гордингу) относительно первой компоненты, если $P_m(1, 0, ..., 0) \neq 0$ и существует постоянная $C \in R$ такая, что $P(\xi) \neq 0$, $\xi_1 \in \mathbb{C}$, $(\xi_2, ..., \xi_n) \in R^{n-1}$ при $\operatorname{Im}\xi_1 < C$.*

Определение 1.3 (см. [2] или [3]). *Скажем, что многочлен P, представленный в виде (1.2), $h_{\mathfrak{R}}$ ($\mathfrak{R} \in B(n-1)$) гиперболичен относительно первой компоненты, если $P_m(1, 0, ..., 0) \neq 0$ и существует число $C \in R$, для которого $P(\xi) \neq 0$, $\xi_1 \in \mathbb{C}$, $(\xi_2, ..., \xi_n) \in R^{n-1}$ при* $\operatorname{Im}\xi_1 < C \cdot h_{\mathfrak{R}}(\xi_2, ..., \xi_n)$.

Для многогранника $\mathfrak{R} \in B(n)$ через $\tilde{\mathfrak{R}}$ обозначим х. м. набора $\{0, \nu\}_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \cup$ $\cup (d_0(\mathfrak{R}), 0, ..., 0)$. Нетрудно заметить, что $\tilde{\mathfrak{R}} \in B(n+1)$ при $\mathfrak{R} \in B(n)$.

Для $\mathfrak{R} \in B(n)$ и области $\Omega \subset E^n$ (см. [4]) через $\Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ обозначим следующий мультианизотропный класс Жевре

$$\Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega) := \Big\{ f \in C^\infty(\Omega). \forall K \subset \Omega, \exists C = C(f, K),$$

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j, \forall \alpha \in j\mathfrak{R},\ j = 1, ... \Big\},$$

где K- компакт, $j\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathfrak{R}^n_+ :\ \nu/j \in \mathfrak{R}\}$, и положим

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\mathfrak{R}}(\Omega) := \Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega).$$

Известно (см. [1]), что $\overset{0}{\Gamma}{}^{\mathfrak{R}}(\Omega) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ при $d_0(\mathfrak{R}) < 1$ ($\mathfrak{R} \in B(n)$).

В работе [3], при некоторых весовых оценках (с весом $h_{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R} \in B(n-1)$, $d_0(\mathfrak{R}) < 1$) на младшие члены многочлена P, представленного в виде (1.2), доказано, что если P_m гиперболичен по Гордингу относительно первой компоненты, то P $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно первой компоненты, при этом решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) U(t,x) = 0,\ t > 0 \\ \frac{\partial^j}{\partial t^j} U(0,x) = f_j(x),\ f_j \in \overset{0}{\Gamma}{}^{\delta \cdot \mathfrak{R}}(E^n),\ j = 0, ..., m-1 \end{cases}$$

$1 < \delta < 1/d_0(\mathfrak{R})$, принадлежит классу $\Gamma^{\delta \tilde{\mathfrak{R}}}(H)$, где $H = \{(t, x),\ t > 0,\ x \in E^n\}$.

В работе [5] доказано, что если главная часть многочлена $P(\lambda, \xi)$, представленного в виде (1.2), гиперболична по Гордингу относительно первой компоненты и $P_j \prec^{h_{\mathfrak{R}}} P_m$ ($\mathfrak{R} \in B(n)$, $d_0(\mathfrak{R}) < 1$), $j = 0, ..., m-1$, то $P(\lambda, \xi)$ $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно первой компоненты, и решение U следующей задачи Коши

$$\begin{cases} P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) U(t,x) = 0,\ t > 0 \\ \frac{\partial^j}{\partial t^j} U(0,x) = f_j(x),\ f_j \in \overset{0}{\Gamma}{}^{\mathfrak{M}}(E^n),\ j = 0, ..., m-1 \end{cases}$$

где $\mathfrak{M} \in B(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{M} \setminus \partial\mathfrak{M} \supset \mathfrak{R}$, принадлежит $\Gamma^{\mathfrak{M}}(H)$.

Наша цель в настоящей заметке исследовать вопрос сравнения с весом многочленов от двух переменных.

2. Сравнение двумерных многочленов

В дальнейшем будем считать, что $n = 2$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Предложение 2.1. *Пусть P_m — однородный многочлен порядка m, $\ell := \max\{\ell(\tau) : \tau \in \sum(P_m)\}$, где $\ell(\tau)$ - порядок нуля многочлена P_m в точке τ. Тогда многочлен*

$$Q_{2(m-\ell)}(\xi) := \sum_{|\alpha|=\ell} \left| P_m^{(\alpha)}(\xi) \right|^2$$

эллиптичен.

Доказательство. непосредственно следует из леммы Эйлера о представлении однородных многочленов через их производные порядка k $(0 \le k \le m)$. □

Теорема 2.1. *Пусть $\Re \in B(2)$, P - многочлен от двух переменных, представленный в виде (1.2). Тогда любой многочлен Q порядка не выше $m - \ell(1 - \rho_1(\Re))$ $h_\Re$ слабее P, где $\ell := \max\{\ell(\tau) : \tau \in \sum(P_m)\}$, $\ell(\tau)$ — порядок нуля многочлена P_m в точке τ, а $\rho_1(\Re)$ - минимальный порядок функции $h_\Re$.*

Доказательство. В силу предложения 2.1 и левой части оценки (1.1) с некоторыми постоянными $C_j > 0$, $j = \overline{1,4}$, при всех $\xi \in R^2$ имеем, что

$$\tilde{P}(\xi, h_\Re(\xi)) \ge C_1 \left[\sum_{|\alpha|=\ell} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| h_\Re^{|\alpha|}(\xi) + h_\Re^m(\xi) \right] \ge$$

$$\ge C_2 h_\Re^\ell(\xi) \left[\sum_{|\alpha|=\ell} \left| \left| P_m^{(\alpha)}(\xi) \right| - \left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{(\alpha)}(\xi) \right| \right| + 1 \right] \ge$$

$$\ge C_3 h_\Re^\ell(\xi) \left(\|\xi\|^{m-\ell} + 1 \right) \ge C_4 \left(1 + \|\xi\|^{m-\ell(1-\rho_1(\Re))} \right). \tag{2.1}$$

Так как в силу правой части оценки (1.1) с некоторыми постоянными C_5, $C_6 > 0$ при всех $\xi \in R^2$ $(m_1 := \max\{|\alpha| : \alpha \in (Q)\})$

$$\tilde{Q}(\xi, h_\Re(\xi)) = \sqrt{\sum_\alpha \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 h_\Re^{2|\alpha|}(\xi)} \le$$

$$\le C_5 \sum_{|\alpha| \le m_1} (1 + \|\xi\|)^{m-|\alpha|} (1 + \|\xi\|)^{|\alpha|} \le C_6 (1 + \|\xi\|)^{m_1},$$

то отсюда и из оценки (2.1) получаем утверждение теоремы. □

Для многоугольника $\Re \in B(2)$ через $(\chi_1(\Re), 0)$ и $(0, \chi_2(\Re))$ обозначим вершины $\Re$, лежащие на соответствующих осях координат.

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть* $\Re \in B(2)$, $\rho_0(\Re) < 1$, P_{m_0} *- однородный многочлен порядка* m_0. *Многочлен* Q *порядка* m, *представленный в виде (1.2),* $h_\Re$ *слабее многочлена* P_{m_0} *тогда и только тогда, когда*

1) $m_0 \geq m$,

2) $m_0 - \ell(\tau)(1-\delta_0(\tau)) \geq \max\{k - \ell_k(\tau)(1-\delta_0(\tau)),\ k = 0, ..., m\}$,

где $\ell(\tau)$ *и* $\ell_k(\tau)$ *порядки нулей многочленов* P_{m_0} *и* Q_j $(0 \leq j \leq m)$ *в точке* $\tau \in \sum(P_{m_0})$, *а*

$$\delta_0(\tau) := \begin{cases} \rho_0(\Re), & \tau \in \sum(P_{m_0}) \cap R_0^2 \\ \chi_1(\Re), & \tau \in \sum(P_{m_0}),\ \tau_2 = 0 \\ \chi_2(\Re), & \tau \in \sum(P_{m_0}),\ \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Предложение 2.2. *Пусть* $\Re_1, \Re_2 \in B(2)$, *для которых* $\rho_0(\Re_1) = \rho_0(\Re_2) < 1$, $\chi_j(\Re_1) = \lambda_j(\Re_2)$, $j = 1, 2$. *Однородный многочлен* P_{m_0} *порядка* m_0 $h_{\Re_1}$ *сильнее многочлена* Q *тогда и только тогда, когда* $Q \prec^{h_{\Re_1}} P_{m_0}$.

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 2.2. □

Предложение 2.3. *Если для многоугольника* $\Re \in B(2)$ $\rho_0(\Re) = 1$, *то*

1) $card\Lambda(\Re) = 1$, *2) либо* $\chi_1(\Re) = 1$, *либо* $\chi_2(\Re) = 1$,

3) $\Re = \{\nu \in R_+^2 :\ \nu_1/\chi_1(\Re) + \nu_2/\chi_2(\Re) \leq 1\}$.

Доказательство. Из условия $\rho_0(\Re) = 1$ имеем, что для некоторого $\nu^0 \in \Re^0$ $|\nu^0| = 1$, а из условия $\Re \in B(2)$ и определения $\Lambda(\Re)$

$$1 \geq d(\lambda) \geq (\nu^0, \lambda) \geq |\nu^0| = 1, \quad \lambda \in \Lambda(\Re), \tag{2.2}$$

и, следовательно,

$$d(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \Lambda(\Re). \tag{2.3}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи

I) $\nu^0 \in R_0^2$. II) $\nu^0 = (1, 0)$ и III) $\nu^0 = (0, 1)$.

В случае I) из соотношения (2.2) имеем, что если $\lambda \in \Lambda(\Re)$, то $\lambda = (1, 1)$, следовательно, $card\Lambda(\Re) = 1$ и

$$\Re = \{\nu \in R_+^2 :\ \nu_1 + \nu_2 \leq 1\}. \tag{2.4}$$

Пусть $\Lambda_j(\Re) := \{\lambda \in \Lambda(\Re) : \lambda_j = 1\}$, $\lambda_j^0 := \min\{\lambda_j :\ \lambda \in \Lambda_j(\Re)\}$, $j = 1, 2$. Так как в случае II) $\lambda_1 = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda(\Re)$, то $\Lambda(\Re) = \Lambda_1(\Re)$ и $(1, \lambda_2^0) \in \Lambda_1(\Re)$. Отсюда в силу (2.3) имеем, что

$$\Re = \bigcap_{\lambda \in \Lambda(\Re)} \{\nu \in R_+^2 :\ (\nu, \lambda) \leq 1\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1(\Re)} \{\nu \in R_+^2 :\ (\nu, \lambda) \leq 1\}.$$

Так как для любых $\nu \in R^2_+$, $\lambda \in \Lambda_1(\Re)$, $(\nu, \lambda) \geq \nu_1 + \lambda^0_2 \nu_2$, то отсюда имеем, что

$$\Re = \left\{\nu \in R^2_+ :\ \nu_1 + \lambda^0_2 \nu_2 \leq 1\right\}, \tag{2.5}$$

и, следовательно, $card\Lambda(\Re) = 1$.

Утверждение пункта 1) в случае III) доказывается аналогично случаю II), и в этом случае

$$\Re = \left\{\nu \in R^2_+ :\ \lambda^0_1 \nu_1 + \nu_2 \leq 1\right\}. \tag{2.6}$$

В случае I) из представления (2.4) следует, что $\chi_1(\Re) = \chi_2(\Re) = 1$, и, следовательно, утверждении пунктов II) и III) верны в этом случае.

В случае II) из представления (2.5) и в случае III) из представления (2.6) имеем соответственно, что $\chi_1(\Re) = 1$, $\chi_2(\Re) = 1/\lambda^0_2$ и $\chi_2(\Re) = 1$, $\chi_1(\Re) = 1/\lambda^0_1$. Откуда непосредственно следуют утверждения пунктов 2) и 3) в этих случаях. Предложение 2.3 доказано. □

Для многоугольника $\Re \in B(2)$ обозначим

$$B(\Re, 2) := \{\mathfrak{M} \in B(2) :\ \rho_0(\mathfrak{M}) = \rho_0(\Re),\ \chi_j(\mathfrak{M}) = \chi_j(\Re),\ j = 1, 2\},$$

$$E_1(\Re) := \left\{\delta :\ f_{\Re}(\delta) := \max\left\{\nu_1 + \delta\nu_2 \leq \chi_1(\Re),\ \nu \in \Re^0\right\}\right\},$$

$$E_2(\Re) := \left\{\delta :\ g_{\Re}(\delta) := \max\left\{\delta\nu_1 + \nu_2 \leq \chi_2(\Re),\ \nu \in \Re^0\right\}\right\},$$

$$\tilde{\chi}_j(\Re) := \sup\{\delta :\ \delta \in E_j(\Re)\},\ j = 1, 2.$$

В работе [6] доказано, что $\rho_0(\Re) \geq \tilde{\chi}_j(\Re) \geq \chi_j(\Re)$, $j = 1, 2$. Из определений чисел $\tilde{\chi}_j(\Re)$, $j = 1, 2$, так как $\Re$ является х. м. набора $\Re^0$ (см. [7] или [8]), имеем

$$\Re \subset \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \leq \rho_0(\Re), \nu_1 + \tilde{\chi}_1(\Re)\nu_2 \leq \chi_1(\Re), \tilde{\chi}_2(\Re)\nu_1 + \nu_2 \leq \chi_2(\Re)\right\}. \tag{2.7}$$

Предложение 2.4. *Для любого* $\Re \in B(2)$

1) $(1/\tilde{\chi}_1(\Re), 1) \in \Lambda(\Re)$,

2) $(1, 1/\tilde{\chi}_2(\Re)) \in \Lambda(\Re)$.

Доказательство. Сначала покажем, что для некоторого $\nu^0 \in \Re^0$, $\nu^0 \neq (\chi_1(\Re), 0)$ $\nu^0_1 + \tilde{\chi}_1(\Re)\nu^0_2 = \chi_1(\Re)$.

Предположим обратное, что для любого $\nu \in \Re^0$, $\nu \neq (\chi_1(\Re), 0)$ $\nu_1 + \tilde{\chi}_1(\Re)\nu_2 \neq \chi_1(\Re)$. Отсюда в силу вложения (2.7) имеем, что для любого $\nu \in \Re^0$, $\nu \neq (\chi_1(\Re), 0)$ $\nu_1 + \tilde{\chi}_1(\Re)\nu_2 < \chi_1(\Re)$. Тогда существует число $t_0 > \tilde{\chi}_1(\Re)$ такое, что $f_{\Re}(t_0) \leq \chi_1(\Re)$. Это противоречит определению числа $\tilde{\chi}_1(\Re)$ и доказывает, что для некоторого $\nu^0 \in \Re^0$, $\nu^0 \neq (\chi_1(\Re), 0)$ $\nu^0_1 + \tilde{\chi}_1(\Re)\nu^0_2 = \chi_1(\Re)$. Так как $(\chi_1(\Re), 0) \in \Re^0$, то в силу выпуклости $\Re$ отрезок Γ, соединяющий точки

$(\chi_1(\Re), 0)$ и ν^0, принадлежит $\Re$. Отсюда в силу вложения (2.7) имеем, что Γ принадлежит одномерной некоординатной грани $\Re$, и поэтому вектор $(1, \tilde\chi_1(\Re))$ является (внешней относительно $\Re$) нормалью этой грани.

