

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2015

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ON ABSOLUTE CONVERGENCE OF THE SERIES OF FOURIER
COEFFICIENTS WITH RESPECT TO HAAR-LIKE SYSTEMS IN
THE CLASS $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$

A. APLAKOV

Georgian National University - SEU, Tbilisi, Georgia
E-mail: aplakovi@gmail.com

Abstract. In this paper we study a question of absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class of functions of generalized bounded variation $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$.

MSC2010 numbers: 42C10.

Keywords: Haar-like system; Vilenkin system; Fourier series; absolute convergence.

1. INTRODUCTION

It is well-known that the notion of variation of a function was introduced by Jordan [18] in 1881. In 1924, Wiener [25] generalized this notion and introduced the notion of p -variation. In 1937, Young [26] introduced the notion of Φ -variation. Waterman [24] has studied the class of functions of bounded Λ -variation, and Chanturia [5] has defined the notion of modulus of variation of a function. Later the notion of modulus of variation for a continuous function was generalized by Karchava [19]. In 1990, Kite and Yoneda [20] have introduced the notion of generalized Wiener's class $BV(p(n) \uparrow p)$.

Let f be a function defined on $(-\infty, +\infty)$ with period 1. Δ is said to be a partition with period 1, if

$$\Delta: \dots t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots$$

satisfies $t_{k+m} = t_k + 1$ for $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, where m is a positive integer. Let $\rho(\Delta) = \inf |t_k - t_{k-1}|$.

Definition 1.1 ([20]). Let $p(n)$ be an increasing sequence such that $1 \leq p(n) \uparrow p$ as $n \rightarrow \infty$, where $1 \leq p \leq \infty$. We say that a function f belongs to the class $BV(p(n) \uparrow p)$

if

$$V(f, p(n) \uparrow p) := \supsup_{n \geq 1, \Delta} \left\{ \left(\sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})|^{p(n)} \right)^{\frac{1}{p(n)}} : \rho(\Delta) \geq \frac{1}{2^n} \right\} < \infty.$$

If $p(n) = p$ for all n , then the class $BV(p(n) \uparrow p)$ coincides with the Wiener class V_p of functions of bounded p -variation.

Properties of functions of class $BV(p(n) \uparrow p)$ as well as uniform convergence and divergence of their Fourier series by trigonometric and Walsh systems have been studied by Kita [21], Goginava [7]–[9] and Goginava, Nagy [12].

In 2000, Akhobadze [1] has generalized the class $BV(p(n) \uparrow p)$ by introducing the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$, defined below.

Let ϕ be an increasing function defined on the set of natural numbers $\mathbb{N}$, such that $\phi(1) \geq 2$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = +\infty.$$

Let f be a finite 1-periodic function defined on $(-\infty, +\infty)$, and let Δ be a partition with period 1, defined above.

Definition 1.2 (Akhobadze [1]). *Let $p(n)$ be an increasing sequence such that $1 \leq p(n) \uparrow p$ as $n \rightarrow \infty$, where $1 \leq p \leq \infty$, and let the function ϕ be as above. We say that a function f belongs to the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ if*

$$V(f, p(n) \uparrow p, \phi) = \supsup_{n \geq 1, \Delta} \left\{ \left(\sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})|^{p(n)} \right)^{\frac{1}{p(n)}} : \rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)} \right\} < \infty.$$

If $p(n) = p$ for each natural n , where $1 < p < \infty$, then the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ coincides with the Wiener class V_p , and if $\phi(n) = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, then the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ coincides with the class $BV(p(n) \uparrow p)$.

Some generalizations of the notion of variation of functions has been considered by Akhobadze [2], Goginava [8, 9], and Goginava and Sahakian [13, 14].

Let $C([0, 1])$ denote the space of continuous functions with period 1.

If $f \in C([0, 1])$, then the function

$$\omega(\delta, f) = \max \{ |f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta, \ x, y \in [0, 1] \}$$

is called the modulus of continuity of f .

Given a modulus of continuity $\omega(\delta)$, by H^ω we denote the class of functions $f \in C([0, 1])$ satisfying $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$ as $\delta \rightarrow 0+$. Given an increasing function

φ defined on the set of naturals $\mathbb{N}$, such that $\varphi(1) \geq 2$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$.

Denote

$$\tau(r) = \min \{k : k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geq r\}, \quad r \geq 2.$$

Definition 1.3. We say that the sequence $\{p(n) : n \geq 1\}$ and the function φ satisfy condition (B, φ) , if there exists a constant $c > 0$ such that for every $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(\tau(k))}} \leq \frac{c}{m_n^{1/p(\tau(n))}}.$$

2. HAAR-LIKE SYSTEMS

Let $\{p_n\}$ be a sequence of prime numbers, such that $2 \leq p_n \leq N$ ($n = 1, 2, \dots$), where $N \geq 2$ is a natural number. Let $\{m_n, n \geq 0\}$ be a sequence of integers defined by

$$m_0 = 1; m_n = p_1 p_2 \dots p_n, \quad n \geq 1,$$

and let

$$Q = \left\{ \frac{l}{m_n} \right\}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n, \quad n \geq 0.$$

Then for each $t \in [0, 1] \setminus Q$ there is only one expression of the form

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k(t)}{m_k}, \quad 0 \leq j_k(t) \leq p_k - 1.$$

Each integer $m \geq 2$ can be uniquely written in the form

$$m = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s,$$

where $n = 0, 1, \dots$, $r = 0, \dots, m_n - 1$ and $s = 1, \dots, p_{n+1} - 1$.

We set $\chi_1(t) = 1$ on $[0, 1]$, and for $m \geq 2$ define

$$\chi_m(t) = \chi_{nr}^{(s)}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp\{2\pi i \frac{j_{n+1}(t)}{p_{n+1}}\} & \text{for } t \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right) \setminus Q, \\ 0 & \text{for } t \notin \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right]. \end{cases}$$

At the interior discontinuity points $t \in Q$, we define the function $\chi_m(t)$ to be the average of the limits on either side, while at the endpoints of the interval $[0, 1]$, we define $\chi_m(t)$ to be the limits from the interior.

Thus we have defined the system $\chi\{p_n\}$ of the class χ . The class χ , which is the set of all systems $\chi\{p_n\}$ with bounded sequences $\{p_n \geq 2\}$, was introduced by Vilenkin [23] in 1947. If $p_n = 2$, $n = 1, 2, \dots$, then we have the classical Haar system, introduced by Haar [17] in 1909.

Let $L([0, 1])$ be the class of all measurable 1-periodic functions defined on $[0, 1]$ with the following norm

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx < \infty.$$

Denote by $a_m(f)$ the Fourier coefficients of a function $f \in L([0, 1])$ with respect to Haar-like system $\{\chi_m(t)\}$:

$$a_m(f) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_m(t)} dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

The problem of estimation of Fourier-Haar coefficients and absolute convergence of series of Fourier-Haar coefficients has been studied in a number of papers. We mention, for instance, the papers by Ul'ianov [22], Golubov [15], Chanturia [5], Goginava [10], Gát and Toledo [6], Aplakov [4].

The absolute convergence of series of Fourier-Haar-like coefficients has been studied by Golubov and Rubinshtein [16], where, in particular, the following theorems were proved.

Theorem GR1 ([16]). *Let $\chi\{p_n\} \in \chi$. The following assertions hold.*

- 1) *If $f \in V_p$ for $1 \leq p < \infty$ and $\beta > \frac{2p}{2+p}$, then*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f)|^\beta < \infty.$$

- 2) *For any $1 \leq p < \infty$ there exists a function $f_0 \in V_p$ (moreover $f_0 \in \text{Lip}(1/p)$), for which*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f_0)|^\beta = \infty$$

when $\beta = \frac{2p}{2+p}$.

Theorem GR2 ([16]). *Let $\chi\{p_n\} \in \chi$. The following assertions hold.*

- 1) *If $f \in V_p$ for $1 \leq p < \infty$ and $\alpha < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, then*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\alpha |a_m(f)| < \infty.$$

- 2) *For any $1 \leq p < \infty$ there exists a function $f_0 \in V_p$ (moreover $f_0 \in \text{Lip}(1/p)$), for which*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\alpha |a_m(f_0)| = \infty$$

when $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.

In this paper we study absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class of functions of generalized bounded variation. Specifically, we study convergence of the series

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f)|^{\beta}$$

for functions f from the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$, for various values of the parameters α and β .

3. THE MAIN RESULTS

The main results of this paper are the following theorems.

Theorem 3.1. *The following assertions hold.*

- a) Let $f \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \phi\right)$ for some $\beta \in (2/3, 2)$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2 + 1/p(\tau(m_n))) - 1}} < \infty.$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

- b) Let the sequence $\{p(n) : n \geq 1\}$ and the function ϕ be such that the condition (B, ϕ) is satisfied, and let for some $\beta \in (2/3, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2 + 1/p(\tau(m_n))) - 1}} = \infty.$$

Then there exists a function $f_0 \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \phi\right)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Theorem 3.2. *The following assertions hold.*

- a) Let $f \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \phi\right)$ for some $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n)) - 1/2 - \alpha}} < \infty.$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)| < \infty.$$

- b) Let the sequence $\{p(n) : n \geq 1\}$ and the function φ be such that the condition (B, φ) is satisfied, and let for some $\alpha \in (-1/2, 1/2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} = \infty.$$

Then there exists a function $f_0 \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \phi\right)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)| = \infty.$$

Combining Theorems 3.1 and 3.2 we obtain the following result.

Theorem 3.3. *The following assertions hold.*

- a) Let $f \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \phi\right)$ for some $\beta > 0$ with $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha$, and let

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/p(\tau(m_n))+1/2)-1-\alpha}} < \infty.$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

- b) Let the sequence $\{p(n) : n \geq 1\}$ and the function φ be such that the condition (B, φ) is satisfied, and let for some $\beta > 0$ with $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/p(\tau(m_n))+1/2)-1-\alpha}} = \infty.$$

Then there exists a function $f_0 \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \phi\right)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

4. AUXILIARY RESULTS

To prove the theorems stated in Section 3, we need the following lemmas.

Lemma 4.1 ([3, 11]). *The embedding $H^{\omega} \subset BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ holds if and only if*

$$\omega(t) = O\left(t^{1/p(\tau(1/t))}\right) \quad \text{as } t \rightarrow 0+.$$

Lemma 4.2 ([16]). *Let $c_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ and let f_0 be a function defined by*

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k e^{2\pi i m_k x},$$

then $\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)| \geq c_0 m_n^{1/2} c_n$, where c_0 is any positive constant.

Lemma 4.3. Let $p(n) \uparrow p$ with $p \in (1, \infty)$ and let the sequence $\{p(n) : n \geq 1\}$ and the function ϕ satisfy condition (B, ϕ) . If

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}}.$$

then $f_0 \in BV(p(n) \uparrow p, \phi)$.

Proof. For every $0 < \delta < 1$, there exists a natural n such that

$$\frac{1}{m_{n+1}} \leq \delta < \frac{1}{m_n}.$$

Let $x, y \in [0, 1]$ be such that $|x - y| < \delta < 1$. Then we can write

$$\begin{aligned} |f_0(x) - f_0(y)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (|\cos(2\pi m_k x) - \cos(2\pi m_k y)| + \\ &\quad + |\sin(2\pi m_k x) - \sin(2\pi m_k y)|) m_k^{-1/p(\tau(m_k))} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2|\sin(m_k \pi(x - y)) \sin(m_k \pi(x + y))| + \\ &\quad + 2|\sin(m_k \pi(x - y)) \cos(m_k \pi(x + y))|) m_k^{-1/p(\tau(m_k))} \\ &\leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(m_k \pi(x - y))|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} \\ (4.1) \quad &\leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{|\sin(m_k \pi(x - y))|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} + 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} = I + II. \end{aligned}$$

We first estimate I to obtain

$$\begin{aligned} (4.2) \quad I &\leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{m_k \pi \delta}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} = 4\pi \delta \sum_{k=1}^n m_k^{1-1/p(\tau(m_k))} \\ &\leq 4\pi \delta \sum_{k=1}^n m_k^{1-1/p(\tau(m_n))} \leq c\delta m_n^{1-1/p(\tau(m_n))} \\ &\leq c\delta \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-1/p(\tau(m_n))} = c\delta^{1/p(\tau(m_n))} \leq c\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}. \end{aligned}$$

From the condition of the lemma for II we have

$$\begin{aligned} (4.3) \quad II &\leq \frac{c}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}} \\ &= \frac{c p_{n+1}^{1/p(\tau(m_n))}}{m_{n+1}^{1/p(\tau(m_n))}} \leq c\delta^{1/p(\tau(m_n))} \leq c\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}. \end{aligned}$$

Combining (4.1)-(4.3) we get

$$\omega(\delta; f_0) = O\left(\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}\right) \quad \text{as } \delta \rightarrow 0+.$$

Applying Lemma 4.1 we obtain

$$f_0 \in BV(p(n) \uparrow p; \phi),$$

and the result follows. $\square$

5. PROOFS

Proof of Theorem 3.1. In [16] it is proved that the following estimation holds

$$(5.1) \quad \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^p \leq cm_n^{1-\frac{p}{2}} (p_{n+1}-1) \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\delta_{n,r,k}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^p dt,$$

where

$$\delta_{n,r,k} = \left(\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}, \frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}} \right).$$

Then we can write

$$\begin{aligned} & \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p(\tau(m_n))} \leq cm_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1) \\ & \times \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(m_n))} dt \\ & = cm_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1) \\ & \times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int_0^{\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(m_n))} dt \\ & \leq cm_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1) \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}} \right) \\ & \times \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(m_n))} \\ & \leq c \sup_n p_n m_n^{-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} \left(V\left(f, p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \phi\right) \right)^{p(\tau(m_n))}. \end{aligned}$$

Let $\beta < p(\tau(m_n)) < \frac{2\beta}{2-\beta}$ and $n \geq n_0$. Then applying Hölder's inequality we get

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta &\leq \left(\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p(\tau(m_n))} \right)^{\beta/p(\tau(m_n))} (m_{n+1} - m_n)^{1 - \frac{\beta}{p(\tau(m_n))}} \\ &\leq cm_n^{-\frac{\beta}{2}} \left(V \left(f, p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \phi \right) \right)^\beta m_n^{1 - \frac{\beta}{p(\tau(m_n))}} \leq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2 + 1/p(\tau(m_n))) - 1}}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta \\ &\leq c + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2 + 1/p(\tau(m_n))) - 1}} < \infty. \end{aligned}$$

Part a) of the theorem is proved.

b) Let $p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}$ and $\beta \in (2/3, 2)$. Define

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{\frac{1}{p(\tau(m_k))}}},$$

and show that f_0 is the required function. To this end, observe first that by Lemma 4.3 we have

$$f_0 \in BV \left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \phi \right).$$

Denote by E_n' the set of integers r from $[0, m_n - 1]$ satisfying $|a_{nr}^{(s)}(f_0)| \geq \frac{c_0}{2} m_n^{-(\frac{1}{2} + 1/p(\tau(m_n)))}$, and let $E_n'' = [0, m_n - 1] \setminus E_n'$.

In [16] it is proved that

$$|a_m(f)| = |a_{nr}^{(s)}(f)| \leq c \sqrt{m_n} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt.$$

Consequently, we can write

$$\begin{aligned} \sum_{r \in E_n'} |a_{nr}^{(s)}(f_0)| &\leq cm_n^{1/2} \sum_{r \in E_n'} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \\ &\leq cm_n^{1/2} \sum_{r \in E_n'} \int_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq c m_n^{1/2} \sum_{r \in E'_n} \int_0^{\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \\
& \leq c m_n^{1/2} \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}} \right) \\
& \times \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right]} \sum_{r \in E'_n} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| \leq c m_n^{1/2} \frac{p_{n+1} - 1}{m_{n+1}} \\
& \times \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right]} \left(\sum_{r \in E'_n} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(m_n))} \right)^{1/p(\tau(m_n))} \\
& \times \left| E'_n \right|^{1-1/p(\tau(m_n))} \leq c \frac{\left| E'_n \right|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Next, from Lemma 4.2 we get

$$\begin{aligned}
c_0 \frac{m_n^{1/2}}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}} & \leq \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| a_{nr}^{(s)}(f_0) \right| \\
& \leq \sum_{r \in E'_n} \left| a_{nr}^{(s)}(f_0) \right| + \sum_{r \in E''_n} \left| a_{nr}^{(s)}(f_0) \right| \\
& \leq c \frac{\left| E'_n \right|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}} + \frac{c_0}{2} m_n^{-(1/2+1/p(\tau(m_n)))} \left| E''_n \right| \\
& \leq c \frac{\left| E'_n \right|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}} + \frac{c_0}{2} m_n^{1/2-1/p(\tau(m_n))}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$(5.2) \quad c \frac{\left| E'_n \right|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}} \geq \frac{c_0}{2} m_n^{1/2-1/p(\tau(m_n))}; \quad \left| E'_n \right| \geq c m_n.$$

In view of (5.2) we get

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| a_{nr}^{(s)}(f_0) \right|^\beta \geq \sum_{r \in E'_n} \left| a_{nr}^{(s)}(f_0) \right|^\beta \\
(5.3) \quad & \geq \left(\frac{c_0}{2} \frac{1}{m_n^{1/2+1/p(\tau(m_n))}} \right)^\beta \left| E'_n \right| \geq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}}.
\end{aligned}$$

From condition of the theorem and (5.3) we obtain

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)|^\beta \geq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} = \infty.$$

This completes the proof of part b) of the theorem. $\square$

Proof of Theorem 3.2. To prove part a) of the theorem, we apply (5.1) for $p = 1$ and use the fact $\sup_{n \in \mathbb{N}} n \leq N$, to obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha} |a_m(f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} C m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \\
&\leq c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \sum_{r=0}^{m_n-1} \int_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}+1}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \\
&= c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \\
&\quad \times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int_0^{\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}+1}} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \\
&\leq c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}} \right) \\
&\quad \times \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| \\
&\leq c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \frac{p_{n+1} - 1}{m_{n+1}} \times \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right]} \left(\sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(m_{n+1}))} \right)^{1/p(\tau(m_{n+1}))} \times m_n^{1-1/p(\tau(m_{n+1}))} \\
&\leq c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha+1/2-1+1-1/p(\tau(m_{n+1}))} V \left(f, p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \phi \right) \\
&\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} < \infty.
\end{aligned}$$

Thus, part a) of the theorem is proved.

To prove part b) of the theorem, we define

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}},$$

and apply Lemma 4.3 to conclude that $f_0 \in BV\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \phi\right)$.

Next, from condition of the theorem and Lemma 4.2 we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f_0)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha} |a_m(f_0)| \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)| \geq c_0 \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \frac{m_n^{1/2}}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}} \\ &\geq c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} = \infty, \end{aligned}$$

and the result follows. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Akhobadze, "Functions of generalized Wiener classes $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ and their Fourier coefficients", Georgian Math. J. **7**, no.3, 401–416 (2000).
- [2] T. Akhobadze, " $BA(p(n) \uparrow p, \phi)$ classes of functions of bounded variation", Bull. Georgian Acad. Sci. **164**, no. 1, 18–20 (2001).
- [3] T. Akhobadze, "Generalized $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ class of bounded variation", Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, no. 3, 426–428 (2001).
- [4] A. Aplakov, "On the absolute convergence of the series of Fourier-Haar coefficients", Bull. Georgian Acad. Sci., **164**, no. 2, 238–241 (2001).
- [5] Z. Chanturia, "On the absolute convergence of the series of Fourier-Haar coefficients", Commentationes Math. **11**, 25–35 (1979).
- [6] G. Gát, R. Toledo, "Fourier coefficients and absolute convergence on compact totally disconnected groups", Math. Pannon. **10** (2), 223–233 (1999).
- [7] U. Goginava, "On the divergence of trigonometric Fourier series of the class $H^{\infty} \cap BV(p(n) \uparrow \infty)$ ", Proc. A. Razmadze Math. Inst., **121**, 63–70 (1999).
- [8] U. Goginava, "Uniform convergence of Cesàro means of negative order of double Walsh-Fourier series", J. Approx. Theory, **124**, no. 1, 96–108 (2003).
- [9] U. Goginava, "On the uniform convergence Walsh-Fourier series", Acta Math. Hung. **93**, no. 1-2, 59–70 (2001).
- [10] U. Goginava, "On the absolute convergence of the series of Fourier-Haar coefficients", Bull. Georgian Acad. Sci., **164**, no. 1, 21–23 (2001).
- [11] U. Goginava, "Relations between some classes of functions", Sci. Math. Jpn. **53**, no. 2, 223–232 (2001).
- [12] U. Goginava, K. Nagy, "On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejér means", Czechoslovak Math. J. **61** (136), no. 3, 673–686 (2011).
- [13] U. Goginava, A. A. Sahakian, "Convergence of double Fourier series and generalized A -variation", Georgian Math. J. **19**, no. 3, 497–509 (2012).
- [14] U. Goginava, A. A. Sahakian, "On the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation", Journal of Contemporary Mathematical Analysis **5**, 47, 221–233 (2012).
- [15] B. Golubov, "On the Fourier series of continuous functions with respect to Haar system", Izv. AN SSSR, seria matem. **6**, no. 28, 1271–1296 (1964).

- [16] B. Golubov, A. Rubinshtein, "About one class of systems of convergence", *Matem. sb.* **71** (113), 96 – 115 (1966).
- [17] Haar A. Zur theorie der ortogonalen Funktionensysteme. Inaugural dissertation. Gottingen (1909).
- [18] G. Jordan, *C.R. Acad. Sci. Paris.* **92**, 228 – 230 (1881).
- [19] T. Karchava, "On the converges of Fourier series", *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua institute of Applied Mathematics*, **3**, no. 2, 93 – 95 (1988).
- [20] H. Kita, K. Yoneda, "A generalization of bounded variation", *Acta Math. Hung.* **56**, 229 – 238 (1990).
- [21] H. Kita, "Convergence of Fourier series of functions on generalized Wiener's class $BV(p(n) \uparrow \infty)$ ", *Acta Math. Hung.* **57**, 233 – 243 (1991).
- [22] P. L. Ulianov, "On the Haar series", *Matem. sb.* **63**, no. 3, 356 – 391 (1964).
- [23] N. Vilenkin, "About one class complete ortogonal system", *Izv. AN SSSR, seria matem.* **11**, 363 – 400 (1947).
- [24] D. Waterman, "On A-bounded variation", *Studia Math.* **57**, 33 – 45 (1976).
- [25] N. Wiener, "The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients", *Massachusetts J. Math.* **3**, 72 – 92 (1924).
- [26] L. Young, "Sur un generalization de la notion de variation de Poissance p -ieme bornee au souce de Wiener et sur la convergence de series de Fourier", *C.R. Acad. Sci. Paris.* **204**, 470 – 472 (1937).

Поступила 10 августа 2014

ЗАМЕЧАНИЯ О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Б. В. ВИННИЦКИЙ, Р. В. ХАЦЬ

Дрогобычский государственный педагогический университет им. Ивана Франко

E-mails: *vynnytskyi@ukr.net*; *khats@ukr.net*

Аннотация. Найдены достаточные условия базисности системы $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ в пространстве $L^2(0; 1)$ и установлена взаимосвязь между аппроксимационными свойствами этой системы и свойствами системы $(\tau^{\nu+1/2}E_{1/2}(-\tau^2\rho_k^2; \mu) : k \in \mathbb{N})$, где J_ν – функция Бесселя первого рода с индексом ν и $E_\mu(z; \mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

MSC2010 numbers: 33C10, 33E12, 30B60, 41A30, 30D15.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа; функция Бесселя; функция типа Миттаг-Леффлера; базис; полная система; минимальная система; биортогональная система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

– функция Бесселя первого рода с индексом ν . Функция J_ν при $\nu > -1$ имеет бесконечное множество $\{\rho_k : k \in \mathbb{Z}\}$ вещественных корней, среди которых положительные корни ρ_k , $k \in \mathbb{N}$, и отрицательные корни $\rho_{-k} = -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [1, 2]). Хорошо известно следующее утверждение (см. [1]–[3]).

