ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2015

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал ``Известия НАН Армении, Математика'' публикует оригинальные статьи, в основном на русском языке, в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, дифференциальные уравнения и математическая физика, интегральная и стохастическая геометрия, теория вероятностей и математическая статистика, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк) на русском и английском языках, а также список ключевых слов на русском и английском языках. В тексте резюме желательно избегать громоздких формул и ссылок.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес, номер телефона и адрес электронной почты. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.
4. Одновременно с двумя распечатанными экземплярами статьи в редакцию желательно предоставлять соответствующий файл на дискете или по электронной почте: sart@ysu.am. Статьи можно представить также на интернет странице журнала: http://jmath.sci.am
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt и соблюдать размер печатного поля 13x21см. Объем статьи не должен превышать 20 страниц.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края страницы, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами (EPS, JPG, BMP) или на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и мест в тексте.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи. В тексте указывается порядковый номер источника из списка литературы в квадратных скобках.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. В случае возвращения авторам рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.
10. В случае отклонения рукописи первый экземпляр возвращается авторам, а второй остается в редакции.
11. Адрес для переписки: Редакция журнала ``Известия НАН Армении, Математика'', пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
    e-mail: sart@ysu.am. URL: http://jmath.sci.am
12. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале ``Journal of Contemporary Mathematical Analysis''. URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N584. Тираж 150. Подписано к печати 03.03.15.
Печ. л. 5,25. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 3-12.

ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ОРИЕНТАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СЛУЧАЙНОГО ОТРЕЗКА И КОВАРИОГРАММА

А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ara1987-87@mail.ru; victo@aua.am*

Аннотация. В статье рассмотрен случайный отрезок $L(\omega)$ в R^n с фиксированным направлением и длиной при условии, что $L(\omega)$ пересекает ограниченное выпуклое тело $\mathbf{D}$. Получена связь между ковариограммой и распределением случайной величины $|L|(=$ длина $L \cap \mathbf{D})$. Также получена связь между распределением $|L|$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды. Используя нашу формулу получаем связь между функциями распределения длины хорды и случайной величины $|L|$.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Ковариограмма; зависящее от ориентации распределение случайного отрезка; зависящая от ориентации функция распределения длины хорды; выпуклое тело.

1. Введение

Пусть $R^n (n \geq 2)$ - n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{D} \subset R^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, а $V_n(\cdot)$ - n - мерная мера Лебега в R^n.

Определение 1.1. *(см. [3]). Функция*

$$C(h) = V_n(\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + h)), \quad h \in R^n, \tag{1.1}$$

называется ковариограммой тела $\mathbf{D}$. *Здесь* $\mathbf{D} + h = \{x + h, x \in \mathbf{D}\}$.

Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела $\mathbf{D}$ определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [3]). Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [4]). Пусть S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат в R^n. Рассмотрим случайную прямую из $\Omega_1(u)$:

$$\Omega_1(u) = \{\text{прямые параллельные направлению } u \text{ и пересекающие } \mathbf{D}\}.$$

Пусть $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ - ортогональная проекция $\mathbf{D}$ на гиперплоскость $u^\perp$($u^\perp$ - гиперплоскость проходящая через начало координат с нормальным вектором u). Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая $\mathbf{D}$ имеет точку пересечения (обозначим ее через x) с $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$. Можно отождествлять точки $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ с прямыми, которые пересекают $\mathbf{D}$ и параллельны направлению u. Последнее означает, что можно отождествлять $\Omega_1(u)$ и $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$. Предположив, что точка пересечения x равномерно распределена в выпуклом теле $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ мы можем определить следующую функцию распределения:

Определение 1.2. *Функция*

$$F(u,t)=\frac{V_{n-1}\{x\in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}:V_1(g(u,x)\cap\mathbf{D})<t)\}}{b_{\mathbf{D}}(u)} \tag{1.2}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ *в направлении* u *в точке* $t\in R^1$, *где* $g(u,x)$ *- прямая параллельная* u *и пересекающая* $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ *в точке* x, *а* $b_{\mathbf{D}}(u)=V_{n-1}(\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D})$.

Вектор $h\in R^n$ можно задавать как $h=tu$, где u - направление h, а t его длина.

Лемма 1.1. *(см. [3]). Пусть* $u\in S^{n-1}$, *а* $t>0$ *такое, что* $\mathbf{D}\cap(\mathbf{D}+tu)$ *содержит внутренние точки. Тогда* $C(u,t)$ *дифференцируема по* t *и*

$$-\frac{\partial C(u,t)}{\partial t}=(1-F(u,t))\cdot b_{\mathbf{D}}(u). \tag{1.3}$$

Пусть $L(\omega)$ - случайный отрезок длины $l>0$, параллельный фиксированному направлению u и пересекающий $\mathbf{D}$. Рассмотрим случайную величину $|L|(\omega)=V_1(L(\omega)\cap\mathbf{D})$, где $L(\omega)\in\Omega_2(u)$, причем

$\Omega_2(u)=\{$отрезки длины l, параллельные направлению u и пересекающие $\mathbf{D}\}$.

Случайный отрезок $L(\omega)$, лежащий на прямой $g(u,x)$, можно задавать координатами $(g(u,x),y)$, где y одномерная координата центра отрезка $L(\omega)$ на прямой $g(u,x)$. Началом координат на прямой $g(u,x)$ берется одна из точек пересечений $g(u,x)$ с $\partial\mathbf{D}$. Используя вышеупомянутые обозначения можно отождествлять $\Omega_2(u)$ с множеством:

$$\Omega_2(u)=\left\{(x,y):x\in\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D},\quad y\in\left[-\frac{l}{2},\chi(u,x)+\frac{l}{2}\right]\right\},$$

где $\chi(u,x)=V_1(g(u,x)\cap\mathbf{D})$. Заметим, что $\Omega_2(u)$ не зависит от того, какая из двух точек пересечений $g(u,x)\cap\mathbf{D}$ берется в качестве начала координат. Какое из двух направлений выбрано в качестве положительного следует из вида интервала изменения y. Далее, обозначим

$$B_{\mathbf{D}}^{u,t} = \{(x,y) \in \Omega_2(u): \ |L|(x,y) < t\}, \quad t \in R^1,$$

Очевидно, что $\Omega_2(u)$ и $B_{\mathbf{D}}^{u,t}$ измеримые подмножества в R^n.

Определение 1.3. *Функция*

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{V_n(B_{\mathbf{D}}^{u,t})}{V_n(\Omega_2(u))} = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))} \int_{B_{\mathbf{D}}^{u,t}} dx\, dy \tag{1.4}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины случайного отрезка в направлении $u \in S^{n-1}$.

Пусть G_n - пространство всех прямых в R^n. Прямую $g \in G_n$ можно задавать ее направлением $u \in S^{n-1}$ и точкой пересечения x с гиперплоскостью $u^{\perp}$. Плотность $du^{\perp}$ - элемент объема du единичной сферы S^{n-1}, а dx - элемент объема $u^{\perp}$ в точке x. Пусть $\mu(\cdot)$ локально-конечная мера в пространстве G_n, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид (см. [1], стр. 204)

$$\mu(dg) = dg = du dx$$

Обозначим через $O_{n-1} = V_{n-1}(S^{n-1})$ меру Лебега единичной сферы в R^n. Для каждого ограниченного выпуклого тела $\mathbf{D}$, обозначим множество прямых, пересекающих $\mathbf{D}$ через

$$[\mathbf{D}] = \{g \in G_n, \ g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$$

Имеем (см. [1], стр. 233)

$$\mu([\mathbf{D}]) = \frac{O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathbf{D})}{2(n-1)}$$

Случайная прямая в $[\mathbf{D}]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[\mathbf{D}]$. Следовательно, для каждого $t \in R^1$ имеем

$$F(t) = \frac{\mu(\{g \in [\mathbf{D}], \ V_1(g \cap \mathbf{D}) < t\})}{\mu([\mathbf{D}])}$$

$F(t)$ называется функцией распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$.

Пусть L - случайный отрезок длины l в R^n и $K(\cdot)$ - кинематическая мера отрезка L (см. [1]). Если $g \in G_n$ прямая, содержащая L и y одномерная координата центра отрезка L на g, тогда элемент кинематической меры с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$dK = dg\,dy\,dK_{[1]},$$

где dy одномерная лебегова мера на g, а $dK_{[1]}$ элемент движений в R^n, оставляющие прямую g неподвижной (см. [2], стр. 201, 160, 125). В случае ориентированного отрезка, вышеупомянутый постоянный множитель равен 1, а для неориентированного отрезка множитель $\frac{1}{2}$ (В этой статье рассматриваются только неориентированные отрезки).

Длина случайного отрезка, при условии, что L пересекает $\mathbf{D}$, имеет следующую функцию распределения

$$F_{|L|}(t) = \frac{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset, V_1(L \cap \mathbf{D}) < t)}{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset)}, \qquad t \in R^1.$$

$F_{|L|}(t)$ - функция распределения длины случайного отрезка L.

2. Основные результаты

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\omega)$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды в R^n:

$$(2.1) \quad F_{|L|}(u,t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{b_{\mathbf{D}}(u)\left[2t + F(u,t)(l-t) - \int_0^t F(u,z)dz\right]}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)} & \text{для} \quad 0 \leq t \leq l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}$$

В [5]-[7] получены явные выражения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для треугольника, эллипса, правильного многоугольника и параллелограмма. Следовательно, подставляя в (2.1) $n = 2$ и $F(u,t)$ получаем явные выражения для $F_{|L|}(u,t)$ для вышеупомянутых плоских выпуклых областей.

2. Из (2.1) можно получить значения $F(u,t)$ на интервале $[0,l)$ в терминах функции распределения $F_{|L|}(u,t)$:

$$(2.2) \quad F(u,t) = \frac{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)}{(l-t) b_{\mathbf{D}}(u)} \left[F_{|L|}(u,t) + \frac{1}{l-t}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz\right] + 1 - \frac{l^2}{(l-t)^2}.$$

3. Получена связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\omega)$ и ковариограммой на интервале $[0, l]$, которая дается следующей формулой:

$$(2.3)\quad F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\mathrm{D}) + l\, b_{\mathrm{D}}(u)}\left[\frac{\partial C(u,t)}{\partial t}(l-t) - C(u,t) + V_n(\mathrm{D}) + l b_{\mathrm{D}}(u)\right]$$

Значения $F_{|L|}(u,t)$ равны 0, для $t \leq 0$ и равны 1, для $t > l$.

4. Из (2.3) можно получить значения производной коварограммы по t на интервале $[0, l)$ в терминах функции распределения $F_{|L|}(u,t)$.

$$(2.4)\quad -\frac{\partial C(u,t)}{\partial t} = \frac{l^2 b_{\mathrm{D}}(u)}{(l-t)^2} - \frac{V_n(\mathrm{D}) + l b_{\mathrm{D}}(u)}{l-t}\left[F_{|L|}(u,t) + \frac{1}{l-t}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz\right].$$

5. Также получена связь между функцией распределения длины случайного отрезка, пересекающего D и функцией распределения длины хорды D в R^n:

$$(2.5)\quad F_{|L|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathrm{D})\left(2t + F(t)(l-t) - \int_0^t F(z)dz\right)}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathrm{D}) + lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathrm{D})} & \text{для} \quad 0 \leq t \leq l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}$$

Если предположить, что $F(t)$ имеет плотность, подставляя в (2.5) $n = 2$, получаем результат из [8].

3. Доказательства (2.1) – (2.4)

Согласно определению зависящей от ориентации распределения длины случайного отрезка, для расчета $F_{|L|}(u,t)$ мы должны найти n-мерную Лебегову меру для $\Omega_2(u)$ и $B_{\mathrm{D}}^{u,t}$. Сначала вычислим меру Лебега для $\Omega_2(u) \subset R^n$.

$$V_n(\Omega_2(u)) = \int_{\Omega_2(u)} dx\, dy = \int_{\Pi r_{u\perp}\mathrm{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} dy = \int_{\Pi r_{u\perp}\mathrm{D}} (\chi(u,x) + l)\, dx =$$

$$(3.1)\qquad = \int_{\Pi r_{u\perp}\mathrm{D}} \chi(u,x)\, dx + l\int_{\Pi r_{u\perp}\mathrm{D}} dx = V_n(\mathrm{D}) + l b_{\mathrm{D}}(u)$$

Очевидно, что $F_{|L|}(u,t) = 0$ для $t \leq 0$ и $F_{|L|}(u,t) = 1$ для $t > l$. Кроме того, для $0 < t \leq l$ имеем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{B_{\mathrm{D}}^{u,t}} dx\, dy = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Omega_2(u)} I(|L|(x,y) < t)\, dx\, dy =$$

$$\frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Pi r_{u\perp}\mathrm{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\, dy,$$

где I индикатор, т.е. $I(A) = 1$ если событие A выполнено и 0 в противном случае.

Можно представить $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} \subset R^{n-1}$ в виде объединения двух непересекающихся множеств в R^{n-1}:

$$\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} = \{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : \chi(u,x) < t\} \cup \{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : \chi(u,x) \geq t\},$$

следовательно, имеем

$$\frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\,dy =$$

$$= \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\chi(u,x)<t} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\,dy +$$

$$+ \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\chi(u,x)\geq t} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\,dy$$

Если $\chi(u,x) < t$, то $I(|L|(x,y) < t) = 1$ для каждого $y \in [-\frac{l}{2}, \chi(u,x) + \frac{l}{2}]$.
Если $\chi(u,x) \geq t$, то $I(|L|(x,y) < t) = 1$ тогда и только тогда

$$y \in \left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + t\right) \cup \left(\chi(u,x) + \frac{l}{2} - t, \chi(u,x) + \frac{l}{2}\right]$$

Следовательно, для зависящей от ориентации распределении длины случайного отрезка имеем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\left[\int_{\chi(u,x)<t} (\chi(u,x) + l)\,dx + \int_{\chi(u,x)\geq t} 2t\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\left[\int_{\chi(u,x)<t} \chi(u,x)\,dx + lb_{\mathbf{D}}(u)F(u,t) + 2tb_{\mathbf{D}}(u)(1 - F(u,t))\right], \tag{3.2}$$

где $F(u,t)$ - зависящая от ориентации функция распределения длины хорды $\mathbf{D}$, которая равна следующему выражению (см. (1.2))

$$F(u,t) = \frac{1}{b_{\mathbf{D}}(u)}\int_{\chi(u,x)<t} dx \tag{3.3}$$

Используя (3.3) можно упростить следующий интеграл:

$$\int_{\chi(u,x)<t} \chi(u,x)\,dx = \int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} \chi(u,x) I(\chi(u,x) < t)\,dx = b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t z dF(u,z) =$$

$$= -b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t z d(1 - F(u,z)) = -b_{\mathbf{D}}(u)\left[t(1 - F(u,t)) - \int_0^t (1 - F(u,z))dz\right] =$$

$$= b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t (1 - F(u,z))dz - b_{\mathbf{D}}(u)t(1 - F(u,t)) \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2) получаем (2.1).

Таким образом, если имеем зависящую от ориентации функцию распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$, то можно получить зависящую от ориентации распределение длины случайного отрезка пересекающую $\mathbf{D}$. Отметим, что для каждого фиксированного направления $u \in S^{n-1}$ значения функции $F(u,t)$ восстанавливают значения функции $F_{|L|}(u,t)$. Попробуем решить обратную проблему: Найти значения функции $F(u,t)$, когда заданы значения $F_{|L|}(u,t)$ на действительной оси. Можно найти функцию $F(u,t)$ решив интегральное уравнение (2.1) на интервале $[0,l]$. Во-первых, сделаем следующие обозначения:

$$A = \frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)} \quad \text{и} \quad G(u,t) = \int_0^t F(u,z)dz.$$

Очевидно, что $G(u,t)$ дифференцируема по t и $G'(u,t) = F(u,t)$. Следовательно, из (2.1) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$F_{|L|}(u,t) = A[2t + G'(u,t)(l-t) - G(u,t)] \quad \text{для} \quad 0 \le t \le l \tag{3.5}$$

Легко заметить, что

$$G'(u,t)(l-t) - G(u,t) = ((l-t)G(u,t))' \tag{3.6}$$

Из (3.6) можно представить (3.5) следующим образом:

$$((l-t)G(u,t))' = A^{-1}F_{|L|}(u,t) - 2t \tag{3.7}$$

Интегрируя обе части (3.7) и деля на $l-t$ получаем выражение для $G(u,t)$ когда $0 \le t < l$:

$$G(u,t) = \frac{1}{l-t}\int (A^{-1}F_{|L|}(u,t) - 2t)dt = \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{A(l-t)}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{t^2}{l-t} + B(u)$$

В наших обозначениях G(u,0)=0, следовательно $B(u) = 0$. Дифференцируя (3.8) по t получаем

$$F(u,t) = G'(u,t) = \left(\frac{1}{A(l-t)}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{t^2}{l-t}\right)' = \frac{F_{|L|}(u,t)}{A(l-t)} +$$

$$+\frac{1}{A(l-t)^2}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{2lt-t^2}{(l-t)^2},$$

и после несложных преобразований получаем (2.2).

Таким образом, если имеем $F_{|L|}(u,t)$, то можно восстановить $F(u,t)$ на интервале $[0,l)$. Так как функция распределения $F(u,t)$ имеет левосторонний предел в каждой точке, то из (2.2) можно получить значение $F(u,t)$ в точке $t = l$:

$$F(u,l) = \lim_{t \to l-} F(u,t).$$

Подставляя (2.2) в (1.3), получаем (2.4).

Интегрируя (1.3) по t и используя начальные условия $C(u,0) = V_n(\mathrm{D})$, получаем

$$C(u,t) = V_n(\mathrm{D}) + b(\mathrm{D},u) \int_0^t F(u,z)dz - tb(\mathrm{D},u). \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) и (1.3) в (2.1) получаем (2.3).

4. Доказательство формулы (2.5)

Используя (3.1), вычислим следующий интеграл:

$$\int_{L \cap \mathrm{D} \neq \emptyset} dg\, dy\, dK_{[1]} = \int_{S^1 \times \ldots \times S^{n-2} \times S^{n-1}} dK_{[1]}\, du \int_{\mathrm{D} \cap L(x,y) \neq \emptyset} dx\, dy =$$

$$= O_{n-2} \ldots O_1 \int_{S^{n-1}} (V_n(\mathrm{D}) + l b_{\mathrm{D}}(u))\, du \tag{4.1}$$

Известно, что (см. [1] стр. 218)

$$\int_{S^{n-1}} b_{\mathrm{D}}(u) du = \frac{O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathrm{D})}{n-1} \tag{4.2}$$

Таким образом, подставляя (4.2) в (4.1) получаем кинематическую меру L пересекающую D (см. [2] стр. 201):

$$K(L : L \cap \mathrm{D} \neq \emptyset) = \frac{1}{2} O_{n-2} \ldots O_1 \left[V_n(\mathrm{D}) O_{n-1} + \frac{l O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathrm{D})}{n-1} \right] \tag{4.3}$$

Чтобы получить функцию распределения длины хорды случайного отрезка, сначала вычислим кинематическую меру отрезков, пересекающих D и порождающих хорды длины меньше заданного числа $t \in [0, l]$. Используя определение функции распределения длины хорды случайного отрезка, для вышеупомянутой меры имеем:

$$K(L : L \cap \mathrm{D} \neq \emptyset, V_1(L \cap \mathrm{D}) < t) = \frac{1}{2} \int_{V_1(L \cap \mathrm{D}) < t} dg\, dy\, dK_{[1]} =$$

$$= \frac{1}{2} O_{n-2} \ldots O_1 \int_{S^{n-1}} V_n(B_{\mathrm{D}}^{u,t})\, du = \frac{1}{2} O_{n-2} \ldots O_1 \int_{S^{n-1}} V_n(\Omega_2(u)) F_{|L|}(u,t)\, du =$$

$$= \frac{1}{2} O_{n-2} \ldots O_1 \left[\int_{S^{n-1}} 2 b_{\mathrm{D}}(u)\, t\, du + \int_{S^{n-1}} b_{\mathrm{D}}(u) F(u,t)(l-t)\, du - \right.$$

$$\left. - \int_{S^{n-1}} \left(b_{\mathrm{D}}(u) \int_0^t F(u,z) dz \right) du \right] = \frac{1}{2} O_{n-2} \ldots O_1 \left[\frac{2t O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathrm{D})}{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{F(t)(l-t) O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathrm{D})}{n-1} - \frac{O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathrm{D})}{n-1} \int_0^t F(z) dz \right] \tag{4.4}$$

Так как $0 \le F(u,z) \le 1$, используя теорему Фубини, можно изменить порядок интегрирования повторных интегралов в (4.4).
Из определения $F_{|L|}(t)$, используя (4.3) и (4.4) получаем (2.5).

5. $F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара

Пусть $\mathbf{D}$ - n мерный шар в R^n с радиусом R и с центром в начале координат. Известно, что

$$V_n(\mathbf{D}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad \text{и} \quad b_{\mathbf{D}}(u) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{5.1}$$

здесь $\Gamma(m)$ есть гамма функция - $\Gamma(m) = \int_0^\infty w^{m-1}e^{-w}dw$. Можно вычислить $F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара используя (2.1). Используя (5.1) получаем

$$\frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{1}{\frac{V_n(\mathbf{D})}{b_{\mathbf{D}}(u)} + l} = \frac{1}{\frac{R\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} + l} = \frac{1}{RB(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) + l} \tag{5.2}$$

где $B(s,a,b) = \int_0^s w^{a-1}(1-a)^{b-1}dw$ для $a, b \in R^1$ - бета функция.

