ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2015

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 3-21.

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ L^p_μ

М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В статье доказывается, что для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ и весовая функция $\mu(x)$; $\mu(x) = 1$ на E такие, что для любого $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E и такую, что как ее жадный алгоритм, так и ряд Фурье по тригонометрической системе сходятся к ней по нормам $L^1[0,1)$ и $L^p_\mu[0,1]$.

MSC2010 numbers: 42C10, 42B05.

Ключевые слова: жадный алгоритм; сходимость в $L^p_\mu[0,1]$; тригонометрическая система.

1. Введение

Работа продолжает исследования автора о сходимости жадных алгоритмов с точки зрения широко известных классических теорем Н. Н. Лузина и Д. Е. Меньшова "об исправлении функций" (см. [1], [2]).

Для функции $f \in L^1\ [0,1]$, $(f(x \pm 1) = f(x), x \in [0,1))$ коэффициенты Фурье и частичная сумма ряда Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ задаются формулами

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi ikt}dt,\ k = 0, \pm1, \pm2, ...,\ \ c_{-k} = \bar{c}_k, \tag{1.1}$$

и

$$S_m(x,f) = \sum_{|k|\le m} c_k(f)\, e^{2\pi ikx},\ m = 0,1,2,\dots . \tag{1.2}$$

Пусть $L^p_\mu[0,1]$– весовое пространство:

$$L^p_\mu[0,1]=\{f(x) : \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\, dx < \infty,\},\ 1 \le p < \infty. \tag{1.3}$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\sigma(-k) = -\sigma(k)$ назовем убывающей, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{1.4}$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f)$. В случае строгих неравенств (1.4), множество $D(f)$ содержит только одну убывающую перестановку.

Для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ и для любого элемента $\sigma \in D(f)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\sigma)\}_{m=1}^{\infty}$, следующим образом

$$G_m(x,f) = G_m(x,f,\sigma) = \sum_{|k|\leq m} c_{\sigma(k)}(f)e^{2\pi i\sigma(k)x}. \tag{1.5}$$

Заметим, что оператор $G_m(x,f)$ зависит от σ и реализует наилучшее m-членное приближение по тригонометрической системе в пространстве $L^2[0,1]$.

Метод приближения функции f последовательностью нелинейных операторов $\{G_m(f,\sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ называется жадным (гриди) алгоритмом функции f по тригонометрической системе$\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Говорят, что жадный алгоритм функции f по тригонометрической системе сходится в *весовом пространстве* $L^p_\mu[0,1]$, если при некотором $\sigma \in D(f)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^1 |G_m(x,f) - f(x)|^p \mu(x)dx\right)^{1/p} = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены в работах [3] - [15] и [17] - [21].

Т. В. Корнер ответив на вопрос поставленный Карлесоном и Койфманом, построил в [4] пример непрерывной функции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится почти всюду. В работе [5] В. Н. Темляков доказал существование функции $f_0(x) \in \bigcap_{1\leq p<2} L^p[0,2\pi]$ жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере. В работе [6] доказано, что для каждого $p \geq 1$, $p \neq 2$, существует функция $f(x) \in L^p(0,1)$, жадный алгоритм которой по системе Уолша расходится в $L^p(0,1)$ (см. также [20]). Естественен следующий

Вопрос 1.1. Существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое,что после изменения значений любой функции класса $L^p(0,1), p \geq 1$ на e, жадный алгоритм по системе Уолша и по тригонометрической системе измененной функции сходился бы к ней (*почти всюду* по норме $L^p(0,1)$, равномерно)?

Важно отметить, что в работе [7] показано существование полной в $L^2(0,1)$ ортонормированной системы, для которой поставленный вопрос при $p > 2$ имеет отрицательный ответ, точнее построена ортонормированная система $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция $g(x)$ такие, что если для некоторой функции $f \in L^p(0,1)$, $p > 2$; $| \{x \in [0,1]; f(x) = g(x)\} | > 0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x,\psi,f)\}$ по системе ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Мы рассмотрим вопрос 1.1 в двух постановках:

1. Когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры.

2. Когда исключительное множество e, на котором происходит изменение не зависит от исправляемой функции $f(x)$, т.е. оно универсально, обслуживает целый функциональный класс.

В соответствии с этими постановками в работах [8] – [11] автора для системы Уолша доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Для любого $0 < \epsilon < 1$ и для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, $|\{x \in [0,1]; f \neq \tilde{f}\}| < \epsilon$, жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к ней почти всюду на [0, 1].*

Теорема 1.2. *Для любых $0 < \epsilon < 1$, $2 \leq p \leq \infty$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $|\{x \in [0,1]; f \neq \tilde{f}\}| < \epsilon$ такую, что его жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней в $L^p[0,1]$ и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке.*

Теорема 1.3. *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E | > 1 - \epsilon$ и весовая функция $\mu(x), \mu(x) = 1$ на E такие, что для любого $p \in [1,\infty)$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней по нормам $L^p_\mu(0,1)$ и $L^1(0,1)$.*

Сразу же отметим, что остается открытым следующий

Вопрос 1.2. Верны ли теоремы 1.1 – 1.3 при $p > 2$ для тригонометрической системы?

Отметим также, что в случае $p \in [1,2]$ для тригонометрической системы в работе [12] автором доказано, что

Для любого $0 < \epsilon < 1$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1 - \epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f(x) \in L^p[0,1]$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E *такую, что ее жадный алгоритм по тригонометрической системе сходится к ней по норме* $L^p(E)$, *т.е.*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_E |G_m(x,\tilde{f}) - \tilde{f}(x))|^p dx\right)^{1/p} = 0.$$

В настоящей работе доказывается теорема 1.4, которая является усилением выше сформулированного результата

Теорема 1.4. *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1 - \epsilon$ *и весовая функция* $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \le 1$; $\mu(x) = 1$ *на* E *такие, что для любого* $p \in [1,2)$ *и для каждой функции* $f(x) \in L^p_\mu[0,1]$ *можно найти функцию* $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$ *совпадающую с* $f(x)$ *на* E, *жадный алгоритм которой по тригонометрической системе сходится к ней по нормам* $L^1[0,1]$ *и* $L^p_\mu[0,1]$.

Отметим, что в связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной, функции $\tilde{f}(x)$ возник следующий вопрос, который на мой взгляд представляет самостоятельный интерес.

Вопрос 1.3. Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p[0,1]$, $p \ge 1$ на множестве малой меры так, чтобы все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности по системе Уолша и по тригонометрической системе), по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

В работе [10] доказано, что вопрос 3 для системы Уолша имеет положительный ответ (см. также [11] – [15]), а для тригонометрической системы этот вопрос остается открытым.

Теорема 1.4 следует из более общей Теоремы 1.5.

Теорема 1.5. *Для любой непрерывной неотрицательной возрастающей функции* $\omega(t)$, $t \in (0,\infty)$ *с* $\omega(+0) = 0$ *и для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1 - \epsilon$ *и весовая функция* $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \le 1$, $\mu(x) = 1$ *на* E *такие, что для любого* $p \in [1,2]$ *и для каждой функции* $f(x) \in L^p_\mu[0,1]$ *можно найти функцию* $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$ *совпадающую* *с $f(x)$ на E и перестановку $\{\sigma(k)\}, (\sigma(-k) = -\sigma(k))$ целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ такие, что*

1) как жадный алгоритм, так и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ сходятся к ней по нормам $L^1[0,1]$и $L^p_\mu[0,1]$:

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(g)|^2\omega(|c_n(g)|) < \infty, \quad \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx < \epsilon;$$

3) $D(f)$ содержит только одну убывающую перестановку$\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, (см. (1.4)).

В связи со вторым утверждением теоремы 1.5 заметим,что если функция $f \in L^1(0,1)$ и $f(x) \notin \ L^2(E)$, то для каждой функции $g(x) \in L^1[0,1)$ совпадающая с f на E, последовательность $\{c_n(g)\} \notin l_2$. Отметим, что из пункта 2 теоремы 1.5 вытекает, что последовательность коэффициентов Фурье исправленной функции $g(x)$ по тригонометрической системе лежит во всех $l_q, q > 2$, т.е. $(\sum_{n=0}^{\infty} |c_{\sigma(n)}(g(x))|^q < \infty$, для любого $q > 2)$. В теореме 1.5 исключительное множество e, на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции $f(x)$, оно универсально. Отметим также, что в случае, когда это множество e зависит от функции в [16] А. М. Олевский доказал, что существует функция $g(x) \in C[0,2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x)$ с мерой $|\{x \in [0,2\pi] \ ; \ f(x) = g(x)\}| > 0$, последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{a_n(f), b_n(f)\} \notin l_p$ при всех $p \in (0,2)$.

2. Доказательство основных лемм

Повторяя рассуждения приведенные при доказательстве леммы 2 работы автора [12], получим следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\omega(t)$, $t \in (0,\infty)$, непрерывная неотрицательная возрастающая функция с $\omega(+0) = 0$. Тогда для любых чисел, $\delta \in (0,1)$, $\epsilon \in (0,1)$, $N > 1$ и для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ ($||f|| > 0$) существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$, функция $g(x)$, полином $Q(x)$ вида*

$$Q(x) = \sum_{|k|=N}^{M} a_k e^{2\pi ikx}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{M}$ *чисел* $N,...,M$, $(\sigma(-k)=-\sigma(k))$, *которые удовлетворяют условиям:*

1) $$g(x)=f(x),\quad x\in E,\quad |E|>1-\epsilon,$$

2) $$\int_0^1 |g(x)|dx<2\int_0^1|f(x)|dx,\ \left[\int_0^1 |Q(x)-g(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}<\delta,$$

3) $$\sum_{|k|=N}^{M}|a_k|^2\omega(|a_k|)<\delta,$$

4) $$\delta>|a_{\sigma(k)}|>|a_{\sigma(k+1)}|>0,\quad \textit{для любого}\quad k\in[N,M),$$

5) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_ke^{2\pi ikx}\right|dx<3\int_0^1|f(x)|dx,$$

6) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}\right|dx<3\int_0^1|f(x)|dx.$$

Для каждого $p\in[[1;2]$ и для любого измеримого подмножества $e\subset E$

7) $$\max_{N\le m\le M}\int_e\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_ke^{2\pi ikx}\right|^p dx<2\int_e|f(x)|^pdx+\delta$$

8) $$\max_{N\le m\le M}\int_e\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}\right|^p dx<2\int_e|f(x)|^pdx+\delta.$$

Основным средством для доказательства теоремы 1.5 является следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $\omega(t)$, $t\in(0,\infty)$– *непрерывная неотрицательная возрастающая функция с* $\omega(+0)=0$. *Тогда для любого* $0<\epsilon<1$ *существует измеримая функция* $\mu(x)$ *с* $|\{x\in[0,1],\mu(x)=1\}|>1-\epsilon$ *такая, что для любых* $\delta\in(0,1)$, $\epsilon\in(0,1)$ *и* $N>1$ *и для каждой функции* $f(x)\in L^2[0,1]$ $(\|f\|>0)$ *существуют измеримое множество* $E\subset[0,1]$, *функция* $g(x)$, *полином* $Q(x)$ *вида*

$$Q(x)=\sum_{|k|=N}^{M}a_ke^{2\pi ikx}=\sum_{|k|=N}^{M}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x},\quad a_{-k}=\overline{a}_k,$$

(здесь $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{M}$, $\sigma(-k) = -\sigma(k)$ -некоторая перестановка натуральных чисел $N, ..., M$) которые удовлетворяют условиям:

1) $$g(x) = f(x), \quad x \in E, \qquad |E| > 1 - \epsilon,$$

2) $$\int_0^1 |g(x)|dx < 2\int_0^1 |f(x)|dx, \left[\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} < \delta,$$

3) $$\int_0^1 |g(x)|^p \mu(x)\, dx < 2\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\, dx + \delta, \quad \text{для любого} \quad p \in [1,2],$$

4) $$\sum_{|k|=N}^{M} |a_k|^2 \omega(|a_k|) < \delta,$$

5) $$\delta > |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \text{для любого} \quad k \in [N, M),$$

6) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=N}^{m} a_k e^{2\pi i k x}\right| dx < 3\int_0^1 |f(x)|dx,$$

7) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}\right| dx < 3\int_0^1 |f(x)|dx,$$

8) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=N}^{m} a_k e^{2\pi i k x}\right|^p \mu(x)\, dx < 2\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\, dx + \delta, \quad \text{для любого } p \in [1,2],$$

9) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}\right|^p \mu(x)\, dx < 2\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\, dx + \delta, \quad \text{для любого } p \in [1,2].$$

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon < 1$. Если обозначим через

(2.1) $$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

последовательность полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.1, то можем найти последовательности функций $\{\overline{g}_n(x)\}$, множеств $\{E_k\}$ и полиномов

(2.2) $$Q_n(x) = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n - 1} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} e^{2\pi i \sigma_n(k) x} = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n - 1} a_k^{(n)} e^{2\pi i k x}, \quad a_{-k}^{(n)} = \overline{a}_k^{(n)},$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$, $(\sigma_n(-k)=-\sigma_n(k))$, $m_0=1$; для каждого фиксированного n, некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, ..., m_n-1$, которые удовлетворяют условиям:

(2.3) $$g_n(x)=f_n(x), \quad x\in E_n,$$

(2.4) $$|E_n|>1-4^{-8(n+2)},$$

(2.5) $$\int_0^1 |g_n(x)|dx<3\int_0^1 |f_n(x)|dx,$$

(2.6) $$\left(\int_0^1 |Q_n(x)-g_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<4^{-8(n+2)},$$

(2.7) $$\frac{1}{n}>|a_k^{(n)}|>|a_{k+1}^{(n)}|>|a_{m_n}^{(n+1)}|>0, \quad \text{для любого} \quad k\in[m_{n-1},m_n-1), \quad n\geq 1,$$

(2.8) $$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_{n-1}} \left|a_k^{(n)}\right|^2 \omega(\left|a_k^{(n)}\right|)<4^{-8(n+2)},$$

(2.9) $$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right| \leq 3\int_0^1 |f_n(x)|dx,$$

(2.10) $$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)} e^{2\pi ikx}\right| \leq 3\int_0^1 |f_n(x)|dx,$$

для каждого $p\in[1;2]$ и для любого измеримого подмножества $e\subset E_n$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\left(\int_e\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

(2.11) $$\leq 3\left(\int_e |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)}$$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\left(\int_e\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)} e^{2\pi ikx}\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

(2.12) $$\leq 3\left(\int_e |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)}.$$

Положим

$$\Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.13}$$

$$G = \Omega_{n_0}, \quad n_0 = [\log_{\frac{1}{2}} \epsilon] + 1, \tag{2.14}$$

$$B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n. \tag{2.15}$$

Очевидно, что (см. (2.4), (2.13) – (2.15)) $|B| = 1$, $|G| > 1 - \epsilon$.

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in G \cup ([0,1] \setminus B), \\ \mu_n, & x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \tag{2.16}$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n} \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}$$

и

$$h_k = \sup_{1 \leq p \leq 2} \Big(1 + \int_0^1 |g_k(x)|^p dx + \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p dx +$$

$$+ \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_s^{(k)} e^{2\pi i s x} \right|^p dx \Big). \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.17) для всех $k \geq 1$ и $p \in [1,2]$ получим

$$\int_{[0,1]\setminus\Omega_k} |g_k(x)|^p \mu(x) dx = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |g_k(x)|^p \mu_n dx \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2n} \left(\int_0^1 |g_k(x)|^p dx \right) h_k^{-1} < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \tag{2.18}$$

Аналогично для всех $k > n_0$ и $p \in [1,2]$ будем иметь

$$\max_{m_{k-1} \leq m < m_k} \int_{[0,1]\setminus\Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x) dx < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.3), (2.16) - (2.18) вытекает

$$\int_0^1 |g_k(x)|^p \mu(x) dx = \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \mu(x) dx + \int_{[0,1]\setminus\Omega_k} |g_k(x)|^p \mu(x) dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x) dx + 2^{-2k} \quad \forall p \in [1,2]. \tag{2.20}$$

Учитывая соотношения (2.11), (2.16)-(2.19), для всех $m \in [m_{k-1}, m_k)$, $k \geq n_0$ и $p \in [1,2]$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx = \int_{\Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n \int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p dx =$$

$$\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n \left[4^{-8(k+1)} + 3 \left(\int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p =$$

$$= \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \left[\frac{\mu_n^{\frac{1}{p}}}{2^{2(k+1)}} + \left(\int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} 2^p \cdot \left[\frac{\mu_n}{2^{2p(k+1)}} + \int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + 2^p \cdot 2^{-2p(k+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n + 2^p \cdot \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \cdot \mu(x)dx \leq$$

$$\leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \cdot \mu(x)dx \right). \tag{2.21}$$

Аналогично (см. (2.12), (2.16), (2.18)) для всех $m \in [m_{k-1}, m_k)$, $k > n_0$ и $p \in [1,2]$ будем иметь

$$\int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_s^{(k)} e^{2\pi i s x} \right|^p \mu(x)dx \leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x)dx \right). \tag{2.22}$$

Возьмем функцию $f_{k_0}(x) (m_{k_0-1} - 1 > N)$ из последовательности (2.1) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_0}(x)|^2 dx < \min\{ \left(\frac{\delta}{4}\right)^2, \frac{\int_0^1 | f(x) | dx}{2} \}, k_0 > [\log_{\frac{1}{2}} \delta] + n_0 . \tag{2.23}$$

Положим

(2.24)

$$Q(x) := \sum_{|k|=N}^{m_{k_0-1}-1} 2^{-2m_{k_0}-k} e^{2\pi i k x} + \sum_{|k|=m_{k_0-1}}^{m_{k_0}-1} a_k^{(n)} e^{2\pi i k x} = \sum_{|k|=N}^{M} a_k e^{2\pi i k x}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k$$

$$E = E_{k_0}, \quad g(x) = f(x) + g_{k_0}(x) - f_{k_0}(x)$$

Отсюда и из (2.3) – (2.6), (2.16), (2,20) и (2.23) вытекает, что функции $g(x)$, $\mu(x)$, множество E и полином $Q(x)$ удовлетворяют требованиям 1) - 3) леммы 2.

Учитывая соотношения (2.7)-(2.10), и (2.20) – (2.24) получим, что функции $g(x)$, $\mu(x)$ и полином $Q(x)$ удовлетворяют требованиям 4)-9) леммы 2.2. □

3. Доказательство Теоремы 1.5

Пусть $0 < \epsilon < 1$. Если обозначим через

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.2, то можем найти весовую функцию $\mu(x)$ с

$$| \ \{x \in [0,1], \mu(x) = 1\} \ | > 1 - \epsilon/2, \tag{3.2}$$

и последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, множеств $\{E_n\}$ и полиномов

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} e^{2\pi i \sigma_n(k) x} = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} e^{2\pi i k x}, \quad a_{-k}^{(n)} = \overline{a}_k^{(n)}, \tag{3.3}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$, $(\sigma_n(-k) = -\sigma_n(k))$, $m_0 = 1$, для каждого фиксированного n, некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, ..., m_n-1$, которые для всех $n \geq 1$ удовлетворяют условиям:

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \tag{3.4}$$

$$|E_n| > 1 - 4^{-8(n+2)}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \tag{3.6}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|^p \mu(x) dx < 2 \int_0^1 |f_n(x)|^p \mu(x) dx + 4^{-8(n+2)}, \tag{3.7}$$

$$\left(\int_0^1 \left|\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} < 4^{-8(n+2)}, \tag{3.8}$$

(3.9)

$$\frac{1}{n} > |a_{\sigma_n(k)}^{(n)}| > |a_{\sigma_n(k+1)}^{(n)}| > |a_{\sigma_n(m_n)}^{(n+1)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n - 1) \ \forall n \geq 1,$$

$$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} \left|a_k^{(n)}\right|^2 \omega(\left|a_k^{(n)}\right|) < 4^{-8(n+2)}, \tag{3.10}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a_{\sigma_n(k)}^{(n)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|\le 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.11}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}e^{2\pi ikx}\right|\le 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.12}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a_{\sigma_n(k)}^{(n)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le 3\left(\int_0^1|f_n(x)|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)},\forall p\in[1,2) \tag{3.13}$$

и

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}e^{2\pi ikx}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le 3\left(\int_0^1|f_n(x)|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)},\forall p\in[1,2). \tag{3.14}$$

Положим

$$E=(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}E_n)\bigcap\{x\in[0,1],\ \mu(x)=1\},n_0=|\log_{\frac{1}{2}}\epsilon|+1. \tag{3.15}$$

Очевидно, что (см. (3.2),(3.5),(3.15)) $|E|>1-\epsilon$.

Пусть $p\in[1,2]$ и $f(x)\in L^p_\mu[0,1]$. (см. (1.3)) Положим

$$f^\circ(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E;\\ 0, & x\notin E.\end{cases} \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x)-f^\circ(x)\right|^p dx\right)^{1/p}=0, \tag{3.17}$$

$$\left(\int_0^1|f_{k_n}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le 4^{-8(n+2)},\quad n\ge 2, \tag{3.18}$$

где

$$f_{k_1}(x)=\sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1}a_ke^{2\pi ikx}=\sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1}a_{\overline{\sigma}(k)}e^{2\pi i\overline{\sigma}(k)x},\quad |a_{\overline{\sigma}(k)}|>|a_{\overline{\sigma}(k+1)}|>0, \tag{3.19}$$

и $\overline{\sigma}(|k|)$-некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, ..., m_{\nu_1} - 1$, $\overline{\sigma}(-k) = -\overline{\sigma}(k)$, ($a_{-k} = \overline{a}_k, \forall |k| \in [0, m_{\nu_1})$).