Теорема А. Пусть $\nu > -1$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ – последовательность положительных корней функции J_ν . Тогда система $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ образует базис пространства $L^2(0; 1)$.

Пусть $\chi \in \mathbb{R}$ и S_χ – класс целых функций G экспоненциального типа $\sigma \leq 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $c_1(1+|z|)^\chi e^{|\operatorname{Im} z|} \leq |G(z)| \leq c_2(1+|z|)^\chi e^{|\operatorname{Im} z|}$, если $|\operatorname{Im} z| \geq s_0$ для некоторого $s_0 > 0$;

б) G имеет бесконечное множество корней $\{\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, все корни простые и отличны от нуля;

в) $\inf\{|\rho_k - \rho_n| : k \neq n\} > 0$.

Класс S_χ изучался в [4]–[7]. Если $G \in S_\chi$, то имеем ([4]–[7]):

г) $c_3(1 + |z|)^\chi e^{|\operatorname{Im} z|} \leq |G(z)| \leq c_4(1 + |z|)^\chi e^{|\operatorname{Im} z|}$, если $z \notin \cup\{z : |z - \rho_k| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$;

д) $|G'(\rho_k)| \geq c_5(1 + |\rho_k|)^\chi$;

е) $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |\rho_k|)^{-\alpha} < +\infty$ при любом $\alpha > 1$.

Здесь и далее c_j суть положительные константы. Целью статьи является доказательство следующих утверждений.

Теорема 1.1. Пусть $\nu \geq -1/2$, $\chi = -\nu - 1/2$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ – последовательность комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Если последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, где $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, является последовательностью нулей некоторой четной функции $G \in S_\chi$, то система $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ образует базис в пространстве $L^2(0; 1)$.

Отметим, что функция $G(z) = z^{-\nu} J_\nu(z)$ является четной и принадлежит классу S_χ , если $\chi = -\nu - 1/2$ (см. [1]–[3]). Поэтому теорема 1.1 является обобщением теоремы А. Пусть $E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}$ – целая функция типа Миттаг-Леффлера.

Теорема 1.2. Пусть $\nu \in [-1/2; 1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ – последовательность комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Система $(\sqrt{t\rho_k} J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ образует базис в пространстве $L^2(0; 1)$ тогда и только тогда, когда базисом этого пространства является система $(t^{\nu+1/2} E_{1/2}(-t^2 z_k; \mu) : k \in \mathbb{N})$, где $z_k = \rho_k^2$.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 базируются на ряде результатов М. М. Джрбабяна и С. Г. Рафаеляна с работ [4]–[10], в которых исследовались и базисы из систем функций типа Миттаг-Леффлера. Базисы $(\tau^{\nu+1/2} E_{1/2}(-\tau^2 z_k; \mu) : k \in \mathbb{N})$ изучались также в работах Г. М. Губреева [11]–[13]. С его результатов и теоремы 1.2 можно получить некоторые дополнения к теореме 1.1, но это не является целью данной заметки. Вероятно, что теорема 1.2 справедлива и для некоторых $\nu \notin [-1/2; 1)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\omega \in (-\infty; +\infty)$, $\gamma \in (-\infty; +\infty)$, $\beta \in (-\infty; +\infty)$, $W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ — пространство целых функций f экспоненциального типа $\sigma \leq 1$, для которых

$$\|f\|_{W^{2,\omega}[\gamma; \beta]} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x + i\gamma|^\omega |f(x + i\beta)|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

и $W^{2,\omega} = W^{2,\omega}[0; 0]$. Мы используем, в частности, следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $\omega > -1$, $2\chi + \omega = 0$ и последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ является последовательностью нулей некоторой функции $G \in S_\chi$. Тогда каждая функция $f \in W^{2,\omega}$ представляется в виде

$$(2.1) \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{f(\rho_k)G(z)}{(z - \rho_k)G'(\rho_k)},$$

и последний ряд безусловно сходится в $W^{2,\omega}$.

Теорема 2.1 содержится, фактически, в работе С. Г. Рафаеляна [5]. Но в [5] имеется условие $\omega < 1$. Поэтому мы приводим некоторые указания по доказательству теоремы 2.1.

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $D_{a,b} = \{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ и $H^2(D_{a,b})$ — пространство функций, голоморфных в полосе $D_{a,b}$, для которых

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dx : a < y < b \right\} < +\infty.$$

Если по крайней мере одно из чисел a или b является конечным, то всякая функция $f \in H^2(D_{a,b})$ имеет почти всюду на $\partial D_{a,b}$ угловые предельные значения (см. [10]), $f \in L^2(\partial D_{a,b})$ и равенство $\|f\| = \left(\int_{\partial D_{a,b}} |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2}$ задает норму на $H^2(D_{a,b})$. Если $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$, то $H^2(D_{a,b})$ — пространство Харди $H^2(\mathbb{C}^{+,a})$ в полуплоскости $\mathbb{C}^{+,a} = \{z : \operatorname{Im} z > a\}$. Если $b \in \mathbb{R}$ и $a = -\infty$, то $H^2(D_{a,b})$ — пространство Харди $H^2(\mathbb{C}^{-,b})$ в полуплоскости $\mathbb{C}^{-,b} = \{z : \operatorname{Im} z < b\}$.

Лемма 2.1. ([5, 8, 9]) Пусть $\omega > -1$. Если $f \in W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ для некоторых $\gamma = \bar{\gamma} \in (-\infty; +\infty)$ и $\beta = \bar{\beta} \in (-\infty; +\infty)$, то $f \in W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ для любых $\gamma \in (-\infty; +\infty)$ и $\beta \in (-\infty; +\infty)$, причем нормы

$$\|f\|_{W^{2,\omega}[0;\beta]}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\omega |f(x + i\beta)|^2 dx, \quad \|f\|_{W^{2,\omega}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\omega |f(x)|^2 dx.$$

$$\|f\|_{W^{2,\omega}[\gamma,0]}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x + i\gamma|^\omega |f(x)|^2 dx, \quad \|f\|_{W^{2,\omega}[\gamma,\beta]}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x + i\gamma|^\omega |f(x + i\beta)|^2 dx,$$

эквивалентны на $W^{2,\omega}$.

Лемма 2.2. ([5]) Пусть $\omega > -1$ и $f \in W^{2,\omega}$. Тогда для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$|f(z)| \leq c_6 \|f\|_{W^{2,\omega}} e^{|y|} (1 + |z|)^{-\omega/2} (1 + |y|)^{-1/2}.$$

Лемма 2.3. ([5, 8, 9]) Пусть $\omega > -1$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Если последовательность $(f_k : k \in \mathbb{N})$ функций $f_k \in W^{2,\omega}$ является фундаментальной в $W^{2,\omega}$, то она сходится по норме и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$ к некоторой функции $f \in W^{2,\omega}$.

Лемма 2.4. ([5]) Пусть $\omega > -1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность различных комплексных чисел таких, что $a < a_1 \leq \operatorname{Im} \rho_k \leq b_1 < b$ и $\inf\{|\rho_k - \rho_n| : k \neq n\} > 0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |f(\rho_k)|^2 (1 + |\rho_k|)^\omega \leq c_7 \|f\|_{W^{2,\omega}}^2$ для любой функции $f \in W^{2,\omega}$.

Лемма 2.5. ([5]) Пусть $\omega > -1$, $\omega + 2\chi \geq 0$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ — последовательность нулей некоторой функции $G \in S_\chi$. Тогда если $f \in W^{2,\omega}$ и $f(\rho_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то $f \equiv 0$.

Теперь мы в состоянии очертить доказательство теоремы 2.1.

Пусть $\gamma = s_0 + 1$. Для получения утверждения теоремы 2.1 достаточно убедиться, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\| \frac{f(\rho_k) G(z)}{(z - \rho_k) G'(\rho_k)} \right\|_{W^{2,\omega}[\gamma,\gamma]} < +\infty.$$

Сначала заметим, что $|z|^{\omega/2} G(z) \leq c_8$, если $z \in \partial \mathbb{C}^{+, \gamma}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G(z)}{z - \rho_k} \right\|_{W^{2,\omega}[\gamma,\gamma]}^2 &= \left(\int_{\partial \mathbb{C}^{+, \gamma}} |z|^\omega \left| \frac{G(z)}{z - \rho_k} \right|^2 |dz| \right)^{1/2} \\ &\leq c_8 \left(\int_{\partial \mathbb{C}^{+, \gamma}} \left| \frac{1}{z - \rho_k} \right|^2 |dz| \right)^{1/2} = c_8 \left\| \frac{1}{z - \rho_k} \right\|_{H^2(\mathbb{C}^{+, \gamma})}. \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma - \operatorname{Im} \rho_k \geq 1$, то функция $(z - \rho_k)^{-1}$ принадлежит пространству Харди $H^2(\mathbb{C}^{+, \gamma})$, причем

$$\left\| \frac{1}{z - \rho_k} \right\|^2 = \sup \left\{ \left\| \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \frac{\psi(z)}{z - \rho_k} dz \right\|^2 : \|\psi\| \leq 1 \right\},$$

где верхняя грань берется по функциям $\psi \in H^2(\mathbb{C}^{-\gamma})$. Но с другой стороны, имеем (см. [10]):

$$\int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{\psi(z)}{z-\rho_k} dz = -2\pi i \psi(\rho_k) \quad \text{и} \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\psi(\rho_k)|^2 \right)^{1/2} \leq c_9 \|\psi\|.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\| \frac{f(\rho_k)G(z)}{(z-\rho_k)G'(\rho_k)} \right\|_{W^{2,\omega}} &\leq c_{10} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |f(\rho_k)| (1+|\rho_k|)^{-\omega} \left\| \frac{1}{z-\rho_k} \right\|_{H^2(\mathbb{C}^{-\gamma})} \\ &\leq c_{10} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |f(\rho_k)|^2 (1+|\rho_k|)^\omega \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\| \frac{1}{z-\rho_k} \right\|_{H^2(\mathbb{C}^{-\gamma})}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_{11} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |f(\rho_k)|^2 (1+|\rho_k|)^\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому по лемме 2.4 ряд (2.1) безусловно сходится в $W^{2,\omega}$, а по лемме 2.5 сумма этого ряда равна $f(z)$. Таким образом, теорема 2.1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Мы воспользуемся следующими известными утверждениями.

Лемма 3.1. ([14, 15]) Пусть $\nu \geq -1/2$. Функция Q представляется в виде

$$Q(z) = \int_0^1 \sqrt{zt} J_\nu(zt) q(t) dt$$

с некоторой функцией $q \in L^2(0; 1)$ тогда и только тогда, когда $Q \in L^2(0; +\infty)$ и $Q(z) = z^{\nu+1/2} P(z)$, где P — четная целая функция экспоненциального типа $\sigma \leq 1$.

Лемма 3.2. ([10, с. 67]) Пусть $\nu > -1$. Тогда любая функция $Q \in L^2(0; +\infty)$ представляется в виде

$$Q(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) q(t) dt$$

с некоторой функцией $q \in L^2(0; +\infty)$. При этом, $\|Q\| = \|q\|$ и

$$q(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) Q(z) dz.$$

Следствие 3.1. Пусть $\nu \geq -1/2$ и $\omega = 2\nu + 1$. Класс парных целых функций $f \in W^{2,\omega}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = z^{-\nu-1/2} \int_0^1 \sqrt{zt} J_\nu(z t) q(t) dt, \quad q \in L^2(0; 1).$$

При этом, $\|f\|_{W^{2,\omega}} = 2\|q\|$ и справедлива двойственная формула

$$q(t) = \int_0^{+\infty} z^{\omega/2} \sqrt{zt} J_\nu(z t) f(z) dz.$$

Из следствия 3.1 непосредственно вытекают следующие предложения.

Предложение 3.1. ([16]) Пусть $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Для того, чтобы система $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ была полной в $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ не была подпоследовательностью нулей ни одной ненулевой четной функции $G \in W^{2,\omega}$.

Предложение 3.2. ([16]) Пусть $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Для того, чтобы система $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ была полной и минимальной в $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, где $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, была последовательностью нулей некоторой четной целой функции $G \notin W^{2,\omega}$ такой, что $(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z) \in W^{2,\omega}$. При этом,

$$(3.1) \quad \int_0^1 \sqrt{t\rho_n} J_\nu(t\rho_n) \overline{\gamma_k(t)} dt = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

где

$$(3.2) \quad \overline{\gamma_k(t)} = \frac{2}{\rho_k^{\nu-1/2} G'(\rho_k)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt} J_\nu(z t) z^{\nu+1/2} G(z)}{z^2 - \rho_k^2} dz.$$

Предложение 3.3. Пусть $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$, и последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, где $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, является последовательностью нулей некоторой четной целой функции G такой, что $(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z) \in W^{2,\omega}$. Для того, чтобы система $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$

была базисом пространства $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая четная целая функция $P \in W^{2, \omega}$ разлагалась в ряд

$$P(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k) G'(z)}{(z^2 - \rho_k^2) G'(\rho_k)},$$

сходящийся в $W^{2, \omega}$.

Доказательство предложения 3.3 проводится стандартными методами (см. [4]–[8], [11]–[13]) и частично содержится ниже. Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1.1. Пусть $\omega = 2\nu + 1$. Тогда $\omega \geq 0$. Функция $(z^2 - \rho_k^2)^{-1} G(z)$ является четной целой функцией экспоненциального типа $\sigma \leq 1$ и функция $z^{\nu+1/2} (z^2 - \rho_k^2)^{-1} G(z)$ принадлежит $L^2(0; +\infty)$. Согласно леммам 3.1 и 3.2, функции $\gamma_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, определенные равенством (3.2), принадлежат $L^2(0; 1)$. Пусть $q \in L^2(0; 1)$ и $Q(z) = \int_0^1 \sqrt{zt} J_\nu(zt) q(t) dt$. Согласно лемме 3.1 $Q(z) = z^{\nu+1/2} P(z)$, где P – четная целая функция экспоненциального типа $\sigma \leq 1$. Кроме того, $\frac{P(\rho_{-k})}{G'(\rho_{-k})} = -\frac{P(\rho_k)}{G'(\rho_k)}$ для $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу теоремы 2.1, имеем

$$P(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{P(\rho_k) G(z)}{(z - \rho_k) G'(\rho_k)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k) G(z)}{(z^2 - \rho_k^2) G'(\rho_k)},$$

где последний ряд сходится в $W^{2, \omega}$. Таким образом,

$$Q(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k) z^{\nu+1/2} G(z)}{(z^2 - \rho_k^2) G'(\rho_k)},$$

и последний ряд сходится в $L^2(0; +\infty)$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) Q(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k)}{G'(\rho_k)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt} J_\nu(zt) z^{\nu+1/2} G(z)}{z^2 - \rho_k^2} dz \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho_k^{\nu+1/2} P(\rho_k) \overline{\gamma_k(t)}. \end{aligned}$$

Поэтому любая функция $q \in L^2(0; 1)$ разлагается в ряд по системе $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$. Кроме того, выполняется (3.1). Следовательно система $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ имеет биортогональную систему. Поэтому $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ – базис пространства $L^2(0; 1)$. Значит базисом является и биортогональная система. Поэтому $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ – базис. Таким образом, теорема 1.1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$ и $A_\sigma^p(\nu)$ — класс целых функций f порядка $\leq \rho$ и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\|f\|^2 := \int_0^{+\infty} |f(r)|^2 r^\nu dr < +\infty.$$

Лемма 4.1. ([10, с. 351]) Пусть $\nu \in (-1; 1)$ и $\mu = \nu + 3/2$. Класс $A_1^{1/2}(\nu)$ совпадает с множеством целых функций f , допускающих представление вида

$$f(z) = \int_0^1 E_{1/2}(-\tau^2 z; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi \in L^2(0; 1).$$

При этом, нормы $\|f\|_{A_1^{1/2}(\nu)}$ и $\|\varphi\|$ являются эквивалентными и справедлива двойственная формула

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\eta\tau - \frac{\pi}{2}\mu) - \cos(\frac{\pi}{2}\mu)}{\eta} f(\eta^2) \eta^{\mu-1} d\eta = \varphi_0(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in (0; 1), \\ 0, & \tau \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Из леммы 4.1 непосредственно вытекают следующие предложения, которые являются аналогами соответствующих результатов из [4], [8], [11], [12], [17].

Предложение 4.1. Пусть $\nu \in (-1; 1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(z_k : k \in \mathbb{N})$ — произвольная последовательность различных комплексных чисел. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1} E_{1/2}(-\tau^2 z_k; \mu) : k \in \mathbb{N})$ была полной в $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ не была подпоследовательностью нулей ни одной ненулевой функции $\Xi \in A_1^{1/2}(\nu)$.

Предложение 4.2. Пусть $\nu \in (-1; 1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(z_k : k \in \mathbb{N})$ — произвольная последовательность различных комплексных чисел. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1} E_{1/2}^*(-\tau^2 z_k; \mu) : k \in \mathbb{N})$ была полной и минимальной в $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ была последовательностью нулей некоторой целой функции $\Xi \notin A_1^{1/2}(\nu)$ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1} \Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$.

Предложение 4.3. Пусть $\nu \in (-1; 1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ различных комплексных чисел является последовательностью нулей некоторой целой функции Ξ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1} \Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1} E_{1/2}(-\tau^2 z_k; \mu) : k \in \mathbb{N})$ была базисом пространства

$L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая функция $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$ разлагалась в ряд

$$(4.1) \quad \Omega(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\Omega(z_k) \Xi(\zeta)}{(\zeta - z_k) \Xi'(z_k)},$$

сходящийся в $A_1^{1/2}(\nu)$.

Замечание 4.1. Пусть $\nu > -1$, $\omega = 2\nu + 1$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Тогда последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, где $\rho_{-k} = -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, является последовательностью нулей некоторой четной функции G такой, что $(z^2 - \rho_1^2)^{-1} G(z) \in W^{2, \omega}$ если и только если, последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$, $z_k = \rho_k^2$, является последовательностью нулей некоторой функции Ξ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1} \Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. Кроме того, функция $P(z) = \Omega(z^2)$ принадлежит $W^{2, \omega}$ тогда и только тогда, когда $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$. Поэтому предложение 3.3 эквивалентно следующему.

Предложение 4.4. Пусть $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$, и последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$, где $z_k := \rho_k^2$, является последовательностью нулей некоторой функции Ξ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1} \Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. Для того чтобы система $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ была базисом пространства $L^2(0; 1)$, необходимо и достаточно, чтобы любая функция $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$ разлагалась в ряд (4.1), сходящийся в $A_1^{1/2}(\nu)$.

Теорема 1.2 является непосредственным следствием предложений 4.3 и 4.4.

Abstract. We find sufficient conditions for the basisness of the system $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2(0; 1)$ and established the relationship between an approximation properties of this system and the properties of the system $(\tau^{\nu+1/2} E_{1/2}(-\tau^2 \rho_k^2; \mu) : k \in \mathbb{N})$, where J_ν is the Bessel function of the first kind of index ν and $E_\rho(z; \mu)$ is the Mittag-Leffler-type function.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых Функций, ИЛ, Москва (1949).
- [2] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, Наука, Москва (1971).
- [3] H. Hochstadt, "The mean convergence of Fourier-Bessel series", SIAM Rev., 9, 211 – 218 (1967).
- [4] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L^2 ", ДАН Арм. ССР., 73 (1), 29 – 36 (1981).

- [5] С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **18** (3), 167 – 186 (1983).
- [6] С. Г. Рафаелян, "Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma; \sigma)$ с весом", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **19** (3), 207 – 218 (1984).
- [7] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **22** (1), 23 – 63 (1987).
- [8] M. M. Djrbashian, S. G. Raphaelian, "Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems", J. Approx. Theory, **50** (4), 297 – 325 (1987).
- [9] М. М. Джрбашян, "Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **19** (2), 81 – 181 (1984).
- [10] М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва (1966).
- [11] Г. М. Губрцев, "Базисность семейств функции типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **23** (3), 237 – 269 (1988).
- [12] Г. М. Губрцев, "Интегральное преобразование типа Джрбашяна и интерполяция целыми функциями конечного порядка", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **25** (1), 83 – 90 (1990).
- [13] Г. М. Губрцев, "Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаугта", Зап. научн. сем. ЛОМИ, **190**, 34 – 80 (1991).
- [14] J. L. Griffith, "Hankel transforms of functions zero outside a finite interval", J. Proc. Roy. Soc. New South Wales, **89**, 109 – 115 (1955).
- [15] Н. И. Ахизер, "К теории спаренных интегральных уравнений", Ученые записки Харьковского государственного университета, **25**, 5 – 31 (1957).
- [16] В. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', "Completeness and minimality of systems of Bessel functions", Уфимский матем. журн., **5** (2), 132 – 141 (2013).
- [17] А. Е. Аветисян, "О полноте и минимальности системы функций $\{E_\rho(\lambda_k z; \mu)\}_1^\infty$ ", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **23** (1), 81 – 86 (1988).

Поступила 2 июля 2014

ДЕМОКРАТИЧЕСКИЕ ПОДСИСТЕМЫ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ХААРА

С. Л. ГОГЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: gogyan@instmath.sci.am

Аннотация. В настоящей работе описываются все подсистемы многомерной системы Хаара, которые являются демократическими системами в $L_1(0, 1)^d$.

MSC2010 numbers: 41A65, 46B20.

Ключевые слова: гриди алгоритм; многомерная система Хаара в L^1 ; подсистема системы Хаара.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}$ – нормированный базис в Банаховом пространстве X . Тогда, для любого элемента $x \in X$ будем иметь разложение

$$(1.1) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \psi_n$$

с $\lim c_n(x) = 0$. Положим $\Phi_0 = \emptyset$ и индукцией по m построим последовательность множеств натуральных чисел $\{\Phi_m\}$ удовлетворяющих условию:

$$\Phi_{m-1} \subset \Phi_m, \quad \#\Phi_m = m \quad \text{и} \quad \min_{i \in \Phi_m} |c_i(x)| \geq \max_{i \notin \Phi_m} |c_i(x)|.$$

Множества Φ_m могут определяться неоднозначно, но в рамках наших рассуждений это не имеет значения. Положим

$$(1.2) \quad G_m(x) = G_m(x, \{\Phi_m\}) = \sum_{i \in \Phi_m} c_i(x) \psi_i.$$

Фактически, для получения $G_m(x)$ нужно из разложения (1.1) взять m слагаемых с максимальными значениями $|c_i(x)|$. Элемент $G_m(x)$ называется гриди аппроксимантом x по системе Ψ , а этот метод приближения элемента x с помощью нелинейных операторов G_m – гриди алгоритмом. Подробнее о гриди алгоритмах в Банаховом пространстве можно почитать в книге [1]. Лучшее, что

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-1A313.

можно ожидать от гриди алгоритма, это равенство

$$\|x - G_m(x)\| = \sigma_m(f) := \inf_{k_1, \dots, k_m \in N} \inf_{a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{i=1}^m a_i \psi_{k_i}\|.$$

Определение 1.1. (см. [2]) Базис Ψ называется гриди базисом в X если существует число $C \geq 1$ такое, что для любого $x \in X$, $m \in N$ и для некоторой последовательности $\{G_m\}$, определенной согласно (1.2), будут выполняться следующие соотношения

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \cdot \sigma_m(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

В той же самой работе авторы описали гриди базисы, используя понятие демократической системы.

Определение 1.2. Множество элементов Ψ (не обязательно базис) называется демократической системой в X , если существует число $C \geq 1$ такое, что имеет место соотношение

$$(1.3) \quad \left\| \sum_{i \in A} \psi_i \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i \in B} \psi_i \right\|$$

для любых конечных множеств натуральных чисел A и B с $\#A = \#B$.

Теорема 1.1. (см. [2]) Базис Ψ является гриди базисом в X тогда и только тогда, когда он является безусловным и демократическим в X .