Из определения $F(u,t)$ легко видеть, что

$$1 - F(u,t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : V_1(g(u,x) \cap \mathbf{D}) \ge t)\}}{b_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{b_{\mathbf{D}_r}(u)}{b_{\mathbf{D}}(u)} \tag{5.3}$$

$b_{\mathbf{D}_r}(u)$ - n мерный шар в R^n с радиусом $r = \left(R^2 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ и с центром в начале координат. Следовательно

$$\frac{b_{\mathbf{D}_r}(u)}{b_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}}{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} = \left[R^{-1}\left(R^2 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-1} = \left[1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) вытекает, что для $t \in [0, 2R]$ имеем

$$F(u,t) = 1 - \left[1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}. \tag{5.5}$$

Отметим, что $F(u,t) = 1$ при $t \ge 2R$. Вычислим следующий интеграл:

$$\int_0^t F(u,z)dz = \int_0^t \left(1 - \left[1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right)dz = t - \int_0^t \left[1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} dz. \tag{5.6}$$

Обозначим $1 - (\frac{z}{2R})^2 = w$. Следовательно $z = 2R(1-w)^{\frac{1}{2}}$ и $dz = -R(1-w)^{-\frac{1}{2}}dw$. Когда $z = 0$, то $w = 1$, а когда $w = 1 - (\frac{t}{2R})^2$, то $z = t$. Заменой переменной в определенном интеграле, из (5.6) получаем

$$\int_0^t F(u,z)dz = t - R\int_{1-(\frac{t}{2R})^2}^1 w^{\frac{n-1}{2}}(1-w)^{-\frac{1}{2}}dw = t - R\int_{1-(\frac{t}{2R})^2}^1 w^{\frac{n+1}{2}-1}(1-w)^{\frac{1}{2}-1}dw$$

откуда следует

$$\int_0^t F(u,z)dz = t - R\left[B(1,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}) - B(1-\left(\frac{t}{2R}\right)^2,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2})\right] \tag{5.7}$$

Подставляя (5.2), (5.5) и (5.7) в (2.1), для $t \in [0,l)$ получаем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{RB(1,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2})+l}\left[t + \left(1 - \left[1-\left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right)(l-t)+\right.$$

$$\left. +R\left(B\left(1,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) - B\left(1-\left(\frac{t}{2R}\right)^2,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\right]. \tag{5.8}$$

В частном случае, когда $l = 2R$, подставляя в (5.8) $t = 2R$, получаем

$$B\left(1,\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

что совпадает с известной формулой связывающей гамма и бета функции.

Легко проверить, что $F_{|L|}(t) = F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара с радиусом R и с центром в начале координат.

Abstract. The paper considers a random segment $L(\omega)$ in R^n with fixed direction and length that intersects a given bounded convex body $\mathbf{D} \subset R^n$. We obtain a relationship between the covariogram of $\mathbf{D}$ and the distribution of the random variable $|L|$ - the length of $L \cap \mathbf{D}$. A relationship between the distribution of $|L|$ and the orientation-dependent chord length distribution is also obtained. As a consequence, we obtain a relationship between the chord length distribution function and the random segment distribution function for $\mathbf{D} \subset R^n$.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability Addision-Wesley, MA (2004).
[2] R. De-Lin, Topics in Integral Geometry, Utopia press, Singapore (1994).
[3] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).
[4] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society, 11, 1187 – 1202 (2009).
[5] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, 47, но. 3, 25 – 42 (2013).
[6] Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 3, 3 – 24 (2014).
[7] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 4, 17 – 34, (2014).
[8] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", Известия НАН Армении, серия Математика, 45, но. 5, 5 – 16 (2010).

Поступила 18 февраля 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 13-23.

SECOND ORDER ASYMPTOTICAL EFFICIENCY FOR A POISSON PROCESS

S. B. GASPARYAN

Université du Maine, Le Mans, France
Yerevan State University, Armenia
E-mail: *masiv6@gmail.com*

Abstract. We consider the problem of non-parametric estimation of the mean function of an inhomogeneous Poisson process when its intensity function is periodic. For integral-type quadratic loss functions there is a classical lower bound for all estimators and the empirical mean function attains that lower bound, thus it is asymptotically efficient. Following the ideas of the work by Golubev and Levit, we compare asymptotically efficient estimators and propose an estimator which is second order asymptotically efficient. Second order efficiency is done over Sobolev ellipsoids, following the ideas of Pinsker.

MSC2010 numbers: 62G05, 62M05.

Keywords: Poisson process; second order estimation; asymptotic efficiency.

1. Introduction

We consider the problem of non-parametric estimation of the mean function of an inhomogeneous Poisson process. We suppose that the unknown intensity function is periodic. It is known that empirical mean function is an asymptotically efficient (in several senses, see e.g. Kutoyants [7],[8]) estimator. Particularly, we are interested in asymptotic efficiency with respect to the integral-type quadratic loss function. Note that there are many estimators that are asymptotically efficient in this sense. The goal of present work is to choose in this class of asymptotically efficient estimators the estimators which are asymptotically efficient of the second order. Such a statement of the problem was considered by Golubev and Levit [6] in the problem of distribution function estimation for the model of independent and identically distributed random variables. Then applying the ideas of this work to the second order asymptotically efficient estimation for different models, Dalalyan and Kutoyants [1] proved second order asymptotic efficiency in the estimation problem of the invariant density of an ergodic diffusion process, in partial linear models the second order asymptotic efficiency was proved by Golubev, Härdle [5]. In this paper we prove second order asymptotic efficiency result for the mean function of a Poisson process. The main idea that led to development of these type problems was proposed by Pinsker in [10] (more details on the Pinsker bound can be found in [9], [11]).

2. Auxiliary Results

Let a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ and a stochastic process $\mathbf{X}^T = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$ be given. Recall that $\mathbf{X}^T$ is an inhomogeneous Poisson process if 1. $X_0 = 0$ a.s. 2. The increments of the process $\mathbf{X}^T$ on the disjoints intervals are independent random variables. 3. We have

$$\mathbf{P}(X_t - X_s = k) = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} e^{-[\Lambda(t)-\Lambda(s)]},\ 0 \leq s < t \leq T, k \in \mathbb{Z}_+,$$

where $\mathbb{Z}_+$ is the set of all nonnegative integers. Here $\Lambda(t)$, $t \in [0,T]$ is a non-decreasing function, and is called the mean function of the Poisson process, because $\mathbf{E}X(t) = \Lambda(t)$. If the mean function is absolutely continuous

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s,$$

then $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ is called the intensity function.

Let us consider the problem of estimation $\Lambda(t)$, when its intensity function is a τ-periodic function. For simplicity we suppose that $T = T_n = \tau n$. Then the observations $\mathbf{X}^T = \{X_t, t \in [0, \tau n]\}$, can be written in the form

$$\mathbf{X}^n = (X_1, X_2, \cdots, X_n), \tag{2.1}$$

where

$$X_j = (X_j(t),\ 0 \leq t \leq \tau), \quad X_j(t) = X_{j\tau+t} - X_{j\tau}.$$

It is well known that *the empirical estimator*

$$\hat{\Lambda}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j(t),\ t \in [0, \tau]$$

is consistent and asymptotically normal: for all $t \in [0,\tau]$

$$\sqrt{n}(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(t)) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \Lambda(t)).$$

Moreover, this estimator is asymptotically efficient in the sense of the following lower bound: for all estimators $\bar{\Lambda}(t)$, $t \in [0,\tau]$ and all $t^* \in (0,\tau]$ we have

$$\varliminf_{\delta \to 0} \varliminf_{n \to +\infty} \sup_{\Lambda \in V_\delta} n\mathbf{E}_\Lambda(\bar{\Lambda}_n(t^*) - \Lambda(t^*))^2 \geq \Lambda^*(t^*),$$

where $V_\delta = \{\Lambda(\cdot) : \ \sup_{t\in[0,\tau]} |\Lambda(t) - \Lambda^*(t)| \leq \delta\}$ and for the empirical mean function one has equality. This is a particular case of a general lower bound given in [7]. Similar inequality holds for integral-type quadratic loss function ([8])

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0}\ \underline{\lim}_{n\to+\infty}\ \sup_{\Lambda\in V_\delta} n\int_0^\tau \mathbf{E}_\Lambda(\bar\Lambda_n(s)-\Lambda(s))^2\mathrm{d}s \geq \int_0^\tau \Lambda^*(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Definition 2.1. *The estimators $\Lambda_n^*(\cdot)$ for which we have equality in* (2.2), *i.e.,*

$$\lim_{\delta\to 0}\ \lim_{n\to+\infty}\ \sup_{\Lambda\in V_\delta} n\int_0^\tau \mathbf{E}_\Lambda(\Lambda_n^*(s)-\Lambda(s))^2\mathrm{d}s = \int_0^\tau \Lambda^*(s)\mathrm{d}s,$$

are called (first order) asymptotically efficient.

The empirical mean function is asymptotically efficient estimator also in this sense ([8]).

The goal of the present work is to find in the class of first order asymptotically efficient estimators an estimator which is second order asymptotically efficient. We follow the mains steps of the proof of Golubev, Levit [6].

3. Main Result

Denote by $\breve{\mathcal{C}}_m(\mathbf{R}_+)$, $m \in \mathcal{N}$ the class of all $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ τ-periodic functions so that their $(m-1)$-th derivative $f^{(m-1)}$ exists and is absolutely continuous. Let us consider the following class of functions

$$\mathcal{F}_m(R,S) = \left\{\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s : \lambda \in \breve{\mathcal{C}}_{m-1}(\mathbf{R}_+),\right.$$

$$\left.\int_0^\tau [\Lambda^{(m)}(t)]^2\mathrm{d}t \leq R,\ \frac{2}{\tau}\Lambda(\tau) = S\right\}, \tag{3.1}$$

where $R > 0$, $S > 0$, $m > 1$, $m \in \mathcal{N}$ are given constants. Introduce as well

$$\Pi = \Pi_m(R,S) = (2m-1)R\left(\frac{2S}{R}\frac{\tau}{2\pi}\frac{m}{(2m-1)(m-1)}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1. *Suppose we have observations of the model* (2.1). *Then, for all estimators $\bar\Lambda_n(t)$ of the mean function $\Lambda(t)$, following lower bound holds*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\ \sup_{\Lambda\in\mathcal{F}_m(R,S)} n^{\frac{2m}{2m-1}}\left(\int_0^\tau \mathbf{E}_\Lambda(\bar\Lambda_n(t)-\Lambda(t))^2\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^\tau \Lambda(t)\mathrm{d}t\right) \geq -\Pi.$$

This proposition is proved in the forthcoming work [3]. In this work we propose an estimator which attains this lower bound, thus we will prove that this lower bound is sharp. Introduce

$$\Lambda_n^*(t) = \hat\Lambda_{1,n}\phi_1(t) + \sum_{l=1}^{+\infty} K_{2l,n}\hat\Lambda_{2l,n}\phi_{2l}(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{+\infty}\left[K_{2l,n}(\hat\Lambda_{2l+1,n}-a_{2l+1})+a_{2l+1}\right]\phi_{2l+1}(t),$$

where $\{\phi_l\}_{l=1}^{+\infty}$ is the trigonometric basis on $L_2[0,\tau]$, $\hat{\Lambda}_{l,n}$ are the Fourier coefficients of the empirical mean function with respect to this basis and

$$K_{2l,n} = \left(1 - \left|\frac{2\pi l}{\tau}\right|^m \alpha_n\right)_+,$$

$$\alpha_n = \left[\frac{1}{n}\frac{\tau}{2\pi}\frac{2S}{R}\frac{m}{(2m-1)(m-1)}\right]^{\frac{m}{2m-1}}, \quad a_{2l+1} = \sqrt{\frac{\tau}{2}}\frac{\tau}{2\pi l}S.$$

Here $x_+ = \max(x, 0)$. The main result of this work is the following theorem.

Theorem 3.1. *The estimator $\Lambda_n^*(t)$ attains the lower bound described above, that is,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\Lambda\in\mathcal{F}_m(R,S)} n^{\frac{2m}{2m-1}} \left(\int_0^\tau \mathbf{E}_\Lambda(\Lambda_n^*(t) - \Lambda(t))^2 dt - \frac{1}{n}\int_0^\tau \Lambda(t)dt\right) = -\Pi.$$

4. The proof

Consider the normed linear space

$$L_2[0,\tau] = \left\{f : \int_0^\tau |f(t)|^2 dt < +\infty\right\},$$

with the norm

$$\|f\| = \left(\int_0^\tau |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Evidently, $\mathcal{F}_m(R,S) \subset L_2[0,\tau]$. The main idea of the proof is to replace the estimation problem of the infinite-dimensional (continuum) mean function by the estimation problem of infinite-dimensional (countable) vector of its Fourier coefficients. Recall that the space $L_2[0,\tau]$ is isomorphic to the space

$$\ell_2 = \left\{\theta = (\theta_k)_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_k^2 < +\infty\right\},$$

with the norm

$$\|\theta\| = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consider a complete, orthonormal system in the space $L_2[0,\tau]$,

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \quad \phi_{2k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau}}\cos\frac{2\pi k}{\tau}t, \quad \phi_{2k+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau}}\sin\frac{2\pi k}{\tau}t, \quad k \in \mathcal{N}.$$

Each function $f \in L_2[0,\tau]$ is a L_2–limit of its Fourier series

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_k\phi_k(t), \quad \theta_k = \int_0^\tau f(t)\phi_k(t)dt.$$

Our first goal is to describe the set $\Theta \subset \ell_2$ of Fourier coefficients of the functions from the set $\mathcal{F}_m(R, S)$: Introduce following subset of $L_2[0,\tau]$

$$\Xi_m(R) = \{f : f^{(m-1)} \in AC[0,\tau], f^{(i)}(0) = f^{(i)}(\tau), i = \overline{0, m-1}, \int_0^\tau [f^{(m)}(t)]^2 dt \le R\},$$

where $AC[0,\tau]$ is the class of all absolutely continuous functions on the interval $[0,\tau]$. The proof of the next lemma can be found in [11], lemma A.3.

Lemma 4.1. *The function f belongs to the set $\Xi_m(R)$ if and only if its Fourier coefficients with respect to the trigonometric basis belong to the set*

$$\Theta_m = \left\{ \theta \in \ell_2, \ \sum_{k=2}^{+\infty} A_k^2 \theta_k^2 \le R \right\}, \tag{4.1}$$

where $A_{2k} = A_{2k+1} = \left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^m$, $k \in \mathcal{N}$.

Denote

$$\Lambda_k = \int_0^\tau \Lambda(t)\phi_k(t) dt, \quad \lambda_k = \int_0^\tau \lambda(t)\phi_k(t) dt.$$

Since $\Lambda \in \mathcal{F}_m(R, S)$ is equivalent to $\lambda \in \Xi_{m-1}(R)$ for its intensity function and, by the Lemma 4.1, the later is equivalent to $(\lambda_k)_{k\ge1} \in \Theta_{m-1}$, then, calculating $(\Lambda(0) = 0)$

$$\frac{\tau}{2\pi k}\lambda_{2k+1} = \Lambda_{2k}, \quad \frac{\tau}{2\pi k}\lambda_{2k} = \sqrt{\frac{2}{\tau}}\frac{\tau}{2\pi k}\Lambda(\tau) - \Lambda_{2k+1},$$

we obtain necessary and sufficient condition for $\Lambda \in \mathcal{F}_m(R, S)$ that is $(\Lambda_k)_{k\ge1}$ satisfies

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^{2m} \left[\Lambda_{2k}^2 + \left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}\frac{\tau}{2\pi k} S - \Lambda_{2k+1}\right)^2\right] \le R. \tag{4.2}$$

Let us write the empirical mean function as a stochastic integral

$$\hat{\Lambda}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^\tau I\{s \le t\} dX_j(s).$$

We consider generalization of this estimator

$$\tilde{\Lambda}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^\tau K_n(s-t) X_j(s) ds,$$

where $K_n(u)$ for each $n \in \mathcal{N}$ is such a function that

$$K_n(u+\tau) = K_n(u), \quad K_n(u) = K_n(-u), \ u \in [0,\tau].$$

We show that there are functions $K_n(u)$ for which the estimator described above is asymptotically efficient. Introduce

$$\hat{\Lambda}_{l,n} = \int_0^\tau \tilde{\Lambda}_n(t)\phi_l(t) dt, \quad K_{l,n} = \int_0^\tau K_n(t)\phi_l(t) dt.$$

Let us first study

$$\tilde{\Lambda}_{l,n} = \int_0^{\tau} \tilde{\Lambda}_n(t)\phi_l(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} X_j(s)\left(\int_0^{\tau} K_n(s-t)\phi_l(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} X_j(s)\left(\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\phi_l(s-u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.$$

We calculate separately the even and odd Fourier coefficients

$$\tilde{\Lambda}_{2l+1,n} = \sqrt{\frac{2}{\tau}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} X_j(s)\left(\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\sin\frac{2\pi l}{\tau}(s-u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\tau}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} X_j(s)\sin\frac{2\pi l}{\tau}s\left(\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\cos\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\tau}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} X_j(s)\cos\frac{2\pi l}{\tau}s\left(\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\sin\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.$$

Since

$$\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\sin\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} K_n(u)\sin\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u = 0,$$
$$\int_{s-\tau}^{s} K_n(u)\cos\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u = \int_0^{\tau} K_n(u)\cos\frac{2\pi l}{\tau}u\mathrm{d}u = K_{2l,n},$$

then (the second one can be proved in the same way)

$$\tilde{\Lambda}_{2l+1,n} = \sqrt{\frac{\tau}{2}}K_{2l,n}\cdot\hat{\Lambda}_{2l+1,n}, \quad \tilde{\Lambda}_{2l,n} = \sqrt{\frac{\tau}{2}}K_{2l,n}\cdot\hat{\Lambda}_{2l,n}.$$

Instead of this we consider the estimator which Fourier coefficients have the form ([2])

$$\bar{\Lambda}_{1,n} = \hat{\Lambda}_{1,n}, \quad \bar{\Lambda}_{2l,n} = K_{2l,n}\cdot\hat{\Lambda}_{2l,n}, \quad \bar{\Lambda}_{2l+1,n} = K_{2l,n}(\hat{\Lambda}_{2l+1,n} - a_{2l+1}) + a_{2l+1},$$

where

$$a_{2l+1} = \sqrt{\frac{\tau}{2}}\frac{\tau}{2\pi l}S.$$

Now we are ready to evaluate the risk described in the theorem. First,

$$\mathbf{E}_\Lambda||\tilde{\Lambda}_n - \Lambda||^2 - \frac{1}{n}\int_0^{\tau}\Lambda(s)\mathrm{d}s = \mathbf{E}_\Lambda||\tilde{\Lambda}_n - \Lambda||^2 - \mathbf{E}_\Lambda||\hat{\Lambda}_n - \Lambda||^2.$$

Using the fact that $\mathbf{E}_\Lambda\hat{\Lambda}_{l,n} = \Lambda_l$, and denoting $\sigma_{l,n}^2 = \mathbf{E}_\Lambda|\hat{\Lambda}_{l,n} - \Lambda_l|^2$, by the Parseval's equality we get

$$\mathbf{E}_\Lambda\|\tilde{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 - \mathbf{E}_\Lambda\|\hat{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 = \sum_{l=1}^{+\infty}(|K_{2l,n}|^2 - 1)(\sigma_{2l,n}^2 + \sigma_{2l+1,n}^2)$$
$$+\sum_{l=1}^{+\infty}|K_{2l,n} - 1|^2\left[|\Lambda_{2l+1} - a_{2l+1}|^2 + |\Lambda_{2l}|^2\right]. \tag{4.3}$$

To compute the variance $\sigma^2_{2l,n} + \sigma^2_{2l+1,n}$, introduce the notation

$$\pi_j(t) = X_j(t) - \Lambda(t).$$

In the sequel, we are going to use the following property of stochastic integral

$$\mathbf{E}_\Lambda\left[\int_0^\tau f(t)\mathrm{d}\pi_j(t)\int_0^\tau g(t)\mathrm{d}\pi_j(t)\right] = \int_0^\tau f(t)g(t)\mathrm{d}\Lambda(t), \quad f,g \in \mathrm{L}_2[0,\tau]. \tag{4.4}$$

Further, integrating by parts, we get

$$\hat{\Lambda}_{l,n} - \Lambda_l = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^\tau \pi_j(t)\phi_l(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^\tau \left(\int_t^\tau \phi_l(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\pi_j(t),$$

which entails that

$$\sigma^2_{l,n} = \mathbf{E}_\Lambda|\hat{\Lambda}_{l,n} - \Lambda_l|^2 = \frac{1}{n}\int_0^\tau \left(\int_t^\tau \phi_l(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}\Lambda(t).$$