Следовательно, $(1/\tilde\chi_1(\Re), 1) \in \Lambda(\Re)$, так как $\tilde\chi_1(\Re) \le 1$. Так как утверждение пункта 2) доказывается аналогично утверждению пункта 1), то этим предложение 2.4 доказано. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть для* $\Re \in B(2)$ $\rho_0(\Re) < 1$. *Тогда*

$$\mathfrak{M}(\Re) = \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \le \rho_0(\Re), \nu_1/\chi_1(\Re) + \nu_2 \le 1, \nu_1 + \nu_2/\chi_2(\Re) \le 1\right\} \in B(\Re, 2)$$

и для любого $\Re_1 \in B(\Re, 2)$ $\Re_1 \subset \mathfrak{M}(\Re)$, *то есть среди многоугольников из* $B(\Re, 2)$ $(\Re \in B(2))$ *существует максимальный.*

Доказательство. Так как для любого $\Re \in B(2)$ при условии теоремы $\chi_j(\Re) \le \rho_0(\Re) \le 1$, $j = 1, 2$, то из определения $\mathfrak{M}(\Re)$ следует, что $(\chi_1(\Re), 0)$, $(0, \chi_2(\Re)) \in \in \mathfrak{M}^0(\Re)$. Следовательно, для доказательства $\mathfrak{M}(\Re) \in B(\Re, 2)$ остается показать, что существует $\nu^0 \in \mathfrak{M}(\Re)$, для которого $|\nu^0| = \rho_0(\Re)$. Из определения чисел $\rho_0(\Re)$, $\chi_j(\Re)$, $j = 1, 2$, и вложения (2.7), так как $\tilde\chi_j(\Re) \ge \chi_j(\Re)$, $j = 1, 2$, следует, что существует точка $\nu^1 \in \Re$, $|\nu^1| = \rho_0(\Re)$, для которой $\nu^1_1 + \chi_1(\Re)\nu^1_2 \le \chi_1(\Re)$, $\chi_2(\Re)\nu^1_1 + \nu^1_2 \le \chi_2(\Re)$. Отсюда простыми вычислениями получаем

$$\frac{\rho_0(\Re) - \chi_2(\Re)}{1 - \chi_2(\Re)} \le \nu^1_1 \le \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)}, \quad \nu^1_2 = \rho_0(\Re) - \nu^1_1.$$

Это означает, что при условиях теоремы числа $\rho_0(\Re)$, $\chi_j(\Re)$, $j = 1, 2$, должны удовлетворять следующим соотношениям

$$0 \le \frac{\rho_0(\Re) - \chi_2(\Re)}{1 - \chi_2(\Re)} \le \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)}. \tag{2.8}$$

Покажем, что точка

$$\nu^0 := \left(\frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)}, \rho_0(\Re) - \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)}\right)$$

принадлежит $\mathfrak{M}(\Re)$. Так как $|\nu^0| = \rho_0(\Re)$,

$$\nu^0_1 + \chi_1(\Re)\nu^0_2 = \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)} + \chi_1(\Re)\left|\rho_0(\Re) - \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)}\right| = \chi_1(\Re)$$

и в силу неравенства (2.8)

$$\nu^0_2 + \chi_2(\Re)\nu^0_1 = \chi_2(\Re)\frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)} + \rho_0(\Re) - \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)} =$$

$$= \rho_0(\Re) - (1 - \chi_2(\Re)) \frac{\chi_1(\Re)(1 - \rho_0(\Re))}{1 - \chi_1(\Re)} \leq$$

$$\leq \rho_0(\Re) - (1 - \chi_2(\Re)) \frac{\rho_0(\Re) - \chi_2(\Re)}{1 - \chi_2(\Re)} = \chi_2(\Re),$$

то в силу определения $\mathfrak{M}(\Re)$ $\nu^0 \in \mathfrak{M}(\Re)$. Этим утверждение $\mathfrak{M}(\Re) \in B(\Re, 2)$ доказано. Пусть $\Re_1 \in B(\Re, 2)$. Тогда в силу вложения (2.7) для многоугольника $\Re_1$ и, так как $\tilde{\chi}_j(\Re_1) \geq \chi_j(\Re_1)$, $j = 1, 2$, имеем, что

$$\Re_1 \subset \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \leq \rho_0(\Re),\ \nu_1 + \tilde{\chi}_1(\Re_1)\nu_2 \leq \chi_1(\Re_1),\ \tilde{\chi}_2(\Re_1)\nu_1 + \nu_2 \leq \chi_2(\Re_1)\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \leq \rho_0(\Re_1),\ \nu_1 + \chi_1(\Re_1)\nu_2 \leq \chi_1(\Re_1),\ \chi_2(\Re_1)\nu_1 + \nu_2 \leq \chi_2(\Re_1)\right\}.$$

Отсюда и из определения множества $B(\Re, 2)$ имеем, что

$$\Re_1 \subset \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \leq \rho_0(\Re),\ \nu_1 + \chi_1(\Re_1)\nu_2 \leq \chi_1(\Re_1),\ \chi_2(\Re_1)\nu_1 + \nu_2 \leq \chi_2(\Re_1)\right\} =$$

$$= \left\{\nu \in R^2_+ : |\nu| \leq \rho_0(\Re),\ \nu_1/\chi_1(\Re) + \nu_2 \leq 1,\ \nu_1 + \nu_2/\chi_2(\Re) \leq 1\right\} = \mathfrak{M}(\Re).$$

Теорема 2.3 доказана. □

Следствие 2.1. *Пусть $\Re \in B(2)$ и $\rho_0(\Re) < 1$. Однородный многочлен P_{m_0} порядка m_0 $h_\Re$ сильнее многочлена Q тогда и только тогда, когда $Q \prec^{h_{\mathfrak{M}(\Re)}} P_{m_0}$, где $\mathfrak{M}(\Re)$ определено в теореме 2.3.*

Доказательство. непосредственно следует из теорем 2.2, 2.3 и предложения 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть $\theta \geq 1$ и $\Re = \left\{\nu \in R^2_+ : \nu_1 + \theta\nu_2 \leq 1\right\}$. Однородный многочлен P_{m_0} порядка m_0 $h_\Re$ сильнее однородного многочлена P_{m_1} порядка m_1 тогда и только тогда, когда*

1) $m_0 \geq m_1$,

2) $m_0 - \ell_0(\tau)(1 - 1/\theta) \geq m_1 - \ell_1(\tau)(1 - 1/\theta)$, при $\tau = \pm(0, 1) \in \sum(P_{m_0})$, где $\ell_j(\tau)$ порядок нуля многочлена P_{m_j}, $j = 0, 1$, в точке τ.

Доказательство. Необходимость доказывается аналогично необходимой части теоремы 2.2. Докажем достаточность. Предположим обратное, что при условиях теоремы существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^2$, $\|\xi^s\| \to \infty$ при $s \to \infty$, для которой

$$\tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_\Re(\xi^s)) / \tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_\Re(\xi^s)) \to \infty \text{ при } s \to \infty. \tag{2.9}$$

Так как $m_0 \geq m_1$, то в силу леммы 3 работы [6], не умаляя общности можно считать, что последовательность $\{\tau^s := \xi^s / \|\xi^s\|\}_{s=1}^{\infty}$ имеет предел, и этот предел принадлежит множеству $\sum(P_{m_0})$. Пусть $\tau^s \to \tau \in \sum(P_{m_0})$ при $s \to \infty$.

Покажем, что $\tau_1 = 0$ (то есть $\tau = = \pm(0,1)$). Пусть наоборот $\tau_1 \neq 0$. Тогда с некоторой постоянной $C_1 \geq 1$ при достаточно больших s

$$C_1^{-1}\|\xi^s\| \leq |\xi_1^s| \leq C_1\|\xi^s\| \quad \text{и} \quad |\xi_2^s| \leq C_1\|\xi^s\|. \tag{2.10}$$

Отсюда и из определения функции $h_{\Re}$ с некоторой постоянной $C_2 \geq 1$ при достаточно больших s имеем

$$C_2^{-1}|\xi_1^s| \leq h_{\Re}(\xi^s) \leq C_2|\xi_1^s|. \tag{2.11}$$

Так как с некоторыми постоянными $C_j > 0$, $j = \overline{3,6}$, в силу оценок (2.10) и (2.11) при достаточно больших s

$$\tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s)) = \sqrt{\sum_{\alpha}\left|P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)\right|^2 h_{\Re}^{2|\alpha|}(\xi^s)} \leq$$

$$\leq C_3\sum_{|\alpha|\leq m_1}(1+\|\xi^s\|)^{m_1-|\alpha|}(1+|\xi_1^s|)^{|\alpha|} \leq C_4(1+\|\xi^s\|)^{m_1},$$

$$\tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s)) \geq C_5 h_{\Re}^{m_0}(\xi^s) \geq C_6(1+\|\xi^s\|)^{m_0},$$

то эти оценки противоречат соотношению (2.9).

Полученное противоречие доказывает, что $\tau_1 = 0$. Теперь, проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 2.2 в случае $\tau \in \sum(P_{m_0})$, получим, что при условиях 1) и 2) теоремы соотношение (2.9) невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. □

Следствие 2.2. *Пусть $\theta \geq 1$, $\Re = \left\{\nu \in R_+^2 : \nu_1 + \theta\nu_2 \leq 1\right\}$, P_{m_0} - однородный многочлен порядка m_0. Многочлен Q, представленный в виде (1.2), $h_{\Re}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда*

1) $m_0 \geq m$,

2) $m_0 - \ell(\tau)(1-1/\theta) \geq \max\{k - \ell_j(\tau)(1-1/\theta),\ j = 0,\dots,m\}$, при $\tau = \pm(0,1) \in \in \sum(P_{m_0})$, где m - порядок многочлена Q, $\ell(\tau)$ $(\ell_j(\tau))$ порядок нуля многочлена P_{m_0} $(Q_j, j = 0,\dots,m)$ в точке τ.

Доказательство. следует из теоремы 2.4 в силу леммы 5 работы [6]. □

Abstract. Necessary and sufficient conditions for comparison with a weight of two-dimensional polynomials are obtained.

Список литературы

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. 2, Springer (1983).
[2] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О решениях задачи Коши h - гиперболических уравнений", Принята в печать Изв. НАН Армении, серия Математика.
[3] L. Hormander, "On interior regularity of solutions of partial differential equations", Comm. Pure. Appl. Math., **11**, 197 – 218 (1956).
[4] V. N. Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", Izv. Nat. Acad. Armenii, Math., **31**, no. 2, 33 – 47 (2002).
[5] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О гиперболических многочленах с весом", Изв. НАН Армении, серия Математика, **49**, но. 5, 23 – 39 (2014).
[6] В. Н. Маргарян, "Сравнение двумерных многочленов", Изв. НАН Армении, серия Математика, **51**, но. 1, 38 – 53 (2016).
[7] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **150**, no. 4, 143 – 159 (1965).
[8] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).

Поступила 20 мая 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 42-53.

SIMULATION OF A RANDOM FUZZY QUEUING SYSTEM WITH MULTIPLE SERVERS

BEHROUZ FATHI-VAJARGAH AND SARA GHASEMALIPOUR

University of Guilan, Iran
E-mails: *fathi@guilan.ac.ir* *s.ghasemalipour@gmail.com*

Abstract. The paper considers a queuing system that has k servers and its interarrival times and service times are random fuzzy variables. We obtain a new theorem concerning the average chance of the event "r servers ($r \leq k$) are busy at time t", provided that all the servers work independently. We simulate the average chance using fuzzy simulation method and obtain some results on the number of servers that are busy. Some examples to illustrate the simulation procedure are also presented.

MSC2010 numbers: 60K05; 68U20; 65C10.

Keywords: Multi-server queuing system; busy time; fuzzy interarrival times; average chance.

1. Introduction

Queuing systems constitute a central tool in modeling and performance of telecommunication and computer systems. In the fuzzy case, it is assumed that the interarrival times and the service times are random fuzzy variables. Pardoa and Fuenteb [1] proposed the analysis, development and design of a fuzzy queuing model with a finite input source in which the arrival pattern as well as the service pattern follow an exponential distribution with an uncertain parameter. Wanga, Liub and Watada [2] studied a fuzzy random renewal process in which the interarrival times are assumed to be independent and identically distributed fuzzy random variables, and two case studies of queuing systems are provided to illustrate the application of the fuzzy random elementary renewal theorem. Wu [3] has proposed the fuzzy arrival rate and fuzzy service rate in a queuing system. The nonhomogeneous Poisson process with fuzzy intensity function is taken as the arrival process for this queuing system. Computational procedures for performing simulation in the α-level sense and for obtaining the α-level closed intervals of the system performance measure are also proposed to tackle this kind of model. Chen [4] has proposed a procedure for constructing the membership functions of the performance measures in finite-capacity queuing systems with the arrival rate and service rate being fuzzy numbers. Kreimer [5] studied a real-time multi-server system with homogeneous servers (such as unmanned air vehicles or machine controllers) and several nonidentical channels (such as surveillance regions or assembly lines), working under maximum load regime. Zhao, Li and Huang [6] developed a queue-based interval-fuzzy electric-power system (QIF-ESP) model through coupling fuzzy queue (FQ) theory with interval-parameter programming (IPP). Yang and Chang [7] investigated the F-policy queue using fuzzy parameters, in which the arrival rate, the service rate, and the start-up rate are all fuzzy numbers. The F-policy deals with the control of arrivals in a queuing system, in which the server requires a start-up time before allowing customers to enter.

In this paper, we simulate the average chance of the event "all the k servers are busy at time t"and the queuing system has k servers. In other words, we estimate the average chance of the event "r servers ($r \leq k$) are busy at time t when all the servers work independently and the interarrival times and the service times are random fuzzy variables. We obtain some results about the relationship between the number of servers and busy times and idle times.

The paper is structured as follows. In Section 2, we discuss the concepts and essential properties of fuzzy set theory, fuzzy variables, random fuzzy variables, the average chance, etc. In Section 3, we illustrate the random fuzzy queuing system with multiple servers and estimate the average chance of the event "r servers ($r \leq k$) are busy at time t". In Section 4, we consider the fuzzy simulation method. In Section 5 we provide some numerical examples.

2. Definitions and Preliminaries

Credibility theory, introduced by Liu (see [8]), is a branch of mathematics for studying the behavior of fuzzy phenomena. In this section, we introduce the basic notions of credibilty theory, such us credibility measure, credibility space, fuzzy variable, membership function, credibility distribution, expected value, random fuzzy variable and its expected value, independence and identical distribution.

Let Θ be a nonempty set, and P be the power set of Θ, that is, the largest σ-algebra over Θ. Each element of P is called an *event*. In order to give an axiomatic definition of credibility, it is necessary to assign to each event A a number $Cr\{A\}$ which indicates the credibility that A will occur.

Definition 2.1. *(Liu and Liu [9]). A set function Cr defined on Θ is called a credibility measure if it satisfies the following axioms:*
Axiom 1. *(*Normality*): $Cr\{\Theta\} = 1$.*
Axiom 2. *(*Monotonicity*): $Cr\{A\} \leq Cr\{B\}$ for $A \subset B$.*
Axiom 3. *(*Self-Duality*): $Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = 1$ for any event A.*
Axiom 4. *(*Maximality*): $C\{\cup_i A_i\} = \sup_i Cr\{A_i\}$ for any events $\{A_i\}$ with $\sup_i Cr\{A_i\} < 0.5$.*

Then the triplet (Θ, P, Cr) is called a credibility space. The product credibility measure can be defined in multiple ways. We accept the following axiom.

Axiom 5 *(*Product Credibility Axiom*). Let Θ_k be nonempty sets on which Cr_k are credibility measures for $k = 1, 2, \ldots, n$, respectively, and let $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_n$. Then*

$$Cr\{(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)\} = Cr_1\{\theta_1\} \wedge Cr_2\{\theta_2\} \wedge \ldots \wedge Cr_n\{\theta_n\} \tag{2.1}$$

for each $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Theta$.

Let (θ_k, P_k, Cr_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, be credibility spaces, $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_n$ and $Cr = Cr_1 \wedge Cr_2 \wedge \ldots \wedge Cr_n$. Then the triplet (Θ, P, Cr) is called the product credibility space of (θ_k, P_k, Cr_k), $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definition 2.2. *A fuzzy variable is defined to be any real-valued measurable function defined on a credibility space (Θ, P, Cr).*

Definition 2.3. *Let ξ be a fuzzy variable defined on the credibility space (Θ, P, Cr). Then the membership function μ of ξ is defined by*

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1, \; x \in \Re. \tag{2.2}$$

Definition 2.4. *Let ξ be a fuzzy variable defined on the credibility space $(\Theta, P(\Theta), Cr)$ and let $\alpha \in (0, 1]$. Then*

$$\xi'_\alpha = \inf\{r | \mu_\xi(r) \geq \alpha\}, \quad \xi''_\alpha = \sup\{r | \mu_\xi(r) \geq \alpha\} \tag{2.3}$$

are called α-pessimistic value and α-optimistic value of ξ, respectively.

Definition 2.5. *Let ξ be a fuzzy variable defined on the credibility space $(\Theta, P(\Theta), Cr)$. Then the expected value of ξ is defined by*

$$E[\xi] = \int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr, \tag{2.4}$$

provided that at least one of the two integrals in (2.4) is finite (see [10]).

Proposition 2.1. *Let ξ be a fuzzy variable defined on the credibility space $(\Theta, P(\Theta), Cr)$. Then we have*

$$E[\xi] = \frac{1}{2}\int_0^1 [\xi'_\alpha + \xi''_\alpha]d\alpha. \tag{2.5}$$

Proof. Let ξ be normalized, that is, there exists a real number r_0 such that $\mu_\xi(r_0) = 1$. If $r_0 > 0$, then in view of (2.1), we have

$$E[\xi] = \frac{1}{2}[r_0 + \int_{r_0}^{+\infty} Cr(\xi \geq r)dr + r_0 - \int_{-\infty}^{r_0} Cr(\xi \leq r)dr] = \frac{1}{2}\int_0^1 (\xi'_\alpha + \xi''_\alpha)d\alpha,$$

implying (2.5). The case $r_0 \leq 0$ can be treated similarly. □

Definition 2.6. *The fuzzy variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ are called independent if*

$$Cr\{\cap_{i=1}^m \{\xi_i \in B_i\}\} = \min_{1\leq i\leq m} Cr\{\xi_i \in B_i\} \tag{2.6}$$

for any sets $B_1, B_2, \dots, B_m \in \Re$.

Definition 2.7. *A random fuzzy variable is defined to be any function from the credibility space (Θ, P, Cr) to the set of random variables.*

Definition 2.8. *The expected value of a random fuzzy variable ξ is defined by*

$$E[\xi] = \int_0^\infty Cr\{\theta \in \Theta | E[\xi(\theta)] \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\theta \in \Theta | E[\xi(\theta)] \leq r\}dr. \tag{2.7}$$

Proposition 2.2. *Let ξ be a random fuzzy variable defined on the credibility space (Θ, P, Cr). Then for any $\theta \in \Theta$ the expected value $E[\xi(\theta)]$ is a fuzzy variable, provided that $E[\xi(\theta)]$ is finite for a fixed $\theta \in \Theta$.*

Definition 2.9. *The random fuzzy variables ξ and η are said to be identically distributed if*

$$\sup_{Cr\{A\}\geq\alpha} \inf_{\theta\in A}\{Pr\{\xi(\theta) \in B\}\} = \sup_{Cr\{A\}\geq\alpha} \inf_{\theta\in A}\{Pr\{\eta(\theta) \in B\}\} \tag{2.8}$$

for any $\alpha \in (0, 1]$ and any Borel set B of real numbers.

Definition 2.10. *The random fuzzy variables $\xi_i, i = 1, \ldots, n$, are said to be independent if*

(1) $\xi_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, n$, are independent random variables for each $\theta \in \Theta$.

(2) $E[\xi_i(\cdot)]$, $i = 1, \ldots, n$, are independent fuzzy variables.

