

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2016

Խ Մ Բ Ա Գ Բ Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

О ПОВЕДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

М. Г. ГРИГОРЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: gmarting@ysu.am; knavasar@ysu.am

Аннотация. В данной работе доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ряд Фурье-Уолша функции $\tilde{f}(x)$ сходится по норме $L^1[0, 1]$ и все члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.

MSC2010 numbers: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Коэффициенты Фурье; система Уолша; сходимость по L^1 норме.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена изучению поведения коэффициентов Фурье суммируемых функций по системе Уолша, а также, “квази” абсолютной сходимости рядов Фурье-Уолша, с точки зрения классических теорем об исправлении (см. [1], [2]).

Работы [3] – [10] были посвящены теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера-Шаудера) скорректированной функции монотонно убывали.

Напомним определение системы Уолша-Пэли $\Phi = \{W_k\}$ (см. [11], [12]).

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_k,$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}; 1), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) W_k(x), \quad \text{где } c_k(f) = \int_0^1 f(x) W_k(x) dx,$$

$$G_m(x, f) = \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \varphi_k(x) \quad \text{где } |c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{Spec}(f) = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad c_k(f) \neq 0\}.$$

Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результатам, полученным в настоящей работе.

Для системы Хаара $\chi = \{\chi_n(x)\}$ в работе [3] (см. также [4], [5]) установлено, что для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $a_k = o(\frac{1}{\sqrt{k}})$, $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для произвольной $f(x) \in L^1(0, 1)$ можно было найти функцию $\bar{f}(x) \in L^1(0, 1)$, $\bar{f}(x) = f(x)$ на E , такую, что $\int_0^1 \bar{f}(x) \chi_n(x) dx = a_n$ для всех $n \in \text{Spec}(\bar{f})$.

Для системы Уолша $\{W_n\}$ нами были получены следующие результаты

а) (см. [6] и [7]) Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье - Уолша сходится по норме $L^1[0, 1]$ и почти всюду на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.

б) (см. [7]) Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0, 1)$ можно найти такую функцию $\bar{f} \in L^p(0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \bar{f}\} < \varepsilon$, что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\bar{f})|\}$ расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\bar{f})$ коэффициенты Фурье исправленной функции $\bar{f}(x)$ по системе Уолша).

в) (см. [8]) Для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для произвольной $f(x) \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\bar{f}(x) \in L^1[0, 1]$, $\bar{f}(x) = f(x)$ на E такую, что ее ряд Фурье-Уолша сходится к $\bar{f}(x)$ по норме $L[0, 1]$ и $|c_n(\bar{f})| = a_n$ для всех $n \in \text{spec}(\bar{f})$.

Отметим, что из доказательств теорем работ [4]–[8] не видно, можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

В настоящей работе доказываемся, что для системы Уолша это возможно, т.е. исправленную функцию $\bar{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_k(\bar{f})| > |c_{k+1}(\bar{f})|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Основными результатами настоящей статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. Для любого числа $\varepsilon \in (0; 1)$ существует измеримое множество $E \subset [0; 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0; 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0; 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье-Уолша сходится по норме $L^1[0; 1]$ и все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\bar{f}$ по системе Уолша, по модулю расположены в убывающем порядке.

Плотностью подмножества B неотрицательных целых чисел называется величина

$$\rho(B) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n},$$

где B_n — число элементов из B , не превышающих n .

Теорема 1.1 является следствием следующего утверждения.

Теорема 1.2. Для любого числа $\varepsilon \in (0; 1)$ существует измеримое множество $E \subset [0; 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0; 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0; 1]$, вида $\bar{f}(x) = \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x)$, совпадающую с f на E , такую, что

1. все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\bar{f}(x)$ по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке.

2. ряд Фурье-Уолша функции $\bar{f}_2(x)$ сходится к ней по норме $L^1[0; 1]$, а ряд Фурье-Уолша функции $\bar{f}_1$ абсолютно сходится к ней и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\bar{f}_1)| < \infty.$$

3. плотность $\text{Spec}(\bar{f}_1)$ равна 1 и

$$\text{Spec}(\bar{f}_1) \cup \text{Spec}(\bar{f}_2) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{Spec}(\bar{f}_1) \cap \text{Spec}(\bar{f}_2) = \emptyset.$$

Замечание 1.1. В связи со вторым утверждением теоремы 1.2 отметим, что исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ невозможно выбрать так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f})| < \infty$$

т.е. теорема 1.2 в этом смысле окончательна.

Отметим также, что в работе [13] А. М. Олевский доказал, что существует функция $g(x) \in C[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x)$ с условием $|\{x \in [0, 2\pi] ; f(x) = g(x)\}| > 0$, последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{a_n(f), b_n(f)\} \notin l_p$ при всех $p \in (0, 2)$.

Отметим также, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ в работе [14] построено измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно было найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе *сходится* по норме $L[0, 1]$ и $\{a_n(f), b_n(f)\} \in l_p$ при всех $p \in (2, \infty)$.

Замечание 1.2. Из теоремы 1.1 вытекает, что *жадный алгоритм* исправленной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Уолша *сходится* к ней по $L[0, 1]$ норме и

$$G_m(x, \tilde{f}, \Phi) = S_m(x, \tilde{f}, \Phi), \quad \forall x \in (0, 1), \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание 1.3. В теоремах 1.1 и 1.2 исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы ее ряд Фурье-Уолша *сходился почти всюду* на $[0, 1]$.

Возникают следующие вопросы, ответы на которых нам не известны.

Вопрос 1. Можно ли изменить значения любой измеримой функции $f(x)$ на множестве малой меры так, чтобы все члены или *все ненулевые члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Франклина по модулю расположены в убывающем порядке?

Вопрос 2. Верны ли теоремы 1.1 и 1.2 для тригонометрической системы?

В тексте пользуемся следующими обозначениями:

$C, C_1, \dots$ — абсолютные постоянные;

$\chi_I(x)$ — характеристическая функция множества I ;

$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$ — норма в пространстве $L^1[0, 1]$.

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним некоторые свойства системы Уолша (см. [11], [17]). Для любых натуральных чисел m , i и k , $k < 2^m$,

$$(2.1) \quad W_{i2^m}(x) \cdot W_k(x) = W_{i2^m+k}(x).$$

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (2^{-m}; 1], \\ 2^m, & \text{если } x \in [0; 2^{-m}), \end{cases}$$

а для любого натурального числа M и для любого $x \in (0; 1)$

$$\left| \sum_{k=0}^M W_k(x) \right| \leq \frac{1}{x}.$$

Из последнего неравенства получаем, что для любых натуральных чисел M, N и n , $0 \leq M < N < 2^n$, имеем

$$(2.3) \quad \left\| \sum_{k=M}^N W_k(x) \right\| \leq \int_0^{2^{-n}} 2^n dx + \int_{2^{-n}}^1 \frac{2}{x} dx = 1 + 2n \ln 2 < 3n.$$

Нижеследующий результат был получен в [15].

Лемма 2.1. Для любого двоичного интервала $\Delta = [\frac{i}{2^\sigma}; \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $0 \leq i < 2^\sigma$, и для любого натурального числа $m > \sigma$, $m - \sigma$ четное, существует многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_k W_k(x)$$

такой, что

$$1) |\alpha_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}} \quad \text{при } 2^m \leq k < 2^{m+1};$$

$$2) P(x) = 1 \quad \text{если } x \in E_1, \quad |E_1| = \frac{1}{2}|\Delta|;$$

$$3) P(x) = -1 \quad \text{если } x \in E_2, \quad |E_2| = \frac{1}{2}|\Delta|;$$

$$4) P(x) = 0 \quad \text{если } x \notin \Delta;$$

$$5) \sup_M \left| \sum_{k=2^m}^M \alpha_k W_k(x) \right| \leq C \quad \text{если } x \in \Delta;$$

$$6) \sup_M \left| \sum_{k=2^m}^M \alpha_k W_k(x) \right| \leq 2^{-\frac{m-\sigma}{2}} \quad \text{если } x \notin \Delta,$$

где E_1 и E_2 суть конечные объединения двоичных интервалов.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. Пусть n_0 — некоторое натуральное число, а $\Delta = [\frac{\gamma-1}{2^\sigma}; \frac{\gamma}{2^\sigma}] \subset [\frac{1}{2^{n_0}}; 1]$ двоичный интервал, тогда для любых чисел $\epsilon, b > 0$ и $l \neq 0$ существуют множество $E \subset \Delta$, с мерой $|E| > (1 - \epsilon)|\Delta|$, и многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x)$$

такие, что

1. $|a_{k+1}| \leq |a_k| \leq b$ для всех k ($2^{n_0} \leq k < 2^n - 1$);
2. $P(x) = l$ если $x \in E$;
3. $P(x) = 0$ если $x \in [\frac{1}{2^{n_0}}; 1] \setminus \Delta$;
4. $\sup_M \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq C|l||\Delta|$.

Доказательство леммы 2.2 Выберем натуральное число $\sigma_1 \geq \sigma + 2$ так, чтобы выполнялось условие

$$(2.4) \quad |l|2^{-\sigma_1} < b.$$

Интервал Δ представим в виде объединения двоичных интервалов

$$(2.5) \quad \Delta = \bigcup_{i=1}^{r_1} \Delta_i^{(1)}, \text{ с мерой } |\Delta_i^{(1)}| = 2^{-\sigma_1}, \quad (i = 1, 2, \dots, r_1, \quad r_1 = 2^{\sigma_1 - \sigma}).$$

Выберем натуральное число m_1 так, что $m_1 - \sigma_1$ — четное число и

$$(2.6) \quad m_1 > \max\{\sigma_1 + 2\sigma; \quad n_0\}, \quad 2^{\frac{m_1}{2}} > (m_1 + \sigma_1)2^{\frac{\sigma_1}{2}}.$$

Пусть $n_1 = m_1 + \sigma_1 - \sigma + 1$ и

$$Q'_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_k W_k(x) \equiv \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} W_k(x).$$

Из (2.4) следует, что

$$(2.7) \quad a_k = \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < |l|2^{-\sigma_1} < b \quad \text{для всех} \quad 2^{n_0} \leq k < 2^{n_1}.$$

А из (2.2) и (2.3) получаем, что

$$(2.8) \quad Q'_1(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \in (2^{-n_0}; 1), \quad \|Q'_1(x)\| \leq 2 \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < \frac{|l||\Delta|}{2},$$

$$(2.9) \quad \sup_{M < 2^{n_1}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 3n_1 \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < |l||\Delta|.$$

Теперь для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r_1\}$, применив лемму 2.1 для интервала $\Delta_i^{(1)}$ и числа m_1 , получаем полином по системе Уолша

$$P_i^{(1)}(x) = \sum_{k=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} l\alpha_k^{(i)} W_k(x)$$

с коэффициентами (см. также (2.6))

$$(2.10) \quad |l\alpha_k^{(i)}| = |l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} \leq |l| \frac{2^{-\sigma_1}}{m_1 + \sigma_1} \leq |l| \frac{2^{-\sigma_1}}{n_1} = a_{2^{n_1}-1} \quad (2^{m_1} \leq k < 2^{m_1+1}).$$

Обозначим

$$(2.11) \quad P_1'(x) = \sum_{i=1}^{r_1} P_i^{(1)}(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из определения полинома $P_1'(x)$ следует, что (см. лемму 2.1 и формулы (2.1) и (2.5))

$$(2.12) \quad P_1'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \Delta, \\ l, & \text{если } x \in E_1', \\ -l, & \text{если } x \in E_1'', \end{cases}$$

где E_1' и E_1'' — конечные объединения двоичных интервалов, а $|E_1'| = |E_1''| = 2^{-\sigma-1} = \frac{1}{2}|\Delta|$. Ясно, что

$$\|P_1'\| = \sum_{i=1}^{r_1} \|P_i^{(1)}\| = \sum_{i=1}^{r_1} |l||\Delta_i^{(1)}| = |l||\Delta|.$$

Обозначим

$$Q_1(x) = \sum_{k=0}^{2^{n_1}-1} |l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} W_k(x), \quad Q_1''(x) = \sum_{i=1}^{r_1} Q_1(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из (2.1), (2.2) и определения Q_1'' следует, что

$$Q_1''(x) = 0, \quad \text{при } x > 1/2^{n_0} > 1/2^{m_1}.$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q_1'(x) + Q_1''(x) + P_1'(x).$$

Ясно, что модули коэффициентов a_k при $2^{n_1} \leq k < 2^{n_1+1}$ равны $|l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}}$, (см. (2.1) и (2.11)), поэтому для коэффициентов полинома $P_1(x)$ получаем (см. (2.7) и (2.10))

$$(2.13) \quad b > |a_{2^{n_0}}| = |a_{2^{n_0}+1}| = \dots = |a_{2^{n_1}-1}| \geq |a_{2^{n_1}}| = \dots = |a_{2^{n_1+1}-1}|.$$

Допустим, что уже построены многочлены $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{j-1}(x)$, множества $E''_{j-1} \subset E''_{j-2} \subset \dots \subset E''_1 \subset \Delta$, и числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j-1}, m_1, m_2, \dots, m_{j-1}$, удовлетворяющие условиям

$$(2.14) \quad \sigma_{j-1} \geq \sigma + 2(j-1), \quad m_{j-1} > \sigma_{j-1} + 2\sigma,$$

$$P_{j-1}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-2}+1}}^{2^{n_{j-1}+1}-1} a_k W_k(x) = -2^{j-2}l \quad \text{если } x \in E''_{j-1},$$

(при $j = 2$ под $2^{n_{j-2}+1}$ понимаем 2^{n_0}), где E''_{j-1} является конечным объединением двоичных интервалов, с мерой

$$|E''_{j-1}| = 2^{-(j-1)}|\Delta| = 2^{-(j-1)-\sigma},$$

а

$$|a_k| \geq |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}| = 2^{j-2}|l|2^{-\frac{m_{j-1}+\sigma_{j-1}}{2}}, \quad k \in [2^{n_{j-2}+1}, 2^{n_{j-1}+1}-1].$$

Выберем натуральное число σ_j так, чтобы

$$(2.15) \quad \sigma_j > \frac{m_{j-1} + \sigma_{j-1}}{2} + 2$$

и множество E''_{j-1} представлялось в виде

$$E''_{j-1} = \bigcup_{i=1}^{r_j} \Delta_i^{(j)},$$

где $\Delta_i^{(j)}$ двоичный интервал с мерой $|\Delta_i^{(j)}| = 2^{-\sigma_j}$, $i = 1, 2, \dots, r_j$, и $r_j = 2^{\sigma_j - \sigma - (j-1)}$.

Из (2.14) и (2.15) следует, что

$$(2.16) \quad \sigma_j > \sigma_{j-1} + 2 \geq \sigma + 2j.$$

Выберем натуральное число m_j так, чтобы $m_j - \sigma_j$ было четным,

$$(2.17) \quad m_j > \max\{\sigma_j + 2\sigma + 2j; n_{j-1} + 1\} \quad \text{и} \quad 2^{\frac{m_j}{2}} > (m_j + \sigma_j)2^{\frac{\sigma_j}{2}}.$$

Пусть $n_j = m_j + \sigma_j - \sigma - (j-1) + 1$ и

$$Q'_j(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j}-1} a_k W_k(x) \equiv \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j}-1} W_k(x).$$

Из (2.15) следует, что при $2^{n_{j-1}+1} \leq k \leq 2^{n_j} - 1$

$$(2.18) \quad |a_k| = \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} < 2^{j-2}|l|2^{-\frac{m_{j-1}+\sigma_{j-1}}{2}} = |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}|,$$

т.е. модули коэффициентов многочлена $Q'_j(x)$ меньше, чем модули коэффициентов $P_{j-1}(x)$. Аналогично (2.8) и (2.9), для многочлена $Q'_j(x)$ получаем (см. также (2.16) и (2.3))

$$(2.19) \quad Q'_j(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > 2^{-n_0} > 2^{-(n_{j-1}+1)},$$

$$(2.20) \quad \|Q'_j(x)\| \leq 2 \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \leq \frac{|l||\Delta|}{2^j},$$

$$(2.21) \quad \sup_{M < 2^{n_j}} \left\| \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 3n_j \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \leq \frac{|l||\Delta|}{2^{j-1}}.$$

Для каждого $i = 1; 2; \dots; r_j$, применив лемму 2.1 при $m = m_j$ и $\Delta = \Delta_i^{(j)}$, получаем полином

$$P_i^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{m_i}}^{2^{m_j+i}-1} 2^{j-1} l \alpha_k^{(i)} W_k(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию (см. также (2.17))

$$(2.22) \quad 2^{j-1} |l \alpha_k^{(i)}| = 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} \leq 2^{j-1} |l| \frac{2^{-\sigma_j}}{(m_j + \sigma_j)} \leq 2^{j-1} |l| \frac{2^{-\sigma_j}}{n_j},$$

т.е. меньше, чем коэффициенты полинома $Q'_j(x)$.

Обозначим

$$P'_j(x) = \sum_{i=1}^{r_j} P_i^{(j)}(x) W_{2^{n_j} + (i-1)2^{m_j+i}}(x)$$

$$E'_j = \{x \in E''_{j-1} : l P'_j(x) > 0\}, \quad E''_j = \{x \in E''_{j-1} : l P'_j(x) < 0\}.$$

Из определения полинома $P'_j(x)$, (2.1) и леммы 2.1 следует, что

$$(2.23) \quad P'_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin E''_{j-1}, \\ 2^{j-1} l, & \text{если } x \in E'_j, \\ -2^{j-1} l, & \text{если } x \in E''_j, \end{cases}$$

а E'_j и E''_j являются конечными объединениями двоичных интервалов, с мерой $|E'_j| = |E''_j| = \frac{1}{2} |E''_{j-1}| = \frac{1}{2^j} |\Delta|$. Ясно, что

$$(2.24) \quad \|P'_j\| = \sum_{i=1}^{r_j} \|P_i^{(j)}\| = \sum_{i=1}^{r_j} 2^{j-1} |l| |\Delta_i^{(j)}| = 2^{j-1} |l| |E''_{j-1}| = |l| |\Delta|.$$

Обозначим

$$Q_j(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_j}-1} 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} W_k(x),$$

$$Q''_j(x) = \sum_{i=1}^{r_j} Q_j(x) W_{2^{n_j} + (i-1)2^{m_j+i}}(x).$$

Из определения полинома $Q_j''(x)$ и формул (2.2) и (2.17) следует, что

$$(2.25) \quad Q_j''(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > 2^{-n_0} > 2^{-n_j}.$$

$$(2.26) \quad \|Q_j''(x)\| \leq r_j 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} \leq 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2} - \sigma} |l| < 2^{-j} |l| |\Delta|.$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_j(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q_j'(x) + Q_j''(x) + P_j'(x).$$

Ясно, что модули коэффициентов a_k , при $2^{n_j} \leq k < 2^{n_j+1}$, равны $2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}}$, (см. (2.1)), поэтому, для коэффициентов полинома $P_j(x)$ получаем (см. также (2.18) и (2.22))

$$(2.27) \quad |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}| \geq |a_{2^{n_{j-1}+1}}| = \dots = |a_{2^{n_j}-1}| \geq |a_{2^{n_j}}| = \dots = |a_{2^{n_j+1}-1}|.$$

Таким образом, по индукции, определяются полиномы $\{Q_j'\}$, $\{Q_j''\}$, $\{P_j'\}$, $\{P_j\}$ и множества $E_1'' \supset E_2'' \supset \dots$ удовлетворяющие условиям (2.19)–(2.27).

Пусть $q = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q+1}-1} a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^q P_j(x) = \sum_{j=1}^q Q_j'(x) + \sum_{j=1}^q Q_j''(x) + \sum_{j=1}^q P_j'(x).$$

Из (2.12) и (2.23) следует, что при всех $r \leq q$

$$(2.28) \quad \sum_{j=1}^r P_j'(x) = \begin{cases} l, & \text{если } x \in \Delta \setminus E_r'', \\ -(2^r - 1)l, & \text{если } x \in E_r'', \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Если взять $E = \Delta \setminus E_q''$, то, очевидно, $|E| = |\Delta| - 2^{-q} |\Delta| > (1 - \varepsilon) |\Delta|$. Учитывая также (2.13), (2.27), (2.19), (2.25) и (2.28) получаем, что $P(x)$ и множество E удовлетворяют пунктам 1)–3) леммы 2.2. Ясно также, что при всех $r \leq q$

$$(2.29) \quad \left\| \sum_{j=1}^r P_j' \right\| = |l| |\Delta \setminus E_r''| + (2^r - 1) |l| |E_r''| < 2 |l| |\Delta|.$$

Пусть M – некоторое натуральное число с условием $2^{n_0} \leq M < 2^{n_q+1}$. Тогда для некоторого r , $(1 \leq r \leq q)$, $M \in [2^{n_{r-1}+1}, 2^{n_r+1})$ (при $r = 1$ вместо $2^{n_{r-1}+1}$ нужно понимать 2^{n_0}). В случае, когда $M < 2^{n_r}$, полином $\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^{r-1} Q_j'(x) + \sum_{j=1}^{r-1} Q_j''(x) + \sum_{j=1}^{r-1} P_j'(x) + \sum_{k=2^{n_{r-1}+1}}^M a_k W_k(x),$$

поэтому из (2.8) и (2.20) получаем, что норма первого слагаемого меньше чем $|l||\Delta|$. Аналогичную оценку можно получить и для нормы второго слагаемого (см. (2.26)). Следовательно, с учетом (2.29) и (2.21) имеем, что

$$(2.30) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 5|l||\Delta|.$$

Если же $M \geq 2^{n_r}$, то при некотором числе i , $(0 \leq i < 2^{n_r - m_r})$, $M \in [2^{n_r} + i2^{m_r}; 2^{n_r} + (i+1)2^{m_r})$, следовательно, для нормы полинома $\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x)$ получаем

$$(2.31) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^r Q'_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r-1} Q''_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r-1} P'_j \right\| +$$

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r}}^{2^{n_r} + i2^{m_r} - 1} a_k W_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\|.$$

Сумма первых трех слагаемых, как и в прежнем случае, меньше чем $4|l||\Delta|$. Четвертое слагаемое оценивается как в (2.24) и (2.26) и меньше чем $2|l||\Delta|$. Для последнего слагаемого рассмотрим два случая.