Simple algebra yields

$$\sigma^2_{2l,n} + \sigma^2_{2l+1,n} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2\left[\sqrt{\frac{2}{\tau}}\Lambda(\tau) - \lambda_{2l}\right].$$

Combining with (4.3), this leads to

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\Lambda\|\tilde{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 - \mathbf{E}_\Lambda\|\hat{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 &= \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2}{n}S\left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2(|K_{2l,n}|^2 - 1)\\ &+\sum_{l=1}^{+\infty}|K_{2l,n} - 1|^2\left[|\Lambda_{2l+1} - a_{2l+1}|^2 + |\Lambda_{2l}|^2\right] + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2(1 - |K_{2l,n}|^2)\lambda_{2l}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

For the third term in the right-hand side we have

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2(1 - |K_{2l,n}|^2)\lambda_{2l}\right| \le\\ &\le \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\max_l\frac{|1 - |K_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{m-1}\lambda_{2l}\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{-1}\\ &\le \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\max_l\frac{|1 - |K_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2(m-1)}\lambda^2_{2l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Since $(\lambda_l)_{l\ge1} \in \Theta_{m-1}$, then from (4.1) we obtain

$$\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2(m-1)}\lambda^2_{2l}\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{R}.$$

Hence

$$\left|\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sqrt{\frac{2}{\tau}}\left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2(1 - |K_{2l,n}|^2)\lambda_{2l}\right| \le \frac{\mathrm{C}}{n}\max_l\frac{|1 - |K_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}$$

Now, consider the first two terms of the right-hand side of the equation (4.5). Introduce a set of possible kernels (for all $c_n > 0$)

$$\mathfrak{C}_n = \left\{ K_{2l,n} : |K_{2l,n} - 1| \le \left|\frac{2\pi l}{\tau}\right|^m c_n \right\}.$$

It follows from (4.2)

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2}{n} S \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 (|K_{2l,n}|^2 - 1) + + \sum_{l=1}^{+\infty} |K_{2l,n} - 1|^2 \left[|\Lambda_{2l+1} - a_{2l+1}|^2 + |\Lambda_{2l}|^2\right]$$
$$= \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2}{n} S \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 (|K_{2l,n}|^2 - 1) + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{|K_{2l,n} - 1|^2}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2m}} \left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2m} \left[|\Lambda_{2l+1} - a_{2l+1}|^2 + |\Lambda_{2l}|^2\right]$$
$$\le \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2}{n} S \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 (|K_{2l,n}|^2 - 1) + c_n^2 R.$$

Hence, minimizing the later over the set $\mathfrak{C}_n$

$$\tilde{K}_{2l,n} = \arg\min_{\mathfrak{C}_n} |K_{2l,n}| = \left(1 - \left|\frac{2\pi l}{\tau}\right|^m c_n\right)_+, \tag{4.6}$$

we obtain

$$\sup_{\Lambda \in \mathcal{F}_m(R,S)} \left(\mathbf{E}_\Lambda \|\tilde{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 - \mathbf{E}_\Lambda \|\hat{\Lambda}_n - \Lambda\|^2\right) \le$$
$$\frac{2}{n} S \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 (|\tilde{K}_{2l,n}|^2 - 1) + c_n^2 R + \frac{\mathrm{C}}{n} \max_l \frac{|1 - |\tilde{K}_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}. \tag{4.7}$$

Here $\tilde{\Lambda}_n(t)$ is the estimator corresponding to the kernel $\tilde{K}(u)$. In fact, we have not yet constructed the estimator. We have to specify the sequence of positive numbers c_n in the definition (4.6). Consider the function

$$H(c_n) = \frac{2}{n} S \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 (|\tilde{K}_{2l,n}|^2 - 1) + c_n^2 R$$

and minimize it with respect to the positive sequence c_n. Introduce as well $N_n = \frac{\tau}{2\pi} c_n^{-\frac{1}{m}}$. Then

$$H(c_n) = \frac{2}{n} S \sum_{l \le N_n} \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 \left[c_n^2 \left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2m} - 2c_n \left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m\right] + \sum_{l > N_n} \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 + c_n^2 R.$$

To minimize this function consider its derivative

$$H'(c_n) = \frac{2}{n} S \sum_{l \le N_n} \left(\frac{\tau}{2\pi l}\right)^2 \left[2c_n \left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^{2m} - 2\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m\right] + 2c_n R = 0. \tag{4.8}$$

Consider such sums ($\beta \in \mathcal{N}$)

$$\sum_{l \le N_n} l^\beta = \sum_{l=1}^{[N_n]} \left(\frac{l}{[N_n]}\right)^\beta [N_n]^\beta = [N_n]^{\beta+1} \sum_{l=1}^{[N_n]} \left(\frac{l}{[N_n]}\right)^\beta \frac{1}{[N_n]},$$

hence, if $c_n \longrightarrow 0$, as $n \longrightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{[N_n]^{\beta+1}} \sum_{l \le N_n} l^\beta \longrightarrow \int_0^1 x^\beta \mathrm{d}x,$$

that is,

$$\sum_{l \le N_n} l^\beta = \frac{[N_n]^{\beta+1}}{\beta+1}(1+o(1)), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Using this identity we can transform (4.7) (remembering that $N_n = \frac{\tau}{2\pi} c_n^{-\frac{1}{m}}$)

$$\frac{2}{n} S \left(c_n \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2(m-1)} \sum_{l \le N_n} l^{2(m-1)} - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{m-2} \sum_{l \le N_n} l^{m-2} \right) = -c_n R,$$

$$\frac{2}{n} S \left(c_n \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2(m-1)} \frac{N_n^{2m-1}}{2m-1} - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{m-2} \frac{N_n^{m-1}}{m-1} \right) = -c_n R(1+o(1)),$$

$$\frac{2}{n} S \frac{\tau}{2\pi} c_n^{-\frac{m-1}{m}} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{m-1} \right) = -c_n R(1+o(1)).$$

Finally, for the solution of (4.8), we can write

$$c_n^* = \alpha_n^*(1+o(1)),$$

(4.9) $$\alpha_n^* = \left[\frac{1}{n} \frac{\tau}{2\pi} \frac{2S}{R} \frac{m}{(2m-1)(m-1)} \right]^{\frac{m}{2m-1}}.$$

Now, using the identity ($\beta \in \mathcal{N}$)

$$\sum_{l > N_n} \frac{1}{l^\beta} = \frac{1}{N_n^{\beta-1}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} \mathrm{d}x \cdot (1+o(1)), \ n \longrightarrow +\infty,$$

for $\beta = 2$

$$\sum_{l > N_n} \frac{1}{l^2} = \frac{1}{N_n} \cdot (1+o(1)), \ n \longrightarrow +\infty,$$

calculate

$$H(c_n^*) = \frac{2}{n}S\left[(c_n^*)^2\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2(m-1)}\frac{N_n^{2m-1}}{2m-1}-\right.$$

$$\left.-2c_n^*\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{m-2}\frac{N_n^{m-1}}{m-1}-\frac{1}{N_n}\right](1+o(1))+(c_n^*)^2R=$$

$$=\frac{2}{n}S\left[(c_n^*)^2\frac{(c_n^*)^{-\frac{2m-1}{m}}}{2m-1}-2c_n^*\frac{(c_n^*)^{-\frac{m-1}{m}}}{m-1}\right](1+o(1))+(c_n^*)^2R=$$

$$=\frac{2}{n}S(c_n^*)^{-\frac{1}{m}}\frac{-3m+1}{(2m-1)(m-1)}(1+o(1))+(c_n^*)^2R=$$

$$=(c_n^*)^{-\frac{1}{m}}(c_n^*)^{-\frac{2m-1}{m}}R\frac{-3m+1}{m}(1+o(1))+(c_n^*)^2R=-(2m-1)(\alpha_n^*)^2R(1+o(1)),$$

where we have used the relation (4.9). Now, choosing the sequence $c_n = \alpha_n^*$ for the definition of the estimator in (4.6), we obtain from (4.7)

$$\sup_{\Lambda\in\mathcal{F}_m(R,S)}\left(\mathbf{E}_\Lambda\|\bar{\Lambda}_n-\Lambda\|^2-\mathbf{E}_\Lambda\|\hat{\Lambda}_n-\Lambda\|^2\right)\leq$$

$$\leq -(2m-1)(\alpha_n^*)^2R(1+o(1))+\frac{C}{n}\max_l\frac{|1-|\bar{K}_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}. \tag{4.10}$$

If we show that

$$\frac{1}{n}\max_l\frac{|1-|\bar{K}_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}=o(n^{-\frac{2m}{2m-1}}), \tag{4.11}$$

then, since

$$\Pi=(2m-1)(\alpha_n^*)^2Rn^{\frac{2m}{2m-1}},$$

we get from (4.10)

$$\varlimsup_{n\to+\infty}n^{\frac{2m}{2m-1}}\sup_{\Lambda\in\mathcal{F}_m(R,S)}\left(\mathbf{E}_\Lambda\|\bar{\Lambda}_n-\Lambda\|^2-\mathbf{E}_\Lambda\|\hat{\Lambda}_n-\Lambda\|^2\right)\leq-\Pi.$$

This combined with the proposition will end the proof. To prove (4.11) recall that

$$\bar{K}_{2l,n}=\left(1-\left|\frac{2\pi l}{\tau}\right|^m\alpha_n^*\right)_+,\quad \alpha_n^*=\left[\frac{1}{n}\frac{\tau}{2\pi}\frac{2S}{R}\frac{m}{(2m-1)(m-1)}\right]^{\frac{m}{2m-1}}.$$

Therefore,

$$\frac{1}{n}\max_l\frac{|1-|\bar{K}_{2l,n}|^2|}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}\leq\frac{2}{n}\max_l\frac{1-\bar{K}_{2l,n}}{\left(\frac{2\pi l}{\tau}\right)^m}=\frac{2}{n}\alpha_n^*=\frac{C}{n^{\frac{3m-1}{2m-1}}}=o(n^{-\frac{2m}{2m-1}}),\ m>1.$$

Theorem 3.1 is proved.

Acknowledgements The author is greatful to Yu. A. Kutoyants for his suggestions and interesting discussions and to A. S. Dalalyan for fruitful comments.

Список литературы

[1] A. S. Dalalyan and Yu. A. Kutoyants,"On second order minimax estimation of invariant density for ergodic diffusion", Statistics & Decisions, **22**, no. 1, 17 – 42 (2004).
[2] S. Delattre and M. Hoffmann, "The Pinsker Bound in Mixed Gaussian White Noise", Math. Methods of Statist, **10**, no. 33, 283 – 315 (2001).
[3] S. B. Gasparyan, "On the lower bound in second order asymptotically efficient estimation for Poisson processes", Working Paper.
[4] R. D. Gill and B. Ya. Levit, "Applications of the van Trees inequality: a Bayesian Cramér-Rao bound", Bernoulli, **1**, no. 1-2, 59 – 79 (1995).
[5] G. K. Golubev and W. Härdle, "Second order minimax estimation in partial linear models", Math. Methods of Statist., **9**, no. 2, 160 – 175 (2000).
[6] G. K. Golubev and B. Ya. Levit, "On the second order minimax estimation of distribution functions", Math. Methods of Statist., **5**, no. 1, 1 – 31 (1996).
[7] Yu. A. Kutoyants, Statistical Inference for Spatial Poisson Processes, Lecture Notes in Statistics **134**, Springer-Verlag, New York (1998).
[8] Yu. A. Kutoyants, Introduction to Statistics of Poisson Processes, to appear.
[9] M. Nussbaum, "Minimax risk: PinskerвЃЄs bound", In Encyclopedia of Statistical Sciences, Update Volume 3, S. Kotz (Ed), New York: Wiley, 451 – 460 (1999).
[10] M. S. Pinsker, "Optimal filtering of square-integrable signals in Gaussian noise", Problems Inform. Transmission, **16**, no. 2, 120 – 133 (1980).
[11] A. B. Tsybakov, Introduction to Nonparametric Estimation, Springer Series in Statistics, Springer, New York, (2009).

Поступила 12 декабря 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 24-37.

СХОДИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

А. Р. НУРБЕКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *anurbekyan@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматривается вопрос сходимости частичных сумм многомерных тригонометрических интерполяционных полиномов. Доказана сходимость по Прингсхейму для функций, непрерывных по гармонической вариации. Построен пример, показывающий, что условие непрерывности по вариации нельзя заменить на ограниченность вариации.

MSC2010 numbers: 42A15.

Ключевые слова: Многомерная тригонометрическая интерполяция; гармоническая вариация.

1. Введение

Введем необходимые обозначения. Для промежутка I через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов I_n, таких что $\overline{I_n} \subset I$. Пусть $I_k = (a_k, b_k)$ и f функция на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ обозначим $f(I_1) = f(b_1) - f(a_1)$. Если для $m-1$ уже определено $f(I_1, \ldots, I_{m-1})$, то положим

$$f(I_1, \ldots, I_m) = f(I_1, \ldots, I_{m-1}, b_m) - f(I_1, \ldots, I_{m-1}, a_m).$$

Величину $f(I_1, \ldots, I_m)$ будем называть смешанным приращением функции f на $I = I_1 \times \ldots \times I_m$.

Если множество $\{1, \ldots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β, то через $f(I_\alpha, x_\beta)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов x_i, $i \in \alpha$, при фиксированных x_j, $j \in \beta$.

Обозначим через $\mathbf{L}$ множество неубывающих последовательностей положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Определение 1.1. *Пусть $\Lambda_j = \{\lambda_k^j\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $(\Lambda_1, \ldots \Lambda_m)$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ по параллелепипеду $\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_m$ называется величина*

$$V_{\Lambda_1,\ldots\Lambda_m} = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta_j)} \sum_{k_1,\ldots,k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1, \ldots, I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \cdots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ состоит из чисел $j_1 < \ldots < j_p$ и $\beta = \{1, \ldots, m\} \setminus \alpha$. Тогда через

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)) = V_{\Lambda_{j_1},\ldots,\Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta))$$

обозначим $(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$- вариацию f относительно функции переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ по p-мерному параллелепипеду $\Delta_\alpha = \Delta_{j_1} \times \cdots \times \Delta_{j_p}$ при фиксированных значениях x_j, $j \in \beta$.

$(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ относительно переменных x_α по m-мерному параллелепипеду $\Delta_\alpha = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ называется величина

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda_{j_1},\ldots,\Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x_\beta \in \Delta_\beta} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)).$$

Определение 1.2. *Полной $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ называется величина*

$$V_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m}(f, \Delta) = \sum_{\alpha \neq \emptyset} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta).$$

Если полная вариация функции конечна, то она является функцией ограниченной $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-вариации, а класс таких функций обозначают через $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)BV(\Delta)$.

Если последовательности Λ_i совпадают и равны Λ, то для краткости будем писать $V_\Lambda^{x_\alpha}$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$. В частном случае, когда $\Lambda = \{n\}$, функции класса $\Lambda BV(\Delta)$ называют функциями ограниченной гармонической вариации и пишут $HBV(\Delta)$, V_H и т.д.

Определение 1.3. *Скажем, что $x \in \mathbb{R}^m$ является регулярной точкой функции f, если существуют и конечны 2^m пределы*

$$f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0) = \lim_{t_1,\ldots,t_m \to +0} f(x_1 \pm t_1, \ldots, x_m \pm t_m),$$

для всевозможных комбинаций знаков.

В одномерном случае классы ΛBV были введены Д. Ватерманом [2], а в двумерном случае – А. А. Саакяном [7]. Случай более высоких размерностей был рассмотрен А. И. Саблиным [9].

Классы ΛBV очень полезны при изучении сходимости тригонометрических рядов Фурье. Оказалось (см. [4], [6], [8]), что эти классы можно использовать также при изучении сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов в одномерном и двумерном случаях. Приведем основные известные результаты.

Теорема 1.1 (Д. Ватерман [2]). *Пусть 2π-периодическая функция $f \in HBV([-\pi,\pi])$. Тогда в каждой точке ряд Фурье f сходится к величине $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.*

Теорема 1.2 (А. А. Саакян [7]). *Пусть 2π-периодическая по каждому переменному измеримая функция $f \in HBV([-\pi,\pi]^2)$. Тогда в каждой регулярной точке $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ ряд Фурье f сходится по Принзсхейму к величине*

$$f^*(x_1,x_2) = \frac{1}{4} f(x_1 \pm 0, x_2 \pm 0).$$

Если функция непрерывна на открытом множестве E, то сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в E.

А. Н. Бахвалов [5] показал, что в случае $m > 2$ непрерывность функции и ограниченность ее гармонической вариации недостаточны для сходимости рядов Фурье по Прингсхейму. Д. Ватерманом [3] было введено понятие непрерывности по Λ-вариации, которое было обобщено А. Н. Бахваловом [5] на многомерный случай для установления сходимости по Прингсхейму при $m > 2$.

Определение 1.4. *Скажем, что функция $f \in (\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)BV(\Delta)$ непрерывна по $(\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)$-вариации и напишем $f \in C(\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)V(\Delta)$, если для любого непустого множества $\alpha = \{j_1,\dots,j_p\} \subset \{1,\dots,m\}$ и любого $j_k \in \alpha$*

$$\lim_{n\to\infty} V^{x^\alpha}_{\Lambda_{j_1},\dots,\Lambda_{j_{k-1}},\Lambda^{(n)}_{j_k},\Lambda_{j_{k+1}},\dots,j_p},(f;\Delta) = 0$$

где $\Lambda^{(n)}_j = \{\lambda^j_{n+k}\}_{k=1}^\infty$.

Теорема 1.3 (А. Н. Бахвалов [5]). *Пусть $f \in CHV([-\pi,\pi]^m)$ – непрерывная 2π-периодическая по каждому аргументу функция. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Принзсхейму на $[-\pi,\pi]^m$.*

Для тригонометрических интерполяционных полиномов аналог теоремы 1.1 был доказан А. А. Кельзоном [6] (см. также [4]), а аналог теоремы 1.2 был доказан в работе А. Нурбекяна и А. Саакяна [8].

В настоящей работе доказан аналог теоремы 1.3 для тригонометрических интерполяционных полиномов и установлена его окончательность.

2. Вспомогательные результаты

Определение 2.1. *Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_m)$ 2π-периодична по каждому аргументу и $T=[-\pi,\pi]$. Для набора натуральных чисел $N=(N_1,\ldots,N_m)$ и вектора $\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ldots,x_m^0)\in T^m$ определим узлы интерполяции следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\mathbf{j} &= \mathbf{x}_\mathbf{j}(\mathbf{x}^0,N)=\left(x^1_{j_1},\ldots,x^m_{j_m}\right), \qquad \mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_m)\in\mathbb{Z}^m,\\ x^i_j &= x^i_0+jh_{N_i},\quad h_{N_i}=\frac{2\pi}{2N_i+1},\quad i=1,\ldots,m,\quad j\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Через $I^{N_1,\ldots,N_m}(f,\mathbf{x})$ обозначим единственный тригонометрический (интерполяционный) полином вида

$$\sum_{\nu_1=-N_1}^{N_1}\cdots\sum_{\nu_m=-N_m}^{N_m} c^{N_1,\ldots,N_m}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} e^{i\nu_1x_1}\ldots e^{i\nu_mx_m}$$

для которого

$$I^{N_1,\ldots,N_m}(f,\mathbf{x}_\mathbf{j})=f(\mathbf{x}_\mathbf{j}),\qquad \mathbf{j}\in\mathbb{Z}^m.$$

Как показано в [1], $n_1,\ldots,n_m$-частичные суммы интерполяционного полинома задаются формулами:

$$(2.1)\qquad I^{N_1,\ldots,N_m}_{n_1,\ldots,n_m}(f,\mathbf{x}):=\sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{\nu_m=-n_m}^{n_m} c^{N_1,\ldots,N_m}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} e^{i\nu_1x_1}\ldots e^{i\nu_mx_m}$$

$$=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m} f(x_1+t_1,\ldots,x_m+t_m)D_{n_1}(t_1)\cdots D_{n_m}(t_m)d\omega_{2N_1+1}(t_1)\ldots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

где $\omega_{2N_i+1}(t_i)$ – непрерывная слева, ступенчатая функция со скачками h_{N_i} в точках x_i^j, $j=1,\ldots,2N_i+1$, а $D_n(t)$ – ядро Дирихле.

Теорема 2.1. *Пусть $f\in HBV(\Delta^m)$ для некоторого интервала $\Delta\subset T$. Тогда*

$$(2.2)\qquad \left|\int_{\Delta^m} f(t_1,\ldots,t_m)\prod_{i=1}^m\frac{\sin n_it_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right|$$

$$\le\prod_{i=1}^m\frac{2N_i+1}{2n_i}\times\left(V_H(f,\Delta^m)+M(f,\Delta^m)\right),$$

где $M(f, \Delta^m) = \sup_{x \in \Delta^m} f(x)$.