Очевидно, что (см. (3.16)-(3.17))

$$\left(\int_E |f(x) - f_{k_1}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Положим

$$a_k = \begin{cases} a_k, & k \in [0, m_{\nu_1}), \\ a_k^{(n)}, & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\sigma(k) = \begin{cases} \overline{\sigma}(k), & k \in [0, m_{\nu_1}), \\ \sigma_n(k), & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad \forall n \geq \nu_1 + 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Пусть

$$g_1(x) \equiv Q_1(x) = f_{k_1}(x), \; l(1) = m_{\nu_1}, \; b_{l(1)} = \min\{4^{-32}; \frac{1}{2}|a_{\overline{\sigma}(m_{\nu_1}-1)}|\}. \tag{3.23}$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < ... < \nu_{q-1}$, $l(1) < ... < l(q-1)$, $\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q-1}$, функции $g_n(x)$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} = \sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_k e^{2\pi i k x}, \quad M_n = m_{\nu_n - 1},$$

$$\overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \quad M_2 > m_{\nu_1} = \overline{M}_1 \, ,$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_{\nu_n}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 4^{-3n}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n \left[\left(Q_k(x) + b_{l(k)} e^{2\pi i l(k) x}\right) - g_k(x)\right]\right|^p dx\right)^{1/p} < 4^{-8(n+1)}, \tag{3.24}$$

$$l(n) = \min\{k \in N: \quad k \notin [1, m_{\nu_1}) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [M_j, \overline{M}_j]\right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1}\},$$

$$\max_{M_n \leq N < \overline{M}_n} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=M_n}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}\right| dx < 4^{-3n}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

$$\max_{M_n \le N < \overline{M}_n} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_n}^{N} a_k e^{2\pi i k x} \right| dx < 4^{-3n}, \quad 1 < n \le q-1,$$

$$\max_{M_n \le N < \overline{M}_n} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_n}^{N}{}' a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 4^{-3n}, \quad 1 < n \le q-1\ ,$$

$$\max_{M_n \le N < \overline{M}_n} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_n}^{N} a_k e^{i2\pi k x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 4^{-3n}, \quad 1 < n \le q-1\ ,$$

$$|a_{\sigma(M_n)}| > \ldots > |a_{\sigma(k)}| > \ldots > |a_{\sigma(\overline{M}_n)}| > b_{l(n)} > 0\ ,\ \forall k \in (M_n, \overline{M}_n)\ ,\ 1 < n \le q-1\ .$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} \left[\left(Q_n(x) + b_{l(n)} e^{2\pi i l(n) x} \right) - g_n(x) \right] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} <$$

(3.25) $$< 4^{-8(q+2)},$$

и

(3.26) $$|a_{\sigma(m_{\nu_q-1})}| < b_{l(q-1)}, \quad \nu_q > \nu_{q-1}.$$

Согласно (3.17) и (3.23) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} \left[\left(Q_n(x) + b_{l(n)} e^{2\pi i l(n) x} \right) - g_n(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8q-1}.$$

Отсюда и из (3.24) вытекает

(3.27) $$\left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8q}.$$

Положим

(3.28) $$Q_q(x) = \overline{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} = \sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q} a_k e^{2\pi i k x},$$

где

(3.29) $$\overline{M}_q = m_{\nu_q} - 1, \quad M_q = m_{\nu_q - 1}\ ,\ (.\ (3.3))$$

(3.30) $$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)]\ ,\ (.\ (3.17)\ ,\ (3.25)),$$

(3.31) $$\begin{cases} l(q) = \min\{\ k \notin [0, m_{\nu_1}) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{q-1} [M_n, \overline{M}_n] \right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{q-1} \}, \\ b_{l(q)} = \min\left(4^{-8(q+3)};\ \frac{1}{2} |a_{\sigma(\overline{M}_q)}| \right). \end{cases}$$

Учитывая соотношения (3.4), (3.6), (3.24),(3.25),(3.27) и (3.30) получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_{\nu_q}, \tag{3.32}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)|dx \le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)|dx + \int_0^1 \left| \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right| dx < 4^{-3q}. \tag{3.33}$$

Аналогично для всех $q > 1$ и $p \in [1,2]$ получим

$$\left(\int_0^1 |g_q(x)|^p \mu(x)\, dx \right)^{1/p} \le 4^{-3q}. \tag{3.34}$$

В силу (3.8), (3.25), (3.31) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=2}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ b_{l(q)} + \left(\int_0^1 |\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < 4^{-8(q+1)}. \tag{3.35}$$

Из соотношений (3.9), (3.11) -(3.14), (3.26) и (3.27), (3.29) вытекает

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right| dx \le 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 4^{-3q}, \tag{3.36}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{2\pi i k x} \right| dx \le 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 4^{-3q}, \tag{3.37}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le 3 \left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \tag{3.38}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{2\pi i k x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \tag{3.39}$$

$$b_{l(q-1)} > |a_{\sigma(M_q)}| > \dots > |a_{\sigma(k)}| > \dots > |a_{\sigma(\overline{M}_q)}| > b_{l(q)} \ \forall q \geq 2. \tag{3.40}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}$, множеств $\{G_q\}_{q=1}$, чисел $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{b_{l(q)}\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}_{q=1}$, удовлетворяющих условиям (3.31) – (3.40) для всех $q \geq 1$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \overline{M}_q]\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$ (см. (3.26), (3.29), (3.31)) получим, что последовательность натуральных чисел

$$\sigma(1), \dots, \sigma(m_{\nu_1} - 1),\ l(1), \dots, \sigma(M_n), \dots, \sigma(k), \dots, \sigma(\overline{M}_n),\ l(n), \dots , \tag{3.41}$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, \dots, n, \dots$.

Последовательность (3.41) запишем в виде

$$\sigma_f(1),\ \ \sigma_f(2), \dots, \sigma_f(k), \dots .$$

Определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x}$ следующим образом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \tag{3.42}$$

где

$$g_1(x) = Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}, \tag{3.43}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} + b_{l(n)} e^{2\pi i l(n) x} \right], \tag{3.44}$$

где

$$\{d_{\sigma_f(k)}\}_{k=0}^{\infty} = \{a_{\sigma(1)}, \dots, {}_{\sigma(m_{\nu_1}-1)}, b_{l(1)}, a_{\sigma(M_2)}, \dots, a_{\sigma(\overline{M}_2)}; b_{l(2)},$$

$$\dots, b_{l(n-1)}, a_{\sigma(M_n)}, \dots, a_{\sigma(\overline{M}_n)}, b_{l(n)}, a_{\sigma(M_{n+1})}, \dots\}, \ (d_{-k} = \overline{d}_k, \forall k \geq 0). \tag{3.45}$$

Отсюда и из соотношений (3.9), (3.10), (3.21)- (3.23), (3.19), (3.20) вытекает

$$|d_{\sigma_f(k)}| > |d_{\sigma_f(k+1)}|, \quad \text{для любого} \quad k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 \omega(|d_k|) < \infty,$$

В силу (3.15)- (3.20), (3.33), (3.34) будем иметь

$$g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1], \ \int |g(x) - f(x)| < \epsilon, \quad g(x) = f(x), \ x \in E.$$

Пусть $m > M_2$, тогда существует натуральное число q такое, что

$$N_q \le m < N_{q+1}, \tag{3.46}$$

где $N_q = M_1 + 1 + \sum_{k=2}^{q}[\overline{M}_k - M_k + 2]$ для любого $q \ge 2$.

В силу (1.4), (1.5), (3.31), (3.33),(3.37) и (3.41)- (3.46) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{m} d_{\sigma_f(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} - g(x) \right| dx \le \int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right| dx +$$

$$+ \sum_{s=q}^{\infty} \int_0^1 |g_s(x)| dx + \max_{M_q \le n \le \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{n} a_k e^{2\pi i \sigma(k) x} \right| dx + b_{l(q)} < 2^{-q}.$$

Следовательно, $d_k = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i k x} dx = c_k(g)$ для любого $k \ge 0$ (см.(1.1)). Аналогичным образом убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left(\int_0^1 |G_m(x,g) - g(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{m} d_{\sigma_f(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le 2^{-q}.$$

Учитывая выбор чисел $l(1), l(2), \ldots .l(k), \ldots$ получим, что $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая перестановка натуральных чисел$\{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\}$ и, следовательно (см. (3.3), (3.21) – (3.23), (3.28), (3.29), (3.31) и (3.45)), для каждого натурального q существуют натуральные числа n_q и J_q такие ,что

$$\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q} \subset \{d_k, k \in N \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\} = \{b_k, k \in N \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\} \subset \{b_{l(k)}\}_{k=1}^{J_q}.$$

Отсюда и из соотношений (1.2), (3.31), (3.34), (3.35), (3.39), (3.41) – (3.45), для каждого $q \ge 2$ и для всех $m > M_{J_q}$ будем иметь

$$\left(\int_0^1 |S_m(x,g) - g(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{m} d_k e^{2\pi i k x} - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{s=q+1}^{\infty} \left(\int_0^1 |g_s(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} + \sum_{s=q+1}^{\infty} \max_{M_s \le n \le \overline{M}_s} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{n} a_k e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p}$$

$$+ \sum_{s=q+1}^{\infty} b_{l(s)} < 2^{-q}.$$

Аналогично для каждого $q \geq 2$ и для всех $m > M_{J_q}$ доказывается, что

$$\int_0^1 |S_m(x,g) - g(x)|dx = \int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{m} d_k e^{2\pi ikx} - g(x) \right| dx < 2^{-q}.$$

Теорема 1.5 доказана.

Abstract. In this paper we prove that for any $0 < \epsilon < 1$ there exist a measurable set $E \subset [0,1]$ with measure $|E| > 1 - \epsilon$ and a weight function $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \leq 1$; $\mu(x) = 1$ on E, such that for any number $p \in [1,2]$ and each function $f \in L^p_\mu(0,1)$ there is a function $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$, coinciding with $f(x)$ on E, whose greedy algorithm and Fourier series by trigonometric system converge to $g(x)$ in norms $L^1_{[0,1]}$ and $L^p_\mu[0,1]$.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сб., **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[2] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сб., **53**, no. 2, 67 – 96 (1942).

[3] L. K. Jones, "On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression", Ann. Statist., **15**, 880 – 882 (1987).

[4] T.W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications **5**, 1 – 19 (1999).

[5] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation, Found.Comput. Math., **3**, 33 – 107 (2003).

[6] R. Gribonval, M. Nielsen, "On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems", http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.

[7] M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. func.", Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), **352**, no. 8, 3777 – 3799 (2000).

[8] M. G. Grigorian and R. E. Zink, "Greedy approx. with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal systems", Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134**, 12, 3495 - 3505 (2006).

[9] M. G. Grigorian, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system", Studia. Math., **198**, no. 2, 197 – 206 (2010).

[10] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация", Матем.сборник, **203**, no. 3, 49 – 78 (2012).

[11] S. A. Episkoposian, M. G. Grigorian, "On the convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **389**, 1374 – 1379 (2012).

[12] М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе", Изв. НАН Армении, серия Математика, **39**, no. 4, 89 – 116 (2004).

[13] А. Х. Кобелян, "О сходимости в $L^1[0,1]$ жадного алгоритма по общей системе Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика, **47**, no. 6, 53 – 70 (2012).

[14] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Analysis Mathematica, **32**, 49 – 80 (2006).

[15] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Матем. Сб., **199**, no. 5, 3 – 26 (2008).

[16] А. М. Олевский, "Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана", ДАН СССР, **238**, 796 – 799 (1978).

[17] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", East Journal on Approximations, 5, no. 1, 1 – 15 (1999).
[18] Е. Д. Лившиц, "Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций", Матем. сб., 198, no. 5, 95 – 114 (2007).
[19] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Two remarks on quasi greedy bases in the L space", Изв. НАН Армении, серия Математика, 40, no. 1, 2 – 14 (2005).
[20] Г. М. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по снтеме Уолша в пространстве L^p", Изв. НАН Армении, серия Математика, 43, no. 4, 3 – 12 (2008).
[21] К. Навасардян, А. Степанян, "О рядах Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика.43, no. 4, 3 – 12 (2007).

Поступила 10 декабря 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 22-35.

ON FINSLER Σ–SPACES

D. LATIFI AND M. TOOMANIAN

University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran
Islamic Azad University, Karaj, Iran
E-mails: *latifi@uma.ac.ir*; *toomanian@yahoo.com*

Abstract. In this paper, we study Finsler Σ–spaces. We first prove that any Σ-space is a homogeneous Finsler space. Then we study some geometric properties of Berwald Σ–spaces and prove that any generalized symmetric Berwald space is a Berwald Σ–space where Σ is cyclic. Then we show that if each S^{σ} is parallel with respect to Berwald connection of a Berwald Σ–space then the space is locally symmetric. Finally we study some existence theorems.

MSC2010 numbers: 53C60, 53C35.
Keywords: Σ–space; generalized symmetric space; Finsler space; Berwald space.

1. Introduction

In recent years, a rapid development took place in Finsler geometry. Recall that a Finsler metric on a manifold is a family of Minkowski norms on tangent spaces. One of the basic motivations to study Finsler geometry is its important applications in physics and biology (see, e.g., [1]).

While many works have been done on the general geometric properties of Finsler geometry, such as connection, geodesics and curvature, only very little attention has been paid to the group aspects of this interesting field.

The study of homogeneous spaces equipped with some additional invariant geometric structures yields some important models for applications. E. Cartan began the exploration of symmetric spaces in the thirtieth of 20th century, probably bearing in mind some far going generalization of Riemannian spaces of constant curvature. Symmetric spaces have appeared to be very rich in content, stimulating the research in Lie groups, geometry, mechanics, physics, gravity, etc. E. Cartan explored Riemannian symmetric spaces and presented their complete classification in terms of Lie groups and Lie algebras (see, e.g., [10].

A remarkable breakthrough in the theory of symmetric spaces was achieved by O. Loos, [18]. He tried to describe symmetric spaces by means of binary operation

$x \cdot y = s_x(y)$ and by its algebraic properties. To this end, in [18] was given the following definition.

Definition 1.1. *A smooth manifold M endowed by a smooth operation $\cdot$, $(M, \cdot)$ is said to be a symmetric space if the following conditions are fulfilled:*

(1): $x \cdot x = x$,

(2): $x \cdot (x \cdot y) = y$,

(3): $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$

(4): *In an appropriate neighborhood U of $x \in M$, if $x \cdot y = x$ for some $y \in U$, then $y = x$.*

The next essential step was done by A. Ledger in [14], who introduced the notion of generalized symmetry on a manifold M, s_x, as a diffeomorphism satisfying $s_x x = x$, and there exists a neighborhood U of x such that if $s_x y = y$ for some $y \in U$, then $y = x$. Being influenced by the works of O. Loos and A. Ledger, O. Kowalski [12] and A. Fedenko [8] introduced the notion of regular s-manifolds, combining the ideas of O. Loos and A. Ledger. Namely, the following definition was introduced.

Definition 1.2. *A smooth manifold M with a system of diffeomorphisms $\{s_x\}_{x \in M}$ is said to be a regular s–manifold if the following conditions are fulfilled:*

(1): $s_x x = x$,

(2): $s_x \circ s_y = s_{s_x y} \circ s_x$,

(3): $(s_x)_{*x} - Id_x$ *is invertible.*

The Σ–spaces and the reduced Σ–spaces were first introduced by O. Loos as generalizations of reflection spaces and symmetric spaces, respectively (see [19]). Then he proved that any Σ-space with compact Σ is a fibre bundle over a reduced Σ-space. The basic properties of a reduced Σ-space M, affine and Riemannian Σ–space were given in [16] and [17].

Let (M, F) be a Finsler space, where F is positively homogeneous of degree one. As in the Riemannian case, we have two types of definitions of isometry on (M, F), in terms of Finsler function in the tangent space and the induced non-reversible distance function on the base manifold M. It is well known that the two definitions are equivalent if the metric F is Riemannian. The equivalence of these two definitions in the general Finsler case was proved by S. Deng and Z. Hou [5]. Using this result,

S. Deng and Z. Hou [5] also proved that the group of isometries $I(M,F)$ of a Finsler space (M,F) is a Lie transformation group of M, and for any point $x \in M$, the isotropic subgroup $I_x(M,F)$ is a compact subgroup of $I(M,F)$. These results are important in the study of homogenous Finsler spaces.

Notice that the definition of symmetric Finsler space is a natural generalization of E. Cartan's definition of Riemmanian symmetric spaces. Recall that a Finsler space (M,F) is called symmetric Finsler space if for any point $p \in M$ there exists an involutive isometry s_p of (M,F) such that p is an isolated fixed point of s_p (see [6, 13]).

Observe that if we drop the involution property in the definition of symmetric Finsler space, keeping the property $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, $z = s_x(y)$, then we get a larger class of Finsler manifolds than the symmetric Finsler space.

The study of invariant structure on s–spaces and Σ–spaces is an important problem in differential geometry (see, e.g., [2, 3, 9]). The purpose of this paper is to study the Finsler Σ–spaces.

2. Finsler Spaces

In this section, we give a brief description of the basic quantities and fundamental formulas of Finsler geometry, for details the reader is referred to [1, 4].

Let M be an n–dimensional smooth manifold without boundary, and let TM denote its tangent bundle. A Finsler structure on M is a map $F : TM \longrightarrow [0,\infty)$ that possesses the following properties (see [4]):

(1) F is smooth on $\widetilde{TM} := TM - \{0\}$.

(2) $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$ for any $x \in M$, $y \in T_xM$ and $\lambda > 0$.

(3) F^2 is strongly convex, that is,

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y)$$

is positive definite for all $(x,y) \in \widetilde{TM}$.

Let (M,F) be a Finsler n–manifold with Finsler function $F : TM \longrightarrow [0,\infty)$, and let $(x,y) = (x^i, y^i)$ be the local coordinates on TM. The function F is called reversible if $F(x,y) = F(x,-y)$ for any $y \in T_xM$.

Notice that many Finsler quantities are functions on TM rather than on M. Some fundamental quantities and relations of Finsler geometry are:

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y) \qquad \text{(the fundamental tensor)},$$

$$C_{ijk}(x,y) := \frac{1}{4}\frac{\partial^3 F^2(x,y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \qquad \text{(the Cartan tensor)},$$

$$\gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right),$$

$$N^i_j := \gamma^i_{jk} y^k - C^i_{jk}\gamma^k_{rs} y^r y^s, \quad \text{where} \quad C^i_{jk} = g^{il} C_{ljk}.$$

According to [4], the pull-back bundle $\pi^* TM$ admits a unique linear connection, called Chern's connection. Its connection forms are characterized by the structure equations:

- Torsion freeness: $d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j$.
- Almost g–compatibility: $dg_{ij} = g_{ik}\omega^k_j + g_{kj}\omega^k_i + 2C_{ijk}\omega^{n+k}$, where $\omega^i = dx^i$ and $\omega^{n+k} = dy^k + y^j\omega^k_j$.

It is easy to see that torsion freeness is equivalent to the absence of dy^k terms in ω^i_j, namely $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$, together with the symmetry $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

To define the flag curvature, we need some differential forms on $TM - \{0\}$. Let

$$\delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j.$$

The curvature 2-form of the Chern's connection are

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k.$$

Since Ω^i_j are 2-forms on the manifold $TM - \{0\}$, they can be expanded as

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2} Q^i_{jkl}\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}.$$

Note that Q vanishes for the Chern's connection. Let $R_{jikl} = g_{is} R^s_{jkl}$.

A flag on M at $x \in M$ is a pair (P, y), where P is a plane in the tangent space $T_x M$ and y is a non-zero vector in P. The flag curvature of the flag (P, y) is defined to be

$$K(P,y) = \frac{u^i (y^j R_{jikl} y^l) u^k}{g_y(y,y) g_y(u,u) - [g_y(y,u)]^2},$$

where $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ is any nonzero vector in P such that $P = \operatorname{span}\{y, u\}$. It can be shown (see [4]), that the quantity $K(P, y)$ is independent of the choice of u.

Definition 2.1. *A Finsler metric F on a manifold M is called a Berwald metric if in any standard local coordinate system (x^i, y^i) in $TM - \{0\}$, the Christoffel symbols*

$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x)$ are functions of $x \in M$ only, in which case, $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k$ are quadratic in $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$.

3. Reduced Σ-spaces

As it was mentioned above, the Σ-spaces and the reduced Σ-spaces were first introduced by O. Loos [19] as generalizations of reflection spaces and symmetric spaces, respectively. We first recall a definition and some basic results concerning Σ-spaces.