Далее, некоторые свойства демократических базисов были изучены в [3] и [4]. В работе [5] были описаны все демократические подсистемы системы Хаара в $L^1(0, 1)$. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на многомерную систему Хаара.

Напомним ее определение. Пусть $\mathcal{D}_n$ множество всех двоичных интервалов длины 2^{-n} , а $\mathcal{D}_n^d = \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n \times \dots \times \mathcal{D}_n$ множество всех d -мерных двоичных кубов с ребром длины 2^{-n} . Также положим $\mathcal{D}^d = \bigcup_n \mathcal{D}_n^d$. Для двоичного интервала $\delta = [a, b) \in \mathcal{D}_n$ обозначим

$$(1.4) \quad r_\delta^{(0)}(t) = \begin{cases} 2^n : & t \in [a, b) \\ 0 : & t \notin [a, b) \end{cases}$$

и

$$(1.5) \quad r_\delta^{(1)}(t) = \begin{cases} 2^n : & t \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ -2^n : & t \in [\frac{a+b}{2}, b) \\ 0 : & t \notin [a, b). \end{cases}$$

Также положим $\mathcal{J} = \{(\mathcal{J}, j) : \mathcal{J} \in \mathcal{D}^d, 1 \leq j \leq 2^d - 1\} \cup ([0, 1)^d, 0)$. Каждому элементу из $\mathcal{H}$ соответствует одна функция из многомерной системы Хаара. Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 \times \dots \times \mathcal{J}_d \in \mathcal{D}^d$ и $1 \leq j \leq 2^d - 1$. Положим

$$h_{(\mathcal{J}, j)}(t) = h_{(\mathcal{J}, j)}(t_1, \dots, t_d) = \prod_{i=1}^d r_{j_i}^{(\epsilon_i)}(t_i),$$

где числа $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ являются цифрами двоичного разложения $j = \sum_{i=1}^d \epsilon_i 2^{d-i}$.

Многомерной системой Хаара называется множество $\{h_{(\mathcal{J}, j)} : (\mathcal{J}, j) \in \mathcal{H}\}$ совместно с функцией $h_{([0, 1)^d, 0)} \equiv 1$. Так как конечное количество элементов не может повлиять на свойство демократичности системы, то без ограничения общности мы не будем рассматривать функцию $h_{([0, 1)^d, 0)}$ как элемент многомерной системы Хаара.

Коэффициенты разложения $c_{(\mathcal{J}, j)}$ определяются согласно формулам

$$(1.6) \quad c_{(\mathcal{J}, j)}(f) = \mu(\mathcal{J}) \int_{\mathcal{J}} h_{(\mathcal{J}, j)} f d\mu,$$

где μ — мера Лебега в R^d .

Для двух двоичных кубов $\mathcal{J}, \mathcal{J} \in \mathcal{D}^d$ с $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$ обозначим

$$(1.7) \quad \mathbb{C}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = \{\Delta \in \mathcal{D}^d : \mathcal{J} \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{J}\}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Множество функций $\{h_{(\mathcal{J}_n, j_n)}\}$ является демократической системой в $L_1(0, 1)^d$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число $M \geq 1$ такое, что для любых $\mathcal{J}, \mathcal{J} \in \mathcal{D}^d$ с $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ с $\#\mathbb{C}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) \geq M$ существуют Δ с $\mathcal{J} \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{J}$ и k , с $1 \leq k \leq 2^d - 1$ такие, что $(\Delta, k) \notin \{(\mathcal{J}_n, j_n)\}$.*

2. КОЛЛЕКЦИИ ПО ДВОИЧНЫМ КУБАМ И ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ РАЗЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы докажем несколько лемм, с помощью которых доказывается основной результат.

Лемма 2.1. *Пусть имеются функция $f \in L_1(0, 1)^d$ и двоичный куб $\mathcal{J} \in \mathcal{D}^d$. Тогда для любого натурального i , $1 \leq i \leq 2^d - 1$ имеет место следующее соотношение*

$$\|f\|_{\mathcal{J}} := \int_{\mathcal{J}} |f| d\mu \geq |c_{(\mathcal{J}, i)}(f)|.$$

Доказательство. Согласно (1.6) имеем, что

$$|c_{(\mathcal{I}, i)}(f)| \leq \mu(\mathcal{I}) \int_{\mathcal{I}} |h_{(\mathcal{I}, i)} f| d\mu = \int_{\mathcal{I}} |f| d\mu = \|f\|_{\mathcal{I}}.$$

□

Для любых $f \in L_1(0, 1)^d$ и $\mathcal{I} \in \mathcal{D}^d$ обозначим

$$\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f) = f - \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}} \sum_{j=1}^{2^d-1} c_{(\mathcal{J}, j)}(f) h_{(\mathcal{J}, j)}.$$

Лемма 2.2. Пусть функция $f \in L_1(0, 1)^d$ и двоичные кубы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ таковы, что

- 1) $|c_{(\mathcal{I}, i)}(f)| \leq 1$ для любых $(\mathcal{I}, i) \in \mathcal{H}$,
- 2) $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ и $\mu(\mathcal{J}) = 2^d \mu(\mathcal{I})$,
- 3) $c_{(\mathcal{J}, i_0)}(f) = 0$ для некоторого $1 \leq i_0 \leq 2^d - 1$.

Тогда $\|\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f)\|_{\mathcal{J}} \leq 1 - 2^{-d}$.

Доказательство. Определим число k из условия $\mu(\mathcal{I}) = 2^{-kd}$. Для любого $0 \leq i < k$ существуют ровно $2^d - 1$ функций из системы Хаара, которые имеют меру 2^{-id} и которые не равняются 0 на множестве $\mathcal{I}$. Абсолютные значения этих функций на $\mathcal{I}$ равняются 2^{id} . Суммируя эти абсолютные значения и учитывая, что все коэффициенты разложения функции f по абсолютной величине не превосходят 1, получим, что на множестве $\mathcal{I}$ абсолютное значение функции $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f)$ не превосходит

$$\sum_{i=0}^{k-2} (2^d - 1) \cdot 2^{id} + (2^d - 2) \cdot 2^{(k-1)d} = 2^{kd} - 2^{(k-1)d} - 1.$$

С учетом того, что $\mu(\mathcal{J}) = 2^{-kd}$ убеждаемся в справедливости леммы. □

Так как конечное количество элементов не могут повлиять на свойство демократичности системы, то мы будем полагать, что функции $h_{([0,1)^d, 1)}, \dots, h_{([0,1)^d, 2^d-1)}$ не принадлежат множеству $\{h_{(\mathcal{I}_n, j_n)}\}$.

Для любого натурального s через Λ_s обозначим множество всех двоичных кубов Δ для которых

- 1) существует i , $1 \leq i \leq 2^d - 1$ такое, что $(\Delta, i) \notin \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$,
- 2) существует k , $1 \leq k \leq s$ такое, что $\mathcal{I}_k \subset \Delta$, $\mu(\mathcal{I}_k) = 2^{-d} \mu(\Delta)$ и $(\mathcal{I}_k, j_k) \in \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$.

Заметим, что при непустом множестве $\{h_{(j_n, j_n)}\}$ множество Λ_n тоже будет непустым. Исходя из определения, легко проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 2.3. Пусть система $\{h_{(j_n, j_n)}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2. Тогда для любого натурального s справедливо следующее соотношение

$$\#\Lambda_n \geq \frac{s}{2Md}.$$

Теперь докажем главную лемму, исходя из которой мы докажем теорему 1.2.

Лемма 2.4. Пусть система $\{h_{(j_n, j_n)}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2. Тогда

$$(2.1) \quad \|f_n\| \geq \frac{n}{2^{(M+1)d}},$$

$$\text{где } f_n = \sum_{i=1}^n h_{(j_i, j_i)}.$$

Доказательство. По индукции по $\#\Lambda_n$ докажем, что

$$(2.2) \quad \|f_n\| \geq \frac{\#\Lambda_n}{2^d},$$

откуда, с учетом леммы 2.3 получим утверждение леммы 2.4.

При $\#\Lambda_n = 1$ согласно лемме 2.1 имеем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n h_{(j_i, j_i)} \right\| \geq 1,$$

то есть условие (2.2) выполняется. Предположим, что условие (2.2) выполняется при $\#\Lambda_n = m$ и докажем для случая $\#\Lambda_n = m + 1$.

Выберем из Λ_n самый маленький по размерам куб. Обозначим его через J . Согласно определению множества Λ_n , существуют числа i и k для которых

$$1) \ c_{(\Delta, i)}(f_n) = 0, \quad 2) \ c_{(J_k, j_k)}(f_n) = 1, \quad 3) \ J_k \subset \Delta \text{ и } \mu(J_k) = 2^{-d} \mu(\Delta).$$

Учитывая лемму 2.1 имеем, что $\|f_n\|_{J_k} \geq 1$, а согласно лемме 2.2,

$$\|\mathbb{P}_{J_k}(f_n)\|_{J_k} \leq 1 - 2^{-d}.$$

С учетом этих неравенств заключаем, что

$$\|f_n\| = \|\mathbb{P}_{J_k}(f_n)\| + \|f_n\|_{J_k} - \|\mathbb{P}_{J_k}(f_n)\|_{J_k} \geq \|\mathbb{P}_{J_k}(f_n)\| + 2^{-d}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что для оценки $\|\mathbb{P}_{J_k}(f_n)\|$ можем применить предположение индукции для $\#\Lambda_n = m$. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Достаточность. Пусть условия теоремы выполняются. Заметим, что если некоторое множество $\{h_{(j_n, j_n)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы, то и любая ее подсистема также будет удовлетворять этим условиям (при том же значении M). Поэтому, нам достаточно оценить только норму функции

$$f_n = \sum_{i=1}^n h_{(j_i, j_i)}.$$

Согласно лемме 2.4, имеем, что

$$\|f_n\| \geq \frac{n}{2^{(M+1)d}},$$

а с другой стороны, с учетом неравенства треугольника имеем, что $\|f_n\| \leq n$, откуда и следует демократичность системы $\{h_{(j_n, j_n)}\}$.

Необходимость. Предположим противное. Для произвольно большого M положим $N = (2^d - 1)M$ и выберем кубы $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_M$ такие, что

- 1) $\mathcal{J}_k \subset \mathcal{J}_{k-1}$ для $2 \leq k \leq M$
- 2) $\mu(\mathcal{J}_k) = 2^{-d}\mu(\mathcal{J}_{k-1})$ для $2 \leq k \leq M$,
- 3) $(\mathcal{J}_k, i) \in \{(j_n, j_n)\}$ для всех $1 \leq k \leq M$ и $1 \leq i \leq 2^d - 1$.

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{2^d-1} h_{(\mathcal{J}_k, i)} = \begin{cases} \frac{1}{\mu(\mathcal{J}_M)} - \frac{1}{\mu(\mathcal{J}_1)} : & t \in \mathcal{J}_M \\ -\frac{1}{\mu(\mathcal{J}_1)} : & t \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_M \\ 0 : & t \notin \mathcal{J}_1 \end{cases}$$

откуда заключаем, что

$$(3.1) \quad \left\| \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{2^d-1} h_{(\mathcal{J}_k, i)} \right\| < 2.$$

С другой стороны, выбрав последовательность кубов $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$ таких, что

- 1) $(\mathcal{K}_i, 1) \in \{(j_n, j_n)\}$ для всех $1 \leq i \leq N$,
- 2) $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$ для всех $1 \leq i \neq j \leq N$,

будем иметь, что

$$\left\| \sum_{i=1}^N h_{(\mathcal{K}_i, 1)} \right\| = N = (2^d - 1)M.$$

Сравнивая с (3.1) заключаем, что система не является демократической системой в $L_1(0, 1)^d$.

Abstract. In this paper we describe all subsystems of the multiple Haar system that are democratic systems in $L_1(0, 1)^d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. N. Temlyakov, "Greedy approximation", *Acta Numerica*, **17**, 235 – 409 (2008).
- [2] S. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", *East J. Approx.*, **5**, 365 – 379 (1999).
- [3] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general biorthogonal systems", *J. Approx Theory*, **107**, 293 – 314 (2000).
- [4] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova and V. N. Temlyakov, "The thresholding greedy algorithm, greedy bases, and duality", *Constr. Approx.*, **19**, 575 – 597 (2003).
- [5] С. Л. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по регулярной системе Хаара", *Известия НАН Армении, Математика*, **46**, 3 – 16 (2011).

Поступила 7 апреля 2015

СВЕРХТОЖДЕСТВА СЛАБО ИДЕМПОТЕНТНЫХ РЕШЕТОК

Д. С. ДАВИДОВА, Ю. М. МОВСИСЯН

Европейская региональная академия, Армения
Ереванский государственный университет
E-mails: *di.davidova@yandex.ru*, *yurimovsisyan@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе характеризуются сверхтождества многообразия слабо идемпотентных решеток, которое является нильпотентным замыканием многообразия решеток. Доказывается существование конечного базиса для таких сверхтождеств.

MSC2010 numbers: 03B15, 08A05, 03C05, 03C85, 06A99.

Ключевые слова: сверхтождество; слабо идемпотентная полурешетка; слабо идемпотентная решетка; слабо идемпотентная квазирешетка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Имеются различные расширения классического понятия решетки. В работах [1], [2] вводится понятие слабо ассоциативной решетки, а в работах [3] - [5] - алгебры с системой тождеств, которые мы называем слабо идемпотентными решетками.

Определение 1.1. Алгебра с одной бинарной операцией $(L; \wedge)$ называется слабо идемпотентной полурешеткой, если она удовлетворяет следующим тождествам:

$$(1.1) \quad a \wedge b = b \wedge a, \text{ (коммутативность)}$$

$$(1.2) \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \text{ (ассоциативность)}$$

$$(1.3) \quad a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b. \text{ (слабая идемпотентность)}$$

Добавив тождество идемпотентности: $a \wedge a = a$, получим полурешетку. Множество всех идемпотентных элементов каждой слабо идемпотентной полурешетки образует полурешетку.

Определение 1.2. (см. [3] - [5]) Алгебра $(L; \wedge, \vee)$ с двумя бинарными операциями называется слабо идемпотентной решеткой, если ее редуцты $(L; \wedge)$ и

$(L; \vee)$ являются слабо идемпотентными полурешетками, а также выполняются следующие тождества:

$$(1.4) \quad a \wedge (b \vee a) = a \wedge a, a \vee (b \wedge a) = a \vee a, \text{ (слабое поглощение)}$$

$$(1.5) \quad a \wedge a = a \vee a. \text{ (уравненность)}$$

Множество всех идемпотентов слабо идемпотентной решетки будет решеткой. Существуют алгебры, являющиеся слабо идемпотентными решетками, но не являющиеся решетками.

Например, $(Z \setminus \{0\}; \wedge, \vee)$, где $x \wedge y = (|x|, |y|)$ и $x \vee y = [|x|, |y|]$, для которых $(|x|, |y|)$ и $[|x|, |y|]$ соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное элементов $|x|$ и $|y|$ является слабо идемпотентной решеткой, но не будет решеткой, поскольку для отрицательных x имеем: $x \wedge x \neq x$.

Скажем, что слабо идемпотентная решетка $(L; \wedge, \vee)$ дистрибутивна, если она удовлетворяет обоим тождествам дистрибутивности:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Каждой слабо идемпотентной решетке соответствует квазипорядок θ , который определяется следующим образом:

$$x\theta y \leftrightarrow x \wedge y = x \wedge x.$$

Заметим, что операции слабо идемпотентной решетки сохраняют ее квазипорядок.

Напомним, что сверхтождество — формула второго порядка следующего вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (w_1 = w_2),$$

где $X_1, \dots, X_m$ — функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_n$ — предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2 . Сверхтождества обычно записываются без кванторных приставок, т.е. как равенства: $w_1 = w_2$. Скажем, что в алгебре $(Q; F)$ выполняется сверхтождество $w_1 = w_2$, если данное равенство справедливо когда каждая функциональная и каждая предметная переменные заменены соответственно на произвольную операцию соответствующей ариности из F и на произвольный элемент из Q (см. [6] — [8]).

Очевидно, что слабо идемпотентная решетка $L = (L; \wedge, \vee)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней выполняется следующее сверхтождество:

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

Характеризации сверхтождеств многообразий решеток, модулярных решеток, дистрибутивных решеток, булевых, а так же деморгановых алгебр были даны в работах [7]–[12]. О базисе сверхтождеств в термальных (полиномиальных) алгебрах см. [13]–[15]. О приложении сверхтождеств в дискретной математике см. [16].

Скажем, что сверхтождество выполняется в многообразии V , если данное сверхтождество справедливо в каждой алгебре многообразия V . В таком случае данное сверхтождество будет называться сверхтождеством многообразия V .

Сверхтождество (или тождество) $w_1 = w_2$ называется однородным (или регулярным по А. И. Мальцеву), если в слова w_1 и w_2 входят одни и те же предметные переменные. Каждое сверхтождество многообразия слабо идемпотентных решеток однородно. В настоящей работе характеризуются сверхтождества многообразия слабо идемпотентных решеток.

2. НЕИДЕМПОТЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ПЛОНКА

Алгебру $\mathcal{U} = (U; \Sigma)$ назовем суммой своих попарно непересекающихся подалгебр $(U_i; \Sigma)$, где $i \in I$, если справедливы следующие условия (ср. [17]–[19]):

- i) $U_i \cap U_j = \emptyset$, для всех $i, j \in I, i \neq j$;
- ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$;
- iii) На множестве индексов I существует отношение " $\leq$ " такое, что $(I; \leq)$ – верхняя полурешетка со следующими свойствами;
- iv) если $i \leq j$, то существует гомоморфизм $\varphi_{i,j} : (U_i; \Sigma) \rightarrow (U_j; \Sigma)$, где $\varphi_{i,i}(x) = F_l(x, \dots, x)$ для любой операции $F_l \in \Sigma$, $x \in U_i$ и $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$, $i \leq j \leq k$;
- v) для всех $A \in \Sigma$ и для всех $x_1, \dots, x_n \in Q$ справедливо равенство:

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(\varphi_{i_1, i_0}(x_1), \dots, \varphi_{i_n, i_0}(x_n)),$$

где арность $|A| = n$, $x_1 \in U_{i_1}, \dots, x_n \in U_{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, $i_0 = \sup\{i_1, \dots, i_n\}$.

Заметим, что однородное тождество, справедливое во всех попарно непересекающихся подсистемах, справедливо и на их сумме, что непосредственно следует из пункта v) определения. Следовательно, каждое однородное сверхтождество,

справедливое во всех попарно непересекающихся подалгебрах, справедливо также и на их сумме.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{A} = (U; \Sigma)$ — произвольная алгебра. Бинарная функция $f : U \times U \rightarrow U$ называется *неидемпотентной функцией Плонка* для алгебры $\mathfrak{A}$, если она удовлетворяет следующим тождествам (ср. [17] — [19]):

1. $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$;
2. $f(x, x) = F_t(x, \dots, x)$, для любой операции $F_t \in \Sigma$;
3. $f(x, f(y, z)) = f(x, f(z, y))$;
4. $f(F_t(x_1, \dots, x_{n(t)}), y) = F_t(f(x_1, y), \dots, f(x_{n(t)}, y))$, для любой операции $F_t \in \Sigma$;
5. $f(y, F_t(x_1, \dots, x_{n(t)})) = f(y, F_t(f(y, x_1), \dots, f(y, x_{n(t)})))$, для любой операции $F_t \in \Sigma$;
6. $f(F_t(x_1, \dots, x_{n(t)}), x_i) = F_t(x_1, \dots, x_{n(t)})$ (для всех $1 \leq i \leq n(t)$), для любой операции $F_t \in \Sigma$;
7. $f(F_t(x_1, \dots, x_{n(t)}), F_t(x_1, \dots, x_{n(t)})) = F_t(x_1, \dots, x_{n(t)})$, для любой операции $F_t \in \Sigma$;
8. $f(x, f(x, y)) = f(x, y)$.

Теорема 2.1. Каждой неидемпотентной функции Плонка алгебры $\mathfrak{A} = (U; \Sigma)$ соответствует представление $\mathfrak{A}$ как суммы своих попарно непересекающихся подалгебр.

Доказательство. Определим на множестве U отношение $\alpha \subseteq U \times U$ следующим образом:

$$a\alpha b \leftrightarrow f(a, b) = f(a, a), \quad f(b, a) = f(b, b).$$

где f — неидемпотентная функция Плонка данной алгебры $\mathfrak{A}$. Отношение α — эквивалентность на множестве U . Обозначим соответствующие классы эквивалентности через $U_i, i \in I$. Таким образом, получаем разбиение множества U на попарно непересекающиеся подмножества $U_i \subseteq U, i \in I$. Докажем, что U_i — подалгебры. Действительно, если $a_1, \dots, a_{n(t)} \in U_i, i \in I$, тогда для любого $F_t \in \Sigma, (|F_t| = t)$ имеем:

$$\begin{aligned} f(F_t(a_1, \dots, a_{n(t)}), a_1) &\stackrel{6}{=} F_t(a_1, \dots, a_{n(t)}) \stackrel{7}{=} f(F_t(a_1, \dots, a_{n(t)}), F_t(a_1, \dots, a_{n(t)})); \\ f(a_1, F_t(a_1, \dots, a_{n(t)})) &\stackrel{5}{=} f(a_1, F_t(f(a_1, a_1), \dots, f(a_1, a_{n(t)}))) \\ &\stackrel{2}{=} f(a_1, F_t(F_t(a_1, \dots, a_1), \dots, F_t(a_1, \dots, a_1))) \stackrel{2,7}{=} f(a_1, F_t(a_1, \dots, a_1)) \\ &= F_t(a_1, \dots, a_1) \stackrel{2}{=} f(a_1, a_1), \text{ т.е. } F_t(a_1, \dots, a_{n(t)}), a_1 \in U_i. \end{aligned}$$

Теперь на множестве индексов I определим порядок " $\leq$ " следующим образом: $i_1 \leq i_2$ тогда и только тогда, когда существуют $a \in U_{i_1}$, $b \in U_{i_2}$ такие, что $f(b, a) = f(b, b)$. Данное определение превращает множество I в верхнюю полурешетку.

Определим отображение $\varphi_{i_1, i_2} : U_{i_1} \rightarrow U_{i_2}$ для $i_1 \leq i_2$ следующим образом:

$$\varphi_{i_1, i_2}(a) = f(a, b),$$

где $b \in U_{i_2}$, $a \in U_{i_1}$. □

3. О ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫХ СЛАБО ИДЕМПОТЕНТНЫХ КВАЗИРЕШЕТКАХ

Определение 3.1. Бинарная алгебра $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ называется слабо идемпотентной квазирешеткой, если она удовлетворяет следующим сверхтождествам:

$$(3.1) \quad X(x, x) = Y(x, x),$$

$$(3.2) \quad X(x, y) = X(y, x),$$

$$(3.3) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

$$(3.4) \quad X(x, X(y, y)) = X(x, y),$$

$$(3.5) \quad X(Y(X(x, y), z), Y(x, z)) = Y(X(x, y), z).$$

Заметим, что каждая слабо идемпотентная решетка и каждая слабо идемпотентная полурешетка удовлетворяет сверхтождествам (3.1) - (3.5).