Доказательство. Теорему докажем индукцией по m. Для $m = 1$ она доказана в работе [8]. Предположим, что теорема верна для $m - 1$ и докажем для m. Обозначив

$$\phi(t_1) = \int_{\Delta^{m-1}} f(t_1, \ldots, t_m) \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

интеграл в (2.2) можем представить в виде

$$I = \int_{\Delta} \phi(t_1) \frac{\sin n_1 t_1}{t_1} d\omega_{2N_1+1}(t_1).$$

Применив теорему в одномерном случае, получим

$$|I| \leq \frac{2N_1 + 1}{2n_1} \big(V_H(\phi, \Delta) + M(\phi, \Delta)\big). \tag{2.3}$$

А в силу индуктивного предположения для $m - 1$ и $t \in \Delta$ будем иметь

$$|\phi(t)| \leq \prod_{i=2}^{m} \frac{2N_i + 1}{2n_i} \times \big[f(t, \cdot, \ldots, \cdot), V_H(\Delta^{m-1}) + M(f(t, \cdot, \ldots, \cdot), \Delta^{m-1})\big]. \tag{2.4}$$

Для оценки гармонической вариации функции ϕ рассмотрим гармоническую сумму по некоторому семейству попарно непересекающихся интервалов $\{\Delta_k\}_{k=1}^{r} = \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{r}$ из Δ:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{|\phi(\Delta_k)|}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} \int\limits_{\Delta^{m-1}} [f(\beta_k, t_2, \ldots, t_m) - f(\alpha_k, t_2, \ldots, t_m)] \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin n t_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{m-1}} \sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} [f(\beta_k, t_2, \ldots, t_m) - f(\alpha_k, t_2, \ldots, t_m)] \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin n t_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$

$$= \int_{\Delta^{m-1}} \psi(t_2, \ldots, t_m) \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin n t_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$

$$\leq \prod_{i=2}^{m} \frac{2N_i + 1}{2n_i} \times \big[V_H(\psi, \Delta^{m-1}) + M(\psi, \Delta^{m-1})\big],$$

где через ψ обозначена функция

$$\psi(t_2, \ldots, t_m) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} [f(\beta_k, t_2, \ldots, t_m) - f(\alpha_k, t_2, \ldots, t_m)].$$

Нетрудно показать, что

$$V_H(\psi, \Delta^{m-1}) \leq V_H(f, \Delta^m), \qquad M(\psi, \Delta^{m-1}) \leq V_H(f, \Delta^m). \tag{2.5}$$

Из (2.3)-(2.5) вытекает требуемая оценка (2.2). Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ – 2π-периодическая по каждому переменному функция, и $f \in HBV(T^m)$. Тогда*

$$\left|\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)e^{i(n_1t_1+\dots+n_mt_m)}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| \le (2\pi)^{m-1}\frac{2N_j+1}{2n_j}\frac{1}{\ln N_j}V_H(f)$$

для любого $j=1,\dots,m$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $j=1$. Теперь воспользуемся аналогом теоремы 2.2 для одномерного случая, который был доказан в [4] (теорема 2):

$$\left|\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)e^{i(n_1t_1+\dots+n_mt_m)}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| =$$

$$= \left|\int_{T^{m-1}} e^{i(n_2t_1+\dots+n_mt_m)}\left[\int_T f(t_1,\dots,t_m)e^{in_1t_1}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\right]\prod_{k=2}^{m} d\omega_{2N_k+1}(t_k)\right| \le$$

$$\le (2\pi)^{m-1}\max_{t_2,\dots,t_m}\left|\int_T f(t_1,\dots,t_m)e^{in_1t_1}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\right| \le (2\pi)^{m-1}\frac{2N_1+1}{2n_1}\frac{1}{\ln N_1}V_H(f).$$

Теорема 2.2 доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ и $g(x_1,\dots,x_m)=\prod_{i=1}^m g_i(x_i)$. Если $f\in HBV(T^m)$, $g_i\in HBV(T), i=1,\dots,m$, тогда*

(2.6)

$$\left|\int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t})\left[\prod_{j=1}^{k}\frac{\sin n_jt_j}{t_j}\times\prod_{s=k+1}^{m}e^{in_st_s}\right]d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_k+1}(t_k)\right| \le$$

$$\le C(f,g)\left[\prod_{j=1}^{k}\frac{2N_j+1}{2n_j}\right]\times\frac{2N_s+1}{2n_s}\frac{1}{\ln N_s},$$

для любых $\mathbf{x}\in T^m$, $n_j\le N_j$, $j=1,\dots,k$, $s=k+1,\dots,m$, $k=1,\dots,m$.

Доказательство. Обозначим

$$F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t}),\quad \mathbf{x},\mathbf{t}\in\mathbf{R}^m.$$

По лемме 1.2 из [7] имеем, что $F\in HBV(T^m)$. Обозначив

$$\phi(t_{k+1},\dots,t_m)=\int_{T^k} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t})\prod_{j=1}^{k}\frac{\sin n_jt_j}{t_j}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_k+1}(t_k),$$

интеграл в (2.6) можем записать в следующем виде

$$(2.7)\quad \left|\int_{T^{m-k}} \phi(t_{k+1},\dots,t_m) \prod_{s=k+1}^{m} e^{in_s t_s}\, d\omega_{2N_{k+1}+1}(t_{k+1})\dots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| \le$$
$$\le (2\pi)^{m-k-1}\frac{2N_s+1}{2n_s}\frac{1}{\ln N_s}V_H(\phi)$$

и оценить с помощью теоремы 2.2, где $s \in \{k+1,\dots,m\}$.

Гармоническая вариация функции ϕ оценивается так, как в доказательстве теоремы 2.1:

$$(2.8)\qquad V_H(\phi) \le C\prod_{j=1}^{k}\frac{2N_j+1}{2n_j}V_H(F).$$

Из оценок (2.7) и (2.8) следует (2.6). □

Теорема 2.4. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ – 2π-периодическая по каждому переменному функция, и $f \in HBV(T^m)$. Для любого $\varepsilon > 0$*

$$I_{n_1,\dots,n_m}^{N_1,\dots,N_m}(f,x) = \frac{1}{\pi^m}\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)+o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 равномерно на T^m, когда $n_i \to \infty$, $i = 1,\dots m$ так, что отношения $\frac{N_i}{n_i}$ равномерно ограничены.

Доказательство. Запишем ядро Дирихле $D_n(t)$ в следующем виде:

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt, \quad t \in T,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \le \pi, \quad g(0) = 0.$$

Тогда, согласно (2.1),

$$\pi^m \cdot I_{n_1,\dots,n_m}^{N_1,\dots,N_m}(f,\mathbf{x}) = \int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}D_{n_i}(t_i)d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$
$$= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) + I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{T^m\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$

$$I_2 = \int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\left[g(t_i)\sin n_i t_i + \frac{1}{2}\cos n_i t_i\right]d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

а I_3 является суммой по $k = 1, \ldots, m-1$ и всевозможным комбинациям $(i_1, \ldots, i_m)$ интегралов следующего вида

$$\int\limits_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{s=1}^{k} \frac{\sin n_{i_s} t_{i_s}}{t_{i_s}} \prod_{s=k+1}^{m} \left[g(t_{i_s}) \sin n_{i_s} t_{i_s} + \frac{1}{2} \cos n_{i_s} t_{i_s} \right] d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m).$$

Сначала оценим интеграл I_1. Обозначим

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t| < \epsilon \\ \frac{1}{t}, & \text{если } |t| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Так как функция h ограничена на T, то используя лемму 1.2 из [7] получаем

$$F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} h(t_i) \in HBV(T^m), \quad V_H(F) \leq C(\epsilon) V_H(f).$$

Применив теорему 2.2 для функции F, получим нужную оценку для I_1.

Далее, нетрудно убедиться, что $g \in HBV(T)$ и с учетом леммы 1.2 из [7] получаем

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} g(t_i) \in HBV(T^m),$$

что вместе с теоремой 2.2 дает нужную оценку для I_2.

Интегралы в I_3 являются суммами интегралов вида (2.6), где $g_i = g$ или $g_i = \frac{1}{2}$ и оцениваются по теореме 2.3, откуда следует нужная оценка для I_3, так как количество интегралов вида (2.6) составляющих I_3 конечно и зависит только от m. □

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть f – 2π-периодическая по каждому переменному функция и $f \in CHV(T^m)$. Тогда для любой регулярной точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in T^m$,*

$$\lim_{n_1,\ldots,n_m \to \infty} I_{n_1,\ldots,n_m}^{N_1,\ldots,N_m}(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0), \tag{3.1}$$

при условии, что отношения N_i/n_i равномерно ограничены.

Если, кроме того, функция f непрерывна в окрестности компакта K, то (3.1) имеет место равномерно по $\mathbf{x} \in K$.

Доказательство. По теореме 2.4 достаточно показать, что

$$\lim_{n_1,\ldots,n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) \tag{3.2}$$
$$= \frac{1}{2^m} f(\mathbf{x}+0),$$

где

$$n_i \le N_i \le L \cdot n_i, \qquad i = 1, \dots, m \tag{3.3}$$

(L – фиксированная константа) и

$$f(\mathbf{x}+0) = \lim_{t_1,\dots,t_m \to +0} f(x_1 + t_1, \dots, x_m + t_m).$$

Из теоремы 2.4 следует, что

$$\lim_{n_1,\dots,n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) = \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, если обозначим

$$\psi(\mathbf{t}) = \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}+0),$$

то соотношение (3.2) примет вид:

$$\lim_{n_1,\dots,n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} \psi(\mathbf{t}) \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) = 0. \tag{3.4}$$

Но по теореме 2.1,

$$\left| \int_{[0,\epsilon]^m} \psi(\mathbf{t}) \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) \right|$$
$$\le (L+1)^m \left[V_H(\psi, [0,\epsilon]^m) + M(\psi, [0,\epsilon]^m) \right],$$

где L - постоянная из (3.3). Отсюда следует (3.4), а, следовательно, и утверждение теоремы, так как из условия $f \in CHV(T^m)$ вытекает, что (см теорему 2 из [5]),

$$\lim_{\epsilon \to 0} V_H(\psi, [0,\epsilon]^m) = 0, \qquad \lim_{\epsilon \to 0} M(\psi, [0,\epsilon]^m) = 0, \tag{3.5}$$

при этом, если f непрерывна в окрестности компакта K, то (3.5) имеет место равномерно по $\mathbf{x} \in K$. Теорема 3.1 доказана. □

В случае $m > 2$ в [5] (Теорема 5) приведен пример непрерывной функции с ограниченной гармонической вариацией ряд Фурье которой расходится в некоторой точке. Приведем аналогичный пример для тригонометрических интерполяционных полиномов. При построении примера воспользуемся элементами конструкции примера в [5].

Теорема 3.2. *Пусть $m \ge 3$ и последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbf{L}$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^1 \cdots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV([-\pi,\pi]^m)$ *существует непрерывная функция тригонометрические интерполяционные полиномы которой расходятся по кубам в* $0 = (0, \dots, 0)$.

В частности, это означает, что в случае $m > 2$ в теореме 3.1 класс $CHV([-\pi,\pi]^m)$ нельзя заменить классом $HBV([-\pi,\pi]^m)$.

Доказательство. Для построения функции воспользуемся так называемыми "диагональными" функциями определенными в [5]. Пусть n_k, N_k натуральные числа такие, что

$$n_1 = 4,\ n_k \geq 3, \qquad N_0 = 1, \quad N_k = n_1 n_2 \cdots n_k = N_{k-1} n_k. \tag{3.6}$$

Для натуральных k определим интервалы $D_k^1 = (\pi/N_k, \pi/N_{k-1})$. Узлами интерполяции будут служить точки

$$t_j = -\pi + \frac{2\pi j}{2N_k + 1}, \qquad j = 0, 1, \dots, 2N_k.$$

Определим функции f_k с помощью которых будет задана "диагональная" функция. Мы полагаем $f_k(t) = 0$ при $t \in T \setminus D_k^1$. В узлах t_j, которые находятся в D_k^1 полагаем

$$f_k(t_j) = \frac{1}{\ln n_k} sgn\left[\sin(N_k + 1/2)t_j\right],$$

а на интервалах между узлами функция f_k линейная. Заметим, что из определения следует, что $f_k(\frac{\pi}{N_k}) = f_k(\frac{\pi}{N_{k-1}}) = 0$. Легко проверить, что номерами узлов, которые лежат в D_k^1 являются $j = N_k + 2, \dots, N_k + n_k$. Носитель функции f_k делится точками t_k на n_k интервалов монотонности. Приращение функции на $(n_k - 2)$ интервалах монотонности равняется $\frac{2}{\ln n_k}$, а на остальных двух равняется $\frac{1}{\ln n_k}$. Следовательно

$$V_H(f_k, T) = \frac{1}{\ln n_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k - 2} \frac{2}{j} + \frac{1}{n_k - 1} + \frac{1}{n_k}\right) \leq 4.$$

Далее, обозначим $D_k^2 = (\pi/(N_k + 1/2),\ 2\pi/(N_k + 1/2))$ и

$$h_k(t) = \begin{cases} \sin(N_k + 1/2)t, & \text{если } t \in D_k^2, \\ 0, & \text{если } t \in T \setminus D_k^2 \end{cases}$$

Тогда "диагональная" функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{2j}(x^1)\prod_{q=2}^{m} h_{2j}(x^q)\right), \qquad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in T^m, \tag{3.7}$$

принадлежит классу $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ по лемме 6 в [5].

Сначала докажем, что ряд в (3.7) сходится равномерно. Покажем, что для любого $\epsilon > 0$ существует число $N_0 > 0$ такое, что при $N > N_0$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^{m} h_{2j}(x^q) \right) \right| < \epsilon \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in T^m.$$

Заметим, что $\max |f_j(t)| \searrow 0$ при $j \to \infty$. Выберем $N_0 > 0$ так, что $\max |f_j(t)| < \epsilon$ при $j > N_0$. Так как $|h_j(t)| \le 1$, то ясно, что

$$\left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^{m} h_{2j}(x^q) \right) \right| \le \sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)|.$$

Поскольку по построению носители функций f_k лежат в интервалах D_k^1, то для любого $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in T^m$ имеем

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)| = 0, \quad \text{если} \quad x^1 \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} D_{2j}^1.$$

В противном случае, так как интервалы D_k^1 попарно не пересекаются, то для некоторого $j_0 > N > N_0$ будем иметь

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)| = |f_{2j_0}(x^1)| < \epsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из равномерной сходимости ряда (3.7) и непрерывности функций f_j и h_j следует, что функция f непрерывна на T^m.

Обозначим

$$I_N(f) = I_{N,\ldots,N}^{N,\ldots,N}(f), \qquad N = 1, 2, \ldots$$

и докажем, что в (3.6) последовательность n_k можно выбрать так, чтобы для

$$R_k = I_{N_k}(f, 0) \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{m-1},$$

при достаточно больших k имели место оценки

$$R_k \ge 2\delta \quad \text{при четных } k, \qquad R_k \le \delta \quad \text{при нечетных } k.$$

Так как ряд (3.7) равномерно сходится,

$$R_k = \sum_{j=1}^{\infty} I_{N_k}(f_{2j}, 0)(I_{N_k}(h_{2j}, 0))^{m-1} =: \sum_{j=1}^{\infty} R_{k,2j}.$$

Сначала рассмотрим величины $I_{N_k}(f_{2j}, 0)$. Для любого k

$$(3.8)\quad I_{N_k}(f_k,0)=\frac{1}{\pi\ln n_k}\int_{\pi/N_k}^{\pi/N_{k-1}} f_k(t)\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)=$$

$$\frac{1}{\pi\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{2\sin(t_j/2)}\times\frac{\pi}{N_k+1/2}\geq\frac{1}{(2N_k+1)\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\times\frac{t_j}{2}}=$$

$$\frac{1}{2\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{j-N_k-1/2}=\frac{1}{2\ln n_k}\sum_{j=1}^{n_k-1}\frac{1}{j+1/2}\geq\frac{1}{2\ln n_k}(\ln n_k-1)\geq\frac{1}{3},$$

при достаточно больших n_k. Пусть $f_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)$, тогда

$$(3.9)\quad \sum_{i=k+1}^{\infty}|I_{N_k}(f_i,0)|=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi} f_i(t)\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)\right|$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{N_k}}|f_0(t)|\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)=\frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi}{2N_k+1}\times\left|f_0\left(\frac{\pi}{2N_k+1}\right)\right|$$

$$\times\left|\frac{\sin(N_k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2N_k+1}}{2\sin\pi/2(2N_k+1)}\right|\leq\frac{1}{2N_k+1}\max_{t\in(0,\pi/N_k)}|f_0(t)|\times\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2(2N_k+1)}}\leq\frac{\delta}{2},$$

при достаточно больших n_k. В доказательстве неравенства мы воспользовались тем, что единственным узлом интерполяции в интервале $\left(0,\frac{\pi}{N_k}\right)$ является $t_{N_k+1}=\frac{\pi}{2N_k+1}$ и $|f_0(t)|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(t)|$, так как носители f_i попарно не пересекаются.

Если числа $n_1,\dots,n_{k-1}$ уже выбраны, то для $i=1,2,\dots,k-1$,

$$I_{N_k}(f_i,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_i(t)\frac{\sin N_k t}{t}d\omega_{2N_k+1}(t)+o(1)\quad\text{при}\quad N_k\to\infty,$$

где интеграл является коэффициентом Фурье-Лагранжа непрерывной функции $\frac{f_i(t)}{t}$, который стремится к нулю, когда $N_k\to\infty$. Следовательно число n_k можно выбрать так, чтобы

$$(3.10)\qquad \sum_{i=1}^{k-1}|I_{N_k}(f_i,0)|\leq\frac{\delta}{2},$$

Перейдем к оценкам $I_{N_k}(h_i, 0)$. Учитывая, что для любого k единственной узловой точкой в D_k^2 является $\frac{3\pi}{2N_k+1}$, то будем иметь

$$
\begin{aligned}
(3.11)\quad I_{N_k}(h_k,0) &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \frac{(\sin(N_k+1/2)t)^2}{2\sin(t/2)} d\omega_{2N_k+1}(t) \\
&= \frac{\left(\sin\left[\left(N_k+\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\pi}{2N_k+1}\right]\right)^2}{2\pi\sin\left(\frac{3\pi}{4(N_k+1/2)}\right)} \times \frac{\pi}{N_k+1/2} = \frac{1}{(2N_k+1)\sin\left(\frac{3\pi}{4N_k+2}\right)} \\
&\geq \frac{1}{(2N_k+1)\frac{3\pi}{4N_k+2}} = \frac{2}{3\pi} := C_0,
\end{aligned}
$$

Далее, для $i \neq k$ имеем, что

$$
\begin{aligned}
(3.12)\quad |I_{N_k}(h_i,0)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \left[\sin\left(N_i+\frac{1}{2}\right)t\right] \frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin(t/2)} d\omega_{2N_k+1}(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{N_i+1/2}\times\frac{1}{2\sin(\pi/(2N_k+1))} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Тогда, с учетом (3.10),

$$
(3.13)\qquad \sum_{2j<k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}.
$$

Учитывая (3.8), (3.11) и (3.9), (3.12), выберем k_0 так, чтобы при $k \geq k_0$

$$
(3.14)\qquad R_{k,k} \geq \frac{C_0^{m-1}}{4} = 3\delta, \qquad \sum_{2j>k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}.
$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) получим, что при четных $k \geq k_0$

$$
R_k \geq R_{k,k} - \sum_{2j<k} |R_{k,2j}| - \sum_{2j>k} |R_{k,2j}| \geq 3\delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 2\delta,
$$

а при нечетных $k \geq k_0$

$$
|R_k| \leq \sum_{2j<k} |R_{k,2j}| + \sum_{2j>k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
$$

что и доказывает расходимость интерполяционных полиномов по кубам в точке 0. □

Abstract. The paper considers the question of convergence of partial sums of multidimensional trigonometric interpolation polynomials. Convergence by Pringsheim for functions that are continuous in harmonic variation is established. An example is constructed showing that continuity in variation cannot be replaced by boundedness of variation.

Список литературы

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, ч.2. Москва, Мир (1965).

[2] D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", Studia Math., 44, no. 1, 107 – 117 (1972).

[3] D. Waterman, "On the summability of Fouries series of functions of Λ-bounded variation", Studia Math., 55, 87 – 95 (1976).

[4] D. Waterman, H. Xing, "The convergence of partial sums of interpolating polynomials", J. Math. Anal. Appl., 333, 543 – 555 (2007).

[5] А. Н. Бахвалов, "Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье", Математический Сборник, 193, по. 12, 3 – 20 (2002).

[6] А. А. Кельзон, "О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации", ДАН СССР, 286, по. 5, 1062 – 1064 (1997).

[7] А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН АрмССР, Математика, 22, no. 6, 517 – 529 (1987).

[8] А. Р. Нурбекян, А. А. Саакян, "Сходимость двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, серия Математика, 49, по. 4, 35 – 46 (2014).

[9] А. И. Саблин, "Λ-вариация и ряды Фурье", Изв. вузов, Сер. матем., 28, по. 3, 3 – 20 (1993).

Поступила 1 сентября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 38-52.

СТРУКТУРА ИНВАРИАНТНЫХ ИДЕАЛОВ НЕКОТОРЫХ ПОДАЛГЕВР АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

Е. В. ЛИПАЧЕВА, К. Г. ОВСЕПЯН

Казанский Государственный Энергетический Университет, Россия
E-mails: *elipacheva@gmail.com*, *karen.hovsep@gmail.com*

Аннотация. В данной работе приводится полное описание инвариантных идеалов C^*-подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов. Доказывается расщепимость коротких точных последовательностей порожденных такими идеалами.