Definition 3.1 (O. Loos, [19]). *Let M be a smooth connected manifold, Σ be a Lie group, and $\mu : M \times \Sigma \times M \longrightarrow M$ be a smooth map. Then the triple (M, Σ, μ) is called a Σ-space if it satisfies the following conditions:*

(Σ_1): $\mu(x, \sigma, x) = x$,

(Σ_2): $\mu(x, e, y) = y$,

(Σ_3): $\mu(x, \sigma, \mu(x, \tau, y)) = \mu(x, \sigma\tau, y)$,

(Σ_4): $\mu(x, \sigma, \mu(y, \tau, z)) = \mu(\mu(x, \sigma, y), \sigma\tau\sigma^{-1}, \mu(x, \sigma, z))$,

where $x, y, z \in M$, $\sigma, \tau \in \Sigma$ and e is the identity element of Σ. The triple (M, Σ, μ) is usually just replaced by M.

For a fixed point $x \in M$ we define a map $\sigma_x : M \longrightarrow M$ by $\sigma_x(y) = \mu(x, \sigma, y)$ and a map $\sigma^x : M \longrightarrow M$ by $\sigma^x(y) = \sigma_y(x)$. Then in terms of these maps the above conditions can be written as follows:

(Σ_1'): $\sigma_x(x) = x$,

(Σ_2'): $e_x = id_M$,

(Σ_3'): $\sigma_x \tau_x = (\sigma\tau)_x$,

(Σ_4'): $\sigma_x \tau_y \sigma_x^{-1} = (\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma_x(y)$.

Example 3.1.

(i): Symmetric spaces are Σ – *spaces*.

(ii): Let $\nu : M \times M \longrightarrow M$ be a smooth map such that the maps s_x, $x \in M$, given by $s_x(y) = \nu(x, y)$ for all $y \in M$ satisfy the following conditions:

(a) $s_x(x) = x$,

(b) each s_x is a diffeomorphism of M,

(c) $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, where $z = s_x(y)$.

We then call $\{s_x\}_{x\in M}$ a regular s–structure on M. Let $\mathbf{Z}$ be the additive group of all integers. We define a map $\mu : M \times \mathbf{Z} \times M \longrightarrow M$ by $\mu(x, k, y) = (s_x)^k(y)$ for all $x, y \in M$ and all $k \in \mathbf{Z}$. Then we can check by easy computation that $(M, \mathbf{Z}, \mu)$ is a Σ–space. Thus, a regular s–structure on M is a special case of a Σ–structure.

For each $x \in M$ by Σ_x we denote the image of Σ under the map $\Sigma \longrightarrow \Sigma_x$, $\sigma \longrightarrow \sigma_x$. Then it follows from $(\Sigma_2^{'})$ and $(\Sigma_3^{'})$ that Σ_x is a subgroup of $Diff(M)$ and the map is a homomorphism.

Let M and $M^{'}$ be Σ–spaces. We say that a smooth map $\phi : M \longrightarrow M^{'}$ is a homomorphism if

$$\phi(\mu(x, \sigma, y)) = \mu(\phi(x), \sigma, \phi(y)), \qquad \forall x, y \in M, \sigma \in \Sigma,$$

or equivalently, if $\phi o \sigma_x = \sigma_{\phi(x)} o \phi$. If ϕ has a smooth inverse, then it is an isomorphism, and if, in addition $M = M^{'}$, then ϕ is an automorphism of M. We write $Aut(M)$ for the group of automorphism of M. When Σ is abelian, it follows from $(\Sigma_4^{'})$ that for $x \in M$, σ_x is an automorphism. Also, for any Σ–space M it can be seen that the map $\phi = \sigma_x \circ \sigma_y^{-1}$ is an automorphism. The subgroup of $Aut(M)$ generated by $\sigma_x \sigma_y^{-1}$, $x, y \in M, \sigma \in \Sigma$ is denoted by G.

For each $\sigma \in \Sigma$ we define a (1,1) tensor field S^σ on the Σ–space M by

$$S^\sigma X_x = (\sigma_x)_* X_x \qquad \forall x \in M, X_x \in T_x M.$$

It is clear that S^σ is smooth and the following hold:
(i) $\tau_x(S^\sigma X) = S^{\tau\sigma\tau^{-1}}(\tau_x X)$ for $x \in M, \sigma, \tau \in \Sigma, X \in \chi(M)$,
(ii) S^σ is $Aut(M)$–invariant,
(iii)$(\sigma^x)_* X_x = (I - \sigma_x)_* X_x = (I - S^\sigma) X_x$.

Definition 3.2. *A Σ–space M is called a reduced Σ–space if for each $x \in M$ the following are fulfilled:*

(1) *$T_x M$ is generated by the set of all $\sigma^x(X_x)$, that is,*

$$T_x M = gen\{(I - S^\sigma) X_x | X_x \in T_x M, \sigma \in \Sigma\}.$$

(2) *If $X_x \in T_x M$ and $\sigma^x X_x = 0$ for all $\sigma \in \Sigma$, then $X_x = 0$, and thus no non-zero vector in $T_x M$ is fixed by all S^σ.*

We remark that, for a Σ–space (M, Σ, μ) with a cyclic or compact Lie group Σ, the conditions (1) and (2) in Definition 3.2 are equivalent (see [15]).

4. Finsler Σ-spaces

In this section we study the Finsler Σ-spaces. Notice that a Finsler Σ-space (M, Σ, F) is just a reduced Σ-space together with a Finsler metric which is Σ-invariant, while a metrisable Σ-space is just a reduced Σ-space admitting a Finsler metric for which it is a Finsler Σ-space. More precisely, we have the following definition.

Definition 4.1. *A Finsler Σ-space, denoted by (M, Σ, F), is a reduced Σ-space together with a Finsler metric F which is invariant under Σ_p for $p \in M$.*
A metrisable Σ-space is a reduced Σ-space which admits a Σ_p-invariant Finsler metric.

Theorem 4.1. *Let M be a Finsler Σ-space. Then M is isomorphic to a homogeneous space $\frac{K}{H}$, where K is a transitive closed Lie subgroup of $I(M, F)$ on which Σ acts as a Lie transformation group, and H is its isotropic subgroup at $p \in M$ satisfying*

$$(K^{\Sigma})_o \subset H \subset K^{\Sigma}.$$

Proof. Let $K = (Aut(M) \cap I(M, F))_o$ and $\mathfrak{k}$ be its Lie algebra. Observe that Σ acts as Lie transformation group on $\mathfrak{k}$ by $(\sigma, X) \longrightarrow (\sigma_p)_* X$ for $\sigma \in \Sigma, X \in \mathfrak{k}$ and a fixed point $p \in M$. Clearly the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} & (\sigma, X) \to \sigma_p(X) & \\ \Sigma \times \mathfrak{k} & \longrightarrow & \mathfrak{k} \\ (id, \exp) \downarrow & & \downarrow \exp \\ \Sigma \times K & \longrightarrow & K \\ (\sigma, \varphi) & \to \sigma_p \circ \varphi \circ \sigma_p^{-1} & \end{array}$$

Since K is connected it follows that Σ acts on K as a Lie transformation group. Next, since $Aut(M) \cap I(M, F)$ is transitive on M, then K is also transitive on M and M is diffeomorphic to $\frac{K}{H}$, where H is the isotropy subgroup of K at p (see [11]). Now if $h \in H$, then we have

$$\sigma_p \circ h \circ \sigma_p^{-1} = \sigma_p \circ \sigma_{h(p)}^{-1} \circ h = h,$$

implying that $H \subset K^{\Sigma}$. If X belongs to the Lie algebra of K^{Σ}, then for all $\sigma \in \Sigma$ we have $(\sigma)_*(X) = X$, and in particular, at p we have $(\sigma_p)_* X_p = X_p$. On the other hand, since M is reduced, we have $X_p = 0$. Therefore the one parameter subgroup φ_t satisfies $\varphi_t(p) = p$ and $X \in \mathfrak{h}$, and hence $(K^{\Sigma})_o \subset H \subset K^{\Sigma}$.

Next, we define $\mu' : \frac{K}{H} \times \Sigma \times \frac{K}{H} \longrightarrow \frac{K}{H}$ by $(aH, \sigma, bH) \longrightarrow a\sigma_p a^{-1} b\sigma_p^{-1} H$ (which is well defined). We can easily see that $\frac{K}{H}$ is a Σ–space. Now, defining $\varphi : \frac{K}{H} \longrightarrow M$ by $kH \longrightarrow k(p)$, for $a, b \in K, \sigma \in \Sigma$ we can write

$$\varphi \circ \mu'(aH, \sigma, bH) = a\sigma_p a^{-1} b\sigma_p(p) = \sigma_{a(p)}(b(p)) = \mu(a(p), \sigma, b(p)).$$

Then we have

$$\varphi \circ \mu' = \mu \circ (\varphi \times id \times \varphi).$$

This completer the proof of Theorem 4.1.

Let (M, F) be a connected Finsler space and let $I(M, F)$ be the group of all isometries on M. An isometry on (M, F) with isolated fixed point x is called a symmetry at x, and is written as s_x (see [9]).

Definition 4.2. *A family $\{s_x | x \in M\}$ of symmetries on a connected Finsler space (M, F) is called an s–structure on (M, F). An s–structure $\{s_x | x \in M\}$ on (M, F) is called regular if for every pair of points $x, y \in M$ we have*

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \qquad z = s_x(y) \tag{4.1}$$

Definition 4.3. *A generalized symmetric Finsler space is defined to be a connected Finsler manifold (M, F) admitting a regular s–structure.*

Proposition 4.1. *Let (M, F) be a generalized symmetric Berwald space. Then M is a Berwald Σ–space, where Σ is cyclic.*

Proof. Let Σ be the group isomorphic to the cyclic group generated by s_p for a fixed point $p \in M$. We first show that Σ does not depend on the choice of p. Let $q \in M$, then there is an automorphism φ such that $\varphi(q) = p$, and

$$\varphi \circ s_q = s_p \circ \varphi.$$

Hence if $s_q^k = id$ for some k, then $s_p^k = id$.

Now define $\mu : M \times \Sigma \times M \longrightarrow M$ by $\mu(x, s^i, y) = s_x^i(y)$, and observe that (Σ_1) and (Σ_2) are trivial, while (Σ_3) follows from (1). Also, S leaves no vector in T_pM fixed, and hence $(I - S)$ is non-singular. Therefore M is a reduced Σ–space. This completes the proof. □

Theorem 4.2. *Let (M, Σ, F) be a Berwald Σ–space. If each S^σ is parallel with respect to the Berwald connection, then the space is locally symmetric.*

Proof. Let $X, Y, Z \in \chi(M)$. Taking into account that the curvature tensor R is invariant with respect to the isometry σ_x for all $x \in M$, we have

$$S^\sigma(R(X,Y,Z)) = R(S^\sigma X, S^\sigma Y, S^\sigma Z).$$

Differentiating covariantly in the direction of $W \in \chi(M)$ and using $\nabla S^\sigma = 0$, we get

$$S^\sigma \nabla_W R(X,Y,Z) = \nabla_W R(S^\sigma X, S^\sigma Y, S^\sigma Z).$$

Therefore $S^\sigma[(\nabla_W R)(X,Y,Z) + R(\nabla_W X, Y, Z)$
$+R(X, \nabla_W Y, Z) + R(X, Y, \nabla_W Z)] = (\nabla_W R)(S^\sigma X, S^\sigma Y, S^\sigma Z)$
$+R(\nabla_W S^\sigma X, Y, Z) + R(X, \nabla_W S^\sigma Y, Z) + R(X, Y, \nabla_W S^\sigma Z)$.

On the other hand, since R and ∇R are $S^\sigma-$invariant and

$$\nabla_W S^\sigma X = S^\sigma(\nabla_W X) \quad \nabla_W S^\sigma Y = S^\sigma(\nabla_W Y) \quad \nabla_W S^\sigma Z = S^\sigma(\nabla_W Z),$$

we obtain

$$(\nabla_{(I-S^\sigma)W} R)(S^\sigma X, S^\sigma Y, S^\sigma Z) = 0.$$

Finally, since S^σ's are non-singular and the $\Sigma-$space is reduced, it follows that $\nabla R = 0$. Theorem 4.2 is proved.

Theorem 4.3. *Let (M, Σ, F) be a reversible Berwald $\Sigma-$space. If each S^σ is parallel with respect to the Berwald connection and the flag curvature of (M, F) is everywhere non-zero, then F is Riemannian.*

Proof. By Theorem 4.2 we have $\nabla R = 0$. So the geodesic symmetry s_p is an affine symmetry. Now let $q \in M$. Join q to p by a curve γ. Let τ denote the parallel transformation from p to q along γ. Then for any $U, V \in T_qM$ we have

$$g_Y(U,V) = g_{\tau(Y)}(\tau(U), \tau(V)) = g_{d\sigma_p(\tau(Y))}(ds_p(\tau(U), ds_p(\tau(V)))).$$

Let $\tau(Y), \tau(U), \tau(V)$ be the results of the parallel displacements along γ of Y, U, V, respectively. Observe that s_p, being an affine symmetry, transforms vectors that are parallel along γ to vectors that are parallel along $s_p(\gamma)$. Therefore $ds_p(\tau(Y))$, $ds_p(\tau(U))$, $ds_p(\tau(V))$ must be the results of parallel displacements along $s_p(\gamma)$ of $ds_p(Y)$, $ds_p(U)$, $ds_p(V)$, respectively. Thus, we can write

$$g_{ds_p(\tau(Y))}(ds_p(\tau(U)), ds_p(\tau(V))) = g_{ds_p(Y)}(ds_p(U), ds_p(V)),$$

implying that $g_Y(U,V) = g_{ds_p(Y)}(ds_p(U), ds_p(V))$. Therefore

$$F(ds_p(Y)) = \sqrt{g_{ds_p(Y)}(ds_pY, ds_pY)} = \sqrt{g_Y(Y,Y)} = F(Y).$$

So the geodesic symmetry s_p is a local isometry, implying that (M, F) is a locally geodesic symmetric space. Therefore by Theorem 8.5 of [6] we conclude that F is a Riemannain metric. Theorem 4.3 is proved.

Definition 4.4. *Let G be a connected Lie group, H be a closed subgroup of G, and let Σ be a Lie group of automorphism of G. Then (G, H, Σ) is called a $\Sigma-$triple if the following conditions hold:*

(i): *G acts effectively on $\frac{G}{H}$.*

(ii): *$(G^{\Sigma})_o \subset H \subset G^{\Sigma}$, where G^{Σ} is the closed subgroup of G defined by $G^{\Sigma} = \{x \in G | \sigma(x) = x, \forall \sigma \in \Sigma\}$.*

(iii): *The subgroup of $Aut(\mathfrak{g})$ generated by $Ad(H)$ and Σ_* has a compact closure in $Aut(\mathfrak{g})$, where Σ_* is the image of Σ under its differential representation of G.*

Theorem 4.4. *Let (G, H, Σ) be a $\Sigma-$triple. Then $\frac{G}{H}$ is a reductive homogeneous space.*

Proof. Let (G, H, Σ) be a $\Sigma-$triple and let Θ be the closure of the group generated by $Ad_G(H)$ and Σ_p in $GL(\mathfrak{g})$. Then we have $\Theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Now since Θ is compact, there exists a $\Theta-$invariant positive definite quadratic form $\langle , \rangle$ on $\mathfrak{g}$. Let

$$m = gen\{X - \sigma_*(X) | X \in \mathfrak{g}, \sigma \in \Sigma\},$$

and let $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ and $\sigma \in \Sigma$. Then we have

$$\langle X - \sigma_*(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, \sigma_*^{-1}(Y) \rangle = 0,$$

showing that $\mathfrak{h}$ and m are orthogonal subspaces of $\mathfrak{g}$. Also, if $X \in \mathfrak{g}$ is orthogonal to $\mathfrak{h}$ and m, then for all $Y \in \mathfrak{g}$ and $\sigma \in \Sigma$ we have

$$\langle X - \sigma_*(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, \sigma_*^{-1}(Y) \rangle = \langle X, Y - \sigma_*^{-1}(Y) \rangle = 0.$$

Thus $X - \sigma_*(X) = 0$ for all $\sigma \in \Sigma$, and since X is orthogonal to $\mathfrak{h}$, we have $X = 0$. This shows that $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus m$ and $\Theta(m) = m$. In particular, we have $Ad_G(H)(m) = m$, implying that $\frac{G}{H}$ is a reductive homogeneous space. Theorem 4.4 is proved.

Theorem 4.5. *Let (M, Σ, F) be a Finsler $\Sigma-$space and p be a fixed point of M. Let G be a Lie group satisfying the following conditions:*

(i): *G is a connected transitive Lie transformation group of M.*

(ii): *G is stable under the action of Σ in $Diff(M)$ by $(\sigma, g) \longrightarrow \sigma_p \circ \sigma_p^{-1}$.*

(iii): *$G \subset Aut(M) \cap C(M, F)$, where $C(M, F)$ is the group generated by $\{\sigma_p | p \in M, \sigma \in \Sigma\}$.*

Let H be the isotropy subgroup of G at p. Then Σ acts on G by automorphism satisfying $\pi \circ \sigma = \sigma_p \circ \pi$, and (G, H, Σ) is a $\Sigma-$triple.

Proof. It is clear that G is a topological Lie subgroup of $I(M, F)$. On the other hand, $\Sigma \cong \Sigma_p$ acts on M in the obvious way as a Lie transformation group. Hence Σ_p is a Lie subgroup of $I(M, F)$. It follows that Σ acts on $I(M, F)$ by automorphisms of the form

$$\Sigma \times I(M, F) \longrightarrow I(M, F), \qquad (\sigma, x) \longrightarrow \sigma_p \circ x \circ \sigma_p^{-1}.$$

Next, since the restriction $\Sigma \times G \longrightarrow I(M, F)$ is smooth and G is stable under the action of Σ, then $M \times G \longrightarrow G$ is well defined. Now, since G is connected, it is contained in the identity component of $I(M, F)$ which has a countable basis for its topology. Then, since G is a Lie subgroup of $I(M, F)$, it is the integral manifold of a left invariant integral distribution. Hence the map $\Sigma \times G \longrightarrow G$ is also smooth. Thus Σ acts on G by automorphism and if $\sigma \in \Sigma, x \in G$ we have

$$(\sigma_p \circ \pi)(x) = \sigma_p \circ x(p) = (\sigma_p \circ x \circ \sigma_p^{-1})(p) = (\pi \circ \sigma)(x),$$

implying that $\sigma_p \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

We now prove that (G, H, Σ) is a $\Sigma-$triple. To this end, observe first that G acts effectively on $\frac{G}{H}$ because $G \subset I(M, F)$. Now let $y \in H$, then $y(p) = p$, and since $y \in Aut(M)$, we have for all $\sigma \in \Sigma$

$$\sigma(y) = \sigma_p \circ y \circ \sigma_p^{-1} = \sigma_p \circ \sigma_{y(p)}^{-1} \circ y = y.$$

Thus, $y \in G^{\Sigma}$ and hence $H \subset G^{\Sigma}$.

On the other hand, if X belongs to the Lie algebra of G^{Σ}, then for all $\sigma \in \Sigma$ with $\sigma(X) = X$, we have

$$\pi(X) = (\pi \circ \sigma)(X) = (\sigma_p \circ \pi)(X) = \sigma_p(\pi(X)),$$

and since M is reduced $\Sigma-$space it follows that $\pi(X) = 0$, implying that $X \in \ker \pi$. Hence $(G^{\Sigma})_o \subset H$.

Now define the Lie group G' as the Lie subgroup of $I(M, F)$ defined on the closure of the group generated by G and Σ_p. Obviously $G \subset G'$, and since G and G' both are

Lie subgroups of $I(M,F)$ it follows that the inclusion map $i : G \longrightarrow G'$ is continuous and hence is smooth. Then G is a Lie subgroup of G'.

Next, denote the adjoint representations of G and G' by Ad_G and Ad, respectively, and observe that for $g \in G$ we have $Ad_G(g) = Ad(g)|_{\mathfrak{g}}$, implying that $Ad(g)$ preserves $\mathfrak{g}$. By (ii), for $\sigma \in \Sigma$, $Ad(\sigma_p)$ also preserves $\mathfrak{g}$. Hence, since $Ad : G' \longrightarrow Gl(\mathfrak{g}')$ is smooth, it follows that $Ad(\mathfrak{g}')$ for $g' \in G'$ also preserves $\mathfrak{g}$. Therefore the map $Ad|_{\mathfrak{g}} : G' \longrightarrow Gl(\mathfrak{g})$, $g' \longrightarrow Ad(g')|_{\mathfrak{g}}$ is smooth. Now let K be the isotropy subgroup of G' at p. This is a compact Lie subgroup of G', and hence k, the restriction of $Ad|_{\mathfrak{g}}$ to K, is smooth and so $k(K)$ is compact.

Finally, we show that θ, the closure of the group generated by $Ad_G(H)$ and Σ_p in $GL(\mathfrak{g})$ is contained in the compact group $k(K)$. Indeed, let $h \in H$, then since $H \subset K \subset G'$, we have

$$Ad_G(h) = Ad_G(h)|_{\mathfrak{g}} = Ad|_{\mathfrak{g}}(h) = k(h),$$

implying that $Ad_G(H) \subset k(K)$. Also, if $\sigma_p \in \Sigma_p$, then $\sigma_p \in K$, and hence $Ad(\sigma_p)|_{\mathfrak{g}} \in k(K)$. Now since $k(K)$ is compact, and hence, is closed in $GL(\mathfrak{g})$ and contains $Ad_G(H)$ and Σ_p, then θ is compact. Thus, (G,H,Σ) is a Σ-triple. Theorem 4.5 is proved.