Definition 2.11. *Let ξ be a random fuzzy variable defined on the credibility space $(\Theta, P(\Theta), Cr)$. Then the average chance of the random fuzzy event $\xi \leq 0$ is defined as*

$$Ch\{\xi \leq 0\} = \int_0^1 Cr\{\theta \in \Theta | Pr\{\xi(\theta) \leq 0\} \geq p\} dp. \tag{2.9}$$

3. Random fuzzy queuing systems with k servers

In this section we study a model of queuing system with k servers, denoted by $RF/RF/k/FCFS/\infty/\infty$, where RF/RF means that the interarrival times and the service times are random fuzzy variables, $FCFS$ means that the queue discipline is "first come, first served and the size of source population is infinite. We assume that the interarrival times of customers arriving at the server are independent and identically distributed random fuzzy variables. $\xi_i \sim EXP(\lambda_i)$, where λ_i are fuzzy variables defined on the credibility space $(\Theta_i, P(\Theta_i), Cr_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, and the service times are independent and identically distributed random fuzzy variables, $\eta_i \sim EXP(\mu_i)$, where μ_i are fuzzy variables defined on the credibility space $(\Gamma_i, P(\Gamma_i), Cr'_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ and ξ_i and η_i are independent.

For the model $RF/RF/k/FCFS/\infty/\infty$ we describe the limit (as $t \to \infty$) of the average chance of the event "the random fuzzy queuing system is busy at time t when the queuing system has k servers. The case of different number of servers is also discussed. Notice that in the special case where the model involves only one server ($k = 1$). this problem has been considered in [11].

Define $P(t) = Pr\{all\ of\ k\ servers\ are\ busy\ at\ time\ t\}$, and $P_i(t) = Pr\{the\ ith\ server\ is\ busy\ at\ time\ t\}$, and observe that $P(t)$ and $P_i(t)$ are fuzzy variables, P'_{α_0} and P''_{α_0} are the α_0-pessimistic values and the α_0-optimistic values of $P(t)$, respectively, and $E[\frac{\lambda}{\mu}] < 1$.

Lemma 3.1. *([11]). Assume that in a random fuzzy queuing system $RF/RF/k/FCFS/\infty/\infty$, the fuzzy variable λ has the same α_0-pessimistic values and the α_0-optimistic values λ_i, and the fuzzy variable μ has the same α_0-pessimistic values and the α_0-optimistic values μ_i, and are continuous at the point $\alpha_0 \in [0, 1]$. Also, let the k servers work* *independently, then we have*

$$\lim_{t\to\infty} P'_{i\alpha}(t) = \frac{\lambda'_\alpha}{\mu''_\alpha} \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} P''_{i\alpha}(t) = \frac{\lambda''_\alpha}{\mu'_\alpha}. \tag{3.1}$$

Theorem 3.1. *Let in a random fuzzy queuing system $RF/RF/k/FCFS/\infty/\infty$, the distributions of $\xi_i(\theta)$ and $\eta_i(\gamma)$ be non-lattice, and let the fuzzy variables λ_i and μ_i, $i = 1, 2...$, be continuous at the point $\alpha \in (0, 1]$. Also, let the k servers work independently, then we have*

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{\textit{all of } k \textit{ servers are busy at time } t\} = (E[\frac{\lambda}{\mu}])^k. \tag{3.2}$$

Proof. From Definition 10 and Proposition 1, for ith server, $i = 1, 2, ..., k$, we have

$$Ch\{\textit{the ith server is busy at time } t\} = \int_0^1 Cr\{\theta \in \Theta | P_i(t)(\theta) \geq p\}dp$$

$$= \int_0^\infty Cr\{\theta \in \Theta | P_i(t)(\theta) \geq p\}dpE[P_i(t)] = \frac{1}{2}\int_0^1 (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))dp.$$

It follows from the definition of the limit that there exist two non-negative real numbers t_1 and t_2, such that for any $t \geq t_1$

$$0 \leq P'_{i\alpha}(t) \leq \frac{\lambda'_\alpha}{\mu''_\alpha}.$$

and for any $t \geq t_2$

$$0 \leq P''_{i\alpha}(t) \leq \frac{\lambda''_\alpha}{\mu'_\alpha}.$$

Therefore, for any $t \geq \max(t_1, t_2)$, we have

$$0 \leq P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t) \leq 2 + \frac{\lambda'_\alpha}{\mu''_\alpha} + \frac{\lambda''_\alpha}{\mu'_\alpha}.$$

Since $E[\frac{\lambda}{\mu}]$ is finite, $2 + \frac{\lambda'_\alpha}{\mu''_\alpha} + \frac{\lambda''_\alpha}{\mu'_\alpha}$ is an integrable function of α. Hence, we can apply Fatou's lemma, to conclude that

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^1 (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))d\alpha \geq \int_0^1 \liminf_{t\to\infty} (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))d\alpha,$$

and

$$\limsup_{t\to\infty} \int_0^1 (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))d\alpha \leq \int_0^1 \limsup_{t\to\infty} (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))d\alpha.$$

Next, since $\lambda'_\alpha, \lambda''_\alpha, \mu'_\alpha, \mu''_\alpha$ are almost surely continuous at the point α, by Lemma 1 we have

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{\textit{the ith server is busy at time } t\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int_0^1 (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))dp = \frac{1}{2}\int_0^1 \lim_{t\to\infty} (P'_{i\alpha}(t) + P''_{i\alpha}(t))dp$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\lambda'_\alpha}{\mu''_\alpha} + \frac{\lambda''_\alpha}{\mu'_\alpha}\right)d\alpha = E[\frac{\lambda}{\mu}].$$

Now, for k servers that work independently and are identically distributed, we have

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{all\ of\ k\ servers\ are\ busy\ at\ time\ t\}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} E[\frac{\lambda}{\mu}] = (E[\frac{\lambda}{\mu}])^k,$$

and the result follows. Theorem 1 is proved. □

Remark 3.1. *If X is the number of servers that are busy at time t, then X is a random variable with binomial distribution, that is, $X \sim B(k, Ch)$, where k is the number of servers and Ch is the average chance of the servers that are busy at time t. So, the average chance of the r servers ($r \leq k$) that are busy at time t is given by*

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{r\ servers\ are\ busy\ at\ time\ t\} = \binom{k}{r}(E[\frac{\lambda}{\mu}])^r(1 - E[\frac{\lambda}{\mu}])^{k-r}, \tag{3.3}$$

for $r = 0, 1, 2, ..., k$. Also, we have

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{at\ least\ r\ servers\ are\ busy\ at\ time\ t\} = \sum_{i=r}^{k}\binom{k}{i}(E[\frac{\lambda}{\mu}])^i(1 - E[\frac{\lambda}{\mu}])^{k-i}, \tag{3.4}$$

Therefore, the mean of the number of servers that are busy at time t is $kE[\frac{\lambda}{\mu}]$.

Then, the average chance of all of k servers are idle at time t is given by

$$\lim_{t\to\infty} Ch\{all\ of\ k\ servers\ are\ idle\ at\ time\ t\} = (1 - E[\frac{\lambda}{\mu}])^k. \tag{3.5}$$

4. The fuzzy simulation approach

Y.Liu and B.Liu [12] designed a fuzzy simulation procedure for both discrete and continuous cases.

(a) Discrete fuzzy vector: assume that f is a function, and $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ is a discrete fuzzy vector whose joint credibility distribution function is defined by

$$\mu_\xi(u) = \begin{cases} \mu_1, & u = u_1 \\ \mu_2, & u = u_2 \\ \cdots & \\ \mu_n, & u = u_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

where $\mu_u = \min_{1\leq i\leq m} \mu^{(i)}(u_i)$, $u = (u_1, ..., u_m) \in \Re^m$ and $\mu^{(i)}$ are the credibility distribution functions of ξ_i for $i = 1, 2, ..., m$.

Let $a_i = f(u_i)$. Without loss of generality, we can assume that $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Then the expected value is given by

$$E[f(\xi)] = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i, \tag{4.2}$$

where

$$p_i = 1/2[\vee_{j=i}^{n} \mu_j - \vee_{j=i+1}^{n+1} \mu_j] + 1/2[\vee_{j=1}^{i} \mu_j - \vee_{j=0}^{i-1} \mu_j], \tag{4.3}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$ and $\mu_0 = \mu_{n+1} = 0$.

(b) Continuous fuzzy vector: assume that ξ is a continuous fuzzy vector with a credibility distribution function μ. In this case, the expected value can be estimated by formula (16).

5. Experiential results

In this section, we present some practical applications of the model under study, to show how the fuzzy simulation method can be used to estimate the average chance.

Example 1. Consider an investment bank with k servers. Let the interarrival times of customers be fuzzy variables with exponential distributions with $\lambda = (1/2/3)$ in minutes, and let the service times be fuzzy variables with exponential distributions with $\mu = (3/4/5)$ in minutes for k servers. Calculate the average chance of the event "all of k servers are busy at time t".

We use Theorem 1 and the simulation method, described in Section 4, to estimate the expectation $E[\frac{\lambda}{\mu}]$. The corresponding simulation results are shown in Table 1 and Figure 1, which contain the average chance of the event "all of k servers are busy at time t"for the number of different servers. The algorithm for simulating follows.

The Algorithm

1. **Generate** the random numbers $e_1(i)$ in the interval (1,3), and the random numbers $e_2(i)$ in the interval (3,5), $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. **Set** $x_i = \frac{e_1(i)}{e_2(i)}$.
3. **Set** $\mu(i) = \min(\mu_1(i), \mu_2(i))$.

If x_i and x_j have the same values, remove x_j from the list of results, and set $\mu_i = \max(\mu_i, \mu_j)$.

4. **Apply** formulas (16) and (17).
5. **Calculate** E^k.

Table 1 and Figure 1 show that whenever the number of servers is bigger, the average chance of the event "all of k servers are busy at time t"is smaller, and it tends to zero as the number of servers increases. Notice that the results are obtained without using the α-cuts and we simulate the average chance. Also, the simulation procedure is stable in high repetitions and it is close to the true answer and it can not be invoked in few repetitions.

k	100	500	1000	10000	20000	30000
5	0.0318	0.0364	0.0398	0.0411	0.0414	0.0414
10	0.0012	0.0014	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018
15	3.9172e-005	4.2981e-005	6.1174e-005	6.4359e-005	6.7551e-005	6.7551e-005
20	3.9523e-007	1.8686e-006	2.3734e-006	2.9698e-006	3.0270e-006	3.0270e-006

Table 1: The results of simulation of average chance for Example 1.

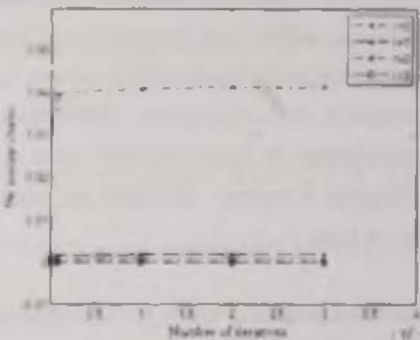

Figure 1: Convergence of the fuzzy simulation for Example 1.

Example 2. Let a bank have status customer. Also, let the interarrival times of costumers be fuzzy variables with exponential distribution with $\lambda = (2/3/4)$ in minutes, and the service times are fuzzy variables with exponential distribution with $\mu = (3/4/5)$ in minutes for any server. We want to calculate the average chance of the event "the number of different servers that are busy at time t".

We use Theorem 3.1, Remark 3.1 and the simulation method, described in Section 4, to estimate the average chance of the event "r servers ($r \leq k$) are busy at time t". The corresponding results of simulation are shown in Table 2 and in Figures 2-4. In Table 2, k is the number of iterations, r is the number of servers that are busy at time t, the "Error" rows contain the errors of the real solutions and simulated solutions, and the "Average Chance" rows contain the average chance of the event "the r servers out of 5 servers are busy at time t', $r = 0 - - 5$. Then we calculate the error of simulation. Similar to Example 1, from the results of Table 2 and Figure 2, we infer that whenever the number of iterations is getting bigger the simulation becomes closer to the real solution, and the fuzzy simulation procedure is stable in high repetitions. The Figures 3 and 4 show the error of simulation for different number of servers (out of 5 servers) that are busy at time t for $n = 10000, 20000$ and $n = 30000, 40000$, respectively. It is clear that the error of simulation tends to zero for $n > 40000$.

	n	500	1000	10000	20000	30000	40000
r=0	Average Chance	8.1376e-004	6.5993e-004	4.9841e-004	4.7863e-004	4.3809e-004	4.2924e-004
	Error	3.8453e-004	2.3069e-004	6.8879e-005	4.9386e-005	8.8500e-006	0.0000
r=1	Average Chance	0.0164	0.0109	0.0087	0.0085	0.0083	0.0080
	Error	0.0064	0.0029	6.8956e-004	4.9354e-004	2.9215e-004	0.0000
r=2	Average Chance	0.0723	0.0645	0.0617	0.0603	0.0593	0.0592
	Error	0.0131	0.0053	0.0025	0.0011	1.0000e-004	0.0000
r=3	Average Chance	0.2363	0.2334	0.2339	0.2211	0.2205	0.2200
	Error	0.0163	0.0134	0.0039	0.0011	5.0000e-004	0.0000
r=4	Average Chance	0.3981	0.4024	0.4079	0.4081	0.4085	0.4087
	Error	0.0106	0.0063	7.6731e-004	6.0000e-004	2.0000e-004	0.0000
r=5	Average Chance	0.2487	0.2684	0.2981	0.2996	0.3015	0.3036
	Error	0.0549	0.0352	0.0055	0.0040	0.0021	0.0000

Table 2: Results of the simulation of average chance for Example 2.

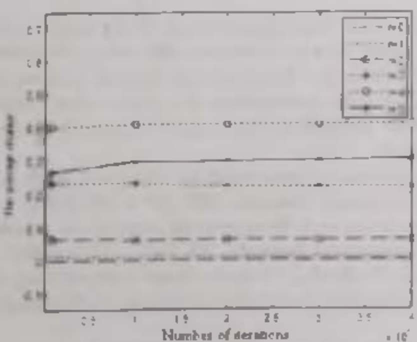

Figure 2: Convergence of the fuzzy simulation for Example 2.

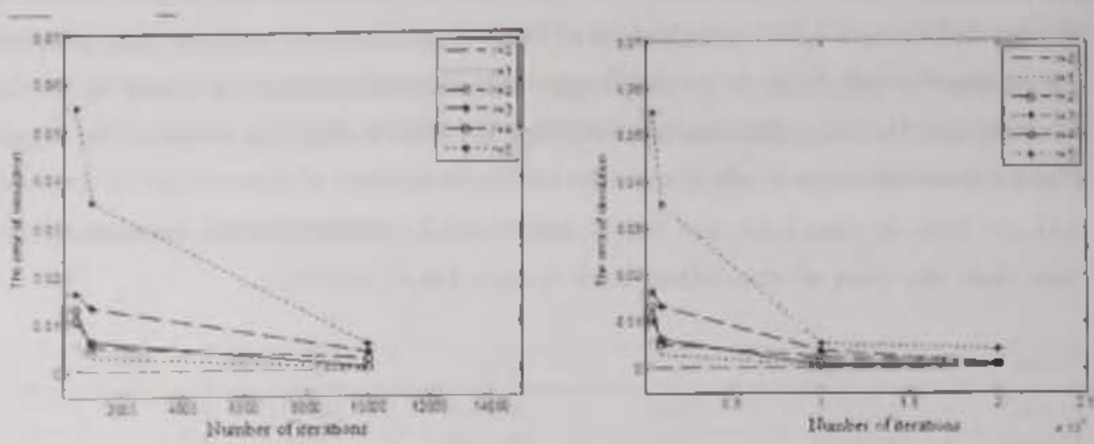

Figure 3: Convergence of fuzzy simulation for $n = 10000, 20000$ for Example 2.

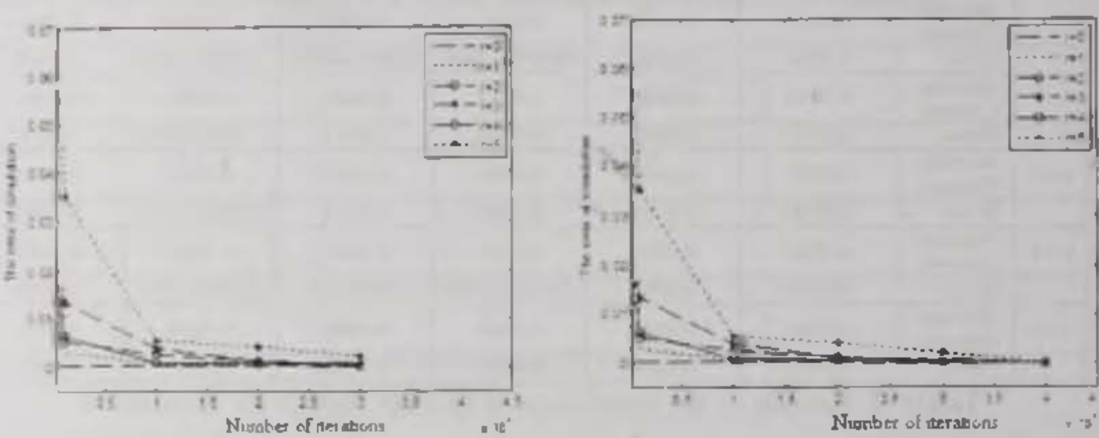

Figure 4: Convergence of fuzzy simulation for $n = 30000, 40000$ for Example 2.

Список литературы

[1] M. J. Pardoa and D. Fuentcb, "Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queuing system", Fuzzy Sets and Systems, **159**, 325 – 342 (2008).

[2] S. Wanga, Y. Liub and J. Watada, "Fuzzy random renewal process with queueing applications", Computers & Mathematics with Applications, **57**, 1232 – 1248 (2009).

[3] H. C. Wu, "Simulation for queuing systems under fuzziness", International journal of systems science, **40**, 587–600 (2009).