MSC2010 numbers:

Ключевые слова: индекс монома; алгебра Теплица; неприводимое представление; C^*-алгебра, инвариантная подалгебра; инвариантный идеал; компактный оператор.

1. Введение

[1]Одним из хорошо известных и используемых алгебраических объектов в современной математической физике является алгебра Теплица $\mathcal{T}$. В работах многих авторов исследуется как сама эта алгебра, так и различные ее модификации, изучаются свойства полученных алгебр (см. [1] – [6]). Данная статья посвящена одному из обобщений алгебры Теплица, которое возникает при исследовании C^*-алгебр, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы. Ранее, в работе [7], авторами было начато изучение C^*-подалгебры алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденной мономами, индекс которой кратен числу m. Эта C^*-алгебра была обозначена $\mathcal{T}_m$ и было показано, что она неподвижна относительно конечной подгруппы группы S^1 порядка m. Были описаны все неприводимые бесконечномерные представления этой C^*-алгебры.

В настоящей статье продолжается исследование C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ с несколько иной точки зрения. В частности, показывается, что C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ представляется в виде

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m, \tag{1.1}$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ N 12-01-97016.

где $\mathcal{T}(m)$ – C^*-подалгебра в алгебре $\mathcal{T}_m$, порожденная операторами T^m и T^{*m}, а $\mathcal{K}_m$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов в $\mathcal{T}_m$. Более того, показывается, что при некоторых модификациях подалгебры $\mathcal{K}_m$ получаются новые представления вида (1.1) для алгебры $\mathcal{T}_m$.

Основной целью статьи является исследование инвариантных идеалов C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$. Идеал J алгебры $\mathcal{T}_m$ называется *инвариантным* относительно некоторого естественного представления $\sigma_0\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, если $\sigma_0(z)(J) = J$ для любого $z \in S^1$. В статье получено полное описание всех инвариантных идеалов алгебры $\mathcal{T}_m$, и показано, что их конечное число, в точности равное 2^m, и что каждый из них порождается разностями проекторов вида $T^iT^{*i} - T^jT^{*j}$, $0 \le i < j \le m$. Также доказано, что если J – инвариантный идеал C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ и $J \neq \mathcal{K}_m$, то она может быть представлена в виде прямой суммы $\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus J$, для некоторого $n < m$.

2. Подалгебры алгебры Теплица, неподвижные относительно конечной группы автоморфизмов

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с естественным ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Пусть T – оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, который на базисе действует следующим образом:

$$Te_k = e_{k+1}.$$

Очевидно, что $T^*T = I$, где T^* – сопряженный оператор к оператору T, I – тождественный оператор, и $TT^* = P$ – проектор на $l^2(\mathbb{Z}_+ \backslash 0)$. Следовательно, полугруппа, порожденная операторами T и T^*, образует бициклическую полугруппу. Каждый элемент этой полугруппы имеет вид T^nT^{*m}, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Такие элементы в дальнейшем будем называть мономами [5], а число $n - m$ – индексом монома T^nT^{*m} и обозначать $\mathrm{ind}(T^nT^{*m})$. Конечные линейные комбинации мономов образуют инволютивную подалгебру алгебры $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ всех линейных ограниченных операторов гильбертова пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Равномерное замыкание этой подалгебры в $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ называется *алгеброй Теплица* и обозначается через $\mathcal{T}$. Пусть $C(S^1;\mathcal{T}) = C(S^1) \otimes \mathcal{T}$ – C^*-алгебра всех непрерывных отображений из единичной окружности S^1 в алгебру $\mathcal{T}$, с нормой

$$\| A \| = \sup_{S^1} \| A(z) \|, \ A \in C(S^1;\mathcal{T}).$$

Пусть $A_{z_0} \in C(S^1;\mathfrak{T})$, $A_{z_0}(z) = A(z \cdot z_0)$ – оператор сдвига на z_0. Так как $\| A_{z_0} \| = \| A \|$, то оператор сдвига A_z порождает представление

$$\sigma\colon S^1 \to \operatorname{Aut}(C(S^1;\mathfrak{T})), \quad \sigma(z)(A) = A_z.$$

Каждому элементу A из $C(S^1;\mathfrak{T})$ можно сопоставить формальный ряд:

$$A(z) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k,$$

с коэффициентами

$$A_k = \int_{S^1} \sigma(z)(A) z^{-k} dz,$$

где интеграл берется по нормированной мере Лебега на S^1.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{T}}$ C^*-подалгебру алгебры $C(S^1) \otimes \mathfrak{T}$, порожденную мономами $\tilde{T}^n\tilde{T}^{*m}$, $\tilde{T}^n\tilde{T}^{*m}(z) = z^k T^n T^{*m}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, где $k = n - m$. Очевидно, что алгебра $\tilde{\mathfrak{T}}$ инвариантна относительно сдвигов элементами группы S^1, то есть $\sigma(z)(\tilde{A}) \in \tilde{\mathfrak{T}}$ для любых $\tilde{A}$ из $\tilde{\mathfrak{T}}$ и $z \in S^1$. В работах [8], [9] было показано, что отображение $\tilde{A} \mapsto A, A = \tilde{A}(1)$ порождает изоморфизм между C^*-алгебрами $\tilde{\mathfrak{T}}$ и $\mathfrak{T}$. Аналогичные результаты для более общего случае были получены в работе [10]. Поэтому представление $\sigma\colon S^1 \to \operatorname{Aut}(\tilde{\mathfrak{T}})$ порождает представление $\sigma_0\colon S^1 \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{T})$:

$$\sigma_0(z)(A) = \tilde{A}(z),$$

где $A = \tilde{A}(1)$. Отметим, что $\sigma_0(z)(T^nT^{*m}) = z^k T^n T^{*m}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $k = n - m$. Понятие индекса монома можно распространить и на элементы $\tilde{T}^n\tilde{T}^{*m}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{T}}$: $\operatorname{ind}(\tilde{T}^n\tilde{T}^{*m}) = n - m$. Из построения алгебры $\tilde{\mathfrak{T}}$ видно, что если $\tilde{A} = \tilde{T}^n\tilde{T}^{*m}$, $\tilde{B} = \tilde{T}^k\tilde{T}^{*l}$ и $n - m \neq k - l$, тогда

$$\int_{S^1} \tilde{A}(z)\tilde{B}^*(z) dz = 0.$$

Поэтому алгебру $\tilde{\mathfrak{T}}$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathfrak{T}} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}_k},$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_k$ – замкнутое подпространство в $\tilde{\mathfrak{T}}$, порожденное мономами индекса k, то есть состоящее из тех $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{T}}$, для которых

$$\sigma(z)(\tilde{A}) = z^k \tilde{A}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_k}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L}_k$ - замкнутое подпространство в $\mathcal{T}$, порожденное мономами индекса k. Поэтому

$$\mathcal{L}_k = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^k A\}.$$

Каждому элементу A из $\mathcal{T}$ можно сопоставить формальный ряд:

$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$

где $A_k \in \mathcal{L}_k$. Пусть $\mathcal{T}_m$ - C^*-подалгебра алгебры Теплица, порожденная мономами, индекс которых кратен числу m.

В работе [7] было показано, что если $G_m = \{z \in S^1 : z^m = 1\}$ - конечная подгруппа группы S^1 порядка m, то

$$\mathcal{T}_m = \{A \in \mathcal{T} : \sigma_0(z)(A) = A, \ z \in G_m\}. \tag{2.2}$$

Последнее означает, что алгебра $\mathcal{T}_m$ является неподвижной относительно конечной группы автоморфизмов G_m.

Лемма 2.1. *Справедливо тождество:* $\mathcal{T}_m = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}}$, *где*

$$\mathcal{L}_{km} = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^{km} A\}.$$

Доказательство. Пусть $B \in \mathcal{T}_m$, тогда согласно (2.2) $\sigma_0(z)(B) = B$. Из равенства (2.1) и $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{T}$ вытекает

$$B \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k,$$

где $B_k \in \mathcal{L}_k$. Но так как $\sigma_0(z)(B) = B$, следовательно, $\sigma_0(z)(B_k) = B_k$, то есть $\operatorname{ind}(B_k)$ кратен m. Таким образом, $B_k \in \mathcal{L}_{km}$. Последнее означает, что $\mathcal{T}_m \subset \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}}$. Обратное включение очевидно. □

3. Структура алгебры $\mathcal{T}_m$

Обозначим через $\mathcal{T}(m)$ C^*-подалгебру алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденную операторами T^m и T^{*m}. Очевидно, что $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$.

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с базисом $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Представим его в виде прямой суммы

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_{m-1}, \tag{3.1}$$

где базис подпространства H_i состоит из векторов $\{e_{i+km}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le i \le m$. Тогда подпространства H_i, $0 \le i \le m-1$, инвариантны относительно алгебры $\mathcal{T}_m$. Действительно, пусть $A \in \mathcal{T}_m$, тогда A приближается линейными комбинациями мономов $V = T^kT^{*l}$, где $\mathrm{ind}(V) = k - l$ кратен m, то есть $k - l = dm$, $d \in \mathbb{Z}$. Тогда для любых H_i и $e_j \in H_i$ если $Ve_j \ne 0$, то $Ve_j = e_{j+\mathrm{ind}(V)} = e_{j+dm} \in H_i$. Следовательно, $Ae_j \in H_i$. Поэтому любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ однозначно представляется в виде

$$A = A|_{H_0} \oplus \dots \oplus A|_{H_{m-1}}.$$

Отметим, что все вышесказанное справедливо и для алгебры $\mathcal{T}(m)$.

Алгебра $\mathcal{T}(m)$ на каждом подпространстве $H_i, 0 \le i \le m-1$, действует как алгебра Теплица, так как $T^m e_{i+km} = e_{i+(k+1)m}$ – является оператором сдвига на базисе подпространства H_i. Таким образом: $\mathcal{T}(m)|_{H_i} \simeq \mathcal{T}$, то есть существуют изоморфизмы $\tau_i\colon \mathcal{T}(m)|_{H_i} \to \mathcal{T}, i = 0, 1, \dots, m-1$ сопоставляющие сдвигу на H_i сдвиг на $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Следовательно, для любого $A \in \mathcal{T}(m)$ найдется единственный $B \in \mathcal{T}$, такой, что $\tau_0(A|_{H_0}) = \tau_1(A|_{H_1}) = \dots \tau_{m-1}(A|_{H_{m-1}}) = B$. Поэтому

$$\mathcal{T}(m) = \{A : A = B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_{m-1},$$

$$\text{где } \tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, \dots, m-1,\ B \in \mathcal{T}\} \hookrightarrow \bigoplus^m \mathcal{T}, \tag{3.2}$$

где через $\bigoplus^m \mathcal{T}$ обозначена прямая сумма m экземпляров алгебры Теплица $\mathcal{T}$.

Введем следующие обозначения: $P_l = T^lT^{*l}, l = 0, 1, \dots, m$. Тогда справедливы неравенства $P_0 > P_1 > \dots > P_m$.

Лемма 3.1. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ является C^*-алгеброй, порожденной операторами T^m, T^{*m} и проекторами P_l, где $1 \le l \le m-1$.*

Доказательство. По определению алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается элементами V, индексы которых кратны m, то есть $V = T^{mk+l}T^{*mn+l}$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le l \le m-1$. Тогда $V = T^{mk}T^lT^{*l}T^{*mn} = (T^m)^k(T^lT^{*l})(T^{*m})^n$. Отсюда получаем утверждение леммы. □

Покажем, что алгебра $\mathcal{T}_m$ на каждом подпространстве $H_i, 0 \le i \le m-1$ также действует как алгебра Теплица $\mathcal{T}$. Для этого выясним, как проекторы

P_j, $1 \leq j \leq m-1$, действуют на этих подпространствах. Базисом H_i является множество $\{e_{i+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Очевидно, $P_j e_{i+km} = e_{i+km}$ для любого $k \geq 1$. А при $k=0$ имеем

$$P_j e_i = \begin{cases} e_i, & \text{при } i \geq j, \\ 0, & \text{при } i < j. \end{cases}$$

Это означает, что

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I, & \text{при } i \geq j, \\ T^m T^{*m}, & \text{при } i < j. \end{cases} \tag{3.3}$$

Таким образом, алгебра $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ порождается только лишь операторами T^m и T^{*m}.

Пусть $\mathcal{K}$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры Теплица $\mathcal{T}$, а $\mathcal{K}_m$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры $\mathcal{T}_m$. Обозначим через

$$\bigoplus^{m} \mathcal{K} = \{K_0 \oplus \ldots \oplus K_{m-1} : K_i - \text{компактный оператор в } B(H_i),\ 0 \leq i \leq m-1\}.$$

Лемма 3.2. *Справедливо тождество:*

$$\mathcal{K}_m = \bigoplus^{m} \mathcal{K}.$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}_m \subset \mathcal{T}_m$. Тогда $A = A|_{H_0} \oplus \ldots \oplus A|_{H_{m-1}}$ и $A|_{H_i}$ – компактный оператор в $B(H_i)$, $0 \leq i \leq m-1$. То есть $A \in \bigoplus^{m} \mathcal{K}$. Таким образом, $\mathcal{K}_m \subset \bigoplus^{m} \mathcal{K}$.

Покажем обратное включение. Алгебра $\mathcal{T}_m$ содержит операторы $E_i = P_i - P_{i+1}$, $0 \leq i \leq m-1$, действующие следующим образом:

$$E_i e_k = \begin{cases} e_k, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если в противном случае.} \end{cases}$$

Каждый оператор $E_i, 0 \leq i \leq m-1$, является одномерным и, следовательно, компактным на своем подпространстве H_i. Поскольку $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ является алгеброй Теплица и, следовательно, неприводима, то $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ содержит весь идеал компактных операторов на H_i. Отсюда следует, что $\bigoplus^{m} \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_m$. □

Теорема 3.1. *Любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ представляется в виде $A = C + D$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$, то есть*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1 C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается подалгеброй $\mathcal{T}(m)$ и проекторами $P_1, \ldots, P_{m-1}$. Для доказательства теоремы, учитывая, что

$\mathcal{K}_m$ является идеалом в $\mathcal{T}_m$, достаточно показать, что $P_j \in \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m$, $1 \leq j \leq m-1$, то есть $P_j = C + D$, где $C \in \mathcal{T}(m)$ и $D \in \mathcal{K}_m$.

Действительно, учитывая (3.3), для любого j, $1 \leq j \leq m-1$, имеем:

$$P_j = P_j|_{H_1} \oplus \ldots \oplus P_j|_{H_j} \oplus P_j|_{H_{j+1}} \oplus \ldots \oplus P_j|_{H_m} =$$

$$= T^m T^{*m} \oplus \ldots \oplus T^m T^{*m} \oplus I \oplus \ldots \oplus I = (T^m T^{*m} \oplus \ldots \oplus T^m T^{*m}) +$$

$$+ (0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (I - T^m T^{*m}) \oplus \ldots \oplus (I - T^m T^{*m})) = C + D,$$

где $C = T^m T^{*m} \oplus \ldots \oplus T^m T^{*m} \in \mathcal{T}(m)$ и $D = 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (I - T^m T^{*m}) \oplus \ldots \oplus (I - T^m T^{*m}) \in \bigoplus\limits^{m} \mathcal{K}$, так как $I - T^m T^{*m}$ является конечномерным оператором и, следовательно, компактным. В силу леммы 3.2 $D \in \mathcal{K}_m$. Таким образом, $P_j = C + D$, $1 \leq j \leq m-1$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$. □

Из теоремы 3.1, леммы 3.2 и разложения (3.2) следует, что каждый элемент A из алгебры $\mathcal{T}_m$ представляется в виде:

$$A = \{(B_0 + K_0) \oplus \ldots \oplus (B_{m-1} + K_{m-1}),$$

$$\text{где } \tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, \ldots, m-1, B \in \mathcal{T},\ K_0, \ldots, K_m \in \mathcal{K}\}. \tag{3.4}$$

4. Короткие точные последовательности

Последовательность алгебраических объектов G_i с последовательностью гомоморфизмов $\varphi_i \colon G_i \to G_{i+1}$, такая что для любого i образ φ_{i-1} совпадает с ядром φ_i (если оба гомоморфизма с такими индексами существуют) называется *точной*.

Точные последовательности типа $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ называются *короткими точными последовательностями*, в этом случае φ – мономорфизм, а ψ – эпиморфизм, то есть короткая точная последовательность состоит из объекта B, его подобъекта A и фактор-объекта C. При этом, если у φ есть правый обратный или у ψ левый обратный морфизм, то B можно отождествить с $A \oplus C$ таким образом, что A и C отображаются в A и C тождественным образом. В этом случае короткая точная последовательность называется *расщепимой*.

Рассмотрим разложение (3.1) гильбертово пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$ и семейство представлений C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ $\pi_i \colon \mathcal{T}_m \to B(H_i)$, заданных равенством для любого $A \in \mathcal{T}_m$

$$\pi_i(A) = A|_{H_i},\ 0 \leq i \leq m-1.$$

В силу леммы 3.1 и (3.3) получаем, что эти представления описываются равенствами

$\pi_i(P_1) = \pi_i(P_2) = ...\pi_i(P_i) = I$, $\pi_i(P_{i+1}) = ... = \pi_i(P_{m-1}) = T^mT^{*m}$, $0 \leq i \leq m-1$.

В работе [7] была доказана следующая теорема, описывающая все неприводимые, унитарно неэквивалентные, бесконечномерные представления C^*-алгебры $\mathfrak{T}_m$.

Теорема 4.1. *C^*-алгебра $\mathfrak{T}_m$ имеет ровно m неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений, которые описываются тождествами:*

1) $P_1 = P_2 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

2) $P_1 = I$, $P_2 = P_3 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

3) $P_1 = P_2 = I$, $P_3 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

.....

m) $P_1 = P_2 = ... = P_{m-1} = I$.

Отметим, что семейство представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$ описывается аналогичными тождествами и, следовательно, $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$ – неприводимые, унитарно неэквивалентные бесконечномерные представления.

Рассмотрим ядра этих представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$, которые, очевидно, являются идеалами алгебры $\mathfrak{T}_m$. Пусть $J_i = ker(\pi_i), 0 \leq i \leq m-1$. В дальнейшем будем использовать следующее обозначение: если идеал J некоторой алгебры порождается элементами $A_0, ..., A_{m-1}$, будем писать $J = [A_0, ..., A_{m-1}]$.

Заметим, что $J_0 = [T^mT^{*m} - P_1]$. Действительно, так как $\pi_0(T^mT^{*m} - P_1) = 0$, то $\pi_0(T^mT^{*m} - P_1)\pi_0(P_l) = 0$ и $\pi_0(T^mT^{*m} - P_l) = 0$, $2 \leq l \leq m-1$.

Аналогично, $J_i = [T^mT^{*m} - P_{i+1},\ I - P_i]$, $2 \leq i \leq m-1$, и $J_{m-1} = [I - P_{m-1}]$. Таким образом, мы получили семейство идеалов $\{J_i\}_{i=0}^{m-1}$, которые являются ядрами неприводимых представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$.

Рассмотрим теперь всевозможные попарные пересечения идеалов $J_i \cap J_j$, $0 \leq i < j \leq m-1$. Покажем, что такое пересечение является ядром представления $\pi_i \oplus \pi_j : \mathfrak{T}_m \to B(H_i \oplus H_j)$. Действительно, пересечению $J_i \cap J_j$ будут принадлежать элементы $T^mT^{*m} - P_{j+1}$, $T^mT^{*m} - P_{j+2}, ...,$ $T^mT^{*m} - P_{m-1}$, $I - P_1, ...,$ $I - P_i$, а также $P_{i+1} - P_{i+2}$, $P_{i+2} - P_{i+3}, ...,$ $P_{j-1} - P_j$. Это означает, что $J_i \cap J_j = [T^mT^{*m} - P_{j+1},\ P_{i+1} - P_j,\ I - P_i]$. Нетрудно видеть, что этот идеал является ядром прямой суммы двух неприводимых представлений, то есть

$$ker(\pi_i \oplus \pi_j) = J_i \cap J_j.$$

Заметим, что если $i = 0$, то $I - P_0 = 0$, а если $j = m$, то $T^m T^{*m} - P_m = 0$. Аналогично, рассматривая всевозможные пересечения $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le m - 1$, можно показать, что они являются ядрами представлений

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \pi_{i_k} : \mathcal{T}_m \to B(\bigoplus_{k=1}^{n} H_{i_k}).$$

Заметим, что $\bigcap\limits_{i=0}^{m-1} J_i = \{0\}$, и следовательно, что представление

$$\bigoplus_{i=0}^{m-1} \pi_i : \mathcal{T}_m \to B(H)$$

является точным.

В следующих леммах описываются идеалы J_i, $0 \le i \le m-1$, и всевозможные их пересечения $\bigcap\limits_{k=0}^{n} J_{i_k}$, $0 \le i_1 < \ldots < i_n \le m - 1$.