Далее, докажем ряд сверхтождеств, справедливых во всех слабо идемпотентных квазирешетках. Докажем следующее сверхтождество:

$$(3.6) \quad X(x, X(Y(x, y), Y(y, z))) = X(Y(z, y), x);$$

Во-первых заметим, что следующие сверхтождества непосредственно следуют из сверхтождеств (3.5) и (3.2):

$$(3.7) \quad X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(x, X(y, x))) = Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)),$$

$$(3.8) \quad X(Y(X(x, y), x), Y(y, x)) = Y(X(x, y), x).$$

Действительно, докажем сверхтождество (3.7):

$$\begin{aligned} & X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(x, X(y, x))) \\ & \stackrel{(3.2)}{=} X(Y(X(y, x), X(x, Y(z, y))), Y(X(y, x), x)) \\ & \stackrel{(3.5)}{=} Y(X(y, x), X(x, Y(z, y))) \stackrel{(3.2)}{=} Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)). \end{aligned}$$

Справедливость сверхтождества (3.8) вытекает из сверхтождества (3.5) при $z = x$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
 Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)) &\stackrel{(3.7)}{=} X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(x, X(y, x))) \stackrel{(3.8)}{=} \\
 X(Y(X(Y(z, y), x)X(y, x)), X(Y(X(x, y), x), Y(y, x))) &\stackrel{(3.3)}{=} \\
 X(X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(X(x, y), x)), Y(y, x)) &\stackrel{(3.7)}{=} \\
 X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(y, x)).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем следующее сверхтождество:

$$(3.9) \quad Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)) = X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(y, x)).$$

Теперь докажем сверхтождество (3.6). Имеем

$$\begin{aligned}
 X(x, X(Y(x, y), Y(y, z))) &\stackrel{(3.2)}{=} \stackrel{(3.3)}{=} X(X(x, Y(y, z)), Y(x, y)) \stackrel{(3.5)}{=} \\
 X(Y(X(x, Y(y, z)), X(x, y)), Y(x, y)) &\stackrel{(3.9)}{=} \stackrel{(3.2)}{=} \\
 Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)) &\stackrel{(3.5)}{=} X(Y(z, y), x).
 \end{aligned}$$

Таким образом, сверхтождество (3.6) доказано. Заменяя в сверхтождестве (3.6) y на $Y(x, y)$, получим:

$$X(x, X(Y(x, Y(x, y)), Y(Y(x, y), z))) = X(Y(z, Y(x, y)), x).$$

Согласно сверхтождествам (3.2) - (3.4) получаем: $Y(x, Y(x, y)) = Y(Y(x, x), y) = Y(y, Y(x, x)) = Y(y, x) = Y(x, y)$. Следовательно,

$$(3.10) \quad X(x, X(Y(x, y), Y(Y(x, y), z))) = X(x, Y(z, Y(x, y)));$$

$$(3.11) \quad Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)) = X(Y(X(Y(z, y), x), X(y, x)), Y(y, x)).$$

Сверхтождество

$$(3.12) \quad X(Y(y, z), X(x, Y(x, y))) = X(Y(z, y), x)$$

является следствием сверхтождеств (3.2), (3.3) и (3.6). Действительно,

$$X(Y(y, z), X(x, Y(x, y))) \stackrel{(3.2)}{=} \stackrel{(3.3)}{=} X(X(x, Y(y, z)), Y(x, y)) \stackrel{(3.3), (3.6)}{=} X(x, Y(y, z)).$$

Подставим в (3.12) $y = z$, получим:

$$(3.13) \quad X(y, X(x, Y(x, y))) = X(y, x).$$

Докажем следующее сверхтождество:

$$(3.14) \quad Y(Y(x, X(y, Y(y, z))), z) = Y(x, Y(y, z)),$$

Для этого необходимо доказать следующие два сверхтождества:

$$(3.15) \quad X(Y(x, y), z) = X(X(Y(x, y), z), Y(Y(x, y), z)),$$

$$(3.16) \quad X(y, Y(y, z)) = Y(y, X(y, z)).$$

Сначала докажем сверхтождество (3.15):

$$X(Y(x, y), z) \stackrel{(3.12)}{=} X(Y(x, y), X(z, Y(z, y))) \stackrel{(3.3), (3.2)}{=}$$

$$X(X(Y(x, y), z), Y(z, Y(x, y))).$$

Заметим, что из сверхтождества (3.15), воспользовавшись сверхтождествами (3.4) и (3.1), при $x = y$, получаем:

$$(3.17) \quad X(y, z) = X(X(y, z), Y(y, z)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} X(X(y, z), Y(y, z)) &\stackrel{(3.4)}{=} X(X(X(y, y), z), Y(Y(y, y), z)) \stackrel{(3.1)}{=} \\ X(X(Y(y, y), z), Y(Y(y, y), z)) &\stackrel{(3.15)}{=} X(Y(y, y), z) \stackrel{(3.1)}{=} X(X(y, y), z) \stackrel{(3.4)}{=} X(y, z). \end{aligned}$$

Далее докажем сверхтождество (3.16):

$$\begin{aligned} X(y, Y(y, z)) &\stackrel{(3.5), (3.4)}{=} Y(X(y, Y(y, z)), y) \stackrel{(3.2)}{=} Y(y, X(y, Y(y, z))) \stackrel{(3.5)}{=} \\ Y(y, Y(X(y, Y(y, z)), X(y, z))) &\stackrel{(3.13), (3.2)}{=} \\ Y(y, Y(X(y, Y(y, z)), X(X(y, Y(y, z)), z))) &\stackrel{(3.10), (3.3)}{=} \\ Y(y, X(X(y, Y(y, z)), z)) &\stackrel{(3.3)}{=} Y(y, X(X(y, z), Y(y, z))) \stackrel{(3.17)}{=} Y(y, X(y, z)). \end{aligned}$$

Теперь получим сверхтождество (3.14). Имеем

$$\begin{aligned} Y(Y(x, X(y, Y(y, z))), z) &\stackrel{(3.16)}{=} Y(Y(x, Y(y, X(y, z))), z) \stackrel{(3.3)}{=} \\ Y(x, Y(Y(y, z), X(y, z))) &\stackrel{(3.17)}{=} Y(x, Y(y, z)). \end{aligned}$$

Согласно (3.14) имеем:

$$(3.18) \quad Y(Y(x, X(z, Y(y, z))), y) = Y(x, Y(y, z)).$$

Для дальнейшего нам необходимо также доказать следующее сверхтождество:

$$(3.19) \quad X(x, Y(x, X(y, Y(y, z)))) = X(x, Y(x, X(z, Y(y, z)))).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} X(x, Y(x, X(y, Y(y, z)))) &\stackrel{(3.5)}{=} X(x, X(Y(x, X(y, Y(y, z)))), Y(x, Y(y, z))) \stackrel{(3.14)}{=} \\ X(x, X(Y(x, Y(y, Y(y, z))), Y(Y(x, X(z, Y(y, z))), y))) &\stackrel{(3.10)}{=} \\ X(x, Y(Y(x, X(z, Y(y, z))), y)) &\stackrel{(3.14)}{=} Y(x, Y(y, z)). \\ X(x, Y(x, X(z, Y(y, z)))) &\stackrel{(3.5)}{=} X(x, X(Y(x, X(z, Y(y, z))), Y(x, Y(y, z))) \stackrel{(3.18)}{=} \\ X(x, X(Y(x, Y(z, Y(y, z))), Y(Y(x, X(z, Y(y, z))), y))) &\stackrel{(3.10)}{=} \\ X(x, Y(Y(x, X(z, Y(y, z))), y)) &\stackrel{(3.14)}{=} Y(x, Y(y, z)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(3.20) \quad X(x, Y(x, X(y, Y(y, z)))) = Y(x, Y(y, z)),$$

$$(3.21) \quad X(x, Y(x, X(z, Y(y, z)))) = Y(x, Y(y, z)).$$

Из сверхтождеств (3.20) и (3.21) следует сверхтождество (3.19).

Лемма 3.1. *Каждая слабо идемпотентная квазирешетка $(Q; A, B)$ с двумя бинарными операциями является слабо идемпотентной решеткой или суммой своих попарно непересекающихся подалгебр, которые являются слабо идемпотентными решетками.*

Доказательство. Зададим отображение $f : Q \times Q \rightarrow Q$ следующим образом:

$$f(x, y) = A(x, B(x, y)) = B(x, A(x, y)).$$

Докажем, что f — неидемпотентная функция Плонка. Корректность отображения f непосредственно следует из сверхтождества (3.16). Проверим условия определения 2.1.

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(f(x, y), z) = f(A(x, B(x, y)), z) = A(A(x, B(x, y)), B(A(x, B(x, y)), z)) \stackrel{(3.5)}{=} \\ & A(A(x, B(x, y)), A(B(A(x, B(x, y)), z)), B(B(x, y), z)) \stackrel{(3.18), (3.2)}{=} \\ & A(A(x, B(x, y)), A(B(A(x, B(x, y)), z), B(B(z, A(x, B(x, y))), z))) \stackrel{(3.10)}{=} \\ & A(A(x, B(x, y)), B(B(z, A(x, B(x, y))), y)) \stackrel{(3.18)}{=} \\ & A(A(x, B(x, y)), B(B(x, y), z)) \stackrel{(3.3)}{=} A(x, A(B(x, y), B(B(x, y), z))) \stackrel{(3.10)}{=} \\ & A(x, B(B(x, y), z)). \\ & f(x, f(y, z)) = f(x, A(y, B(y, z))) = A(x, B(x, A(y, B(y, z)))) \stackrel{(3.20)}{=} \\ & A(x, B(x, B(y, z))). \end{aligned}$$

$$2. \quad f(x, x) = A(x, B(x, x)) \stackrel{(3.1)}{=} A(x, A(x, x)) \stackrel{(3.4)}{=} A(x, x) = B(x, x).$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & f(x, f(y, z)) = f(x, A(y, B(y, z))) = A(x, B(x, A(y, B(y, z)))) \\ & f(x, f(z, y)) = f(x, A(z, B(z, y))) = A(x, B(x, A(z, B(z, y)))). \end{aligned}$$

Согласно сверхтождеству (3.18) получаем: $f(x, f(y, z)) = f(x, f(z, y))$.

В доказательстве условий 4-8 определения 2.1, без ограничения общности, можно предположить, что $F_i = A$. Согласно теореме 2.1, алгебра $(Q; A, B)$ является суммой своих попарно непересекающихся подалгебр U_i , $i \in I$. Остается доказать, что подалгебры U_i — слабо идемпотентные решетки. Для подалгебр U_i следует проверить лишь тождества слабого поглощения (1.4): $x \wedge (x \vee y) = x \wedge x$, $x \vee (x \wedge y) = x \vee x$. Действительно, $x, y \in U_i$ тогда и только тогда, когда $f(x, y) = f(x, x)$, $f(y, x) = f(y, y)$. Вычислив правую и левую части равенства $f(x, y) = f(x, x)$ (при $A = \wedge$, $B = \vee$), получаем:

$$f(x, y) = x \wedge (x \vee y) \text{ и } f(x, x) = x \wedge (x \vee x) = x \wedge (x \wedge x) = x \wedge x,$$

следовательно $x \wedge (x \vee y) = x \wedge x$. Аналогично получаем второе тождество. $\square$

Теорема 3.1. Для подпрямой неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ имеем: $|\Sigma| \leq 2$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ — слабо идемпотентная квазирешетка. Покажем, что если $|\Sigma| \geq 3$, то $\mathfrak{U}$ — подпрямая разложима. Поскольку $|\Sigma| \geq 3$, то существуют попарно различные бинарные операции $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma$. Определим функции $f_{i,j}$ следующим образом:

$$f_{ij}(x, y) = A_i(x, A_j(x, y)).$$

Зададим отношения $\tilde{\theta}_{i,j}$ на множестве U следующим образом:

$$x\tilde{\theta}_{i,j}y \leftrightarrow f_{i,j}(x, y) = x, f_{i,j}(y, x) = y.$$

Отношение $\theta_{i,j} = \tilde{\theta}_{i,j} \cup \{x = x\}$ — эквивалентность на множестве U . Более того, $\theta_{i,j}$ — конгруэнция на алгебре $\mathfrak{U}$.

Покажем, что $\theta_{1,2} \cap \theta_{1,3} \cap \theta_{2,3} = \omega$. Если $x(\theta_{1,2} \cap \theta_{1,3} \cap \theta_{2,3})y$, тогда $x\theta_{1,2}y$, $x\theta_{1,3}y$, $x\theta_{2,3}y$, таким образом, $f_{1,2}(x, y) = x$, $f_{1,2}(y, x) = y$, $f_{1,3}(x, y) = x$, $f_{1,3}(y, x) = y$, $f_{2,3}(x, y) = x$, $f_{2,3}(y, x) = y$, или $x = y$. В первом случае из сверхтождества (3.7), заменой z на $Z(x, y)$, получим:

$$\begin{aligned} A_1(A_2(x, y), A_3(x, y)) &= A_1(A_1(A_2(x, A_3(x, y))), A_2(x, y), A_3(x, y)) = \\ &= A_1(A_1(x, A_2(x, y)), A_3(x, y)) = A_1(x, A_3(x, y)) = x; \\ A_1(A_2(y, x), A_3(y, x)) &= A_1(A_1(A_2(y, A_3(y, x))), A_2(y, x), A_3(y, x)) = \\ &= A_1(A_1(y, A_2(y, x)), A_3(y, x)) = A_1(y, A_3(y, x)) = y. \end{aligned}$$

Следовательно, в обоих случаях получаем: $x = y$. Остается доказать, что все три конгруэнции $\theta_{1,2}$, $\theta_{1,3}$ и $\theta_{2,3}$ нетривиальны. Покажем, например, нетривиальность конгруэнции $\theta_{1,2}$. Поскольку $A_1 \neq A_2$, то существуют элементы $x, y \in U$ такие, что $A_1(x, y) \neq A_2(x, y)$, тогда $A_1(x, y)\theta_{1,2}A_2(x, y)$. Действительно, согласно сверхтождеству (3.17), при $y = X(x, y)$, $z = Y(x, y)$, имеем:

$$X(X(x, y), Y(x, y)) = X(X(X(x, y), Y(x, y)), Y(X(x, y), Y(x, y)));$$

Отсюда, согласно сверхтождеству (3.13), получим сверхтождество:

$$X(x, y) = X(X(x, y), Y(X(x, y), Y(x, y))),$$

а отсюда, при $X = A_1$, $Y = A_2$, имеем:

$$f_{1,2}(A_1(x, y), A_2(x, y)) = A_1(A_1(x, y), A_2(A_1(x, y), A_2(x, y))) = A_1(x, y).$$

Для доказательства равенства

$$f_{1,2}(A_2(x, y), A_1(x, y)) = A_2(x, y)$$

воспользуемся сверхтождеством (3.16):

$$\begin{aligned} f_{1,2}(A_2(x, y), A_1(x, y)) &= A_1(A_2(x, y), A_2(A_2(x, y), A_1(x, y))) \stackrel{(3.16)}{=} \\ A_2(A_2(x, y), A_1(A_2(x, y), A_1(x, y))) &= A_2(x, y). \end{aligned}$$

Итак, исходная алгебра оказывается подпрямой разложимой, что является противоречием. Таким образом, мощность множества операций подпрямой неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки не более двух. $\square$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 4.1. *Любое сверхтождество многообразия слабо идемпотентных решеток является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.5).*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, мощность $|\Sigma|$ подпрямой неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки $(U; \Sigma)$ меньше или равна двум. Следовательно, по теореме Биркгофа о подпрямых произведениях, каждая слабо идемпотентная квазирешетка изоморфна подпрямому произведению слабо идемпотентных квазирешеток с одной или двумя бинарными операциями. Слабо идемпотентная квазирешетка с одной бинарной операцией – слабо идемпотентная полурешетка. Поэтому, любое однородное сверхтождество выполняется в слабо идемпотентной квазирешетке с одной бинарной операцией. С другой стороны, следуя лемме 3.1, заключаем, что слабо идемпотентная квазирешетка с двумя бинарными операциями – слабо идемпотентная решетка либо сумма своих попарно непересекающихся подалгебр, которые являются слабо идемпотентными решетками. Следовательно, каждое однородное сверхтождество, выполняющееся на многообразии слабо идемпотентных решеток, будет выполняться и в каждой слабо идемпотентной квазирешетке с двумя бинарными операциями. $\square$

Следствие 4.1. *Каждое сверхтождество многообразия решеток является следствием сверхтождеств (3.2), (3.3), (3.5) и сверхтождества идемпотентности $X(x, x) = x$ ([7], [8], [10]).*

Покажем, что сверхтождество (3.5) является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.4) и следующего сверхтождества дистрибутивности:

$$(4.1) \quad X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} X(Y(X(x, y), z), Y(y, z)) &\stackrel{(4.1)}{=} X(X(Y(x, z), Y(y, z)), Y(y, z)) \stackrel{(3.3)}{=} \\ X(Y(x, z), X(Y(y, z), Y(y, z))) &\stackrel{(1.3)}{=} X(Y(x, z), Y(y, z)) \stackrel{(4.1)}{=} Y(X(x, y), z). \end{aligned}$$

Следствие 4.2. *Каждое сверхтождество многообразия дистрибутивных слабо идемпотентных решеток является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.4) и сверхтождества дистрибутивности (4.1).*

Abstract. The paper is devoted to the characterization of hyperidentities of a variety of weakly idempotent lattices that are nilpotent closures of the variety of lattices. The existence of a finite basis for such hyperidentities is established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Fried and G. Grätzer, "A Nonassociative Extension of the Class of Distributive Lattices", Pacific Journal of Mathematics, **49**, 59 – 78 (1973).
- [2] E. Fried, "Weakly Associative Lattices with Congruence Extension Property", Algebra Universalis, **4**, 151 – 162 (1974).
- [3] I. I. Melnik, "Nilpotent shift of manifolds", Math. Notes, **14**, 387 – 397 (1973).
- [4] E. Graczyńska, "On normal and regular identities", Algebra Universalis, **27**, 387 – 397 (1990).
- [5] J. Plonka, "On varieties of algebras defined by identities of some special forms", Houston Journal of Mathematics, **14**, 253 – 263 (1988).
- [6] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Ереванский госуниверситет (1986).
- [7] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях". Успехи Мат. Наук, **53** (1(319)), 61 – 114 (1998).
- [8] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and hypervarieties", Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, 595 – 640 (2001).
- [9] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества булевых алгебр". Известия РАН, сер. Мат. **56**, 654 – 672 (1992).
- [10] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат. **60**, 127 – 168 (1996).
- [11] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в многообразии решеток", Мат. Заметки **59**, 6. 944 – 946 (1996).
- [12] Yu. M. Movsisyan and V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", Logic Journal of IGPL, **20**, 1153 – 1174 (2012).
- [13] K. Denecke and J. Kopitz, M-solid Varieties of Algebras, Advances in Mathematic, Spriger-Science+Business Media, New York, **10** (2006).
- [14] K. Denecke and S. L. Wisnath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).
- [15] R. Padmanabhan and P. Penner, "A hyperbase for binary lattice hyperidentities", Journal of Automated Reasoning, **24**, 365 – 370 (2000).
- [16] V. Melkonian, "Circuit integrating through lattice hyperterms", Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, **3**, 101 – 119 (2011).
- [17] J. Plonka, "On a method of construction of abstract algebras", Fund. Math., **61**, 183 – 189 (1967).
- [18] J. Plonka and A. Romanowska, "Semilattice sums", Universal Algebra and Quasigroup Theory, Helderman Verlag, Berlin, 123 – 158 (1992).
- [19] A. Romanowska and J. Smith, Modes, World Scientific (2002).

Поступила 5 февраля 2014

О ФОРМАЛЬНО ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет
E-mail: haikghazaryan@mail.ru

Аннотация. Изучаются свойства дифференциальных операторов (многочленов) с переменными коэффициентами постоянной мощности или постоянной силы по Л. Хермандеру. Получены необходимые условия постоянства силы и мощности многочленов многих переменных. Для многочленов двух переменных с вещественными коэффициентами получены необходимые и достаточные условия постоянства мощности и формальной почти гипоеллиптичности в терминах нулей и их кратностей соответствующих обобщенно-однородных подмногочленов изучаемых многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: формально почти гипоеллиптический оператор (многочлен); оператор постоянной силы (мощности); перегулярный (вырожденный) многочлен.

1. ВВЕДЕНИЕ

Если для общих линейных дифференциальных операторов (уравнений) с постоянными коэффициентами многие вопросы (существование фундаментального решения, локальная разрешимость, корректность постановки краевых задач и т.д.) достаточно хорошо изучены, то теория таких операторов с переменными коэффициентами сравнительно мало развита. Дифференциальные операторы постоянной силы с переменными коэффициентами во многих отношениях ведут себя как операторы с постоянными коэффициентами (см. [1], глава 13). Например, все обобщенные решения формально гипоеллиптических уравнений постоянной силы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами являются бесконечно дифференцируемыми функциями (см. [2] - [4], или [1], теорема 13.4.1).

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N -множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$ -множество n -мерных

мультииндексов, E^n и R^n - n -мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial x_j$ либо $D_j = \frac{1}{i} \partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, n$). Наконец обозначим $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, $R^{n,0} = \{\xi \in R^n, |\xi| \neq 0\}$.

Пусть $\mathfrak{N} = \{\alpha^k\}$ множество точек из N_0^n . Многогранником Пьютона набора $\mathfrak{N}$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{N}) \subset R_+^n$, содержащий множество $\mathfrak{N} \cup \{0\}$. Для точек $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\Pi(\alpha) = \{\beta \in N_0^n, \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ назовем полным, если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат N_0^n . Полный многогранник $\mathfrak{R}$ назовем правильным (вполне правильным), если с каждой вершиной $e \in \mathfrak{R}$ многогранник $\mathfrak{R}$ содержит множество $\Pi(e)$ (соответственно каждая точка множества $\Pi(e) \setminus \{e\}$ является внутренней точкой $\mathfrak{R}$). Очевидно, это эквивалентно тому, что внешние (относительно $\mathfrak{R}$) нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$ имеют неотрицательные (соответственно положительные) координаты. Обозначим через $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M_k^+$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) k -мерные грани многогранника $\mathfrak{R}$. Грань $\mathfrak{R}_i^k$ назовем главной, если среди единичных внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей этой грани, множество которых обозначим через $\Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$, имеется нормаль, хотя бы одна координата которой положительна. Точку $\alpha \in \mathfrak{R}$ назовем главной, если α принадлежит хотя бы одной главной грани $\mathfrak{R}$. Множество всех единичных внешних нормалей главных граней $\mathfrak{R}$ обозначим через $\Lambda(\mathfrak{R})$. Главную грань $\mathfrak{R}_i^k$ назовем правильной (вполне правильной), если в множестве $\Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ существует вектор, все координаты которого неотрицательны (положительны). Через $M_k = M_k(\mathfrak{R})$ обозначим число k -мерных вполне правильных граней $\mathfrak{R}$, при этом будем считать, что для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$ грани пронумерованы так, что вполне правильными являются грани $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M_k$).

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ - линейный дифференциальный оператор с вещественными постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ - отвечающий ему символ (характеристический многочлен). Здесь сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ набора точек $(P) \cup \{0\}$ назовем многогранником Пьютона или характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$). Многочлен

$P^{r,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^r} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем подмногочленом многочлена P , отвечающим грани $\mathbb{R}_i^k$ многогранника $\mathbb{R}(P)$. Пусть $\lambda \in E^n$ и $d > 0$. Многочлен $R(\xi)$ называется λ -однородным λ -порядка d , если $R(t^\lambda \xi) \equiv R(t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^d R(\xi)$ при всех $t > 0$, что эквивалентно тому, что многочлен $R(\xi)$ представляется в виде $R(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$.

Легко показать, что подмногочлен $P^{r,k}$ многочлена P является λ -однородным для любого $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}_i^k(P))$.

Для λ -однородного многочлена $R(\xi)$ обозначим $\Sigma(R) = \{\xi \in R^{n,0}, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\}$. Пусть $\eta \in \Sigma(R)$, обозначим через $\Delta(\eta, R)$ λ -кратность нуля η , т.е. число, определенное так: $D^\nu R(\eta) = 0$ для всех $\nu \in N_0^n$ таких, что $(\lambda, \nu) < \Delta(\eta, R)$ и $D^\mu R(\eta) \neq 0$ для хотя бы одного мультииндекса такого, что $(\lambda, \mu) = \Delta(\eta, R)$. Для однородных многочленов, когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$, это кратность нуля η .