В случае, когда число i четное, из определения многочлена $Q''_r(x)$, (2.3), (2.16) и (2.17) получаем, что

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\| = 2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \left\| \sum_{k=0}^{M - 2^{n_r} - i2^{m_r}} W_k(x) \right\| \leq$$

$$2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \cdot 3m_r < 2|l||\Delta|.$$

А если число i нечетное, то, с учетом пунктов 5) и 6) леммы 2.1, (2.1), (2.6), (2.17) и определения полинома $P_i^{(r)}(x)$, получаем, что

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\| = \int_{E''_{r-1}} + \int_{\{0;1\} \setminus E''_{r-1}} \leq C 2^{r-1} |l| |E''_{r-1}| +$$

$$2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \leq C |l||\Delta| + 2^{r-1} |l| 2^{-(\sigma+r)} < (C+1) |l||\Delta|,$$

где C постоянная из леммы 2.1. Следовательно, с учетом (2.30) и (2.31) получаем, что существует абсолютная постоянная C_1 такая, что для любого натурального числа M из промежутка $[2^{n_0}; 2^{n_q+1})$

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| < C_1 |l||\Delta|.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$, n_0 — натуральное число, а b_0 — некоторое положительное число. Пусть, далее, $f(x) = \sum_{k=1}^r l_k \chi_{\Delta_k}(x)$ — ступенчатая функция с условием $\text{supp}(f) \cap [2^{-n_0}; 1] \neq \emptyset$ и $\Delta_1; \Delta_2; \dots; \Delta_j$ — непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда существуют функция $g \in L^1[0; 1]$, многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} c_k W_k(x)$$

и множество $E \subset [2^{-n_0}; 1]$ такие, что

1. $|c_{k+1}| < |c_k| < b_0$ для всех k , $2^{n_0} \leq k < 2^n - 1$,
2. $|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$,
3. $g(x) = f(x)$, если $x \in E$,
4. $\|g\| \leq C\|f\|$,
5. $\|P(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$,
6. $\|\sum_{k=2^{n_0}}^M c_k W_k(x)\| \leq C\|f(x)\| + \varepsilon$ для всех натуральных $M \in [2^{n_0}; 2^n)$.

Доказательство леммы 2.3. Рассмотрим следующую функцию

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0}; 1]}(x) = \sum_{k=1}^r l'_k \chi_{\Delta'_k}(x)$$

где $l'_k \neq 0$, $1 \leq k \leq r$. Для каждого k , $1 \leq k \leq r$, поочередно применяя лемму 2.2 для интервала Δ'_k , чисел ε , $b = |a_{2^{n_k-1}-1}|$, (при $k = 1$ $b = \frac{b_0}{2}$), и $l = l'_k$, получаем многочлены по системе Уолша

$$P_k(x) = \sum_{i=2^{n_k-1}}^{2^{n_k}-1} a_i W_i(x)$$

и множества $E_k \subset \Delta'_k$ со следующими свойствами:

- A) $E_k \subset \Delta'_k$ $|E_k| > (1 - \varepsilon)|\Delta'_k|$,
- B) $\frac{1}{2}b_0 \geq |a_{2^{n_0}}| \geq |a_{2^{n_0}+1}| \geq \dots \geq |a_{2^{n_r}-1}|$,
- C) $P_k(x) = l'_k$, если $x \in E_k$,
- D) $P_k(x) = 0$, если $x \in [2^{-n_0}; 1] \setminus \Delta'_k$,
- E) $\sup_{2^{n_k-1} \leq M < 2^{n_k}} \left\| \sum_{i=2^{n_k-1}}^M a_i W_i(x) \right\| \leq C|l'_k||\Delta'_k|$.

Обозначим

$$E = [2^{-n_0}; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^r (\Delta'_k \setminus E_k),$$

$$(2.32) \quad g(x) = \sum_{k=1}^r P_k(x).$$

Из условия А) получаем, что $|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$. Поскольку на множестве E функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ совпадают, то в силу (2.32), С) и D) получаем, $g(x) = \bar{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in E$.

Пусть $\alpha_i = 2^{-i} \min\{b_0; \varepsilon\}$ и $c_i = a_i + \alpha_i$, $2^{n_0} \leq i < 2^{n_r}$. Тогда утверждение 1 леммы непосредственно следует из В). Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} c_i W_i(x) = g(x) + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i W_i(x).$$

Очевидно, что

$$\|P(x) - g(x)\| \leq \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i \leq \varepsilon.$$

Заметим, что $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$, поэтому, для любого $M \in (2^{n_0}; 2^{n_r})$, с учетом Е), получаем

$$(2.33) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^r C |U'_k| |\Delta'_k| = C \|\bar{f}\| \leq C \|f\|,$$

следовательно,

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M c_k W_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M \alpha_k W_k(x) \right\| \leq C \|f\| + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i \leq C \|f\| + \varepsilon.$$

Из (2.33), в частности, получаем $\|g\| \leq C \|f\|$. Лемма 2.3 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$ произвольное число, а

$$(3.1) \quad n_0 = \lfloor \log_2 \varepsilon^{-1} \rfloor + 1.$$

Рассмотрим последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами, с условием $\text{supp}(f_k) \cap (2^{-n_0}; 1) \neq \emptyset$. Если последовательно применим лемму 2.3, то можем найти последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, множеств $\{G_n\}$, ($G_n \subset [2^{-n_0}; 1]$), натуральных чисел $\{m_n\} \nearrow$, $\{l_n\} \nearrow$ и полиномов вида

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k^{(n)} W_k(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k W_k(x),$$

($m_0 = n_0$, $l_1 = 1$, $a_{2^{m_0-1}}^{(0)} = 1$), которые для всех чисел $n \geq 1$ и $k \in [2^{m_{n-1}}; 2^{m_n}-1]$ удовлетворяют условиям:

$$(3.2) \quad |a_{k+1}^{(n)}| < |a_k^{(n)}| < 2^{-2^{m_{n-1}}-l_n} < \frac{1}{2} |a_{2^{m_{n-1}}-1}^{(n-1)}|,$$

$$(3.3) \quad \bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad \text{если } x \in G_n, \quad \|\bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x)\| \leq 2^{-n-2},$$

$$(3.4) \quad |G_n| > 1 - 2^{-n-2} - 2^{-n_0},$$

$$(3.5) \quad \max_{2^{m_{n-1}} \leq k < 2^{m_n}} \left\| \sum_{j=2^{m_{n-1}}}^k a_j^{(n)} W_j(x) \right\| \leq C \|f_n(x)\| + 2^{-n-2}.$$

$$(3.6) \quad \|\bar{g}_n(x)\| \leq C \|f_n(x)\|.$$

Положим $G = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} G_n$. Очевидно, что (см. (3.1), (3.4)) $|G| > 1 - \varepsilon$.

Положим $b_k = b_k^{(0)} = 1 + 2^{-k}$, при $k = 0, 1, \dots, 2^{m_0} - 1$,

$$(3.7) \quad R_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_0}-1} b_k^{(0)} W_k(x).$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $k_1 > n_0$,

$$(3.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - (f(x) - R_0(x)) \right| dx = 0, \quad \|f_{k_n}(x)\| < 2^{-n}, \quad n \geq 2.$$

Положим

$$(3.9) \quad g_1(x) = \bar{g}_{k_1}(x), \quad Q_1(x) = \bar{Q}_{k_1}(x) = \sum_{j=2^{m_{k_1-1}}}^{2^{m_{k_1}}-1} a_j^{(k_1)} W_j(x),$$

$$b_j = b_j^{(1)} = 2^{-2^{m_{k_1-1}} - l_{k_1}} (1 + 2^{-j}), \quad j \in [2^{m_{k_1}}, 2^{m_{k_1+1}}),$$

$$R_1(x) = \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} b_j^{(1)} W_j(x).$$

Очевидно, что коэффициенты полинома $R_1(x)$ монотонно убывают, меньше коэффициентов полинома $R_0(x)$ и (см. (3.2) и (3.9)) больше, чем коэффициенты полинома $Q_1(x)$. Также имеем

$$\|R_1(x)\| \leq \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} b_j^{(1)} \leq \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} 2^{-2^{m_{k_1-1}}-l_{k_1}+1} \leq 2^{-m_{k_1-1}} \leq 2^{-1}.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$, $g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ и полиномы

$$Q_n(x) = \bar{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_n-1}}}^{2^{m_{\nu_n}}-1} a_j^{(\nu_n)} W_j(x), \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$(3.10) \quad R_n(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_n-1}}}^{2^{m_{\nu_n+1}}-1} b_j^{(n)} W_j(x), \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad \text{если } x \in G, \quad 1 \leq n \leq q-1, \quad \text{и}$$

$$(3.11) \quad \left\| \sum_{k=1}^n [(R_k(x) + Q_k(x)) - g_n(x)] \right\| < 2^{-(n-1)}, \quad 1 \leq n \leq q-1.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ так, чтобы

$$(3.12) \quad \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right) \right\| < 2^{-q-2},$$

$$m_{\nu_q-1} > m_{\nu_{q-1}} + q.$$

В силу (3.8) и (3.11) имеем

$$(3.13) \quad \left\| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| < 2^{-q} + 2^{-q+2} = 5 \cdot 2^{-q}.$$

Из (3.12) и (3.13) вытекает

$$(3.14) \quad \|f_{\nu_q}(x)\| < 6 \cdot 2^{-q}.$$

Поэтому (см. также (3.6))

$$(3.15) \quad \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\| < 6 \cdot 2^{-q} C = 2^{-q} C_1.$$

Положим

$$(3.16) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

$$(3.17) \quad Q_q(x) = \bar{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} a_k^{(\nu_q)} W_k(x),$$

$$(3.18) \quad b_j^{(q)} = 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) \leq 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}+1}, \quad j \in [2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}}),$$

$$(3.19) \quad R_q(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} b_j^{(q)} W_j(x)$$

Из (3.2), (3.12), (3.18) и монотонности последовательностей $\{m_n\}$ и $\{l_n\}$ следует, что для всех $j \in (2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}})$

$$(3.20) \quad |a_{2^{m_{\nu_q-1}}}^{(\nu_q)}| < 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}} < b_j^{(q)} < b_{j-1}^{(q)} < 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q-1}+1} \leq |a_{2^{m_{\nu_q-1}-1}}^{(\nu_{q-1})}|$$

и

$$(3.21) \quad \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} b_j^{(q)} = \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) < 2^{-m_{\nu_q-1}} < 2^{-q}.$$

Учитывая соотношения (3.16) и (3.3) получим

$$(3.22) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in G.$$

В силу (3.16), (3.11), (3.12) и (3.15) имеем

$$(3.23) \quad \|g_q(x)\| \leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right) \right\| + \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\| + \\ + \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| < 2^{-q-2} + C_1 2^{-q} + 2^{-(q-2)} = C_2 2^{-q}.$$

А из (3.16), (3.3), (3.12) и (3.21) получаем

$$(3.24) \quad \left\| \sum_{i=1}^q [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| \leq \left\| \bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x) \right\| + \|R_q(x)\| + \\ + \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [R_i(x) + Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\| < 2^{-(q-1)}.$$

В силу (3.5) и (3.14) имеем

$$(3.25) \quad \max_{2^{m_{\nu_q}-1} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q}-1}}^k a_j^{(\nu_q)} W_j(x) \right\| \leq C \|f_{\nu_q}(x)\| + 2^{-q-2} < C_3 2^{-q}.$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x) = f_{k_1}(x)$) и полиномов $\{Q_q(x)\}$, $\{R_q(x)\}$ удовлетворяющих условиям (3.19)–(3.25) для всех $q \geq 1$. Из (3.23) вытекает, что

$$(3.26) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |g_q(x)| dx < \infty.$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и последовательность чисел $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом

$$(3.27) \quad \tilde{f}(x) = R_0(x) + \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \\ d_k = \begin{cases} a_k, & k \in \bigcup_{q=1}^{\infty} [2^{m_{\nu_q}-1}, 2^{m_{\nu_q}}), \\ b_k, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (3.8), (3.22), (3.26) и (3.27) следует

$$\tilde{f}(x) \in L^1[0, 1], \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in G.$$

А из определения последовательности $\{d_n\}$ имеем (см. также (3.2), (3.7) и (3.20))

$$|d_n| > |d_{n+1}| > 0 \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

Пусть дано произвольное натуральное число $n > 2^{m_0}$, тогда для некоторого q , имеем $n \in [2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}})$, из соотношений (3.17), (3.19), (3.21), (3.23)–(3.25), (3.27) будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^n d_k W_k(x) - \tilde{f}(x) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| + \\ & + \sum_{i=q}^{\infty} \|g_i(x)\| + \max_{2^{m_{\nu_q-1}} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^k b_j^{(q)} W_j(x) \right\| + \\ (3.28) \quad & + \max_{2^{m_{\nu_q-1}} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^k a_j^{(\nu_q)} W_j(x) \right\| < 2^{-q} C_4. \end{aligned}$$

следовательно

$$d_k = \int_0^1 \tilde{f}(x) W_k(x) dx = c_n(\tilde{f}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$(3.29) \quad \tilde{f}_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(x), \quad \tilde{f}_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(x).$$

Из (3.25), (3.26), (3.16), (3.19) и (3.21) следует

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f}_1)| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q-1}}-1} b_j^{(q)} \leq \sum_{j=0}^{2^{m_0}-1} b_j^{(0)} + \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-q} < \infty.$$

Из (3.29), (3.10) и (3.12) следует, что $\rho(\text{Spec}(\tilde{f}_1)) = 1$. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper proves that for any $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0, 1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$ such that for each $f \in L^1[0, 1]$ there is a function $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ coinciding with f on E whose Fourier-Walsh series converges to $\tilde{f}$ in $L^1[0, 1]$ -norm, and the sequence $\{|c_k(\tilde{f})|\}_{n=0}^{\infty}$ is monotonically decreasing, where $\{c_k(\tilde{f})\}$ is the sequence of Fourier-Walsh coefficients of function $\tilde{f}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сб., **28:2**, 266 – 294 (1912).
- [2] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сб., **53:2**, 67 – 96 (1942).
- [3] M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 ", Analysis Math., **17**, 211 – 237 (1991).
- [4] М. Г. Григорян, С. Л. Горян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Analysis Mathematica, **32**, 49 – 80 (2006).

- [5] К. А. Навасардян, А. А. Степанян, "О рядах по системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42:4**, 53 – 66 (2007).
- [6] М. Г. Григорян, "Об усиленном L^1 -greedy свойстве системы Уолша", Изв. ВУЗ-ов, **5**, 26 – 37 (2008).
- [7] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппр.", Мат. сб., **но. 3**, стр. 49 – 78 (2012).
- [8] К. А. Навасардян, "О рядах Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42**, **но. 5**, 51 – 64 (2007).
- [9] M. G. Grigorian .A. A. Sargsyan, "On the coefficients of expansion of elements from $C[0,1]$ space by the Faber-Schauder system", Jorنال of Function Spaces and Applications, **2**, 34 – 42 (2011).
- [10] М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, "Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложения Фурь по системе Фабера-Шаудера", Мат. заметки, **93**, **но. 3**, 172 – 178 (2013).
- [11] Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов. Ряды и Преобразования Уолша, М., Наука (1987).
- [12] R. E. A. C. Paley, "A remarkable set of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., **34**, 241 – 279 (1932).
- [13] А. М. Олевский, *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана*, ДАН СССР, **238**, **но. 4**, 796-799 (1978).
- [14] М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, сер. мат., **57**, **но. 5**, 75 – 105 (1993).
- [15] К. А. Навасардян, "О нуль рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армсии, сер. Математика, **29**, **но. 1**, 50 – 68 (1994).
- [16] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "О рядах с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, сер. мат., **63**, **но. 1**, 41 – 60 (1999).
- [17] Б. С. Кашин. А. А. Саакян. Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).

Поступила 4 февраля 2015

СПЕКТРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Г. А. КАРАПЕТЯН, Н. С. САРИБЕКЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет

E-mails: gatnik_karapetyan@yahoo.com; narek.saribekyan@gmail.com

Аннотация. В данной статье приводится оценка изменения собственных значений задачи Дирихле для полуэллиптического оператора при изменении границы области, на которой ставится задача. Рассматриваются операторы произвольного четного порядка на открытых множествах с гладкой по Липшицу границей.

MSC2010 numbers: 35P15; 47A10; 47A75

Ключевые слова: Пространство Соболева, собственное значение, компактный оператор, полуэллиптический оператор, спектр, приближение, граничное условие Дирихле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $N \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^N, \mu = (1/l_1, \dots, 1/l_N)$ и Ω - открытое множество из $\mathbb{R}^n$. Мы будем рассматривать собственные значения задачи Дирихле с однородными краевыми условиями для оператора

$$(1.1) \quad Hu = \sum_{\substack{(\alpha, \mu)=1 \\ (N, \mu)=1}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u), \quad x \in \Omega$$

Пусть $A_{\alpha\beta}$ ограниченные, измеримые вещественнозначные функции, определенные на Ω и удовлетворяющие $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, а так же условию равномерной полуэллиптичности

$$(1.2) \quad \sum_{\substack{(\alpha, \mu)=1 \\ (N, \mu)=1}} A_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \geq \theta |\xi|^2, \quad \theta > 0$$

для всех $x \in \Omega$ и всех $\xi = \{\xi_\alpha\}_{(\alpha, \mu)=1}$, где $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$ суть независимые переменные $(|\xi|^2 = \sum_{(\alpha, \mu)=1} \xi_\alpha^2)$.

Для точной формулировки задачи на собственные значения, см. определение 2.6 и теорему 3.1.

Обозначим через $W^{1,2}(\Omega)$ пространство Соболева (классов эквивалентности) действительных функций из $L^2(\Omega)$, имеющих все обобщенные производные $D^\alpha u$, $(\alpha, \mu) \leq 1$, наделенных нормой

$$(1.3) \quad \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \sum_{(\alpha, \mu) \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}$$

Также обозначим через $W_0^{1,2}(\Omega)$ замыкание в $W^{1,2}(\Omega)$ пространства C^∞ -функций с компактным носителем в Ω .

Мы рассматриваем открытые множества Ω для которых спектр дискретный и может быть представлен в виде невозрастающей последовательности положительных собственных значений.

$$(1.4) \quad \lambda_1[\Omega] \leq \lambda_2[\Omega] \leq \dots \leq \lambda_n[\Omega] \leq \dots$$

Данное условие соблюдается когда $W^{1,2}(\Omega)$ является гильбертовым пространством и оператор (1.1) имеет компактный самосопряженный обратный (спектральная теорема на гильбертовом пространстве).

До того как перейти к анализу общего случая, мы приводим пример иллюстрирующий суть полученных в данной работе результатов.

Пример 1.1. Пусть $N = 2$, $l = (2, 1) \in \mathbb{N}^2$ и

$$A_{\alpha\beta} \equiv \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Имеем $\mu = (1/l_1, 1/l_2) = (1/2, 1)$.

Записывая оператор (1.1) для мульти-индексов α_1 и α_2 , получаем

$$(1.5) \quad Hu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Рассмотрим задачу Дирихле на собственные значения для оператора (1.5) в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ and } c < y < d\}.$$

Можно показать, что собственные значения данной задачи задаются следующей формулой:

$$\lambda_{m,n}[\Omega] = \lambda_m + \lambda_n,$$

где λ_m - действительные корни уравнения

$$\cos[\lambda_m^{1/4}(b-a)] \cosh[\lambda_m^{1/4}(b-a)] = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{d-c}\right)^2.$$

Из вышеприведенной формулы видно, что для любых заданных чисел n, m и $\varepsilon > 0$, можно найти прямоугольник Ω' такой, что

$$|\lambda_{m,n}[\Omega] - \lambda_{m,n}[\Omega']| < \varepsilon.$$

Однако во многих случаях аналитическое вычисление собственных значений не является возможным. Даже незначительное изменение границы рассматриваемой области может привести к усложнениям при попытке получить явную формулу для собственных значений.

Данная работа является попыткой ответить на следующий вопрос: как изменения области влияют на собственные значений и является ли возможным применение численных методов основанных на оценке этих изменений.

В данной статье доказывается оценка изменения собственных значений для полуэллиптических операторов произвольного четного порядка на N -мерных областях с непрерывными по Липшицу границами.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим для $u, v \in W_0^{l,2}(\Omega)$

$$(2.1) \quad Q_\Omega(u, v) = \int_\Omega \sum_{\substack{(\alpha, \mu)=1 \\ (|\beta, \nu|=1}} A_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta v dx.$$

Иногда мы будем писать $Q_\Omega(u)$ вместо $Q_\Omega(u, u)$. Рассматривается следующая задача на собственные значения

$$(2.2) \quad Q(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$$

для всех функций $v \in W_0^{l,2}(\Omega)$, при неизвестных $u \in W_0^{l,2}(\Omega)$ (собственные функции) и $\lambda \in \mathbb{R}$ (собственные значения).

Определение 2.1. Линейным оператором на банаховом пространстве $\mathcal{B}$ называется пара состоящая из плотного линейного подпространства L вместе с линейным отображением $A : L \rightarrow \mathcal{B}$. L назовем областью определения оператора A и будем писать $Dom(A) = L$.

Определение 2.2. Будем говорить, что оператор A с областью определения L плотном в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является симметричным, если для всех $u, v \in L$ имеет место

$$(Au, v) = (u, Av).$$

Определение 2.3. Пусть A линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда сопряженный оператор A^* задается условием

$$(Au, v) = (u, A^*v)$$

для всех $u \in \text{Dom}(A)$ и $v \in \text{Dom}(A^*)$. Область определения A^* определяется как множество $\mathcal{D}$ всех $v \in \mathcal{H}$, для которых существует $w \in \mathcal{H}$ такое, что

$$(Au, v) = (u, w)$$

для всех $u \in \text{Dom}(A)$.

Не трудно убедиться, что если A симметричный, то сопряженный оператор A^* является расширением A . ([3], стр. 7)

Определение 2.4. Оператор A является самосопряженным, если A симметричный оператор и $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^*)$. Это эквивалентно тому, что $A = A^*$.

Определение 2.5. Оператор A положительно определенный, если $(Au, u) > 0$ для всех $u \in \text{Dom}(A)$ отличных от нуля.

Определение 2.6. Действительное число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора (1.1) (для задачи Дирихле), если

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} \sum_{\substack{(\alpha, \beta) = 1 \\ (\beta, \mu) = 1}} A_{\alpha\beta} D^{\alpha} u D^{\beta} v dx = \lambda \int_{\Omega} u v dx,$$

для всех функций $v \in W_0^{l,2}(\Omega)$, при неизвестных собственных функций $u \in W_0^{l,2}(\Omega)$.