Лемма 4.1. *Любой идеал J_i, $0 \le i \le m - 1$, алгебры $\mathcal{T}_m$ имеет вид*

$$J_i = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_i} = 0\}.$$

Доказательство. Пусть A любой элемент из $J_i \subset \mathcal{T}_m$. Так как $J_i = ker(\pi_i)$ и $\pi_i(A) = A|_{H_i}$, то $A|_{H_i} = 0$. Покажем, что $A \in \mathcal{K}_m$. Согласно теореме 3.1, A представляется в виде $A = A_0 + K$, где $A_0 \in \mathcal{T}(m)$, $K \in \mathcal{K}_m$. Далее из (3.2) и леммы 3.2 получаем $A_0 = B_0 \oplus \ldots \oplus B_{m-1}$, где $\tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, \ldots, m-1$. $B \in \mathcal{T}$ и $K = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$, $K_i \in \mathcal{K}, 0 \le i \le m - 1$. Поскольку $A|_{H_i} = 0$, то $A_0|_{H_i} = -K|_{H_i}$. Следовательно, $B_i = -K_i \in \mathcal{K}$. Так как τ_i – изоморфизм, то $\tau_i(B_i) = B$ – также является компактным оператором, откуда используя то, что $\tau_j(B_j) = B, j = 0, .., i-1, i+1, \ldots, m-1$ получается, что B_j также являются компактными операторами. Таким образом, $A_0 \in \mathcal{K}_m$, следовательно, $A \in \mathcal{K}_m$. □

Лемма 4.2. *Любой идеал $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \le i_1 < \ldots < i_n \le m - 1$, имеет вид*

$$\bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_{i_k}} = 0,\ k = 1, .., n\}.$$

Доказательство аналогично лемме 4.1.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 4.2. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ как векторное пространство представляется в виде прямой суммы:*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i,$$

для любого i, $0 \leq i \leq m-1$.

Доказательство. Так как $\mathcal{T}_m|_{H_i} = \mathcal{T}(m)|_{H_i}$, то для любого элемента $A \in \mathcal{T}_m$ существует $B \in \mathcal{T}(m)$, такой что $A|_{H_i} = B|_{H_i}$. Представим элемент A в виде $A = (A-B)+B$. Очевидно, что $(A-B)|_{H_i} = 0$. Поэтому согласно лемме 4.1 $(A-B) \in J_i$. Таким образом: $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + J_i$.

Покажем, что это есть прямая сумма. Действительно, если $A \in \mathcal{T}(m) \cap J_i$, то $A = B_0 \oplus \ldots \oplus B_{m-1}$, где $\tau_i(B_i) = B$, $B \in \mathcal{T}$ и $A|_{H_i} = B_i = 0$. Но тогда $B = 0$, так как τ_i – изоморфизм и значит все $B_j = 0, j = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m-1$. Откуда получается, что $A = 0$. Следовательно, $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i$. □

Следствие 4.1. *Пусть* $\mathcal{K}(m)$ – *алгебра компактных операторов в* $\mathcal{T}(m)$. *Тогда* $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(m) \ominus J_i$, $0 \leq i \leq m-1$.

Следствие 4.2. *Короткие точные последовательности*

$$0 \to J_i \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T} \to 0,$$

где $id : J_i \to \mathcal{T}_m$ – *вложения,* $0 \leq i \leq m-1$, *расщепимы.*

Теорема 4.3. *Фактор-алгебра* $\mathcal{T}_m/\mathcal{K}_m$ *изоморфна* $C(S^1)$ *и короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0,$$

где $id : \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m$ – *вложение, дополняема.*

Доказательство. Отображение вложения $id : \mathcal{K}_m = \mathcal{K}(m) \oplus J_i \to \mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i$ раскладывается в прямую сумму $id = \phi \oplus \psi$, где $\phi : \mathcal{K}(m) \to \mathcal{T}(m)$ есть вложение, а $\psi : J_i \to J_i$ – тождественное отображение. И, поскольку $\mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T}$, а $\mathcal{K}(m) \cong \mathcal{K}$, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{T}_m/\mathcal{K}_m \cong \mathcal{T}(m)/\mathcal{K}(m) \cong C(S^1).$$

Следовательно, существует короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{K}(m) \oplus J_i \to \mathcal{T}(m) \oplus J_i \to C(S^1) \to 0.$$

Далее, поскольку $\mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T} \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K} \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K}(m)$, то $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K}(m) \oplus J_i = C(S^1) \oplus \mathcal{K}_m$. Это доказывает дополняемость последовательности $0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0$. □

Теорема 4.4. *Существует короткая точная расщепимая последовательность:*

$$0 \to \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0,$$

где $0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le m-1$. *И, следовательно,* $\mathcal{T}_m$ *изоморфна прямой сумме алгебр:*

$$\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.2

$$\bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_{i_1}} = \dots = A|H_{i_n} = 0\}.$$

Рассмотрим $\varphi\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n$: $\varphi(A) = \varphi(A_0 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \dots \ominus A_{i_n}$. Понятно, что φ – является гомоморфизмом, ядро которого

$$ker(\varphi) = \{A : A|_{H_{i_1}} = \dots = A|_{H_{i_m}} = 0\},$$

Рассуждениями, аналогичными, как при доказательстве леммы 4.1 можно показать, что $ker(\varphi) \subset \mathcal{K}_m$. Поэтому $ker(\varphi) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$. Отсюда следует существование короткой точной последовательности $0 \to \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_k \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0$.

Для доказательства расщепимости зададим вложение $\lambda\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_m$ следующим образом: $\lambda(A) = \lambda(A_{i_1} \oplus \dots \oplus A_{i_n}) = B$, $B \in \mathcal{T}_m$, где $B|_{H_{i_k}} = A_{i_k}$, $1 \le k \le n$, $B|_{H_{i_k}} = 0$, $j \ne i_k$. Тогда $\varphi \circ \lambda = id$. □

5. Инвариантные идеалы C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$

Во втором параграфе было показано, что существует представление $\sigma_0\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ такое, что $\sigma_0(z)(T) = zT$. Поскольку алгебра $\mathcal{T}_m$ есть C^*-алгебра, порожденная операторами T^m, T^{*m} и проекторами P_i, $1 \le i \le m-1$, и $\sigma_0(z)(T^m) = z^m T^m$, $\sigma_0(z)(T^{*m}) = z^{-m} T^{*m}$, $\sigma_0(z)(P_i) = P_i$, то сужение этого представления на $\mathcal{T}_m$ есть представление $\sigma_m\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$, $\sigma_m(z)(T^m) = z^m T^m$.

Идеал I алгебры $\mathcal{T}_m$ назовем *инвариантным* относительно представления $\sigma_m\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$, если $\sigma_m(z)(I) = I$ для любого $z \in S^1$. Таким образом, все идеалы алгебры $\mathcal{T}_m$ разбиваются на два класса – инвариантных и неинвариантных идеалов. Данный параграф посвящен описанию класса инвариантных идеалов.

Лемма 5.1. *Идеалы* J_i, $0 \le i \le m-1$, *и* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \le i_1 < \dots < i_n \le m-1$, *являются инвариантными.*

Доказательство. Поскольку $J_i = [T^mT^{*m} - P_{i+1},\ I - P_i]$, то конечные линейные комбинации элементов вида $A(T^mT^{*m} - P_{i+1})B$ и $A(I - P_i)B$, где $A, B \in \mathcal{T}_m$, плотны в J_i. Поэтому, из того, что $\sigma_m(z)(A(T^mT^{*m} - P_{i+1})B) = \sigma_m(z)(A)\sigma_m(z)(T^mT^{*m} - P_{i+1})\sigma_m(z)(B) = \sigma_m(z)(A)(T^mT^{*m} - P_{i+1})\sigma_m(z)(B) \in J_i$ и $\sigma_m(z)(A(I-P_{i-1})B) = \sigma_m(z)(A)(I-P_{i-1})\sigma_m(z)(B) \in J_i$, следует, что $\sigma_m(z)(J_i) = J_i$, для любого $z \in S^1$. Аналогично показывается, что $\sigma_m(z)(\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$.

□

Следствие 5.1. *$\mathcal{K}_m$ – инвариантный идеал.*

Доказательство. Пусть $I_j = \bigcap\limits_{i \neq j,\ i=0}^{m-1} J_i$, тогда $\mathcal{K}_m = I_0 \oplus \ldots \oplus I_{m-1}$ – инвариантный идеал.

□

Следствие 5.2. *Любой идеал, содержащийся в $\mathcal{K}_m$, является инвариантным идеалом.*

Доказательство. Пусть идеал $J \subset \mathcal{K}_m$. Так как алгебра компактных операторов $\mathcal{K}$ есть нетривиальный минимальный идеал алгебры Теплица, то есть каждый нетривиальный идеал содержит $\mathcal{K}$, то сужение $J|_{H_i}$ равно либо $\{0\}$ либо $\mathcal{K}$. Поэтому в силу лемм 4.1 и 4.2, $J = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$ для некоторых $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m-1$, и, следовательно, является инвариантным.

□

Лемма 5.2. *Пусть J – такой замкнутый идеал алгебры $\mathcal{T}_m$, что у фактор-алгебры $\mathcal{T}_m/J$ есть хотя бы одно неприводимое бесконечномерное представление. Тогда*

1) $J \subsetneq \mathcal{K}_m$,

2) $J = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$ для некоторых $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m$,

3) J – инвариантный идеал.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathcal{T}(m) \cap J = \{0\}$. Пусть $\tau : \mathcal{T}_m/J \to B(H')$ – неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}_m/J$. Пусть $\alpha\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m/J$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi = \tau \circ \alpha\colon \mathcal{T}_m \to B(H')$ – неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}_m$. Согласно лемме 3.3 из [7] $\pi|_{\mathcal{T}(m)}\colon \mathcal{T}(m) \to B(H')$ – также неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}(m)$. Очевидно, $\pi(T^mT^{*m}) \neq I$, так как, в противном случае, $\pi(\mathcal{T}(m))$ была бы коммутативной C^*-подалгеброй в $B(H')$. Но у коммутативной

C^*-алгебры нет бесконечномерных представлений, что противоречит неприводимости представления $\pi|_{\mathcal{T}(m)}$. Поскольку $\mathcal{T}(m)$ изоморфна алгебре Теплица, по теореме Кобурна [1] $\pi|_{\mathcal{T}(m)}$ – изометрический гомоморфизм и, следовательно, $\ker(\pi|_{\mathcal{T}(m)}) = \{0\}$. С другой стороны, очевидно, $\ker(\pi|_{\mathcal{T}(m)}) = \ker \pi \cap \mathcal{T}(m)$. И поскольку $J \subset \ker(\pi)$, получаем, что $\mathcal{T}(m) \cap J = \{0\}$.

Далее по теореме 3.1 имеем $J \subseteq \mathcal{K}_m$. Если $J = \mathcal{K}_m$, то по теореме 4.3 $\mathcal{T}_m/J = C(S^1)$. Но это невозможно, так как у $C(S^1)$ нет неприводимых бесконечномерных представлений. Таким образом, $J \subsetneq \mathcal{K}_m$.

Второе и третье утверждения леммы вытекают из следствия 5.2. □

Пусть $P(T)$ – пространство конечных линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k}T^{*k} + \sum_{k=0}^{l} c_k T^k, \; c_k, c_{-k} \in \mathbb{C}.$$

Обозначим через $L(T)$ замыкание $P(T)$ в алгебре Теплица $\mathcal{T}$. Из результатов 2-го параграфа вытекает, что каждому элементу $A \in L(T)$ сопоставляется формальный ряд:

$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$

где $A_k = c_k T^k$ для $k \geq 0$, и $A_k = c_k T^{*|k|}$ для $k < 0$.

Зададим отображение $p : \mathcal{T} \to L(T)$ формулой

$$p(A) = \lim_{k\to\infty} T^{*k} A T^k.$$

Покажем, что p – корректно определено. Заметим, что $p(B) = B$ для любого $B \in P(T)$ и для любого монома $V = T^k T^{*l}$

$$p(V) = \begin{cases} T^{k-l}, & \text{если } k > l, \\ T^{*(l-k)}, & \text{если } k < l, \\ I, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Поэтому, если $A \in \mathcal{T}$ - есть конечная линейная комбинация мономов, то есть $A = \sum_{i=1}^{n} c_i T^{k_i} T^{*l_i}$, то $p(A) \in P(T)$. Поскольку конечные линейные комбинации мономов плотны в $\mathcal{T}$, получим, что $p : \mathcal{T} \to L(T)$. Очевидно, что $\|p(A)\| \leq \|A\|$.

Лемма 5.3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) A – компактный оператор,

2) $p(A) = 0$.

Доказательство. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Каждый компактный оператор можно приблизить линейными комбинациями операторов вида $T^kT^{*l}(I-TT^*)T^nT^{*m}$. Поскольку для мономов V и W с одинаковыми индексами справедливо $p(V) = p(W)$, то $p(T^kT^{*l}(I-TT^*)T^nT^{*m}) = 0$. Поэтому $p(A) = 0$ для любого компактного оператора A.

Докажем 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \in \mathcal{T}$ такой, что $p(A) = 0$. Для любого n оператор $Q = I - T^nT^{*n}$ есть конечномерный проектор. Представим A в виде $A = (Q+T^nT^{*n})A(Q+T^nT^{*n}) = QAQ+T^nT^{*n}AQ+QAT^nT^{*n}+T^nT^{*n}AT^nT^{*n}$. Так как первые три слагаемых являются компактными операторами, фактор-норма оператора A по идеалу компактных операторов $\mathcal{K}$ удовлетворяет неравенству

$$\inf_{K\in\mathcal{K}} \|A+K\| \le \|T^nT^{*n}AT^nT^{*n}\| \le \|T^{*n}AT^n\|,$$

для любого натурального n. Следовательно, $\inf\limits_{K\in\mathcal{K}} \|A+K\| = 0$, то есть A – компактный оператор. $\square$

Обозначим через $P(T_m)$ пространство конечных линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k}T^{*mk} + \sum_{k=0}^{l} c_kT^{mk}, \quad c_k, c_{-k} \in \mathbb{C},$$

а через $L(T_m)$ – замыкание $P(T_m)$ в алгебре $\mathcal{T}_m$. Понятно, что если $A \in \mathcal{T}_m$, то $p(A) \in L(T_m)$.

Теорема 5.1. *Пусть J – собственный идеал алгебры $\mathcal{T}_m$. Следующие условия эквивалентны:*

1) J – инвариантный идеал,

2) $J \subseteq \mathcal{K}_m$.

Доказательство. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть J – инвариантный идеал и $J \not\subseteq \mathcal{K}_m$. Тогда найдется $A \in J\backslash\mathcal{K}_m$. Очевидно, $p(A) \in L(T_m) \cap J$. Поскольку каждый элемент из $L(T_m)$ имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$, где $A_k = c_kT^{km}$ для $k \ge 0$, и $A_k = c_kT^{*|k|m}$ для $k < 0$, имеем $p(A) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$. Так как A не принадлежит $\mathcal{K}_m$, то по лемме 5.3 $p(A) \ne 0$. Пусть k такое число, что $c_k \ne 0$. Для определенности будем считать, что $k \ge 0$. Тогда

$$A_k = c_kT^{mk} = \int\limits_{S^1} \sigma_m(z)(p(A))z^{-km}dz.$$

Мы воспользовались тем, что J – инвариантный идеал: $\sigma_m(z)(p(A)) \in J$. Поэтому $T^{km} \in J$. Следовательно, $I = T^{*mk}T^{mk} \in J$. Пришли к противоречию.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из следствий 5.1 и 5.2. $\square$

Таким образом, любой инвариантный идеал алгебры $\mathcal{T}_m$ совпадает либо с $\mathcal{K}_m$, либо с одним из идеалов J_i, $1 \leq i \leq m$, или с некоторым их пересечением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет в точности 2^m инвариантных идеалов, каждый из которых порождается разностями проекторов $P_i - P_j$, $0 \leq i < j \leq m$.*

Авторы выражают искреннюю благодарность Григоряну Сурену Аршаковичу за полезные обсуждения.

Abstract. In this paper we give a complete description of invariant ideals of C^*-subalgebras of Toeplitz algebra that are fixed with respect to a finite group of automorphisms. The splitting property of short exact sequences generated by such ideals is established.

Список литературы

[1] L. A. Coburn, "The $C*$-algebra generated by an isometry", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967).

[2] S. Y. Jang, "Uniqueness property of $C*$-algebras like the Toeplitz algebras", Trends Math., **6**, 29 – 32 (2003).

[3] R. G. Douglas, "On the $C*$-algebra of a one-parameter semigroup of isometries, Acta Math., **128**, 143 – 152 (1972).

[4] G. J. Murphy, "Crossed Products of $C*$-algebras by semigroups of automorphisms, Proc. London Math. Soc., **68**, 423 – 448 (1994).

[5] V. H. Тероуan, "Об изометрических представлениях полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus 1$", Изв. НАН Армении, серия Математика, **48**, no. 2, 78 – 84 (2013).

[6] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, "C^*-алгебры, порожденные отображениями", Матем. заметки, **87**, no. 5, 694 – 703 (2010).

[7] К. Г. Овсепян, "О C^*-алгебрах, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы", Известия НАН Армении, Математика, **49**, no. 5, 67 – 75 (2014).

[8] М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, "Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией", Изв. вузов. Матем., **10**, 89 – 93 (2011).

[9] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigorian, E. V. Lipacheva, "Infinite-dimensional compact quantum semigroup", Lobachevskii Journal of Mathematics, **32**, no. 4, 304 – 316 (2010).

[10] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, "$C*$-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением", Сиб. матем. журн., **51**, no. 1, 16 – 25 (2010).

Поступила 11 апреля 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 53-68.

ON THE SOLUTIONS OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BESSEL-TYPE SPECIAL FUNCTIONS ON THE LEVI-CIVITA FIELD

A. R. MÉSZÁROS AND KH. SHAMSEDDINE

Université Paris-Sud, France
University of Manitoba, Winnipeg, Canada
E-mails: *alpar.meszaros@math.u-psud.fr*, *khodr.shamseddine@umanitoba.ca*

Abstract. [1]Because of the disconnectedness of a non-Archimedean ordered field in the topology induced by the order, it is possible to have non-constant functions with zero derivatives everywhere. In fact the solution space of the differential equation $y' = 0$ is infinite dimensional. In this paper, we give sufficient conditions for a function on an open subset of the Levi-Civita field to have zero derivative everywhere and we use the nonconstant zero-derivative functions to obtain non-analytic solutions of systems of linear ordinary differential equations with analytic coefficients. Then we use the results to introduce Bessel-type special functions on the Levi-Civita field and to study some of their properties.

MSC2010 numbers: 26E30, 12J25, 33C10.

Keywords: Levi-Civita field; ordinary differential equations; Bessel-type special functions; generalized Bessel functions of the first kind.

1. Introduction

Solutions of linear ordinary differential equations and some Bessel-type special functions on the Levi-Civita field $\mathcal{R}$ [5, 6] are presented in this paper. We recall that the elements of $\mathcal{R}$ are functions from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{R}$ with left-finite support (denoted by "supp"). That is, below every rational number q, there are only finitely many points where the given function does not vanish. For the further discussion, it is convenient to introduce the following terminology.

Definition 1.1 (λ, $\sim$, $\approx$, $=_r$). *For $x \neq 0$ in $\mathcal{R}$, we let* $\lambda(x) = \min(supp(x))$, *which exists because of the left-finiteness of* $supp(x)$, *and we let* $\lambda(0) = +\infty$.

[1]The research of the first author was conducted in the frames of TÁMOP 4.2.4. A/2-11-1-2012-0001 "National Excellence Program Elaborating and operating an inland student and researcher personal support system". The project was subsidized by the European Union and co-financed by the European Social Fund.

Given $x, y \neq 0$ in $\mathcal{R}$, we say that $x \sim y$ if $\lambda(x) = \lambda(y)$, and $x \approx y$ if $\lambda(x) = \lambda(y)$ and $x[\lambda(x)] = y[\lambda(y)]$.

Given $x, y \in \mathcal{R}$ and $r \in \mathbb{R}$, we say that $x =_r y$ if $x[q] = y[q]$ for all $q \leq r$.

At this point, these definitions may look somewhat arbitrary, but after having introduced an order on $\mathcal{R}$, we will see that λ describes orders of magnitude, the relation $\approx$ corresponds to agreement up to infinitely small relative error, while $\sim$ corresponds to agreement of order of magnitude.

The set $\mathcal{R}$ is endowed with formal power series multiplication and componentwise addition, which make it into a field (see [3]) in which we can isomorphically embed $\mathbb{R}$ as a subfield via the map $\Pi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ defined by

$$\Pi(x)[q] = \begin{cases} x & \text{if } q = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Definition 1.2 (Order in $\mathcal{R}$). *Let $x, y \in \mathcal{R}$ be given. Then we say $x \geq y$ if $x = y$ or [$x \neq y$ and $(x - y)[\lambda(x - y)] > 0$].*

It is easy to check that the relation "$\geq$"is a total order and $(\mathcal{R}, +, \cdot, \geq)$ is an ordered field (which denoted simply, by $\mathcal{R}$). Moreover, the embedding Π in equation (1.1) of $\mathbb{R}$ into $\mathcal{R}$ is compatible with the order. The order induces an absolute value on $\mathcal{R}$ in the natural way: $|x| = x$ if $x \geq 0$ and $|x| = -x$ if $x < 0$. We also note that λ, as defined above, is a valuation. Moreover, the relation "$\sim$"is an equivalence relation, and the set of equivalence classes (the value group) is (isomorphic to) $\mathbb{Q}$.