Грань $\mathbb{R}_i^k$ многогранника $\mathbb{R}(P)$ называется невырожденной, если $\Sigma(P^{r,k}) = \emptyset$. Многочлен $P(\xi)$ с многогранником $\mathbb{R} = \mathbb{R}(P)$ называется невырожденным, если невырождены все главные грани $\mathbb{R}$. В работе [5] В.И. Михайлова доказано, что для невырожденного многочлена P с полным многогранником Ньютона $\mathbb{R}(P)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(1.1) \quad \sum_{\beta \in \mathbb{N}} |\xi^\beta| \leq C [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n.$$

В работе [6] С. М. Никольского доказана единственность классического решения первой краевой задачи для уравнений, символы которых удовлетворяют этому неравенству. В [7] доказано, что условие невырожденности многочлена является также необходимым для справедливости (1.1).

Для многочлена $P(\xi)$ через $\bar{P}(\xi)$ обозначим функцию Л. Хермандера, определяемую формулой

$$(1.2) \quad \bar{P}(\xi) = \left[\sum_{\nu \in N_0^n} |D^\nu P(\xi)|^2 \right]^{1/2}.$$

Многогранник Ньютона набора мультииндексов $\bigcup_{\nu} (D^\nu P(\xi))$ обозначим через $\bar{\mathbb{R}}(P) = \mathbb{R}(\bar{P})$ и назовем многогранник Ньютона функции $\bar{P}(\xi)$.

Из простых геометрических соображений ясно, что если $\mathbb{R}(P)$ правильный многогранник, то $\bar{\mathbb{R}}(P) = \mathbb{R}(P)$, при этом вполне правильные грани $\bar{\mathbb{R}}(P)$ и $\mathbb{R}(P)$ совпадают.

Определение 1.1. Говорят, что многочлен $P(\xi)$ мощнее (сильнее) многочлена $Q(\xi)$ и записывают $Q < P$ (соответственно $Q \prec P$), если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\xi \in R^n$ $Q(\xi) \leq C[1 + |P(\xi)|]$ (соответственно $|\bar{Q}(\xi)| \leq C|\bar{P}(\xi)|$). Если $Q < P < Q$ (соответственно $Q \prec P \prec Q$), то говорят, что многочлены P и Q имеют одинаковую мощность (силу).

Определение 1.2. Многочлен $P(\xi)$ называется почти гипоеллиптическим (см. [8], [9]), если $D^\beta P < P$ для всех $\beta \in N_0^n$.

Известно, что многогранник Ньютона гипоеллиптического оператора является вполне правильным, а почти гипоеллиптического - правильным (см. [7]).

Ясно, что любой гипоеллиптический оператор является почти гипоеллиптическим. Обратное не верно, что видно из следующего примера.

Пример 1.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$. Из теоремы 3.1 работы [7] следует, что это почти гипоеллиптический многочлен, а из теоремы 1 работы [10] следует, что P не гипоеллиптивен.

Из Теоремы 10.4.3 монографии [1] легко вывести, что для почти гипоеллиптических многочленов P и Q соотношения $Q < P$ и $Q \prec P$ эквивалентны.

В терминах решений дифференциальных уравнений гипоеллиптические уравнения характеризуются тем, что все непрерывные решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. В [11] доказано: для того, чтобы решения $P(D)u = 0$, суммируемые с определенным (экспоненциальным) весом были бесконечно дифференцируемыми функциями во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы оператор $P(D)$ был почти гипоеллиптическим.

Пусть теперь $P(x, D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ дифференциальный оператор с коэффициентами $\{\gamma_{\alpha}(x)\}$, определенными в области $\Omega \subset E^n$, $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) и в каждой точке $x^0 \in \Omega$ функции $\bar{P}(x^0, \xi)$ Л. Хермандера для многочлена $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами определяется формулой (1.2).

Определение 1.3. Говорят, что многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность (постоянную силу) в Ω , если для каждой пары точек $x^1, x^2 \in \Omega$ многочлены $P(x^1, \xi)$ и $P(x^2, \xi)$ (соответственно функции $\bar{P}(x^1, \xi)$ и $\bar{P}(x^2, \xi)$) имеют одинаковую мощность, т.е. существует число $C(x^1, x^2) > 0$ такое, что

$$|P(x^1, \xi)|/|P(x^2, \xi)| \leq C(x^1, x^2) \quad \forall \xi \in R^h,$$

(соответственно для функции $\bar{P}$).

Многочлены постоянной мощности в Ω имеют постоянную силу в Ω , что следует из теоремы 10.4.3 монографии [1]. Обратное не верно (см. ниже, пример 2.1).

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПОСТОЯНСТВА МОЩНОСТИ И СИЛЫ ОПЕРАТОРОВ (МНОГОЧЛЕНОВ)

Для многочлена $P(x, \xi)$ в каждой фиксированной точке $x^0 \in \Omega$ обозначим через $\mathfrak{R}(x^0) = \mathfrak{R}(x^0, P)$ (соответственно $\bar{\mathfrak{R}}(x^0) = \bar{\mathfrak{R}}(x^0, P)$) многогранник Ньютона многочлена $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами (соответственно функции $\bar{P}(x^0, \xi)$) и введем понятия полноты, (вполне) правильности многогранника $\mathfrak{R}(x^0)$, (вполне) правильности и вырожденности его граней, понятия подграней и подмногочленов и для вырожденной грани $\Gamma = \mathfrak{R}_{i_0}^{k_0}$ ($1 \leq i_0 \leq M'_k(x^0)$, $0 \leq k_0 \leq n-1$) введем обозначения $\Sigma(x^0, \Gamma)$ и $\Delta(x^0, \eta, \Gamma)$ как выше для многочлена $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами. Мы скажем, что многогранник $\mathfrak{R}(x, P)$ (соответственно $\bar{\mathfrak{R}}(x, P)$) не зависит от точки $x \in \Omega$, если множество его главных вершин не зависит от $x \in \Omega$.

Обозначим через $\aleph = \aleph(P)$ множество мультииндексов $\alpha \in N_0^n$, для которых коэффициент $\gamma_\alpha(x)$ при ξ^α в многочлене $P(x, \xi)$ не обращается в нуль хотя бы в одной точке $x \in \Omega$ и через $\aleph(\aleph) = \aleph(\aleph(P))$ многогранник Ньютона этого множества. Если многогранник $\mathfrak{R}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$, то, очевидно, главные грани многогранников $\mathfrak{R}(x, P)$ и $\aleph(\aleph(P))$ и, если обозначить соответствующие главные грани одинаковыми индексами, множества $\Lambda[\mathfrak{R}_{i_0}^{k_0}(\mathfrak{R}(x, P))]$ и $\Lambda[\mathfrak{R}_{i_0}^{k_0}(\aleph(\aleph(P)))]$ совпадают. Так как любой вектор $\lambda \in \Lambda(\aleph(\aleph(P)))$ является внешней нормалью одной и только одной грани $\Gamma = \mathfrak{R}_{i_0}^{k_0}$ ($1 \leq i_0 \leq M'_k(x^0)$, $0 \leq k_0 \leq n-1$) многогранника $\aleph(\aleph(P))$, то каждый такой вектор однозначно определяет числа $M = M(\lambda)$ и $d_j = d_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \dots, M$, не зависящие от $x \in \Omega$ такие, что $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$ и многочлен $P(x, \xi)$ представляется в виде суммы λ -однородных многочленов

$$(2.1) \quad P(x, \xi) = \sum_{j=0}^M P_j(x, \xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где $P_0(x, \xi) = P_{i_0, k_0}^{i_0, k_0}(x, \xi)$ для любого $\lambda \in \Lambda(\aleph_{i_0}^{k_0})$.

Пусть $\Gamma = \Gamma(x^0) = \mathfrak{R}_{i_0}^{k_0}$ ($1 \leq i_0 \leq M'_k(x^0)$, $0 \leq k_0 \leq n-1$) некоторая главная вырожденная в точке $x^0 \in \Omega$ грань многогранника Ньютона $\mathfrak{R}(x^0, P)$ многочлена

$P(x^0, \xi)$. С каждой точкой $x^0 \in \Omega$, каждой гранью Γ , каждым вектором $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и каждой точкой $\eta \in \Sigma(x^0, \Gamma)$ мы свяжем число $l(x^0) = l(x^0, \eta, \lambda, \Gamma)$, определенное следующим образом:

$$(2.2) \quad P_j(x^0, \eta) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, l(x^0) - 1, \quad P_{l(x^0)}(x^0, \eta) \neq 0$$

и число $\bar{l}(x^0) = \bar{l}(x^0, \eta, \lambda, \Gamma)$, определенное формулой (см. представление (2.1))

$$(2.3) \quad \bar{l}(x^0) = \max_{0 \leq j \leq M} \{d_j - \Delta(x^0, \eta, P_j)\}.$$

Лемма 2.1. Пусть многочлен $P(x, \xi)$, с полиномом многогранником Ньютона $\mathfrak{N}(x, P)$, имеет постоянную мощность в Ω . Тогда 1) многогранник $\mathfrak{N}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$, 2) если Γ вырожденная главная грань многогранника $\mathfrak{N}(P) \equiv \mathfrak{N}(x, P)$, то множество $\Sigma(x, \Gamma)$ и для каждого вектора $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и каждой точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ числа $l(x, \eta, \Gamma)$ не зависят от точки $x \in \Omega$.

Доказательство. 1) Достаточно доказать, что коэффициенты при главных вершинах (нульмерных граней) $\mathfrak{N}(x, P)$ не обращаются в нуль ни в одной точке $x \in \Omega$. Пусть, напротив, коэффициент $\gamma_e(x)$ некоторой главной вершины e многогранника $\mathfrak{N}(x, P)$ обращается в нуль в некоторой точке $x^0 \in \Omega$.

Так как e главная вершина, то из геометрических соображений ясно, что существует вектор $\lambda \in \Lambda(e)$ такой, что $(n-1)$ -мерная опорная к $\mathfrak{N}(x^0, P)$ гиперплоскость с внешней нормалью λ , проходящая через вершину e , не проходит через начало координат, т.е. если $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение этой гиперплоскости, то $d > 0$.

Выберем точку $x^1 \in \Omega$ так, чтобы $\gamma_e(x^1) \neq 0$. Тогда легко подсчитать, что для любой точки $\eta \in R^{n,0}$, на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$) $P(x^1, \xi^s) = |\gamma_e(x^1)| |\eta|^s s^d + o(s^d)$ при $s \rightarrow \infty$, в то время как $P(x^0, \xi^s) = o(s^d)$ что противоречит постоянству мощности многочлена $P(x, \xi)$ и доказывает пункт 1) леммы.

2) По уже доказанной части леммы многогранник $\mathfrak{N}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$. Если $\Sigma(x^1, \Gamma) \neq \Sigma(x^2, \Gamma)$ для пары точек x^1 и x^2 из Ω , то существует, например, $\eta \in \Sigma(x^1, \Gamma) \setminus \Sigma(x^2, \Gamma)$. Поступая как выше, из представления (2.1) имеем на той же последовательности $\{\xi^s\}$ $|P(x^1, \xi^s)| = o(s^{d_0})$, при $s \rightarrow \infty$ и $|P(x^2, \xi^s)| \geq |P^{i_0, k_0}(x^2, \xi^s)| s^{d_0}$ для всех $s = 1, 2, \dots$, что противоречит постоянству мощности многочлена $P(x, \xi)$.

Пусть теперь $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ и $l(x^1, \eta, \Gamma) > l(x^2, \eta, \Gamma)$ (см. (2.2)). Повторяя те же рассуждения, при этом имея в виду, что $P_i(x^j, \eta) = 0$ для всех $i < l(x^j)$, получим

при $s \rightarrow \infty$ для каждого $j = 1, 2$

$$|P(x^j, \xi^s)| = \left| \sum_{0 \leq i < l(x^j)} P_i(x^j, \xi^s) + P_{l(x^j)}(x^j, \xi^s) + \right. \\ \left. + \sum_{i > l(x^j)} P_i(x^j, \xi^s) \right| = s^{l(x^j)} |P_{l(x^j)}(\eta)| + o(s^{l(x^j)}),$$

т.е. $|P(x^1, \xi^s)|/|P(x^2, \xi^s)| \rightarrow \infty$, что противоречит постоянству мощности многочлена $P(x, \xi)$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Замечание 2.1. *Ниже мы покажем, что для многочленов постоянной силы многогранник $\mathfrak{R}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$. Отметим, однако, что для многочленов постоянной силы в Ω многогранник $\mathfrak{R}(x, P)$ может меняться от точки к точке, что подтверждается следующим примером.*

Пример 2.1. Пусть $n = 2$, $P(x, \xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 + |x|^2 \xi_2^2 + \xi_2$, $\Omega = \{x \in E^2 : |x| < 1\}$. Многогранник Ньютона $\mathfrak{R}(x, P)$ этого многочлена является правильным для всех $0 \neq x \in \Omega$ с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ и $(0, 2)$ и полным для $x = 0$ с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ и $(0, 1)$.

Из леммы 2.1 следует, что этот многочлен не имеет постоянной мощности в Ω . С другой стороны простой подсчет показывает, что коэффициент $\gamma_{(0,2)} = |x|^2$ при правильной вершине $(0, 2)$ многогранника $\mathfrak{R}(x, P)$ заменяется коэффициентом $\gamma_{(0,4)}(x) = 4 + |x|^4$ при правильной вершине $(0, 4)$ многогранника $\mathfrak{R}(x, \bar{P}^2)$ многочлена $\bar{P}^2(x, \xi)$. Так как $\gamma_{(0,4)}(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что многочлен $\bar{P}^2(x, \xi)$ имеет постоянную мощность, следовательно, многочлен $P(x, \xi)$, имеет постоянную силу в Ω . Отметим, что в этом также можно убедиться применив теорему 2.1 (см. ниже).

Определение 2.1. *Оператор $P(x, D)$ назовем формально почти гипозеллитическим в Ω , если*

- a) $P(x_0, D)$ почти гипозеллитичен для каждой точки $x_0 \in \Omega$,
- b) оператор $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω .

Так как (см. [7], лемма 2.1, теорема 2.1 и следствие 2.1) многогранники Ньютона почти гипозеллитических многочленов являются правильными и (во всяком случае при $n = 2$) не вырожденными, могут иметь только вполне правильные грани, то ниже, в леммах 2.2 и 2.3 мы будем считать, что многогранник Ньютона $\mathfrak{R}(x, P)$ изучаемого многочлена $P(x, \xi)$ является правильным, при этом либо для

всех точек $x \in \Omega$ многочлен $P(x, \xi)$ невырожден, либо вырождены лишь вполне правильные грани.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{R}(x, P)$ правильный многогранник Ньютона многочлена $P(x, \xi)$ постоянной силы в Ω . Тогда

- 1) многогранник $\mathcal{R}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$,
- 2) множества $\Sigma(x, P^{i,k})$, отвечающие вполне правильным подмногочленам $P^{i,k}(x, \xi)$ ($1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1$) не зависят от точки $x \in \Omega$: $\Sigma(x, P^{i,k}) = \Sigma(P^{i,k}) \forall x \in \Omega$,
- 3) если $\Gamma = \mathcal{R}_{i_0}^{k_0}(x_0, P)$ вполне правильная вырожденная грань $\mathcal{R}(x, P)$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$, и $\eta \in \Sigma(x, P^{i_0, k_0})$, то (см. (2.3)) число $\bar{l}(x, \eta, \lambda, \Gamma)$ не зависит от точки $x \in \Omega$.

Доказательство. 1) Так как вполне правильные вершины и коэффициенты, отвечающие этим вершинам в многогранниках $\mathcal{R}(x, P)$ и $\bar{\mathcal{R}}(x, P)$ совпадают, то их независимость от $x \in \Omega$ доказывается как соответствующий случай в лемме 2.1. Пусть e правильная, но не вполне правильная вершина $\mathcal{R}(x, P)$. Так как многогранник $\mathcal{R}(x, P)$ правильный, то из геометрических соображений ясно, что в этом случае а) e лежит на какой-то координатной гиперплоскости, б) проекция какой-то вполне правильной вершины e^1 многогранника $\mathcal{R}(x, P)$ на соответствующую гиперплоскость совпадает с e , т.е. существует мультииндекс $0 \neq \nu \in N_0^n$, такой, что $e^1 - \nu = e$. Тогда из леммы 2.1 из [13] следует, что подмногочлен, отвечающий вершине $2e$ многогранника $\mathcal{R}(x, \bar{P}^2)$ многочлена $\bar{P}^2(x, \xi)$ имеет вид $|D_\xi^\nu(\gamma_{e^1}(x)\xi^{e^1})|^2 + \dots = c(e^1, \nu)|\gamma_{e^1}(x)|^2\xi^{2e} + \dots$, где $c(e^1, \nu) > 0$ и не выписаны неотрицательные члены. Так как по уже доказанной части $\gamma_{e^1}(x) \neq 0$ при $x \in \Omega$ и единственная неправильная вершина полного многогранника является начало координат, то первый пункт доказан.

2) вполне правильные подмногочлены для многочлена $P(x, \xi)$ и функции $\bar{P}(x, \xi)$ совпадают, поэтому этот пункт доказывается аналогично пункту 2) леммы 2.1.

3) Пусть $\bar{l}(x_1, \eta, \lambda, \Gamma) = d_{j_1} - \Delta(\eta, x^1, P_{j_1}) > d_{j_2} - \Delta(\eta, x^2, P_{j_2}) = \bar{l}(x_2, \eta, \lambda, \Gamma)$ для некоторой пары точек x^1, x^2 из Ω и некоторой тройки (η, λ, Γ) . Здесь j_1 и j_2 номера, реализующие максимум в правой части (2.3) соответственно в точке x^1 и x^2 .

Для каждого $\nu \in N_0^n$, по вектору $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$, и точки $\eta \in \Sigma(x, P^{i_0, k_0})$, представим многочлен $D^\nu P(x, \xi)$ в виде суммы λ -однородных многочленов по формуле (2.1).

Тогда для каждого $p = 1, 2$ имеем (ниже $\Delta_p = \Delta(\eta, x^p, P_{j_p})$, $p = 1, 2$)

$$(2.4) \quad \bar{P}(x^p, \xi) = \left[\sum_{(\lambda, \nu) < \Delta_p} + \sum_{(\lambda, \nu) = \Delta_p} + \sum_{(\lambda, \nu) > \Delta_p} \right] \left| \sum_{j=0}^M D^\nu P_j(x^p, \xi) \right|.$$

Рассмотрим поведение функции $\bar{P}(x^p, \xi)$, $p = 1, 2$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$, $s = 1, 2, \dots$. Так как многочлены $\{D^\nu P_j\}$ λ -однородны по ξ , то простые выкладки показывают (см. определение числа $\bar{l}$), что при $s \rightarrow \infty$

$$(2.5) \quad \left[\sum_{(\lambda, \nu) < \Delta_p} + \sum_{(\lambda, \nu) > \Delta_p} \right] \left| \sum_{j=0}^M D^\nu P_j(x^p, \xi^s) \right| = o(s^{\bar{l}(x^p)}), \quad p = 1, 2$$

и с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2

$$(2.6) \quad \sum_{(\lambda, \nu) = \Delta_1} \left| \sum_{j=0}^M D^\nu P_j(x^1, \xi^s) \right| \geq C_1 |D^\nu P_{j_1}(x^1, \eta)| s^{\bar{l}(x^1)},$$

$$(2.6') \quad \sum_{(\lambda, \nu) = \Delta_2} \left| \sum_{j=0}^M D^\nu P_j(x^2, \xi^s) \right| \leq C_2 s^{\bar{l}(x^2)} \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как $D^\nu P_{j_1}(x^1, \eta) \neq 0$ и $\bar{l}(x_1, \eta) > \bar{l}(x_2, \eta)$, то соотношения (2.4) - (2.6') показывают, что при $s \rightarrow \infty$ $\bar{P}(x^1, \xi^s)/\bar{P}(x^2, \xi^s) \rightarrow \infty$. Это противоречит постоянству силы многочлена $P(x, \xi)$ и доказывает пункт 3). Лемма 2.2 доказана. $\square$

В дополнении к леммам 2.1 и 2.2 для многочленов двух переменных мы докажем еще одно свойство многочленов постоянной мощности, необходимое нам для вывода критерия постоянства мощности многочленов. При этом мы ограничиваемся двумерным случаем, так как в случае $n = 2$ обобщенно - однородные многочлены представляются в виде произведения простых обобщенно - однородных многочленов, что намного облегчает их изучение и за счет этого полученные результаты носят окончательный характер. Именно, в [8, Лемма 2.1]) доказано, что для любого однородного многочлена λ с вещественными коэффициентами существуют вещественные числа $\tau_1, \dots, \tau_r$, натуральные числа $m_1, \dots, m_r$ и бесконечно дифференцируемая в $R^{2,0}$ функция q_0 такие, что $q_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{2,0}$ и многочлен $R(\xi)$ представляется в виде

$$(2.7) \quad R(\xi) = q_0(\xi) \prod_{i=1}^r (\xi_1 - \tau_i \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i} =: q_0(\xi) \prod_{i=1}^r [q_i(\xi)]^{m_i}.$$

Отметим, что так как концы отрезка, на котором расположены мультииндексы $\alpha \in (R)$ также являются мультииндексами, то координаты вектора λ можно выбирать так, чтобы отношение λ_1/λ_2 стало рациональным числом с нечетным

знаменателем, и при $\lambda_1 = \lambda_2$, т.е. когда $R(\xi)$ однородный многочлен, q_i , $i = 0, 1, \dots, r$ также однородные многочлены.

Лемма 2.3. Пусть $n = 2$, $\Gamma = \mathbb{R}^{i_0,1}$ некоторая вырожденная одномерная вполне правильная грань полного многогранника $\mathbb{R} = \mathbb{R}(P) \equiv \mathbb{R}(x, P)$ многочлена $P(x, \xi)$ постоянной мощности в $\Omega \subset E^2$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $P^{i_0,1}(x, \xi)$ λ -однородный подмногочлен многочлена P , отвечающий грани Γ . Для каждой точки $x \in \Omega$ представим многочлен $P^{i_0,1}(x, \xi)$ в виде (2.7)

$$P^{i_0,1}(x, \xi) = q_0(x, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} (\xi_1 - \tau_l(x) \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_l(x)} =: q_0(x, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} [q_l(x, \xi)]^{m_l(x)}.$$

Тогда числа $r(x)$, $\{\tau_l(x)\}$ и $\{m_l(x)\}$ не зависят от точки $x \in \Omega$.

Доказательство. Независимость от $x \in \Omega$ чисел $r(x)$ и $\{\tau_l(x)\}$ доказана в лемме 2.2. Докажем, что числа $\{m_l(x)\}$ также не зависят от x . Пусть, наоборот, $m_{l_0}(x^1) > m_{l_0}(x^2)$ для некоторой пары точек x^1 и x^2 из Ω и некоторого номера l_0 , ($1 \leq l_0 \leq r \equiv r(x)$). По вектору λ представим многочлены $Q_j(\xi) = P(x^j, \xi)$ $j = 1, 2$ с постоянными коэффициентами в виде (см. представление (2.1))

$$\begin{aligned} Q_j(\xi) &= P^{i_0,1}(x^j, \xi) + p^{i_0,1}(x^j, \xi) = q_0(x^j, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} [q_l(\xi)]^{m_l(x^j)} + p^{i_0,1}(x^j, \xi) = \\ &= q_0(x^j, \xi) \bar{q}(\xi) [q_{l_0}(\xi)]^{m_{l_0}(x^j)} + p^{i_0,1}(x^j, \xi), \end{aligned}$$

где

$$p^{i_0,1}(x^j, \xi) = P(x^j, \xi) - P^{i_0,1}(x^j, \xi); \quad \bar{q}(\xi) = \prod_{l \neq l_0, l=1}^{r(x)} [q_l(\xi)]^{m_l(x^j)}.$$

Пусть $q_{l_0}(\eta) = \eta_1 - \tau_{l_0} \eta_2^{\lambda_1/\lambda_2} = 0$, $\delta > 0$, $\xi_1^* = s^{\lambda_1} (s^{-\delta} + 1) \eta_1$, $\xi_2^* = s^{\lambda_2} \eta_2$. Тогда для $j = 1, 2$ и $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$(2.8) \quad Q_j(\xi^*) = s^{d_0} P^{i_0,1}(x^j, ((s^{-\delta} + 1) \eta_1, \eta_2)) + p^{i_0,1}(x^j, \xi^*),$$

при этом, очевидно, с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2

$$(2.9) \quad |p^{i_0,1}(x^j, \xi^*)| \leq C_j s^{d_1}.$$

Простые выкладки показывают существование положительных чисел C_3 и C_4 таких, что

$$(2.10) \quad |P^{i_0,1}(x^1, \xi^*)| \leq C_3 s^{d_0 - \delta m_{l_0}(x^1)}, \quad |P^{i_0,1}(x^2, \xi^*)| \geq C_4 s^{d_0 - \delta m_{l_0}(x^2)}.$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $d_0 - \delta m_{l_0}(x^1) > d_1$. Так как $d_0 - \delta m_{l_0}(x^1) < d_0 - \delta m_{l_0}(x^2)$, то отсюда и из (2.8) - (2.10) следует, что $|P(x^1, \xi^*)|/|P(x^2, \xi^*)| \rightarrow 0$.