[4] S. Chen, "Parametric nonlinear programming for analyzing fuzzy queues with finite capacity", European Journal of Operational Research, **157**, 429 – 438 (2004).

[5] J. Kreimer, "Real-time system with homogeneous servers and nonidentical channels in steady-state", Computers and Operations Research, **29**, 1465 – 1473 (2002).

[6] F. Zhao, Y.P. Li and G. H. Huang, "A queue-based interval-fuzzy programming approach for electric-power systems planning", International Journal of Electrical Power & Energy Systems, **47**, 337 – 350 (2013).

[7] D. Y. Yang and P. K. Chang, "A parametric programming solution to the F-policy queue with fuzzy parameters", International journal of systems science, **44**, 1 – 9 (2013).

[8] B. Liu, Uncertainty Theory, Springer-Verlag, Berlin (2004).

[9] B. Liu, Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin (2007).
[10] B. Liu, "A survey of credibility theory, Fuzzy Optimization and Decision Making", 5, 387 – 408 (2006).
[11] Y. Ning, "Busy period of random fuzzy queuing system", Proceedings of the Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Hong Kong 19-22 August 2007.
[12] Y. K. Liu and B. D. Liu, "Expected value operator of random fuzzy variable and random fuzzy expected value models", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 11, 195 – 215 (2003).

Поступила 11 октября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 54-70.

ON THE CONVERGENCE OF FEJÉR MEANS OF WALSH-FOURIER SERIES IN THE SPACE H_p

G. TEPHNADZE

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
E-mail: giorgitephnadze@gmail.com

Abstract. The main aim of this paper is to find necessary and sufficient conditions for a modulus of continuity of a martingale $F \in H_p$, for which the Fejér means of Walsh-Fourier series converge in H_p-norm, when $0 < p \leq 1/2$.

MSC2010 numbers: 42C10.
Keywords: Walsh system; Fejer means; martingale Hardy space; modulus of continuity[1].

1. Introduction

Weisz [16] considered the norm convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series and proved that

$$\|\sigma_k F\|_{H_p} \leq c_p \|F\|_{H_p}, \quad F \in H_p, \ p > 1/2. \tag{1.1}$$

Goginava in [5] (see also [13]) proved that there exists a martingale $F \in H_p$ $(0 < p \leq 1/2)$ such that $\sup_{n\in N} \|\sigma_n F\|_p = +\infty$. Weisz [18] also considered Fejér means on the subsequence $\{2^n : n \geq 0\}$ and proved that

$$\|\sigma_{2^n} F\|_{H_p} \leq c_p \|F\|_{H_p}, \quad F \in H_p, \ p > 0. \tag{1.2}$$

In [14], the author proved that if $F \in H_p$ $(0 < p < 1/2)$ and

$$\omega_{H_p}(1/2^n, F) = o\left(1/2^{n(1/p-2)}\right) \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

then

$$\|\sigma_n F - F\|_p \to 0 \text{ as } n \to \infty. \tag{1.3}$$

Furthermore, it was shown that there exists a martingale $F \in H_p$ $(0 < p < 1/2)$, which $\omega_{H_p}(1/2^n, F) = O\left(1/2^{n(1/p-2)}\right)$ as $n \to \infty$, and (1.3) does not hold. In [14],

[1]The research was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grants no.52/54 and YS15-2.1.1-47 and by Swedish Institute scolarship for postdoctoral research.

the boundary case $p = 1/2$ also was considered, and it was proved that if $F \in H_{1/2}$ and

$$\omega_{H_{1/2}}\left(1/2^n, F\right) = o\left(1/n^2\right) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{1.4}$$

then $\|\sigma_n F - F\|_{1/2} \to 0$ as $n \to \infty$. Moreover, the condition (1.4) is sharp in the above mentioned sense.

More results on summability of Fejér means of Walsh-Fourier series can be found in [1, 4, 8, 10, 16].

The main aim of this paper is to generalize inequality (1.1) and find necessary and sufficient conditions on a sequence $\{n_k : k \geq 0\}$, for which

$$\|\sigma_{n_k} F - F\|_p \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty \quad (F \in H_p, \quad 0 < p \leq 1/2). \tag{1.5}$$

Also, we prove some estimates for the Fejér means and show their sharpness in the case where $0 < p \leq 1/2$ (Theorems 3.1 and 3.2). Then, by applying these estimates we find necessary and sufficient conditions for a modulus of continuity of a martingale $F \in H_p$, for which (1.5) holds when $0 < p \leq 1/2$ (Theorems 3.3 and 3.4).

2. Definitions and notation

Let $\mathbb{N}_+$ denote the set of naturals, and let $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. By Z_2 we denote the discrete cyclic group of order 2, that is, $Z_2 = \{0, 1\}$, where the group operation is the modulo 2 addition and every subset is open. The Haar measure on Z_2 is defined so that the measure of a singleton is $1/2$.

Define the group G as the complete direct product of the group Z_2 with the product of discrete topologies of Z_2. The elements of G are represented by sequences $x = (x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots)$, where $x_k = 0 \vee 1$. A base for the neighborhood of $x \in G$ can be given as follows:

$$I_0(x) := G, \quad I_n(x) := \{y \in G : y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

For $n \in \mathbb{N}$ denote $I_n := I_n(0)$, $\overline{I_n} := G \setminus I_n$ and $e_n := (0, \ldots, 0, x_n = 1, 0, \ldots) \in G$. It is easy to show that

$$\overline{I_M} = \bigcup_{i=0}^{M-1} I_i \backslash I_{i+1} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1}(e_k + e_l)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M(e_k)\right). \tag{2.1}$$

Observe that every $n \in \mathbb{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j$, where $n_j \in Z_2$, $j \in \mathbb{N}$ and only finite numbers of n_j differ from zero.

Let

$$[n]=\min\{j\in\mathbb{N},n_j\neq 0\}\quad\text{and}\quad |n|=\max\{j\in\mathbb{N},n_j\neq 0\},$$

that is, $2^{|n|}\leq n<2^{|n|+1}$. We set

$$d(n)=|n|-[n]\quad\text{for all}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Define the variation of $n\in\mathbb{N}$ with binary coefficients $(n_k,k\in\mathbb{N})$ by

$$V(n)=n_0+\sum_{k=1}^{\infty}|n_k-n_{k-1}|. \tag{2.2}$$

Every $n\in\mathbb{N}$ can also be represented as $n=\sum_{i=1}^{r}2^{n_i}$ with $n_1>n_2>...n_r\geq 0$. For such a representation of $n\in\mathbb{N}$, define the numbers $n^{(i)}=2^{n_{i+1}}+...+2^{n_r}, i=1,...,r$. The norms (or quasi-norms) of the spaces $L_p(G)$ and $L_{p,\infty}(G)$, $(0<p<\infty)$ are respectively defined by

$$\|f\|_p^p=\int_G|f|^p\,d\mu,\quad \|f\|_{L_{p,\infty}(G)}^p=\sup_{\lambda>0}\lambda^p\mu(f>\lambda)<+\infty.$$

The k-th Rademacher function is defined by $r_k(x)=(-1)^{x_k}$, $x\in G$, $k\in\mathbb{N}$. Now, define the Walsh system $w=(w_n:n\in\mathbb{N})$ on G as:

$$w_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}r_k^{n_k}(x)=r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1}n_kx_k},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Notice that the Walsh system is orthonormal and complete in $L_2(G)$ (see [11]).

For $f\in L_1(G)$, the Fourier coefficients, the partial sums of Fourier series, the Fejer means, and the Dirichlet and Fejer kernels can be defined in the usual manner as follows:

$$\widehat{f}(n)=\int_G fw_n d\mu,\ (n\in\mathbb{N}),\quad S_nf=\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)w_k,\quad n\in\mathbb{N}_+,\ S_0f:=0,$$

$$\sigma_nf=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_kf,\quad D_n=\sum_{k=0}^{n-1}w_k,\quad K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_k,\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

Recall that (see [11])

$$D_{2^n}(x)=\begin{cases}2^n, & \text{if } x\in I_n\\ 0, & \text{if } x\notin I_n.\end{cases} \tag{2.3}$$

Let $n=\sum_{i=1}^{r}2^{n_i}$, $n_1>n_2>...>n_r\geq 0$. Then we have (see [7] and [11])

$$nK_n=\sum_{A=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{A-1}w_{2^{n_j}}\right)\left(2^{n_A}K_{2^{n_A}}-n^{(A)}D_{2^{n_A}}\right). \tag{2.4}$$

The σ-algebra, generated by the intervals $\{I_n(x):x\in G\}$, will be denoted by ζ_n $(n\in\mathbb{N})$, and $F=(F_n,n\in\mathbb{N})$ will denote a martingale with respect to ζ_n $(n\in\mathbb{N})$

(for details see [17]). The maximal function of a martingale F is defined by $F^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} |F_n|$. In case $f \in L_1(G)$, the maximal function can also be defined by

$$f^*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int_{I_n(x)} f(u)\, d\mu(u) \right| \right).$$

For $0 < p < \infty$, the Hardy martingale space $H_p(G)$ consists of all martingales F, for which $\|F\|_{H_p} = \|F^*\|_p < \infty$. The best approximation of $f \in L_p(G)$ $(1 \le p \in \infty)$ by Walsh polynomials is defined as

$$E_n(f, L_p) = \inf_{\psi\in p_n} \|f - \psi\|_p,$$

where p_n is the set of all Walsh polynomials of order less than $n \in \mathbb{N}$.

The modulus of continuity of a function $f \in L_p(G)$ is defined by

$$\omega_p(1/2^n, f) = \sup_{h\in I_n} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p.$$

The modulus of continuity in the space $H_p(G)$ $(p > 0)$ is defined in the following way

$$\omega_{H_p}(1/2^n, f) = \|f - S_{2^n} f\|_{H_p}.$$

Since $\|f\|_{H_p} \sim \|f\|_p$ for $p > 1$, we have $\omega_{H_p}(1/2^n, f) \sim \|f - S_{2^n} f\|_p$, $p > 1$.

On the other hand, there is a strong connection between these definitions. Namely, we have

$$\omega_p(1/2^n, f)/2 \le \|f - S_{2^n} f\|_p \le \omega_p(1/2^n, f)$$
$$\|f - S_{2^n} f\|_p/2 \le E_{2^n}(f, L_p) \le \|f - S_{2^n} f\|_p.$$

A bounded measurable function a is said to be a p-atom, if there exists an interval I such that

$$\int_I a\, d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \quad \operatorname{supp}(a) \subset I.$$

It is easy to check that for every martingale $F = (F_n, n \in \mathbb{N})$ and every $k \in \mathbb{N}$ the limit

$$\widehat{F}(k) = \lim_{n\to\infty} \int_G F_n(x)\, w_k(x)\, d\mu(x)$$

exists, which is called the k-th Walsh-Fourier coefficients of F.

The Walsh-Fourier coefficients of a function $f \in L_1(G)$ are the same as those of the martingale $(S_{M_n}(f) : n \in \mathbb{N})$ obtained from f. For a martingale $F = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n - F_{n-1})$, the conjugate transforms are defined as $\widetilde{F^{(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t)(F_n - F_{n-1})$, where $t \in G$ is fixed. Note that $\widetilde{F^{(0)}} = F$, and (see [17])

$$(2.5) \qquad \left\|\widetilde{F^{(t)}}\right\|_{H_p} \approx \|F\|_{H_p}, \quad \|F\|_{H_p}^p \sim \int_G \left\|\widetilde{F^{(t)}}\right\|_p^p dt, \quad \widetilde{(\sigma_n F)}^{(t)} = \sigma_n \widetilde{F^{(t)}}.$$

3. Formulation of the main results

Theorem 3.1. *a) There exists an absolute constant c, such that*

$$\|\sigma_n F\|_{H_{1/2}} \leq cV^2(n)\|F\|_{H_{1/2}}, \quad F \in H_{1/2}.$$

b) Let $\{n_k : k \geq 0\}$ *be a subsequence of naturals, such that* $\sup_{k\in\mathbb{N}} V(n_k) = \infty$, *and let* $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ *be any nondecreasing, nonnegative function satisfying the conditions:* $\Phi(n) \uparrow \infty$ *and*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V^2(n_k)}{\Phi(n_k)} = \infty. \tag{3.1}$$

Then there exists a martingale $F \in H_{1/2}$, *such that*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{n_k} F}{\Phi(n_k)} \right\|_{1/2} = \infty.$$

Theorem 3.2. *a) Let* $0 < p < 1/2$. *Then there exists an absolute constant* c_p, *depending only on p, such that*

$$\|\sigma_n F\|_{H_p} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-2)}\|F\|_{H_p}, \quad F \in H_p.$$

b) Let $0 < p < 1/2$ *and* $\Phi(n)$ *be any nondecreasing function, such that*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} d(n_k) = \infty, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{d(n_k)(1/p-2)}}{\Phi(n_k)} = \infty. \tag{3.2}$$

Then there exists a martingale $F \in H_p$, *such that*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{n_k} F}{\Phi(n_k)} \right\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

Theorem 3.3. *a) Let* $F \in H_{1/2}$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} V(n_k) = \infty$ *and*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^{|n_k|}, F\right) = o\left(1/V^2(n_k)\right) \quad as \quad k \to \infty. \tag{3.3}$$

Then (1.5) holds for $p = 1/2$.

b) Let $\sup_{k\in\mathbb{N}} V(n_k) = \infty$. *Then there exists a martingale* $f \in H_{1/2}(G)$ *satisfying*

$$\omega_{H_{1/2}}\left(1/2^{|n_k|}, F\right) = O\left(1/V^2(n_k)\right) \quad as \quad k \to \infty \tag{3.4}$$

and

$$\|\sigma_{n_k} F - F\|_{1/2} \not\longrightarrow 0 \quad as \quad k \to \infty. \tag{3.5}$$

Theorem 3.4. *a) Let* $0 < p < 1/2$, $F \in H_p$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(n_k) = \infty$ *and*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^{|n_k|}, F\right) = o\left(1/2^{d(n_k)(1/p-2)}\right) \quad as \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

Then (1.5) holds.

b) Let $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(n_k) = \infty$*. Then there exists a martingale* $F \in H_p(G)$ $(0 < p < 1/2)$ *satisfying*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^{|n_k|}, F\right) = O\left(1/2^{d(n_k)(1/p-2)}\right) \quad \text{as } k \to \infty \tag{3.7}$$

and

$$\left\|\sigma_{n_k} F - F\right\|_{L_{p,\infty}} \not\longrightarrow 0 \quad \text{as } k \to \infty. \tag{3.8}$$

4. AUXILIARY PROPOSITIONS

Lemma 4.1 (Weisz [18], see also Simon [12]). *A martingale* $F = (F_n,\ n \in \mathbb{N})$ *is in* H_p $(0 < p \le 1)$ *if and only if there exist a sequence* $(a_k, k \in \mathbb{N})$ *of p-atoms and a sequence* $(\mu_k, k \in \mathbb{N})$ *of a real numbers, such that for every* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n} a_k = F_n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty. \tag{4.1}$$

Moreover, $\|F\|_{H_p} \backsim \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p\right)^{1/p}$*, where the infimum is taken over all decompositions of* F *of the form (4.1).*

Lemma 4.2 (Weisz [17]). *Suppose that an operator* T *is* σ*-linear and*

$$\int\limits_{\overline{I}} |Ta|^p \, d\mu \le c_p < \infty, \quad (0 < p \le 1)$$

for every p-atom a*, where* I *denotes the support of the atom* a*. If* T *is bounded from* L_∞ *to* L_∞*, then* $\|TF\|_p \le c_p \|F\|_{H_p}$.

Lemma 4.3 (see [7], [11]). *Let* $t, n \in \mathbb{N}$*. Then*

$$K_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{if } \ x \in I_n(e_t),\ n > t,\ x \in I_t \backslash I_{t+1}, \\ (2^n+1)/2, & \text{if } \ x \in I_n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 4.4 (Tephnadze [15]). *Let* $n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{m_i} 2^k$*, where* $m_1 \ge l_1 > l_1 - 2 \ge m_2 \ge l_2 > l_2 - 2 > \ldots > m_s \ge l_s \ge 0$*. Then*

$$n\left|K_n(x)\right| \ge 2^{2l_s - 4} \quad \text{for} \quad x \in E_{l_s} := I_{l_s+1}\left(e_{l_s-1} + e_{l_s}\right),$$

where $I_1(e_{-1} + e_0) = I_2(e_0 + e_1)$.