Theorem 4.6. *Let (G,H,Σ) be a Σ-triple, and let $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ be a natural projection and $p = \pi(H)$. Then $M = \frac{G}{H}$ admits a Finsler Σ-space structure such that*

(a): $\sigma_p \circ \pi = \pi \circ \sigma$,

(b): $G \subset Aut(M)$

Proof. Let (G,H,Σ) be a Σ-triple, and let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ be the Lie algebras of G and H, respectively. Then we have $\Theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Since Θ is compact, there exist a direct sum decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus m$ with $\Theta(m) = m$ and a Θ-invariant Minkowski norm F on m.

Next, let $M = \frac{G}{H}, p = \pi(H)$ and let F_p be the Minkowski norm on T_pM corresponding to F induced by π. Then, since F is $Ad(H)$-invariant, F_p can be extended to a G-invariant Finsler metric on M (see [7]). It is easy to see that $M = \frac{G}{H}$ is a Σ-space with the smooth map

$$\mu : M \times \Sigma \times M \longrightarrow M \qquad (aH,\sigma,bH) \longrightarrow a\sigma(a^{-1}b)H.$$

Now we show that M is a reduced $\Sigma-$space. Indeed, let $X \in T_pM$, $p = \pi(H)$ and $\sigma_p(X) = X$ for all $\sigma \in \Sigma$. Then $X = \pi(\overline{X})$ for $\overline{X} \in m$, and hence we have

$$\pi(\overline{X}) = \sigma_p(X) = (\sigma_p \circ \pi)(\overline{X}) = \pi \circ \sigma(\overline{X}),$$

implying that $\pi(\overline{X} - \sigma(\overline{X})) = 0$. Hence $\overline{X} - \sigma(\overline{X}) \in \mathfrak{h}$, but since $\overline{X}, \sigma\overline{X} \in m$, we have $\overline{X} = \sigma(\overline{X})$ for all $\sigma \in \Sigma$. Therefore $\overline{X} \in \mathfrak{h}$, and hence $\overline{X} = 0$, implying that $X = 0$.

Now let $\overline{\Sigma}$ be the closure of Σ in $Aut(\mathfrak{g})$. Then, since Θ is compact and closed, it follows that $\overline{\Sigma}$ is closed in Θ and hence is compact. Now by using the Haar measure on Σ it can be shown that every $X \in m \cong T_pM$ is generated by the vectors of the form $X - \overline{\sigma}(X)$, $X \in m$, $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}$. Let V be the vector space generated by

$$\{X - \sigma(X) | \sigma \in \Sigma, X \in m\}.$$

Then, since every $\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}$ is the limit of a sequence in Σ, say σ_n, it follows that

$$X - \overline{\sigma}(X) = X - \lim_n \sigma_n(X) = \lim(X - \sigma_n(X)) \in V.$$

Therefore M is a reduced $\Sigma-$space. Now the assertion (a) of the theorem follows from equality $\sigma_p(gH) = \sigma(g)H$, while the assertion (b) follows from $\sigma_{gH} = t_g \circ \sigma_p \circ t_g^{-1}$, where $t_g(kH) = gkH$. Theorem 4.6 is proved.

Список литературы

[1] P. L. Antonelli , R. S. Ingarden and M. Matsumato, The Theory of Sprays and Finsler Spaces With Applications in Physics and Biology, FTPH, 58, Kluwer, Dordecht (1993).

[2] V. V. Balashchenko, "Canonical $f-$structures of hyperbolic type on regular $\Phi-$spaces", Russian Math. Surveys, 53, no. 4, 861 – 863 (1998).

[3] V. V. Balashchenko, N. A. Stepanov, "Canonical affinor structures of classical type on regular $\Phi-$spaces", Mat. Sb., 186, no. 11, 1551 – 1580 (1995).

[4] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Springer-Verlag, New York (2000).

[5] S. Deng, Z. Hou, "The group of isometries of a Finsler space", Pacific. J. Math., 207, no. 1, 149 – 155 (2002).

[6] S. Deng, Z. Hou, "On symmetric Finsler spaces", Israel Journal of Mathematics, 162, 197 – 219 (2007).

[7] S. Deng, Z. Hou, "Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds", J. Phys. A Math. Gen., 37, 8245 – 8253 (2004).

[8] A. S. Fedenko, "Homogeneous $\varphi-$spaces and spaces with symmetries", Herald of Belorussian University Ser. I, 2, 23 – 30 (1972).

[9] P. Habibi, A. Razavi, On generalized symmetric Finsler spaces, Geom. dedicata, 149, 121 – 127 (2010).

[10] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York (1978).

[11] S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundation of differential geometry I. II", John Wily and Sons (1963).

[12] O. Kowalski, Generalized Symmetric Spaces, Lect. Notes in Math. Springer Verlag (1980).

[13] D. Latifi, A. Razavi, "On homogeneous Finsler spaces", Rep. Math. Phys. 57, 357 – 366 (2006). Erratum: Rep. Math. Phys, 60, 347 (2007).

[14] A. J. Ledger, M. Obata, "Affine and Riemannian s-manifolds", J. Differential Geometry 2, 451 – 459 (1968).
[15] A. J. Ledger, Affine and Riemannian Σ–Spaces, Seminar on Math. Sci., no. 5, Yokohama, Keio Univ. (1982).
[16] A. J. Ledger, A. R. Razavi, "Reduced Σ–spaces", Illinois J. Math., 26, 272 – 292 (1982).
[17] A. J. Ledger, M. Toomanian, "Complete lifts of Σ–spaces", Math. Nachr., 141, 175 - 182 (1989).
[18] O. Loos, Symmetric Spaces, 1, 2, Benjamin, New York (1969).
[19] O. Loos, "An intrinsic characterisation of fibre bundles associated with homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 37, 160 – 179 (1972).

Поступила 7 марта 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 36-46.

О ЗАДАЧЕ КОШИ В МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ЖЕВРЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ С ВЕСОМ УРАВНЕНИЙ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет
Ереванский Государственный Университет
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com*; *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Доказывается существование единственного решения задачи Коши в мультианизотропных пространствах Жевре для одного класса гиперболических с весом уравнений с достаточно общим весом.

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: Задача Коши; гиперболический с весом оператор (многочлен); мультианизотропное пространство Жевре.

Введение

Работа посвящена нахождению достаточных условий для однозначной разрешимости Задачи Коши в определенных мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений. Распространяются результаты Л. Гординга [3], Ларсона [11], Л. Каттабрига [12] и обобщаются результаты Л. Родино [4], Д. Калво [6] и других об однозначной разрешимости задачи Коши на общие гиперболические (относительно $(n-1)$–мерных гиперплоскостей) уравнения. В частности, 1) при рассмотрении задачи Коши для уравнений с младшими членами в отличие от работы [6], где условия ставятся на каждый моном младшей части, мы ставим условия на младшие однородные многочлены, 2) однозначная разрешимость задачи Коши доказывается в более общих пространствах Жевре. Настоящая статья является продолжением работы [7], где получены необходимые условия для однозначной разрешимости задачи Коши, где установлены некоторые свойства гиперболических с весом многочленов и где достаточно подробно изложена история вопроса. Поэтому мы отсылаем читателя к этой работе для ознакомления с необходимыми понятиями, результатами и литературой, а здесь мы приводим лишь те обозначения, определения и ссылки на литературу без которых прочтение этой работы стало бы затруднительным.

1. Вспомогательные результаты

Пусть E^n и R^n n-мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $C^n = R^n \times iR^n$, $R^{n,0} = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, (j = 1, ..., n)\}$, N-множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$-множество n-мерных мультииндексов. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}.\partial/\partial x_j$ $(j = 1, ..., n)$.

Для набора точек $\aleph = \{a^1, ..., a^M\}$, $a^k \in R^{n,0}$ $(k = 1, ..., M)$ наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $R^{n,0}$, содержащий все точки набора $\aleph$ называется **многогранником Ньютона** набора $\aleph$ (см [1] или [2]).

Многогранник $\Re$ с вершинами из $R^{n,0}$ называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и вершину на каждой оси координат $R^{n,0}$. Полный многогранник $\Re$ называется **вполне правильным**, если внешние нормали (нормированные так, что $\min\limits_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$) всех $(n-1)-$мерных некоординатных граней $\Re$ (множество которых обозначим через $\Lambda^{n-1}(\Re)$)имеют положительные координаты. Для вполне правильного многогранника $\Re$ с вершинами из $R^{n,0}$ и вектора $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ обозначим через $\Re^0$ множество его вершин и положим

$$h_\Re(\xi) = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi|^\nu = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi_1|^{\nu_1}...|\xi_n|^{\nu_n},$$

$$\theta(\lambda, \Re) = \max_{\nu \in \Re}(\lambda, \nu); \quad d_0(\Re) \equiv \max_{\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)} \theta(\lambda, \Re). \tag{1.1}$$

Через B_n обозначим множество $n-$мерных вполне правильных многогранников $\Re \in R^{n,0}$, для которых $d_0(\Re) \leq 1$.

Всюду далее, где это не вызывает недоразумения, будем считать, что многогранник $\Re \in B_n$, порождающий вес $h_\Re$, фиксирован и опустим в обозначениях $h_\Re$, $d_0(\Re)$, $\theta(\lambda, \Re)$ и т.д символ $\Re$.

Рассмотрим многочлен от $(n+1)$ переменных $(\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, .., \xi_n) \in R^{n+1}$

$$P(\xi_0, \xi) = \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} \gamma_{(\alpha_0, \alpha)} \, \xi_0^{\alpha_0} \, \xi^\alpha,$$

где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов

$$(P) = \{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}, \quad \gamma_{(\alpha_0, \alpha)} \neq 0\}.$$

Представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$(1.2) \qquad P(\xi_0,\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi_0,\xi),$$

где $m = \max_{(\alpha_0,\alpha)\in(P)} (\alpha_0 + |\alpha|)$– порядок многочлена P, а P_j однородный многочлен порядка j; $(j = 0, 1, ..., m)$.

Определение 1.1. *(см. [3]) Многочлен $P(\xi_0,\xi)$ называется гиперболическим относительно ξ_0, если $P_m(1,0,...,0) \neq 0$ и существует число $c \geq 0$ такое, что $|Im\xi_0| \leq c$ для точек $(\xi_0,\xi) \in C \times R^n$, для которых $P(\xi_0,\xi) = 0$.*

Определение 1.2. *(см. [4]) Многочлен $P(\xi_0,\xi)$ называется $h-$ гиперболическим относительно ξ_0, если $P_m(1,0,...,0) \neq 0$ и существует число $c > 0$ такое, что $|Im\xi_0| \leq c\, h(\xi)$ для точек $(\xi_0,\xi) \in C \times R^n$, для которых $P(\xi_0,\xi) = 0$.*

Для точки $\xi \in R^n$, многочлена R и числа $t > 0$ введём следующие функции Л. Хёрмандера (см. [5], формулы (10.1.7) и (10.4.2))

$$\tilde{R}((\xi_0,\xi),t) = \sqrt{\sum_{(\alpha_0,\alpha)\in N_0^{n+1}} |R^{(\alpha_0,\alpha)}(\xi_0,\xi)|^2\, t^{2(\alpha_0+|\alpha|)}}; \quad \tilde{R}(\xi_0,\xi) = \tilde{R}(\xi_0,\xi,1).$$

Для $t > 0$ обозначим $A_h(t) = \{(\xi_0,\xi,\tau) \in R^{n+2}, |\tau| \geq t\, h(\xi)\}$ и $A_h = A_h(1)$.

Определение 1.3. *Скажем, что многочлен P $h-$сильнее многочлена Q (Q $h-$слабее P) и запишем $Q \prec^h P$, если с некоторой постоянной $C > 0$*

$$\tilde{Q}((\xi_0,\xi),\tau) \leq C\tilde{P}((\xi_0,\xi),\tau) \quad \textit{при} \quad (\xi_0,\xi,\tau) \in A_h.$$

Отметим, что Л. Хёрмандером введено понятие сравнения многочленов (дифференциальных операторов), когда множество A_h заменяется множеством R^{n+2}, при этом Л. Гордингом и С. Свенссоном (см. [8], или [5], Теорема 12.4.6) доказано, что если главная однородная часть P_m оператора $P = P_m + Q$ гиперболична (по Гордингу), то оператор P гиперболичен тогда и только тогда, когда Q слабее P_m. В работе [9] найдены алгебраические условия такого сравнения.

Лемма 1.1. *Если однородный многочлен $P_m(\xi_0,\xi)$ порядка m гиперболичен относительно ξ_0, то с некоторой постоянной $c > 0$*

$$|P_m(\xi_0 + i\tau,\xi)| \geq c\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau) \quad \textit{при} \quad ((\xi_0,\xi),\tau) \in R^{n+2}.$$

Доказательство. Так как при $\tau = 0$ доказуемое неравенство превращается в равенство с $c = 1$, то можем далее считать, что $\tau \neq 0$. Так как (см. [5], оценка (12.4.3)) с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$|P_m(\xi_0 + i, \xi)| \geq C_1 \bar{P}_m((\xi_0, \xi), 1), \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi) \in R^{n+1},$$

то для любого $\tau \neq 0$

$$|P_m(\frac{\xi_0}{\tau} + i, \frac{\xi}{\tau})| \geq C_1 \bar{P}_m(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau}, 1), \quad \text{при} \quad (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}.$$

Так как в силу однородности многочлена P_m имеем что $\alpha_0 + |\alpha| = m$ для всех $(\alpha_0, \alpha) \in (P)$, то отсюда вытекает, что

$$|\tau|^{-m} \bar{P}_m((\xi_0, \xi), \tau) = |\tau|^{-m} \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |P_m^{(\alpha_0, \alpha)}(\xi_0, \xi)|^2 |\tau|^{2(\alpha_0 + |\alpha|)}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |P_m^{(\alpha_0, \alpha)}(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau})|^2} = \bar{P}_m(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau}, 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_1} \, |P_m(\frac{\xi_0}{\tau} + i, \frac{\xi}{\tau})| \quad \text{при} \quad (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}, \quad \tau \neq 0.$$

Умножая полученное неравенство на τ^m и учитывая однородность многочлена P_m, отсюда получим

$$\bar{P}_m((\xi_0, \xi), \tau) \leq \frac{1}{C_1} \, |P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)| \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}, \tau \neq 0.$$

Лемма 1.1 доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть $P_m(\xi_0, \xi)$ и $Q_k(\xi_0, \xi)$ однородные многочлены порядков соответственно m и k, при этом $Q_k \prec^h P_m$. Тогда*

1) если P_m гиперболичен относительно ξ_0, то с некоторой постоянной $C > 0$ и

$$\text{(1.3)} \qquad \bar{Q}_k((\xi_0 + i\tau, \xi), \tau) \leq C \, |P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)|, \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi, \tau) \in A_h.$$

$$\text{(1.4)} \qquad 2) \lim_{t \to \infty} \sup_{((\xi_0, \xi), \tau) \in A_h(t)} \frac{\bar{Q}_k((\xi_0, \xi), \tau)}{\bar{P}_m((\xi_0, \xi), \tau)} = 0.$$

Доказательство пункта 1). Пусть $Q_k \prec^h P_m$. Применяя формулу Тейлора получим с некоторыми постоянными $C_j > 0$ $(j = 1, 2, 3)$ и для всех $(\xi_0, \xi, \tau) \in A_h$

$$\bar{Q}_k((\xi_0 + i\tau, \xi), \tau) = \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |Q_k^{(\alpha_0, \alpha)}(\xi_0 + i\tau, \xi)|^2 \, |\tau|^{2(\alpha_0 + |\alpha|)}} \leq$$

$$\leq C_1 \sqrt{\sum_{(\alpha_0,\alpha)\in N_0^{n+1}} \sum_{\beta_0\in N_0} |Q_k^{(\alpha_0+\beta_0,\alpha)}(\xi_0,\xi)|^2 \, |\tau|^{2\beta_0} \, |\tau|^{2(\alpha_0+|\alpha|)}} \leq$$

$$\leq C_2 \sqrt{\sum_{(\gamma_0,\gamma)\in N_0^{n+1}} |Q_k^{(\gamma_0,\gamma)}(\xi_0,\xi)|^2 \, |\tau|^{2(\gamma_0+|\gamma|)}} =$$

$$= C_2 \, \tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau) \leq C_3 \, \tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau).$$

Отсюда и из леммы 1.1 следует утверждение пункта 1).

Доказательство пункта 2). Так как $Q_k \prec^h P_m$, т.е. с некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau) \leq C_4 \tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau) \text{ при всех } (\xi_0,\xi,\tau) \in A_h,$$

то для произвольных $\rho \neq 0$, $(\xi_0,\xi) \in R^{n+1}$ и $|\tau| \geq h(\frac{\xi}{\rho})$ имеем

$$\tilde{Q}_k(\frac{(\xi_0,\xi)}{\rho},\tau) \leq C_4 \tilde{P}_m(\frac{(\xi_0,\xi)}{\rho},\tau).$$

Отсюда в силу однородности многочленов P_m и Q_k имеем

$$|\tau|^{-k}\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\rho\tau) \leq C_1|\tau|^{-m}\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\rho\tau) \ \ \forall(\xi_0,\xi) \in R^{n+1}, \rho \geq h(\xi/\tau).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$ выбрано так, что $C_4 |\tau_0|^{-m+k} = \varepsilon$ (напомним, что $m > k$). Так как с некоторой постоянной $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon)$ $\tau_0 \, h(\xi/\tau_0) \leq \tau_1 \, h(\xi)$ для всех $\xi \in R^n$, то отсюда получаем

$$\sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(\tau_1)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon.$$

Так как $A_h(\rho_1) \subset A_h(\rho_2)$ при $\rho_1 \geq \rho_2$, то отсюда имеем для всех $\rho \geq \tau_1$

$$\sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(\rho)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon,$$

следовательно, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(t)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то это доказывает второй пункт леммы. Лемма 1.2 доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует

Следствие 1.1. *При условиях леммы 1.1 существует число $C > 0$ такое, что*

$$\tilde{Q}_k((\xi_0 + i\tau,\xi),1) \leq C \, |P_m(\xi_0 + i\tau,\xi)| \ \text{ при всех } \ (\xi_0,\xi,\tau) \in A_h; \ \ |\tau| \geq 1.$$

Лемма 1.3. *Пусть однородный многочлен $P_m(\xi_0,\xi)$ порядка m гиперболичен относительно ξ_0, а однородные многочлены $Q_j(\xi_0,\xi)$ порядка j, $j=0,1,...,m-1$ $h-$слабы P_m. Тогда многочлен $P_m+Q_0+...+Q_{m-1}$ $h-$гиперболичен относительно ξ_0.*

Доказательство. Применив формулу Тейлора, получим с некоторой постоянной $C_1>0$ и для всех $(\xi_0,\xi,\tau)\in R^{n+2}$

$$|Q_j(\xi_0+i\tau,\xi)|\le C_1\,\tilde{Q}_j((\xi_0,\xi),\tau),\quad j=0,1,...,m-1.$$

С другой стороны в силу леммы 1.1 с некоторой постоянной $C_2>0$

$$|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)|\ge C_2\,\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)\ \text{ при }\ (\xi_0,\xi,\tau)\in R^{n+2}.$$

Поэтому в силу пункта 2) леммы 1.2 существует число $t_0>0$ для которого

$$\sum_{j=0}^{m-1}|Q_j(\xi_0+i\tau,\xi)|\le\frac{1}{2}|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)|,\quad \text{при всех}\quad (\xi_0,\xi,\tau)\in A_h(t_0),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2}|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)|\le|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)+\sum_{j=0}^{m-1}Q_j(\xi_0+i\tau,\xi)|\le$$

$$\le\frac{3}{2}|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)|,\quad \text{при всех}\quad (\xi_0,\xi,\tau)\in A_h(t_0).$$

Так как многочлен $P_m(\xi_0,\xi)$ гиперболичен относительно ξ_0, то из леммы 1.1 следует, что $P_m(\xi_0+i\tau,\xi)\ne0$ для всех $(\xi_0,\xi,\tau)\in R^{n+2}$, $\tau\ne0$, откуда, в свою очередь следует, что

$$P_m(\xi_0+i\tau,\xi)+\sum_{j=0}^{m-1}Q_j(\xi_0+i\tau,\xi)\ne0,\quad \text{при всех}\quad (\xi_0,\xi,\tau)\in R^{n+2},\ \ |\tau|\ge t_0\,h(\xi),$$

т.е. многочлен $P_m+Q_0+...+Q_{m-1}$ $h-$ гиперболичен относительно ξ_0. □

2. Некоторые свойства многогранников Ньютона и мультианизотропных пространств Жевре

Для $\mathfrak{R}\in B_n$ через $\partial\mathfrak{R}$ обозначим множество точек $\nu\in\mathfrak{R}$, для которых существует вектор $\lambda\in\Lambda^{n-1}(\mathfrak{R})$ такой, что $(\lambda,\nu)=\theta(\lambda)$.

Пусть $[a]-$ целая часть a и $\alpha\in N_0^n$. Обозначим $k(\alpha)=k(\alpha,\mathfrak{R})=inf\{t>0:t\,\alpha\in\mathfrak{R}\}$ и положим $k'(\alpha)=k'(\alpha,\mathfrak{R})=k(\alpha)$, если число $k(\alpha)-$ целое и $k'(\alpha)=[k(\alpha)]+1$, если $k(\alpha)-$ нецелое.