Определение 2.7. Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство. Линейный оператор $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется компактным если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ из $\mathcal{D}(A)$ последовательность $\{Ax_n\}$ имеет сходящую подпоследовательность. Обозначим множество всех компактных операторов на $\mathcal{H}$ через $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Заметим, что линейный компактный оператор является ограниченным и следовательно непрерывным.

Определение 2.8. Пусть $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ и $(\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_2})$ гильбертово пространства и $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. Будем говорить, что пространство $\mathcal{H}_1$ компактно вложено в пространство $\mathcal{H}_2$, и писать $\mathcal{H}_1 \subset\subset \mathcal{H}_2$ если оператор вложения (единичный оператор) $I : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ является компактным.

Определенное выше понятие компактного вложения выражает свойство, что одно пространство "хорошо вкладывается" в другое. Ниже приведенная теорема вложения устанавливает данное свойство для пространств Соболева (см. [7], теорема 12.1).

Теорема 2.1. Пусть $l \in \mathbb{N}^N$ и Ω является открытым множеством из $\mathbb{R}^N$ с непрерывной по Липшицу границей. Тогда $W^{l,2}(\Omega) \subset \subset L^2(\Omega)$.

Компактные операторы в гильбертовых пространствах являются естественным обобщением матриц: в гильбертовых пространствах класс этих операторов является замыканием класса операторов с конечным рангом. В силу этого факта, некоторые результаты из теории матриц обобщаются на класс компактных операторов.

Таковыми примерами являются известная спектральная теорема для компактных операторов и теорема о минимаксе, задающую вариационную формулу для вычисления собственных значений компактного оператора.

Теорема 2.2 (спектральная теорема, см. [3]). Пусть A - компактный, самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует счетный ортонормальный базис $\{u_n\}$ пространства $\mathcal{H}$ состоящий из собственных векторов оператора A , с собственными значениями $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Другими словами, спектральная теорема утверждает, что спектр компактного самосопряженного оператора дискретный. Кроме этого, если оператор также является положительно определенным, то спектр может быть представлен в виде возрастающей последовательности действительных чисел, стремящихся к нулю. Пусть оператор A имеет следующие собственные значения:

$$(2.4) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots,$$

где также учитывается и кратность каждого собственного значения. Следующая теорема дает метод нахождения собственных значений компактного, самосопряженного, положительно определенного оператора.

Теорема 2.3 (теорема о минимаксе, см. [8]). Пусть A компактный, самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с собственными значениями, удовлетворяющими (2.4) Тогда имеют место

следующие вариационные формулы для собственных значений:

$$(2.5) \quad \lambda_n = \max_{\substack{L_n \subset \mathcal{H} \\ \dim(L_n) = n}} \min_{\substack{u \in L_n \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$$

$$(2.6) \quad \lambda_n = \min_{\substack{L_{n-1} \subset \mathcal{H} \\ \dim(L_{n-1}) = n-1}} \max_{\substack{u \in L_{n-1}^\perp \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$$

Кроме того, минимум в (2.6) достигается когда L_{n-1} - линейная оболочка первых $n-1$ собственных векторов.

3. КОМПАКТНОСТЬ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Следующая лемма устанавливает эквивалентность нормы (1.3) с нормой определенной ниже в (3.1).

Лемма 3.1. Пусть $l \in \mathbb{N}^N$, $\mu = (1/l_1, \dots, 1/l_N)$ и Ω - открытое множество из $\mathbb{R}^N$ такое, что $W^{l,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. Тогда существует $c > 0$, что

$$(3.1) \quad \|u\|_{W^{l,2}(\Omega)} \leq c \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{(\alpha, \mu)=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

для всех $u \in W^{l,2}(\Omega)$.

Доказательство. См [7], доказательство теоремы 12.1. □

Теорема 3.1. Пусть $l \in \mathbb{N}^N$ и Ω - открытое множество из $\mathbb{R}^N$ такое, что $W^{l,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ (см. [7], §12 для достаточных условий на Ω). Пусть $A_{\alpha\beta}$ ограниченные действительныезначные измеримые функции определенные на Ω и удовлетворяющие $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ и условию полуэллиптичности (1.2).

Тогда существует положительно определенный линейный оператор T на $L^2(\Omega)$ с компактным самосопряженным обратным T^{-1} такой, что $\text{Dom}(T) = W_0^{l,2}(\Omega)$ и

$$\langle Tu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = Q_\Omega(u, v),$$

Доказательство. Используя условие полуэллиптичности (1.2) получим следующее неравенство

$$Q_\Omega(u, u) \geq \theta \sum_{(\alpha, \mu)=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad u \in W_0^{l,2}(\Omega).$$

Для $u \in W_0^{l,2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство Фридрихса (см. [9]):

$$\sum_{(\alpha, \mu)=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Применяя (3.1) и (1.2) получаем, что $Q_\Omega(u, v)$ является коэрцитивной билинейной формой на $W_0^{1,2}(\Omega)$, т.е.:

$$Q_\Omega(u, u) \geq c \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Из ограниченности коэффициентов $A_{\alpha,\beta}$ вытекает:

$$Q_\Omega(u, v) \leq c \sum_{(\alpha,\mu)=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \sum_{(\beta,\mu)=1} \|D^\beta v\|_{L^2(\Omega)},$$

откуда следует, что $Q_\Omega(u, v)$ ограничена на $W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$Q_\Omega(u, v) \leq c \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \quad \text{for } u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Следовательно, для любого $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $F_u(v) = Q_\Omega(u, v)$ - это непрерывный линейный функционал на $W_0^{1,2}(\Omega)$, который может быть расширен на все пространство $L^2(\Omega)$. Из теоремы Риса о представлении линейного непрерывного функционала следует, что существует $w_u \in L^2(\Omega)$ такой, что $F_u(v) = \langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ для всех $v \in W$. Обозначим $T = w_u$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Несложно увидеть, что оператор $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ обратимый. Действительно, имеем $\langle Tu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = Q_\Omega(u, v)$ для всех $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Поскольку $Q_\Omega(u, v)$ - ограниченная коэрцитивная билинейная форма, то можно применить теорему Лакса-Мильграма: для любого $f \in L^2(\Omega)$ существует $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, что $Q_\Omega(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$, для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Обозначим полученный оператор из $L^2(\Omega)$ в $W_0^{1,2}(\Omega)$ через $T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1}$.

Покажем, что $T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1}$ - ограниченный оператор. Пусть $f \in L^2(\Omega)$ и $T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1} f = u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда можем записать

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c Q_\Omega(u, u) = c \langle Tu, u \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|Tu\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \|Tu\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

тогда имеем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 &\leq c (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + Q_\Omega(u, u)) \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)} (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu\|_{L^2(\Omega)}) \\ \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\leq c (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Используя (3.2) и (3.3) получаем $\|T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1} f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Теперь рассмотрим следующий оператор:

$$(3.4) \quad T^{-1} = I_{W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)} \circ T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1},$$

где $I_{W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)}$ - компактный оператор вложения из $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$. Не трудно заметить, что T^{-1} обратный оператор для $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Компактность

оператора T^{-1} следует из компактности оператора $I_{W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)}$ и ограниченности оператора $T_{L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)}^{-1}$.

Заметим также, что оператор T^{-1} является симметричным оператором, определенным на всем пространстве $L^2(\Omega)$, следовательно он также является самосопряженным. $\square$

Подводя итог, из теоремы 3.1 имеем следующий результат об обратном операторе T^{-1} .

Теорема 3.2. T^{-1} - компактный, самосопряженный, положительно определенный оператор на $L^2(\Omega)$ с областью значений $\text{Range}(T^{-1}) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

4. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема 3.2 дает возможность применить теорему о минимаксе (теорема 2.3) для вычисления собственных значений обратного оператора. Для того, чтобы получить собственные значения прямого оператора, мы применяем вариационную формулу для собственных значений обратного оператора T^{-1} а затем берем обратные к этим собственным значениям числа, которые являются собственными значениями прямого оператора. В результате получаем неубывающую последовательность собственных значений: $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$.

Нашей задачей в этом разделе будет получение вариационной формулы для собственных значений T на языке билинейной формы $Q(u, v)$.

Теорема 4.1. Пусть T - оператор введенный в теореме 3.1. Собственные значения задачи (2.3) совпадают с собственными значениями $\lambda_n[T]$ оператора T и

$$(4.1) \quad \lambda_n[T] = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim L = n}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что собственные значения задачи (2.3) совпадают с собственными значениями оператора T . Для того, чтобы получить вариационную формулу, применим теорему о минимаксе (теорема 2.3) для обратного оператора (3.2).

Применив (2.5) для T^{-1} , получим

$$(4.2) \quad \lambda_n[T^{-1}] = \max_{\substack{L \subset L^2(\Omega) \\ \dim(L) = n}} \min_{\substack{f \in L \\ f \neq 0}} \frac{\langle T^{-1} f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Заметим, что $\lambda_n[T] = \lambda_n[T^{-1}]^{-1}$. Откуда имеем

$$(4.3) \quad \lambda_n[T] = \left(\max_{\substack{L \subset L^2(\Omega) \\ \dim(L)=n}} \min_{\substack{f \in L \\ f \neq 0}} \frac{\langle T^{-1}f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^{-1} = \\ = \min_{\substack{L \subset L^2(\Omega) \\ \dim(L)=n}} \left(\min_{\substack{f \in L \\ f \neq 0}} \frac{\langle T^{-1}f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^{-1} = \min_{\substack{L \subset L^2(\Omega) \\ \dim(L)=n}} \max_{\substack{f \in L \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2}{\langle T^{-1}f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}.$$

Обозначим $T^{-1}f = u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Совершив подстановку T в (4.3) получим

$$(4.4) \quad \lambda_n[T] = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim(L)=n}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{\langle Tu, Tu \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle Tu, u \rangle_{L^2(\Omega)}} = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim(L)=n}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{\langle T^{1/2}u, T^{1/2}u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}}.$$

Формула (4.1) следует из (4.4) и теоремы 3.1. $\square$

Следствие 4.1. Пусть T - оператор введенный в теореме 3.1. Тогда

$$(4.5) \quad \lambda_n[T] = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim L = n}} \max_{\substack{u \in L \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} Q_\Omega(u).$$

Доказательство. Утверждение следует из билинейности квадратичной формы Q_Ω . Действительно, пусть $\tilde{u} = u/\|u\|_{L^2(\Omega)}$ для всех $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда $u = \alpha\tilde{u}$ and $\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Имеем

$$(4.6) \quad \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{Q(\alpha\tilde{u})}{\|\alpha\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\alpha^2 Q(\tilde{u})}{\alpha^2 \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}} = Q(\tilde{u})$$

Формула (4.4) сразу следует из (4.1) и (4.6). $\square$

В дальнейшем мы иногда будем использовать более компактный вид формулы:

$$(4.7) \quad \lambda_n[T] = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim L = n}} R_\Omega(L),$$

где

$$R(L) = \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{Q_\Omega(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОБЛАСТИ ИЗНУТРИ

С помощью формулы (4.1) мы можем получить некоторые свойства собственных значений. В этом разделе мы будем предполагать соблюдение всех предпосылок теоремы 3.1. В частности, мы рассматриваем открытые множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, для которых вложение $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ является компактным. Пусть T - оператор введенный в теореме 3.1. Пусть $\lambda_n[\Omega]$ - n -ое собственное значение из (4.1) соответствующее области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Следующая лемма задает оценки для собственных значений на областях Ω_1 и Ω_2 , когда $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$.

Лемма 5.1. Пусть Ω_1 и Ω_2 открытые множества из $\mathbb{R}^N$ и $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$. Тогда

$$(5.1) \quad \lambda_n(\Omega_1) \leq \lambda_n(\Omega_2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Пусть $E : W_0^{l,2}(\Omega_2) \rightarrow W_0^{l,2}(\Omega_1)$ оператор нулевого расширения из Ω_2 в Ω_1 . Легко видеть, что $R_{\Omega_2}(L) = R_{\Omega_1}(E[L])$ для всех $L \subset W_0^{l,2}(\Omega_2)$. Действительно,

$$R_{\Omega_1}(E[L]) = \max_{\substack{Eu \in E[L] \\ Eu \neq 0}} \frac{Q_{\Omega_1}(Eu)}{\|Eu\|_{L^2(\Omega_1)}^2} = \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{Q_{\Omega_2}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_2)}^2} = R_{\Omega_2}(L).$$

Следовательно для всех $L \subset W_0^{l,2}(\Omega_2)$ с $\dim L = n$ существует $L' \subset W_0^{l,2}(\Omega_1)$ такое, что $\dim L' = n$ и $R_{\Omega_1}(L') = R_{\Omega_2}(L)$. Неравенство (5.1) сразу следует из (4.7). $\square$

Для того, чтобы доказать оценки для вариации собственных значений в области, мы строим гомеоморфизм h между любыми двумя конечномерными подпространствами пространств $W_0^{l,2}(\Omega_1)$ и $W_0^{l,2}(\Omega_2)$ одинаковой размерности и доказываем оценку для следующей величины:

$$|Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_2}(h(u))|.$$

Ниже приведенная лемма является предварительным шагом к этому построению.

Лемма 5.2. Пусть Ω_1 и Ω_2 открытые множества из $\mathbb{R}^N$ такие, что $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ и $\{u_1, \dots, u_n\}$ - ортонормальное множество элементов из $W_0^{l,2}(\Omega_1)$. Пусть $\{y_1, \dots, y_n\} \subset W_0^{l,2}(\Omega_2)$ множество элементов удовлетворяющее условию

$$\|y_k - u_k\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда существует ортонормальное множество $\{v_1, \dots, v_n\} \subset W_0^{l,2}(\Omega_2)$ такое, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$(5.2) \quad \|v_k - u_k\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} < c\varepsilon, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Случай $n = 1$ очевидный. Используем индукцию по n . Предполагая, что утверждение верно для n , докажем для $n + 1$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ - множество элементов удовлетворяющих (5.2).

Пусть $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают соответственно норму и скалярное произведение в $W_0^{l,2}(\Omega_1)$. Обозначим

$$\tilde{v}_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle y_{n+1}, v_k \rangle v_k.$$

Имеем

$$\langle y_{n+1}, v_k \rangle = \langle u_{n+1}, u_k \rangle + \langle u_{n+1}, v_k - u_k \rangle + \langle y_{n+1} - u_{n+1}, v_k \rangle = O(\varepsilon),$$

Откуда

$$\|\tilde{v}_{n+1} - y_{n+1}\| = O(\varepsilon), \quad \|\tilde{v}_{n+1}\| = 1 + O(\varepsilon), \quad \|\tilde{v}_{n+1}\| \neq 0.$$

Теперь обозначим

$$v_{n+1} = \frac{\tilde{v}_{n+1}}{\|\tilde{v}_{n+1}\|}$$

Функции $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ образуют нужное нам множество ортонормальных элементов. Действительно, $\|v_k - u_k\| = O(\varepsilon)$, $k = 1, \dots, n$ согласно индукционному предположению, при этом $\|v_{n+1} - u_{n+1}\| \leq \|y_{n+1} - u_{n+1}\| + \|\tilde{v}_{n+1} - y_{n+1}\| + \|v_{n+1} - \tilde{v}_{n+1}\| = O(\varepsilon)$. $\square$

До того, как перейти к следующей лемме, необходимо сделать некоторые обозначения. Обозначим через $d_l(x, y)$ l -расстояние между x и y .

$$d_l(x, y) = |x - y|_l = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^{l_i}$$

Можно показать, что $|\cdot|_l$ определяет норму на $\mathbb{R}^N$.

Пусть Ω - открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}^N$. Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d_l(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

Лемма 5.3. Пусть Ω_1, Ω_2 - открытые множества из $\mathbb{R}^N$ такие, что $\Omega_{1,\varepsilon} \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $u \in W_0^{l,2}(\Omega_1)$ существует $\tilde{u} \in W_0^{l,2}(\Omega_2)$ удовлетворяющее неравенству

$$\|\tilde{u} - u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} < \rho_{\Omega_1}(u),$$

где $\rho_{\Omega_1}(u) = \sum_{(\alpha, \mu) \leq 1} \|D^\alpha u(x)\|_{L_2(\Omega_1 \setminus \Omega_{1,3\varepsilon})}$.

Доказательство. Обозначим через $\omega_1(x)$ следующую функцию:

$$\omega_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^l}} & \text{при } |x|_l < \varepsilon \\ 0 & \text{при } |x|_l \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Обозначим также через ω_ε функцию получаемую из ω_1 анизотропным масштабированием на ε .

$$\omega_\varepsilon(x) = \omega_1(x_1/\varepsilon^{l_1}, \dots, x_N/\varepsilon^{l_N}).$$

Заметим, что $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $D^\alpha \omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-(\alpha, \mu)} D^\alpha \omega_1(x)$. Теперь, определим $\eta \in C_0^\infty(\Omega_{1, \varepsilon})$ следующим образом:

$$\eta(x) = \int I_{\Omega_{1, 3\varepsilon}}(y) \omega_\varepsilon(x - y) dy,$$

где $I_{\Omega_{1, 3\varepsilon}}$ — индикатор функция множества $\Omega_{1, 3\varepsilon}$. Не сложно убедиться, что

$$(5.3) \quad 0 \leq |D^\alpha \eta(x)| \leq c\varepsilon^{-(\alpha, \mu)}, \quad x \in \Omega_{1, \varepsilon} \text{ и } \eta(x) = 1, \quad x \in \Omega_{1, 3\varepsilon}.$$

Обозначив $\hat{u} = \eta u \in W_0^{l, 2}(\Omega_2)$, будем иметь

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \|\hat{u} - u\|_{W_0^{l, 2}} &= \sum_{(\alpha, \mu) \leq l} \|D^\alpha [u(1 - \eta)]\|_{L_2(\Omega_1 \setminus \Omega_{1, 3\varepsilon})} \leq \\ &\leq \sum_{(\alpha, \mu) \leq l} \sum_{\beta \leq \alpha} \|D^\beta u D^{\alpha - \beta}(1 - \eta)\|_{L_2(\Omega_1 \setminus \Omega_{1, 3\varepsilon})} \end{aligned}$$

Имеет место следующее интерполяционное неравенство (см. [7]):

$$|D^\beta u(x)| \leq c\varepsilon^{(\alpha - \beta, \mu)} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{для } x \in \Omega_1 \setminus \Omega_{1, 3\varepsilon}.$$

Применив неравенства (5.3) и (5.4) мы получаем требуемое неравенство. $\square$

Замечание 5.1. Заметим, что $p_{\Omega_1}(u) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 5.3 дает возможность построить для любого конечномерного подпространства $L \subset W_0^{l, 2}(\Omega_1)$ в каком-то смысле близкое к нему конечномерное подпространство $L' \subset W_0^{l, 2}(\Omega_2)$ одинаковой размерности. Следующая лемма приводит к этому построению.

Лемма 5.4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $L \subset W_0^{l, 2}(\Omega_1)$ — n -мерное подпространство с ортонормальным базисом $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. Существует $\epsilon_{n, L, \Omega_1} > 0$ зависящее только от n, L , и Ω_1 такое, что для всех $\varepsilon < \epsilon_{n, L, \Omega_1}$ и Ω_2 , где $\Omega_{1, \varepsilon} \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, можно найти n -мерное подпространство $L' \subset W_0^{l, 2}(\Omega_2)$ с ортонормальным базисом $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\|v_k - u_k\|_{W_0^{l, 2}(\Omega_2)} < \epsilon_{n, L, \Omega_1} p(U),$$

где $p(U) = \max_{k=1, \dots, n} p_{\Omega_1}(u_k)$.

Доказательство. Пусть $\epsilon_0 > 0$ — положительное действительное число такое, что имеет место лемма 5.2 для всех $\varepsilon < \epsilon_0$. Возьмем $\epsilon_{n, L, \Omega_1}$ таким, чтобы все из

следующих неравенств имели место при $\varepsilon < \varepsilon_{n,L,\Omega_1}$ (см. лемму 5.3 и замечание (5.1))

$$\|u_k - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)} < c \max_{k=1,\dots,n} p_{\Omega_1}(u_k) < \varepsilon_{\Omega_1} \text{ для всех } k = 1, \dots, n.$$

Применение леммы 5.2 завершает доказательство. $\square$

Замечание 5.2. Заметим, что $p(U) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь мы готовы к построению линейного гомеоморфизма между конечномерными пространствами L и L' .

Определение 5.1. Пусть Ω_1 открытое множество из $\mathbb{R}^N$, $L \subset W_0^{1,2}(\Omega_1)$ - n -мерное подпространство с ортонормальным базисом $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ и Ω_2 - открытое множество такое, что $\Omega_{1,\varepsilon} \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, где $\varepsilon < \varepsilon_{n,L,\Omega_1}$.

Пусть $L' \subset W_0^{1,2}(\Omega_2)$ - n -мерное подпространство с ортонормальным базисом $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ такое, что

$$\|v_k - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)} < cp(U) \text{ для } k = 1, \dots, n,$$

Определим линейный гомеоморфизм $h(\cdot)$ между L и L' следующим образом:

$$h(u) = h(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Лемма 5.5. Пусть $h : L \rightarrow L'$ - отображение введенное в Определении (5.1). Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) h и h^{-1} являются непрерывными (ограниченными) линейными отображениями между L и L' .

(2) h является изометрией между $(L, \|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)})$ и $(L', \|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega_2)})$, т.е.

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)} = \|h(u)\|_{W_0^{1,2}(\Omega_2)} \text{ для всех } u \in L.$$

(3)

$$\|h(u) - u\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)} < c \cdot p(U), \quad \forall u \in L$$

(4) Существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что для всех $u \in L$, имеем

$$c_1 \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c_2 \|u\|_{L^2(\Omega_1)}.$$

(5) Для всех $u \in L$ имеем

$$(5.5) \quad |Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_2}(h(u))| < c \cdot p(U) \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega_1)}^2.$$

Доказательство. (1) Существование обратного отображения h^{-1} сразу следует из определения h . Отображения h и h^{-1} являются непрерывными, поскольку L и L' конечномерные пространства.