Lemma 4.5 (Goginava [6]). *Let* $x \in I_M^{k,l}$*,* $k = 0, \ldots, M-1$*,* $l = k+1, \ldots, M$*. Then*

$$\int_{I_M} \left|K_n(x+t)\right| d\mu(t) \le c2^{k+l-2M} \quad \text{for } n \ge 2^M.$$

Lemma 4.6. *Let $n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=l_i}^{m_i}2^k$, where $m_1\geq l_1>l_1-2\geq m_2\geq l_2>l_2-2>\ldots>m_s\geq l_s\geq 0$. Then*

$$|nK_n|\leq c\sum_{A=1}^{r}\left(2^{l_A}\left|K_{2^{l_A}}\right|+2^{m_A}\left|K_{2^{m_A}}\right|+2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{m_A}D_{2^k}\right)+cV(n).$$

Proof. Let $n=\sum_{i=1}^{r}2^{n_i}$, $n_1>n_2>\ldots>n_r\geq 0$. Using (2.4) we get

$$nK_n=\sum_{A=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{A-1}w_{2^{n_j}}\right)\left(\left(2^{n_A}K_{2^{n_A}}+\left(2^{n_A}-1\right)D_{2^{n_A}}\right)\right)$$

$$-\sum_{A=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{A-1}w_{2^{n_j}}\right)\left(2^{n_A}-1-n^{(A)}\right)D_{2^{n_A}}=I_1-I_2$$

For I_1 we have

$$I_1==\sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v-1}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{m_v}\left(\prod_{j=k+1}^{m_v}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}-\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)\right)$$

$$-\sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{l_v-1}\left(\prod_{j=k+1}^{l_v-1}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}-\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right)\right).$$

Hence, taking into account that $2^n-1=\sum_{k=0}^{n-1}2^k$ and

$$\left(2^n-1\right)K_{2^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}-\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right),$$

we obtain

$$I_1=\sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v-1}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(2^{m_v+1}-1\right)K_{2^{m_v+1}-1}-\sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(2^{l_v}-1\right)K_{2^{l_v}-1}.$$

Using $|K_{2^n}|\leq c|K_{2^{n-1}}|$ and $|K_{2^n-1}|\leq c|K_{2^n}|+c$, we get

$$|I_1|\leq c\sum_{v=1}^{r}\left(2^{l_v}\left|K_{2^{l_v}}\right|+2^{m_v}\left|K_{2^{m_v}}\right|+cr\right). \tag{4.2}$$

Let $l_j<n_A\leq m_j$ for some $j=1,\ldots,s$. Then $n^{(A)}\geq\sum_{v=l_j}^{n_A-1}2^v\geq 2^{n_A}-2^{l_j}$ and $2^{n_A}-1-n^{(A)}\leq 2^{l_j}$. If $l_j=n_A$ for some $j=1,\ldots,s$. Then $n^{(A)}\leq 2^{m_{j-1}+1}<2^{l_j}$. Hence for I_2 we have

$$|I_2|\leq c\sum_{v=1}^{r}2^{l_v}\sum_{k=l_v}^{m_v}D_{2^k}. \tag{4.3}$$

Combining (4.2) and (4.3) we complete the proof of Lemma 4.6. □

5. Proofs of the main results

Proof of Theorem 3.1. We first prove assertion a). Suppose that

$$\left\| \frac{\sigma_n F}{V^2(n)} \right\|_{1/2} \le c \|F\|_{H_{1/2}}. \tag{5.1}$$

Then by combining (2.5) and (5.1) we obtain

$$\left\| \frac{\sigma_n F}{V^2(n)} \right\|_{H_{1/2}} \sim \int_G \left\| \frac{\widetilde{(\sigma_n F)^{(t)}}}{V^2(n)} \right\|_{1/2} d\mu(t) \tag{5.2}$$

$$= \int_G \left\| \frac{\sigma_n \widetilde{F^{(t)}}}{V^2(n)} \right\|_{1/2} d\mu(t) \le c \int_G \left\| \widetilde{F^{(t)}} \right\|_{H_{1/2}} d\mu(t)$$

$$\le c \int_G \|F\|_{H_{1/2}} d\mu(t) = c \|F\|_{H_{1/2}}.$$

Thus, in view of Lemma 4.2 and (5.2), the proof of assertion a) of the theorem will be complete, if we show that

$$\int_{\overline{I_M}} \left(\frac{|\sigma_n a(x)|}{V^2(n)} \right)^{1/2} d\mu(x) \le c < \infty,$$

for every 1/2-atom a. We can assume that a is an arbitrary 1/2-atom, with support I, $\mu(I) = 2^{-M}$ and $I = I_M$. It is easy to see that $\sigma_n(a) = 0$, when $n \le 2^M$. Therefore, we can assume that $n > 2^M$.

We set

$$II^1_{\alpha_A}(x) = 2^M \int_{I_M} 2^{\alpha_A} |K_{2^{\alpha_A}}(x+t)| \, d\mu(t),$$

$$II^2_{l_A}(x) = 2^M \int_{I_M} 2^{l_A} \sum_{k=l_A}^{m_A} D_{2^k}(x+t) \, d\mu(t).$$

Let $x \in I_M$. Since σ_n is bounded from L_∞ to L_∞, $n > 2^M$ and $\|a\|_\infty \le 2^{2M}$, in view of Lemma 4.6 we can write

$$\frac{|\sigma_n a(x)|}{V^2(n)} \le \frac{c}{V^2(n)} \int_{I_M} |a(x)| |K_n(x+t)| \, d\mu(t)$$

$$\le \frac{c\|a\|_\infty}{V^2(n)} \int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t) \le \frac{c 2^{2M}}{V^2(n)} \int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t)$$

$$\le \frac{c 2^M}{V^2(n)} \left\{ \sum_{A=1}^{s} \int_{I_M} 2^{l_A} |K_{2^{l_A}}(x+t)| \, d\mu(t) + \int_{I_M} 2^{m_A} |K_{2^{m_A}}(x+t)| \, d\mu(t) \right\}$$

$$+ \frac{c 2^M}{V^2(n)} \sum_{A=1}^{s} \int_{I_M} 2^{l_A} \sum_{k=l_A}^{m_A} D_{2^k}(x+t) \, d\mu(t) + \frac{c 2^M}{V^2(n)} \int_{I_M} V(n) \, d\mu(t)$$

$$= \frac{c}{V^2(n)} \sum_{A=1}^{s} \left(II^1_{l_A}(x) + II^1_{m_A}(x) + II^2_{l_A}(x) \right) + c.$$

Hence

$$\int_{\overline{I_M}} \left| \frac{\sigma_n a(x)}{V^2(n)} \right|^{1/2} d\mu(x) \leq \frac{c}{V(n)} \left(\sum_{A=1}^{s} \int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{l_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \right.$$

$$\left. + \int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{m_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) + \int_{\overline{I_M}} \left| II^2_{l_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \right) + c.$$

Since $s \leq 4V(n)$, to complete the proof of assertion a) of the theorem, it remains to show that

$$\int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{\alpha_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \leq c < \infty, \quad \int_{\overline{I_M}} \left| II^2_{l_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \leq c < \infty, \tag{5.3}$$

where $\alpha_A = l_A$ or $\alpha_A = m_A$, $A = 1, ..., s$.

Let $t \in I_M$ and $x \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, $0 \leq k < l < \alpha_A \leq M$ or $0 \leq k < l \leq M \leq \alpha_A$. Since $x + t \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, by Lemma 4.3 we get

$$K_{2^{\alpha_A}}(x+t) = 0 \quad \text{and} \quad II^1_{\alpha_A}(x) = 0. \tag{5.4}$$

Let $x \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, $0 \leq k < \alpha_A \leq l \leq M$. Then $x + t \in I_{l+1}(e_k + e_l)$ for $t \in I_M$, and we can apply Lemma 4.3 to obtain

$$2^{\alpha_A} \left| K_{2^{\alpha_A}}(x+t) \right| \leq 2^{\alpha_A + k} \quad \text{and} \quad II^1_{\alpha_A}(x) \leq 2^{\alpha_A + k}. \tag{5.5}$$

Similar to (5.5), we can show that if $0 \leq \alpha_A \leq k < l \leq M$, then

$$2^{\alpha_A} \left| K_{2^{\alpha_A}}(x+t) \right| \leq 2^{2\alpha_A}, \quad II^1_{\alpha_A}(x) \leq 2^{2\alpha_A}, \quad t \in I_M, \; x \in I_{l+1}(e_k + e_l). \tag{5.6}$$

Let $0 \leq \alpha_A \leq M - 1$. Then, in view of (2.1) and (5.4)-(5.6), we can write

$$\int_{\overline{I_M}} \left| II^1_{\alpha_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) = \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} \left| II^1_{\alpha_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \int_{I_M(e_k)} \left| II^1_{\alpha_A}(x) \right|^{1/2} d\mu(x) \leq c \sum_{k=0}^{\alpha_A - 1} \sum_{l=\alpha_A+1}^{M-1} \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} 2^{(\alpha_A+k)/2} d\mu(x) +$$

$$+ c \sum_{k=\alpha_A}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} 2^{\alpha_A} d\mu(x) + c \sum_{k=0}^{\alpha_A - 1} \int_{I_M(e_k)} 2^{(\alpha_A+k)/2} d\mu(x) +$$

$$+ c \sum_{k=\alpha_A}^{M-1} \int_{I_M(e_k)} 2^{\alpha_A} d\mu(x) \leq c \sum_{k=0}^{\alpha_A - 1} \sum_{l=\alpha_A+1}^{M-1} \frac{2^{(\alpha_A+k)/2}}{2^l} +$$

$$+ c \sum_{k=\alpha_A}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{2^{\alpha_A}}{2^l} + c \sum_{k=0}^{\alpha_A - 1} \frac{2^{(\alpha_A+k)/2}}{2^M} + c \sum_{k=\alpha_A}^{M-1} \frac{2^{\alpha_A}}{2^M} \leq c < \infty, \quad \text{for any } A = 1, ..., s.$$

Let $\alpha_A \geq M$. Then by similar arguments used above it can be shown that (5.3) holds for $II^1_{\alpha_A}(x)$, $A = 1, ..., s$.

Now, we prove the boundedness of $H^2_{l_A}$. Let $t \in I_M$ and $x \in I_i \backslash I_{i+1}$, $i \leq l_A - 1$. Since $x + t \in I_i \backslash I_{i+1}$, by using (2.3) we get

$$H^2_{l_A}(x) = 0. \tag{5.7}$$

Let $x \in I_i \backslash I_{i+1}$, $l_A \leq i \leq m_A$. Since $n \geq 2^M$ and $t \in I_M$, by (2.3) we obtain

$$H^2_{l_A}(x) \leq 2^M \int_{I_M} 2^{l_A} \sum_{k=l_A}^{i} D_{2^k}(x+t)\, d\mu(t) \leq c2^{l_A+i}. \tag{5.8}$$

Let $x \in I_i \backslash I_{i+1}$, $m_A < i \leq M-1$. Using (2.3) we can infer that $x + t \in I_i \backslash I_{i+1}$ for $t \in I_M$ and

$$H^2_{l_A}(x) \leq c2^M \int_{I_M} 2^{l_A+m_A} \leq c2^{l_A+m_A}. \tag{5.9}$$

Let $0 \leq l_A \leq m_A \leq M$. Combining (2.1) and (5.7)-(5.9) we get

$$\int_{\overline{I_M}} \left|H^2_{l_A}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) = \left(\sum_{i=0}^{l_A-1} + \sum_{i=l_A}^{m_A} + \sum_{i=m_A+1}^{M-1}\right) \int_{I_i \backslash I_{i+1}} \left|H^2_{l_A}(x)\right|^{1/2} d\mu(x)$$

$$\leq c \sum_{i=l_A}^{m_A} \int_{I_i \backslash I_{i+1}} 2^{(l_A+i)/2} d\mu(x) + c \sum_{i=m_A+1}^{M-1} \int_{I_i \backslash I_{i+1}} 2^{(l_A+m_A)/2} d\mu(x)$$

$$\leq c \sum_{i=l_A}^{m_A} 2^{(l_A+i)/2} \frac{1}{2^i} + c \sum_{i=m_A+1}^{M-1} 2^{(l_A+m_A)/2} \frac{1}{2^i} \leq c < \infty.$$

The cases where $0 \leq l_A \leq M < m_A$ or $M \leq l_A \leq m_A$. can be treated similarly. This completes the proof of assertion a) of the theorem.

Now, we prove assertion b) of the theorem. To this end, observe first that under condition (3.1), there exists an increasing sequence $\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{n_k : k \geq 0\}$ of naturals such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi^{1/4}(\alpha_k) / V^{1/2}(\alpha_k) \leq c < \infty. \tag{5.10}$$

Define

$$F_A = \sum_{\{k;\, |\alpha_k| < A\}} \lambda_k a_k,$$

$$\lambda_k = \Phi^{1/2}(\alpha_k) / V(\alpha_k), \; a_k = 2^{|\alpha_k|} \left(D_{2^{|\alpha_k|+1}} - D_{2^{|\alpha_k|}}\right).$$

Since

$$S_{2^A} a_k = \begin{cases} a_k, & |\alpha_k| < A, \\ 0, & |\alpha_k| \geq A, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\operatorname{supp}(a_k) = I_{|\alpha_k|}, \quad \int_{I_{|\alpha_k|}} a_k d\mu = 0, \quad \|a_k\|_\infty \leq 2^{2|\alpha_k|} = \mu(\operatorname{supp} a_k)^{-2},$$

we can apply Lemma 4.1 and (5.10) to conclude that $F = (F_1, F_2, ...) \in H_{1/2}$.

It is easy to show that

(5.12)
$$\widehat{F}(j)=\begin{cases}2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)/V(\alpha_k), & j\in\left\{2^{|\alpha_k|},\dots,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k=0,1,\dots\\ 0, & j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},\dots,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases}$$

Let $2^{|\alpha_k|}<j<\alpha_k$. By (5.12) we have

$$(5.13)\quad S_jF=S_{2^{|\alpha_k|}}F+\sum_{v=2^{|\alpha_k|}}^{j-1}\widehat{F}(v)w_v=S_{2^{|\alpha_k|}}F+\frac{\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V(\alpha_k)}.$$

Therefore

$$(5.14)\qquad \frac{\sigma_{\alpha_k}F}{\Phi(\alpha_k)}=\frac{1}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k}\sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}}S_jF+\frac{1}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k}S_jF$$

$$=\frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}}F}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k}+\frac{\left(\alpha_k-2^{|\alpha_k|}\right)S_{2^{|\alpha_k|}}F}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k}+\frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k)V(\alpha_k)\alpha_k}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k}\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)$$

$$=III_1+III_2+III_3.$$

Since

$$(5.15)\qquad D_{j+2^m}=D_{2^m}+w_{2^m}D_j,\quad \text{when}\quad j<2^m$$

we can write

$$(5.16)\qquad |III_3|=\frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k)V(\alpha_k)\alpha_k}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}\left(D_{j+2^{|\alpha_k|}}-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)\right|$$

$$=\frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k)V(\alpha_k)\alpha_k}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}D_j\right|=\frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k)V(\alpha_k)\alpha_k}\left(\alpha_k-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}\right|$$

$$\geq c\left(\alpha_k-2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}\right|/\left(\Phi^{1/2}(\alpha_k)V(\alpha_k)\right).$$

Let $\alpha_k=\sum_{i=1}^{r_k}\sum_{k=l_i^k}^{m_i^k}2^k$, where $m_1^k\geq l_1^k>l_1^k-2\geq m_2^k\geq l_2^k>l_2^k-2\geq\dots\geq m_s^k\geq l_s^k\geq 0$. Since (see Theorem 3.1a) and (1.1)) $\|III_1\|_{1/2}\leq c$, $\|III_2\|_{1/2}\leq c$ and $\mu\left\{E_{l_i^k}\right\}\geq 1/2^{l_i^k-1}$, by combining (5.14), (5.16) and Lemma 4.4 we obtain

$$\int_G|\sigma_{\alpha_k}F(x)/\Phi(\alpha_k)|^{1/2}d\mu(x)\geq\|III_3\|_{1/2}^{1/2}-\|III_2\|_{1/2}^{1/2}-\|III_1\|_{1/2}^{1/2}$$

$$\geq c\sum_{i=2}^{r_k-2}\int_{E_{l_i^k}}\left|2^{2l_i^k}/\left(\Phi^{1/2}(\alpha_k)V(\alpha_k)\right)\right|^{1/2}d\mu(x)-2c$$

$$\geq c\sum_{i=2}^{r_k-2}1/\left(V^{1/2}(\alpha_k)\Phi^{1/4}(\alpha_k)\right)-2c\geq cr_k/\left(V^{1/2}(\alpha_k)\Phi^{1/4}(\alpha_k)\right)$$

$$\geq cV^{1/2}(\alpha_k)/\Phi^{1/4}(\alpha_k) \to \infty \text{ as } k \to \infty.$$

Theorem 3.1 is proved. $\square$

Proof of Theorem 3.2. Let $n \in \mathbb{N}$. Arguing as in the proof of Theorem 3.1 (see (5.2)), we only have to show that for every p-atom a

$$\int\limits_{\overline{I_M}} \left(2^{d(n)(2-1/p)} |\sigma_n(a)|\right)^p d\mu \leq c_p < \infty,$$

where I denotes the support of the atom a.

Similar to the proof of Theorem 3.1 a), we can assume that a is an arbitrary p-atom with support $I = I_M$, $\mu(I_M) = 2^{-M}$ and $n > 2^M$. Since $\|a\|_\infty \leq 2^{M/p}$ we can write

$$2^{d(n)(2-1/p)} |\sigma_n(a)| \leq 2^{d(n)(2-1/p)} \|a\|_\infty \int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t)$$

$$\leq 2^{d(n)(2-1/p)} 2^{M/p} \int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t).$$

Let $x \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, $0 \leq k, l \leq [n] \leq M$. Then by Lemma 4.3 we get $K_n(x+t) = 0$, for $t \in I_M$ and

$$2^{d(n)(2-1/p)} |\sigma_n(a)| = 0. \tag{5.17}$$

Let $x \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, $[n] \leq k, l \leq M$ or $k \leq [n] \leq l \leq M$. By using Lemma 4.5 we can write

$$2^{d(n)(2-1/p)} |\sigma_n(a)| \leq 2^{d(n)(2-1/p)} 2^{M(1/p-2)+k+l} \leq c_p 2^{[n](1/p-2)+k+l}. \tag{5.18}$$

A combination of (2.1), (5.17) and (5.18) yields

$$\int_{\overline{I_M}} \left|2^{d(n)(2-1/p)} \sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x)$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{[n]-2} \sum_{l=k+1}^{[n]-1} + \sum_{k=0}^{[n]-1} \sum_{l=[n]}^{M-1} + \sum_{k=[n]}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1}\right) \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} \left|2^{d(n)(2-1/p)} \sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x)$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \int_{I_M(e_k)} \left|2^{d(n)(2-1/p)} \sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x) \leq c_p \sum_{k=[n]}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{1}{2^l} 2^{[n](2p-1)} 2^{p(k+l)}$$

$$+ c_p \sum_{k=0}^{[n]} \sum_{l=[n]+1}^{M-1} \frac{1}{2^l} 2^{[n](2p-1)} 2^{p(k+l)} + \frac{c_p 2^{[n](2p-1)}}{2^M} \sum_{k=0}^{[n]} 2^{p(k+M)} < c_p < \infty.$$

This completes the proof of assertion a) of the theorem.