при $s \rightarrow \infty$, что противоречит постоянной мощности многочлена $P(x, \xi^n)$. Лемма 2.3 доказана. $\square$

Из лемм 2.1 и 2.3 непосредственно следует

Следствие 2.1. Если двумерный многочлен $P(x, \xi)$, с единственной вырожденной гранью $\mathbb{R}^{i_0, 1}$, имеет постоянную мощность в Ω , то многочлен $P^{i_0, 1}(x, \xi)$ представляется в виде

$$(2.11) \quad P^{i_0, 1}(x, \xi) = q_0(x, \xi) p_0(\xi) = q_0(x, \xi) \prod_{i=1}^r (\xi_1 - \tau_i \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i},$$

где $q_0(x, \xi)$ непрерывная по x и бесконечно дифференцируемая по ξ функция такая, что $q_0(x, \xi) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^{2, 0}$.

Следующее предложение дает необходимое условие формальной почти гипоэллиптичности. Оно доказывается буквальным повторением доказательства леммы 3.2 работы [7], с учетом лемм 2.1 и 2.2 настоящей работы, поэтому мы здесь его проводить не будем. Как будет видно ниже, для определенного класса многочленов $P(x, \xi)$ оно является и достаточным условием для формальной почти гипоэллиптичности (см. теорему 3.3).

Лемма 2.4. Пусть $\Gamma = \mathbb{R}_{i_0}^{k_0}$ ($1 \leq i_0 \leq M_k, 0 \leq k_0 \leq n-1$) некоторая вполне правильная вырожденная грань правильного многогранника Ньютона $\mathbb{R} = \mathbb{R}(P) \equiv \mathbb{R}(x, P)$ формально почти гипоэллиптического многочлена $P(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $\eta \in \Sigma(x, \Gamma)$. Тогда

$$d_j(\lambda) - \Delta(x, \eta, \lambda, P_j) \leq d_{l(x)}, \quad j = 0, 1, \dots, l-1.$$

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОСТОЯНСТВА МОЩНОСТИ И ФОРМАЛЬНОЙ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

Сперва докажем следующее предложение, решающее вопрос о постоянстве мощности невырожденных многочленов.

Лемма 3.1. Пусть коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$ невырожденного многочлена $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha$ определены в ограниченной области Ω и ограничены в $\bar{\Omega}$, причем главные коэффициенты непрерывны в $\bar{\Omega}$. Пусть полный многогранник $\mathbb{R}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$: $\mathbb{R}(x, P) \equiv \mathbb{R}(P)$. Тогда существуют числа $0 < c_1 \leq c_2$

такие, что

$$(3.1) \quad c_1 \sum_{\nu \in \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq |P(x, \xi)| \leq c_2 \sum_{\nu \in \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \quad x \in \Omega, \xi \in R^n.$$

Доказательство. В. П. Михайловым в [5] доказана следующая теорема: если $0 = c^0, c^1, \dots, c^M$ вершины полного многогранника Пьютона $\mathfrak{R}(P)$ невырожденного многочлена $P(\xi)$, то с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2 справедливы неравенства

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{R}} |\xi^\nu| \leq C_1 \sum_{k=0}^M |\xi^{e^k}| \leq C_2 |P(\xi)|, \quad \xi \in R^n,$$

а для главных точек $\nu \in \mathfrak{R}$ при любом $\delta > 0$ существует число $c(\delta) > 0$ такое, что

$$(3.2) \quad |\xi^\nu| \leq \delta \sum_{k=0}^M |\xi^{e^k}| + c(\delta), \quad \xi \in R^n.$$

Правая часть (3.1) следует из ограниченности коэффициентов многочлена $P(x, \xi)$.

Докажем левую часть (3.1). Пусть x^0 точка из Ω . Так как многочлен $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами невырожден, то по теореме В.П. Михайлова существует число $C_3(x^0) > 0$ такое, что

$$(3.3) \quad \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq C_3(x^0) |P(x^0, \xi)|, \quad \xi \in R^n,$$

где через $\partial \mathfrak{R}(P)$ обозначено множество главных точек многогранника $\mathfrak{R}(P)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ выбрано так, что $|\gamma_\alpha(x) - \gamma_\alpha(x^0)| < \varepsilon/2$ для всех главных коэффициентов $\gamma_\alpha(x)$ и всех точек $x \in \bar{\Omega}$ таких, что $|x - x^0| \leq \rho$. Тогда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$(3.4) \quad |P(x, \xi) - P(x^0, \xi)| \leq \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\gamma_\alpha(x) - \gamma_\alpha(x^0)| |\xi^\nu| + \\ + C_4 \sum_{\nu \in \mathfrak{R}(P) \setminus \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| + C_4 \sum_{\nu \in \mathfrak{R}(P) \setminus \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu|.$$

Применяя неравенство (3.2) при $0 < \delta \leq \varepsilon/2C_4$, имеем

$$(3.5) \quad C_4 \sum_{\nu \in \mathfrak{R}(P) \setminus \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq \varepsilon/2 \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| + c(\varepsilon).$$

Из (3.1) - (3.5) получаем при $|x - x^0| \leq \rho$

$$\sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq C_3(x^0) |P(x, \xi) - P(x^0, \xi)| + C_3(x^0) |P(x, \xi)| \leq$$

$$\leq C_3(x^0) \varepsilon \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| + C_3(x^0) |P(x, \xi)| + c(\varepsilon).$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $C_3(x^0) \varepsilon < 1$, перенесем член с ε в левую сторону и разделим обе части полученного неравенства на $1 - C_3(x^0) \varepsilon$, тогда с некоторыми положительными постоянными $C_5 = C_5(x^0, \varepsilon)$ и $C_6 = C_6(x^0, \varepsilon)$ при $|x - x^0| \leq \rho$, получаем

$$(3.6) \quad \sum_{\nu \in \partial \mathfrak{R}(P)} |\xi^\nu| \leq C_5 |P(x, \xi)| + C_6.$$

Так как множество областей $U(x^0) = \{x \in \Omega : |x - x^0| \leq \rho\}$ для всех $x^0 \in \Omega$ покрывает Ω , то, согласно лемме Гейне - Бореля, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_k\}_1^M$ области Ω . Возьмем точки $x^k \in U_k$ ($k = 1, \dots, M$) и применим неравенства (3.6) для этих точек, при этом каждой точке x^k будет соответствовать вполне определенное число $\varepsilon_k > 0$. Взяв $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M\}$ и $c_1^{-1} = \max_{1 \leq k \leq M} \{C_2(x^k), C_3(x^k)\}$, из (3.6) получим левую часть неравенства (3.1). Лемма 3.1 доказана. $\square$

Из леммы 3.1 непосредственно следует следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть многочлен $P(x, \xi)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1. Тогда $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность в Ω .

Обозначим через I_n множество многочленов $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ с постоянными коэффициентами таких, что $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Пусть $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha$ многочлен, с коэффициентами $\{\gamma_\alpha(x)\}$, определенными в области $\Omega \subset E^n$. Будем говорить, что $P \in I_n(\Omega)$, если многочлен $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами принадлежит I_n для любой точки $x^0 \in \Omega$. При этом, очевидно, что если многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность в Ω и $P(x^0, \xi) \in I_n$ хотя бы в одной точке $x^0 \in \Omega$, то $P \in I_n(\Omega)$.

Легко также убедиться, что если $P \in I_n(\Omega)$, то, не меняя силу или мощность этого многочлена, за счет добавления константы к P и умножения на константу, можно добиться того, что $P(x, \xi) > 0$ для всех $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$. Поэтому далее будем считать, что если $P \in I_n(\Omega)$, то $P(x, \xi) > 0$ для всех $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$.

Теперь мы в состоянии доказать критерий постоянства мощности одного класса многочленов. При этом ниже, в теореме 3.2, для упрощения рассуждений и записи, будем предполагать, что (см. представление (2.1)) $P_1(x, \eta) \neq 0$ для всех

точек $\eta \in \Sigma(x, \Gamma)$, т.е. для точек $\eta \in R^{2,n}$ для которых $P_0(x, \eta) = 0$. Это эквивалентно тому, что $l(x, \eta) = 1$. Выше мы убедились (см. пункт 2) леммы 2.1), что для многочленов постоянной мощности множества $\Sigma(x, \Gamma)$ и числа $l(x, \eta, \Gamma)$ не зависят от x : $l(x, \eta) = l(\eta) \forall x \in \Omega$. Так, что наше ограничение заключается в том, что мы полагаем $l(\eta) = 1$ для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$.

Теорема 3.2. Пусть $n = 2$ и $\mathcal{R}(x, P)$ правильный многогранник Ньютона многочлена $P(x, \xi) \in I_2(\Omega)$ с вещественными коэффициентами, определенными в ограниченной области $\Omega \subset E^2$. Пусть коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$ ограничены в Ω , причем главные коэффициенты непрерывны в $\bar{\Omega}$.

Пусть одномерная вполне правильная грань $\Gamma = \mathcal{R}^{n-1}$ многогранника $\mathcal{R}(x, P)$ вырождена, при этом остальные одномерные главные грани $\mathcal{R}$ невырождены.

Многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность в Ω тогда и только тогда, когда

1) многогранник $\mathcal{R}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$: $\mathcal{R}(x, P) \equiv \mathcal{R}(P)$ для всех $x \in \Omega$,

2) многочлен $P^{n-1}(x, \xi)$ представляется в виде (2.11).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой пары точек x^1 и x^2 из Ω многочлены $P(x^j, \xi)$ ($j = 1, 2$) с постоянными коэффициентами имеют одинаковую мощность. Пусть, наоборот, существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \rightarrow \infty$ такая, что при $s \rightarrow \infty$, имеем

$$(3.7) \quad |P(x^1, \xi^s)|/|P(x^2, \xi^s)| \rightarrow \infty.$$

Не умаляя общности, можно считать, что все координаты векторов $\{\xi^s\}$ положительны. Обозначим

$$\rho_s = \exp[(\ln \xi_1^s)^2 + (\ln \xi_2^s)^2]^{1/2}, \quad \mu_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\ln \rho_s}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $\xi^s = \rho_s^{\mu^s}$, μ^s — единичные векторы, $\rho_s \rightarrow \infty$ если $\xi^s \rightarrow \infty$, или если некоторая координата ξ^s стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Так как векторы μ^s находятся на единичной окружности, то у последовательности $\{\mu^s\}$ имеется предельная точка μ . За счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\mu^s \rightarrow \mu$ при $s \rightarrow \infty$. Из выпуклости многогранника $\mathcal{R}$ следует, что μ является внешней нормалью к одной и только одной грани $\mathcal{R}$.

Возьмем в E^2 какой-нибудь ортогональный базис $(\mu, \bar{\mu})$. Тогда $\mu^s = \kappa_1^s \mu + \kappa_2^s \bar{\mu}$, $s = 1, 2, \dots$. Рассмотрим грани $\mathcal{R}_{i_1}^{k_1}$ и $\mathcal{R}_{i_2}^{k_2}$ многогранника $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P)$, удовлетворяющие условиям, что $\mathcal{R}_{i_1}^{k_1}$ лежит в опорной к $\mathcal{R}$ плоскости с внешней нормалью μ , а грань $\mathcal{R}_{i_2}^{k_2}$ является подгранью $\mathcal{R}_{i_1}^{k_1}$ и лежит в опорной к (рассматриваемой изолированно) грани $\mathcal{R}_{i_1}^{k_1}$ с внешней нормалью $\bar{\mu}$. Если существуют более одной такой подгрань (что возможно только при $k_1 = 1$), то в качестве $\mathcal{R}_{i_2}^{k_2}$ условимся брать ту, для которой $(\bar{\mu}, \alpha)$ больше. При этом независимо от того $k_1 = 0$ или $k_1 = 1$, грань $\mathcal{R}_{i_2}^{k_2}$ нульмерная: $k_2 = 0$, т.е. $\mathcal{R}_{i_2}^0$, вершина $\mathcal{R}$.

Так как $\mu^s \rightarrow \mu$, то $\kappa_1^s \rightarrow 1$, $\kappa_2^s = o(\kappa_1^s)$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно $\rho_s^{s_1} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Возможны два случая: (за счет выбора подпоследовательности) а) $\rho_s^{s_2} \rightarrow \infty$, б) $\rho_s^{s_2}$ имеет конечный предел.

Случай а). Пусть сначала $d_0 > 0$ и $\beta = \mathcal{R}_{i_2}^0$, вершина $\mathcal{R}(P)$ и $\gamma_\beta(x)$ отвечающий ей коэффициент. Представим по формуле (2.1) и по векторам μ и $\bar{\mu}$ многочлены $P(x^j, \xi)$, $j = 1, 2$ в виде

$$P(x^j, \xi) = \sum_{j=0} P_j(x^j, \xi).$$

Тогда из выпуклости многогранника $\mathcal{R}$ и его граней и из μ - (соответственно $\bar{\mu}$ -) однородности многочлена $P_0(x^j, \xi) = P^{i_1, k_1}(x^j, \xi)$, (соответственно $P^{i_2, 0}(x^j, \xi) = \gamma_\beta(x^j)(\xi)^\beta$) получим на последовательности $\{\xi^s\}$ при некоторых положительных σ_1 и σ_2

$$\begin{aligned} P(x^j, \xi^s) &= \rho_s^{\kappa_1^s d_0} P^{i_1, k_1}(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s} \bar{\mu}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_0}) + \rho_s^{\kappa_1^s d_1} P_1(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s} \bar{\mu}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_1}) = \\ (3.8) \quad &= \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\bar{\mu}, \beta)} \gamma_\beta(x^j) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\bar{\mu}, \beta)}) + \rho_s^{\kappa_1^s d_1} P_1(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s} \bar{\mu}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_1}). \end{aligned}$$

Так как $\beta = \mathcal{R}_{i_2}^0$, главная вершина $\mathcal{R}$, то по лемме 2.1 $\gamma_\beta(x^2) \neq 0$. С другой стороны, так как $\kappa_1^s \rightarrow 1$, $\kappa_2^s = o(\kappa_1^s)$ при $s \rightarrow \infty$ и $d_0 > d_1$, то из (3.8) следует существование положительных постоянных C_1 и C_2 таких, что для достаточно больших s

$$|P(x^1, \xi^s)| \leq C_1 |\gamma_\beta(x^1)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\bar{\mu}, \beta)}, \quad |P(x^2, \xi^s)| \geq C_2 |\gamma_\beta(x^2)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\bar{\mu}, \beta)},$$

что противоречит (3.7).

Если $d_0 = 0$, то противоречие получается аналогично соответствующему случаю теоремы 3.1 работы [7].

В случае б) $\eta^s = \rho_s^{\kappa_2^s} \bar{\mu} \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$ для некоторой $\eta \in R^{2,0}$. Рассмотрим два подслучая: б.1) $P^{i_1, k_1}(x^2, \eta) \neq 0$ и б.2) $P^{i_1, k_1}(x^2, \eta) = 0$.

В случае б. 1) $|P^{i_1, k_1}(x^2, \eta^s)| > 0$ для достаточно больших s , поэтому, для таких s , как и выше, из (3.8) имеем с некоторыми положительными постоянными C_3 и C_4

$$|P(x^1, \xi^s)| \leq C_3 |P^{i_1, k_1}(x^1, \eta)| \rho_s^{\kappa_s^{i_1 d_0}}; \quad |P(x^2, \xi^s)| \geq C_4 |P^{i_1, k_1}(x^2, \eta)| \rho_s^{\kappa_s^{i_1 d_0}},$$

что противоречит (3.7).

В случае б. 2) грань $\mathcal{R}_{i_1}^{k_1}$, является вырожденной, следовательно совпадает с одномерной гранью Γ и $k_1 = 1$. Так как $P(x, \xi) \in I_2(\Omega)$, то по лемме 3.1 работы [5] (см. также [14]) $P^{i_1, 1}(x^2, \eta^s) \geq 0$ и $P_1(x^2, \eta^s) > 0$ для достаточно больших s , при этом $P^{i_1, 1}(x^j, \eta^s)$ ($j = 1, 2$) представляются в виде (2.11):

$$(3.9) \quad P^{i_1, 1}(x^j, \eta^s) = q_0(x^j, \eta^s) p_0(\eta^s), \quad j = 1, 2.$$

Так как $q_0(x^j, \xi)$ непрерывная по $\xi \in R^{2,0}$ функция и $q_0(x^j, \eta) \neq 0$, то существуют постоянные $C_j = C_{x^j} > 0$ ($j = 1, 2$) такие, что для достаточно больших s

$$(3.10) \quad C_5 \leq |q_0(x^j, \eta^s)| \leq C_6, \quad j = 1, 2.$$

Тогда из (3.8) - (3.10) для достаточно больших s имеем с некоторой постоянной $C_7 = C_7(x^1, x^2) > 0$

$$|P(x^1, \xi^s)| = |q_0(x^1, \eta^s) p_0(\eta^s) \rho_s^{\kappa_s^{i_1 d_0}} + P_1(x^1, \eta^s) \rho_s^{\kappa_s^{i_1 d_1}} + o(\rho_s^{\kappa_s^{i_1 d_1}})| \leq C_7 |P(x^2, \xi^s)|,$$

что противоречит (3.7). Теорема 3.2 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Незначительным изменением доказательства можно убедиться в том, что теорема 3.2 остается в силе и тогда, когда $l(\eta) > 1$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$, т.е. $P_i(x, \eta) = 0$ $i = 0, 1, \dots, l-1$, если, например, для каждой такой точки η существует окрестность $U(\eta)$ такая, что $P_i(x, \xi) \geq 0$ для всех $\xi \in U(\eta)$, $x \in \Omega$ и $i = 0, 1, \dots, l-1$.

Теорема 3.3. Пусть двумерный многочлен $P(x, \xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2 и, следовательно, имеет постоянную мощность в Ω . Многочлен $P(x, \xi)$ является формально почти гипоеллиптическим в Ω тогда и только тогда, когда

- 1) многогранник $\mathcal{R}(P) \equiv \mathcal{R}(x, P)$ правильный
- 2) $d_0(\lambda) - \Delta(x, \eta, \lambda, P_0) \leq d_1$ для всех $x \in \Omega$ и для всех $\eta \in \Sigma(x, \Gamma)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из леммы 2.1 работы [7], необходимость условия 2) следует из леммы 2.4 настоящей работы. Достаточность следует из теоремы 3.1 работы [7], если учесть, что из постоянства мощности многочлена $P(x, \xi)$ следует, что множество $\Sigma(x, \Gamma)$ и числа $\Delta(x, \eta, \lambda, P_0)$, $l(x, \eta, \lambda, \Gamma)$ не зависят от точки $x \in \Omega$, при этом в данном случае вектор λ определяется однозначно и $l(\eta, \Gamma) = 1$ для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$. $\square$

Abstract. In this paper we study properties of differential operators (polynomials) with variable coefficients of constant power or of constant strength in the sense of L. Hörmander. Necessary conditions for constancy of the strength and power of polynomials of many variables are obtained. For polynomials of two variables with real coefficients necessary and sufficient conditions for constancy of the power and for formally almost hypoellipticity, in terms of zeros and their multiplicities of the corresponding generalized-homogeneous subpolynomials of underlying polynomials are also obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 2*, Springer - Verlag (1983).
- [2] B. Malgrange, "Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques", *Bull. Soc. Math. France*, **58**, 283 – 306 (1957).
- [3] L. Hörmander, "On interior regularity of the solutions of partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 197 – 218 (1958).
- [4] J. Peetre, "A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators", *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**, 737 – 747 (1961).
- [5] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", *Труды МИАН СССР*, **91**, 59 – 80 (1967).
- [6] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", *ДАН СССР*, **146**, no. 4, 767 – 769 (1968).
- [7] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", *Изв. НАН Армении, серия Мат.*, **46**, no. 6, 11 – 30 (2011).
- [8] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов", *Изв. АН Арм. ССР, серия Мат.*, **9**, no. 3, 189 – 211 (1974).
- [9] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", *Doklady Ross. Acad. Nauk.*, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
- [10] Г. Г. Казарян, "О гипоэллиптических полиномах", *ДАН СССР*, **214**, no. 5, 1016 – 1019 (1974).
- [11] Г. Г. Казарян, В. П. Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", *Изв. НАН Армении, серия Мат.*, **41**, no. 6, 39 – 56 (2006).
- [12] Г. Г. Казарян, "О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторов постоянной силы", *Труды МИАН СССР*, **131**, 94 – 118 (1974).
- [13] Г. Г. Казарян, "Об оценках L_p -норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов", *Дифф. Уравнения*, **5**, no. 5, 911 – 921.
- [14] H. G. Ghazaryan, "Addition of lower order terms preserving almost hypoellipticity of polynomials", *Eurasian Mathematical Journal*, **4**, no. 3, 32 – 52 (2013).

Поступила 9 июня 2014

VARIATIONAL APPROACH TO SOLUTIONS FOR A CLASS OF KIRCHHOFF TYPE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITHOUT COMPACTNESS CONDITIONS

N. NYAMORADI, M. R. HAMIDI

Razi University, Kermanshah, Iran

E-mail: *nyamoradi@razi.ac.ir; neamat80@yahoo.com.*

Abstract. In this paper by using variational methods, Lax-Milgram theorem and some iterative techniques, we prove the existence of at least one nontrivial solution of the Kirchhoff type fractional differential equations without assuming compactness conditions.

MSC2010 numbers: 34A08; 35A15; 35B38.

Keywords: Kirchhoff type fractional differential equation; iterative techniques; critical point theory.

1. INTRODUCTION

The main purpose of this paper is to establish the existence of at least one nontrivial solution of the following Kirchhoff type fractional differential equation:

$$\left(a_1 + \mu m \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt \right) \right) ({}_t D_\infty^\alpha ({}_{-\infty} D_t^\alpha u(t)) + b(t)u(t)) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in H^\alpha(\mathbb{R}),$$

where $\mu \geq 0$, $a_1 > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, ${}_t D_\infty^\alpha$ and ${}_{-\infty} D_t^\alpha$ are the right and left inverse operators of the corresponding Liouville-Weyl fractional integrals of order α , respectively, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf_{t \in \mathbb{R}} b(t) > 0$, and $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ are continuous functions.

In the first part of the paper we establish the existence of at least one nontrivial solution of the following Kirchhoff type fractional differential problem by using Lax-Milgram theorem and some iterative techniques:

$$(1.1) \quad \left(a_1 + \mu m \left(\int_{\Omega} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + |u(t)|^2 \right) dt \right) \right) ({}_t D_\infty^\alpha ({}_{-\infty} D_t^\alpha u(t)) + u(t)) = f(t, u(t)), \quad t \in \Omega, \quad u \in H_0^\alpha(\Omega),$$

where Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ are continuous functions. Here $b(t) \equiv 1$, $a_1 > 0$ is a parameter and μ is a constant.