- (2) Пусть $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Заметим, что $\{u_1, \dots, u_n\}$ и $\{h(u_1), \dots, h(u_n)\}$ ортонормальны. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)}^2 &= \|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)}^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = \\ &= \|\alpha_1 h(u_1) + \dots + \alpha_n h(u_n)\|_{W_0^{l,2}(\Omega_2)}^2 = \|h(u)\|_{W_0^{l,2}(\Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

- (3) Пусть $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in L$.

$$\begin{aligned} \|h(u) - u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} &= \|\alpha_1 (v_1 - u_1) + \dots + \alpha_n (v_n - u_n)\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} \leq \\ &\leq |\alpha_1| \|v_1 - u_1\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} + \dots + |\alpha_n| \|v_n - u_n\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} \leq \\ &\leq (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) c \cdot p(U) \leq c \cdot p(U) \|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

- (4) Поскольку h - линейное отображение, достаточно доказать только случай, когда u лежит на единичной сфере $S \subset L \subset W_0^{l,2}(\Omega_1)$. Допустим обратное. Тогда для любого $k > 0$ существует $u_k \in S$ такое, что $\|h(u_k)\|_{L^2(\Omega_2)} > k \|u_k\|_{L^2(\Omega_1)}$. Следовательно $\|h(u_k)\|_{W_0^{l,2}(\Omega_2)} > k \|u_k\|_{L^2(\Omega_1)}$. Поскольку h - изометрия между $(L, \|\cdot\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)})$ и $(L', \|\cdot\|_{W_0^{l,2}(\Omega_2)})$, то имеем $\|h(u_k)\|_{W_0^{l,2}(\Omega_2)} = \|u_k\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} = 1$, откуда $\|u_k\|_{L^2(\Omega_1)} < 1/k$. Следовательно $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ стремится к 0 в $L^2(\Omega_1)$. С другой стороны, S - компактно в $W_0^{l,2}$, следовательно можно выбрать сходящейся последовательность u_{i_k} , и заменить последовательность $\{u_k\}$ этой последовательностью. Допустим $u_k \rightarrow u_0 \in S$ в $W_0^{l,2}$, тогда имеем $\|u\|_{L^2(\Omega_1)} = 0$ и $\|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} = 1$ - противоречие. Второе неравенство доказывается аналогично используя h^{-1} вместо h .

- (5) Заметим, что $Q_{\Omega_2}(u) = Q_{\Omega_1}(u)$ для $u \in W_0^{l,2}(\Omega_2)$. Пусть $s = h(u) - u$. Имеем

$$\begin{aligned} |Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_2}(h(u))| &= |Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_1}(h(u))| = |Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_1}(u + s)| \leq \\ &\leq 2|Q_{\Omega_1}'(u, s)| + |Q_{\Omega_1}'(s, s)| \leq c \|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} \|s\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} = \\ &= c \|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} \|h(u) - u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)} \leq c p(U) \|u\|_{W_0^{l,2}(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

□

Лемма 5.6. Пусть Ω_1 - открытое множество из $\mathbb{R}^N$ и L - n -мерное подпространство пространства $W_0^{l,2}(\Omega_1)$ с ортонормальным базисом $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. Тогда существует $\epsilon_{n,L,\Omega_1} > 0$ зависящее только от n, L , и Ω_1 такое, что для всех $\epsilon < \epsilon_{n,L,\Omega_1}$ и Ω_2 , где $\Omega_{1,\epsilon} \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$ имеем место следующее неравенство:

$$|R_{\Omega_1}(L) - R_{\Omega_2}(h[L])| \leq c_{n,L,\Omega_1} p(U),$$

где

$$R_{\Omega}(L) = \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{Q_{\Omega}(u)}{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2}$$

и h - гомеоморфизм введенный в Определении 5.1.

Доказательство. Из неравенств (3.1), (1.2), (5.5) следует, что существует $c_{n,L,\Omega_1} > 0$ зависящее только от $n, L, \Omega_1, N, l, \theta$ такое, что

$$(5.6) \quad |Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_2}(h(u))| \leq c_{n,L,\Omega_1} (\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + Q_{\Omega_1}(u)) p(U).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{Q_{\Omega_2}(h(u))}{\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2} - \frac{Q_{\Omega_1}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} \right| \leq \\ & \leq \frac{|Q_{\Omega_1}(u) - Q_{\Omega_2}(h(u))|}{\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2} + \frac{|Q_{\Omega_1}(u)(\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 - \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2)|}{\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (5.6) и пункта 4 леммы 5.5, получаем

$$\left| \frac{Q_{\Omega_2}(h(u))}{\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2} - \frac{Q_{\Omega_1}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} \right| \leq c_{n,L,\Omega_1} \left(1 + \frac{Q_{\Omega_1}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} \right)$$

что можно записать как

$$\begin{aligned} (1 - c_{n,L,\Omega_1} p(U)) \frac{Q_{\Omega_1}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} - c_{n,L,\Omega_1} p(U) & \leq \frac{Q_{\Omega_2}(h(u))}{\|h(u)\|_{L^2(\Omega_2)}^2} \leq \\ & \leq (1 + c_{n,L,\Omega_1} p(U)) \frac{Q_{\Omega_1}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} + c_{n,L,\Omega_1} p(U). \end{aligned}$$

Взяв супремум для всех $u \in L$, получим

$$\begin{aligned} (1 - c_{n,L,\Omega_1} p(U)) R_{\Omega_1}(L) - c_{n,L,\Omega_1} p(U) & \leq R_{\Omega_2}(h[L]) \leq \\ & \leq (1 + c_{n,L,\Omega_1} p(U)) R_{\Omega_1}(L) + c_{n,L,\Omega_1} p(U). \end{aligned}$$

Перепишав последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} R_{\Omega_1}(L) - c_{n,L,\Omega_1} p(U)(1 + R_{\Omega_1}(L)) & \leq R_{\Omega_2}(h[L]) \leq \\ & \leq R_{\Omega_1}(L) + c_{n,L,\Omega_1} p(U)(1 + R_{\Omega_1}(L)). \end{aligned}$$

Наконец,

$$|R_{\Omega_1}(L) - R_{\Omega_2}(h[L])| \leq c_{n,L,\Omega_1} p(U)(1 + R_{\Omega_1}(L)) \leq c_{n,L,\Omega_1} p(U).$$

□

Теорема 5.1. Пусть Ω_1 - открытое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^N$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует число $c_n, \epsilon_n > 0$ зависящее только от Ω_1 такое, что для всех $\epsilon < \epsilon_n$ и Ω_2 , где $\Omega_{1,\epsilon} \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$ имеет место следующая оценка:

$$|\lambda_n[\Omega_1] - \lambda_n[\Omega_2]| \leq c_n \max_{k=1, \dots, n} p_{\Omega_1}(u_k),$$

где $\{u_k\}_{k=1}^n$ - первые n собственные значения оператора (1.1) и

$$p_{\Omega_1}(u) = \sum_{(\alpha, \mu) \leq 1} \|D^\alpha u(x)\|_{L_2(\Omega_1 \setminus \Omega_{1,3\epsilon})}.$$

Доказательство. Из леммы 5.1 и $\Omega_2 \subset \Omega_1$ следует, что

$$(5.7) \quad \lambda_n[\Omega_1] \leq \lambda_n[\Omega_2].$$

Теперь, согласно (4.7) имеем

$$(5.8) \quad \lambda_n[\Omega_1] = \min_{\substack{L \subset W_0^{1,2}(\Omega_1) \\ \dim L = n}} R_{\Omega_1}(L).$$

Пусть L_n - n -мерное подпространство из $W_0^{1,2}(\Omega_1)$ для которого достигается минимум в (5.8). Имеем $\lambda_n[\Omega_1] = R_{\Omega_1}(L_n)$. Пусть h - гомеоморфизм введенный в Определении 5.1. Согласно лемме 5.6 имеем

$$|R_{\Omega_1}(L_n) - R_{\Omega_2}(h[L_n])| \leq c_{n, L_n, \Omega_1} p(U_n).$$

Откуда

$$(5.9) \quad R_{\Omega_2}(h[L_n]) \leq \lambda_n[\Omega_1] + c_{n, L_n, \Omega_1} p(U_n).$$

С другой стороны

$$(5.10) \quad \lambda_n[\Omega_2] \leq R_{\Omega_2}(h[L_n]).$$

Из (5.7), (5.9) и (5.10) получаем

$$\lambda_n[\Omega_1] \leq \lambda_n[\Omega_2] \leq \lambda_n[\Omega_1] + c_{n, \Omega_1} p(U_n),$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 5.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ and Ω - открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}^N$. Пусть $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ - последовательность открытых множеств таких, что $\Omega_k \subseteq \Omega$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$. Тогда

$$\lambda_n[\Omega_k] \rightarrow \lambda_n[\Omega], \quad k \rightarrow \infty.$$

Abstract. The paper gives estimates for the variation of eigenvalues of Dirichlet problem for semi-elliptic operators with homogeneous boundary conditions upon variation of the open set on which the operators are defined. Operators of arbitrary even order in each direction and open sets with Lipschitz continuous boundary are considered.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Burenkov, P. D. Lamberti, "Spectral stability of higher order uniformly elliptic operators. Sobolev Spaces in Mathematics II", International Mathematical Series, 9, 69 – 102 (2009).
- [2] I. Babuska, R. Vyborny, "Continuous dependence of eigenvalues on the domain", Czechoslovak Mathematical Journal, 15, issue 2, 169 – 178 (1965).
- [3] E. B. Davies, Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [4] M. S. Berger, Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), New York-London (1977).
- [5] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, Наука (1971).
- [6] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand (1965).
- [7] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Москва (1975).
- [8] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators, Academic Press (1978).
- [9] D. F. Kalinichenko, N. V. Miroshin, Friedrichs Inequality, in: Encyclopaedia of Mathematics, European Mathematical Society, Springer (2002).

Поступила 19 марта 2014

СРАВНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. П. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет

E-mail: vachagan.margaryan@yahoo.com

Аннотация. В работе найдено необходимое и достаточное алгебраическое условие для сравнения с весом двумерных многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: сравнение (с весом) многочленов; гиперболичность с весом; слабая гиперболичность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть N - множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество $n \in N$ мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\alpha_j \in N_0$ $j = 1, \dots, n$, R^n - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0 \ j = 1, \dots, n\}$, $R_0^n = \{\xi \in R^n, \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$, $C = R \times iR$ ($i^2 = -1$). Для любых $\xi, \eta \in R^n$, $\nu \in R_+^n$, $t > 0$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\|\xi\| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$, $(\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \dots + \xi_n \cdot \eta_n$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $|\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdots |\xi_n|^{\nu_n}$, $t \cdot \xi = (t \cdot \xi_1, \dots, t \cdot \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$, $j = 1, \dots, n$.

Характеристическим многогранником (х.м.) конечного набора $A \subset R_+^n$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется полный, если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат. Полный многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется вполне правильным (в.п.), если компоненты всех внешних (относительно $\mathfrak{R}$) $(n-1)$ -мерных некоординатных граней положительны.

Для в.п. многогранника $\mathfrak{R}$ через $\Lambda(\mathfrak{R})$ обозначим множество нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$

$$\Lambda(\mathfrak{R}) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \min\{\lambda_j, j = 1, \dots, n\} = 1\}.$$

Через B обозначим множество тех в.п. многогранников $\mathfrak{R}$ для которых

$$\max\{(\nu, \lambda) : \nu \in \mathfrak{R}\} \leq 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}).$$

Для многогранника $\mathfrak{R} \in B$ обозначим:

$\mathfrak{R}^0$ - множество вершин $\mathfrak{R}$,

$$\partial \mathfrak{R} = \{\nu \in \mathfrak{R} : \exists \lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}), (\nu, \lambda) = \max\{(\mu, \lambda), \mu \in \mathfrak{R}\}\}$$

и сопоставим следующую функцию

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) \equiv \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu.$$

Известно (см. например [1] или [2]), что многогранник $\mathfrak{R}$ является х.м. набора $\mathfrak{R}^0$. Числа

$$\rho_0(\mathfrak{R}) = \max\{|\nu| : \nu \in \mathfrak{R}^0\} \text{ и } \rho_1(\mathfrak{R}) = \min\{|\nu| : 0 \neq \nu \in \mathfrak{R}^0\}$$

называется соответственно максимальным и минимальным порядком функции $h_{\mathfrak{R}}$. Так как, очевидно, $0 \in \mathfrak{R}^0$ ($\mathfrak{R} \in B$), то с некоторой постоянной $c \geq 1$

$$(1.1) \quad c^{-1} \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_1(\mathfrak{R})} \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi) \leq c \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_0(\mathfrak{R})} \leq c \cdot (1 + \|\xi\|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$, $\gamma_{\alpha} \in C$, многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Представим многочлен P в виде суммы

$$(1.2) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi),$$

где $m = \max\{|\alpha| : \alpha \in (P)\}$ - порядок многочлена P , а P_j - однородный многочлен порядка j , $j = 0, \dots, m$.

Точка $\tau \in R^n$ называется нулем многочлена P порядка $l(\tau) \in N_0$, если

$$P^{(\alpha)}(\tau) := (D^{\alpha} P)(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^n, \quad |\alpha| < l(\tau) \quad \text{и} \quad \sum_{|\alpha|=l(\tau)} |P^{(\alpha)}(\tau)| \neq 0.$$

По определению при $P(\tau) \neq 0$ будем считать, что $l(\tau) = 0$. Для однородного многочлена P_m порядка m обозначим $\Sigma(P_m) = \{\tau \in R^n, \|\tau\| = 1, P_m(\tau) = 0\}$.

Определение 1.1. (см. [3], определение 10.3.4). Будем говорить, что многочлен Q слабее многочлена P и записывать $Q \prec P$, если с некоторой постоянной $c > 0$ $\tilde{Q}(\xi, 1) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, 1)$ при всех $\xi \in R^n$, где для данного многочлена q и числа $t > 0$

$$\tilde{q}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha \in N_0^n} |q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \cdot t^{2|\alpha|}}.$$

Определение 1.2. Для $\mathfrak{R} \in B$ многочлен Q $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P и будем использовать запись $Q \stackrel{h_{\mathfrak{R}}}{\prec} P$, если с некоторой постоянной $c > 0$

$$\tilde{Q}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Определение 1.3. (см. [4] или [3]). Будем говорить, что многочлен P представленный в виде (1.2) гиперболичен (по Гордингу) относительно вектора $0 \neq \eta \in R^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует постоянная $c \in R$ для которого $P(\xi + i \cdot t \cdot \eta) \neq 0$ при всех $t < c$ и $\xi \in R^n$.

Определение 1.4. (см. [5]). Для $\mathfrak{R} \in B$ будем говорить, что многочлен P представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно вектора $0 \neq \eta \in R^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует постоянная $c \in R$ для которого $P(\xi + i \cdot t \cdot \eta) \neq 0$ при $t < c \cdot h_{\mathfrak{R}}(\xi)$, $\xi \in R^n$.

Известно (см. [5] или [6] при $\eta = (1, 0, \dots, 0)$), что если многочлен P $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно вектора η , то его главная часть P_m гиперболична по Гордингу относительно η . В работах [5]-[7] найдены достаточные условия на младшие члены многочлена P при выполнении которых многочлен становится $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболическим относительно вектора η , если P_m гиперболичен по Гордингу относительно η . В работах [3] и [8] доказано, что многочлен P гиперболичен по Гордингу относительно вектора η тогда и только тогда, когда гиперболичен по Гордингу относительно η многочлен P_m и $P_j \prec P_m$ $j = 0, \dots, m-1$.

Цель настоящей работы найти необходимое и достаточное условие на многочлен Q от двух переменных, чтобы Q было $h_{\mathfrak{R}}$ слабее $\mathfrak{R} \in B$ заданного однородного многочлена.

В следующих параграфах будем считать, что $n = 2$ и рассматриваемые многочлены являются многочленами от двух $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ переменных.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 2.1. Пусть $\mathfrak{R} \in B$ и

$$\chi_r(\mathfrak{R}) = \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \max_{\nu \in \mathfrak{R}} (\nu, \lambda) / \lambda_r \quad r = 1, 2.$$

Тогда

- (1) $1 \geq \rho_0(\mathfrak{R}) \geq \rho_1(\mathfrak{R}) > 0$,
- (2) $\mathfrak{R} \subset \{\nu \in R_+^2 : |\nu| \leq 1\}$,
- (3) для любого $\nu \in \mathfrak{R} \cup R_0^2$ $\nu_r < \chi_r(\mathfrak{R})$ $r = 1, 2$,

$$(4) (\chi_1(\mathcal{R}), 0), (0, \chi_2(\mathcal{R})) \in \mathcal{R}^0.$$

Доказательство. тривиально и поэтому не приводится. $\square$

Лемма 2.1. Пусть $B \in \mathcal{R}$. Тогда

- (1) $\chi_1(\mathcal{R}) = a_1 := \sup\{\nu_1/(1 - \nu_2) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_2 < 1\},$
- (2) $\chi_2(\mathcal{R}) = a_2 := \sup\{\nu_2/(1 - \nu_1) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_1 < 1\}.$

Доказательство. Так как утверждение пункта 1 доказывается аналогично утверждению пункта 2, то мы докажем только пункт 2.

Пусть наоборот $a_2 \neq \chi_2(\mathcal{R})$. Так как в силу пункта 4 предложения 2.1 $a_2 \geq \chi_2(\mathcal{R})$, то это означает, что $a_2 > \chi_2(\mathcal{R})$. Тогда из определений чисел a_2 и $\chi_2(\mathcal{R})$ существуют точка $\nu^0 \in \partial\mathcal{R}$, $\nu_1^0 < 1$ и вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{R})$ для которых

$$\nu_2^0/(1 - \nu_1^0) > \max\{(\nu, \lambda^0)/\lambda_2^0 : \nu \in \mathcal{R}\} =: \theta_0/\lambda_2^0,$$

или, что тоже самое $\nu_1^0 \cdot \theta_0 + \nu_2^0 \lambda_2^0 > \theta_0$. Так как $\lambda_1^0 \geq 1 \geq \theta_0$ (см. определение множества B), то отсюда получаем, что $(\nu^0, \lambda^0) > \theta_0$, т.е. $\nu^0 \notin \mathcal{R}$. Так как $\partial\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, то это противоречит условию $\nu^0 \in \partial\mathcal{R}$ и доказывает, что $a_2 = \chi_2(\mathcal{R})$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{R} \in B$. Тогда в силу пункта 4 предложения 2.1

- 1'. $\chi_1(\mathcal{R}) = \max\{\nu_1/(1 - \nu_2) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_2 < 1\},$
- 2'. $\chi_2(\mathcal{R}) = \max\{\nu_2/(1 - \nu_1) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_1 < 1\}.$

Для многоугольника $\mathcal{R} \in B$ обозначим

$$E_1(\mathcal{R}) = \{\delta : f_{\mathcal{R}}(\delta) := \max\{\nu_1 + \delta \cdot \nu_2 : \nu \in \mathcal{R}^0\} \leq \chi_1(\mathcal{R})\},$$

$$E_2(\mathcal{R}) = \{\delta : g_{\mathcal{R}}(\delta) := \max\{\delta \cdot \nu_1 + \nu_2 : \nu \in \mathcal{R}^0\} \leq \chi_2(\mathcal{R})\},$$

$$\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) = \sup\{\delta : \delta \in E_r(\mathcal{R})\} \quad r = 1, 2.$$

Нетрудно заметить, что для любого $\mathcal{R} \in B$, $0 \leq \bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \leq 1$ $r = 1, 2$ и в силу замкнутости множества $E_r(\mathcal{R})$ $\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \in E_r(\mathcal{R})$ $r = 1, 2$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{R} \in B$. Тогда

- (1) $\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \geq \chi_r(\mathcal{R}) \quad r = 1, 2,$
- (2) $f_{\mathcal{R}}(\delta) = \chi_1(\mathcal{R})$ при $\delta \leq \bar{\chi}_1(\mathcal{R})$, $\chi_1(\mathcal{R}) < f_{\mathcal{R}}(\delta) < \delta$ и $f_{\mathcal{R}}(\delta) \leq \rho_0(\mathcal{R})$ при $\delta \in (\bar{\chi}_1(\mathcal{R}), 1]$,
- (3) $g_{\mathcal{R}}(\theta) = \chi_2(\mathcal{R})$ при $\theta \leq \bar{\chi}_2(\mathcal{R})$, $\chi_2(\mathcal{R}) < g_{\mathcal{R}}(\theta) < \theta$ и $g_{\mathcal{R}}(\theta) \leq \rho_0(\mathcal{R})$ при $\theta \in (\bar{\chi}_2(\mathcal{R}), 1]$.

Доказательство. Покажем, что $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$. Доказательство $\bar{\chi}_2(\mathbb{R}) \geq \chi_2(\mathbb{R})$ аналогично. Так как $f_{\mathbb{R}}$ монотонно возрастающая функция, то для доказательства неравенства $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$ достаточно показать, что $f_{\mathbb{R}}(\chi_1(\mathbb{R})) \leq \chi_1(\mathbb{R})$. В силу замечания 2.1 имеем

$$\chi_1(\mathbb{R}) \geq \nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 \quad \forall \nu \in \partial \mathbb{R}, \quad \nu_2 < 1,$$

и для некоторого $\nu^0 \in \partial \mathbb{R}$, $\nu_2^0 < 1$ $\chi_1(\mathbb{R}) = \nu_1^0 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2^0$. Отсюда получаем, что

$$\chi_1(\mathbb{R}) = \sup\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 : \nu \in \partial \mathbb{R}, \nu_2 < 1\}.$$

Так как $\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2$ непрерывно по ν и $\chi_1(\mathbb{R}) > 0$, то отсюда получаем, что $\chi_1(\mathbb{R}) = \sup\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 : \nu \in \partial \mathbb{R}\} = \max\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2, \nu \in \mathbb{R}^0\} = f_{\mathbb{R}}(\chi_1(\mathbb{R}))$, следовательно $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$.

Из определения числа $\bar{\chi}_1(\mathbb{R})$, замкнутости $E_1(\mathbb{R})$ и монотонности $f_{\mathbb{R}}$ непосредственно следует, что $f_{\mathbb{R}}(\delta) > \chi_1(\mathbb{R})$ при $\delta > \bar{\chi}_1(\mathbb{R})$. Так как, очевидно, при $\delta \leq 1$ $f_{\mathbb{R}}(\delta) \leq \rho_0(\mathbb{R})$, то для завершения доказательства пункта 2 остается показать, что

$$f_{\mathbb{R}}(\delta) < \delta \quad \text{при} \quad \delta \in (\bar{\chi}_1(\mathbb{R}), 1].$$

Пусть $\delta \in (\bar{\chi}_1(\mathbb{R}), 1]$, следовательно $\delta > \chi_1(\mathbb{R})$. Тогда в силу леммы 2.1 $\delta > \sup\{\nu_1/(1-\nu_2) : \nu \in \partial \mathbb{R}, \nu_2 < 1\}$. Отсюда получаем, что при всех $\nu \in \partial \mathbb{R}$, $\nu_1 + \delta \nu_2 < \delta$.