В этом пункте мы докажем несколько предложений, которыми будем пользоваться при доказательстве основного результата. Следующее предложение непосредственно следует из определения множества $\partial\Re$ и числа $k(\alpha)$.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re \in B_n$ и $\alpha \in N_0^n$. Тогда*

1) $\alpha/k(\alpha) \in \partial\Re$, при этом, если $\alpha/t \in \partial\Re$, то $k(\alpha) = t$

$$2)\alpha \in k'(\alpha)\,\Re \setminus [k'(\alpha) - 1]\,\Re.$$

Для $\Re \in B_n$ и $\mu_0 \in (0, d_0]$ через $\bar{\Re}(\mu_0) = \bar{\Re}(\Re, \mu_0)$ обозначим следующий (вполне правильный) многогранник в $R^{n+1,0}$ (обозначения $d_0 = d_0(\Re)$ и $\theta(\lambda)$ см. в (1.1))

$$\bar{\Re}(\mu_0) = \{(\nu_0, \nu) \in R^{n+1,0} : \frac{\nu_0}{\mu_0} + \frac{(\lambda, \nu)}{\theta(\lambda)} \le 1, \quad \textit{при всех} \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\}.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\Re \in B_n$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, $\mu_0 \in (0, d_0(\Re)]$ и $(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}$. Тогда $k((\alpha_0, \alpha), \bar{\Re}) = k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 достаточно доказать, что $(\alpha_0, \alpha)/[k(\alpha,) + \alpha_0/\mu_0] \in \partial\bar{\Re}(\mu_0)$. Так как $\Lambda^n(\bar{\Re}) = \{ (\frac{\theta(\lambda)}{\mu_0}, \lambda) : \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\}$, то в силу определения $k(\alpha, \Re)$ для любого $\lambda \in \Lambda^n(\bar{\Re})$

$$\left(\frac{(\alpha_0, \alpha)}{k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0}, \lambda\right) = [\alpha_0\,\frac{\theta(\lambda)}{\mu_0} + (\lambda, \alpha)]/[k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0] =$$

$$= \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} + \frac{\mu_0\,k(\alpha, \Re)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0}\,(\frac{\alpha}{k(\alpha, \Re)}, \lambda) \le$$

$$\le \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda) + \mu_0\,k(\alpha, \Re)\,\theta(\lambda)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} = \theta(\lambda). \tag{2.1}$$

С другой стороны, так как $\alpha/k(\alpha, \Re) \in \partial\Re$ (см. лемму 2.1), то $(\frac{\alpha}{k(\alpha,\Re)}, \lambda^0) = \theta(\lambda^0)$ для некоторого вектора $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$. Следовательно, имеем

$$((\alpha_0, \alpha, (\frac{\theta(\lambda^0)}{\mu_0}, \lambda^0))/(k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0}) =$$

$$= \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda^0)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} + \frac{\mu_0\,k(\alpha, \Re)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0}\,(\frac{\alpha}{k(\alpha, \Re)}, \lambda^0) = \theta(\lambda^0). \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) и определения $\bar{\Re}$ следует, что $(\alpha_0, \alpha)/(k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0}) \in \partial\bar{\Re}$, поэтому в силу леммы 2.1 $k((\alpha_0, \alpha), \bar{\Re}) = (k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0})$, что доказывает лемму 2.2. □

Для $\Re \in B_n$ и области $\Omega \subset E^n$ через $\Gamma^{\Re}(\Omega)$ обозначим мультианизотропный класс Жевре (см. [10]) как множество функций $f \in C^{\infty}(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует число $c = c(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha} f(x)| \le c^{j+1}\, j^j, \quad \text{при всех} \quad \alpha \in j\,\Re \cup N_0^n, \ j = 0, 1, \dots.$$

Так как $k'(\alpha, \Re) = l$ для любого $l \in N$ и $\alpha \in (l\,\Re) \setminus ((l-1)\,\Re)$, то следующее предложение непосредственно следует из определений класса $\Gamma^{\Re}$ и чисел $k(\alpha, \Re)$ и $k'(\alpha, \Re)$.

Лемма 2.3. *$f \in \Gamma^{\Re}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $c = c(f, K) > 0$ такая, что выполняется одно из следующих эквивалентных условий*

$$\sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha} f(x)| \le c^{k(\alpha,\Re)+1}\, (k(\alpha, \Re))^{k(\alpha,\Re)},$$

$$\sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha} f(x)| \le c^{k'(\alpha,\Re)+1}\, (k'(\alpha, \Re))^{k'(\alpha,\Re)}.$$

Приведем ещё два предложения, которые нам понадобятся при доказательстве основной теоремы. Ниже через $\hat{f}$ мы обозначаем преобразование Фурье функции f, через E' пространство распределений над $C^{\infty}(E^n)$, через S' пространство медленно растущих распределений, а через $\{\delta_{j,k}\}_{j,k=1}^{m-1}$ символ Кронекера.

Лемма 2.4. *(см.[6] или [4]) Пусть $\Re \in B_n$, $d_0(\Re) < 1$ (см. (1.1)). Тогда*

1) для $f \in \mathring{\Gamma}^{\Re}(E^n) \equiv \Gamma^{\Re}(E^n) \cap C_0^{\infty}(E^n)$ существуют положительные числа ε и C такие, что

$$|\hat{f}(\xi)| \le C\, e^{-\varepsilon\, h(\xi)}, \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^n, \tag{2.3}$$

2) если для распределения $f \in E'$ или $f \in S'$ выполняется оценка (2.3), то $f \in \Gamma^{\Re}(E^n)$.

Замечание 2.1. *Известно (см. [5], теорема 1.4.2), что $\mathring{\Gamma}^{\Re}(\Omega) \setminus \{0\} = \emptyset$ при $d_0(\Re) \ge 1$.*

Лемма 2.5. *(см. [5], Лемма 12.7.7) Пусть $P(D) = D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D + a_m$ обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $A = max\{|\lambda| : P(\lambda) = 0\}$, $B = max\{|Im\lambda| : P(\lambda) = 0\}$. Тогда для каждой пары $(j, k) :\ j, k = 0, 1, \dots, m-1$ для решения задачи Коши*

$$P(D) v_k(t) = 0, \quad v_k^{(j)}(0) = \delta_{j,k}$$

справедлива оценка $|D^l v_k(t)| \le 2^m\ (A+1)^{l+m-k}\ e^{(B+1)\,t}$, $l = 0, 1, \ldots$

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть* $\Re \in B_n$, $P_m(\xi_0, \xi)$ $m-$ *однородный многочлен, гиперболический относительно* ξ_0, $\{Q_j(\xi_0, \xi)\}_{j=1}^{m-1}$ $j-$ *однородные многочлены, при этом многочлен* Q_j $h_\Re-$*слабее многочлена* P_m $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$, $Q = Q_0 + \ldots + Q_{m-1}$. *Пусть многогранник* $\Im \in B_n$ *и натуральное число* $r > 1$ *таковы, что* $r\,\Re \subset \Im$. *Тогда для любых* $f_j \in \Gamma^{\Im}(E^n)$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ *задача Коши*

$$R(D_0, D)u(t,x) \equiv [P_m(D_0, D) + Q(D_0, D)]u(t,x) = 0, \ \ t > 0 \tag{3.1}$$

$$D_0^j u(0,x) = f_j(x) \ \ j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{3.2}$$

имеет единственное решение из $\Gamma^{\Im}(E^{n+1})$.

Замечание 3.1. *Отметим, что аналогичная теорема доказана в работе [6] Д. Калво в случае, когда* $\Im = r\,\Re$ *для некоторого* $r \in N$, *т.е. когда многогранники* $\Re$ *и* $\Im$ *подобны и когда условия на младшие члены* $Q(\xi_0, \xi) = \sum q_{(\alpha_0, \alpha)}\ \xi_0^{\alpha_0}\ \xi^{\alpha}$ *ставятся на каждый моном этой суммы.*

Доказательство. Пусть $R(D_0, \xi) = P_m(D_0, \xi) + Q(D_0, \xi)$ обыкновенный дифференциальный оператор, зависящий от параметра $\xi \in \Re^n$. Обозначим через $F_j(t, \xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ решение следующей задачи Коши

$$R(D_0, \xi)F(t, \xi) = 0, \ \ D_0^k F(0, \xi) = \delta_{j,k}, \ \ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Хорошо известно (см., например [5], Теорема 12.7.5), что решение задачи Коши

$$R(D_0, \xi)\ v(t, \xi) = 0, \ \ D_0^j v(0, \xi) = \hat{f}_j(\xi), \ \ j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{3.3}$$

можно представить в виде

$$v(t, \xi) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{f}_j(\xi)\ F_j(t, \xi). \tag{3.4}$$

В силу лемм 1.1 и 1.2 существует число $\kappa_1 > 0$ такое, что $R(\xi_0 + i\,\tau, \xi) \ne 0$ для всех $(\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}$, с $|\xi_0 + i\,\tau| \ge \kappa_1\,(|\xi| + 1)$. С другой стороны, в силу леммы 1.3 существует число $\kappa_2 > 0$ такое, что $|\tau| \le \kappa_2 h_\Re(\xi)$ для точек $(\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}$, для которых $R(\xi_0 + i\,\tau, \xi) = 0$. Поэтому в силу леммы 2.5 имеем для всех $k \in N_0$ и $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$

$$|D_0^k F_j(t, \xi)| \le 2^m\ [\kappa_1\,(|\xi| + 1) + 1]^{k+m-j}\ e^{[\kappa_2 h_\Re(\xi) + 1]\,|t|}. \tag{3.5}$$

Отсюда, из представления (3.4) и леммы 2.4 имеем с некоторыми положительными постоянными C_j, $(j = 1, ..., 5)$ (ниже $\check{v}(t,x)$ обратное преобразование Фурье функции $v(t,\xi)$ по ξ)

$$|D_0^{\alpha_0} D^{\alpha} \check{v}(t,x)| = |D_0^{\alpha_0} F_\xi^{-1}[\xi^\alpha v(t,\xi)]| =$$

$$= (2\pi)^{-n} |D_0^{\alpha_0} \int_{R^n} e^{i(x,\xi)} \xi^\alpha v(t,\xi) d\xi| \le C_1 \int_{R^n} |\xi^\alpha| \, |D_0^{\alpha_0} v(t,\xi)| d\xi \le$$

$$\le C_2 \int_{R^n} h_{\Im}^{k(\alpha,\Im)}(\xi)[\kappa_1(|\xi|+1)+1]^{\alpha_0+m} \, e^{-C_3 h_{\Im}(\xi)} \, e^{\kappa_2 \, (h_{\Im}(\xi)+1) \, |t|} \, d\xi \le$$

$$\le C_4 \int_{R^n} h_{\Im}^{k(\alpha,\Im)+\alpha_0/d_0(\Im)}(\xi) \, e^{-C_3 h_{\Im}(\xi) + C_5 \, h_{\Re}(\xi)(|t|+1)} \, d\xi.$$

Так как по условию теоремы $r\,\Re \subset \Im$, то $h_{\Re}(\xi)/h_{\Im}(\xi)$ сходится равномерно к 0 при $|\xi| \to \infty$. Поэтому в силу леммы 2.2 для любого $T > 0$ и для всех $t : |t| \le T$ отсюда имеем с некоторыми положительными постоянными $C_j = C_j(T)$ $(j = 6, 7, 8)$

$$|D_0^{\alpha_0} D^{\alpha} \check{v}(t,x)| \le C_6 \int_{R^n} h_{\Im}^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})}(\xi) \, e^{-C_7 \, h_{\Im}(\xi)} \, d\xi \le$$

$$\le C_8^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})+1} [k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})]^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})}.$$

В силу леммы 2.3 это означает, что $\check{v}(t,x) \in \Gamma^{\tilde{\Im}}(E_+^{n+1})$, где $E_+^{n+1} = \{(t,x),\, t > 0,\, x \in E^n\}$. Непосредственной проверкой легко убедится, что так полученная функция $\check{v}(t,x)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.2), т.е. является решением поставленной задачи Коши. Единственность этого решения следует из теоремы Хольмгрена (см., например [5], Теорема 12.7.2). Теорема 3.1 доказана. □

Abstract. In this paper we prove existence of a unique solution of Cauchy problem in the multianisotropic Gevre spaces for a class of weighted hyperbolic equations with sufficiently general weight.

Список литературы

[1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов," Труды МИАН СССР, 91, 59 – 91 (1967).

[2] S. Gindikin and L. R. Volevich, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partal Differential Equations.Mathematics and Its Applications (Soviet Series), 86, 266 p., Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London.

[3] L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., 85, 1 – 62 (1951).

[4] L. Rodino, Linear partial diff. operators in Govrey spaces, Word Scientific, Singapure (1993).
[5] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 2, Springer - Verlag (1983).
[6] D. Calvo, Multianizotropic Gevrey Classes and Causby Problem, Ph. D. Thesis in Mathematics, Universita degli Studi di Pisa (1999).
[7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О многочленах, гиперболических с весом. Изв. НАН Армении, Мат., 49, но. 5, 23 - 40 (2014).
[8] S. L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolisity of polynomials with hyperbolic principal parts", Ark. Mat. 8, 145 – 162 (1969).
[9] Г. Г. Казарян, "Гиперболические оператория с данной старшей частью", Дифф. уравнения, 15, но. 6, 1059 – 1069 (1979).
[10] V. N. Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", Izv. Nat. Acad. Armenii, Math., 31, no. 2, 33 – 47 (2002).
[11] E. Larson, "Generalized hyperbolity", Arkiv für Mat., 7, no. 2, 11 – 32 (2003).
[12] L. Cattabriga, "Alcuni problemi por equazoni differentiali lineari qon coefficienti constanti", Quad. Un. Mat. It. 24, Pitadora, Bologna (1983).

Поступила 31 января 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 47-63.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. А. ТАЛАЛЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *sart@ysu.am*

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы единственности для тригонометрических рядов и рядов по системе Хаара. С помощью полученных результатов изучается одна задача, поставленная П. Л. Ульяновым в 1964 году.

MSC2010 numbers: 42B25.

Ключевые слова: тригонометрические ряды; ряды Хаара, единственность рядов Фурье.

1. Введение

В настоящей работе изучается следующая задача, поставленная П. Л. Ульяновым [2] в 1964 году.

Гипотеза. *Пусть $c_n \to 0$ и некоторая последовательность частичных сумм $S_{v_q}(x) = \sum_{|n| \le v_q} c_n e^{2\pi i n x}$ тригонометрического ряда $\sum_n c_n e^{2\pi i n x}$ сходится при $v_q \uparrow +\infty$ к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду кроме счетного числа точек. Тогда ряд $\sum_n c_n e^{2\pi i n x}$ является рядом Фурье функции $f(x)$.*

Справедливость гипотезы остается неизвестной даже в случае, когда $f(x) \equiv 0$ и требуется сходимость к нулю сумм $S_{v_q}(x)$ во всех точках x. В работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть $\varepsilon_q \searrow 0$ и $\nu_q \nearrow +\infty$ $(\nu_1 = 0)$ – некоторые последовательности натуральных чисел. Тогда существует последовательность $N_j \nearrow +\infty$ $(N_1 = 0)$, $N_j \in \{\nu_q\}$, такая, что если тригонометрический ряд*

$$\sum_n c_n e^{2\pi i n x}, \quad |c_n| \le \varepsilon_{|n|}, \tag{1.1}$$

удовлетворяет одному из условий

a) $c_n = 0$ при $|n| \in \gamma = \cup_{j \ge 1}[N_{2j-1}, N_{2j})$,

b) $c_n = 0$ при $|n| \in \gamma^c = \cup_{j \ge 1}[N_{2j}, N_{2j+1})$, *и последовательность $\sum_{|n|\le N_j} c_n e^{2\pi i n x}$ сходится к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду на $[0,1)$ кроме счетного числа точек, то (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.*

Из этой теоремы немедленно следует утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть ν_q есть некоторая последовательность натуральных чисел, такая что $\nu_q \nearrow +\infty$ при $q \to +\infty$. Тогда любой тригонометрический ряд*

$$\sum_n c_n e^{2\pi i n x}, \tag{1.2}$$

с условием $c_n \to 0$ при $|n| \to +\infty$, можно разбить на два ряда

$$\sum_n c_n' e^{2\pi i n x}, \quad \sum_n c_n'' e^{2\pi i n x}, \tag{1.3}$$

где $c_n' + c_n'' = c_n$, $c_n' = c_n$ или $c_n' = 0$, $c_n'' = c_n$ или $c_n'' = 0$ так, что если последовательности $\sum_{|n|\le\nu_q} c_n' e^{2\pi i n x}$, $\sum_{|n|\le\nu_q} c_n'' e^{2\pi i n x}$ при $q \to +\infty$ сходятся к конечным интегрируемым функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ всюду на $[0,1)$ кроме счетного числа точек, то они являются, соответственно, рядами Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, и следовательно, ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

В параграфах 1–3 излагаются некоторые теоремы единственности для тригонометрических рядов и рядов по системе Хаара, которые используются в доказательстве теоремы 1.1 и имеют самостоятельный интерес.

2. О единственности рядов по системе Хаара.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$ на отрезке $T = [0,1)$.

Определение 2.1. Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$n = 2^k + i, \quad 1 \le i \le 2^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots. \tag{2.1}$$

Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$. При $n \geq 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Delta_k^i. \end{cases}$$

Если $\Delta = \Delta_k^i$ есть некоторый двоичный интервал и имеем (2.1), то иногда функцию Хаара $\chi_n(x)$ будем обозначить через $\chi_\Delta(x)$.

Определение 2.2. Будем говорить, что ряд по системе Хаара

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \chi_\mu(x) \tag{2.2}$$

обладает свойством A1), если существует последовательность $k(q) \nearrow +\infty$, такая, что для любой последовательности двоичных интервалов $\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \dots$ с условием $2^{k(q)} < \mu_q \leq 2^{k(q)+1}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{\mu_q}|}{\|\chi_{\mu_q}\|_\infty} = 0.$$

Теорема 2.1. *Если ряд* (2.2) *обладает свойством A1) и некоторая последовательность*

$$A_{l(q)}(x) = \sum_{\mu=1}^{l(q)} a_\mu \chi_\mu(x), \qquad l(q) \nearrow +\infty, \tag{2.3}$$

удовлетворяет условиям

а) $A_{l(q)}(x)$ *при* $q \to \infty$ *сходится по мере к функции* $f \in L^1[0,1)$,

б) $\sup_q |A_{l(q)}(x)| < +\infty$ *для всех* x, *не принадлежащих счетному множеству* $\{x_k\} \subset [0,1)$,

то ряд (2.2) *является рядом Фурье функции* $f(x)$.

Эта теорема является обобщением следующего результата из работы [1].

Теорема (Талалян-Арутюнян, 1964). *Если ряд (2.2) сходится к некоторой суммируемой функции* $f(x)$ *всюду на* T *кроме, быть может, счетного множества точек и для любой последовательности двоичных интервалов* $\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \dots$ *имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{\mu_k}|}{\|\chi_{\mu_k}\|_\infty} = 0,$$

то ряд (2.2) является рядом Фурье функции $f(x)$ *по системе Хаара.*

Доказательство теоремы 2.1 опирается на следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть ряд (2.2) удовлетворяет условию A1) и $x_0 \in [0,1)$. Если некоторая частичная сумма $A_l(x)$ этого ряда отлична от нуля на двоичном интервале Δ_1 его постоянства, т.е. $A_l(x) = d \neq 0$ при $x \in \Delta_1$, то существуют частичная сумма $A_{l_1}(x)$, $l_1 > l$, и двоичный интервал Δ' постоянства этой суммы, такие, что*

$$\Delta' \subset \Delta_1, \quad x_0 \notin \Delta' \quad \text{и} \quad A_{l_1}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta'. \tag{2.4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $d > 0$. Рассмотрим функцию $\chi_{l_1}(x)$ с носителем Δ_1. Очевидно $l_1 > l$. Обозначим через Δ_1^+ и Δ_1^- те половины Δ_1, где, соответственно, $a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \geq 0$ и $a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \leq 0$. Тогда $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \geq d$ при $x \in \Delta_1^+$ и $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \leq d$ при $x \in \Delta_1^-$. Если $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) > d$, $x \in \Delta_1^+$ и $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \neq 0$, $x \in \Delta_1^-$, то легко видеть, что требование леммы выполняется. Если же $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) = 0$ при $x \in \Delta_1^-$, то $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) = 2d$ при $x \in \Delta_1^+$. Продолжая этот процесс, нетрудно заметить, что возможны два случая

1) существуют $l_1 < l_2 < \dots < l_m$, такие, что

$$d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) + \dots + a_{l_m}\chi_{l_m}(x) > d \text{ при } x \in \Delta_{l_m}^+,$$

$$d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) + \dots + a_{l_m}\chi_{l_m}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{l_m}^-,$$

где Δ_{l_m} — носитель функции $\chi_{l_m}(x)$,

2) существует последовательность вложенных интервалов $\Delta_{l_1} \supset \Delta_{l_2} \supset \dots \supset \Delta_{l_m} \supset \dots$, такие, что $|\Delta_{l_m}| = \frac{1}{2}|\Delta_{l_{m-1}}|$, $m = 1, 2, \dots$ и имеем $a_{l_m}\chi_{l_m}(x) = 2^m d$.