In the second part of the paper we prove the existence of at least one nontrivial solution of the following Kirchhoff type fractional differential problem by using variational methods:

$$(1.2) \quad \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} (|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2) dt \right) ({}_tD_\infty^\alpha ({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)) + b(t)u(t)) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in X^\alpha,$$

where $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf_{t \in \mathbb{R}} b(t) > 0$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function and $a_1, a_2 > 0$ are constants. Here $\mu \equiv 1$ and $m(t) \equiv a_2$ is constant.

In recent years much attention has been paid to the investigation of fractional differential equations. This is due to both the intensive development of the theory of fractional calculus itself and the applications of such constructions in various fields of science, such as physics, chemistry, biology, economics, control theory, signal and image processing, biophysics, blood flow phenomena, aerodynamics, fitting of experimental data, etc. (see [1] – [7] and references therein).

It should be noted that the critical point theory and variational methods have also turned out to be very effective tools in establishing the existence of solutions for integer order differential equations. The idea behind this is to try to find solutions for a given boundary value problem by looking for critical points of a suitable energy functional defined on an appropriate function space. It is worthwhile to note that the critical point theory recently becomes a powerful tool in studying the existence of solutions for differential equations with variational structures. For details on the topic we refer the reader to the books by Mawhin and Willem [8], Rabinowitz [9] and references therein.

To proceed, we first introduce the following conditions:

(I₀) $L(t)$ is a positive definite symmetric matrix for all $t \in \mathbb{R}$, and there exists $l \in C(\mathbb{R}, (0, +\infty))$ such that $l(t) \rightarrow +\infty$ as $|t| \rightarrow +\infty$ and

$$(L(t)u, u) \geq l(t)|u|^2 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

(FHS)₁ $W(t, 0)$ for all $t \in \mathbb{R}$, $W(t, u) \geq a(t)|u|^\vartheta$ and $|\nabla W(t, u)| \leq b(t)|u|^{\vartheta-1}$ for all $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, where $1 < \vartheta < 2$ is a constant, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a bounded continuous function, and $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a continuous function such that $b \in L^{\frac{2}{2-\vartheta}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(FHS)₂ There is a constant $1 < \sigma \leq \vartheta < 2$ such that

$$(\nabla W(t, u), u) \leq \sigma W(t, u), \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Recently Jiao and Zhou [10], have studied the following fractional boundary value problem

$$\begin{cases} {}_t D_T^\alpha ({}_0 D_t^\alpha u(t)) = \nabla F(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

and used the critical point theory to prove the existence of solutions to this problem.

In [11], Torres has applied the mountain pass theorem to establish the existence of solutions for the following fractional Hamiltonian system:

$$(1.3) \quad ({}_t D_\infty^\alpha (-\infty D_t^\alpha u(t)) + L(t)u(t)) = \nabla W(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in H^\alpha(\mathbb{R}).$$

Later on, by using the genus properties of the critical point theory, Zhang and Yuan [13] have obtained infinitely many solutions for the problem (1.3).

Also, by using the mountain pass theorem and comparison arguments, Torres [12] has established the existence of at least one nontrivial solution for the problem (1.3) in the case where $L \equiv 1$ and $\nabla W(t, u(t)) = f(t, u)$ with $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

In this paper, by using the Lax-Milgram theorem, some iterative techniques and variational methods, we investigate the question of existence of at least one nontrivial solution for problems (1.1) and (1.2) without assuming, similar to (FHS)₂, compactness condition such as $f(t, x)x \leq \sigma F(t, x)$ for all $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

The paper is organized as follows. In Section 2, we give the necessary definitions and state some preliminary results, which are needed in the proofs of the main results. Sections 3 and 4 are devoted to our main results on existence of at least one nontrivial solution for problems (1.1) and (1.2).

2. PRELIMINARIES

In this section, we give necessary definitions and state some preliminary results, which are needed in the proofs of the main results of the paper.

Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be a Banach space, $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ be its topological dual, and $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ be a functional defined on X . We say that φ satisfies the Palais-Smale condition if any sequence $(u_n) \in X$ for which $\varphi(u_n)$ is bounded and $\varphi'(u_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ possesses a convergent subsequence.

For the convenience of the reader, we also present here the necessary definitions from the theory of fractional calculus (see [3]).

Definition 2.1. The left and right Liouville-Weyl fractional integrals of order $0 < \alpha < 1$ on the whole axis $\mathbb{R}$ are defined by

$$(2.1) \quad {}_{-\infty}I_x^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{\alpha-1} \phi(\xi) d\xi,$$

$$(2.2) \quad {}_xI_\infty^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (\xi - x)^{\alpha-1} \phi(\xi) d\xi,$$

respectively, where $x \in \mathbb{R}$.

The left and right Liouville-Weyl fractional derivatives of order $0 < \alpha < 1$ on the whole axis $\mathbb{R}$ are defined by

$$(2.3) \quad {}_{-\infty}D_x^\alpha \phi(x) = \frac{d}{dx} {}_{-\infty}I_x^{1-\alpha} \phi(x),$$

$$(2.4) \quad {}_xD_\infty^\alpha \phi(x) = -\frac{d}{dx} {}_xI_\infty^{1-\alpha} \phi(x),$$

respectively, where $x \in \mathbb{R}$.

Formulas (2.3) and (2.4) can also be written in the following alternative forms:

$$(2.5) \quad {}_{-\infty}D_x^\alpha \phi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi,$$

$$(2.6) \quad {}_xD_\infty^\alpha \phi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi.$$

Also, we define the Fourier transform $\mathcal{F}(u)(\xi)$ of $u(x)$ by

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

Recall (see [11]) the semi-norm

$$\|u\|_{I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})} = \|{}_{-\infty}D_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \alpha > 0,$$

and the norm

$$(2.7) \quad \|u\|_{I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u\|_{I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha > 0,$$

and denote by $I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})$ the completion of $C_0^\infty(\mathbb{R})$ with respect to the norm $\|\cdot\|_{I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})}$.

Let Ω be a bounded open interval of $\mathbb{R}$, and let $I_{-\infty}^\alpha(\Omega)$ be the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm

$$\|u\|_{I_{-\infty}^\alpha(\Omega)} := \left(\|{}_{-\infty}D_x^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Next, for $0 < \alpha < 1$, we give a relationship between the classical fractional Sobolev space $H^\alpha(\mathbb{R})$ and the space $I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})$, where $H^\alpha(\mathbb{R})$ is defined by

$$H^\alpha(\mathbb{R}) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\alpha}$$

with the norm

$$(2.8) \quad \|u\|_\alpha = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + |u|_\alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

and the semi-norm

$$|u|_\alpha = \| |\xi|^\alpha \mathcal{F}(u) \|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Let $H_0^\alpha(\Omega)$ denote the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm (2.8).

We note the spaces $H^\alpha(\mathbb{R})$ and $I_{-\infty}^\alpha(\mathbb{R})$ coincide and have equivalent norms, and so are the spaces $H_0^\alpha(\Omega)$ and $I_{-\infty}^\alpha(\Omega)$ (see [11]). Therefore, there exists a positive constant $C_{-\infty}$ such that

$$(2.9) \quad \|u\|_\alpha \leq C_{-\infty} \|u\|_{I_{-\infty}^\alpha(\Omega)}.$$

Define

$$H^\alpha(\mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \mid |\xi|^\alpha \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}) \}.$$

To state our results we will need the following assumption.

(L) $b : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ is continuous and $b(t) \rightarrow +\infty$ as $|t| \rightarrow \infty$.

Define the space

$$X^\alpha = \left\{ u \in H^\alpha(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt < \infty \right\},$$

and observe that X^α is a reflexive and separable Hilbert space with the inner product

$$(2.10) \quad \langle u, v \rangle_{X^\alpha} = \int_{\mathbb{R}} \left({}_{-\infty} D_t^\alpha u(t) \cdot {}_{-\infty} D_t^\alpha v(t) + b(t)u(t)v(t) \right) dt,$$

and the corresponding norm

$$\|u\|_{X^\alpha}^2 = \langle u, u \rangle_{X^\alpha}.$$

The lemmas that follows can be proved by using the arguments similar to that of Lemmas 2.1 and 2.2 and Theorem 2.1 from [11].

Lemma 2.1. *Suppose that $b(t)$ satisfies condition (L). Then the space X^α is continuously embedded into the space $H^\alpha(\mathbb{R})$.*

Lemma 2.2. *Let $\alpha > \frac{1}{2}$, then $H^\alpha(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ and there is a positive constant $C = C_\alpha$ such that*

$$(2.11) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \leq C \|u\|_\alpha.$$

Remark 2.1. The result of Lemma 2.2 remains true if we replace $H^\alpha(\mathbb{R})$ by $H_0^\alpha(\Omega)$. Also, by Lemma 2.1 there is a positive constant D_α such that

$$(2.12) \quad \|u\|_\infty \leq D_\alpha \|u\|_{X^\alpha}.$$

Remark 2.2. It follows from Lemma 2.2 that if $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$ with $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, then $u \in L^q(\mathbb{R})$ for all $q \in [2, \infty)$, because

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx \leq \|u\|_\infty^{q-2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Remark 2.3. From Remark 2.2 and Lemma 2.1, it can easily be deduced that the imbedding of X^α into $L^q(\mathbb{R})$ is also continuous for $q \in [2, \infty)$. Hence, there exists a positive constant C_q such that

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C_q \|u\|_{X^\alpha}.$$

Lemma 2.3. Suppose that (L) holds. Then the imbedding of X^α into $L^2(\mathbb{R})$ is continuous and compact.

Lemma 2.4. Let Ω be a bounded open interval of $\mathbb{R}$. Then the imbedding of $H_0^\alpha(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$ is continuous and compact for any $q \in [2, \infty)$, and we have

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq d_q \|u\|_\alpha,$$

for some constant $d_q > 0$.

Proof. Using arguments similar to the proof of Lemma 2.2 from [11], it can be shown that Sobolev's theorem (see [14]) implies that $H_0^\alpha(\Omega)$ is compactly embedded into $L^2(\bar{\Omega})$ and $L^2(\bar{\Omega})$ is continuously embedded into $L^q(\Omega)$. Hence the embedding of $H_0^\alpha(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$ is compact. $\square$

Remark 2.4. It follows from Lemma 2.4 and (2.9) that for $2 \leq q < \infty$ there exists a constant $l_q > 0$ such that $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq l_q \|u\|_{L^\infty_\omega(\Omega)}$.

3. EXISTENCE OF A SOLUTION FOR THE PROBLEM (1.1)

In this section, by using some iterative techniques, we prove the existence of at least one nontrivial solution for problem (1.1).

Let Ω be a bounded open interval of $\mathbb{R}$. Recall that the spaces $H_0^\alpha(\Omega)$ and $I^\alpha_\infty(\Omega)$ coincide and have equivalent norms. Let $H_0^\alpha(\Omega)$ be equipped with the equivalent norm

$\|\cdot\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}$. For given $w, w_0 \in H^\alpha_0(\Omega)$ define

$$B_w(u, v) = (a_1 + \mu m(\|w\|_\alpha^2)) \int_\Omega \left(-\infty D_t^\alpha u(t) - \infty D_t^\alpha v(t) + u(t)v(t) \right) dt,$$

$$F_{w_0}(v) = \int_\Omega f(t, w_0(t))v(t)dt, \quad I_{w, w_0}(u)v = B_w(u, v) - F_{w_0}(v).$$

Assume that the function $f(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, satisfies the following conditions:

(H1) $f(t, s)$ is Lipschitz with respect to the second argument, and there exist constants $c > 0$ and $p \in (2, \infty)$, such that $f(t, s) \leq c(1 + |s|^{p-1})$ for all $t, s \in \mathbb{R}$.

(H2) $0 < \inf_{(t,s) \in \Omega \times \mathbb{R}} f(t, s) < \infty$.

The main result of this section is the following theorem.

Theorem 3.1. *Assume that the conditions (H1) and (H2) hold, then for any bounded positive continuous function m and a number $a_1 \in [\frac{c}{\min(\frac{1}{2d}, \frac{1}{2|\Omega|})}, \infty)$, where $d = (l_{2p-2})^{p-1} \in \mathbb{R}^+$ and the constant l_{2p-2} is as in Remark 2.4 with $q = 2p - 2$, the problem (1.1) has at least one nontrivial solution.*

To prove theorem 3.1 we first establish the following lemma.

Lemma 3.1. *Under the assumptions of Theorem 3.1, for any $w, w_0 \in H^\alpha_0(\Omega)$ there exists a unique $\bar{u} \in H^\alpha_0(\Omega)$ satisfying $I_{w, w_0}(\bar{u})(v) = 0$ for any $v \in H^\alpha_0(\Omega)$, and*

$$(3.1) \quad \|\bar{u}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq \frac{c}{a_1} (|\Omega| + d \|w_0\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^{p-1}),$$

$$(3.2) \quad \|\bar{u}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \geq \frac{c}{(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2))},$$

where $c, d \in \mathbb{R}^+$ are positive constants.

Proof. By using Hölder and Minkowski inequalities, one can write

$$B_w(u, v) = \left(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2) \right) \int_\Omega \left(-\infty D_t^\alpha u(t) - \infty D_t^\alpha v(t) + u(t)v(t) \right) dt$$

$$\leq \left(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2) \right) \left(\|-\infty D_t^\alpha u(t)\|_{L^2(\Omega)} (\|-\infty D_t^\alpha v(t)\|_{L^2(\Omega)}) + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq 2 \left(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2) \right) \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \|v\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} =$$

$$(3.3) \quad = \zeta_0 \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \|v\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)},$$

where $0 < \zeta_0 := 2(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2)) < \infty$, and

$$(3.4) \quad B_w(u, u) \geq (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2)) \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2 \geq a_1 \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^2.$$

Also, by (H1), the Hölder inequality and Remark 2.4, we get

$$\begin{aligned}
 F_{w_0}(v) &= \int_{\Omega} (f(t, w_0(t))v(t)) dt \leq \|f(t, w_0)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq c(|\Omega| + \|w_0^{p-1}\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(|\Omega| + \|w_0\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{(p-1)}) \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 (3.5) \quad &\leq c(|\Omega| + d\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{(p-1)}) \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

So, F_{w_0} is continuous on $H_0^\alpha(\Omega)$. Hence the Riesz representation theorem can be applied to conclude that there exists a unique element $g \in H_0^\alpha(\Omega)$ satisfying $F_{w_0}(v) = (g, v)$ for any $v \in H_0^\alpha(\Omega)$ and $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} = \|F_{w_0}\|_{(H_0^\alpha(\Omega))^*}$, where $(\cdot, \cdot)$ is the inner product of Hilbert space $H_0^\alpha(\Omega)$. Furthermore, by (3.3) – (3.5), the bilinear mapping B_w satisfies the hypotheses of the Lax-Milgram theorem, implying that there is an invertible linear operator A satisfying $\|A\| \leq 2(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2))$ and $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{a_1}$, such that $B_w(u, v) = (Au, v)$ for any $u, v \in H_0^\alpha(\Omega)$.

Thus, there exists a unique $\bar{u} \in H_0^\alpha(\Omega)$, such that $A\bar{u} = g$. Then we can conclude $B_w(\bar{u}, v) = (A\bar{u}, v) = (g, v) = F_{w_0}(v)$, implying $I_{w, w_0}(\bar{u})(v) = 0$ for any $v \in H_0^\alpha(\Omega)$.

Now proceed to prove the inequations (3.1) and (3.2). To this end, first observe that by (3.5) we have

$$\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|F_{w_0}\|_{(H_0^\alpha(\Omega))^*} \leq c(|\Omega| + d\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{(p-1)}).$$

Let $v \in H_0^\alpha(\Omega)$ be such that $v \geq 0$, $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ and $\|v\|_{L^1(\Omega)} > 0$. For example, such a function v can be constructed as follows. Assuming that $\Omega = (T_1, T_2)$ with $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, we define $T_0 = \frac{T_1+T_2}{2}$, $a = \frac{T_2-T_1}{4}$, and

$$v_0 = \begin{cases} 0, & |x - T_0| \geq a, \\ e^{\frac{1}{c \cdot (x-T_0)^2 - a^2}}, & |x - T_0| < a. \end{cases}$$

and set

$$v = \frac{v_0}{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

It is easy to see that the constructed function v satisfies the above conditions, that is, $v \in H_0^\alpha(\Omega)$, $v \geq 0$, $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ and $\|v\|_{L^1(\Omega)} > 0$.

Next, in view of (H2) we have

$$\|g\|_{L^\infty(\Omega)} = \|F_{w_0}\|_{(H_0^\alpha(\Omega))^*} \geq |F_{w_0}(v)| \geq \inf_{(t,s) \in (t) \times \mathbb{R}} f(t, s) \|v\|_{L^1(\Omega)} > 0.$$

Taking $c = \frac{1}{2} \left(\inf_{(t,s) \in \Omega \times \mathbb{R}} f(t, s) \|v\|_{L^1(\Omega)} \right)$ and using $A\bar{u} = g$, we can conclude that

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \frac{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|A\|} \geq \frac{c}{(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2))},$$

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \|A^{-1}\| \leq \frac{c(|\Omega| + d\|w_0\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^{p-1})}{a_1}.$$

This completes the proof of Lemma 3.1.

Proof of Theorem 3.1. First we take $w_0 \in H_0^\alpha(\Omega)$ to satisfy $\|w_0\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$. Then by Lemma 3.1, the equation $B_w(u, v) - F_{w_0}(v) = I_{w, w_0}(u)(v) = 0$ has a solution u satisfying

$$(3.6) \quad \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq \frac{c}{a_1}(2|\Omega|).$$

Thus, taking into account that $a_1 \in [\frac{c}{q \min(\frac{1}{qd}, \frac{1}{2|\Omega|})}, \infty)$, we can conclude that

$$(3.7) \quad \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)}^{p-1} \leq \|u\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq \frac{|\Omega|}{d}.$$

In view of the above discussion, if we take $w_0 = u_{0,w}$ such that $\|u_{0,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$, then we can conclude that the equation $B_w(u, v) = F_{u_{0,w}}(v)$ has a nontrivial solution $u_{1,w}$ satisfying $\|u_{1,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$.

By the same arguments, the equation $B_w(u, v) = F_{u_{1,w}}(v)$ has a nontrivial solution $u_{2,w}$ satisfying $\|u_{2,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$. Hence, by induction, we can obtain a sequence $\{u_{n,w}\}$ with $\|u_{n,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$, $n = 1, 2, \dots$. Also, taking $\Delta = \max\{m(t) \mid 0 \leq t \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{2}{p-1}}\}$, from (3.2) we can infer that $\|u_{n,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$, provided that $\|w\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$. So, by the definition of sequence $\{u_{n,w}\}$, we have

$$(3.8) \quad I_{w, u_{n-1,w}}(u_{n,w})v = 0, \quad \forall v \in H_0^\alpha(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Below we will show that the sequence $\{u_{n,w}\}$ converges to some $u_w \in H_0^\alpha(\Omega)$. To this end, observe that in view of $\|u_{n,w}\|_{L^\infty_\alpha(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$ for all n and reflexivity of $H_0^\alpha(\Omega)$, going to a subsequence if necessary, we may suppose that $u_{n,w} \rightharpoonup u_w$ as $n \rightarrow \infty$.

Next, by relations (3.3) and (3.5) we have $I_{w, u_w}(u_w) \in (H_0^\alpha(\Omega))^*$, and hence $I_{w, u_w}(u_w)(u_{n,w} - u_w) \rightarrow 0$. From boundedness of sequence $\{u_{n,w}\}$ and (H1), we can infer that $f(t, u_{n,w})$ is bounded in $L^2(\Omega)$. From Lemma 2.4 one has $u_{n,w} \rightarrow u_w$ in

$L^2(\Omega)$, hence using Hölder inequality we can write

$$\begin{aligned}
 & I_{w, u_{n-1, w}}(u_w)(u_{n, w} - u_w) \\
 = & (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \int_{\Omega} \left(-\infty D_t^\alpha u_w - \infty D_t^\alpha (u_{n, w} - u_w) + u_w(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 & - \int_{\Omega} \left(f(t, u_{n-1, w})(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 = & (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \int_{\Omega} \left(-\infty D_t^\alpha u_w - \infty D_t^\alpha (u_{n, w} - u_w) + u_w(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 & - \int_{\Omega} \left(f(t, u_w)(u_{n, w} - u_w) \right) dt + \int_{\Omega} \left(f(t, u_w)(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 & - \int_{\Omega} \left(f(t, u_{n-1, w})(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 = & I_{w, u_w}(u_w)(u_{n, w} - u_w) + \int_{\Omega} \left(f(t, u_w)(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 & - \int_{\Omega} \left(f(t, u_{n-1, w})(u_{n, w} - u_w) \right) dt \\
 \leq & |I_{w, u_w}(u_w)(u_{n, w} - u_w)| + \|f(t, u_w)\|_{L^2(\Omega)} \|u_{n, w} - u_w\|_{L^2(\Omega)} \\
 (3.9) \quad & + \|f(t, u_{n-1, w})\|_{L^2(\Omega)} \|u_{n, w} - u_w\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \|u_{n, w} - u_w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\
 = & \left(I_{w, u_{n-1, w}}(u_{n, w}) - I_{w, u_{n-1, w}}(u_w) \right) (u_{n, w} - u_w) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Thus, $u_{n, w} \rightarrow u_w$ strongly in $H_0^\alpha(\Omega)$. Therefore, $I_{w, u_{n-1, w}}(u_{n, w})v = 0$ for any $v \in H_0^\alpha(\Omega)$, and since $f(t, s)$ is Lipschitz with respect to the second argument, we can write

$$\begin{aligned}
 & \left| I_{w, u_w}(u_w)v \right| = \left| I_{w, u_w}(u_w)v - I_{w, u_{n-1, w}}(u_{n, w})v \right| \\
 \leq & \left| (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \int_{\Omega} \left(-\infty D_t^\alpha (u_w - u_{n, w}) - \infty D_t^\alpha v + (u_w - u_{n, w})v \right) dt \right| \\
 & + \left| \int_{\Omega} \left(f(t, u_w)v \right) dt - \int_{\Omega} \left(f(t, u_{n-1, w})v \right) dt \right| \\
 \leq & (a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \left(\|-\infty D_t^\alpha (u_w - u_{n, w})\|_{L^2(\Omega)} \|-\infty D_t^\alpha v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 & \left. + \|u_w - u_{n, w}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left| \int_{\Omega} (u_w - u_{n-1, w})v dt \right| \\
 \leq & 2(a_1 + \mu m(\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2)) \left(\|u_w - u_{n, w}\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
 (3.10) \quad & + \|u_w - u_{n-1, w}\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

This implies that the equation $I_{w,u}(u)(v) = 0$ has a nontrivial solution u_n satisfying $\|u_n\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$ and $\|u_n\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$, provided that $\|w\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$.

In the case where $w = 0$, the above arguments can be used to conclude that the equation $I_{0,u}(u)(v) = 0$ has a nontrivial solution, which we denote by u_1 , such that $\|u_1\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$ and $\|u_1\|_\alpha \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$. Let $w = u_1$, then the equation $I_{u_1,u}(u)(v) = 0$ has a nontrivial solution u_2 , such that $\|u_2\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$ and $\|u_2\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$. Hence, applying induction, we can get a sequence $\{u_n\}$ with $\|u_n\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \leq (\frac{|\Omega|}{d})^{\frac{1}{p-1}}$ and $\|u_n\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$ such that $I_{u_{n-1},u_n}(u_n)v = 0$ for any $v \in H_0^\alpha(\Omega)$.