Now, we proceed to prove assertion b) of the theorem. To this end, observe first that under conditions in (3.2), there exists a sequence $\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{n_k : k \geq 0\}$, such that $\alpha_0 \geq 3$ and

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} u^{-p}(\alpha_\eta) < c_p < \infty, \quad u(\alpha_k) = 2^{d(\alpha_k)(1/p-2)/2}/\Phi^{1/2}(\alpha_k) \tag{5.19}$$

Let

$$F_A = \sum_{\{k:\, |\alpha_k| < A\}} a_k^p/u(\alpha_k), \quad a_k^{(p)} = 2^{|\alpha_k|(1/p-1)}\left(D_{2^{|\alpha_k|+1}} - D_{2^{|\alpha_k|}}\right).$$

Applying Lemma 4.1 and (5.19), similar to the proof of Theorem 3.1 b), we conclude that $F \in H_p$. It is easy to show that

$$\widehat{F}(j) = \begin{cases} 2^{|\alpha_k|(1/p-1)}/u(\alpha_k), & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, \ldots, 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}, \ k = 0, 1, \ldots \\ 0, & j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, \ldots, 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{5.20}$$

Let $2^{|\alpha_k|} < j < \alpha_k$. Applying (5.20), similar to (5.13) and (5.14), we get

$$\frac{\sigma_{\alpha_k} F}{\Phi(\alpha_k)} = \frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}} F}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k} + \frac{\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) S_{2^{|\alpha_k|}} F}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k}$$

$$+ \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi(\alpha_k)u(\alpha_k)\alpha_k} \sum_{j=2^{|\alpha_k|}}^{\alpha_k - 1}\left(D_j - D_{2^{|\alpha_k|}}\right) = IV_1 + IV_2 + IV_3.$$

Let $\alpha_k \in \mathbf{N}$ and $E_{[\alpha_k]} := I_{[\alpha_k]+1}\left(e_{[\alpha_k]-1} + e_{[\alpha_k]}\right)$. Since $\left[\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right] = [\alpha_k]$, in view of (2.4), (5.15) and Lemma 4.3, similar to (5.16), for IV_3 we have

$$|IV_3| = \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi(\alpha_k)u(\alpha_k)\alpha_k}\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right|$$

$$= \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi(\alpha_k)u(\alpha_k)\alpha_k}\left|2^{[\alpha_k]}K_{[\alpha_k]}\right| \geq \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)}2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi(\alpha_k)u(\alpha_k)}$$

$$\geq 2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2}2^{2[\alpha_k]-4}/\Phi^{1/2}(\alpha_k).$$

It follows that

$$\|IV_3\|_{L_{p,\infty}}^p \geq \left(\frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2}2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}\right)^p \mu\left\{x \in G : \ |IV_3| \geq \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2}2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}\right\}$$

$$\geq c_p\left(2^{2[\alpha_k]+|\alpha_k|(1/p-2)/2}/\Phi^{1/2}(\alpha_k)\right)^p \mu\left\{\Theta_{\alpha_k}\right\}$$

$$\geq c_p\left(2^{(|\alpha_k|-[\alpha_k])(1/p-2)}/\Phi(\alpha_k)\right)^{p/2} = c_p\left(2^{d(\alpha_k)(1/p-2)}/\Phi(\alpha_k)\right)^{p/2} \to \infty \text{ as } k \to \infty.$$

In view of (5.19) and the first part of Theorem 3.2 (see also (1.2)), we conclude that $\|IV_1\|_{L_{p,\infty}} \leq c_p < \infty$, $\|IV_2\|_{L_{p,\infty}} \leq c_p < \infty$ and

$$\|\sigma_{\alpha_k} F\|_{L_{p,\infty}}^p \geq \|IV_3\|_{L_{p,\infty}}^p - \|IV_2\|_{L_{p,\infty}}^p - \|IV_1\|_{L_{p,\infty}}^p \to \infty \text{ as } k \to \infty.$$

Theorem 3.2 is proved. □

Proof of Theorem 3.3. Let $F \in H_{1/2}$ and $2^k < n \leq 2^{k+1}$. Then we have

$$\|\sigma_n F - F\|_{1/2}^{1/2}$$
$$\leq \|\sigma_n F - \sigma_n S_{2^k} F\|_{1/2}^{1/2} + \|\sigma_n S_{2^k} F - S_{2^k} F\|_{1/2}^{1/2} + \|S_{2^k} F - F\|_{1/2}^{1/2}$$
$$= \|\sigma_n (S_{2^k} F - F)\|_{1/2}^{1/2} + \|S_{2^k} F - F\|_{1/2}^{1/2} + \|\sigma_n S_{2^k} F - S_{2^k} F\|_{1/2}^{1/2}$$
$$\leq c_p \left(V^2(n) + 1\right) \omega_{H_{1/2}}^{1/2} \left(1/2^k, F\right) + \|\sigma_n S_{2^k} F - S_{2^k} F\|_{1/2}^{1/2}.$$

By simple calculation we get

$$\sigma_n S_{2^k} F - S_{2^k} F = \frac{2^k}{n} \left(S_{2^k} \sigma_{2^k} F - S_{2^k} F\right) = \frac{2^k}{n} S_{2^k} \left(\sigma_{2^k} F - F\right)$$

Let $p > 0$. Then (see inequality (1.2)), we have

$$\|\sigma_n S_{2^k} F - S_{2^k} F\|_{1/2}^{1/2}$$

$$\leq \frac{2^{k/2}}{n^{1/2}} \|S_{2^k} (\sigma_{2^k} F - F)\|_{1/2}^{1/2} \leq \|\sigma_{2^k} F - F\|_{H_{1/2}}^{1/2} \to 0 \text{ as } k \to \infty,$$

which proves the first part of the theorem.

Now, we prove the second part of the theorem. Since $\sup_{k \in \mathbb{N}}(\alpha_k) = \infty$, there exists a sequence $\{\alpha_k : k \geq 1\} \subset \{n_k : k \geq 1\}$ such that $V(\alpha_k) \uparrow \infty$ as $k \to \infty$ and

$$V^2(\alpha_k) \leq V(\alpha_{k+1}). \tag{5.21}$$

We set

$$F_A = \sum_{\{i:\ |\alpha_i| < A\}} a_i^{1/2} / V^2(\alpha_i).$$

Since $a_i^{1/2}(x)$ is a $1/2$-atom, we can apply Lemma 4.1 and (5.21) to conclude that $F \in H_{1/2}$. Moreover,

$$\begin{aligned} F - S_{2^n} F &= \left(F_1 - S_{2^n} F_1, \ldots, F_n - S_{2^n} F_n, \ldots, F_{n+k} - S_{2^n} F_{n+k}\right) \\ &= \left(0, \ldots, 0, F_{n+1} - S_{2^n} F_{n+1}, \ldots, F_{n+k} - S_{2^n} F_{n+k}, \ldots\right) \\ &= \left(0, \ldots, 0, \sum_{i=n}^{n+k} a_i^1 / V^2(\alpha_i), \ldots\right), \quad k \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{5.22}$$

is a martingale. Hence, by (5.22) and Lemma 4.1 we get

$$\|F - S_{2^n} F\|_{H_{1/2}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/V^2(\alpha_i) = O\left(1/V^2(\alpha_n)\right).$$

It is easy to show that

$$\widehat{F}(j) = \begin{cases} 2^{|\alpha_k|} / V^2(\alpha_k), & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, \ldots, 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}, \ k = 0, 1, \ldots \\ 0, & j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, \ldots, 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}. \end{cases}$$

Let $2^{|\alpha_k|} < j \leq \alpha_k$. By (5.15) we obtain

$$S_jF = S_{2^{|\alpha_k|}}F + \sum_{v=2^{|\alpha_k|}}^{j-1} \widehat{F}(v)w_v = S_{2^{|\alpha_k|}}F + \frac{2^{|\alpha_k|}w_{2^{|\alpha_k|}}D_{j-2^{|\alpha_k|}}}{V^2(\alpha_k)}.$$

Hence

$$\sigma_{\alpha_k}F - F = \frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\left(\sigma_{2^{|\alpha_k|}}(F) - F\right) \tag{5.23}$$

$$+\frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\left(S_{2^{|\alpha_k|}}F - F\right) + \frac{2^{|\alpha_k|}w_{2^{|\alpha_k|}}\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right)K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}}{\alpha_k V^2(\alpha_k)}.$$

Next, applying (5.23) we get

$$\|\sigma_{\alpha_k}F - F\|_{1/2}^{1/2} \geq \frac{c}{V(\alpha_k)}\|\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right)K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}\|_{1/2}^{1/2} \tag{5.24}$$

$$-\left(\frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^{1/2}\|\sigma_{2^{|\alpha_k|}}F - F\|_{1/2}^{1/2} - \left(\frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^{1/2}\|S_{2^{|\alpha_k|}}F - F\|_{1/2}^{1/2}.$$

Let $\alpha_k = \sum_{i=1}^{r_k}\sum_{k=l_i^k}^{m_i^k} 2^k$, where $m_1^k \geq l_1^k > l_1^k - 2 \geq m_2^k \geq l_2^k > l_2^k - 2 > \ldots > m_s^k \geq l_s^k \geq 0$ and $E_{l_i^k} = I_{l_i^k+1}\left(e_{l_i^k-1} + e_{l_i^k}\right)$. Using Lemma 4.4 we can write

$$\int_G \left|\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right)K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}(x)\right|^{1/2} d\mu \tag{5.25}$$

$$\geq \frac{1}{16}\sum_{i=2}^{r_k-2}\int_{E_{l_i^k}}\left|\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right)K_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \geq \frac{1}{16}\sum_{i=2}^{r_k-2}\frac{1}{2^{l_i^k}}2^{l_i^k} \geq cr_k \geq cV(\alpha_k).$$

Finally, combining (5.24) - (5.25) we obtain (3.5). Theorem 3.3 is proved. □

Proof of Theorem 3.4. Let $0 < p < 1/2$. Arguments similar to that of applied in the proof of Theorem 3.3 a) can be used to show that under condition (3.6) the relation (1.5) holds. Now we prove the second part of the theorem. To this end, observe that since $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(n_k) = \infty$, there exists a sequence $\{\alpha_k : k \geq 1\} \subset \{n_k : k \geq 1\}$ such that $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(\alpha_k) = \infty$ and

$$2^{2d(\alpha_k)(1/p-2)} \leq 2^{d(\alpha_{k+1})(1/p-2)}. \tag{5.26}$$

We set

$$F_A = \sum_{\{i:\ |\alpha_i|<A\}} a_i^{(p)}/2^{(1/p-2)d(\alpha_i)}.$$

Since $a_i^p(x)$ is a p-atom, we can apply Lemma 4.1 and (5.26) to conclude that $F \in H_p$. Similar to (5.22), we can show that

$$F - S_{2^{|\alpha_k|}}F = \left(0, \ldots, 0, \sum_{i=k}^{k+s} a_i/2^{d(\alpha_i)(1/p-2)}, \ldots\right), \quad s \in \mathbb{N}_+$$

is a martingale. By combining (5.26) and Lemma 4.1 we get

$$\omega_{H_p}(1/2^{|\alpha_k|}, F) \leq \sum_{i=k}^{\infty} 1/2^{d(\alpha_i)(1/p-2)} = O\left(1/2^{d(\alpha_k)(1/p-2)}\right).$$

It is easy to show that

$$\widehat{F}(j) = \begin{cases} 2^{(1/p-2)|\alpha_k|}, & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\},\ k = 0, 1, ... \\ 0, & j \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_n|}, ..., 2^{|\alpha_n|+1} - 1\right\}. \end{cases}$$

Therefore we can write

$$\|\sigma_{\alpha_k} F - F\|_{L_{p,\infty}}^p \geq 2^{(1-2p)|\alpha_k|} \| \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \|_{L_{p,\infty}}^p$$

$$- \left(\frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|\sigma_{2^{|\alpha_k|}} F - F\|_{L_{p,\infty}}^p - \left(\frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|S_{2^{|\alpha_k|}} F - F\|_{L_{p,\infty}}^p$$

Let $x \in E_{|\alpha_k|}$. By (2.4) and Lemma 4.2 we have

$$\mu\left(x \in G : \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) \left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right| \geq 2^{2|\alpha_k|-4}\right) \geq \mu\left(E_{|\alpha_k|}\right) \geq 1/2^{|\alpha_k|-4},$$

$$2^{2p|\alpha_k|-4} \mu\left(x \in G : \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) \left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right| \geq 2^{2|\alpha_k|-4}\right) \geq 2^{(2p-1)|\alpha_k|-4}.$$

Hence $\|\sigma_{n_k} F - F\|_{L_{p,\infty}} \nrightarrow 0$ as $k \to \infty$. Theorem 3.4 is proved. □

Список литературы

[1] I. Blahota, G. Tephnadze, "Strong convergence theorem for Vilenkin-Fejér means". Publ. Math. Debrecen, **85**, no. 1-2, 181 – 196 (2014).

[2] G. Gát, "Inverstigations of certain operators with respect to the Vilenkin sistem", Acta Math. Hung., **61**, 131 – 149 (1993).

[3] U. Goginava, "Maximal operators of Fejér means of double Walsh-Fourier series", Acta Math. Hungar., **115**, 333 – 340 (2007).

[4] U. Goginava, "On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series", J. Approx. Theory, **115**, 9 – 20 (2002).

[5] U. Goginava, "The martingale Hardy type inequality for Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional conjugate Walsh-Fourier series", Acta Math. Sinica, **27**, 1949 – 1958 (2011).

[6] U. Goginava, "Maximal operators of Fejér-Walsh means", Acta Sci. Math. (Szeged) **74**, 615 – 624 (2008).

[7] B. Golubov, A. Efimov and V. Skvortsov, Walsh series and transformations. Dordrecht, Boston, London (1991). Kluwer Acad. publ. (1991).

[8] F. Myricz, A. Siddiqi, Approximation by Norlund means of Walsh-Fourier series. Journal of approximation theory. **70**, 375 – 389 (1992).

[9] K. Nagy, "Approximation by Cesàro means of negative order of double Walsh-Kaczmarz-Fourier series", Tohoku Math. J., **64**, 317 – 331 (2012).

[10] J. Pál and P. Simon, "On a generalization of the concept of derivate", Acta Math. Hung., **29**, 155 – 164 (1977).

[11] F. Schipp, W. Wade, P. Simon, J. Pál, Walsh series, An Introduction to Duadic Harmonic Analysis, Akademiai Kiady, Budapest-AdamHilger, Bristol-New-York, (1990).

[12] P. Simon, A Note on The of The Sunouchi Operator With Respect to Vilenkin Systems, Annales Univ. Sci. Sect. Math. Budapest (2001). "

[13] G. Tephnadze, "Fejér means of Vilenkin-Fourier series", Stud. sci. math. Hung., **49**, 79 – 90 (2012).

[14] G. Tephnadze, "A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejér means", Georgian Mathematical Journal, **21**, no 4, 511 – 517 (2014).

[15] G. Tephnadze, "Strong convergence theorems of Walsh-Fejér means", Acta Mathematica Hungarica, **142**, no. 1, 244 – 259 (2014).

[16] F. Weisz, "Cesaro summability of one- and two-dimensional Walsh-Fourier series", Anal. Math. **22**, 229 – 242 (1996).

[17] F. Weisz, Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York (1994).

[18] *F. Weisz,* Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Space, Kluwer Academic, Dordrecht (2002).

Поступила 1 октября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 71-84.

EXISTENCE THEOREMS OF PERIODIC SOLUTIONS FOR SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATIONS CONTAINING BOTH ADVANCE AND RETARDATION

LIANWU YANG, YUANBIAO ZHANG, SHAOLIANG YUAN, HAIPING SHI

School of Mathematical and Computer Science, Yichun University, China
Packaging Engineering Institute, Jinan University, China
Guangdong Construction Vocational Technology Institute, Guangzhou, China
E-mails: *ycumath@163.com, abiaoa@163.com, 13640840@gg.com, shp7971@163.com*

Abstract. Using the critical point method, the existence of periodic solutions for second-order nonlinear difference equations containing both advance and retardation is established. The proof is based on the Saddle Point Theorem in combination with variational technique

MSC2010 numbers: 39A23.

Keywords: Existence; periodic solution; second-order nonlinear difference equation; discrete variational theory.[1]

1. Introduction

Let **N**, **Z** and **R** denote the sets of all naturals numbers, integers and real numbers, respectively. For any a, $b \in \mathbf{Z}$ with $a \leq b$, define $\mathbf{Z}(a) = \{a, a+1, \cdots\}$ and $\mathbf{Z}(a,b) = \{a, a+1, \cdots, b\}$. The symbol $*$ will denote the transpose of a vector.

Recently, the theory of nonlinear difference equations has been widely used to study discrete models appearing in many fields, such as computer science, economics, neural networks, ecology, cybernetics, etc. For the general background of difference equations, we refer to monograph [1]. The past twenty years, there has been much progress on the qualitative properties of difference equations, which includes results on stability and attractivity and results on oscillation and other topics (see, [2-8, 12, 13, 15, 17, 18]. Therefore, it is worthwhile to explore this topic.

The present paper considers the following second-order nonlinear difference equation containing both advance and retardation:

$$\Delta\left(p_n(\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) = 0, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{1.1}$$

[1]This project is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 11361067, 11401121) and Natural Science Foundation of Guangdong Province (No. S2013010014460).

where Δ is the forward difference operator $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, $\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n)$, $\delta > 0$ is the ratio of odd positive integers, $\{p_n\}$ is a sequence of real numbers, M is a given nonnegative integer, $f \in C(\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, T is a given natural, $p_{n+T} = p_n > 0$, and $f(n+T, v_1, v_2, v_3) = f(n, v_1, v_2, v_3)$.