Besides the usual order relations, some other notations are also convenient.

Definition 1.3 ($\ll, \gg$). *Let $x, y \in \mathcal{R}$ be non-negative. We say that x is infinitely smaller than y (and write $x \ll y$) if $nx < y$ for all $n \in \mathbb{N}$; we say that x is infinitely larger than y (and write $x \gg y$) if $y \ll x$. If $x \ll 1$, then we say that x is infinitely small; if $x \gg 1$, then we say that x is infinitely large. Infinitely small numbers are also called infinitesimals or differentials. Infinitely large numbers are also called infinite. Non-negative numbers that are neither infinitely small nor infinitely large are called finite numbers.*

Definition 1.4 (The Number d). *Let d be the element of $\mathcal{R}$ given by $d[1] = 1$ and $d[q] = 0$ for $q \neq 1$.*

It is easy to check that $d^q \ll 1$ if $q > 0$ and $d^q \gg 1$ if $q < 0$. Moreover, for all $x \in \mathcal{R}$, the elements of $\operatorname{supp}(x)$ can be arranged in ascending order, say $\operatorname{supp}(x) = \{q_1, q_2, \ldots\}$

with $q_j < q_{j+1}$ for all j, and x can be written as $x = \sum_{j=1}^{\infty} x[q_j]d^{q_j}$, where the series converges in the topology induced by the absolute value (see [3]).

Altogether, it follows that $\mathcal{R}$ is a non-Archimedean field extension of $\mathbb{R}$. For a detailed study of this field, we refer the reader to [10, 20], and references therein. In particular, it is shown that $\mathcal{R}$ is complete with respect to the topology induced by the absolute value, that is, every Cauchy sequence of elements of $\mathcal{R}$ converges to an element of $\mathcal{R}$. In the wider context of valuation theory, it is interesting to note that the topology induced by the absolute value is the same as that introduced via the valuation λ, as it was shown in [19].

It follows therefore that the field $\mathcal{R}$ is just a special case of the class of fields discussed in [9]. For a general overview of the algebraic properties of formal power series fields in general, we refer the reader to the comprehensive overview by Ribenboim [8], and for an overview of the related valuation theory to the books by Krull [4], Schikhof [9] and Alling [1]. A thorough and complete treatment of ordered structures can also be found in [7].

Besides being the smallest ordered non-Archimedean field extension of the real numbers that is both complete in the order topology and real closed, the Levi-Civita field $\mathcal{R}$ is of particular interest because of its practical usefulness. Since the supports of the elements of $\mathcal{R}$ are left-finite, it is possible to represent these numbers on a computer (see [3]). Having infinitely small numbers, the errors in classical numerical methods can be made infinitely small, and hence irrelevant in all practical applications. One such application is the computation of derivatives of real functions representable on a computer, where both the accuracy of formula manipulators and the speed of classical numerical methods are achieved (see [16]).

In this paper we present some tools to construct a large class of solutions for equation $y' = 0$ on $\mathcal{R}$. Then as an application of that, we define and study the properties of Bessel-type special functions on (open subsets of) $\mathcal{R}$.

2. Matrix exponentials on $\mathcal{R}$

For an easier study of systems of linear ordinary differential equations on $\mathcal{R}$, it is beneficial to introduce matrix exponentials on $\mathcal{R}$. We define matrices on $\mathcal{R}$ and matrix operations: addition, multiplication, determinant, just as we do in the real case.

Definition 2.1. *Let $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ denote the set of all $n \times n$ matrices with entries in $\mathcal{R}$. For $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$, we define $|\cdot| : \mathcal{M}_n(\mathcal{R}) \to \mathcal{R}$ by*

$$|A| = \max_{1 \le i,j \le n} \{|a_{ij}|\},$$

where $|a_{ij}| = \max\{a_{ij}, -a_{ij}\}$.

In what follows we deal only with square matrices whose entries are at most finite in absolute value, and we denote this class of matrices by $\mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$.

Definition 2.2. *Let $A \in \mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$, and for each $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ let $c_k \in \mathcal{R}$ be given. We say that the series $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ is convergent in $\mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$ if the series $\sum_{k=0}^{\infty} c_k |A^k|$ is convergent in $\mathcal{R}$ with respect to the weak topology discussed in* [3, 12, 17].

Definition 2.3. *Let $A \in \mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$ be given. We define the exponential of A by the series*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

where $A^0 = I_n$ is the $n \times n$ identity matrix.

In the next theorem we show that the series in Definition 2.3 converges in the sense of Definition 2.2.

Theorem 2.1. *For any $A \in \mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$, the series*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

is always convergent, and hence e^A is well-defined.

Proof. Let $A = (a_{ij})$, and let $A^2 = (b_{ij})$. Then, by the way we perform matrix multiplication, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ we have

$$|b_{ij}| \le n \left(\max_{1 \le i,j \le n} \{|a_{ij}|\} \right) \left(\max_{1 \le i,j \le n} \{|a_{ij}|\} \right) = n|A|^2.$$

It follows that

$$|A^2| = \max_{1 \le i,j \le n} \{|b_{ij}|\} \le n|A|^2.$$

Using induction on k, it is then easy to show that

$$|A^k| \le n^{k-1}|A|^k, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Since

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k!} |A|^k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (n|A|)^k \right)$$

converges in the weak topology of $\mathcal{R}$ to $\left(e^{n|A|}-1\right)/n$ (because $|A|$ is at most finite), it follows from equation (2.1) and the properties of weak convergence of infinite series (see [12, 17]) that

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|A^k| = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|A^k|$$

converges weakly in $\mathcal{R}$. Hence the series $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ converges in the sense of Definition 2.2. Theorem 2.1 is proved.

Taking into account that power series on $\mathcal{R}$ can be differentiated term by term within their domain of convergence (see [19]), we obtain the following result.

Theorem 2.2. *Let $A \in \mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$ and let $F : \mathcal{R} \to \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ be given by $F(t) = e^{tA}$. Then F is differentiable at each $t \in \mathcal{R}$, with derivative $F'(t) = Ae^{tA}$.*

Proof. Since $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$, we can obtain $F'(t)$ by differentiating the series term by term as a function of t:

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k = Ae^{tA} = AF(t).$$

Note that all the series in the last equation are well-defined. □

3. The Main results

3.1. Linear ordinary differential equations on $\mathcal{R}$. One of the main goals of this paper is to obtain solutions of linear ordinary differential equations in the case where the coefficients are analytic functions of the independent variable, including non-analytic solutions in addition to the analytic ones.

The basic idea for the construction of non-analytic solutions of linear ordinary differential equations on $\mathcal{R}$ is based on the following theorem (proved in [11]), which shows that even the simplest differential equation $y' = 0$ over $\mathcal{R}$ has infinitely many linearly independent solutions on $[-1,1] \subset \mathcal{R}$.

Theorem 3.1. *The solution space of the differential equation $y' = 0$ on $[-1,1]$ is infinite dimensional.*

Proof. For each $n \in \mathbf{N}$, let $g_n : [-1,1] \to \mathcal{R}$ be given by $g_n(x)[q] = x[q/(n+1)]$. We show that, for all $n \in \mathbf{N}$, g_n is differentiable on $[-1,1]$ with $g_n'(x) = 0$ for all $x \in [-1,1]$. So let $n \in \mathbf{N}$ be given. We first observe that $g_n(x+y) = g_n(x) + g_n(y)$ for all $x, y \in [-1,1]$. Now let $x \in [-1,1]$ and $\epsilon > 0$ in $\mathcal{R}$ be given. Let $\delta = \min\{\epsilon^2, d\}$, and let $y \in [-1,1]$ be such that $0 < |y-x| < \delta$. Then, taking into account that $g(y-x) \sim (y-x)^{n+1}$, we have

$$\left|\frac{g_n(y)-g_n(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{g_n(y-x)}{y-x}\right| \sim |y-x|^n.$$

Next, since $|y-x| < \min\{\epsilon^2, d\}$, we obtain that $|y-x|^n \ll \epsilon$. Hence

$$\left|\frac{g_n(y)-g_n(x)}{y-x}\right| < \epsilon \text{ for all } y \in [-1,1] \text{ satisfying } 0 < |y-x| < \delta.$$

It follows that g_n is differentiable at x, with $g_n'(x) = 0$. This is true for all $x \in [-1,1]$ and for all $n \in \mathbf{N}$. Hence g_n is a solution of the differential equation $y' = 0$ on $[-1,1]$ for all $n \in \mathbf{N}$.

Next, we show that the set $S = \{g_n : n \in \mathbf{N}\}$ is linearly independent on $[-1,1]$. So let $j \in \mathbf{N}$ and let $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ in $\mathbf{N}$ be given. It is enough to show that $g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots, g_{n_j}$ are linearly independent on $[-1,1]$. To this end, we suppose that $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \cdots + c_j g_{n_j} = 0$ for some $c_1, c_2, \ldots, c_j$ in $\mathcal{R}$, and show that $c_1 = c_2 = \cdots = c_j = 0$. Indeed, since $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \cdots + c_j g_{n_j} = 0$, we obtain that $c_1 g_{n_1}(d) + c_2 g_{n_2}(d) + \cdots + c_j g_{n_j}(d) = 0$. Hence $c_1 d^{n_1} + c_2 d^{n_2} + \cdots + c_j d^{n_j} = 0$, from which we infer that $c_1 = c_2 = \cdots = c_j = 0$. □

Remark 3.1. *For each $n \in \mathbf{N}$, it is easy to check that the mapping g_n in the proof of Theorem 3.1 is an order preserving field automorphism of $\mathcal{R}$, this is a special property of non-Archimedean structures since it is well-known that the only field automorphism of $\mathbb{R}$ is the identity map (see* [13]*).*

In Propositions 3.1 - 3.3 that follow, we give sufficient conditions for a nonconstant function to be a solution of the differential equation $y' = 0$ on an open subset of $\mathcal{R}$.

Proposition 3.1. *Let $M \subseteq \mathcal{R}$ be open and let $f : M \to \mathcal{R}$ be such that, for some fixed $p > 1$ in $\mathbf{Q}$ and for some positive $\eta \ll 1$ in $\mathcal{R}$, we have*

$$\forall x, y \in M, \lambda(x-y) \geq \lambda(\eta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \sim |x-y|^p.$$

Then f is differentiable on M with derivative $f'(x) = 0$ for all $x \in M$, that is, f is a solution for the differential equation $y' = 0$ on M.

Proof. Let $x \in M$ and $\epsilon > 0$ in $\mathcal{R}$ be given. Since M is open, there exists $\delta_0 > 0$ in $\mathcal{R}$ such that $(x - \delta_0, x + \delta_0) \subset M$. Let

$$\delta = \min\{\delta_0, \epsilon^{\frac{2}{p-1}}, \eta\}.$$

Then for all $y \in \mathcal{R}$ satisfying $0 < |y-x| < \delta$, we have that $y \in M$ and $\lambda(y-x) \geq \lambda(\delta) \geq \lambda(\eta)$. Hence

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \sim |x-y|^{p-1} < \delta^{p-1} = \min\left\{\delta_0^{p-1}, \epsilon^2, \eta^{p-1}\right\} \leq \min\left\{\epsilon^2, \eta^{p-1}\right\} \ll \epsilon.$$

The last step is justified by the fact that if $\epsilon \ll 1$, then $\epsilon^2 \ll \epsilon$ and if ϵ is finite or infinitely large, then $\eta^{p-1} \ll \epsilon$ since $\eta \ll 1$ and $p-1>0$. So in both cases, we have $\min\{\epsilon^2, \eta^{p-1}\} \ll \epsilon$. Thus, f is differentiable at x for all $x \in M$ with $f'(x) = 0$. □

Proposition 3.2. *Let $M \subseteq \mathcal{R}$ be open and let $f: M \to \mathcal{R}$ be such that, for some fixed $p > 1$ in $\mathbb{Q}$ and for some positive $\eta \ll 1$ and positive α in $\mathcal{R}$, we have*

$$\forall x, y \in M, \lambda(x-y) \geq \lambda(\eta) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \alpha|x-y|^p.$$

Then f is a solution for the differential equation $y' = 0$ on M.

Proof. Let $x \in M$ and $\epsilon > 0$ in $\mathcal{R}$ be given. Then there exists $\delta_0 > 0$ in $\mathcal{R}$ such that $(x-\delta_0, x+\delta_0) \subset M$. Let

$$\delta = \min\left\{\delta_0, \eta, \left(\frac{\epsilon^2}{\alpha}\right)^{1/(p-1)}, \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^{1/(p-1)}\right\}.$$

Then $\delta > 0$ and for $y \in \mathcal{R}$ satisfying $0 < |y-x| < \delta$, we have that $y \in M$ and $\lambda(y-x) \geq \lambda(\delta) \geq \lambda(\eta)$. Hence

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \alpha|x-y|^{p-1} < \alpha\delta^{p-1} = \min\left\{\alpha\delta_0^{p-1}, \alpha\eta^{p-1}, \epsilon^2, \eta\right\} \leq \min\left\{\epsilon^2, \eta\right\} \ll \epsilon.$$

This shows that f is differentiable at x for all $x \in M$ with $f'(x) = 0$. □

Remark 3.2. *We note that Proposition 3.1 follows from Proposition 3.2 if we take α to be any infinitely large positive number.*

Definition 3.1. *Let $M \subseteq \mathcal{R}$ and $h: M \to \mathcal{R}$. We say that h is level preserving on M and write $h \in P(M)$ if $\forall x, y \in M$ satisfying $\lambda(x) = \lambda(y)$ and $x =_r y$ it follows that $\lambda(h(x)) = \lambda(h(y))$ and $h(x) =_q h(y)$, where $q \geq \lambda(h(x)) + r - \lambda(x)$.*

Example 3.1. *Let $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ be given by $f(x)[q] = x[q-1]$. Then it is easy to check that $f \in P(\mathcal{R})$.*

Proposition 3.3. *Let $M \subset \mathcal{R}$ be open and such that $\lambda(x) \geq 0$ for all $x \in M$. Let $h: M \to \mathcal{R}$ be a level preserving function on M, and let $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 1$ be given. Then* *the function $f : M \to \mathcal{R}$, given by*

$$f(x)[q] = \begin{cases} h(x)\left[\frac{q\lambda(h(x))}{\lambda(x)\alpha}\right] & \text{if} \lambda(x) > 0 \\ h(x)\left[q + \lambda(h(x))\right] & \text{if } \lambda(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

is differentiable on M with derivative $f'(x) = 0$ for all $x \in M$.

Proof. Let $x \in \mathcal{R}$ and $\epsilon > 0$ in $\mathcal{R}$ be given. Since M is open, there exists $\eta > 0$ in $\mathcal{R}$ such that $\eta \ll 1$ and $(x - \eta, x + \eta) \subset M$. Let

$$\delta = \min\{\epsilon^{\frac{2}{\alpha-1}}, \eta\}.$$

Then $0 < \delta \ll 1$ and $(x-\delta, x+\delta) \subset M$. Now assuming $y \in M$ such that $0 < |y-x| < \delta$, we show that

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < \epsilon. \tag{3.2}$$

We note that, since $|y - x| \ll 1$, then either $\lambda(x) = 0 = \lambda(y)$ or $[\lambda(x) > 0$ and $\lambda(y) > 0]$.

First assume that $\lambda(x) > 0$ (and hence $\lambda(y) > 0$). We distinguish three cases.

Case 1: $\lambda(x) \neq \lambda(y)$. In this case, we have $\lambda(f(x)) \neq \lambda(f(y))$, and it follows that

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \sim (x - y)^{\alpha - 1}.$$

Hence

$$\lambda\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right) = (\alpha - 1)\lambda(y - x) \geq (\alpha - 1)\lambda(\delta)$$

$$= (\alpha - 1)\max\left\{\frac{2}{\alpha - 1}\lambda(\epsilon), \lambda(\eta)\right\} = \max\left\{2\lambda(\epsilon), (\alpha - 1)\lambda(\eta)\right\} > \lambda(\epsilon),$$

implying that

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \ll \epsilon. \tag{3.3}$$

Case 2: $x \sim y$ and $x[\lambda(x)] \neq y[\lambda(y)]$. In this case the argument is similar to that of Case 1.

Case 3: $x =_r y$ for some $r \in \mathbb{Q}$ with $r \geq \lambda(x)$. Then obviously $\lambda(|x-y|) = r_+$, where r_+ is a rational number such that $r_+ > r$. It follows that $\lambda(|f(x) - f(y)|) = \alpha r_+$. Thus, we have

$$\lambda\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right) = \lambda(f(x) - f(y)) - \lambda(x - y) = (\alpha - 1)r_+ > (\alpha - 1)\lambda(\delta),$$

from which, as in the Case 1, we obtain (3.3). Finally, if $\lambda(x) = 0 = \lambda(y)$ then the proof of the inequality (3.2) follows by the same arguments as above (when $\lambda(x) > 0$), except that we have to use the appropriate expression for f from equation (3.1). $\square$

In the following definition we introduce the class of all functions that are differentiable with derivative equal to 0 everywhere on an open subset of $\mathcal{R}$.

Definition 3.2. *Let $M \subseteq \mathcal{R}$ be open and let $f : M \to \mathcal{R}$. We define the class of functions $D_0^1(M)$ as follows:*

$$D_0^1(M) = \{f : M \to \mathcal{R} | f \text{ is differentiable on } M,\ f'(x) = 0\ \forall x \in M\}.$$

3.2. Systems of linear ordinary differential equations on $\mathcal{R}$. In this section we investigate the solutions of systems of linear ordinary differential equations on $\mathcal{R}$, using the functions of class D_0^1.

The main goal of this section is to obtain solutions of systems of linear ODE's of the form:

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t),$$

where $Y(t)$ is a vector of dimension $n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, which contains the unknown functions, $Y'(t)$ contains the derivatives of the functions from $Y(t)$, $A(t) \in \mathcal{M}_n^f(\mathcal{R})$, for all $t \in \mathcal{R}$, which contains the coefficient functions of the system, and $B(t)$ is a vector of dimension n, which contains functions that ensure the inhomogeneity of the system. In order to realize this we study a few cases, going from the most special to the most general ones.

Theorem 3.2. *Consider the linear homogeneous system of ordinary differential equations with constant coefficients which are at most finite in absolute value*

$$Y'(t) = AY(t).$$

Then the solution is given by

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t),$$

where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ is a vector containing constants, and $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(D_0^1)$ is a vector which contains functions of class D_0^1.

Proof. We rewrite the system in the form:

$$Y'(t) - AY(t) = O_{n,1},$$

which is equivalent to

$$e^{-At}Y'(t) - e^{-At}AY(t) = O_{n,1} \quad \text{or} \quad \left(e^{-At}Y(t)\right)' = O_{n,1}.$$

It follows that $e^{-At}Y(t) = C + U_{na}(t)$, where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ and the elements of $U_{na}(t)$ are functions of class D_0^1, and hence $Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t)$. □

Remark 3.3. *Theorem 3.2 shows that the solutions of linear homogeneous systems with constant coefficients over $\mathcal{R}$ are very similar to those of the real case, except that the solutions in the non-Archimedean case may also involve non-analytic functions with zero-derivatives.*

Since we know how to integrate $\mathcal{R}$-analytic functions [14] in the Lebesgue-like theory developed in [15, 18], we can study next those inhomogeneous systems, where the functions ensuring the inhomogeneity are $\mathcal{R}$-analytic.

Theorem 3.3. *Consider the inhomogeneous system of linear ordinary differential equations with constant coefficients:*

$$Y'(t) = AY(t) + B(t)$$

on the interval $[a,b] \subset \mathcal{R}$, where $|A|$, $|a|$ and $|b|$ are at most finite in absolute value, and $B(t)$ is a vector, which contains functions that are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$. Then the solution is given by the equation

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t) + e^{At}\int_{[a,t]} e^{-As}B(s),$$

where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ and the elements of $U_{na}(t)$ are functions of class D_0^1.

Proof. We rewrite the system in the form $Y'(t) - AY(t) = B(t)$, which is equivalent to

$$\left(e^{-At}Y(t)\right)' = e^{-At}B(t).$$

It follows that

$$e^{-At}Y(t) = C + U_{na}(t) + \int_{[a,t]} e^{-As}B(s),$$

where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$, and $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(D_0^1)$, and hence

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t) + e^{At}\int_{[a,t]} e^{-As}B(s).$$

Note that we have used the fact that $e^{At}B(t)$ is a vector whose components are products of functions that are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$, and hence the components themselves are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$. □

The proofs of the next two theorems (Theorems 3.4 and 3.5) are similar to those of Theorems 3.2 and 3.3 above, and therefore they are stated without proofs.

Theorem 3.4. *Consider the homogeneous system of linear ordinary differential equations with non-constant coefficients:*

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

on $[a,b]$, where $|a|$ and $|b|$ are at most finite, and where $A(t)$ is an $n \times n$ matrix whose elements are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$ and such that $|A(t)|$ is at most finite for all $t \in [a,b]$. Then the solution is given by

$$Y(t) = e^{\int_{[a,t]} A(s)} C + e^{\int_{[a,t]} A(s)} U_{na}(t),$$

where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ and $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(D_0^1)$.