Так как $\mathbb{R}^0 \subset \partial \mathbb{R}$, то отсюда получаем, что $f_{\mathbb{R}}(\delta) < \delta$. Поскольку утверждение пункта 3 доказывается аналогично утверждению пункта 2, то этим лемма 2.2 доказана. $\square$

Предложение 2.2. Пусть $\mathbb{R} \in B$, $\delta < 1$, $x(t) > 0$ $t \geq 1$ локально ограниченная функция для которой $t^\varepsilon \cdot x(t) \rightarrow \infty$, $t^{-\varepsilon} \cdot x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, $\tau, \eta \in R^2$, $\|\tau\| = \|\eta\| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$ и $\xi(t) = t \cdot \tau + t^\delta \cdot x(t) \cdot \eta$.

Тогда с некоторой постоянной $c \geq 1$ при $t \geq 1$

$$1) \quad c^{-1} \cdot t^{\rho_0(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\rho_0(\mathbb{R})} \quad \text{если} \quad \tau \in R_0^2,$$

$$2.a) \quad c^{-1} \cdot t^{\chi_1(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\chi_1(\mathbb{R})} \quad \text{при} \quad \delta < \chi_1(\mathbb{R}), \quad \text{при} \quad \tau = \pm(1, 0)$$

$$2.b) \quad c^{-1} \cdot (t^{\chi_1(\mathbb{R})} + t^{f_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot (t^{f_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \max\{1, x(t)\}) \quad \text{при} \\ \delta \geq \chi_1(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(1, 0),$$

$$3.a) \quad c^{-1} \cdot t^{\chi_2(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\chi_2(\mathbb{R})} \quad \text{при} \quad \delta < \chi_2(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(0, 1),$$

$$3.b) \quad c^{-1} \cdot (t^{\chi_2(\mathbb{R})} + t^{g_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot (t^{g_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \max\{1, x(t)\}) \quad \text{при} \\ \delta \geq \chi_2(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(0, 1).$$

Доказательство. непосредственно следует из определений функций $h_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, g_{\mathbb{R}}$, чисел $\rho_0(\mathbb{R}), \chi_1(\mathbb{R}), \chi_1(\mathbb{R})$ и пунктов 2 и 4 предложения 2.1. $\square$

Предложение 2.3. Пусть для неотрицательного однородного многочлена P_m порядка m $\tau \in \sum(P_m)$. Тогда

$$Q_{l(\tau)}(\xi) = \sum_{|\alpha|=l(\tau)} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0 \quad \forall \xi \in R^2,$$

где $l(\tau)$ - порядок нуля многочлена P_m в точке τ .

Доказательство. Предположим обратное, что при условии предложения, существует точка $\xi^0 \in R^2$ для которого $Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0$. Так как по формуле Тейлора для любого $t > 0$ в силу определения $l(\tau)$

$$P_m(\tau + t \cdot \xi^0) = \sum_{\alpha \in N_0^2} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot (t \cdot \xi^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{r=l(\tau)}^m t^r \cdot \sum_{|\alpha|=r} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot (\xi^0)^\alpha}{\alpha!} := \sum_{r=l(\tau)}^m t^r Q_r(\xi^0),$$

то из условия $Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0$ при малых $t > 0$ имеем, что

$$P_m(\tau + t \cdot \xi^0) < \frac{1}{2} t^{l(\tau)} Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0.$$

Это противоречит условию предложения и доказывает, что при условиях предложения $Q_{l(\tau)}(\xi) \geq 0$ при всех $\xi \in R^2$. Предложение 2.3 доказано. $\square$

Предложение 2.4. Пусть $P_{m_0} \geq 0, P_{m_1} \geq 0$ однородные многочлены соответственно порядка m_0 и m_1 . Тогда для любого $\tau \in R^2, \|\tau\| = 1$ $l(\tau) = \min\{l_0(\tau), l_1(\tau)\}$, где $l(\tau), l_0(\tau)$ и $l_1(\tau)$ порядки нуля в точке τ соответственно для многочленов $P_{m_0} + P_{m_1}, P_{m_0}$ и P_{m_1} .

Доказательство. Так как утверждение предложения очевидно при $\tau \notin \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$ и при $l_0(\tau) \neq l_1(\tau)$, когда $\tau \in \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$, то пусть $\tau \in \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$ и $l_0(\tau) = l_1(\tau)$.

Предположим обратное, что $l(\tau) \neq l_0(\tau) = l_1(\tau)$. Так как очевидно $l(\tau) \geq \min\{l_0(\tau), l_1(\tau)\}$, то это означает, что $l(\tau) > l_0(\tau) = l_1(\tau)$. Тогда из определения порядка нуля имеем, что

$$(2.1) \quad P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) + P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| \leq l_0(\tau).$$

Так как в силу предложения 2.3

$$Q_{l_0(\tau)} = \sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} \frac{P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0, \quad \xi \in R^2,$$

$$\Gamma_{l_1(\tau)} = \sum_{|\alpha|=l_1(\tau)} \frac{P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau) \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0, \quad \xi \in R^2,$$

то учитывая, что $l_0(\tau) = l_1(\tau)$ в силу (2.1) получаем, что $Q_{l_0(\tau)} = 0$ ($\Gamma_{l_0(\tau)} = 0$), т.е.

$$P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| = l_0(\tau).$$

Так как в силу определения $l_0(\tau)$

$$P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| < l_0(\tau),$$

то это противоречит определению $l_0(\tau)$. Полученное противоречие доказывает справедливость предложения 2.4. $\square$

Следствие 2.1. Пусть P_m - однородный многочлен порядка m и $\tau \in \sum(P_m)$. Тогда для любого $r \in N_0$, $r < l(\tau)$ ($l(\tau)$ порядок нуля многочлена P_m в точке τ) порядок нуля многочлена

$$\sum_{|\alpha|=r} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2$$

в точке τ равна $2(l(\tau) - r)$.

Доказательство. непосредственно следует из предложения 2.4. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, P многочлен представленный в виде (1.2) и $\eta \in R^2 \setminus \sum(P_m)$, $\|\eta\| = 1$. Тогда для любого многочлена Q порядка не выше m существуют числа $\varepsilon, c > 0$ для которых

$$\tilde{Q}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \quad \forall \xi \in D(\eta, \varepsilon),$$

где $D(\eta, \varepsilon) \equiv \{\xi \in R^2, \quad \|\xi/\|\xi\| - \eta\| < \varepsilon\}$.

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon_0 = \inf_{\tau \in \sum(P_m)} \|\eta - \tau\|.$$

Так как множество $\sum(P_m)$ замкнуто и $\eta \notin \sum(P_m)$, то $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Так как по теореме Ваерштасса

$$\delta = \inf\{|P_m(\xi)|, \quad \|\xi\| = 1, \quad \|\xi - \eta\| < \varepsilon\} > 0,$$

то с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ в силу левой части оценки (1.1) при всех достаточно больших $\xi \in D(\eta, \varepsilon)$ имеем, что

$$\tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \geq \frac{1}{2}(|P(\xi)| + h_{\mathfrak{R}}^m(\xi)) \geq c_1 \cdot (|P_m(\xi)| - \left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j(\xi) \right| + 1) \geq$$

$$(2.2) \quad \geq c_1 \cdot (\|\xi\|^m \cdot \delta - \left| \sum_{j=0}^{m-1} \|\xi\|^j P_j(\xi/\|\xi\|) \right| + 1) \geq c_2 (\|\xi\|^m + 1).$$

Для многочлена Q в силу условия леммы с применением правой части оценки (1.1) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ при всех $\xi \in R^2$ имеем, что

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\xi, h_{\mathbb{R}}(\xi)) &= \sqrt{\sum_{\alpha \in N_0^2} |Q^{(\alpha)}(\xi)| \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi)} \leq c_3 \sum_{|\alpha|=m} (1 + \|\xi\|)^{m-|\alpha|} \cdot (1 + \|\xi\|)^{|\alpha|} \leq \\ &\leq c_4 \cdot (1 + \|\xi\|)^m. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (2.2) непосредственно получаем утверждение Леммы 2.3. $\square$

Предложение 2.5. (см. [10]). Пусть P_m - однородный многочлен порядка m от двух переменных, $\tau \in \Sigma(P_m)$, $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\tau, \eta) = 0$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ для которого

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau)| |(\xi, \tau)|^{m-l(\tau)} \cdot |(\xi, \eta)|^{l(\tau)} &\leq |P_m(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} |D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau)| |(\xi, \tau)|^{m-l(\tau)} \cdot |(\xi, \eta)|^{l(\tau)} \quad \forall \xi \in D(\tau, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $l(\tau)$ порядок нуля многочлена P_m в точке τ , $D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau) \neq 0$ а D_{η} - производная по направлению η .

Доказательства следующих двух утверждений тривиальны, поэтому мы их опускаем.

Предложение 2.6. Для любых $m, l, r \in N_0$, $0 \leq r \leq l$ и $\delta, \rho \in R$

$$(1) \quad m - l + (l - r)\delta + \rho r \leq \max\{m - l(1 - \delta), m - l(1 - \rho)\},$$

$$(2) \quad \text{если } l \geq 2, \quad \delta \neq \rho \text{ то при всех } r: \quad 1 \leq r \leq l - 1$$

$$m - l + (l - r)\delta + \rho r < \max\{m - l(1 - \delta), m - l(1 - \rho)\}.$$

Предложение 2.7. Пусть $m_0, m_1, l_0, l_1 \in N_0$, $\delta_0 \in (0, 1)$, $m_0 \geq m_1$, $m_0 \geq l_0$, $m_1 \geq l_1$ и $m_0 - l_0(1 - \delta_0) \geq m_1 - l_1(1 - \delta_0)$. Тогда

$$(1) \quad m_0 - l_0(1 - \delta) \geq m_1 - l_1(1 - \delta) \quad \forall \delta \in (\delta_0, 1),$$

$$(2) \quad \text{если либо } m_0 > m_1 \text{ либо } m_0 - l_0(1 - \delta_0) > m_1 - l_1(1 - \delta_0), \text{ то}$$

$$m_0 - l_0(1 - \delta) > m_1 - l_1(1 - \delta) \quad \forall \delta \in (\delta_0, 1).$$

3. СРАВНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\delta_0, \delta_1 \in (0, 1)$, $\delta_1 \geq \delta_0$, $f(\delta) = \delta_0$, $\delta \leq \delta_1$, $\delta_0 < f(\delta) < \delta$, $\delta \in (\delta_1, 1)$, $x(t)$, $t \geq 1$ локально ограниченная положительная функция для которой $t^\varepsilon x(t) \rightarrow \infty$, $t^{-\varepsilon} x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, $h(t, \delta)$ $t \geq 1$, $\delta < 1$ функция для которой с некоторой постоянной $c \geq 1$ при $t \geq 1$

$$(3.1) \quad c^{-1} \cdot t^{\delta_0} \leq h(t, \delta) \leq c \cdot t^{\delta_0} \quad \delta < \delta_0,$$

$$(3.2) \quad c^{-1}(t^{\delta_0} + t^{f(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h(t, \delta) \leq c \cdot t^{f(\delta)} \max\{1, x(t)\}, \quad \delta \in [\delta_0, 1].$$

Лемма 3.1. Пусть числа $m_0, m_1, l_0, l_1, \delta_0$ удовлетворяют условиям предложения 2.7 а f, x, h и δ_1 выше описанные функции и число. Тогда для любого $\delta < 1$

$$(3.3) \quad F(\delta) := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} G_1(t)/G_2(t) < \infty,$$

$$\text{где } G_r(t) = \sum_{j=0}^{l_r} t^{m_r - l_r + (l_r - j)\delta} \cdot x^{l_r - j}(t) \cdot h^j(t, \delta), \quad r = 0, 1.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случаи 1) $\delta = \delta_0$, 2) $\delta < \delta_0$, 3) $\delta_0 < \delta < \delta_1$ (при $\delta_1 > \delta_0$) и 4) $\delta_1 < \delta < 1$.

В случае 1), в силу оценки (3.2) т.к. $f(\delta_0) = \delta_0$, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем

$$(3.4) \quad F(\delta_0) \leq c_1 \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m_1 - l_1 - 1(1 - \delta_0)} \cdot (1 + x^{l_1}(t))}{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m_0 - l_0(1 - \delta_0)} \cdot (1 + x^{l_0}(t))}.$$

Если $m_1 - l_1(1 - \delta_0) < m_0 - l_0(1 - \delta_0)$, то в силу условия на функцию $x(t)$ отсюда получаем, что $F(\delta_0) = 0$. Если же $m_1 - l_1(1 - \delta_0) = m_0 - l_0(1 - \delta_0)$, то из условий $m_0 \geq m_1$ и $\delta_0 < 1$ имеем, что $l_0 \geq l_1$, следовательно $F(\delta_0) \leq 2c_1$. Этим выполнение соотношения (3.3) в случае 1) доказано.

Рассмотрим случай 2). Так как в этом случае $f(\delta) = \delta_0 > \delta$, то в силу оценки (3.1) и условия на функцию $x(t)$ с некоторыми постоянными $c_3 \geq c_2 \geq 1$ при достаточно больших t имеем, что

$$G_0(t) \geq c_2^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0 - l_0 + (l_0 - j)\delta + j\delta_0} \cdot x^{l_0 - j}(t) \geq c_3^{-1} \cdot t^{m_0 - l_0(1 - \delta_0)},$$

$$G_1(t) \leq c_2 \cdot \sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1 - l_1 + (l_1 - j)\delta + j\delta_0} \cdot x^{l_1 - j}(t) \leq c_3 \cdot t^{m_1 - l_1(1 - \delta_0)}.$$

Откуда $F(\delta) \leq c_3^2$. Этим выполнение соотношения (3.3) и в случае 2) доказана.

Рассмотрим случай 3). Так как в этом случае $f(\delta) = \delta_0$, то в силу оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем, что

$$F(\delta) \leq c_4 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1-l_1+(l_1-j)\delta+\delta_0 \cdot j} \cdot x^{l_1-j}(t) \cdot (1+x^j(t))}{\sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0-l_0+(l_0-j)\delta+\delta_0 \cdot j} \cdot x^{l_0-j}(t) \cdot [1+(\min\{1, x(t)\})^j]}$$

Так как в случае 3) $\delta > \delta_0$, то в силу предложения 2.6 и условия на функцию $x(t)$ отсюда с некоторой постоянной $c_5 > 0$ имеем, что

$$(3.5) \quad F(\delta) \leq c_5 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{m_1-l_1(1-\delta)} \cdot x^{l_1}(t)}{t^{m_0-l_0(1-\delta)} \cdot x^{l_0}(t)}.$$

Если либо $m_0 > m_1$ либо $m_0 - l_0(1 - \delta_0) > m_1 - l_1(1 - \delta_0)$, то в силу предложения 2.7 и условия на функцию $x(t)$ имеем, что $F(\delta) = 0$. Если же $m_0 = m_1$, $m_0 - l_0(1 - \delta_0) = m_1 - l_1(1 - \delta_0)$ (см. усл. леммы), то $l_0 = l_1$ так как $\delta_0 < 1$ и по этому $F(\delta) \leq c_5$. Этим выполнение соотношения и в случае 3 доказана.

Рассмотрим случай 4). В силу оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_6 > 0$ имеем, что

$$F(\delta) \leq c_6 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1-l_1+(l_1-j)\delta+f(\delta)j} \cdot x^{l_1-j}(t) \cdot (1+x^j(t))}{\sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0-l_0+(l_0-j)\delta} \cdot [t^{\delta_0 \cdot j} + t^{f(\delta)j}(\min\{1, x(t)\})^j] \cdot x^{l_0-j}(t)}$$

Так как в случае 4) $\delta_0 < f(\delta) < \delta$, то в силу предложения 2.6 и условия на функцию $x(t)$ с некоторой постоянной $c_7 > 0$ получаем оценку (3.5). Теперь проводя аналогичные рассуждения как после оценки (3.5) получим, что $F(\delta) < \infty$ и в случае 4). Лемма 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$, P_{m_0} и P_{m_1} однородные многочлены соответственно порядка $m_0 \geq m_1$. Многочлен P_{m_1} $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда

$$(3.6) \quad m_1 - l_1(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \leq m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \quad \forall \tau \in \sum(P_{m_0}),$$

где $l_0(\tau), l_1(\tau)$ порядки нуля в точке τ соответственно многочленов P_{m_0} и P_{m_1} , а

$$\delta_0(\tau) \equiv \begin{cases} \rho_0(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}) \cap R_0^2 \\ \chi_1(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}), \tau_2 = 0 \\ \chi_2(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}), \tau_1 = 0 \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tau \in \sum(P_{m_0})$, $\xi^s := s \cdot \tau + s^{\delta_0(\tau)} \eta$, $s = 1, 2, \dots$, где $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\tau, \eta) = 0$. Не трудно заметить, что с некоторой постоянной $c_1 \geq 1$ имеем (см. определение $\delta_0(\tau)$)

$$(3.7) \quad c_1^{-1} \cdot s^{\delta_0(\tau)} \leq h_{\mathcal{R}}(\xi^s) \leq c_1 \cdot s^{\delta_0(\tau)}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как, в силу условия $\rho_0(\mathcal{R}) < 1$, для любого $\tau \in \sum(P_{m_0})$ $\delta_0(\tau) < 1$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$ (определение $D(\tau, \varepsilon)$ в лемме 2.3). Тогда в силу предложения 2.6 с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.8) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) \geq |P_{m_1}(\xi^s)| \geq c_2 \cdot s^{m_1 - l_1(\tau)} \cdot s^{l_1(\tau) \cdot \delta_0(\tau)}.$$

Для многочлена P_{m_0} с применением формулы Тейлора в силу оценки (3.7) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ при всех s имеем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) &\leq c_3 \left[\sum_{|\alpha| \leq l_0(\tau)} s^{m_0 - l_0(\tau) + (l_0(\tau) - |\alpha|)\delta_0(\tau)} \cdot s^{\delta_0(\tau)|\alpha|} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l_0(\tau) < |\alpha| \leq m_0} s^{m_0 - |\alpha|} \cdot s^{\delta_0(\tau) \cdot |\alpha|} \right] \leq c_4 \cdot s^{m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau))} \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы $P_{m_1} \stackrel{h_{\mathcal{R}}}{\prec} P_{m_0}$, то из оценок (3.8) - (3.9) непосредственно получаем неравенство (3.6). $\square$

Достаточность. Предположим обратное, что при условиях теоремы существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^2$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ для которой

$$(3.10) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) / \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) \rightarrow \infty \quad \text{когда} \quad s \rightarrow \infty.$$

Так как $m_0 \geq m_1$, то отсюда не умоляя общности на основании леммы 3.1 имеем, что последовательность $\{\tau^s := \xi^s / \|\xi^s\|\}_{s=1}^{\infty}$ имеет предел и этот предел принадлежит множеству $\sum(P_{m_0})$. Пусть $\tau^s \rightarrow \tau \in \sum(P_{m_0})$ при $s \rightarrow \infty$, $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\eta, \tau) = 0$. Так как векторы η, τ являются ортонормальным базисом в R^2 , то для любого $s = 1, 2, \dots$ существуют числа $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ такие, что

$$(3.11) \quad \xi^s = \varphi(s) \cdot \tau + \psi(s) \cdot \eta, \quad s = 1, 2, \dots$$

Очевидно, за счет выбора вектора η , можно считать (не умаляя общности), что $\psi(s) \geq 0$ при всех s . Так как $\tau^s \rightarrow \tau$ при $s \rightarrow \infty$, то из представления (3.11) следует, что $\varphi(s) / \|\xi^s\| \rightarrow 1$, $\psi(s) / \varphi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Покажем, что при достаточно больших s $\psi(s) > 0$. Предположим обратное, что существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ которую так

же обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ для которого $\psi(s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$. Тогда с некоторой постоянной $c_5 > 0$ в силу следствия 1 имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) &\leq \sqrt{\sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} |P_{m_0}^{(\alpha)}(\xi^s)|^2 \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi^s)} \geq \\ &\geq c_5 \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)}(s) \cdot h_{\mathbb{R}}^{l_0(\tau)}(\xi^s), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как, см. пункт 4) предложения 2.1 и определение чисел $\rho_0(\mathbb{R})$, $\delta_0(\tau)$, с некоторой постоянной $c_6 \geq 1$ при $\xi^s = \varphi(s) \cdot \tau$

$$(3.12) \quad c_6^{-1} \cdot \varphi^{\delta_0(\tau)} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi^s) \leq c_6 \cdot \varphi^{\delta_0(\tau)}(s), \quad s = 1, 2, \dots$$

то отсюда с некоторой постоянной $c_7 > 0$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем, что

$$(3.13) \quad \tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) \geq c_7 \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).$$

Так как $\rho_0(\mathbb{R}) < 1$, то в силу средней части оценки (1.1), оценки (3.12) и определения $l_1(\tau)$ с некоторыми постоянными $c_8, c_9 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) &\geq \sqrt{\sum_{l_1(\tau) \leq |\alpha| \leq m_1} |\varphi^{m_1-|\alpha|}(s) P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau)|^2 \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi^s)} \leq \\ (3.14) \quad &\leq c_8 \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot h_{\mathbb{R}}^{l_1(\tau)}(\xi^s) \leq c_9 \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Оценки (3.13) и (3.14) в силу неравенства (3.6) противоречат соотношению (3.10) и доказывают, что при достаточно больших s (не умаляя общности будем считать для всех s) $\psi(s) > 0$.