Note that the equation (1.1) can be considered as a discrete analogue of a special case of the following second-order nonlinear functional differential equation with retarded and advanced arguments

$$[p(t)\varphi(u')]' + f(t, u(t+M), u(t), u(t-M)) = 0, \ t \in \mathbf{R}. \tag{1.2}$$

The equation (1.2) includes the following equation

$$(p(t)\varphi(u'))' + f(t, u(t)) = 0, \ t \in \mathbf{R},$$

which appears in the study of fluid dynamics, combustion theory, gas diffusion through porous media, thermal self-ignition of a chemically active mixture of gases in a vessel, catalysis theory, chemically reacting systems, and adiabatic reactor (see, [9]).

Note also that equations similar in structure to (1.2) arise in the study of periodic solutions and homoclinic orbits of functional differential equations (see, [10, 11]).

Yu, Shi and Guo [18] have studied the question of existence of homoclinic orbits for the following second-order difference equation

$$Lu_n - \omega u_n = f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) \tag{1.3}$$

containing both advance and retardation.

If $\delta = 1$ and $f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) = q_n u_n$, the equation (1.1) becomes

$$\Delta(p_n \Delta u_{n-1}) + q_n u_n = 0, \tag{1.4}$$

which has been extensively investigated by many authors (see [1] and references therein), for results on oscillation, asymptotic behavior, boundary value problems, disconjugacy and disfocality.

If $f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) = q_n u_n^{\delta}$, $n \in \mathbf{Z}(0)$, the equation (1.1) reduces to the following equation

$$\Delta\left(p_n (\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + q_n u_n^{\delta} = 0, \tag{1.5}$$

which has been studied in [1, 18] for results on oscillation, asymptotic behavior and the existence of positive solutions.

In the case where $f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) = q_n g(u_n) + r_n$, the equation (1.1) has been considered in [15] for oscillatory properties of its all solutions.

Cai, Yu and Guo ([2], Theorem 3.1), assuming that $\beta > \delta + 1$, have obtained some sufficient conditions for the existence of periodic solutions of the following nonlinear difference equation

$$\Delta \left(p_n(\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + f(n, u_n) = 0, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{1.6}$$

Moreover, to our best knowledge, [2] is the only paper which deals with the problem of periodic solutions to second-order difference equation (1.6). When $\beta < \delta + 1$, can we still find the periodic solutions of (1.6)?

By using various methods and techniques, such as Schauder fixed point theorem, the cone theoretic fixed point theorem, the method of upper and lower solutions, coincidence degree theory, a number of existence results of nontrivial solutions for differential equations have been obtained in [11].

Another important tool that was used to deal with problems concerning differential equations is the critical point theory (see, [10, 14, 16]). Because of applications in many areas for difference equations (see. e.g., [1]), recently a few authors have gradually paid attention to apply the critical point theory to deal with periodic solutions of discrete systems (see [3, 12, 13, 17]).

For instance, in [12, 13] Guo and Yu have studied the existence of periodic solutions of second-order nonlinear difference equations by using the critical point theory. However, to the best of our knowledge, when $\delta \neq 1$ the results on periodic solutions of second-order nonlinear difference equation (1.1) are very scarce in the literature (see [2]), because there are only few known methods to establish the existence of periodic solutions of discrete systems. Furthermore, since f in equation (1.1) depends on u_{n+M} and u_{n-M}, the traditional methods used in [12, 13, 17] are inapplicable in our case.

The motivation for the present paper stems from the recent papers [3, 4, 11], and the main purpose is to give some sufficient conditions for the existence of periodic solutions for second-order nonlinear difference equations containing both advance and retardation. The basic approaches used in the paper are variational techniques and the Saddle Point Theorem. For basic knowledge of variational methods, the reader is referred to [14, 16].

The obtained results generalize and complement the existing results in the literature [2]. The details are given in Remark 1.4 below.

Let

$$\underline{p} = \min_{n \in \mathbf{Z}(1,T)} \{p_n\}, \ \bar{p} = \max_{n \in \mathbf{Z}(1,T)} \{p_n\}.$$

Now we are in position to state the main results of this paper.

Theorem 1.1. *Assume that the following conditions are satisfied:*

(F_1) *there exists a functional* $F(n, v_1, v_2) \in C^1(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R})$ *such that*

$$F(n+T, v_1, v_2) = F(n, v_1, v_2),$$

$$\frac{\partial F(n-M, v_2, v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_2} = f(n, v_1, v_2, v_3);$$

(F_2) *there exists a constant* $M_0 > 0$ *such that for all* $(n, v_1, v_2) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^2$

$$\left|\frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_1}\right| \le M_0, \qquad \left|\frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_2}\right| \le M_0;$$

(F_3) $F(n, v_1, v_2) \to +\infty$ *uniformly for* $n \in \boldsymbol{Z}$ *as* $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \to +\infty$.

Then for any natural integer m *equation (1.1) has at least one* mT*-periodic solution.*

Remark 1.1. The condition (F_2) implies that there exists a constant $M_1 > 0$ such that

(F_2') $\quad |F(n, v_1, v_2)| \le M_1 + M_0(|v_1| + |v_2|), \ \forall (n, v_1, v_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2.$

Theorem 1.2. *Assume that* (F_1) *and the following conditions are satisfied:*

(F_4) *there exist constants* $R_1 > 0$ *and* α, $1 < \alpha < 2$ *such that for* $n \in \boldsymbol{Z}$ *and* $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \ge R_1$,

$$0 < \frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_1} v_1 + \frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_2} v_2 \le \frac{\alpha}{2}(\delta + 1) F(n, v_1, v_2);$$

(F_5) *there exist constants* $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ *and* γ, $1 < \gamma \le \alpha$ *such that*

$$F(n, v_1, v_2) \ge a_1 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} - a_2, \quad (n, v_1, v_2) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^2.$$

Then for any given natural m *equation (1.1) has at least one* mT*-periodic solution.*

Remark 1.2. The condition (F_4) implies that for each $n \in \mathbf{Z}$ there exist constants $a_3 > 0$ and $a_4 > 0$ such that

(F_4') $F(n, v_1, v_2) \le a_3 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} + a_4, \quad (n, v_1, v_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2.$

Remark 1.3. The results of Theorems 1.1 and 1.2 ensure that equation (1.1) has at least one mT-periodic solution. However, in some cases, we are interested in the existence of nontrivial periodic solutions for (1.1).

The next two theorems contain sufficient conditions for existence of nontrivial periodic solutions for equation (1.1).

Theorem 1.3. *Assume that* (F_1) *and the following conditions are satisfied:*

(F_6) $F(n,0,0)=0$ *for all* $n \in Z$;

(F_7) *there exists a constant* α, $1<\alpha<2$ *such that for* $n \in Z$,

$$0<\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1}v_1+\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}v_2 \le \frac{\alpha}{2}(\delta+1)F(n,v_1,v_2), \qquad (v_1,v_2)\neq 0;$$

(F_8) *there exist constants* $a_5>0$ *and* γ, $1<\gamma\le\alpha$ *such that*

$$F(n,v_1,v_2)\ge a_5\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)}, \qquad (n,v_1,v_2)\in Z\times R^2.$$

Then for any given natural m *equation (1.1) has at least one nontrivial* mT*-periodic solution.*

Theorem 1.4. *Assume that the conditions* $(F_1)-(F_3)$ *and* (F_6) *hold, and also*

(F_9) *there exist constants* $a_6>0$ *and* θ, $0<\theta<2$ *such that*

$$F(n,v_1,v_2)\ge a_6\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^{\frac{\theta}{2}(\delta+1)}, \qquad (n,v_1,v_2)\in Z\times R^2.$$

Then for any given natural m *equation (1.1) has at least one nontrivial* mT*-periodic solution.*

Remark 1.4. For $M=0$, the equation (1.1) reduces to (1.6). In the case where $\beta>\delta+1$, Cai and Yu (see [2], Theorem 3.2), have obtained some criteria for the existence of periodic solutions of (1.6). When $\beta<\delta+1$, we still can find periodic solutions of (1.6), and hence, Theorems 1.3 and 1.4 generalize and complement the existing results.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we establish the variational framework associated with equation (1.1) and transfer the problem of existence of periodic solutions of (1.1) into that of existence of critical points of the corresponding functional. Some related fundamental results are also recalled. Section 3 contains the proofs of the main results by using the critical point method. Finally, in Section 4, we give two examples to illustrate the main results.

2. Variational structure and some lemmas

In order to apply the critical point theory, we first establish the corresponding variational framework for equation (1.1) and give some lemmas, which will be used to prove our main results. We start by some basic notation.

Let S be the set of sequences $u = (\cdots, u_{-n}, \cdots, u_{-1}, u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots) = \{u_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, that is,

$$S = \{\{u_n\} | u_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

For any $u, v \in S$ and $a, b \in \mathbf{R}$, $au + bv$ is defined to be

$$au + bv = \{au_n + bv_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}.$$

Then S becomes a vector space.

For any given naturals m and T, by E_{mT} we denote the subspace of S defined by

$$E_{mT} = \{u \in S | u_{n+mT} = u_n, \text{ for any } n \in \mathbf{Z}\}.$$

It is clear that E_{mT} is isomorphic to $\mathbf{R}^{mT}$. The subspace E_{mT} can be equipped with the inner product $(u, v) = \sum_{j=1}^{mT} u_j v_j$, $u, v \in E_{mT}$, which defines the norm $\|u\| = \left(\sum_{j=1}^{mT} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $u \in E_{mT}$.
It is obvious that E_{mT} is a finite dimensional Hilbert space and is linearly homeomorphic to $\mathbf{R}^{mT}$. On the other hand, we define the norm $\|\cdot\|_s$ on E_{mT} as follows:

$$\|u\|_s = \left(\sum_{j=1}^{mT} |u_j|^s\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.1}$$

for all $u \in E_{mT}$ and $s > 1$.

Since the norms $\|u\|_s$ and $\|u\|_2$ are equivalent, there exist constants c_1, c_2 ($c_2 \geq c_1 > 0$), such that

$$c_1\|u\|_2 \leq \|u\|_s \leq c_2\|u\|_2, \quad u \in E_{mT}. \tag{2.2}$$

Clearly, $\|u\| = \|u\|_2$. For all $u \in E_{mT}$, define the functional J on E_{mT} as follows:

$$J(u) = -\frac{1}{\delta+1}\sum_{n=1}^{mT} p_n (\Delta u_{n-1})^{\delta+1} + \sum_{n=1}^{mT} F(n, u_{n+M}, u_n),$$

$$:= -H(u) + \sum_{n=1}^{mT} F(n, u_{n+M}, u_n). \tag{2.3}$$

It is clear that $J \in C^1(E_{mT}, \mathbf{R})$, and using $u_0 = u_{mT}$, $u_1 = u_{mT+1}$, for any $u = \{u_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in E_{mT}$ we can compute the partial derivative $\frac{\partial J}{\partial u_n}$ to obtain

$$\frac{\partial J}{\partial u_n} = \Delta\left(p_n(\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}).$$

Thus, u is a critical point of J on E_{mT} if and only if

$$\Delta\left(p_n(\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + f(n, u_{n+M}, u_n, u_{n-M}) = 0, \quad n \in \mathbf{Z}(1, mT).$$

Due to the periodicity of $u = \{u_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in E_{mT}$ and $f(n, v_1, v_2, v_3)$ in the first variable n, we reduce the existence of periodic solutions of equation (1.1) to the existence of critical points of J on E_{mT}. That is, the functional J is just the variational framework of equation (1.1). Let

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

be a $mT \times mT$ matrix. It is easy to check that the eigenvalues of P are given by

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{2k}{mT}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, mT-1. \tag{2.4}$$

Thus, $\lambda_0 = 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_{mT-1} > 0$, and we have

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{mT-1}\} = 2\left(1 - \cos\tfrac{2}{mT}\pi\right), \\ \lambda_{\max} &= \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{mT-1}\} = \begin{cases} 4, & \text{if } mT \text{ is even}, \\ 2\left(1 + \cos\frac{1}{mT}\pi\right), & \text{if } mT \text{ is odd}. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Denote $W = \ker P = \{u \in E_{mT} | Pu = 0 \in \mathbf{R}^{mT}\}$, and observe that $W = \{u \in E_{mT} | u = \{c\},\ c \in \mathbf{R}\}$.

Let V be the direct orthogonal complement of E_{mT} to W, that is, $E_{mT} = V \oplus W$. For convenience, we identify $u \in E_{mT}$ with $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{mT})^*$.

Let E be a real Banach space and let $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, that is, J is a continuously Fréchet-differentiable functional defined on E. We say that J satisfies the Palais-Smale condition (P.S. condition for short) if any sequence $\{u^{(k)}\} \subset E$ for which $\{J(u^{(k)})\}$ is bounded and $J'(u^{(k)}) \to 0$ as $k \to \infty$, contains a convergent subsequence in E.

Let B_ρ denote the open ball in E about 0 of radius ρ and let ∂B_ρ denote its boundary.

Lemma 2.1 (Saddle Point Theorem [14, 16]). *Let E be a real Banach space, and let $E = E_1 \oplus E_2$, where $E_1 \neq \{0\}$ and is finite dimensional. Suppose that $J \in C^1(E, R)$ satisfies the P.S. condition and*

(J_1) there exist constants σ, $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap E_1} \leq \sigma$;

(J_2) there exist $e \in B_\rho \cap E_1$ and a constant $\omega \geq \sigma$ such that $J_{e+E_2} \geq \omega$.

Then J possesses a critical value $c \geq \omega$, where

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in B_\rho\cap E_1} J(h(u)), \quad \Gamma = \{h \in C(B_\rho \cap E_1, E) \mid h|_{\partial B_\rho \cap E_1} = id\}.$$

and id denotes the identity operator.

Lemma 2.2. *Assume that the conditions $(F_1)-(F_3)$ are satisfied. Then J satisfies the P.S. condition.*

Proof. Let $\{u^{(k)}\}\subset E_{mT}$ be such that $\{J(u^{(k)})\}$ is bounded and $J'(u^{(k)})\to 0$ as $k\to\infty$. Then there exists a positive constant M_2 such that $|J(u^{(k)})|\le M_2$.

Let $u^{(k)}=v^{(k)}+w^{(k)}\in V+W$. Taking into account that for large enough k,

$$-\|u\|_2\le\left\langle J'\left(u^{(k)}\right),u\right\rangle=-\left\langle H'\left(u^{(k)}\right),u\right\rangle+\sum_{n=1}^{mT}f\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)},u_{n-M}^{(k)}\right)u_n,$$

in view of (F_2) and (F_3), we obtain

$$\left\langle H'\left(u^{(k)}\right),v^{(k)}\right\rangle\le\sum_{n=1}^{mT}f\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)},u_{n-M}^{(k)}\right)v_n^{(k)}+\left\|v^{(k)}\right\|_2$$

$$\le 2M_0\sum_{n=1}^{mT}\left|v_n^{(k)}\right|+\left\|v^{(k)}\right\|_2\ \le\left(2M_0\sqrt{mT}+1\right)\left\|v^{(k)}\right\|_2.$$

On the other hand, we have

$$\left\langle H'\left(u^{(k)}\right),v^{(k)}\right\rangle=\sum_{n=1}^{mT}p_n\left(\left(\Delta v_{n-1}^{(k)}\right)^{\delta},\Delta v_{n-1}^{(k)}\right)$$

$$=\left[\left(\sum_{n=1}^{mT}p_{n+1}\left(\Delta v_n^{(k)}\right)^{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta+1}}\right]^{\delta+1}=(\delta+1)H\left(v^{(k)}\right).$$

Since

$$\frac{\underline{p}}{\delta+1}c_1^{\delta+1}\left[\left(\sum_{n=1}^{mT}\left(\Delta v_n^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\delta+1}\le H\left(v^{(k)}\right)\le\frac{\bar{p}}{\delta+1}c_2^{\delta+1}\left[\left(\sum_{n=1}^{mT}\left(\Delta v_n^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\delta+1}$$

and

$$\lambda_{\min}\left\|v^{(k)}\right\|_2^2\le\sum_{n=1}^{mT}\left(\Delta v_n^{(k)}\right)^2=\left(v^{(k)}\right)^{*}P\left(v^{(k)}\right)\le\lambda_{\max}\left\|v^{(k)}\right\|_2^2,$$

we get

$$\frac{\underline{p}}{\delta+1}c_1^{\delta+1}\lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}}\left\|v^{(k)}\right\|_2^{\delta+1}\le H\left(v^{(k)}\right)\le\frac{\bar{p}}{\delta+1}c_2^{\delta+1}\lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}}\left\|v^{(k)}\right\|_2^{\delta+1}.\tag{2.6}$$

Thus, we have

$$\underline{p}c_1^{\delta+1}\lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}}\left\|v^{(k)}\right\|_2^{\delta+1}\le\left(2M_0\sqrt{mT}+1\right)\left\|v^{(k)}\right\|_2,$$

implying that $\{v^{(k)}\}$ is bounded. Next, we prove that $\{w^{(k)}\}$ is bounded. Since

$$M_2\ge J\left(u^{(k)}\right)=-H\left(u^{(k)}\right)+\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)=\tag{2.7}$$

$$= -H\left(v^{(k)}\right)+\sum_{n=1}^{mT}\left[F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right)\right]+\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right),$$

in view of (2.6) and (2.7), we can write

$$\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right)\le M_2+\frac{\bar{p}}{\delta+1}c_2^{\delta+1}\lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}}\left\|v^{(k)}\right\|_2^{\delta+1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{mT}\left|\frac{\partial F(n,\theta v_{n+M}^{(k)}+w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)})}{\partial v_1}v_{n+M}^{(k)}+\frac{\partial F(n,w_{n+M}^{(k)},\theta v_n^{(k)}+w_n^{(k)})}{\partial v_2}v_n^{(k)}\right|\le$$

$$\le M_2+\frac{\bar{p}}{\delta+1}c_2^{\delta+1}\lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}}\left\|v^{(k)}\right\|_2^{\delta+1}+2M_0\sqrt{mT}\left\|v^{(k)}\right\|_2,$$

where $\theta\in(0,1)$. It is not difficult to see that $\left\{\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,w_{n+M},w_n^{(k)}\right)\right\}$ is bounded.