В первом случае требование леммы выполняется мгновенно.

Во втором случае получаем, что в каждом промежутке $2^{k(q)} < j \leq 2^{k(q)+1}$ начиная с некоторого q_0 найдется функция $a_{\mu(q)}\chi_{\mu(q)}(x)$, $2^{k(q)} < \mu(q) \leq 2^{k(q)+1}$, такая, что при $q > q_0$ имеем

$$\left|a_{\mu(q)}\right| \left\|\chi_{\mu(q)}\right\|_\infty \geq C \cdot 2^{k(q)}, \tag{2.5}$$

где C — постоянная. Следовательно,

$$\frac{\left|a_{\mu(q)}\right|}{\left\|\chi_{\mu(q)}\right\|_\infty} \geq C > 0 \qquad \text{при } q > q_0. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) противоречит условию A1). Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть ряд (2.2) удовлетворяет условию A1) и последовательность его частичных сумм $A_{l(q)}(x)$, $l(q) \nearrow +\infty$, сходится по мере к функции*

$f(x) \in L^1(T)$. Пусть, далее, ряд $\sum\limits_{\mu} c_\mu \chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$c_\mu = \int\limits_T f(x)\,\chi_\mu(x)\,dx, \tag{2.7}$$

и некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда

$$\sum_{\mu} b_\mu \chi_\mu(x), \qquad b_\mu = a_\mu - c_\mu, \tag{2.8}$$

отлична от нуля на некотором интервале Δ его постоянства. Тогда если $x_0 \in T$, то для любого $M > 0$ и натурального N существуют частичные суммы $B_{l(q)}(x)$ и $A_{l(q)}(x)$, $q > N$, рядов (2.2) и (2.8), а также интервал постоянства Δ' этих сумм, такие, что $\Delta' \subset \Delta$, $x_0 \notin \Delta'$ и

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| > M \text{ при } x \in \Delta', \qquad B_{l(q)}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta'. \tag{2.9}$$

Доказательство. Отметим, что так как $c_\mu = O(\sqrt{n})$, ряд $\sum\limits_{\mu} b_\mu \chi_\mu(x)$ тоже удовлетворяет условию A_1). Пусть $B_l(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, где Δ — интервал постоянства суммы $B_l(x)$. Применяя лемму 2.1, найдем сумму $B_{l'}(x)$, $l' > l$, и интервал Δ_1 постоянства этой суммы, такие, что

$$l' > l, \quad B_{l'}(x) = d_1 \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad x_0 \notin \Delta_1. \tag{2.10}$$

Пусть q_0 выбрано так, что $l(q) > l'$ для всех $q > q_0$. Из (2.10) следует

$$\int\limits_{\Delta_1} B_{l'}(x)\,dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0, \tag{2.11}$$

а из условия $l(q) > l'$, $q > q_0$, следует

$$\int\limits_{\Delta_1} B_{l(q)}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta_1} B_{l'}(x)\,dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0, \qquad \forall q > q_0. \tag{2.12}$$

Предположение, что для некоторых фиксированных $M > 0$ и натурального N имеют место неравенства

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in \Delta_1, \tag{2.13}$$

для всех $q > \max\{q_0, N\}$ не верно. Действительно, так как по предположению $A_{l(q)}(x)$ при $q \to \infty$ сходится по мере к функции $f(x)$, из (2.13) получаем

$$\lim_{q\to\infty} \int\limits_{\Delta_1} \left|A_{l(q)}(x) - f(x)\right| dx = 0. \tag{2.14}$$

С другой стороны имеем

$$\lim_{q\to\infty}\int_T \left|S_{l(q)}(x) - f(x)\right| dx = 0. \tag{2.15}$$

Так как $B_{l(q)}(x) = A_{l(q)}(x) - S_{l(q)}(x)$, из (2.15) и (2.14) следует

$$\lim_{q\to\infty}\int_{\Delta_1} \left|B_{l(q)}(x)\right| dx = 0. \tag{2.16}$$

Условие (2.16) противоречит равенству (2.11). Следовательно, для любого $M > 0$ и N существует $q > N$, такое, что на некотором интервале $\Delta' \subset \Delta_1$, где Δ' интервал постоянства сумм $A_{l(q)}(x)$ и $B_{l(q)}(x)$, выполняется неравенство

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| > M, \qquad x \in \Delta'. \tag{2.17}$$

При этом, так как $\Delta_1 \subset \Delta$ и $x_0 \notin \Delta_1$, согласно (2.10), выполнено $\Delta' \subset \Delta$ и $x_0 \notin \Delta'$. Из неравенства (2.17) следует, что $\left|A_{l(q)}(x)\right| > M$ и $B_{l(q)}(x) \neq 0$ при $x \in \Delta'$. Лемма 2.2 доказана. □

Доказательство Теоремы 2.1. Пусть условия Теоремы 2.1 выполнены, но ряд (2.2) не является рядом Фурье функции $f(x)$. Это означает, что некоторые коэффициенты $b_\mu = a_\mu - c_\mu$ ряда (2.8) отличны от нуля. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное множество точек из $T = [0,1)$. Некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда (2.8) отлична от нуля на некотором интервале Δ постоянства этой суммы. Пусть $M_i > 0$, $M_i \nearrow +\infty$ и $N_i \nearrow +\infty$ при $i \to +\infty$. Применяя Лемму 2.2, определим $q_1 > N_1$, такое, что

$$\left|A_{l(q_1)}(x)\right| > M_1, \quad B_{l(q_1)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad x_1 \notin \Delta_1,$$

где Δ_1 — интервал постоянства сумм $A_{l(q_1)}(x)$ и $B_{l(q_1)}(x)$.

Предположим, что определены $A_{l(q_i)}(x)$, $B_{l(q_i)}(x)$, $1 \le i \le p$, такие, что $q_i > N_i$ и

$$\left|A_{l(q_i)}(x)\right| > M_i, \quad B_{l(q_i)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_i, \quad \Delta_i \subset \Delta_{i-1}, \quad x_i \notin \Delta_i,$$

где Δ_i – интервал постоянства сумм $A_{l(q_i)}(x)$ и $B_{l(q_i)}(x)$. Применяя Лемму 2.2 для суммы $B_{l(q_p)}(x)$, найдем суммы $A_{l(q_{p+1})}(x)$, $B_{l(q_{p+1})}(x)$ и интервал Δ_{p+1} их постоянства, такие, что $q_{p+1} > N_{p+1}$, $\Delta_{p+1} \subset \Delta_p$ и

$$\left|A_{l(q_{p+1})}(x)\right| > M_{p+1}, \quad B_{l(q_{p+1})}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_{p+1}, \quad x_{p+1} \notin \Delta_{p+1}.$$

Итак, существует последовательность $\{A_{l(q_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ и интервалы Δ_i, такие, что Δ_i — интервал постоянства суммы $A_{l(q_i)}(x)$, $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$ для всех i, $x_i \notin \Delta_i$. Тогда точка x, принадлежащая всем Δ_i, отлична от точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и

$$\limsup_{q\to\infty} \left|A_{l(q)}(x)\right| = +\infty,$$

что противоречит условию теоремы 2.1. Следовательно, $a_\mu = c_\mu$ для всех μ. Теорема доказана. □

3. Некоторые теоремы единственности тригонометрических рядов.

Рассмотрим тригонометрические ряды

(3.1) $$\sum_n c_n e^{2\pi i n x}, \qquad c_n \to 0 \text{ при } |n| \nearrow +\infty.$$

Обозначим

(3.2) $$F(x) = c + c_0 x + \sum{}' \frac{c_n}{2\pi i n} e^{2\pi i n x},$$

где $F(x)$ — сумма ряда, полученного формальным интегрированием ряда (3.1), а запись $\sum'$ будет обозначать, что в сумме $n \neq 0$. Очевидно, ряд (3.2) сходится в метрике $L_2(0,1)$ и почти всюду определена на T. Обозначим

(3.3) $$a_\mu^{(N)}(t) = \int_T S_N(x+t)\,\chi_\mu(x)\,dx.$$

Имеем

$$a_\mu^{(N)}(t) = \int_T S_N(x+t)\,\chi_\mu(x)\,dx = \sum_{|n|\le N} \int_T c_n e^{2\pi i n(x+t)} \chi_\mu(x)\,dx$$
$$= \sum_{|n|\le N} c_n \left(\int_{\Delta_\mu} e^{2\pi i n x} \chi_\mu(x)\,dx \right) e^{2\pi i n t},$$

где Δ_μ — носитель функции $\chi_\mu(x)$. Отсюда при $\mu \ge 2$ получаем

(3.4) $$\begin{aligned} a_\mu^{(N)}(t) &= \|\chi_\mu\|_\infty \sum_{|n|\le N}{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \left[\left(e^{2\pi i n \frac{2\alpha-1}{2^k}} - e^{2\pi i n \frac{2\alpha-2}{2^k}} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(e^{2\pi i n \frac{2\alpha}{2^k}} - e^{2\pi i n \frac{2\alpha-1}{2^k}} \right) \right] e^{2\pi i n t} \\ &= \|\chi_\mu\|_\infty \sum_{|n|\le N}{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \beta_{n\mu} e^{2\pi i n t}, \quad \mu \ge 2, \end{aligned}$$

где

(3.5) $$\beta_{n\mu} = \left(e^{2\pi i n \frac{2\alpha-1}{2^k}} - e^{2\pi i n \frac{2\alpha-2}{2^k}} \right) - \left(e^{2\pi i n \frac{2\alpha}{2^k}} - e^{2\pi i n \frac{2\alpha-1}{2^k}} \right).$$

Исчезновение члена с номером $n = 0$ в сумме (3.4) объясняется тем, что каждая функция Хаара с номером $\mu \geq 2$ ортогональна постоянной функции. Легко видеть, что

$$|\beta_{n\mu}| \leq \min\left\{4, \frac{Cn^2}{\mu^2}\right\} \text{ для всех } \mu \text{ и } n. \tag{3.6}$$

Очевидно, что при $N \to \infty$, $a_\mu^{(N)}(t)$ сходятся в метрике L_2 к функции

$$a_\mu(t) = \|\chi_\mu\|_\infty \sum_n{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \beta_{n\mu} e^{2\pi i n t}, \tag{3.7}$$

т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \int_T \left|a_\mu(t) - a_\mu^{(N)}(t)\right|^2 dt = 0, \tag{3.8}$$

и поэтому коэффициенты $a_\mu(t)$ определены для почти всех $t \in T$. Имеем

$$\int_T |a_\mu(t)|^2 dt = \|\chi_\mu\|_\infty^2 \sum_n{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} |\beta_{n\mu}|^2. \tag{3.9}$$

Будем рассматривать ряд

$$\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x), \quad t \in T, \tag{3.10}$$

которую назовем рядом соответствующий ряду (3.1). Обозначим

$$\Delta_k^p F(x+t) = F\left(\frac{p}{2^k} + t\right) - F\left(\frac{p-1}{2^k} + t\right), \tag{3.11}$$

Имеем

$$\frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = c_0 + \frac{1}{|\Delta_k^p|} \sum_n{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \Delta_k^p \left(e^{2\pi i n x}\right) e^{2\pi i n t}, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)\,dx = c_0 + \frac{1}{|\Delta_k^p|} \sum_{|n|\leq N}{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \Delta_k^p \left(e^{2\pi i n x}\right) e^{2\pi i n t}. \tag{3.13}$$

Отметим, что для любого фиксированного интервала Δ_k^p функция (3.12) принадлежит $L^2(T)$ и следовательно, определена для почти всех $t \in T$. Для фиксированного Δ_k^p имеем

$$\lim_{N\to\infty} \int_T \left| \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)\,dx \right|^2 dt = 0. \tag{3.14}$$

Лемма 3.1. *Существует множество $E_0 \subset T$, $|E_0| = 1$, такое, что для всех $t \in E_0$ выполняется равенство*

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} \quad \text{для любого } \Delta_k^p \text{ при } x \in \Delta_k^p. \tag{3.15}$$

Доказательство. Действительно, согласно (3.3), имеем

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^\mu} S_N(x+t)\,. \tag{3.16}$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ в равенстве (3.16), согласно (3.8) и (3.14) получим, что для любого Δ_k^p

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|}, \qquad x\in\Delta_k^p,$$

для почти всех $t\in T$. Лемма 3.1 верна. □

Лемма 3.2. *Если ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum c_n e^{2\pi i n x}$, и последний ряд есть ряд Фурье функции $f(x)$, то для почти всех $t\in T$ имеем*

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \text{для любого } \Delta_k^p \text{ при } x\in\Delta_k^p. \tag{3.17}$$

Доказательство. Рассмотрим (C,1) средние

$$\sigma_N(x+t) = \frac{1}{N+1}\sum_{v=0}^{N} S_v(x+t), \tag{3.18}$$

где

$$S_v(x+t) = \sum_{|n|\le v} c_n e^{2\pi i n(x+t)}. \tag{3.19}$$

Известно, что $\sigma_N(x+t)$ при $N\to\infty$ в метрике L^1 сходится к $f(x+t)$ на T для всех $t\in[0,1)$. В частности, для всех $t\in T$ и для всех Δ_k^p имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Delta_k^p}\sigma_N(x+t)\,dx = \int_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx. \tag{3.20}$$

С другой стороны,

$$\int_{\Delta_k^p}\sigma_N(x+t)\,dx = \frac{1}{N+1}\sum_{v\le N}\int_{\Delta_k^p} S_v(x+t)\,dx. \tag{3.21}$$

Далее, согласно (3.13) имеем

$$\int_{\Delta_k^p} S_v(x+t)\,dx = c_0|\Delta_k^p| + {\sum_{|n|\le v}}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n p/2^k} - e^{2\pi i n(p-1)/2^k}\right)e^{2\pi i n t}, \tag{3.22}$$

и поэтому, левые части (3.21) представляют собой (C,1) средние порядка N ряда

$$c_0|\Delta_k^p| + {\sum_n}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n p/2^k} - e^{2\pi i n(p-1)/2^k}\right)e^{2\pi i n t}, \tag{3.23}$$

который сходится в метрике L_2 на $[0,1)$ к $\Delta_k^p F(x+t)$. Следовательно, правая часть равенства (3.21) сходится в метрике L_2 на $T=[0,1)$ к $\Delta_k^p F(x+t)$ для любого $t\in[0,1)$.

Следовательно, согласно (3.20), будем иметь

$$\Delta_k^p F(x+t)=\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx$$

для почти всех $t\in T$ и для всех Δ_k^p. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть имеем два ряда*

$$\sum_n c_n e^{2\pi inx} \quad \text{и} \quad \sum_n b_n e^{2\pi inx}, \quad \text{где } |c_n|\le M, |b_n|\le M, \forall n, \tag{3.24}$$

и пусть ряды

$$\sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) \quad \text{и} \quad \sum_\mu d_\mu(t)\,\chi_\mu(x) \tag{3.25}$$

соответствующие им ряды по системе Хаара. Тогда ряды (3.24) *совпадают тогда и только тогда, когда для почти всех $t\in T$ совпадают ряды* (3.25).

Доказательство. Если $c_n=b_n$ для всех n, то, согласно Лемме 3.1,

$$\sum_{\mu=1}^{2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)=\frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx=\sum_{\mu=1}^{2^k} d_\mu(t)\,\chi_\mu(x), \qquad x\in\Delta_k^p,$$

для почти всех $t\in T$ и для всех Δ_k^p. Тогда, очевидно, $a_\mu(t)=d_\mu(t)$ для почти всех t и для всех μ, т.е. ряды (3.25) совпадают.

Обратно, пусть $a_\mu(t)=d_\mu(t)$ для всех μ и для всех $t\in E_0$, $|E_0|=1$, $E_0\subset T$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\Delta_k^p F(x+t)&=c_0\cdot 2^{-k}+\sum_n{}' \frac{c_n}{2\pi in}\Delta_k^p(e^{2\pi inx})e^{2\pi int}\\&=b_0\cdot 2^{-k}+\sum_n{}' \frac{b_n}{2\pi in}\Delta_k^p(e^{2\pi inx})e^{2\pi int}\end{aligned} \tag{3.26}$$

для всех Δ_k^p и для почти всех t. Из равенства (3.26), так как $\{e^{2\pi int}\}$ – ортонормированная система, следует

$$c_0=b_0 \quad \text{и} \quad \frac{c_n}{2\pi in}\Delta_k^p(e^{2\pi inx})=\frac{b_n}{2\pi in}\Delta_k^p(e^{2\pi inx}), \quad \forall n\ne 0 \tag{3.27}$$

для всех Δ_k^p. Для любой фиксированной пары c_n и b_n существует интервал Δ_k^p, такой, что $\Delta_k^p(e^{2\pi inx})\ne 0$. Следовательно, $c_0=b_0$ и $c_n=b_n$ для всех n. Лемма 3.3 доказана. □

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ряд $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$, $|c_n| \le M$, был рядом Фурье интегрируемой на T периодической функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $t \in T$ соответствующий ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ был рядом Фурье функции $f(x+t)$, $x \in T$.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$ есть ряд Фурье функции $f(x)$. Согласно Лемме 3.2, имеем

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad x \in \Delta_k^p \text{ для всех } \Delta_k^p.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех t является рядом Фурье функции $f(x+t)$.

Обратно. Пусть ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функции $f(x+t)$ для почти всех t, где $f(x)$ — интегрируемая на $[0,1)$ периодическая функция. Рассмотрим ряд $\sum\limits_n b_n e^{2\pi i n x}$, где $b_n = \int\limits_T f(x)e^{2\pi i n x}dx$. Если ряд $\sum\limits_\mu d_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum\limits_n b_n e^{2\pi i n x}$, то имеем

$$\sum_{\mu \le 2^k} d_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \forall x \in \Delta_k^p, \forall \Delta_k^p$$

для почти всех t. Но имеем также

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \forall x \in \Delta_k^p, \forall \Delta_k^p.$$

Следовательно, $a_\mu(t) = d_\mu(t)$, для любой μ и для почти всех t. Согласно Лемме 3.3 будем иметь $c_n = b_n$ для всех n. Теорема 3.1 доказана. □

4. Применение рядов Хаара

Теорема 4.1. *Если коэффициенты тригонометрического ряда $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$ стремятся к нулю, т.е.*

$$\lim_{|j|\to\infty} |c_j| = 0, \tag{4.1}$$

то соответствующий ему ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ обладает свойством A1) для почти всех t, т.е. существует последовательность $k(q)$, где $k(q) \nearrow +\infty$ при $q \to +\infty$, такая, что для любой последовательности двоичных интервалов

$\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \ldots$ *с условием* $2^{k(q)} < \mu_q \leq 2^{k(q)+1}$ *имеем*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{|a_{\mu_q}(t)|}{\|\chi_{\mu_q}\|_\infty} = 0 \text{ для почти всех } t \in T. \tag{4.2}$$

Для доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Если* $c_n \to 0$, *и ряд* $\sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$ *соответствует ряду* $\sum_n c_n e^{2\pi i n x}$, *то*

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_T |a_\mu(t)|^2\, dt = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Согласно (3.9), имеем

$$\int_T |a_\mu(t)|^2 dt = \|\chi_\mu\|_\infty^2 \sum_n{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} |\beta_{n\mu}|^2 \leq \mu \sum_n{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} |\beta_{n\mu}|^2, \tag{4.4}$$

где $\beta_{n\mu}$ определены в (3.5) и удовлетворяют условиям (3.6). Имеем

(4.5)

$$\sum_n{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 = \sum_{|n|\leq\sqrt{\mu}}{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 + \sum_{\sqrt{\mu}<|n|\leq\mu}{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 + \sum_{|n|>\mu}{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 . \tag{4.6}$$

Из (3.6) получаем

(4.7)

$$\sum\nolimits_1 \leq C \sum_{|n|\leq\sqrt{\mu}}{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \frac{n^4}{\mu^4} \leq C\mu^{-5/2},$$

(4.8)

$$\sum\nolimits_2 \leq C \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2 \cdot \sum_{|n|\leq\mu} \frac{|\beta_{n\mu}|^2}{n^2} \leq C\mu^{-4} \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2 \cdot \sum_{|n|\leq\mu} n^2 \leq C\mu^{-1} \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2,$$

(4.9)

$$\sum\nolimits_3 \leq C \max_{|n|>\mu} |c_n|^2 \sum_{|n|>\mu} \frac{1}{n^2} = C\mu^{-1} \max_{|n|>\mu} |c_n|^2 .$$

Из (4.5), (4.7) – (4.9) следует (4.3). Лемма 4.1 доказана. □

Доказательство Теоремы 4.1. Теорема 4.1 легко следует из леммы 4.1. Действительно, пусть $\varepsilon_q \searrow 0$, $\sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q < \infty$. Из (4.3) следует, что для некоторой последовательности $k(q) \nearrow +\infty$ имеем

$$\frac{\int_T \sum_{\mu=2^{k(q)}+1}^{\mu=2^{k(q)+1}} |a_\mu(t)|^2 dt}{2^{k(q)}} < \varepsilon_q. \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует существование множества $E_0 \subset T$, $|E_0| = 1$, для которого

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=2^{k(q)}+1}^{\mu=2^{k(q)+1}} |a_\mu(t)|^2}{2^{k(q)}} = 0, \qquad t \in E_0. \tag{4.11}$$

Отсюда получаем, что (4.2) выполняется для всех $t \in E_0$. Теорема 4.1 доказана.