Пусть $\rho_s = \ln(\psi(s))/\ln \varphi(s)$, т.е. $\psi(s) = \varphi^{\rho_s}(s)$, $s = 1, 2, \dots$. Так как $\psi(s)/\varphi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то не умаляя общности будем считать, что $\rho_s \leq 1$, $s = 1, 2, \dots$

Покажем, что при условия теоремы, если выполняется соотношение (3.10), то

$$(3.15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s > 0.$$

Предположим обратное, что существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ для которого существует число $\delta \leq 0$ для которого $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$, то с некоторыми постоянными $c_{10}, c_{11} > 0$ в силу следствия 2.1, предложений 2.2, 2.5 и определения числа $\delta_0(\tau)$ при достаточно больших s имеем

$$\tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) \leq c_{10} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} h_{\mathbb{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| \leq \\
 & \leq c_{11} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi^{\rho^s}(s))^{l_1(\tau)-r} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-r}(s) \right].
 \end{aligned}$$

Так как $\rho_s \rightarrow \delta \leq 0$ при $s \rightarrow \infty$ и $0 < \delta_0(\tau) < 1$, то отсюда с некоторой постоянной $c_{12} > 0$ в силу средней части оценки (1.1) при достаточно больших s имеем, что

$$(3.16) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \leq c_{12} \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).$$

Аналогично для многочлена P_{m_0} с некоторыми постоянными $c_{13}, c_{14} > 0$ при достаточно больших s имеем, что

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) & \geq c_{13} \cdot \sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} |P_{m_0}^{(\alpha)}(\xi^s)|^2 \cdot h_{\mathfrak{R}}^{l_0(\tau)}(\xi^s) \geq \\
 & \geq c_{14} \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).
 \end{aligned}$$

Оценки (3.16) и (3.17) в силу неравенства (3.6) противоречат соотношению (3.10) и доказывают справедливость (3.15).

Очевидно, за счет выбора подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$, можно считать, что существует число $\delta \in (0, 1]$ для которого $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$. Покажем, что $\delta < 1$. Пусть, наоборот, $\delta = 1$. Тогда из представления (3.11) имеем, что $\xi^s = \varphi(s)\tau + \varphi(s) \cdot \theta_s \cdot \eta$, где $\theta_s := \psi(s)/\varphi(s) = \varphi^{\rho_s-1}(s)$, $s = 1, 2, \dots$. Так как $\psi(s)/\varphi(s) \rightarrow \infty$, $\rho_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, то

$$(3.18) \quad \theta_s \rightarrow 0, \quad \varphi^\varepsilon(s) \cdot \theta_s \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Из определений функции $h_{\mathfrak{R}}$ и числа $\rho_0(\mathfrak{R})$ с некоторой постоянной $c_{15} > 0$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем, что

$$(3.19) \quad c_{15}^{-1} \cdot \theta_s \cdot \varphi^{\rho_0(\mathfrak{R})}(s) \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) \leq c_{15} \cdot \varphi^{\rho_0(\mathfrak{R})}(s).$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$, то в силу предложения 2.5 с некоторой постоянной $c_{16} > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.20) \quad \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \geq |P_{m_0}(\xi^s)| \geq c_{16} \cdot \varphi^{m_0}(s) \cdot \theta_s^{l_0(\tau)}.$$

Для многочлена P_{m_1} в силу предложения 2.5, следствия 2.1 и оценки (3.19) при достаточно больших s с некоторыми постоянными $c_{17}, c_{18} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) &\leq c_{17} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| \right] \leq \\ &\leq c_{18} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi(s)\theta_s)^{l_1(\tau)-r} + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-r}(s) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$ и соотношения (3.18), с некоторой постоянной $c_{19} > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.21) \quad \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \leq c_{19} \cdot \varphi^{m_1}(s) \cdot \theta_s^{l_1(\tau)}.$$

Если $m_0 > m_1$, то оценки (3.20) и (3.21) противоречат соотношению (3.10) в силу (3.18). Если же $m_0 = m_1$, то противоречие с соотношением (3.10) получается из соотношения (3.18) и неравенства (3.6), так как в этом случае $l_1(\tau) \geq l_0(\tau)$. Полученное противоречие доказывает, что $\delta \in (0, 1)$.

Пусть $\delta \in (0, 1)$. Тогда из представления (3.11) имеем, что $\xi^s = \varphi(s) \cdot \tau + \varphi^\delta(s) \cdot \theta_s \cdot \eta$, где $\theta_s := \varphi^{\rho_s - \delta}(s) = \psi(s)/\varphi^\delta(s)$ $s = 1, 2, \dots$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$(3.22) \quad \varphi^\varepsilon(s) \cdot \theta_s \rightarrow \infty, \quad \varphi^{-\varepsilon}(s) \cdot \theta_s \rightarrow 0 \quad \text{когда} \quad s \rightarrow \infty.$$

Через $x(t)$ обозначим локально ограниченную функцию для которого $\theta_s = x(\varphi(s))$, а через $h(t, \delta)$ функцию $h_{\mathfrak{R}}(t \cdot \tau + t^\delta \cdot x(t) \cdot \eta)$. В силу предложения 2.2 функция $h(t, \delta)$ удовлетворяет оценкам (3.1), (3.2) с $f(\delta) = g_{\mathfrak{R}}(\delta)$ при $\tau = \pm(0, 1)$, $f(\delta) = f_{\mathfrak{R}}(\delta)$ при $\tau = \pm(1, 0)$, $\delta_0 = \delta(\tau)$, $\delta_1 = \bar{\chi}_1(\mathfrak{R})$ при $\tau = \pm(1, 0)$ и $\delta_1 = \bar{\chi}_2(\mathfrak{R})$ при $\tau = \pm(0, 1)$.

В силу предложения 2.6, следствия 2.1, соотношения (3.22) и средней части оценки (1.1) с некоторыми постоянными $c_j > 0$ $j = \overline{21, 23}$ при достаточно больших s имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) &\leq c_{21} \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi^\delta(s) \cdot \theta_s)^{l_0(\tau)-r} h^r(\varphi(s), \delta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{m_1-r}(s) \cdot h^r(\varphi(s), \delta) \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_{22} \cdot \sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(\varphi^\delta(s)\theta_s)^{l_1(\tau)-r} \cdot h^r(\varphi(s), \delta),$$

$$\bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \geq c_{23} \cdot \sum_{r=0}^{l_0(\tau)} \varphi^{m_0-l_0(\tau)}(s) \cdot (\varphi^\delta(s)\theta_s)^{l_0(\tau)-r} \cdot h^r(\varphi(s), \delta).$$

Отсюда в силу леммы 2.4 получаем, что

$$\overline{\lim_{s \rightarrow \infty}} \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) / \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) < \infty.$$

Это противоречит соотношению (3.10) и доказывает достаточную часть теоремы.

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. (см. [5]). Пусть $\mathfrak{R} \in B$ и P_{m_0} - однородный многочлен порядка m_0 . Многочлен Q представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда 1) $m \leq m_0$ и 2) $Q_j \prec_{h_{\mathfrak{R}}} P_{m_0}$ $j = 0, \dots, m$.

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$ и P_{m_0} однородный многочлен порядка m_0 . Многочлен Q представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда

- (1) $m_0 \geq m$,
- (2) $m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \geq \max_{0 \leq k \leq m} \{k - \tilde{l}_k(\tau)(1 - \delta_0(\tau))\} \quad \forall \tau \in \sum(P_{m_0})$

где $l_0(\tau)$ и $\delta_0(\tau)$ определены в теореме 1 а $\tilde{l}_k(\tau)$ порядок нуля многочлена Q_k $k = 0, \dots, m$ в точке τ .

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 3.1 в силу леммы 3.2. $\square$

Теорема 3.3. Пусть при условиях теоремы 2 $m_0 > m_1$ и многочлен P_{m_0} - гиперболичесен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \eta \in R_0^2$. Тогда многочлен $P_{m_0} + Q$ $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичесен относительно вектора η .

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 3.2 и работы [5]. $\square$

Abstract. A necessary and sufficient condition for comparison with a weight of two-dimensional polynomials is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, 150, 143 - 159 (1965).
- [2] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newton Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
- [3] Л. Хермандер, "Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными", Москва, Мир (1986).

- [4] L. Garding, "Linear hyperbolic differential equations with constant coefficients", Acta Math. **85**, 1 – 62 (1951).
- [5] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О многочленах, гиперболических с весом", Сдана в печать Изв. НАН Армении, серия Математика.
- [6] D. Calvo, "Multianisotropic Gevrey classes and Cauchy Problem", Ph.D Thesis, Piza (2000).
- [7] A. Corly, "On local solvability in Gevrey classes of linear partial differential operators with multiple characteristics", Comm. Part. Diff. Equat. **14**, 1 – 25 (1989).
- [8] L. Svenson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of Polynomials with hyperbolic principal part", Ark. Math **8**, 145 – 162 (1968).
- [9] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of Polynomial of two variable", Kluwer, NATO Since Series, 163 – 190 (2000).

Поступила 7 апреля 2015

TWO RESULTS ON THE NORMALITY CRITERION CONCERNING HOLOMORPHIC FUNCTIONS

FENG LÜ, JUNFENG XU

China University of Petroleum, Qingdao, P. R. China

Wuyi University, Jiangmen, P.R.China

E-mails: lufeng18@gmail.com; xujunf@gmail.com

Abstract. In this paper we generalize two known results concerning normal families of meromorphic functions. We first improve and extend a theorem of Liu and Nevo [10], using a completely different approach. Then we obtain a generalization of Gu's normality criterion stated in [5].

MSC2010 numbers: 30D45, 30D35.

Keywords: Meromorphic function; normal family; Nevanlinna theory; linear differential polynomial.

1. INTRODUCTION AND THE MAIN RESULTS

Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions defined in D . The family $\mathcal{F}$ is said to be normal in D , in the sense of Montel, if for any sequence $f_n \in \mathcal{F}$ there exists a subsequence f_{n_j} that converges spherically locally uniformly on D to a meromorphic function or to ∞ (see [13]).

Let f and g be two meromorphic functions defined in a domain D , and let a be a complex number. If $g(z) = a$ whenever $f(z) = a$, then we write $f(z) = a \Rightarrow g(z) = a$. If $f(z) = a \Rightarrow g(z) = a$ and $g(z) = a \Rightarrow f(z) = a$, then we write $f(z) = a \Leftrightarrow g(z) = a$, and say that f and g share the value a . It is assumed that the reader is familiar with the standard notions and fundamental results of Nevanlinna theory, as found in [7, 15, 16].

In 2004, Chang, Fang and Zalcman [2], have obtained a normal family of holomorphic functions related to a non-vanishing function, which improved the results of Chen and Hua ([3], Theorem 1), Pang ([11], Theorem 1), and Fang and Xu ([4], Theorem 3).

The research was supported by Foundation for Distinguished Young Talents in Higher Education of Guangdong China (no. 2013LYM0093), Training plan for the Outstanding Young Teachers in Higher Education of Guangdong (no. Yq 2013159), and the Natural Science Foundation of Shandong Province Youth Fund Project (ZR2012AQ021), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (15CX05063A, 15CX08011A).

Theorem A. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions on a domain $D \subset \mathbb{C}$. Let $k \geq 2$ be an integer, and let $h(z) \neq 0$ be a holomorphic function in D . Assume also that the following two conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$:

- (a) $f(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = h(z)$, and
- (b) $f'(z) = h(z) \Rightarrow |f^{(k)}(z)| \leq c$, where c is a constant.

Then the family $\mathcal{F}$ is normal on D .

Recently, Liu and Nevo [10] have improved the above theorem by allowing $h(z)$ to have zeros. Specifically, Liu and Nevo have proved the following theorem.

Theorem B. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions on a domain D . Let $k \geq 2$ be an integer, and let $h(z) \neq 0$ be a holomorphic function on $D \subset \mathbb{C}$ that has no common zeros with any $f \in \mathcal{F}$. Assume also that the following two conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$:

- (a) $f(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = h(z)$, and
- (b) $f'(z) = h(z) \Rightarrow |f^{(k)}(z)| \leq c$, where c is a constant.

Then the family $\mathcal{F}$ is normal on D .

Remark 1.1. In fact, Liu and Nevo firstly proved Theorem B in [9] under the additional condition that all zeros of function $h(z)$ have multiplicity at most $k - 1$. Then they removed this additional condition in [10].

From the above theorems, we see that for each $f \in \mathcal{F}$, the function h is a fixed function. So, we now pose the following question: can h be different for different functions f in the above theorems? In this paper give an affirmative answer to this question.

To state our result, we first recall a notation. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions. Denote by $\mathcal{F}'$ the family of limit functions, and set $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$. Motivated by an idea of Grahl and C. Meng [6], we prove the following generalization of the above theorems using a completely different approach.

Theorem 1.1. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions on a domain D . Let $k \geq 2$ be an integer, and let $\mathcal{H}$ be a normal family of holomorphic functions on D such that $0, \infty \notin \overline{\mathcal{H}}$ on D . Assume also that for each $f \in \mathcal{F}$ there exists $h_f \in \mathcal{H}$ such that the following conditions hold:

- (a) f and h_f has no common zeros,
- (b) $f(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = h_f(z)$,
- (c) $f'(z) = h_f(z) \Rightarrow |f^{(k)}(z)| \leq c$, where c is a constant.

Then the family $\mathcal{F}$ is normal on D .

Remark 1.2. The condition (a) is necessary, even in the case where all h_f are the same and the multiplicities of zeros of f are very large. The next example illustrates this point.

Example 1.1. Let $f_n = nz^p$, where p is an integer, and let Δ be the unit disc. Then $f'_n(z) = pnz^{p-1}$ and $f_n^{(k)}(z) = 0$ for $k > p$. Let $h(z) = z$. Then, it is easy to see that, the family $\{f_n\}$ satisfies the conditions (b) and (c) of Theorem 1.1, but $\{f_n\}$ is not normal at 0, no matter how large the integer p is.

Now we consider another problem concerning a normal family.

In 1959, Hayman [7] proved the following seminal result: if f is a meromorphic function on $\mathbb{C}$ and if $f(z) \neq 0$ and $f^{(k)}(z) \neq 1$ for some fixed positive integer k for all $z \in \mathbb{C}$, then f is constant.

The corresponding normality criterion is due to Gu [5]. It states that a family $\mathcal{F}$ of functions meromorphic on D is normal if $f(z) \neq 0$ and $f^{(k)}(z) \neq 1$ on D for each $f \in \mathcal{F}$. Yang [15] extended the above criterion from a value to a holomorphic function. In 2007, Nevo, Pang and Zalcman studied the normality problem from different viewpoint, and proved the following result (see [14, Lemma 3]).

Theorem C. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D , $k \in \mathbb{N}$, and let $\mathcal{H}$ be a normal family of holomorphic functions on D such that $h \neq 0, \infty$ on D for each function $h \in \mathcal{H}$. If for each $f \in \mathcal{F}$, $f(z) \neq 0$ on D , and there exists a $h_f \in \mathcal{H}$ such that $f^{(k)}(z) \neq h_f(z)$ on D , then $\mathcal{F}$ is normal on D .

Recently, Liu and Chang [8] generalized Theorem C by allowing $\mathcal{H}$ to consist of meromorphic functions.

Theorem D. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D , $k \in \mathbb{N}$, and let $\mathcal{H}$ be a normal family of meromorphic functions on D such that $h \neq 0, \infty$ on D for each function $h \in \mathcal{H}$. If for each $f \in \mathcal{F}$, $f(z) \neq 0$ on D , and there exists an $h_f \in \mathcal{H}$ such that $f^{(k)}(z) \neq h_f(z)$ on D , then $\mathcal{F}$ is normal on D .

In [8], the authors also gave an example showing that the condition $f^{(k)}(z) \neq h_f(z)$ cannot be replaced by $f^{(k)}(z) - h_f(z) \neq 0$, even when all h_f are the same.

Example 1.2. Let $f_n(z) = \frac{1}{n!}$ for every $n \in \mathbb{N}$, and $h(z) = \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}$. Then we have $f_n(z) \neq 0$ and $f_n^{(k)}(z) - h_f(z) \neq 0$ on $\mathbb{C}$ for $n > 1$. However, the family $\{f_n\}$ is not normal at 0.

In fact, the condition $f^{(k)}(z) \neq h_f(z)$ implies that f and h_f have no common poles. So, if f is holomorphic, then the condition $f^{(k)}(z) \neq h_f(z)$ coincides with $f^{(k)}(z) - h_f(z) \neq 0$.

From Example 1.2 we see that the functions $f_n^{(k)}$ and h have the same pole at 0 with the same multiplicity. So, it is natural to ask what if all the common poles of $f_n^{(k)}$ and h have different multiplicities?

In view of paper [8], we obtain a generalization of Theorems C and D.

In what follows, we use the following notation:

$$(1.1) \quad L[f] = a_0 f^{(k)} + a_1 f^{(k-1)} + \cdots + a_{k-1} f' + a_k f$$

denotes a linear differential polynomial of f , where $a_0, \dots, a_k$ are holomorphic functions with $a_0(z) \neq 0$.

Theorem 1.2. *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D , and let $\mathcal{H}$ be a normal family of meromorphic functions on D such that $h \neq 0, \infty$ on D for each function $h \in \mathcal{H}$. Assume also that for each $f \in \mathcal{F}$ there exists a function $h_f \in \mathcal{H}$ such that the following conditions hold:*

- (1) $f(z) \neq 0$,
- (2) all the zeros of $L(f) - h_f$ come from the zeros of h_f ,
- (3) the multiplicity of zeros of $L(f) - h_f$ is not larger than that of zeros of h_f at the common zeros of $L(f) - h_f$ and h_f ,
- (4) the multiplicity of poles of $L(f)$ is larger than that of poles of h_f at the common poles of $L(f)$ and h_f .

Then the family $\mathcal{F}$ is normal in D .

The next example shows that the condition (4) in Theorem 2 is necessary.

Example 1.3. Let $f_n(z) = \frac{1}{nz}$ for every $n \in \mathbb{N}$, $h(z) = \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}$ and $D = \{z : |z| < 1\}$. Then for $n > 1$ we have $f_n(z) \neq 0$ and $f_n^{(k)}(z) - h(z) \neq 0$ on D . However, the family $\{f_n\}$ is not normal at 0.

Finally, we give an example to show that there exists a normal family $\mathcal{F}$ satisfying all the conditions of Theorem 1.2.

Example 1.4. Let $f_n(z) = \frac{z^2}{n}$ for every $n \in \mathbb{N}$, $h(z) = ze^{z^2}$ and $D = \{z : |z| < 1\}$. Then for $n > 1$ we have $f_n(z) \neq 0$ and $f_n'(z) - h(z) = ze^{z^2}(\frac{1}{n} - 1)$ on $\mathbb{C}$. Hence $f_n'(z) - h(z)$ and $h(z)$ have the same zeros with the same multiplicities. It is easy to see that the family $\{f_n\}$ satisfies all the conditions of Theorem 1.2, and hence $\{f_n\}$ is normal on D .

Remark 1.3. The condition (3) plays an important role in the proof of Theorem 1.2. However, we don't know whether it is necessary or not.

Throughout the paper we use the following notation: D denotes a domain in $\mathbb{C}$; $\Delta(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ and $\Delta'(z_0, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ for $z_0 \in \mathbb{C}$ and $r > 0$.

2. PROOF OF THEOREM 1.1

To prove our main results, we need some lemmas (see [2], [7], [12]).

Lemma 2.1 ([7]). *Let f be a meromorphic function on $\mathbb{C}$ such that $f(z) \neq 0$ and $f^{(k)}(z) \neq c$ for some constant $c \neq 0$ and all $z \in \mathbb{C}$. Then f is a constant.*

Lemma 2.2 ([2]). *Let g be a nonconstant entire function with $\rho(g) \leq 1$. Let $k \geq 2$ be an integer and let a be a nonzero finite value. If $g(z) = 0 \Rightarrow g'(z) = a$, and $g'(z) = a \Rightarrow g^{(k)}(z) = 0$, then*

$$g(z) = a(z - z_0),$$

where z_0 is a constant.

Lemma 2.3 ([12]). *Let $\mathcal{F}$ be a family of functions meromorphic (resp. holomorphic) in the unit disc Δ , all of whose zeros have multiplicity at least k , and suppose that there exists $A \geq 1$ such that $|f^{(k)}(z)| \leq A$ whenever $f(z) = 0$. If $\mathcal{F}$ is not normal at z_0 in the unit disc, then for each $0 \leq \alpha \leq k$ there exist:*

- (a) points $z_n \in \Delta$, $z_n \rightarrow z_0$
- (b) functions $f_n \in \mathcal{F}$ and
- (c) a sequence of positive numbers $\rho_n \rightarrow 0$ such that $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi) = g_n(\xi) \rightarrow g(\xi)$ locally uniformly, where g is a non-constant meromorphic (resp. entire) function in $\mathbb{C}$ with order at most 2 (resp. 1) such that $g^{\sharp}(\xi) \leq g^{\sharp}(0) = kA + 1$.

Here, as usual, $g^{\sharp}(\xi) = \frac{|g'(\xi)|}{1+|g(\xi)|^2}$ is the spherical derivative of $g(\xi)$.

We are required to prove that a given sequence $\{f_n\}$ contains a subsequence that converges spherically locally uniformly on D or $\{f_n\}$ is normal on D . By the assumptions, there exists a corresponding sequence $\{h_n\} \in \mathcal{H}$ such that the functions f_n, h_n satisfy the conditions (a)-(c) of the theorem.

Since $\mathcal{H}$ is normal, the sequence $\{h_n\}$ contains a subsequence, which we again denote by $\{h_n\}$, such that $\{h_n\}$ converges spherically locally uniformly on D to a

holomorphic function h_0 , which may be ∞ identically. Note that since $0, \infty \notin \overline{\mathcal{H}}$, we have $h_0 \neq 0, \infty$.

Taking into account that normality is a local property, it is enough to show that $\{f_n\}$ is normal at each $z_0 \in D$. We set $E = h_0^{-1}(0)$, and continue the proof by distinguishing two cases.

Case 1. Let $z_0 \notin E$.

In this case we have $h_0(z_0) \neq 0$. Hence, noting that h_n converges to h_0 spherically locally uniformly on D , we conclude that there exists a positive constant δ such that $h_n(z) \neq 0$ and $|h_n(z)| \leq |h(z)| + 1$ on $\Delta(z_0, \delta)$ for large enough n .

Next, it follows from condition (b) that

$$f_n(z) = 0 \Rightarrow |f'_n(z)| = |h_n(z)| \leq A,$$

on $\Delta(z_0, \delta)$, where $A = \max\{|h(z)| : z \in \Delta(z_0, \delta)\} + 1$.

Suppose, to the contrary, that $\{f_n\}$ is not normal at z_0 . Then by lemma 2.3, there exist a subsequence of the sequence $\{f_n\}$ (which we again denote by $\{f_n\}$), a sequence of complex numbers $z_n \rightarrow z_0$ and a sequence of positive numbers $\rho_n \rightarrow 0$, such that

$$(2.1) \quad g_n(\xi) = \rho_n^{-1} f_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g(\xi)$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$, and g is a nonconstant holomorphic function of order at most 1 and $g^\sharp(\xi) \leq g^\sharp(0) = A + 1$.