By (F_3), $\{w^{(k)}\}$ is bounded. Otherwise, assume that $\|w^{(k)}\|_2\to+\infty$ as $k\to\infty$. Since there exist $z^{(k)}\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}$, such that $w^{(k)}=\left(z^{(k)},z^{(k)},\cdots,z^{(k)}\right)^*\in E_{mT}$, for $k\to\infty$ we have

$$\|w^{(k)}\|_2=\left(\sum_{n=1}^{mT}\left|w_n^{(k)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{n=1}^{mT}|z^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mT}\,|z^{(k)}|\to+\infty.$$

Since $F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right)=F\left(n,z^{(k)},z^{(k)}\right)$, then $F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right)\to+\infty$ as $k\to\infty$. This contradicts the fact that $\left\{\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,w_{n+M}^{(k)},w_n^{(k)}\right)\right\}$ is bounded, and shows that J satisfies the P.S. condition. Lemma 2.2 is proved. □

Lemma 2.3. *Assume that the conditions (F_1), (F_4) and (F_5) are satisfied. Then J satisfies the P.S. condition.*

Proof. Let $\{u^{(k)}\}\subset E_{mT}$ be such that $\{J\left(u^{(k)}\right)\}$ is bounded and $J'\left(u^{(k)}\right)\to 0$ as $k\to\infty$. Then there exists a positive constant M_3 such that $\left|J\left(u^{(k)}\right)\right|\le M_3$. For k large enough, we have

$$\left|\left\langle J'\left(u^{(k)}\right),u^{(k)}\right\rangle\right|\le\left\|u^{(k)}\right\|_2.$$

Therefore

$$M_3+\frac{1}{\delta+1}\left\|u^{(k)}\right\|_2\ge J\left(u^{(k)}\right)-\frac{1}{\delta+1}\left\langle J'\left(u^{(k)}\right),u^{(k)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{n=1}^{mT}\left[F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-\frac{1}{\delta+1}\left(\frac{\partial F\left(n-M,u_n^{(k)},u_{n-M}^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right)\right]=\sum_{n=1}^{mT}\left[F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{\delta+1}\left(\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}\cdot u_{n+M}^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right)\Bigg].$$

Next, taking

$$I_1=\left\{n\in\mathbf{Z}(1,mT)|\sqrt{\left(u_{n+M}^{(k)}\right)^2+\left(u_n^{(k)}\right)^2}\geq R_1\right\},$$

$$I_2=\left\{n\in\mathbf{Z}(1,mT)|\sqrt{\left(u_{n+M}^{(k)}\right)^2+\left(u_n^{(k)}\right)^2}<R_1\right\},$$

in view of (F_4), we can write

$$M_3+\frac{1}{\delta+1}\left\|u^{(k)}\right\|_2\geq\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-$$

$$-\frac{1}{\delta+1}\sum_{n\in I_1}\left[\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}\cdot u_{n+M}^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right]$$

$$-\frac{1}{\delta+1}\sum_{n\in I_2}\left[\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}\cdot u_{n+M}^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right]$$

$$\geq\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-\frac{\alpha}{2}\sum_{n\in I_1}F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)$$

$$-\frac{1}{\delta+1}\sum_{n\in I_2}\left[\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}\cdot u_{n+M}^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right]$$

$$=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=1}^{mT}F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)+\frac{1}{\delta+1}\sum_{n\in I_2}\left[\frac{\alpha}{2}(\delta+1)F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}\cdot u_{n+M}^{(k)}-\frac{\partial F\left(n,u_{n+M}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}\cdot u_n^{(k)}\right].$$

The continuity of $\frac{\alpha}{2}(\delta+1)F(n,v_1,v_2)-\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1}v_1-\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}v_2$ with respect to the second and third variables implies that there exists a constant $M_4>0$ such that

$$\frac{\alpha}{2}(\delta+1)F(n,v_1,v_2)-\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1}v_1-\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}v_2\geq-M_4,$$

for $n\in\mathbf{Z}(1,mT)$ and $\sqrt{v_1^2+v_2^2}\leq R_1$. Therefore, by (F_5), we get

$$M_3+\frac{1}{\delta+1}\left\|u^{(k)}\right\|_2\geq\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)a_1\sum_{n=1}^{mT}\left|u_n^{(k)}\right|^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)}-M_5,$$

where $M_5=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)a_2mT+\frac{1}{\delta+1}mTM_4$.

Combining the last inequality with (2.4), we obtain

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)a_1c_1^{\frac{?}{2}(\delta+1)}\left\|u^{(k)}\right\|_2^{\frac{?}{2}(\delta+1)}-\frac{1}{\delta+1}\left\|u^{(k)}\right\|_2\leq M_3+M_5.$$

This implies that the sequence $\{\|u^{(k)}\|_2\}$ is bounded on the finite dimensional space E_{mT}, and as a consequence, it contains a convergent subsequence. Lemma 2.3 is proved. □

3. Proofs of the main results

In this Section, we prove our main results by using the critical point theory.

Proof of Theorem 1.1. Observe first that by Lemma 2.2, the functional J satisfies the P.S. condition. Hence, in order to prove Theorem 1.1 by using the Saddle Theorem, we need to verify the conditions (J_1) and (J_2). From (2.8) and (F_2^*), for any $v\in V$, we have

$$\begin{aligned}J(v)&=-H(v)+\sum_{n=1}^{mT}F(n,v_{n+M},v_n)\\&\leq-\frac{p}{\delta+1}c_1^{\delta+1}\lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}}\|v\|_2^{\delta+1}+mTM_1+M_0\sum_{n=1}^{mT}(|v_{n+M}|+|v_n|)\\&\leq-\frac{p}{\delta+1}c_1^{\delta+1}\lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}}\|v\|_2^{\delta+1}+mTM_1+2M_0\sqrt{mT}\|v\|_2\to-\infty\text{ as }\|v\|_2\to+\infty.\end{aligned}$$

Therefore, it is easy to see that the condition (J_1) is satisfied.

To verify the condition (J_2), notice that for any $w\in W$, $w=(w_1,w_2,\cdots,w_{mT})^*$ there exists $z\in\mathbf{R}$ such that $w_n=z$ for all $n\in\mathbf{Z}(1,mT)$. Next, in view of (F_3), there exists a constant $R_0>0$ such that $F(n,z,z)>0$ for $n\in\mathbf{Z}$ and $|z|>\frac{R_0}{\sqrt{2}}$. Let $M_6=\min_{n\in\mathbf{Z},|z|\leq R_0/\sqrt{2}}F(n,z,z)$ and $M_7=\min\{0,M_6\}$. Then we have

$$F(n,z,z)\geq M_7,\ \ (n,z,z)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^2.$$

Therefore

$$J(w)=\sum_{n=1}^{mT}F(n,w_{n+M},w_n)=\sum_{n=1}^{mT}F(n,z,z)\geq mTM_7,\ \ w\in W,$$

implying that the condition (J_2) is satisfied. Thus, the conditions of (J_1) and (J_2) are satisfied. and the result follows. Theorem 1.1 is proved. □

Proof of Theorem 1.2. By Lemma 2.3, the functional J satisfies the P.S. condition. Hence to apply the Saddle Point Theorem, it is enough to show that J satisfies the conditions (J_1) and (J_2).

To this end, observe first that for any $w \in W$, since $H(w) = 0$, we have

$$J(w) = \sum_{n=1}^{mT} F(n, w_{n+M}, w_n),$$

and by (F_5)

$$J(w) \geq a_1 \sum_{n=1}^{mT} \left(\sqrt{w_{n+M}^2 + w_n^2}\right)^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} - a_2 mT \geq -a_2 mT.$$

Combining this with (F_4'), (2.4) and (2.8), for any $v \in V$, we can write

$$\begin{aligned} J(v) &\leq -\frac{p}{\delta+1} c_1^{\delta+1} \lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v\|_2^{\delta+1} + a_3 \sum_{n=1}^{mT} \left(\sqrt{v_{n+M}^2 + v_n^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} + a_4 mT \\ &\leq -\frac{p}{\delta+1} c_1^{\delta+1} \lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v\|_2^{\delta+1} + a_3 c_2^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} \left[\sum_{n=1}^{mT} \left(v_{n+M}^2 + v_n^2\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} + a_4 mT \\ &\leq -\frac{p}{\delta+1} c_1^{\delta+1} \lambda_{\min}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v\|_2^{\delta+1} + 2^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} a_3 c_2^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} \|v\|_2^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)} + a_4 mT. \end{aligned}$$

Let $\mu = -a_2 mT$. Since $1 < \alpha < 2$, there exists a constant $\rho > 0$ large enough such that

$$J(v) \leq \mu - 1 < \mu, \ \forall v \in V, \ \|v\|_2 = \rho.$$

Therefore, by Lemma 2.1, the equation (1.1) has at least one mT-periodic solution. Theorem 1.2 is proved. □

Proof of Theorem 1.3. Similar to the proof of Lemma 2.3, we can show that the functional J satisfies the P.S. condition. We prove the theorem by using the Saddle Point Theorem. We first verify the condition (J_1). To this end, observe that (F_4) clearly implies (F_4'). Hence for any $v \in V$, by (F_4') and (2.4), we have $J(v) \to -\infty$ as $\|v\|_2 \to +\infty$.

Next, we show that J satisfies the condition (J_2). For any given $v_0 \in V$ and $w \in W$, we set $u = v_0 + w$. Then we can write

$$J(u) = -H(u) + \sum_{n=1}^{mT} F(n, u_{n+M}, u_n) = -H(v_0) + \sum_{n=1}^{mT} F(n, (v_0)_{n+M} + w_{n+M}, (v_0)_n + w_n)$$

$$\geq -\frac{\bar{p}}{\delta+1} c_2^{\delta+1} \lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v_0\|_2^{\delta+1} + a_5 \sum_{n=1}^{mT} |(v_0)_n + w_n|^{\frac{\beta}{2}(\delta+1)}$$

$$\begin{aligned} &\geq -\frac{\bar{p}}{\delta+1} c_2^{\delta+1} \lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v_0\|_2^{\delta+1} + a_5 c_1^{\frac{\beta}{2}(\delta+1)} \left[\sum_{n=1}^{mT} |(v_0)_n + w_n|^2\right]^{\frac{\beta}{2}(\delta+1)} \\ &= -\frac{\bar{p}}{\delta+1} c_2^{\delta+1} \lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v_0\|_2^{\delta+1} + a_5 c_1^{\frac{\beta}{2}(\delta+1)} \left[\|v_0\|_2^2 + \|w\|_2^2\right]^{\frac{\beta}{2}(\delta+1)} \end{aligned}$$

$$\geq -\frac{\bar{p}}{\delta+1} c_2^{\delta+1} \lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}} \|v_0\|_2^{\delta+1} + a_5 c_1^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} \|v_0\|_2^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} + a_5 c_1^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} \|w\|_2^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)}.$$

Since $1 < \gamma < 2$, there exists a constant $\eta > 0$ small enough such that

$$J(v_0 + w) \geq \eta^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} \left[a_5 c_1^{\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} - \frac{\bar{p}}{\delta+1} c_2^{\delta+1} \lambda_{\max}^{\frac{\delta+1}{2}} \eta^{\delta+1-\frac{\gamma}{2}(\delta+1)} \right] =: \nu > 0,$$

for $v_0 \in V$ with $\|v_0\|_2 = \eta$ and for any $w \in W$. Then for $v_0 \in V$ and for any $w \in W$, we get $\|v_0\|_2 = \eta$ and $J(v_0 + w) \geq \nu > 0$.

Hence in view of Saddle Point Theorem there exists a critical point $u \in E_{mT}$, which corresponds to a mT-periodic solution of equation (1.1).

Noting that $J(0) = 0$ and $J(\bar{u}) \geq \nu > 0$, we conclude that the critical point $\bar{u}$ of J is a nontrivial mT-periodic solution of equation (1.1). This completes the proof of Theorem 1.3. □

Proof of Theorem 1.4. The proof repeated the same arguments as those used in the proof of Theorem 1.3, and so we omit the details.

4. Examples

As an application of the main theorems, we give two examples to illustrate our results.

Example 4.1. For all $n \in \mathbf{Z}$ consider the equation:

$$\Delta\left(p_n (\Delta u_{n-1})^{\delta}\right) + \alpha(\delta+1) u_n \left[\psi(n)\left(u_{n+M}^2 + u_n^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1} + \psi(n-M)\left(u_n^2 + u_{n-M}^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1}\right] = 0. \tag{4.1}$$

where $\{p_n\}$ is a sequence of real numbers, $\delta > 0$ is the ratio of odd naturals M is a given nonnegative integer, ψ is continuously differentiable and $\psi(n) > 0$, T is a given positive integer, $p_{n+T} = p_n > 0$, $\psi(n+T) = \psi(n)$ and $1 < \alpha < 2$. We have

$$f(n, v_1, v_2, v_3) = \alpha(\delta+1) v_2 \left[\psi(n)\left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1} + \psi(n-M)\left(v_2^2 + v_3^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1}\right]$$

$$F(n, v_1, v_2) = \psi(n)\left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)}.$$

Therefore

$$\frac{\partial F(n-M, v_2, v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(n, v_1, v_2)}{\partial v_2} =$$

$$= \alpha(\delta+1) v_2 \left[\psi(n)\left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1} + \psi(n-M)\left(v_2^2 + v_3^2\right)^{\frac{\alpha}{2}(\delta+1)-1}\right].$$

It is easy to verify that all the assumptions of Theorem 1.3 are satisfied. Consequently, for any given natural m equation (4.1) has at least one nontrivial mT-periodic solution.

Example 4.2. For all $n \in \mathbf{Z}$ consider equation (4.1) for $\psi(n) = 6 + \cos^2(\frac{n\pi}{T})$, $\alpha \in (0,2)$. It is easy to verify that all the assumptions of Theorem 1.4 are satisfied. Consequently, for any given natural m equation (4.1) has at least one nontrivial mT-periodic solution.

Список литературы

[1] R. P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Marcel Dekker, New York (2000).

[2] X. C. Cai, J. S. Yu and Z. M. Guo, "Periodic solutions of a class of nonlinear difference equations via critical point method", Comput. Math. Appl., **52**, (12), 1639 – 1647 (2006).

[3] P. Chen and H. Fang, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order p-Laplacian difference equations", Adv. Difference Equ., **2007**, 1 – 9 (2007).

[4] P. Chen and X. H. Tang, "Existence of infinitely many homoclinic orbits for fourth-order difference systems containing both advance and retardation", Appl. Math. Comput., **217**, (9), 4408 – 4415 (2011).

[5] P. Chen and X. H. Tang, "Existence and multiplicity of homoclinic orbits for 2nth-order nonlinear difference equations containing both many advances and retardations", J. Math. Anal. Appl., **381**, (2), 485 – 505 (2011).

[6] P. Chen and X. H. Tang, "Infinitely many homoclinic solutions for the second-order discrete p-Laplacian systems", Bull. Belg. Math. Soc., **20**, (2), 193 – 212 (2013).

[7] P. Chen and X. H. Tang, "Existence of homoclinic solutions for some second-order discrete Hamiltonian systems", J. Difference Equ. Appl., **19**, (4), 633 – 648 (2013).

[8] P. Chen and Z. M. Wang, "Infinitely many homoclinic solutions for a class of nonlinear difference equations", Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **47**, 1 – 18 (2012).

[9] J. R. Esteban and J. L. Vazquez, "On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media", Nonlinear Anal., **10**, (11), 1303 – 1325 (1986).

[10] C. J. Guo, R. P. Agarwal, C. J. Wang and D. O'Regan, "The existence of homoclinic orbits for a class of first order superquadratic Hamiltonian systems", Mem. Differential Equations Math. Phys., **61**, 83 – 102 (2014).

[11] C. J. Guo, D. O'Regan and R. P. Agarwal, "Existence of multiple periodic solutions for a class of first-order neutral differential equations", Appl. Anal. Discrete Math., **5**, (1), 147 – 158 (2011).

[12] Z. M. Guo and J. S. Yu, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations", Sci. China Math, **46**, (4), 506 – 515 (2003).

[13] Z. M. Guo and J. S. Yu, "The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations", J. London Math. Soc., **68**, (2), 419 – 430 (2003).

[14] J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer, New York (1989).

[15] M.S. Peng, Q.L. Xu and L.H. Huang, et al., "Asymptotic and oscillatory behavior of solutions of certain second order nonlinear difference equations", Comput. Math. Appl., **37**, (3) 9 – 18 (1999).

[16] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, Amer. Math. Soc., Providence, RI, New York (1986).

[17] J. S. Yu, Z. M. Guo and X. F. Zou, "Periodic solutions of second order self-adjoint difference equations", J. London Math. Soc., **71**, (2), 146 – 160 (2005).

[18] J. S. Yu, H. P. Shi and Z. M. Guo, "Homoclinic orbits for nonlinear difference equations containing both advance and retardation", J. Math. Anal. Appl., **352**, (2), 799 – 806 (2009).

Поступила 19 сентября 2014

Cover to cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 51, No. 1, 2016

CONTENTS

А Ж 418
2016, т. 51, N 2

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 51, номер 2, 2016

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 51, No. 2, 2016

Contents