□

Комбинируя Теоремы 2.1, 3.1 и 4.1, получаем

Теорема 4.2. *Пусть $c_n \to 0$ и ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$. Пусть, далее, для почти всех $t \in E$, где $E \subset T$, $|E| = 1$, существует последовательность*

$$A_{l(q)}(x,t) = \sum_{\mu\le 2^{l(q)}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x), \quad l(q) \nearrow +\infty, (l(q) \text{ зависит от } t)$$

такая, что выполнены условия

a′) $A_{l(q)}(x,t)$ при $q \to \infty$ сходится по мере на $\{x : x \in T\}$ к $f(x+t)$, где $f(x)$ суммируемая функция,

b′) $\sup\limits_q |A_{l(q)}(x,t)| < +\infty$ для всех x, не принадлежащих счетному множеству $E_t \subset T$.

Тогда ряд $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$ является рядом Фурье функции $f(x)$.

5. Доказательство Теоремы 1.1

Лемма 5.1. *Если $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$, то для любых $k > 0$ и $N \ge 2^{3k}$ имеет место неравенство*

$$\int_T \max_{x\in T} \left| \sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt \le C(\varepsilon_N)^2 \tag{5.1}$$

для всех $x \in T$ и для всех последовательностей $\{c_n\}$ с условием $|c_n| \le \varepsilon_n$.

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in T$. Имеем

$$x \in \bigcap_{j=0}^{k} \Delta_{\mu_j},$$

где $T = \Delta_{\mu_0} \supset \Delta_{\mu_1} \supset \ldots \supset \Delta_{\mu_k}$ есть последовательность двоичных интервалов с $|\Delta_{\mu_j}| = 2^{-j}$. Очевидно, что каждая сумма из (5.1) постоянна на Δ_{μ_k} и среди первых 2^k функций Хаара в точке x отличны от нуля лишь функции $\chi_1 \equiv 1$ и $\chi_{\Delta_{\mu,j}}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Отсюда получаем

$$\int_T \left| \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt$$

$$= \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \left(\sum_{\mu=1}^{2^k} \beta_{n\mu} \|\chi_\mu\|_\infty \chi_\mu(x) \right)^2 \tag{5.2}$$

$$\le \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \left(4 + \sum_{j=0}^{k-1} 4 \cdot 2^j \right)^2 = 4 \cdot 2^{2k} \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}.$$

Если имеем также $N > 2^{3k}$, то

$$\int_T \left| \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt \le C \cdot 2^{-k} (\varepsilon_N)^2, \quad x \in T, \tag{5.3}$$

где C - абсолютная постоянная. При разных значений $x \in T$ в интеграле (5.3) получаются всего лишь 2^k разных функций от t. Отсюда сразу же получаем (5.1). □

Лемма 5.2. *Пусть $\eta > 0$, $N \ge 0$, $k > 0$. Тогда существуют $k' > k$, $N' > N$, $N' \in \{\nu_q\}$ такие, что для любой последовательности $\{c_n\}$, для которой $|c_n| \le \varepsilon_{|n|}$ и $c_n = 0$ при $N < |n| \le N'$, выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{\mu \le 2^{k'}} a_\mu(t)\, \chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t) \right| < \eta, \forall x \in T, \forall t \in E, \tag{5.4}$$

где $E \subset T$, $|E| > 1 - \eta$.

Доказательство. Возьмем $k' > k$ так, чтобы кусочно постоянная функция

$$d_{k'}(t,x) = \frac{1}{|\Delta_{k'}^p|} \int_{\Delta_{k'}^p} S_N(u+t)\, du, \quad \forall x \in \Delta_{k'}^p, 1 \le p \le 2^{k'}, \tag{5.5}$$

удовлетворяла неравенству

$$|d_{k'}(t,x) - S_N(x+t)| < \eta/2, \quad \forall x\, \forall t, \tag{5.6}$$

для всех последовательностей $\{c_n\}$, $|c_n| \le \varepsilon_{|n|}$. По лемме 4.1 существует $N' > N$, $N' \in \{\nu_q\}$, такое, что

$$\int_T \max_{x\in T}\left|\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x)\right|^2 dt < \eta^3/4. \tag{5.7}$$

Действительно, для этого N' надо взять так, чтобы было $N' > 2^{3k'}$ и $C(\varepsilon_{N'})^2 < \eta^3/4$ (см. (5.1)). Далее определим

$$E = \left\{ t \in T : \max_{x\in T}\left|\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x)\right| < \eta/2 \right\}.$$

Используя неравенство Чебышева, из (5.7) следует $|E| > 1-\eta$, а также

$$\left|\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x)\right| < \eta/2, \quad \forall x \in T,\ \forall t \in E. \tag{5.8}$$

С другой стороны, если $c_n = 0$ при $N < |n| \le N'$, то имеем

$$S_{N'}(x+t) = S_N(x+t), \tag{5.9}$$

а из (5.5) получаем

$$\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_{k'}^p|}\int_{\Delta_{k'}^p} S_{N'}(u+t)\,du = d_{k'}(t,x), \tag{5.10}$$
$$\forall x \in \Delta_{k'}^p, \forall \Delta_{k'}^p,\ 1 \le p \le 2^{k'}.$$

Согласно (5.10) и (5.9) имеем

$$\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t) = d_{k'}(t,x) - S_N(x+t). \tag{5.11}$$

Из (5.11) и (5.6) следует

$$\left|\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t)\right| < \eta/2, \quad \forall x \in T,\ \forall t \in E. \tag{5.12}$$

Из (5.8) и (5.12) сразу же получаем (5.4). □

Доказательство Теоремы 1.1. Последовательно применив лемму 5.2, найдем последовательности $k_j \nearrow +\infty$, $N_j \nearrow +\infty$, $N_j \in \{\nu_q\}$, множества $E_j \subset T$, $|E_j| > 1 - 2^{-j}$, такие, что если ряд (1.1) удовлетворяет одному из условий а) и

b) теоремы 1.1, то, соответственно, выполняется одно из неравенств

$$
(5.13) \quad
\begin{aligned}
&\left| \sum_{\mu \le 2^{k_{2j}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) - S_{N_{2j}}(x+t) \right| < 2^{-j}, \quad \forall x \in T, \quad \forall t \in E_j, \\
&\left| \sum_{\mu \le 2^{k_{2j-1}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) - S_{N_{2j-1}}(x+t) \right| < 2^{-j}, \quad \forall x \in T, \quad \forall t \in E_j
\end{aligned}
$$

при $j = 1, 2, \ldots$. Далее обозначим

$$
E = \bigcup_{k \ge 1} \bigcap_{j \ge k} E_j.
$$

Очевидно, что $|E| = 1$. Предположим, что ряд (1.1) удовлетворяет одному из условий a) и b). Без потери общности можно предполагать, что это есть условие a). Далее предположим, что последовательность $\sum_{|n| \le N_j} c_n e^{2\pi i n x}$ сходится к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду на $[0.1)$ кроме точек из некоторого счетного множества A. Тогда из условий (5.13) получаем, что последовательность

$$
A_{k_j}(x,t) = \sum_{\mu \le 2^{k_{2j}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)
$$

для всех $t \in E$ будет сходится к $f(x+t)$ для всех x пе принадлежащих счетному множеству $A_t = t + A$. Отсюда легко усмотреть, что для ряда

$$
\sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)
$$

выполнены условия теорем 3.1 и 4.2 и поэтому ряд (1.1) будет рядом Фурье функций $f(x)$. □

Доказательство следствия 1.1. Применив теорему 1.1 при $\varepsilon_n = \max_{|j| \ge n} |c_j|$, найдем последовательность $\{N_k\} \subset \{\nu_k\}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.1. Определим

$$
(5.14) \quad
\begin{aligned}
&c'_n = \begin{cases} c_n & \text{если} \quad n \in \cup_{j=1}^{\infty} (N_{2j}, N_{2j+1}] \\ 0 & \text{если} \quad n \in \cup_{j=1}^{\infty} (N_{2j-1}, N_{2j}] \end{cases} \\
&c''_n = c_n - c'_n,
\end{aligned}
$$

Легко усмотреть, что тогда ряды (1.3) удовлетворяют, соответственно, условиям a) и b). Применив теорему 1.1 для каждого из рядов (1.3), мы получим, что они являются рядами Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и следствие будет установлено. □

Abstract. In this paper we discuss some uniqueness questions for trigonometric series and for series in Haar system. The obtained results are used to study a problem posed by P. L. Ul'yanov in 1964.

Список литературы

[1] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, 28, 1391 – 1408 (1964).

[2] П. Л. Ульянов, "Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов", Успехи Мат. Наук, 19, no. 1, 3 – 69 (1964).

Поступила 29 ноября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 64-70.

DEGENERATE NONSELFADJOINT HIGH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON AN INFINITE INTERVAL

L. P. TEPOYAN, S. ZSCHORN

Yerevan State University, Armenia
E-mails: *tepoyan@yahoo.com* *sveta1985@inbox.ru*

Abstract. The paper considers the generalized Dirichlet problem for a class of degenerate nonselfadjoint high-order ordinary differential equations on an infinite interval. The spectrum of the corresponding operator is studied, and in the special case, the domain of definition of the selfadjoint operator is described.

MSC2010 numbers: 35J70, 46E35.

Keywords: degenerate differential equations; weighted Sobolev spaces; spectral theory of linear operators.

1. Introduction

We consider the Dirichlet problem for degenerate ordinary differential equations of the form:

$$Lu \equiv (-1)^m(t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + a(-1)^{m-1}(t^{\alpha-1}u^{(m)})^{(m-1)} + pt^\beta u = f(t), \tag{1.1}$$

where $t \in (1;+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 1, 3, \ldots, 2m-1$, $\beta \leq \alpha - 2m$, a and p are real constants, and $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

The dependence of the setting of boundary conditions relative to t for $t = 0$ on the order of degeneration α and on the sign of number a was first noticed in the paper by M.S. Keldysh [1] for degenerating into parts of the boundary of a second-order elliptic equation. The case $m = 1$, $\beta = 0$, $0 \leq \alpha < 2$ was studied in the papers by A.A. Dezin [2] and V.V. Kornienko [3], while the case $m = 2$, $\beta = 0$, $0 \leq \alpha \leq 4$ was considered in [4] (on a finite interval). Notice that the problem (1.1) in the case where $A = 0$ has been studied in the paper by L. Tepoyan [5].

The present paper is structured as follows. We first define the weighted Sobolev spaces $\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$, and discuss some properties of functions $u \in \dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ and embedding theorems. Notice that weighted Sobolev spaces on infinite intervals have been studied, in particular, in the papers by L.D. Kudryavcev [6] and P.A. Zharov

[7]. Then we define the generalized solution of the Dirichlet problem for equation (1.1) and study the spectral properties of the corresponding operator. Finally, in the special case where $\beta = -2m$, we describe the domain of definition of the selfadjoint operator. .

2. Weighted Sobolev spaces $\dot{W}^m_\alpha(1, +\infty)$

Denote by $\dot{C}^m[1,+\infty)$ the set of functions from $u \in C^m[1,+\infty)$, satisfying the boundary conditions:

$$u^{(k)}(1) = u^{(k)}(+\infty) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.1}$$

and define the space $\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ to be the completion of $\dot{C}^m[1,+\infty)$ by the norm

$$\|u\|^2_{\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)} = \int_1^{+\infty} t^\alpha |u^{(m)}(t)|^2\, dt.$$

The inner product in $\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ we denote by $\{u,v\}_\alpha = (t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)})$, where $(\cdot,\cdot)$ stands for the inner product in $L_2(1,+\infty)$. Observe that for any function $u \in \dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ and any number $t_0 \in [1,+\infty)$ the boundary values $u^{(k)}(t_0)$ and $u^{(k)}(1) = 0, k = 0,1,\ldots,m-1$ exist (see [8]). The proofs of the next two propositions can be found in [5].

Proposition 2.1. *For functions $u \in \dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$, $\alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$, the following inequalities are satisfied:*

$$|u^{(k)}(t)|^2 \le C_1 t^{2m-2k-1-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \tag{2.2}$$

It follows from Proposition 2.1 that in the case $\alpha > 2m-1$ (weak degeneration), we have $u^{(j)}(+\infty) = 0$ for $j = 0,1,\ldots,m-1$, while for $\alpha < 2m-1$ (strong degeneration) not all conditions $u^{(j)}(+\infty) = 0$ are "preserved". For instance, for $1 < \alpha < 3$ after completion only the condition $u^{(m-1)}(+\infty) = 0$ is "preserved", and for $\alpha < 1$ all the values $u^{(j)}(+\infty)$, $j = 0,1,\ldots,m-1$, in general, can be infinite.

Let $L_{2,\beta}(1,+\infty) := \left\{f; \int_1^{+\infty} t^\beta |f(t)|^2\, dt < +\infty\right\}$. Notice that for $\beta_1 \le \beta_2$ we have the embedding $L_{2,\beta_2}(1,+\infty) \subset L_{2,\beta_1}(1,+\infty)$.

Proposition 2.2. *For $\beta \le \alpha - 2m$ the following continuous embedding holds:*

$$\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty) \subset L_{2,\beta}(1,\infty), \tag{2.3}$$

which is compact for $\beta < \alpha - 2m$.

Notice that the embedding (2.3) is not compact for $\beta = \alpha - 2m$, and for $\beta > \alpha - 2m$ it fails. Let $d(m,\alpha) = 4^{-m}(\alpha-1)^2(\alpha-3)^2\cdots(\alpha-(2m-1))^2$. It is worth to note that in the paper [10] was considered a question concerning the number of real roots for a polynomial with constant term $d(m,\alpha)$. Using Hardy inequality (see [6]) it can be shown that (see [5])

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha}|u^{(m)}(t)|^2\,dt \geq d(m,\alpha)\int_1^{\infty} t^{\alpha-2m}|u(t)|^2\,dt. \tag{2.4}$$

It is important to note that in the inequality (2.4) the number $d(m,\alpha)$ is exact. Also, as an immediate consequence of the inequality (2.4), for any $\beta \leq \alpha - 2m$ we have

$$\|u\|^2_{\dot W^m_\alpha(1,+\infty)} \geq d(m,\alpha)\|u\|^2_{L_{2,\beta}(1,+\infty)}. \tag{2.5}$$

3. Degenerate nonselfadjoint differential equations

Now we define a generalized solution of the Dirichlet problem for equation (1.1) for $\alpha \neq 0$.

Definition 3.1. *A function $u \in \dot W^m_\alpha(1,+\infty)$ is called a generalized solution of the Dirichlet problem for equation* (1.1), *if for any $v \in \dot W^m_\alpha(1,+\infty)$ the following equality is fulfilled:*

$$\{u,v\}_\alpha + a(-1)^{m-1}(t^{\alpha-1}u^{(m)}, v^{(m-1)}) + p(t^{\beta}u,v) = (f,v). \tag{3.1}$$

For the proof of the next theorem we refer to [9].

Theorem 3.1. *Let the following conditions be satisfied:*

$$\begin{aligned} &a(\alpha-1) > 0,\\ &\gamma = d(m,\alpha) + \frac{a}{2}(\alpha-1)d(m-1,\alpha-2) + p > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Then a generalized solution of the Dirichlet problem for equation (1.1) *exists and is unique for every $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.*

The definition of a generalized solution usually generates some linear operator $L : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,-\beta}(1,+\infty)$ with dense in $L_{2,\beta}(1,+\infty)$ domain of definition $D(L) \subset \dot W^m_\alpha(1,+\infty)$ (see [5]). To obtain an operator acting in the same space, which is necessary from spectral theory viewpoint, we define the operator $\mathbf{L} = t^{-\beta}L$, $D(\mathbf{L}) = D(L)$. It is clear that the operator $\mathbf{L}$ acts in the space $L_{2,\beta}(1,+\infty)$. In [9] it was proved that under the condition (3.2) the inverse operator $\mathbf{L}^{-1}$ is bounded in $L_{2,\beta}(1,+\infty)$ for $\beta \leq \alpha - 2m$ and is a compact operator for $\beta < \alpha - 2m$.

This, in particular, implies that for $\beta < \alpha - 2m$ the spectrum of the operator $\mathbf{L}$ is discrete.

For the conjugate to (1.1) equation

$$S \equiv (-1)^m (t^\alpha v^{(m)})^{(m)} - a(-1)^{m-1}(t^{\alpha-1} v^{(m-1)})^{(m)} + pt^\beta v = g(t), \tag{3.3}$$

where $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, a generalized solution of the Dirichlet problem is defined as follows:

Definition 3.2. *A function $v \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$ is called a generalized solution of the Dirichlet problem for equation* (3.3)*, if for any $u \in D(L)$ the equality $(Lu, v) = (u, g)$ is fulfilled.*

Now the existence and uniqueness of a generalized solution of the Dirichlet problem for equation (3.3) for any $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$ follows from Theorem 3.1 and boundedness of the operator L^{-1} (see [9]). As above, we define the operator $\mathbf{S} = t^{-\beta} S$, $D(\mathbf{S}) = D(S)$.

Remark 3.1. *For $\alpha < 1$ every generalized solution $v \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$ of equation* (3.3) *satisfies the condition:*

$$\left(t^{\alpha-1} |v^{(m-1)}(t)|^2\right)|_{t=+\infty} = 0. \tag{3.4}$$

Also, notice that for a generalized solution $u \in \mathring{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ of equation (1.1) for $\alpha < 1$, it can be guaranteed only the finiteness of the left-hand side of (3.4). This is some analog of the Keldysh theorem (see [1]).

Proposition 3.1. *The spectra of operators $\mathbf{L}, \mathbf{S} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ lie on the right half-space.*

Proof. Since $\mathbf{S} = \mathbf{L}^*$, it is enough to prove the proposition for the operator $\mathbf{L}$. Let $\mathrm{Re}\lambda \le 0$, $f_1 = t^{-\beta} f$ and $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$. Then we have $f_1 \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$. Consider the equation $\mathbf{L}u - \lambda u = f_1$. In view of the definition of the operator $\mathbf{L}$, the last equation can be written in the form:

$$Lu - \lambda t^\beta u = f, \quad f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty). \tag{3.5}$$

From (3.1) for $v = u$ we obtain

$$\{u,u\}_\alpha + a(-1)^{m-1}\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}, u^{(m-1)}\right) + (p-\lambda)(t^\beta u, u) = (f, u).$$

It follows from the last equality and the proof of Theorem 3.1 (see [9]) that under the conditions (3.2) and $\mathrm{Re}\lambda \le 0$ the equation (3.5) is uniquely solvable for any $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, that is, the equation $\mathbf{L}u - \lambda u = f_1$ is uniquely solvable for every $f_1 \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$. □

4. Description of the domain of definition of the degenerate selfadjoint differential equation

Consider the selfadjoint differential equation

$$(4.1)\quad Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + pt^\beta u = f(t), \quad f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty), \quad \beta \le \alpha - 2m.$$

Define a generalized solution of the Dirichlet problem for equation (4.1) as in the Definition 1 (for $a = 0$). Now consider the special case of equation (4.1) for $p = 0$:

$$(4.2)\qquad Bu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f, \quad f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty).$$

Let $\mathbf{B} = t^{-\beta} B$, $D(\mathbf{B}) = D(B)$. In paper [5], it was proved the unique solvability of the Dirichlet problem for equation (4.2) for every $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, as well as, the positiveness and self-adjointness of the operator $\mathbf{B} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$, and the boundedness of the inverse operator $\mathbf{B}^{-1} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ for $\beta \le \alpha - 2m$ and its compactness for $\beta < \alpha - 2m$. Thus, for $\beta < \alpha - 2m$ the operator $\mathbf{B}^{-1}$ is compact and selfadjoint. Therefore the spectrum of the operator $\mathbf{B}$ for $\beta < \alpha - 2m$ is discrete and the system of eigenfunctions is complete in $L_{2,\beta}(1,+\infty)$ (see [11]). Also, notice that the spectrum of the operator $\mathbf{B}$ for $\beta = \alpha - 2m$ is purely continuous and coincides with the ray (see [5]):

$$\sigma(\mathbf{B}) = \sigma_c(\mathbf{B}) = [d(m,\alpha); +\infty).$$

Now we give the description of the domain of definition of the operator L for $\beta = -2m$, that is, consider the equation

$$(4.3)\qquad Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + pt^{-2m} u = f, \quad f \in L_{2,2m}(1,+\infty),$$

$\alpha \ne 1, 3, \ldots, 2m-1, \alpha \ge 0$. Observe that $D(B) = D(L)$, hence it is enough to describe $D(B)$.