By differentiating (2.1) one time and k -times, we obtain

$$(2.2) \quad g'_n(\xi) = f'_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g'(\xi)$$

and

$$(2.3) \quad g_n^{(k)}(\xi) = \rho_n^{k-1} f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g^{(k)}(\xi),$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$.

Then, it follows from (2.2) that

$$(2.4) \quad H_n(\xi) = f_n^\sharp(z_n + \rho_n \xi) - h_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g'(\xi) - h_0(z_0),$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$.

We claim that

$$(I) \quad g(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) = h_0(z_0)$$

$$(II) \quad g'(\xi) = h_0(z) \Rightarrow g^{(k)}(\xi) = 0.$$

Suppose that $g(\xi_0) = 0$. Then by Hurwitz's theorem and (2.1), there exists a sequence $\{\xi_n\}$ such that $\xi_n \rightarrow \xi_0$, and for large enough n we have

$$f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0.$$

Then, by assumption (b) we get

$$(2.5) \quad f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) = h_n(z_n + \rho_n \xi_n).$$

A combination of (2.2) and (2.5) yields

$$g'(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z_n + \rho_n \xi_n) = h_0(z_0),$$

implying that the claim (I) holds.

Similarly we can show the validity of the claim (II).

Then, by Lemma 2 we have $g(\xi) = h_0(z_0)(\xi - p_0)$, where p_0 is a constant. Therefore

$$A + 1 = g''(0) \leq |h_0(z_0)| \leq A,$$

which is a contradiction.

Case 2. Let $z_0 \in E$.

Without loss of generality, we can assume that $z_0 = 0$. Then there exists a positive constant δ_1 such that $h_0(z) \neq 0$ on $\Delta'(0, \delta_1)$. It follows from Case 1 that $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0, \delta_1)$.

By taking a subsequence and renumbering, we can assume that

$$(2.6) \quad f_n \rightarrow f \quad \text{on } \Delta'(0, \delta_1).$$

Now if f is a holomorphic in $\Delta'(0, \delta_1)$, then by the maximum modulus principle we conclude that $f_n \rightarrow f$ on $\Delta(0, \delta_1)$, and the result follows. So, let us assume that $f_n \rightarrow \infty$ in $\Delta'(0, \delta_1)$. Let $r < \delta_1$, then $f_n \rightarrow \infty$ uniformly on $|z| = r$. Without loss of generality, we can assume that $f_n \neq 0$ on $|z| = r$ for large enough n . Note that since f_n and h_n have no common zeros, f_n can have only simple zeros. Then from condition (b), we deduce that $\frac{f'_n - h_n}{f_n}$ is holomorphic on $\Delta(0, r)$.

Then by the argument principle and the Cauchy theorem, for large enough n , we have

$$(2.7) \quad \begin{aligned} n(r, \frac{1}{f_n}) &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'_n}{f_n} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'_n - h_n}{f_n} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h_n}{f_n} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h_n}{f_n} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{h_n}{f_n} \right| |dz| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

which implies that f_n has no zeros in $|z| < r$ and $\frac{1}{f_n}$ is holomorphic in $|z| < r$. In view of $\frac{1}{f_n} \rightarrow 0$ in $0 < |z| < r$, we have $\frac{1}{f_n} \rightarrow 0$ in $|z| < r$. Thus, $f_n \rightarrow \infty$ in $|z| < r$. So, $\{f_n\}$ is normal at $z = 0$. Theorem 1.1 is proved.

3. PROOF OF THE THEOREM 1.2

We are required to prove that a given sequence $\{f_n\}$ contains a subsequence that converges spherically locally uniformly on D or $\{f_n\}$ is normal on D . By the assumption, there exists a corresponding sequence $\{h_n\} \in \mathcal{H}$ such that the functions f_n , h_n and $L(f_n)$ satisfy the conditions (1)-(4) of the theorem.

Since $\mathcal{H}$ is normal, the sequence $\{h_n\}$ contains a subsequence, which we again denote by $\{h_n\}$, such that $\{h_n\}$ converges spherically locally uniformly on D to a meromorphic function h_0 , which may be ∞ identically. Note that since $0, \infty \notin \overline{\mathcal{H}}$, we have $h_0 \neq 0, \infty$.

Taking into account that normality is a local property, it is enough to show that $\{f_n\}$ is normal at each $z_0 \in D$. We set $E = h_0^{-1}(0) \cup h_0^{-1}(\infty)$, and continue the proof by distinguishing two cases.

CASE 1. Let $z_0 \notin E$.

In this case we have $h_0(z_0) \neq 0$. Hence, noting that h_n converges to h_0 spherically locally uniformly on D , we conclude that there exists a positive constant δ such that $h_n(z) \neq 0$ on $\Delta(z_0, \delta)$ for large enough n . Then it follows from the condition (2) of the theorem that $L(f_n)(z) = h_n(z) \neq 0$ on $\Delta(z_0, \delta)$.

Suppose, to the contrary, that $\{f_n\}$ is not normal at z_0 . Then by lemma 2.3, there exist a subsequence of the sequence $\{f_n\}$, (which we again denote by $\{f_n\}$), a sequence of complex numbers $z_n \rightarrow z_0$ and a sequence of positive numbers $\rho_n \rightarrow 0$, such that

$$(3.1) \quad g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g(\xi),$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$, and g is a non-constant meromorphic function.

By differentiating (3.1) we obtain

$$(3.2) \quad g_n^{(l)}(\xi) = \rho_n^{l-k} f_n^{(l)}(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g^{(l)}(\xi),$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$, and $1 \leq l \leq k$.

Furthermore, we have

$$\begin{aligned}
 & L(f_n)(z_n + \rho_n \xi) - h_n(z_n + \rho_n \xi) \\
 &= a_0(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + a_1(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(k-1)}(z_n + \rho_n \xi) \\
 (3.3) \quad &+ \cdots + a_k f_n(z_n + \rho_n \xi) - h_n(z_n + \rho_n \xi) \\
 &= a_0(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(k)}(\xi) + \rho_n a_1(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(k-1)}(\xi) \\
 &+ \cdots + \rho_n^k a_k(z_n + \rho_n \xi) g_n(\xi) - h_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow a_0(z_0) g^{(k)}(\xi) - h_0(z_0),
 \end{aligned}$$

where the convergence is spherically locally uniformly in $\mathbb{C}$.

Noting that $f_n(z) \neq 0$ in view of Hurwitz's theorem we have $g(z) \neq 0$. Moreover, it follows from Hurwitz's theorem and $L(f_n)(z) - h_n(z) \neq 0$ on $\Delta(z_0, \delta)$ that $g^{(k)}(z) \neq \frac{h_0(z_0)}{a_0(z_0)}$. Hence, in view of Lemma 2.1, we get a contradiction. Thus, we have proved that $\{f_n\}$ is normal at z_0 .

Case 2. Let $z_0 \in E$.

Without loss of generality, we can assume that $z_0 = 0$. Then there exists a positive constant δ_1 such that $h_0(z) \neq 0, \infty$ on $\Delta'(0, \delta_1)$. It follows from Case 1 that $\{f_n\}$ is normal on $\Delta'(0, \delta_1)$. Moreover, we have $f_n \rightarrow f_0$ on $\Delta'(0, \delta_1)$, where f_0 is meromorphic on $\Delta'(0, \delta_1)$ or $f_0 = \infty$.

Suppose first that $f_0 \neq 0$. Then we have $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f_0}$ on $\Delta'(0, \delta_1)$. Since $f_n(z) \neq 0$ on D , $\frac{1}{f_n}$ is holomorphic on D . Hence, by the maximum modulus principle, we have $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f_0}$ on $\Delta'(0, \delta_1)$, implying that $\{f_n\}$ is normal at 0.

Now, we assume that $f_0 = 0$. In this case, for any positive constant $r < \delta_1$, we have $f_n \rightarrow 0$ and $f_n^{(l)} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ on $|z| = r$ for all positive integers l . Hence $L(f_n) \rightarrow 0$ and $L(f_n)' \rightarrow 0$ on $|z| = r$.

Next, from the argument principle, for sufficiently large n we have

$$\begin{aligned}
 & n(r, \frac{1}{L(f_n) - h_n}) - n(r, L(f_n) - h_n) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{L(f_n)' - h_n'}{L(f_n) - h_n} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h_0'}{h_0} dz \\
 &= n(r, \frac{1}{h_0}) - n(r, h_0),
 \end{aligned}$$

where $n(r, \frac{1}{g})$ and $n(r, g)$ are the numbers of zeros and poles of g in $|z| < r$, respectively, counting multiplicities. Then, it follows that

$$(3.4) \quad n(r, \frac{1}{L(f_n) - h_n}) - n(r, L(f_n) - h_n) = n(r, \frac{1}{h_0}) - n(r, h_0).$$

We consider two subcases.

Subcase 2.1. Let $h_0(0) = 0$.

Noting that the convergence $h_n \rightarrow h_0$ is spherically locally uniformly on D , we conclude that there exists a positive $r_1 < \delta_1$ such that $n(r_1, \frac{1}{h_n}) = n(r_1, \frac{1}{h_0})$ and $n(r_1, h_0) = 0$ for sufficiently large n . Then it follows from conditions (2) and (3) that

$$n(r_1, \frac{1}{L(f_n) - h_n}) \leq n(r_1, \frac{1}{h_n}) = n(r_1, \frac{1}{h_0}),$$

and in view of (3.4) we have

$$n(r_1, L(f_n) - h_n) \leq n(r_1, h_0) = 0.$$

Then, it follows from condition (4) that

$$n(r_1, L(f_n)) = n(r_1, L(f_n) - h_n) \leq n(r_1, h_0) = 0,$$

implying that $n(r_1, L(f_n)) = 0$. Hence, f_n has no pole on Δ_{r_1} . Then, taking into account that $f_n \rightarrow 0$ on $\Delta'(0, r_1)$ and using the maximum modulus principle, we conclude that $f_n \rightarrow 0$ on $\Delta(0, r_1)$, showing that $\{f_n\}$ is normal at 0.

Subcase 2.2. Let $h_0(0) = \infty$.

Noting that the convergence $h_n \rightarrow h_0$ is spherically locally uniformly on D , we conclude that there exists a positive $r_2 < \delta_1$ such that for sufficiently large n

$$n(r_2, h_n) = n(r_2, h_0)$$

and

$$n(r_2, \frac{1}{h_n}) = n(r_2, \frac{1}{h_0}) = 0.$$

Then it follows from condition (2) that $n(r_2, \frac{1}{L(f_n) - h_n}) = 0$, and in view of (3.4), we obtain

$$(3.5) \quad n(r, L(f_n) - h_n) = n(r, h_0) = n(r_2, h_n).$$

Thus, by condition (4), we have

$$(3.6) \quad \bar{n}(r_2, L(f_n)) + n(r_2, h_n) \leq n(r_1, L(f_n) - h_n),$$

where $\bar{n}(r_2, g)$ is the number of poles of g in $\Delta(0, r_2)$, ignoring multiplicities. Combining (3.5) and (3.6), we get $\bar{n}(r_2, L(f_n)) \leq 0$, implying that $\bar{n}(r_2, L(f_n)) = 0$. So $n(r_2, L(f_n)) = 0$, and hence f_n has no pole on $\Delta(0, r_2)$. The arguments, similar to that of used in Subcase 2.1, show that $\{f_n\}$ is normal at 0. Combining the Cases 1 and 2 we conclude that the family $\mathcal{F}$ is normal at each $z_0 \in D$.

This completes the proof of Theorem 1.2.

Acknowledgment. The second author express his thanks to Prof. K.I. Kou for providing him very comfortable research environments when he was a visiting scholar in University of Macau.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Bergweiler, "Bloch's principle", *Comput. Methods Funct. Theory*, **6**, 77 – 108 (2006).
- [2] J. M. Chang, M. L. Fang and L. Zalcman, "Normal families of holomorphic functions", *Illinois J. Math.*, **48**, 319 – 337 (2004).
- [3] H. H. Chen and X. H. Hua, "Normal families concerning shared values", *Israel J. Math.*, **115**, 355 – 362 (2000).
- [4] M. L. Fang and Y. Xu, "Normal families of holomorphic functions and shared values", *Israel J. Math.*, **129**, 125 – 141 (2002).
- [5] Y. X. Gu, "A normal criterion of meromorphic families", *Sci. Sinica, Math. Issue (I)*, 267 – 274 (1979).
- [6] J. Grahl and C. Meng, "Entire functions sharing a polynomial with their derivatives and normal families", *Analysis.*, **28**, 51 – 61 (2008).
- [7] W. Hayman, "Picard values of meromorphic functions and their derivatives", *Ann. Math.*, **70**, 9 – 42 (1959).
- [8] X. Y. Liu and J. M. Chang, "A generalization of Gu's normality criterion", *Proc. Japan. Acad. Ser. A.*, **88**, 67 – 69 (2012).
- [9] X. J. Liu and S. Nevo, "A criterion of normality based on a single holomorphic function", *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **27**, 141 – 154 (2011).
- [10] X. J. Liu and S. Nevo, "A criterion of normality based on a single holomorphic function II", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **38**, 49 – 66 (2013).
- [11] X. C. Pang, "Shared values and normal families", *Analysis*, **22**, 175 – 182 (2002).
- [12] X. C. Pang and L. Zalcman, "Normal families and shared values", *Bull. London Math. Soc.*, **32**, 325 – 331 (2000).
- [13] J. Schiff, *Normal families*, Springer-Verlag, New York/Berlin (1993).
- [14] S. Nevo, X. Pang and L. Zalcman, "Quasinormality and meromorphic functions with multiple zeros", *J. Anal. Math.*, **101**, 1 – 23 (2007).
- [15] L. Yang, "Normality for families of meromorphic functions", *Sci. Sinica, Math. Issue A.*, **29**, 1263 – 1274 (1986).
- [16] X. B. Zhang, "Uniqueness of meromorphic functions sharing one value or fixed points", *J. Contemp. Math. Anal.*, (6), **49**, 359 – 365 (2014).

Поступила 9 сентября 2014

FRAMES AND NON LINEAR APPROXIMATIONS IN HILBERT SPACES

K. T. POUMAI AND S. K. KAUSHIK

Motilal Nehru College, University of Delhi, India
Department of Mathematics, Kirori mal college. University of Delhi, India
E-mails: kholetim@yahoo.co.in; shikk2003@yahoo.co.in

Abstract. A simple proof of the proposition, stated in ([2], p. 346), asserting that in Hilbert spaces a Riesz basis is greedy, is given. Also, greedy approximant for frames in Hilbert spaces is defined and it is shown that frames satisfy the quasi greedy and almost greedy conditions. Finally, we give the characterizations of approximation spaces $A^s(\Psi)$, $A_q^s(\Psi)$ by means of weak- ℓ_p and Lorentz sequence spaces for frames.

MSC2010 numbers: 30D45, 30D35.

Keywords: frames; Greedy basis; almost Greedy frames; approximation spaces.

1. INTRODUCTION

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 1.1. (a) A sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ is called a *Riesz basis* for $\mathcal{H}$, if $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ is complete in $\mathcal{H}$ and there exist constants $A, B > 0$ such that

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \text{ for all } \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2.$$

(b) A sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ is called a *frame* (or *Hilbert frame*) for $\mathcal{H}$, if there exist constants $A, B > 0$ such that

$$(1.1) \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2 \text{ for all } x \in \mathcal{H}.$$

The constants A and B in (1.1) are called the *lower* and *upper frame bounds* of the frame, respectively. They are not unique. If $A = B$, then $\{x_n\}$ is called an *A-tight frame* and if $A = B = 1$, then $\{x_n\}$ is called a *Parseval frame*. The inequality in (1.1) is called the *frame inequality*. The operator $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$ defined as

$$T(\{c_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad \{c_k\} \in \ell^2,$$

is called the *pre-frame operator* (or *synthesis operator*) and its adjoint operator $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2$, is called the *analysis operator* and is given by

$$T^*(x) = \{\langle x, x_k \rangle\}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Composing T and T^* we obtain the *frame operator* $S = TT^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ given by

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Observe that the frame operator S is a positive, self-adjoint and invertible operator on $\mathcal{H}$. This gives the *reconstruction formula* for all $x \in \mathcal{H}$,

$$(1.2) \quad x = SS^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}x, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_k \rangle x_k.$$

For more details related to frames and Riesz frames, see [4, 6].

The notion of *N-term error of approximation and thresholding greedy algorithm of order N* for Schauder basis in Banach spaces have been defined and studied in [9, 12, 13, 15].

Let $\mathcal{X}$ be a Banach space and (x_n, f_n) be Schauder basis for $\mathcal{X}$

$$\sum_N = \left\{ \sum_{n \in \sigma} a_n x_n : \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N \in \mathbb{N}, a_n \text{ are scalars} \right\}$$

For $x \in \mathcal{X}$, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) x_n$ we define

$$\widetilde{\sum}_N = \left\{ \sum_{n \in \sigma} f_n(x) x_n : \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N \in \mathbb{N} \right\}.$$

For each $x \in \mathcal{X}$ the *N-term error of approximation* is defined by

$$\sigma_N(x) = \inf \{ \|x - y\| : y \in \sum_N \}.$$

$$\bar{\sigma}_N(x) = \inf \{ \|x - y\| : y \in \widetilde{\sum}_N \}.$$

Let $\gamma = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a permutation of natural numbers such that

$$|f_{n_1}(x)| \geq |f_{n_2}(x)| \geq |f_{n_3}(x)| \geq \dots$$

We now define the *N-greedy approximant* as

$$G_N(x) = \sum_{k=1}^N f_{n_k}(x) x_{n_k}.$$

Definition 1.2. A Schauder basis (x_n, f_n) is said to be quasi greedy if there exists a constant C such that $\|G_N(x)\| \leq C\|x\|$ for all $x \in \mathcal{X}$.

Definition 1.3. A Schauder basis (x_n, f_n) is said to be almost greedy if there exists a constant C such that $\|x - G_N(x)\| \leq C\bar{\sigma}_N(x)$ for all $x \in \mathcal{X}$.

Definition 1.4. A Schauder basis (x_n, f_n) is said to be greedy if there exists a constant C such that $\|x - G_N(x)\| \leq C\sigma_N(x)$ for all $x \in \mathcal{X}$.

In [9], the following relation between greedy basis, almost greedy basis and quasi greedy basis has been given:

Greedy basis $\Rightarrow$ almost greedy basis $\Rightarrow$ quasi greedy basis.

Remark 1.1. Let $\{x_n\}$ be an orthonormal basis for Hilbert space $\mathcal{H}$, then $\{x_n\}$ is greedy.

2. RIESZ BASIS AND GREEDY APPROXIMATION

We begin this section with a simple new proof of the proposition, stated in ([2], p. 346), asserting that in Hilbert spaces Riesz bases are greedy. This theorem follows from the fact that a Riesz basis is L_2 -equivalent to the Haar basis and using Theorem 2.1 of [13]. It can also be deduced from the fact that a Riesz basis is democratic and using Theorem 1 of [14]. Here we give a formal proof of this result with improved constant in the Greedy estimate.

Theorem 2.1. *Let $\{x_n\}$ be a Riesz basis for Hilbert space $\mathcal{H}$ with bounds A and B . Then, for any $N \in \mathbb{N}$*

$$\|x - G_N(x)\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}} \sigma_N(x) \text{ for all } x \in \mathcal{H}.$$

We first provide some terminology which is required in the proof of Theorem 2.1. Let $\{x_n\}$ be a frame for Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N \in \mathbb{N}$. We denote $\mathcal{H}_\sigma = \text{span}_{n \in \sigma} \{x_n\}$. As in [5], $\{x_n\}_{n \in \sigma}$ is a frame for $\mathcal{H}_\sigma$. Let V_σ be a frame operator for the frame $\{x_n\}_{n \in \sigma}$ of $\mathcal{H}_\sigma$. Since $\mathcal{H}_\sigma$ is a closed subspace of $\mathcal{H}$, there is an orthogonal projection P_σ from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}_\sigma$. Thus, for $x \in \mathcal{H}$ we have

$$\begin{aligned} P_\sigma(x) &= \sum_{n \in \sigma} \langle P_\sigma(x), V_\sigma^{-1} x_n \rangle x_n = \sum_{n \in \sigma} \langle x, P_\sigma V_\sigma^{-1} x_n \rangle x_n \\ &= \sum_{n \in \sigma} \langle x, V_\sigma^{-1} x_n \rangle x_n. \end{aligned}$$

Lemma 2.1. *Let $\{x_n\}$ be a frame for Hilbert space $\mathcal{H}$, σ be a finite subset of $\mathbb{N}$ and P_σ be the orthogonal projection from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}_\sigma$. Then, for $x \in \mathcal{H}$ we have*

$$\sigma_N(x) = \inf_{\sigma} \{\|x - P_\sigma(x)\| : \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N\}.$$

Proof. For $x \in \mathcal{H}$ we have

$$\|x - P_\sigma(x)\| = \text{dist}(x, \mathcal{H}_\sigma) = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathcal{H}_\sigma\}.$$

So, for any $y \in \mathcal{H}_\sigma$ we have $\|x - P_\sigma(x)\| \leq \|x - y\|$. Hence

$$\sigma_N(x) = \inf\{\|x - P_\sigma(x)\| : \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N\}.$$

Let $\{x_n\}$ be a Riesz basis for $\mathcal{H}$ and S be a frame operator for $\{x_n\}$. For $\sigma \subseteq \mathbb{N}$, define the following operators:

(i) $S_\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ as

$$S_\sigma(x) = \sum_{n \in \sigma} \langle x, x_n \rangle x_n, \text{ for } \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N.$$

(ii) $Q_\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ as

$$Q_\sigma(x) = S_\sigma S^{-1}(x) = \sum_{n \in \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n.$$

Let $\rho = \{n_k\}_{k=1}^\infty$ be a permutation of natural numbers such that

$$|\langle x, S^{-1}x_{n_1} \rangle| \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_2} \rangle| \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_3} \rangle| \geq \dots$$

The N -greedy approximant is given by $G_N(x) = \sum_{k=1}^N \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle x_{n_k}$.

Remark 2.1. ([4]) A Riesz basis $\{x_n\}$ for $\mathcal{H}$ is a frame for $\mathcal{H}$, and the Riesz basis bounds coincide with the frame bounds.