From reflexiveness of $H_0^\alpha(\Omega)$ and boundedness of $\{u_n\}$, we can infer that $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^\alpha(\Omega)$. Also, by (3.3) and (3.5), we have $B_u(u, \cdot), F_u(\cdot) \in (H_0^\alpha(\Omega))^*$. So we get

$$\begin{aligned}
 & |I_{u_{n-1},u}(u)(u_n - u)| \\
 & \leq \left| (a_1 + \mu m(\|u_{n-1}\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2)) \int_\Omega \left(-\infty D_t^\alpha u - \infty D_t^\alpha (u_n - u) + u(u_n - u) \right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \int_\Omega \left(f(t, u)(u_n - u) \right) dt \right| \\
 & = \left| \frac{(a_1 + \mu m(\|u_{n-1}\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2))}{(a_1 + \mu m(\|u\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2))} \right| |B_u(u, u_n - u)| + |F_u(u_n - u)| \\
 (3.11) \quad & \leq \left| \frac{(a_1 + \mu\Delta)}{(a_1 + \mu m(\|u\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2))} \right| |B_u(u, u_n - u)| + |F_u(u_n - u)| \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Since f is Lipschitz with respect to the second argument and $u_n \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$, in view of (3.11), we obtain

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + \mu m(\|u_{n-1}\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2)) \|u_n - u\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2 \\
 (3.12) \quad & = \left(I_{u_{n-1},u_n}(u_n) - I_{u_{n-1},u}(u) \right) (u_n - u) \\
 & + \int_\Omega \left(f(t, u_n) - f(t, u) \right) (u_n - u) dt \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

implying that $u_n \rightarrow u$ in $H_0^\alpha(\Omega)$. From equality

$$(a_1 + \mu m(\|u_{n-1}\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2)) \int_\Omega \left(-\infty D_t^\alpha u_n - \infty D_t^\alpha v + u_n v \right) dx = \int_\Omega \left(f(t, u_n) v \right) dt,$$

$v \in H_0^\alpha(\Omega)$, and $u_n \rightarrow u$ in $H_0^\alpha(\Omega)$, similar to (3.10), we can conclude that for any $v \in H_0^\alpha(\Omega)$,

$$(a_1 + \mu m(\|u\|_{L^\infty_\infty(\Omega)}^2)) \int_\Omega \left(-\infty D_t^\alpha u - \infty D_t^\alpha v + uv \right) dt = \int_\Omega \left(f(t, u) v \right) dt.$$

Thus, u is a nontrivial solution of (1.1) satisfying $\|u\|_{L^\infty_\infty(\Omega)} \geq \frac{c}{a_1 + \mu\Delta}$. This completes the proof of Theorem 3.1. $\square$

4. EXISTENCE OF A SOLUTION FOR THE PROBLEM (1.2)

The functional $J : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ corresponding to problem (1.2) is defined by

$$(4.1) \quad J(u) = \frac{a_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt + \frac{a_2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt \right)^2 - \int_{\mathbb{R}} F(t, u(t)) dt,$$

where $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$, and

$$(4.2) \quad \Phi(u) = \frac{a_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt + \frac{a_2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|_{-\infty} D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt \right)^2,$$

$$(4.3) \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}} F(t, u(t)) dt.$$

We assume that f satisfies the following conditions:

(F1) $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ and there exist constants $1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < 2$ and functions $\theta_i \in L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) such that

$$|f(t, x)| \leq \sum_{i=1}^m \theta_i(t) |x|^{\gamma_i-1}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

(F2) there exist an open interval $I \subset \mathbb{R}$ and constants $\delta > 0$, $\gamma_0 \in (1, 2)$ and $\eta > 0$ such that

$$F(t, x) \geq \eta |x|^{\gamma_0}, \quad \forall (t, x) \in I \times [-\delta, \delta].$$

Now, we are in position to state the main result of this section.

Theorem 4.1. *Let $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ and $b(t)$ satisfy assumption (L). Assume that (F1) and (F2) hold, then the problem (1.2) has at least one nontrivial solution in X^α .*

Note that in Theorem 4.1 the assumption (F2) can be replaced by the following condition:

(F3) there exist an open interval $I \subset \mathbb{R}$ and constants $\delta > 0$, $\gamma_0 \in (1, 2)$ and $\eta > 0$ such that

$$xf(t, x) \geq \eta |x|^{\gamma_0}, \quad \forall (t, x) \in I \times [-\delta, \delta].$$

Hence, we have the following corollary.

Corollary 4.1. *Let α and $b(t)$ be as in Theorem 4.1. Assume that (F1) and (F3) hold, then the problem (1.2) has at least one nontrivial solution in X^α .*

We first state two lemmas.

Lemma 4.1. *Assume that conditions (L) and (F1) hold. Then the functional $J : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ defined by (4.1) is well defined, belongs to the class $C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$ and satisfies*

$$\begin{aligned}
 J'(u)v &= \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt \right) \\
 &\times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u(t) \cdot -\infty D_t^\alpha v(t) + b(t)u(t)v(t) \right) dt \\
 &- \int_{\mathbb{R}} f(t, u(t))v(t)dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Furthermore, the critical points of J in X^α are the solutions of the problem (1.2).

Proof. We first show that the functional $J : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ defined by (4.1) is well defined on X^α . In view of (F1), the Hölder inequality and Remark 2.3, one can get

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |F(t, u(t))|dt &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i} \int_{\mathbb{R}} \theta_i(t) |u(t)|^{\gamma_i} dt \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i} \|\theta_i\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}} \|u\|_{L^2}^{\gamma_i} \leq \sum_{i=1}^m \frac{C_2^{\gamma_i}}{\gamma_i} \|\theta_i\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}} \|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i},
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

implying that $J : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ is well defined on X^α .

Next, we prove the equality (4.4). Rewrite J as follows: $J = \Phi - \Psi$. It is easy to check that $\Phi \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$ and

$$\begin{aligned}
 \Phi'(u)v &= \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2 \right) dt \right) \\
 &\times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u(t) \cdot -\infty D_t^\alpha v(t) + b(t)u(t)v(t) \right) dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Therefore, it remains to prove a similar equality for Ψ . To this end, for $u, v \in X^\alpha$ and any number $h \in (0, 1)$, we apply the Mean Value theorem to obtain

$$(4.7) \quad \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} [F(t, u(t) + hv(t)) - F(t, u(t))]dt = \int_{\mathbb{R}} f(t, u(t) + \varrho(t)hv(t))v(t)dt.$$

where $0 < \varrho(t) < 1$ for every $t \in \mathbb{R}$. Also, by (F1), the Hölder inequality and Remark 2.3, we have

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \max_{h \in (0,1)} |f(t, u(t) + \varrho(t)hv(t))v(t)| dt \\
 & \leq \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \theta_i(t) |u(t) + \varrho(t)hv(t)|^{\gamma_i-1} |v(t)| dt \\
 & \leq \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \theta_i(t) (|u(t)|^{\gamma_i-1} + |v(t)|^{\gamma_i-1}) |v(t)| dt \\
 & \leq \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_i^2(t) (|u(t)|^{\gamma_i-1} + |v(t)|^{\gamma_i-1})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} \left(\|u\|_{L^2}^{\gamma_i-1} + \|v\|_{L^2}^{\gamma_i-1} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 (4.8) \quad & \leq \sum_{i=1}^m C_2^{\gamma_i} \|\theta_i\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}} \left(\|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} + \|v\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} \right) \|v\|_{X^\alpha} < +\infty.
 \end{aligned}$$

Then by (4.7), (4.8) and Lebesgue dominated convergence theorem, we get

$$\begin{aligned}
 \Psi'(u)v &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(u + hv) - \Psi(u)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} [F(t, u(t) + hv(t)) - F(t, u(t))] dt \\
 (4.9) \quad &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t, u(t) + \varrho(t)hv(t))v(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t, u(t))v(t) dt.
 \end{aligned}$$

A combination of (4.6) and (4.9) shows that (4.4) holds. Furthermore, by standard arguments, it is easy to show that the critical points of J in X^α are the solutions of problem (1.2).

Now we prove that J' is continuous, that is, it belongs to the class $C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$. Clearly it is enough to show that Φ' is continuous. Since $\theta_i \in L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ ($i = 1, \dots, m$), for any $\varepsilon > 0$ there exists $T_\varepsilon > 0$ such that

$$(4.10) \quad \left(\int_{|t| > T_\varepsilon} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Let $u \rightarrow u_0$ in X^α , then in view of (F1), continuity of f , Remark 2.3 and (4.10), we can write

$$\begin{aligned}
 \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} |\Psi'(u)v - \Psi'(u_0)v| &= \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t, u(t)) - f(t, u_0(t)))v(t)dt \right| \\
 &\leq \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} \int_{|t| \leq T_\varepsilon} |(f(t, u(t)) - f(t, u_0(t)))v(t)| dt \\
 &\quad + \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} \sum_{i=1}^m \int_{|t| > T_\varepsilon} \theta_i(t) (|u(t)|^{\gamma_i-1} + |u_0(t)|^{\gamma_i-1}) |v(t)| dt \\
 &\leq \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} \left(\int_{|t| \leq T_\varepsilon} |f(t, u(t)) - f(t, u_0(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|t| \leq T_\varepsilon} |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sup_{\|v\|_{X^\alpha}=1} \sum_{i=1}^m \left(\int_{|t| > T_\varepsilon} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} \left(\|u\|_{L^2}^{\gamma_i-1} + \|u_0\|_{L^2}^{\gamma_i-1} \right) \left(\int_{|t| > T_\varepsilon} |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C_2 \left(\int_{|t| \leq T_\varepsilon} |f(t, u(t)) - f(t, u_0(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m C_2^{\gamma_i} \left(\int_{|t| > T_\varepsilon} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} \left(\|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} + \|u_0\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} \right) \\
 &\leq C_2\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^m C_2^{\gamma_i} \left(\|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} + \|u_0\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} \right),
 \end{aligned}$$

implying that $\Psi'(u)v - \Psi'(u_0)v \rightarrow 0$ as $u \rightarrow u_0$ uniformly with respect to v . This implies that Ψ' is continuous. Thus, we have shown that $J \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$. Lemma 4.1 is proved. $\square$

The proof of the next lemma can be found in [8].

Lemma 4.2. *Let X be a real Banach space and let $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfy the Palais-Smale condition. If J is bounded from below, then $c = \inf_X J$ is a critical value of J .*

Proof of Theorem 4.1. In view of Lemma 4.1 we have $J \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$. We first show that J is bounded from below. Indeed, by (F1), (4.1), Lemma 4.1, and the Hölder inequality, we can write

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{a_1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|-\infty D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2) dt + \frac{a_2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} (|-\infty D_t^\alpha u(t)|^2 + b(t)|u(t)|^2) dt \right)^2 \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}} F(t, u(t)) dt \geq \frac{a_1}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(t, u(t)) dt \\
 &\geq \frac{a_1}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i} \int_{\mathbb{R}} \theta_i(t) |u(t)|^{\gamma_i} dt \geq \frac{a_1}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i} \|\theta_i\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}} \|u\|_{L^2}^{\gamma_i} \\
 (4.11) \quad &\geq \frac{a_1}{2} \|u\|_{X^\alpha}^2 - \sum_{i=1}^m \frac{C_2^{\gamma_i}}{\gamma_i} \|\theta_i\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma_i}}} \|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i}.
 \end{aligned}$$

Since $1 < \gamma_i < 2$ ($i = 1, \dots, m$), we see that J is coercive and bounded below.

Next, we prove that J satisfies the Palais-Smale condition. To this end, assume that $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^\alpha$ is a sequence such that $\{J(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded and $J'(u_k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow +\infty$. Hence by (4.11), there exists a constant $M > 0$ such that $\|u_k\|_{X^\alpha} \leq M$, $k \in \mathbb{N}$. Therefore, there is a subsequence, again denoted by $\{u_k\}$ and $u_0 \in X^\alpha$ such that $u_k \rightharpoonup u_0$. Hence

$$(4.12) \quad (J'(u_k) - J'(u_0))(u_k - u_0) \rightarrow 0,$$

and by Lemma 2.3, we have

$$(4.13) \quad u_k \rightarrow u_0 \quad \text{strongly in } L^2(\mathbb{R}).$$

Since $u_k \rightharpoonup u_0$, then by the Banach-Steinhaus theorem, there exists a constant $M > 0$ such that

$$(4.14) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{X^\alpha} \leq M, \quad \|u_0\|_{X^\alpha} \leq M.$$

Further, in view of (F1) and the Hölder inequality, we can get

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t))| |u_k(t) - u_0(t)| dt \\ & \leq \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} \left(\|u\|_{L^2}^{\gamma_i-1} + \|u_0\|_{L^2}^{\gamma_i-1} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |u_k(t) - u_0(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ (4.15) \quad & \leq \sum_{i=1}^m C_2^{\gamma_i-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_i^{\frac{2}{2-\gamma_i}}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma_i}{2}} \left(\|u\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} + \|u_0\|_{X^\alpha}^{\gamma_i-1} \right) \|u - u_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Therefore, by (4.12)-(4.15), we have

$$(4.16) \quad \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow +\infty.$$

Also, one can get

$$\begin{aligned} (J'(u_k) - J'(u_0))(u_k - u_0) &= \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} (|_{-\infty} D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2) dt \right) \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \left(-_{\infty} D_t^\alpha u_k(t) \cdot -_{\infty} D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_k(t)(u_k - u_0) \right) dt \\ & - \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} (|_{-\infty} D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2) dt \right) \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \left(-_{\infty} D_t^\alpha u_0(t) \cdot -_{\infty} D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_0(t)(u_k - u_0) \right) dt \\ & - \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(a_1 + a_2 \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2 \right) dt \right) \int_{\mathbb{R}} |-\infty D_t^\alpha (u_k - u_0)|^2 + b(t)|u_k - u_0|^2 dt \\
 &\quad - a_2 \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt - \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2 \right) dt \right] \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u_0(t) \cdot -\infty D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_0(t)(u_k - u_0) \right) dt \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt \geq a_1 \|u - u_0\|_{X^\alpha}^2 \\
 &\quad - a_2 \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt - \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2 \right) dt \right] \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u_0(t) \cdot -\infty D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_0(t)(u_k - u_0) \right) dt \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 a_1 \|u - u_0\|_{X^\alpha}^2 &\leq (J'(u_k) - J'(u_0))(u_k - u_0) - a_2 \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2 \right) dt \right] \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u_0(t) \cdot -\infty D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_0(t)(u_k - u_0) \right) dt \\
 (4.17) \quad &+ \int_{\mathbb{R}} (f(t, u_k(t)) - f(t, u_0(t)))(u_k(t) - u_0(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Next, since $u_k \rightarrow u_0$, then we have as $k \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}
 a_2 \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt - \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_k(t)|^2 + b(t)|u_k(t)|^2 \right) dt \right] \\
 (4.18) \quad \times \int_{\mathbb{R}} \left(-\infty D_t^\alpha u_0(t) \cdot -\infty D_t^\alpha (u_k - u_0) + b(t)u_0(t)(u_k - u_0) \right) dt \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

It follows from (4.12), (4.16)–(4.18) that $u_k \rightarrow u_0$ strongly in X^α , implying that J satisfies the Palais-Smale condition.

Next, by Lemma 4.2, $\xi = \inf_{X^\alpha} J(u)$ is a critical value of J , that is, there exists a critical point $u^* \in X^\alpha$ such that $J(u^*) = \xi$.

Finally, we show that $u^* \neq 0$. Let $u_0 \in X^\alpha \setminus \{0\}$ and $\|u_0\|_{X^\alpha} = 1$, then by (4.1), (F2) and Remark 2.3, we have

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad J(su_0) &= \frac{s^2 a_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt \\
 &\quad + \frac{s^4 a_2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|-\infty D_t^\alpha u_0(t)|^2 + b(t)|u_0(t)|^2 \right) dt \right)^2 \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}} F(t, su_0(t)) dt \leq \frac{s^2 a_1}{2} + \frac{s^4 a_2}{4} - \eta s^{\gamma_0} \int_{\mathbb{R}} |u_0(t)|^{\gamma_0} dt, \quad 0 < s < \frac{\delta}{D_+}.
 \end{aligned}$$

Since $1 < \gamma_0 < 2$, from (4.19) we have $J(su_0) < 0$ for $s > 0$ small enough. Hence $J(u^*) = \xi < 0$, implying that u^* is a nontrivial critical point of J , and so u^* is a nontrivial solution of problem (1.2). This completes the proof of Theorem 4.1. $\square$

Acknowledgments. The authors would like to thank the referees for their suggestions and helpful comments which improved the presentation of the original manuscript.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Agrawal, J. Tenreiro Machado, J. Sabatier, *Fractional Derivatives and Their Application: Nonlinear dynamics*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [2] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore (2000).
- [3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, in: North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier Science B. V., Amsterdam, (2006).
- [4] K. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley and Sons, New York (1993).
- [5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York (1999).
- [6] J. Sabatier, O. Agrawal, J. Tenreiro Machado, *Advances in Fractional Calculus. Theoretical developments and applications in physics and engineering*, Springer-Verlag, Berlin (2007).
- [7] G. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, Oxford (2005).
- [8] J. Mawhin, M. Willen, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Applied Mathematical Sciences **74**, Springer, Berlin (1989).
- [9] P. Rabinowitz, "Minimax method in critical point theory with applications to differential equations", CBMS Amer. Math. Soc., no. 65 (1986).
- [10] F. Jiao, Y. Zhou, Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory, *Internat. J. Bifurcat. Chaos*, **22** (4), 1–17 (2012).
- [11] C. Torres, "Existence of solution for a class of fractional Hamiltonian systems", *Electron. J. Diff. Equ.*, **259**, 1-12, (2013).
- [12] C. Torres, "Ground state solution for a class of differential equations with left and right fractional derivatives", preprint, available at <http://arxiv-web3.library.cornell.edu/pdf/1308.4215v1.pdf>.
- [13] Z. Zhang, R. Yuan, Variational approach to solutions for a class of fractional Hamiltonian systems, *Math. Method. Appl. Scie.* (2013) (Preprint).
- [14] C. Stuart, *Bifurcation into spectral gaps*, Societe Mathematique de Belgique (1995).

Поступила 14 мая 2014

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 50

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

	номер
Об операторе дробного интегро-дифференцирования в $\mathbb{R}^n$ К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН	5
Ulam stability of fractional impulsive differential equations with Riemann-Liouville integral boundary conditions M. I. ABBAS	5
The problem of additional samples for spatio-temporal sampling in $l^2(\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2})$ R. ACESKA, A. PETROSYAN AND SHI TANG	2
On absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$ A. АПЛAKOV	6
Torplitz operators on weighted Besov spaces of holomorphic functions on the polydisk A. HARUTYUNYAN, W. LUSKY	4
О поверхностях Бора-Римана. II А. Ф. БЕКНАЗАРЯН, С. С. ГРИГОРЯН	1
Замечания о базисности систем функций Бесселя и функций типа Миттаг-Леффлера Б. В. Винницкий, Р. В. Хаць	6
Зависящее от ориентации распределение длины случайного отрезка и ковариограмма А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН	2
Зависящее от ориентации распределение длины хорды как функция максимальной хорды А. Г. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН	5
Second order asymptotical efficiency for a Poisson process S. B. GASPARYAN	2
An example of one-step MLE-process in volatility estimation problem S. B. GASPARYAN AND YU. A. KUTOYANTS	3
Almost everywhere strong summability of double Walsh-Fourier series G. GAT AND U. GOGINAVA	1
Нелинейная аппроксимация по тригонометрической системе в весовом пространстве L_p^μ М. Г. ГРИГОРЯН	3
Демократические подсистемы многомерной системы Хаара С. Л. ГОРЯН	6
Сверхтождества слабо идемпотентных решеток Д. С. ДАВИДОВА, Ю. М. МОВСИСЯН	6
О разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из L_2 для эллиптического уравнения второго порядка В. Ж. ДУМАНИАН	4
Exponential convergence of nonlinear time-varying differential equations M. ERREBI, I. ELLOUZE AND M. A. HAMMAMI	4
Zeros and shared one value of q -shift difference polynomials Q. ZHAO AND J. ZHANG	2

О формально почти гиперэллиптических многочленах постоянной мощности Г. Г. КАЗАРЯН	6
Расходящиеся треугольные суммы двойных тригонометрических рядов Фурье Г. А. КАРАГУЛЯН, К. Р. МУРАДЯН	4
Specific properties of solutions of first order differential equations with several delay arguments R. KOPLATADZE	5
On the generalizations of polynomial inequalities in the complex domain P. N. KUMAR	1
On Finsler Σ -spaces D. LATIFI, M. TOOMANIAN	3
Структура инвариантных идеалов некоторых подалгебр алгебры Тейлора Е. В. Липачева, К. Г. ОВСЕПЯН	2
О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений В. П. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН	3
On the solutions of linear ordinary differential equations and Bessel-type special functions on the Levi-Civita field A. R. MESZAROS, KH. SHAMSEDDINE	2
Об аналитическом продолжении кратных степенных рядов за пределы области сходимости А. Д. МКРТЧЯН	1
Сходимость многомерных интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации А. Р. НУРБЕКЯН	2
Variational approach to solutions for a class of Kirchhoff type fractional differential equations without compactness conditions N. NYAMORADI	6
Quadratic ρ -functional inequalities in non-Archimedean normed spaces C. PARK	4
Hardy-type inequalities for functions whose Fourier transforms have gaps M. SAVABHEN	5
О единственности тригонометрических рядов А. А. ТАЛАЛЯН	3
Degenerate nonselfadjoint high-order ordinary differential equations on an infinite interval L. P. TERPOYAN AND S. ZSHORN	3
Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for a generalized Pareto-type distribution D. FARVOD	1
О разрешимости одного класса нелинейных интегродифференциальных уравнений второго порядка в пространстве $W_1^2(\mathbb{R}^1)$ Х. А. ХАЧАТРЯН, М. Ф. БРОЯН, Э. О. АЗИЗЯН	5
A Bonus-Malus system with aggregate claim amount component R. N. CHITCHYAN, A. G. GULYAN	5

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 50, No. 5, 2015

CONTENTS

MOHAMED I. ABBAS, Ulam stability of fractional impulsive differential equations with Riemann-Liouville integral boundary conditions	209
KH. A. KHACHATRYAN, M. F. BROVAN, E. O. AZIZYAN, On solvability of a class of nonlinear second order integro-differential equations in the space $W_1^2(\mathbb{R}^+)$	220
R. KOPLATADZE, Specific properties of solutions of first order differential equations with several delay arguments	229
K. AVETISYAN, E. TONoyAN, On the fractional integro-differentiation operator in $\mathbb{R}^n$	236
MOHAMMAD SABABHEH, Hardy-type inequalities for functions whose Fourier transforms have gaps	246
A. G. GASPARYAN, V. K. OHANYAN, Orientation-dependent chord length distribution as a function of maximal chord	253 - 257

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 50, номер 6, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

A. APLAKOV, On absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$	3
Б. В. ВИННИЦКИЙ, Р. В. ХАЦЬ, Замечания о базисности систем функций Бесселя и функций типа Mittag-Lefflera	16
С. Л. ГОГЯН, Демократические подсистемы многомерной системы Хаара	26
Д. С. ДАВИДОВА, Ю. М. МОВСИСЯН, Сверхтождества слабо идемпотентных решеток	33
Г. Г. КАЗАРЯН, О формально почти гипоеллиптических многочленах постоянной мощности	44
N. NYAMORADI, Variational approach to solutions for a class of Kirchhoff type fractional differential equations without compactness conditions	61
Содержание тома 50, номера 1 – 6, 2015	79 80

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 50, No. 6, 2015

CONTENTS

A. APLAKOV, On absolute convergence of the series of Fourier coefficients with respect to Haar-like systems in the class $BV(p(n) \uparrow p, \phi)$	3
B. V. VYNNYTS'KYI, R. V. KHATS', A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler-type functions	16
S. L. GOGYAN, Democratic subsystems of the multiple Haar system	26
D. S. DAVIDOVA, YU. M. MOVSISYAN, Hyperidentities of weakly idempotent lattices	33
H. G. GHAZARYAN, On formally almost hypoelliptic polynomials of constant power	44
N. NYAMORADI, Variational approach to solutions for a class of Kirchhoff type fractional differential equations without compactness conditions	61
Author Index to Volume 50, numbers 1 – 6, 2015	79 80