Theorem 4.1. *The domain of definition of the operator B consists of functions $u \in \mathring{W}^m_\alpha(1,+\infty)$, for which the value $u^{(m-1)}(+\infty)$ is finite for $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, and for*

$2m-2k-2 < \alpha < 2m-2k-1$, $k = 0,1,\ldots,m-2$, *the values* $u^{(k)}(+\infty)$ *also are finite.*

Proof. Let $m > 2$. To find a general solution of the equation

$$(-1)^m(t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f(t)$$

observe first that

$$t^\alpha u^{(m)}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_t^{+\infty}(\tau-t)^{m-1}f(\tau)\,d\tau + c_0 + c_1t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1}.$$

Let $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. It follows from $u \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ that $t^{\frac{\alpha}{2}}u^{(m)} \in L_2(1,+\infty)$. It is easy to check that $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, because the functions $t^{-\frac{\alpha}{2}}, t^{1-\frac{\alpha}{2}}, \ldots, t^{m-1-\frac{\alpha}{2}}$ do not belong to the space $\dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$. Thus, we have

$$u^{(m)}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{(m-1)!}\int_t^{+\infty}(\tau-t)^{m-1}f(\tau)\,d\tau. \tag{4.4}$$

Let $G(t) = \int_t^{+\infty}(\tau-t)^{m-1}f(\tau)\,d\tau$. Applying Cauchy-Schwarz inequality we get

$$|G(t)|^2 \le \int_t^{+\infty}(\tau-t)^{2m-2}\tau^{-2m}\,d\tau \cdot \|f\|^2_{L_{2,2m}(1,+\infty)},$$

implying that

$$|G(t)| \le t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L_{2,2m}(1,+\infty)}. \tag{4.5}$$

Now from (4.4) we obtain

$$u^{(m-1)}(t) = c - \frac{1}{(m-1)!}\int_t^{+\infty}\tau^{-\alpha}G(\tau)\,d\tau.$$

Therefore

$$\left|\int_t^{+\infty}\tau^{-\alpha}G(\tau)\,d\tau\right| \le \int_t^{+\infty}\tau^{-\frac{1}{2}-\alpha}\,d\tau\cdot\|f\|_{L_{2,2m}(1,+\infty)} \le Ct^{\frac{1}{2}-\alpha}\|f\|_{L_{2,2m}(1,+\infty)},$$

implying that for $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ the value $u^{(m-1)}(+\infty)$ is finite. Now let $2 < \alpha < 3$. It follows from $u \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ that $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$. An integration yields

$$u^{(m-1)}(t) = C_0t^{1-\alpha} - \frac{1}{(m-1)!}\int_t^{+\infty}\tau^{-\alpha}G(\tau)\,d\tau,$$

because for $2 < \alpha < 3$ we have $u^{(m-1)}(+\infty) = 0$. Therefore

$$u^{(m-2)}(t) = C_1 + \bar{C}_0t^{2-\alpha} + \frac{1}{(m-1)!}\int_t^{+\infty}\int_\tau^{+\infty}\eta^{-\alpha}G(\eta)\,d\eta\,d\tau. \tag{4.6}$$

Using (4.5) we can estimate the integral in (4.6) to obtain

$$\left|\int_t^{+\infty}\int_\tau^{+\infty}\eta^{-\alpha}G(\eta)\,d\eta\,d\tau\right| \le C_2t^{\frac{3}{2}-\alpha}\|f\|_{L_{2,2m}(1,+\infty)}.$$

Similarly, for $2m-2<\alpha<2m-1$ we obtain

$$u(t)=\frac{(-1)^m}{((m-1)!)^2}\int_t^{+\infty}(\tau-t)^{m-1}\tau^{-\alpha}G(\tau)\,d\tau+C+C_0t^{m-\alpha}+\ldots+C_{m-2}t^{2m-2-\alpha}.$$

The integral on the right-hand side of the last relation can be estimated as follows

$$\left|\int_t^{+\infty}(\tau-t)^{m-1}\tau^{-\alpha}G(\tau)\,d\tau\right|\leq ct^{m-\alpha+\frac{1}{2}}\|f\|_{L_{2,2m}(1,+\infty)}.$$

Here it is important to note that for $m>2$ we have $m-\alpha+\frac{1}{2}<\alpha<2m-2-\alpha$. In the case $m\leq 2$ the proof is evident. Notice that the conditions of Theorem 4.1 are exact, in the sense that their violation, generally, can cause the nonexistence of the values $u^{(k)}(+\infty)$, $k=1,\ldots,m-1$. Also, note that the values $u^{(k)}(+\infty)$, $k=0,1,\ldots,m-1$ cannot be given arbitrarily, they are defined by the right-hand side of the equation (4.3) (see [2], [4]). □

Список литературы

[1] M. V. Keldysh, "On some cases of degenerating of elliptic type equations on the boundary of domain", Dokl. AN SSSR, 23, no. 2, 181 – 184 (1951).

[2] A. A. Dezin, "Degenerate operator equations", Mat. Sb., 115(157), no. 3(7), 323 – 336 (1981).

[3] V. V. Kornienko, "On the spectrum of degenerate operator equations", Mat. zametki, 68, no. 5, 677 – 691 (2000).

[4] L. P. Tepoyan, "Degenerate fourth-order differential-operator equations", Differ. Uravn., 23, no. 8, 1366 – 1376 (1987).

[5] L. P. Tepoyan, "Degenerate differential-operator equations on infinite intervals", Journal of Mathematical Sciences, 189, no. 1, 164 – 172 (2013).

[6] L. D. Kudryavtzev, "On equivalent norms in the weight spaces", Tr. Mat. Inst. Steklova, 170, 161 – 190 (1984).

[7] P. A. Djarov, "Compactness of embeddings in some spaces with power weight", Izv. Vyssh. Ucheb. Zav. Ser. Mat., no. 8, 82 – 85 (1988).

[8] V. I. Burenkov, Sobolev Spaces on Domains, Teubner (1999).

[9] S. Zschorn, "Nonselfadjoint degenerate differential operator equations of higher order on infinite interval", Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, no. 2, 39 – 45 (2014).

[10] S. A. Osipova, L. P. Tepoyan, "On Euler type equation", Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, no. 1, 16 – 19 (2009).

[11] M. A. Naimark, Linear differential operators, Moscow, Nauka (1969).

Поступила 7 января 2015

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 71-76.

AN EXAMPLE OF ONE-STEP MLE-PROCESS IN VOLATILITY ESTIMATION PROBLEM

S. B. GASPARYAN AND YU. A. KUTOYANTS

Université du Maine, Le Mans, France
Yerevan State University, Yerevan, Armenia
Higher School of Economics, Moscow, Russia and
National Research University "MPEI", Moscow, Russia [1]
E-mails: *masiv6@gmail.com; kutoyants@univ-lemans.fr*

Abstract. We consider the problem of construction of asymptotically efficient estimator for Pearson diffusion with unknown parameter in the volatility coefficient. The estimator-process is constructed in two steps. First we propose a preliminary consistent estimator obtained by the observations on the learning interval and then this estimator is used in construction of one-step MLE-process (maximum likelihood estimator process). It is shown that the obtained estimator-process is asymptotically efficient.

MSC2010 numbers: 62M05, 62F12, 62F10.

Keywords: One-step MLE-process; asymptotic efficiency; volatility estimation; high frequency.

1. Introduction

We consider an example of parameter estimation problem for the particular model of observations of Pearson-type diffusion process

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\mathrm{d}t + \sqrt{\vartheta + X_t^2}\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.1}$$

Here $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)\,, \alpha > 0$ is unknown parameter.

Note that this is particular case of the family of stochastic processes known as *Pearson diffusions* [10], section 1.3.7.

It is easy to see that in the case of continuous time observations the problem of parameter estimation is degenerated (singular), i.e., the unknown parameter ϑ can be estimated without error. Indeed, by Itô formula we can write

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \left[\vartheta + X_s^2\right]\mathrm{d}s.$$

[1] This work was done under partial financial support of the grant of RSF number 14-49-00079.

Hence for all $t \in (0,T]$ we have the equality

$$\hat\vartheta = t^{-1}\left[X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X_s\,\mathrm{d}X_s - \int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s\right] \tag{1.2}$$

and $\hat\vartheta = \vartheta$. This effect is due to the singularity of the measures induced by the observations in the space of their realizations.

Such problems of parameter estimation in the diffusion coefficient are usually studied in the case of discrete time observations $X^n = (X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, where $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Then the problem is no more singular and became an interesting statistical estimation problem. There is a diversity of the choice of observing times t_i. This work is the continuation of the study started in [2]. We take in our work the simplest way of equidistant observations, i.e., $t_j = j\delta, \delta = \frac{T}{n}$ and we study the properties of the estimators in the asymptotics of *high frequency* as $n \to \infty$. Our goal is to construct an asymptotically efficient estimator of the parameter ϑ. Note that the family of measures induced by the observations $X^k = (X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ with t_k satisfying $t_k \le t < t_{k+1}$ and fixed t are *locally asymptotically mixed normal* (LAMN) and for all estimators ϑ_k^* we have the lower bound on the risk

$$\varliminf_{\nu\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \mathbf{E}_\vartheta \ell\left(\sqrt{k}\left(\vartheta_k^* - \vartheta\right)\right) \ge \mathbf{E}_{\vartheta_0}\ell\left(\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\right). \tag{1.3}$$

As the loss functions $\ell(\cdot)$ can be taken, for example, polynomial $\ell(u) = |u|^p, p > 0$. For the definition of the random function $\zeta_t(\vartheta_0)$ see (1.7) below. An estimator ϑ_k^* is called *asymptotically efficient* if for all $\vartheta_0 \in \Theta$ we have

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \mathbf{E}_\vartheta \ell\left(\sqrt{k}\left(\vartheta_k^* - \vartheta\right)\right) = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\ell\left(\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\right). \tag{1.4}$$

The proof of this bound can be found in [1] and [4].

We construct the estimator in two steps. First we propose a consistent estimator $\bar\vartheta_N$ of this parameter based on the first N observations $X^N = (X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_N})$ on the time interval $[0,\tau]$. Here $\tau = t_N = N\frac{T}{n}$ Then using this estimator and one-step type device we propose an asymptotically efficient estimator.

The first consistent estimator we obtain from the equality (1.2)

$$\bar\vartheta_N = \frac{n}{TN}\left[X_{t_N}^2 - X_0^2 - 2\sum_{j=1}^N X_{t_{j-1}}\left[X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\right] - \sum_{j=1}^N X_{t_{j-1}}^2\delta\right].$$

We just replaced the integrals by the corresponding integral sums. The consistency of this estimator follows immediately from the limits

$$\sum_{j=1}^{N} X_{t_{j-1}}\left[X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right]\longrightarrow\int_0^{\tau} X_s\,\mathrm{d}X_s,\qquad \sum_{j=1}^{N} X_{t_{j-1}}^2\delta\longrightarrow\int_0^{\tau} X_s^2\,\mathrm{d}s$$

and the relation (1.2).

The next step is to see the behavior of the error of estimation. Consider $\xi_N = \sqrt{N}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta\right)$. We have

$$\xi_N=\frac{\sqrt{N}}{\tau}\left[\int_0^{\tau} X_s\left[2\mathrm{d}X_s+X_s\mathrm{d}s\right]-\sum_{j=1}^{N} X_{t_{j-1}}\left[2\left(X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right)+X_{t_{j-1}}\delta\right]\right]$$

and

$$\begin{aligned}
X_{t_{j-1}}\left[X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right]-\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_s\,\mathrm{d}X_s &= \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[X_{t_{j-1}}-X_s\right]\mathrm{d}X_s\\
&=-\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_s\left[X_{t_{j-1}}-X_s\right]\mathrm{d}s+\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[X_{t_{j-1}}-X_s\right]\sqrt{\vartheta_0+X_s^2}\,\mathrm{d}W_s\\
&=O\left(\delta^{3/2}\right)+\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\int_{t_{j-1}}^{s}\sqrt{\vartheta_0+X_r^2}\,\mathrm{d}W_r\right)\sqrt{\vartheta_0+X_s^2}\,\mathrm{d}W_s\\
&=O\left(\delta^{3/2}\right)+\left(\vartheta_0+X_{t_{j-1}}^2\right)\left[\frac{\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)^2-\delta}{2}\right]\\
&=O\left(\delta^{3/2}\right)+\left(\vartheta_0+X_{t_{j-1}}^2\right)\sqrt{\frac{\delta}{2}}\,w_j,
\end{aligned}$$

where we used the estimate $X_{t_j}-X_{t_{j-1}}=O\left(\delta^{1/2}\right)$ and denoted

$$w_j=\frac{\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)^2-\delta}{\sqrt{2\delta}},\quad \mathbf{E}w_j=0,\ \mathbf{E}w_j^2=\delta,\ \mathbf{E}w_jw_i=0, i\neq j.$$

We have as well

$$X_{t_{j-1}}^2\delta-\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_s^2\,\mathrm{d}s=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[X_{t_{j-1}}^2-X_s^2\right]\mathrm{d}s=O\left(\delta^{3/2}\right).$$

Therefore we obtain the stable convergence (see [10])

$$\xi_N=\frac{\sqrt{2\delta N}}{\tau}\sum_{j=1}^{N}\left(\vartheta_0+X_{t_{j-1}}^2\right)w_j+o(1)\Longrightarrow\xi_\tau=\sqrt{\frac{2}{\tau}}\int_0^{\tau}\left(\vartheta_0+X_s^2\right)\mathrm{d}w(s).$$

More detailed analysis shows that we have the convergence of moments too: for any $p>0$

$$n^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\xi_\tau\right|^p.$$

The pseudo log-likelihood ratio function is

$$L\left(\vartheta, X^N\right) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \ln\left(2\pi\left(\vartheta + X_{t_{j-1}}^2\right)\right) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[X_{t_j} - X_{t_{j-1}} + X_{t_{j-1}}\delta\right]^2}{2\left(\vartheta + X_{t_{j-1}}^2\right)\delta}.$$

It is easy to see that the equation $\dot L\left(\vartheta, X^N\right) = 0$ has no solution, which can be written in explicit form. Hence the corresponding pseudo MLE can not be written in explicit form too. Remind that this estimator is asymptotically efficient [1], [3].

Our goal is to use the well-known one-step MLE device [8], [9] in the construction of one-step MLE-process. This estimator-process is asymptotically equivalent to the pseudo MLE but can be calculated in explicit form. This type of estimator-processes were proposed in [6] in the problem of approximation of the solution of backward stochastic differential equation for several models of observations (see the review of recent results in [6]).

Let us fix $t \in (\tau, T]$ and take such k that $t_k \leq t < t_{k+1}$. Hence $k \to \infty$ and $t_k \to t$ as $n \to \infty$. We consider the estimation of ϑ by the observations $X^k = (X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$. Recall that by the first X^N observations we already obtained the estimator $\bar\vartheta_N$. Denote the pseudo Fisher information as

$$\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \frac{\delta}{\left(\vartheta + X_{t_{j-1}}^2\right)^2} \longrightarrow \mathbf{I}_t\left(\vartheta_0\right) = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{(\vartheta + X_s^2)^2}.$$

The one-step MLE-process introduced first in [6] is

$$\vartheta_{t_k,n}^{\star} = \bar\vartheta_N + \sqrt{\delta}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left[X_{t_j} - X_{t_{j-1}} + X_{t_{j-1}}\delta\right]^2 - \left(\bar\vartheta_N + X_{t_{j-1}}^2\right)\delta}{2\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N\right)\left(\bar\vartheta_N + X_{t_{j-1}}^2\right)^2\sqrt{\delta}}, \quad \tau \leq t_k \leq T.$$

Let us denote

$$\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta, X^k\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left[X_{t_j} - X_{t_{j-1}} + X_{t_{j-1}}\delta\right]^2 - \left(\vartheta + X_{t_{j-1}}^2\right)\delta}{2\left(\vartheta + X_{t_{j-1}}^2\right)^2\sqrt{\delta}}, \qquad \tau \leq t_k \leq T.$$

The main result of this work is the following theorem. theorem.

Theorem 1.1. *The one-step MLE-process $\vartheta_{t_k,n}^{\star}$ is consistent: for any $\nu > 0$*

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\max_{N\leq k\leq n}\left|\vartheta_{t_k,n}^{\star} - \vartheta_0\right| > \nu\right) \to 0 \tag{1.5}$$

and for all $t \in (\tau, T]$ the convergence

$$\delta^{-1/2}\left(\vartheta_{t_k,n}^{\star} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta_t\left(\vartheta_0\right) \tag{1.6}$$

holds. Moreover, this estimator is asymptotically efficient in the sense (1.4).

Proof. The consistency of the estimator is proved following the same steps as it was done in [6] and we follow the main steps of the proof of the similar result in [6], where can be found the details. We have the presentation

$$\delta^{-1/2}\left(\vartheta^{*}_{t_k,n}-\vartheta_0\right)=\delta^{-1/2}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)+\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N\right)}$$
$$=\delta^{-1/2}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)+\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N,X^k\right)-\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta_0,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}$$
$$+\Delta_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N,X^k\right)\left(\frac{1}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N\right)}-\frac{1}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}\right)+\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta_0,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}.$$

We have the stable convergence

$$\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta_0,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}\Longrightarrow\zeta_t\left(\vartheta_0\right)=\mathbf{I}_t\left(\vartheta_0\right)^{-1}\int_0^t\frac{\mathrm{d}w\left(s\right)}{\sqrt{2}\left(\vartheta_0+X_s^2\right)}. \tag{1.7}$$

From the continuity of Fisher information $\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta\right)$ and consistency of $\bar\vartheta_N$ we obtain

$$\frac{1}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N\right)}-\frac{1}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}\longrightarrow 0.$$

Further

$$\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\bar\vartheta_N,X^k\right)-\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta_0,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}=\frac{\dot\Delta_{t_k,n}\left(\tilde\vartheta_N,X^k\right)\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}$$
$$=-\frac{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\tilde\vartheta_N\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}\delta^{-1/2}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)+o\left(\delta^{1/2}\right)=-\delta^{-1/2}\left(\bar\vartheta_N-\vartheta_0\right)+o\left(\delta^{1/2}\right).$$

Hence

$$\delta^{-1/2}\left(\vartheta^{*}_{t_k,n}-\vartheta_0\right)=\frac{\Delta_{t_k,n}\left(\vartheta_0,X^k\right)}{\mathbf{I}_{t_k,n}\left(\vartheta_0\right)}+o\left(1\right)\Longrightarrow\zeta_t\left(\vartheta_0\right).$$

It can be shown that the moments converge too: for any $p>0$

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\delta^{-1/2}\left(\vartheta^{*}_{t_k,n}-\vartheta_0\right)\right|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\right|^p.$$

Moreover this convergence is uniform on ϑ. Therefore the one-step MLE-process is asymptotically efficient estimator for polynomial loss functions.

Remark. The asymptotically efficient estimator process is constructed for the values $t\in(\tau,T]$. Note that it is possible to have such process (asymptotically) for all $t\in(0,T]$. To do this we have to consider the preliminary estimator $\bar\vartheta_N$ on the interval $[0,\tau_n]$ with $\tau_n\to 0$ but *sufficiently slowly*. As it follows from the proof of the similar result in [6] we have to take $N=n^{\kappa}$ with $\kappa\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Then $\xi_{\tau_n}\Longrightarrow\xi_0=\sqrt{2}\left(\vartheta_0+X_0^2\right)\eta$, where $\eta\sim\mathcal{N}(0,1)$. Now for all $t\in(0,T]$ we have

$$\eta_{t,T}\left(\vartheta_0\right)=\delta^{-1/2}\left(\vartheta^{*}_{t_k,n}-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\zeta_t\left(\vartheta_0\right).$$

More detailed analysis shows the weak convergence of the random process $\eta_{t,T}(\vartheta_0)$, $\tau_* \leq t \leq T$ with any $\tau_* \in (0,T)$ in the space of continuous on $[\tau_*, T]$ functions to $\zeta_t(\vartheta_0)$, $\tau_* \leq t \leq T$ (see [6] for details).

Список литературы

[1] Dohnal, G., "On estimating the diffusion coefficient", J. Appl. Probab., **24**, no. 1, 105 – 114 (1987).

[2] Gasparyan, S.B. and Kutoyants, Yu.A., "On approximation of the BSDE with unknown volatility in forward equation" Armenian J. Mathem., **7**, no. 1, 69 – 79 (2015).

[3] Genon-Catalot, V. and Jacod, J., "On the estimation of diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion", Ann. IHP, Sec. B, **29**, no.1, 119 – 151 (1993).

[4] Jeganathan, P., "Some asymptotic properties of risk functions when the limit of the experiment is mixed normal", Sankhya: The Indian Journal of Statistics **45**, Series A, Pt.1, 66 – 87 (1983).

[5] Kutoyants, Yu.A., "Approximation of the backward stochastic differential equation. Small noise, large samples and high frequency cases", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics., **287**, 133 – 154 (2014).

[6] Kutoyants, Yu.A., "On multi-step MLE-processes for ergodic diffusion", submitted (2015).

[7] Kutoyants, Yu.A. and Zhou, L., "On estimation of the solution of BSDE in the case of small volatility", Submitted (2014).

[8] Le Cam, L. On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses. *Proc. 3rd Berkeley Symposium I*, 355 – 368 (1956).

[9] Lehmann, E.L. and Romano, J.P. Testing Statistical Hypotheses. (3rd ed.) Springer, N.Y. (2005)

[10] Sørensen, M., "Estimating functions for diffusion-type processes". In Statistical Methods for Stochastic Differential Equations, Kessler, Lindner and Sørensen (Ed's), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1 – 107 (2009).

[11] Wong, E., "Representation of martingales, quadratic variation and applications", SIAM Journal on Control, **9**, no. 4, 621 – 633 (1971).

Поступила 20 января 2015

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 50, No. 2, 2015

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 50, номер 3, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 50, No. 3, 2015

CONTENTS