Proof. of Theorem 2.1 by Remark 2.1, a Riesz basis is a frame for $\mathcal{H}$ with the same bounds. Since A and B are the bounds of the Riesz basis $\{x_n\}$, by the frame inequality we have

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Note that

$$\begin{aligned} \|x - G_N(x)\|^2 &= \left\| \sum_{k>N} \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle x_{n_k} \right\|^2 = \sup_{y \in \mathcal{H}, \|y\|=1} \left| \sum_{k>N} \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle \langle x_{n_k}, y \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \sup_{y \in \mathcal{H}, \|y\|=1} \sum_{k>N} |\langle x_{n_k}, y \rangle|^2 \leq B \sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \end{aligned}$$

Also, by the definition of greedy approximant, for $x \in \mathcal{H}$, we have

$$\sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2, \text{ for any } \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N.$$

Thus, for any $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$, we have

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2, \text{ for } x \in \mathcal{H}.$$

Let V_σ be the frame operator for the frame $\{x_n\}_{n \in \sigma}$ of $\text{span}\{x_n\}_{n \in \sigma}$, and let P_σ be the orthogonal projection from $\mathcal{H}$ onto $\text{span}\{x_n\}_{n \in \sigma}$, given by $P_\sigma(x) = \sum_{n \in \sigma} \langle x, V_\sigma^{-1}x_n \rangle x_n$ (see Theorem 1.1.8 in [4]). Also, by inequalities of canonical dual frame of $\{x_n\}$, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \|x - P_\sigma(x)\|^2 &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x - P_\sigma(x), S^{-1}x_n \rangle|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle - \langle P_\sigma(x), S^{-1}x_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle - \sum_{j \in \sigma} \langle x, V_\sigma^{-1}x_j \rangle \langle x_j, S^{-1}x_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Thus, for any $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$, we obtain

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq \frac{B}{A} \|x - P_\sigma(x)\|^2 \text{ for } x \in \mathcal{H}.$$

Hence, by Lemma 2.2, we get

$$\|x - G_N(x)\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}} \sigma_N(x) \text{ for } x \in \mathcal{H}.$$

Theorem 2.1 is proved.

3. FRAMES AND GREEDY APPROXIMATION

Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame for Hilbert space $\mathcal{H}$ with canonical dual frame $\{S^{-1}x_n\}$, and let $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n$ for all $x \in \mathcal{H}$. Define the nonlinear N -term approximation manifolds for frames, in the similar manner as we have defined for Schauder basis, as follows:

$$\sum_N(\Psi) = \left\{ \sum_{n \in \sigma} a_n x_n : \sigma \subseteq \mathbb{N}, |\sigma| = N, a_n \text{ are scalars} \right\},$$

$$\bar{\sum}_N(\Psi) = \left\{ \sum_{n \in \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n : \sigma \subseteq \mathbb{N}, x \in \mathcal{H}, |\sigma| = N \right\}.$$

We define the N -term approximation errors as

$$\sigma_N(x) = \inf \{ \|x - y\| : y \in \sum_N(\Psi) \},$$

$$\bar{\sigma}_N(x) = \inf \{ \|x - y\| : y \in \bar{\sum}_N(\Psi) \}.$$

Also, define $S_\sigma, Q_\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ as

$$S_\sigma(x) = \sum_{n \in \sigma} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad \sigma \subseteq \mathbb{N}, \quad |\sigma| = N,$$

$$Q_\sigma(x) = S_\sigma(S^{-1}(x)) = \sum_{n \in \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n.$$

Let $\rho = \{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ be a permutation of natural numbers such that

$$|\langle x, S^{-1}x_{n_1} \rangle|^2 \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_2} \rangle|^2 \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_3} \rangle|^2 \geq \dots$$

Now, define the N -greedy approximant for a frame $\{x_n\}$ as

$$G_N(x) = \sum_{k=1}^N \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle x_{n_k} \text{ for } x \in \mathcal{H}.$$

We have $G_N(x) = Q_{\sigma_0}(x)$ for some $\sigma_0 \subseteq \mathbb{N}$, $|\sigma_0| = N$.

Lemma 3.1. ([6]) Let $\{x_n\}$ be a frame with bounds A, B , and let T be its synthesis operator. Then $\ell^2 = \ker T \oplus \text{Ran } T^*$. Moreover, we have

$$A \sum_n |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_n \alpha_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_n |\alpha_n|^2 \text{ for all } \alpha = \{\alpha_n\} \in \text{Ran } T^*.$$

Let $\{x_n\}$ be a frame for Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\sigma \subset \mathbb{N}$. Define the operators T_σ, T_σ^* as follows:

$$T_\sigma(\{\alpha_j\}_{j \in \sigma}) = \sum_{j \in \sigma} \alpha_j x_j, \quad \{\alpha_j\}_{j \in \sigma} \in \ell^2; \quad T_\sigma^*(x) = \{\langle x, x_j \rangle\}_{j \in \sigma}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Observe that $S_\sigma(x) = T_\sigma T_\sigma^*(x) = \sum_{j \in \sigma} \langle x, x_j \rangle x_j$ for all $j \in \sigma$, and T_σ^* is the adjoint of operator T_σ .

Lemma 3.2. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame for Hilbert space $\mathcal{H}$ with bounds A and B , and let $\sigma \subset \mathbb{N}$. Then $\|S_\sigma(x)\| \leq B\|x\|$ for all $x \in \mathcal{H}$.

Proof. Using the frame inequality, for $x \in \mathcal{H}$ we obtain

$$\|T_\sigma^*(x)\|^2 = \sum_{j \in \sigma} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

So, we have $\|T_\sigma^*(x)\| \leq \sqrt{B}\|x\|$ for all $x \in \mathcal{H}$. Thus, we get

$$\|S_\sigma(x)\| = \|T_\sigma T_\sigma^*(x)\| \leq \|T_\sigma\| \|T_\sigma^*\| \|x\| \leq B\|x\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

The next result shows that frames satisfy the quasi greedy condition.

Theorem 3.1. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame with bounds A and B . Then

- (1) $\|G_N(x)\| \leq \frac{B}{A}\|x\|$ for all $x \in \mathcal{H}$.
 (2) $\|x - G_N(x)\| \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$.

Proof. (1). Let $G_N(x) = Q_{\sigma_0}(x)$ for some $\sigma_0 \subseteq \mathbb{N}$ with $|\sigma_0| = N$. Then we have

$$\|G_N(x)\| = \|Q_{\sigma_0}(x)\| = \|S_{\sigma_0}S^{-1}(x)\| \leq \|S_{\sigma_0}\| \|S^{-1}\| \cdot \|x\|.$$

Therefore, by Lemma 3.2, $\|S_{\sigma_0}\| \leq B$ and $\|S^{-1}\| \leq A^{-1}$. Hence $\|G_N(x)\| \leq \frac{B}{A}\|x\|$.

To prove the assertion (2) observe that

$$\begin{aligned} \|x - G_N(x)\|^2 &= \left\| \sum_{k>N} \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle x_{n_k} \right\|^2 = \sup_{y \in \mathcal{H}, \|y\|=1} \left| \sum_{k>N} \langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle \langle x_{n_k}, y \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \sup_{y \in \mathcal{H}, \|y\|=1} \sum_{k>N} |\langle x_{n_k}, y \rangle|^2 \leq B \sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2. \end{aligned}$$

By the definition of greedy algorithm, for any $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$, we have

$$\sum_{k>N} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2.$$

Thus, we obtain

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq B \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2 \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

Theorem 3.1 is proved. Next, we show that frames also satisfy the almost greedy condition.

Theorem 3.2. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame for H with bounds A and B . Then

$$\|x - G_N(x)\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}} \tilde{\sigma}_N(x).$$

Proof. As in the proof of Theorem 3.3, we have $\|x - G_N(x)\|^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2$

for any $\sigma \subset \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$ and $x \in H$. Also, by Lemma 3.1 we have

$$A\|a\|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|^2 \leq B\|a\|^2 \text{ for all } a = \{a_n\} \in \ker T^\perp.$$

Moreover, $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} = \{\langle S^{-1}x, x_n \rangle\} = T^*S^{-1}(x) \in \text{Ran } T^* = \ker T^\perp$. So, for any $\sigma \in \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$ we obtain

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq \frac{B}{A} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n \right\|^2 \text{ for all } x \in \mathcal{H}.$$

Now, let $y = \sum_{n \in \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n \in \tilde{\Sigma}_N(\Psi)$. Then

$$\|x - y\|^2 = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \sigma} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n \right\|^2 \text{ for any } \sigma \in \mathbb{N} \text{ with } |\sigma| = N.$$

Thus,

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq \frac{B}{A} \|x - y\|^2 \text{ for any } y \in \widetilde{\sum}_N(\Psi).$$

Hence, $\|x - G_N(x)\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}} \bar{\sigma}_N(x)$ for $x \in \mathcal{H}$. Theorem 3.4 is proved.

Next, we define the *weak- ℓ_p* and Lorentz sequence spaces. We also define the approximation spaces $\mathcal{A}^s(\Psi)$ and $\mathcal{A}_q^s(\Psi)$ for frames $\Psi = \{x_n\}$ in Hilbert spaces. In [8, 10, 12], greedy algorithms such as *Pure Greedy Algorithm*, *Relaxed Greedy Algorithm*, *Orthogonal Greedy Algorithm* for general dictionaries in Hilbert spaces have been defined and proved various Lebesgue-type inequalities for greedy approximations. In the following, we give the characterizations of approximation spaces by means of sequence spaces. We first define the *weak- ℓ_p* and Lorentz sequence spaces.

Definition 3.1. ([7, 11]) For $0 < p < \infty$, the *weak- ℓ_p* sequence space, denoted by $w\ell_p$, is defined to be the space of all sequences $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ satisfying

$$\|\{a_n\}\|_{w\ell_p} = \sup_{n \geq 1} n^{1/p} a_n^* < \infty,$$

where $\{a_n^*\}_{n=1}^\infty$ is a nonincreasing rearrangement of $\{|a_n|\}_{n=1}^\infty$.

Definition 3.2. ([1, 7]) For $0 < p < \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$, the Lorentz sequence space, denoted by $\ell_{p,q}$, is defined to be the space of all sequences $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ satisfying

$$\|\{a_n\}\|_{\ell_{p,q}} = \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^{*q} n^{q/p-1} \right)^{1/q} < \infty,$$

where $\{a_n^*\}_{n=1}^\infty$ is a nonincreasing rearrangement of $\{|a_n|\}_{n=1}^\infty$.

The notation $A \asymp B$ stands for $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ with some constants $C_1, C_2 > 0$.

Remark 3.1. Note that

$$(3.1) \quad \|\{a_n\}\|_{\ell_{p,q}} \asymp \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jq/p} a_{2^j}^{*q} \right)^{1/q}.$$

In the following, we define the approximation spaces for frames.

Definition 3.3. ([7]) Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame. For $0 < s < \infty$, we define the approximation space $\mathcal{A}^s(\Psi)$ as the set of $x \in \mathcal{H}$ satisfying

$$\|x\|_{\mathcal{A}^s(\Psi)} = \sup_{n \geq 1} n^s \sigma_n(x) < \infty.$$

Definition 3.4. ([7]) Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame. For $0 < s < \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$, we define the approximation space $\mathcal{A}_q^s(\Psi)$ as the set of $x \in \mathcal{H}$ satisfying

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^s(\Psi)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^q(x) n^{qs-1} \right)^{1/q} < \infty.$$

We have (see [7])

$$(3.2) \quad \|x\|_{\mathcal{A}_q^s(\Psi)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2^j}^q(x) 2^{jq_s} \right)^{1/q}.$$

For the sake of completeness of our discussion related to the characterizations of approximation spaces, in the form of a remark, we state a result from [7].

Remark 3.2. Let $\Psi = \{x_n\}$ be an orthonormal basis for $\mathcal{H}$. Then

- (a) $x \in \mathcal{A}^s(\Psi)$ if and only if $\{\langle x, x_n \rangle\} \in w\ell_p$, $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}$, $p < 2$.
- (b) $x \in \mathcal{A}_q^s(\Psi)$ if and only if $\{\langle x, x_n \rangle\} \in \ell_{p,q}$, $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}$, $q < 2$.

Now the question of interest is: given a real number $s > 0$ such that for $x \in \mathcal{H}$ the error of N -term approximation for frames satisfies $\sigma_N(x) \leq M \cdot N^{-s}$, $N = 1, 2, 3, \dots$, for some constant $M > 0$. The next result concerns this question.

Theorem 3.3. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame for $\mathcal{H}$ with bounds A and B . If $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in w\ell_p$, then $x \in \mathcal{A}^s(\mathcal{D})$, where $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}$ and $p < 2$.

Proof. Let $M = \|\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\}\|_{w\ell_p}$ and $\{n_k\}$ be a permutation of $\mathbb{N}$ such that

$$|\langle x, S^{-1}x_{n_1} \rangle| \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_2} \rangle| \geq |\langle x, S^{-1}x_{n_3} \rangle| \dots$$

Now, take $c_k^* = |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|$ for $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, and observe that by the assumption we have $k^{1/p} c_k^* \leq M$ for all $k \in \mathbb{N}$. Also, by Theorem 3.1, for $N \in \mathbb{N}$ we have

$$\|x - G_N(x)\|^2 \leq B \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}(x_{n_k}) \rangle|^2 = B \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^{*2}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Consider the dyadic sums $F_m^2 = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} c_k^{*2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Then we have

$$F_m^2 \leq \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} M^2 k^{-2/p} \leq M^2 2^{-2ma} \quad \text{for all } m = 1, 2, 3, \dots$$

Also, let $2^l \leq N \leq 2^{l+1}$ for $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Then we can write

$$\begin{aligned} N^{2s} \sigma_N^2(x) &\leq N^{2s} \|x - G_N(x)\|^2 \leq N^{2s} B \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^{*2} \leq N^{2s} B \sum_{k=2^l}^{\infty} c_k^{*2} \\ &\leq B 2^{2s(l+1)} \sum_{k=2^l}^{\infty} c_k^{*2} = B 2^{2s(l+1)} \sum_{m=l}^{\infty} F_m^2 \leq B M^2 2^{2s(l+1)} \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-2ms} = B M^2 \frac{2^{4s}}{2^{2s} - 1}. \end{aligned}$$

Thus, $\sup_{1 \leq N < \infty} N^s \sigma_N(x) < \infty$ and the result follows. Theorem 3.3 is proved.

Next, we show that the converse of Theorem 3.3 is true for Riesz bases.

Theorem 3.4. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a Riesz basis for $\mathcal{H}$ with bounds A and B . Then

$$x \in \mathcal{A}^s(\Psi) \text{ if and only if } \{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in w\ell_p, \quad \frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}, \quad p < 2.$$

Proof. If $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in w\ell_p$, then the result follows from Theorem 3.3.

Conversely, let $x \in \mathcal{A}^s$. Then for any finite subset $\sigma \subset \mathbb{N}$ with $|\sigma| = N$, $x \in \mathcal{H}$ and from the proof of Theorem 2.1 we have

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \sigma_N^2(x) \quad \text{for all } x \in \mathcal{H}.$$

As in the proof of Theorem 3.3, take $c_k^* = |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|$ for $k=1, 2, 3, \dots$, to obtain

$$c_{2N}^{*2} \leq N^{-1} \sum_{k=N+1}^{2N} c_k^{*2} \leq N^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^{*2} \leq N^{-1} \frac{1}{A} \sigma_N^2(x).$$

Since a similar inequality holds for c_{2N+1}^* , we have the other implication of the asserted equivalence. Moreover, by assumption, $\sigma_N^2(x) \leq N^{-2s} \|x\|_{\mathcal{A}_s}^2$ for $N \geq 1$. Therefore

$$N^{2/p} c_N^* = N^{2s+1} c_N^* \leq \frac{1}{A} \|x\|_{\mathcal{A}_s}^2 < \infty \quad \text{for any } N \geq 1,$$

implying that $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in w\ell_p$. Theorem 3.4 is proved.

Now, we give a characterization of approximation space $\mathcal{A}_q^s(\Psi)$ by means of Lorentz sequence spaces.

Theorem 3.5. Let $\Psi = \{x_n\}$ be a frame for $\mathcal{H}$ with bounds A and B . If $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in \ell_{p,q}$, then $x \in \mathcal{A}_q^s(\Psi)$, where $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}$ and $0 \leq q < 2$.

Proof. As in the proof of Theorem 3.3, take $c_k^* = |\langle x, S^{-1}x_{n_k} \rangle|$ for $k = 1, 2, 3, \dots$. Then, by Theorem 3.1 for $m \in \mathbb{N}$ we have

$$\sigma_m^2(x) \leq \|x - G_m(x)\|^2 \leq B \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k^{*2}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Also, since an ℓ_2 -norm does not exceed an ℓ_q -norm, we can write

$$\begin{aligned}\sigma_{2^m}(x) &\leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=2^m+1}^{\infty} c_k^{*2} \right)^{1/2} \leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=2^m}^{\infty} c_k^{*2} \right)^{1/2} \leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=2^m}^{\infty} 2^k c_{2^k}^{*2} \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=2^m}^{\infty} 2^{kq/2} c_{2^k}^{*q} \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

So, it follows that with some constant C

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} 2^{msq} \sigma_{2^m}^q(x) &\leq B^{q/2} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{msq} \sum_{k=2^m}^{\infty} 2^{kq/2} c_{2^k}^{*q} \leq B^{q/2} C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} 2^{kq/2} c_{2^k}^{*q} \\ &\leq B^{q/2} C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq/p} c_{2^k}^{*q} < \infty,\end{aligned}$$

implying that $x \in A_q^s(\mathcal{D})$. Theorem 3.5 is proved.

Finally, we show that the converse of Theorem 3.5 is true for Riesz bases in Hilbert spaces. In [8], a similar characterization of $A_q^s(\Psi)$ by orthonormal basis is given.

Theorem 3.6. *Let $\Psi = \{x_n\}$ be a Riesz basis for $\mathcal{H}$ with bounds A and B . Then*

$$x \in A_q^s(\Psi) \text{ if and only if } \{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in \ell_{p,q}, \quad \frac{1}{p} = s + \frac{1}{2}, \quad q < 2.$$

Proof. If $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in \ell_{p,q}$, then the result immediately follows from Theorem 3..

Conversely, let $x \in A_q^s(\mathcal{D})$. Then, by Theorem 3.12 we have

$$c_n^* \leq n^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{A}} \sigma_n(x), \quad \text{for } n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-1} c_n^{*q} \leq \frac{1}{A^{q/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-1} n^{-q/2} \sigma_n^q(x) = \frac{1}{A^{q/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{qs-1} \sigma_n^q(x) < \infty.$$

Hence, $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\} \in \ell_{p,q}$. Theorem 3.6 is proved.

Acknowledgement: The authors are thankful to the Referee for his critical remarks and constructive suggestions that helped to improve the original version of the paper.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Barza, A. N. Maroci and L. E. Persson, "Best constants between equivalent norms in Lorentz sequence spaces", Hindawi Publishing Corporation, Journal of Function Spaces and Applications, Volume 2012, Article ID 713534 19 Pages doi: 10.1155/2012/713534.
- [2] W. Bednorz, Greedy Algorithms, ISBN 978-953-7619-27-5, 586 pages, Publisher: InTech, Chapters published November 01, 2008 under CC BY-NC-SA 3.0 license DOI: 10.5772/92.
- [3] P. Binev, W. Dahmen, R. DeVore, P. Petrushev, "Approximation classes for adaptive methods", Serdica Math. J. **28**, 391 – 416 (2002).
- [4] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhauser, Boston (2003).

- [5] O.Christensen, "Frames and the projection method", *Applied and Computational Harmonic Analysis* **1**, 50 – 53 (1993).
- [6] Christopher Heil, *A Basis Theory Primer*, Birkhäuser, Boston (2011).
- [7] W. Dahmen, R. A. DeVore, A. Kunoth, *Multiscale, Nonlinear and Adaptive, Approximation*, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 3642034640, 9783642034640.
- [8] R. A. DeVore, V.N.Temlyakov, "Some remarks on Greedy algorithms", *Advances in Computational Mathematics* **5**, 173 – 187 (1996).
- [9] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova and V. N. Temlyakov, "The Thresholding Greedy algorithm, Greedy bases and duality", *Constr. Approx.*, **19**, 575 – 597 (2003).
- [10] D. L. Donoho, M. Elad, V. N. Temlyakov, "On Lebesgue-type inequalities for greedy approximation", *Journal of Approximation Theory* **147**, 185 – 195 (2007).
- [11] Ronald A. DeVore, "Nonlinear approximation", *Acta Numerica*, 15 – 150 (1998).
- [12] V. N. Temlyakov, *Greedy Approximation*, Cambridge University Press, (2011).
- [13] V. N. Temlyakov, "The best m-term approximation and greedy algorithms", *Advances in Computational Mathematics* **8**, 249 – 265 (1998).
- [14] V. N. Temlyakov, S. V. Konyagin, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", *East Journal of Approximations* **5**, 365 – 379 (1999).
- [15] P. Wojtaszczyk, "Greedy type bases in Banach spaces", *Constructive Function Theory*, varna 2002 (B. Bojanov. Ed.) DARBA, Sofia, 1 – 20 (2001).

Поступила 2 декабря 2014

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 50, No. 6, 2015

CONTENTS

D. S. DAVIDOVA, YU. M. MOVSISYAN, Hyperidentities of weakly idempotent lattices	259
H. G. GHAZARYAN, On formally almost hypoelliptic polynomials of constant power	265
N. NYAMORADI, Variational approach to solutions for a class of Kirchhoff type fractional differential equations without compactness conditions	275
A. APLAKOV, On absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$	287
S. L. GOGYAN, Democratic subsystems of the multiple Haar system	296
B. V. VYNNYTS'KYI, R. V. KHATS', A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler-type functions	301

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 51, номер 1, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша	3
Г. А. Карапетян, Н. С. Сарибекян, Спектральная устойчивость полуэллиптических операторов высшего порядка	21
В. Н. Маргарян, Сравнение двумерных многочленов	38
FENG LÜ, JUNFENG XU, Two results on the normality criterion concerning holomorphic functions	54
К. Т. Поумай, С. К. Каушик, Frames and non linear approximations in Hilbert spaces	65–76

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 51, No. 1, 2016

CONTENTS

M. G. GRIGORYAN, K. A. NAVASARDYAN, On behavior of Fourier coefficients by Walsh system	3
G. KARAPETYAN, N. SARIBEKYAN, Spectral stability of higher order semi-elliptic operators	21
V. N. MARGARYAN, Comparison of two-dimensional polynomials	38
FENG LÜ, JUNFENG XU, Two results on the normality criterion concerning holomorphic functions	54
K. T. POUMAI, S. K. KAUSHIK, Frames and non linear approximations in Hilbert spaces	65–76