Theorem 3.5. *Consider the inhomogeneous system of linear ordinary differential equations with non-constant coefficients:*

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

on $[a,b]$, where $|a|$ and $|b|$ are at most finite, $A(t)$ is an $n \times n$ matrix whose elements are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$ and such that $|A(t)|$ is at most finite for all $t \in [a,b]$, and $B(t)$ is a vector whose components are functions that are $\mathcal{R}$-analytic on $[a,b]$. Then the solution is given by

$$Y(t) = e^{\int_{[a,t]} A(s)} C + e^{\int_{[a,t]} A(s)} U_{na}(t) + e^{\int_{[a,t]} A(s)} \int_{[a,t]} e^{-\int_{[a,s]} A(\tau)} B(s),$$

where $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ and $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(D_0^1)$.

3.3. Bessel-type special functions on $\mathcal{R}$. In this subsection we study Bessel-type special functions on $\mathcal{R}$, with the help of the solutions for systems of linear ordinary differential equations that we developed in Subsection 3.2. We introduce such functions with the following problem.

Problem 1. Consider the differential equation

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0. \tag{3.4}$$

Let's study the solutions of this equation on $[a,1] \subset \mathcal{R}$, where $0 < a < 1$, a is finite, and $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

We call equation (3.4) the Bessel equation of order ν, and we study its solutions below.

It is easy to check, as in the real case, that the functions

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \tag{3.5}$$

and

(3.6) $$J_{-\nu}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

are two linearly independent analytic solutions of equation (3.4), for all $t \in [a,1]$, where Γ is the Euler's Gamma function. Moreover, it follows from Corollary 3.10 in [17] that the power series in equations (3.5) and (3.6) converge weakly in $[a,1]$.

The main objective of Problem 1 is to construct solutions of equation (3.4) that involve functions of the class D_0^1, and to study their properties.

We set

$$\begin{cases} w_1 = y \\ w_2 = y', \end{cases}$$

and consider the following system of two linear ordinary differential equations:

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) w_1 + \frac{1}{t} w_2, \end{cases}$$

which we can write in matrix form as

(3.7) $$W'(t) = A(t)W(t),$$

where

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}; \quad W'(t) = \begin{pmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\nu^2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Because the elements of $A(t)$ are $\mathcal{R}$-analytic functions on $[a,1]$ and they are at most finite in absolute value for all $t \in [a,1]$, we can use Theorem 3.4 to write the solutions of equation (3.7), which are also the solutions of equation (3.4).

Let

$$D(t) = \int_{[a,t]} A(s) = \begin{pmatrix} 0 & t-a \\ t - a + \nu^2(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}) & \ln\frac{t}{a} \end{pmatrix},$$

where the function ln is $\mathcal{R}$-analytic on $[a,1]$.

Thus, the solution of equation (3.7), and hence of equation (3.4), on $[a,1]$ has the form

$$W(t) = e^{D(t)}C + e^{D(t)}U_{na}(t),$$

where $C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathcal{R})$ and $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{2,1}(D_0^1)$.

Taking into account that the analytic part of the solution has the form $c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$, we conclude that in the first row of the matrix $e^{D(t)}$ we can take the entries to be

$$D_{11} = J_\nu(t) \text{ and } D_{12} = J_{-\nu}(t).$$

With $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, it follows that the first component of $W(t)$, which is $y = w_1(t)$, has the form:

$$y = c_1 \left[J_\nu(t) + J_\nu(t)g_\nu(t)\right] + c_2 \left[J_{-\nu}(t) + J_{-\nu}(t)g_{-\nu}(t)\right],$$

where $g_\nu, g_{-\nu} \in D_0^1([a,1])$.

Now we are in a position to define Bessel functions of the first kind on $\mathfrak{R}$.

Definition 3.3. *For $0 < a < 1$, $a \in \mathfrak{R}$ finite, we define the functions $\mathfrak{J}_\nu, \mathfrak{J}_{-\nu} : [a,1] \subset \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ by*

$$\mathfrak{J}_\nu(t) = J_\nu(t) + J_\nu(t)g_\nu(t), \text{ and}$$
$$\mathfrak{J}_{-\nu}(t) = J_{-\nu}(t) + J_{-\nu}(t)g_{-\nu}(t),$$

where $\nu \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ and $g_\nu, g_{-\nu} \in D_0^1([a,1])$.

We call the functions $\mathfrak{J}_\nu, \mathfrak{J}_{-\nu}$ Bessel functions of the first kind and of order ν, and $-\nu$, respectively.

Next, we study some properties of the Bessel functions $\mathfrak{J}_\nu$ and $\mathfrak{J}_{-\nu}$.

Theorem 3.6. *Under the notation of Problem 1 and Definition 3.3 above, the following two statements are true for all $t \in [a,1]$:*

$$\text{(a)} \quad \frac{2\nu}{t}\mathfrak{J}_\nu(t) = \Big(J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t)\Big)\Big(1 + g_\nu(t)\Big)$$
$$\text{(b)} \quad 2\mathfrak{J}'_\nu(t) = \Big(J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t)\Big)\Big(1 + g_\nu(t)\Big).$$

Proof. Using equation (3.5), we can write

$$\left(\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\right)' = \frac{1}{2^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(n-1)!\Gamma(n+\nu+1)2^{2n-1}} = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}.$$

Then, using the fact that $\mathfrak{J}_\nu(t) = J_\nu(t) + J_\nu(t)g_\nu(t)$ and $g'_\nu(t) = 0, \forall t \in [a,1]$, we obtain

$$\left(\frac{\mathfrak{J}_\nu(t)}{t^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu} - \frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}g_\nu(t),$$

implying that

$$\mathfrak{J}'_\nu(t)\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{J}_\nu(t)\frac{-\nu}{t^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu} - \frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}g_\nu(t),$$

or

$$\mathfrak{J}'_\nu(t) = \frac{\nu}{t}\mathfrak{J}_\nu(t) - J_{\nu+1}(t) - J_{\nu+1}(t)g_\nu(t) \tag{3.8}$$

Similarly, we can show that

$$\frac{1}{t}\Big(t^\nu\mathfrak{J}_\nu(t)\Big)' = t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t) + t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t)g_\nu(t),$$

implying that

$$\frac{1}{t}\left(\nu t^{\nu-1}\mathfrak{J}_\nu(t) + t^\nu \mathfrak{J}'_\nu(t)\right) = t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t) + t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t)g_\nu(t),$$

or

$$\mathfrak{J}'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}\mathfrak{J}_\nu(t) + J_{\nu-1}(t)g_\nu(t). \tag{3.9}$$

If we subtract equation (3.9) from equation (3.8), we get statement (a) of the theorem, and if we add the two equations, we get (b). □

Remark 3.4. *Just as we did in Theorem 3.6, we can obtain other recursive relations for $\mathfrak{J}_\nu$ and $\mathfrak{J}_{-\nu}$ that would extend the classical recursive relations for J_ν and $J_{-\nu}$ from Real Calculus to the non-Archimedean calculus on $\mathcal{R}$.*

In the following subsection, we introduce the so-called generalized Bessel functions of the first kind on $\mathcal{R}$.

3.4. Generalized Bessel functions of the first kind on $\mathcal{R}$. We give some basic definitions based on those given by Á. Baricz (see [2]) in the classical case (real and complex). As before, let $0 < a < 1$, $a \in \mathcal{R}$ finite, $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, and let $b, c \in \mathbb{R}$ in the rest of this paper.

Definition 3.4. *The differential equation*

$$t^2 w''(t) + btw(t) + [ct^2 - p^2 + (1-b)p]w(t) = 0 \tag{3.10}$$

will be referred to as the generalized Bessel equation of order p (see [2]), and any solution of it will be called a generalized Bessel function of order p.

The generalized Bessel functions permit the study of Bessel functions, spherical Bessel functions and modified Bessel functions together. That is why it is very important to extend this kind of functions to the field $\mathcal{R}$.

Remark 3.5. *As in the classical case (see [2]), it can easily be verified that the function*

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!\Gamma(p+n+\frac{b+1}{2})}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}$$

is a solution of equation (3.10). Moreover, when $c = b = 1$ we get the Bessel function of the first kind of order p discussed in the previous subsection.

Similar to Definition 3.3, we introduce generalized Bessel functions of the first kind on $\mathcal{R}$ as follows.

Definition 3.5. *Let $0 < a < 1$, $a \in \mathcal{R}$ finite, $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, and let $b, c \in \mathbb{R}$. Then the function*

$$\mathcal{W}_p(t) = w_p(t) + w_p(t) g_p(t),$$

where $g_p \in D_0^1([a,1])$, and

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!\Gamma(p+n+\frac{b+1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}$$

is a solution of equation (3.10). We call $\mathcal{W}_p(t)$ a generalized Bessel function of order p on $[a,1]$.

The proof of the next result is similar to that of Theorem 3.6, as well as to the proof of the corresponding result in the classical case (see [2], Lemma 1.1), and therefore we state it without proof.

Theorem 3.7. *Under the notation in Definition 3.5, the following statements are true for all $t \in [a,1]$*

(a) $\dfrac{2p+b-1}{t}\mathcal{W}_p(t) = \Big(w_{p-1}(t) + c w_{p+1}(t)\Big)\Big(1 + g_p(t)\Big)$

(b) $(2p+b-1)\mathcal{W}_p'(t) = \Big(p w_{p-1}(t) - (p+b-1) c w_{p+1}(t)\Big)\Big(1 + g_p(t)\Big)$.

Список литературы

[1] N. L. Alling, Foundations of Analysis over Surreal Number Fields, North Holland (1987).
[2] Á Baricz, Generalized Bessel Functions of the First Kind, Springer (2010).
[3] M. Berz, "Calculus and numerics on Levi-Civita fields", In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, editors, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools, 19 – 35, Philadelphia (1996).
[4] W. Krull, "Allgemeine Bewertungstheorie", J. Reine Angew. Math., 167, 160 – 196 (1932).
[5] T. Levi-Civita, "Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici", Atti Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Art., 7a, no. 4:1765 (1892).
[6] T. Levi-Civita, "Sui numeri transfiniti", Rend. Acc. Lincei, 5a, 7:91, 113 (1898).
[7] S. Priess-Crampe, Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen, Springer, Berlin (1983).
[8] P. Ribenboim, "Fields: Algebraically Closed and Others", Manuscripta Mathematica, 75, 115 – 150 (1992).
[9] W. H. Schikhof, Ultrametric Calculus: An Introduction to p-Adic Analysis, Cambridge University Press (1985).
[10] K. Shamseddine, "New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field", PhD thesis, Michigan State University, East Lansing, Michigan, USA (1999).
[11] K. Shamseddine, "On the existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations on the Levi-Civita field", Int. J. Differ. Equ. Appl., 4, 375 – 386 (2002).
[12] K. Shamseddine, "On the topological structure of the Levi-Civita field", J. Math. Anal. Appl., 368, 281 – 292 (2010).
[13] K. Shamseddine, "Nontrivial order preserving automorphisms of non-Archimedean fields", Contemp. Math., 547, 217 – 225 (2011).
[14] K. Shamseddine, "A brief survey of the study of power series and analytic functions on the Levi-Civita fields", Contemp. Math., 596, 269 – 280 (2013).

[15] K. Shamseddine, "New results on integration on the Levi-Civita field", Indag. Math. (N.S.), **24**, no. 1, 199 – 211 (2013).
[16] K. Shamseddine and M. Berz, "Exception handling in derivative computation with non-Archimedean calculus", In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, editors, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools, 37 – 51, Philadelphia (1996).
[17] K. Shamseddine and M. Berz, "Convergence on the Levi-Civita field and study of power series", Proc. Sixth International Conference on p-adic Functional Analysis, 283 – 299, New York (2000).
[18] K. Shamseddine and M. Berz, "Measure theory and integration on the Levi-Civita field", Contemp. Math., **319**, 369 – 387 (2003).
[19] K. Shamseddine and M. Berz, "Analytical properties of power series on Levi-Civita fields", Ann. Math. Blaise Pascal, **12**, no. 2, 309 – 329 (2005).
[20] K. Shamseddine and M. Berz, "Analysis on the Levi-Civita field, a brief overview", Contemp. Math., **508**, 215 – 237 (2010).

Поступила 31 января 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 69-79.

ZEROS AND SHARED ONE VALUE OF q-SHIFT DIFFERENCE POLYNOMIALS

Q. ZHAO AND J. ZHANG

Beihang University, Beijing, China

E-mails: *zhaoqiuxia2009@126.com*, *jilongzhang2007@gmail.com*

Abstract. [1]In this paper, we investigate uniqueness problems and zero distributions of q-shift difference polynomials of meromorphic functions with zero order in the complex plane. The obtained results extend some previous known results.

MSC2010 numbers: 30D35.

Keywords: Meromorphic functions; uniqueness; value distribution; q-shift difference polynomials; zero order.

1. Introduction and main results

In this paper, a meromorphic function always means a nonconstant analytic function in the whole complex plane except at possible poles. If no poles occur, it reduces to an entire function. Let q and c be non-zero complex constants, the q-shift of a function $f(z)$ is defined by $f(qz+c)$. We assume that the reader is familiar with the elementary Nevanlinna theory (see, e.g., [2, 3, 12]).

We denote by $S(r,f)$ any quantity satisfying $S(r,f) = o(T(r,f))$ as $r \to \infty$ possibly outside a set of logarithmic density 0. For a meromorphic function $f(z)$ in complex plane, denote by $S(r,f)$ the family of all meromorphic functions $\alpha(z)$ that satisfy $T(r,\alpha) = o(T(r,f))$ as $r \to \infty$ outside a possible exceptional set of logarithmic density 0.

We say that the functions f and g are meromorphic and share a small function α IM (ignoring multiplicities) if $f-\alpha$ and $g-\alpha$ have the same zeros. If $f-\alpha$ and $g-\alpha$ have the same zeros with the same multiplicities, then we say that f and g share α CM (counting multiplicities). Let f be a nonconstant meromorphic function, p be a positive integer and a be a complex constant. By $N_p(r, \frac{1}{f-a})$ we denote the counting function of the zeros of $f-a$, where an m-fold zero is counted m times if $m \le p$ and p times if $m > p$.

[1]This research was supported by the NNSF of China (No. 11201014, 11171013 and 11126036), the YWF-14-SXXY-008 of Beihang University and the youth talent program of Beijing (No. 29201443).

Let f be a transcendental meromorphic function. In 1959, Hayman[1] proved that $f^n f'$ takes every non-zero complex value infinitely often if $n \geq 3$. Yang and Hua [11], obtained some results about the uniqueness problems for entire functions. Since then the difference has become a subject of great interest (see, e.g., [6, 8, 14, 15], and references therein). Among them Liu and Cao [6], have obtained results on the uniqueness and value distributions of q-shift difference polynomials. Some of them are stated below.

Theorem A. ([6, Theorem 1.1]). *Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic (resp. entire) function with zero order, and let m, n be positive integers and a, q be non-zero complex constants. If $n \geq 6$ (resp. $n \geq 2$), then $f(z)^n(f(z)^m - a)f(qz+c) - \alpha(z)$ has infinitely many zeros, where $\alpha(z)$ is a non-zero small function with respect to f. In particular, if $f(z)$ is a transcendental entire function and $\alpha(z)$ is a non-zero rational function, then m and n can be any positive integers.*

Theorem B. ([6, Theorem 1.5]). *Let $f(z)$ and $g(z)$ be transcendental entire functions with zero order. If $n \geq m+5$, and $f(z)^n(f(z)^m - a)f(qz+c))$ and $g(z)^n(g(z)^m - a)g(qz+c))$ share a non-zero polynomial $p(z)$ CM, then $f(z) \equiv g(z)$.*

In this paper, on the basis of Theorems A and B, we study the k-th derivative of q-shift difference polynomials and prove the following results.

Theorem 1.1. *Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function with zero order, and let n, k be positive integers. If $n > k+5$, then $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)} - 1$ has infinitely many zeros.*

Theorem 1.2. *Let $f(z)$ be a transcendental entire function with zero order, and let n, k be positive integers, then $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)} - 1$ has infinitely many zeros.*

Theorem 1.3. *Let $f(z)$ and $g(z)$ be transcendental entire functions with zero order, and let n, k be positive integers. If $n > 2k+5$, and $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}$ and $(g(z)^n g(qz+c))^{(k)}$ share z CM, then $f = tg$ for a constant t with $t^{n+1} = 1$.*

Theorem 1.4. *Let $f(z)$ and $g(z)$ be transcendental entire functions with zero order, and let n, k be positive integers. If $n > 2k+5$, and $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}$ and $(g(z)^n g(qz+c))^{(k)}$ share 1 CM, then $f = tg$ for a constant t with $t^{n+1} = 1$.*

When sharing a single value IM, we can prove the following two results.

Theorem 1.5. *Let $f(z)$ and $g(z)$ be transcendental entire functions with zero order, and let n, k be positive integers. If $n > 5k+11$, and $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}$ and $(g(z)^n g(qz+c))^{(k)}$ share a value z IM, then $f = tg$ for a constant t with $t^{n+1} = 1$.*

Theorem 1.6. *Let $f(z)$ and $g(z)$ be transcendental entire functions with zero order, and let n, k be positive integers. If $n > 5k+11$, and $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}$ and $(g(z)^n g(qz+c))^{(k)}$ share 1 IM, then $f = tg$ for a constant t with $t^{n+1} = 1$.*

2. Lemmas

In this section, we present some lemmas which play an important role in the proofs of the main results. The following q-shift difference analogue of the logarithmic derivative lemma is very important when considering q-shift difference polynomials.

Lemma 2.1 ([7, Theorem 2.1]). *Let $f(z)$ be a meromorphic function of zero order. Then on a set of logarithmic density 1*

$$m\left(r, \frac{f(qz+c)}{f(z)}\right) = o(T(r,f)).$$

The next two lemmas are essential in our proofs, they allow to estimate the characteristic function and the counting function of $f(qz+c)$ (see Lemmas 3.4 and 3.6 in [10]).

Lemma 2.2. *If $f(z)$ is a nonconstant zero order meromorphic function, then on a set of lower logarithmic density 1*

$$T(r, f(qz+c)) = (1+o(1))T(r, f(z)) + O(\log r).$$

Lemma 2.3. *If $f(z)$ is a nonconstant zero order meromorphic function, then on a set of lower logarithmic density 1*

$$N(r, f(qz+c)) = (1+o(1))N(r, f(z)) + O(\log r).$$

When considering two nonconstant meromorphic functions F and G that share at least one finite value CM, the following lemma plays a key role. In the original paper, [11], $S(r,F)$ denotes any quantity satisfying $S(r,F) = o(T(r,F))$ as $r \to \infty$ possibly outside a set of finite linear measure. So it holds when $S(r,F) = o(T(r,F))$ as $r \to \infty$ possibly outside a set of logarithmic density 0.

Lemma 2.4 ([11, Lemma 3]). *Let F and G be two nonconstant meromorphic functions. If F and G share 1 CM, then one of the following three cases holds:*

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad max\{T(r,F),T(r,G)\} \leq N_2(r,1/F)+N_2(r,1/G)+N_2(r,F)\\
&\qquad\qquad +N_2(r,G)+S(r,F)+S(r,G),\\
&(2) \qquad FG=1,\\
&(3) \qquad F=G,
\end{aligned}$$

where $N_2(r,1/F)$ denotes the counting function of zeros of F such that the simple zeros are counted once and multiple zeros twice.

When two nonconstant meromorphic functions share at least one finite value IM, then the following lemma is needed.

Lemma 2.5 ([9, Lemma 2.3]). *Let F and G be two nonconstant meromorphic functions such that F and G share 1 IM, and let*

$$H := \left(\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1}\right) - \left(\frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}\right). \tag{2.1}$$

If $H \not\equiv 0$, then

$$\begin{aligned}
T(r,F)+T(r,G) \quad \leq \quad & 2\left(N_2(r,1/F)+N_2(r,1/G)+N_2(r,F)+N_2(r,G)\right)+3(\overline{N}(r,F)\\
&+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}(r,1/G))+S(r,F)+S(r,G).
\end{aligned}$$

Lemma 2.6 ([4]). *Let $f(z)$ be a nonconstant meromorphic function, and let s, k be two positive integers. Then*

$$\begin{aligned}
N_s\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right) \quad &\leq \quad T(r,f^{(k)})-T(r,f)+N_{s+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f),\\
N_s\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right) \quad &\leq \quad k\overline{N}(r,f)+N_{s+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Clearly, $\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)=N_1\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)$.

3. Proofs of the Theorems

In this section we prove our main results.

Proof of Theorem 1.1. Let $F(z)=f(z)^n f(qz+c)$. Using the second main theorem, we obtain

$$T(r,F^{(k)}) \leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,F^{(k)}\right)+S(r,F).$$

From Lemma 2.6, we get

$$\begin{aligned} T(r,F^{(k)}) &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+T(r,F^{(k)})-T(r,F)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right) \\ &\quad +\overline{N}\left(r,F^{(k)}\right)+S(r,F). \end{aligned}$$

Since $T(r,F)\le(n+1)T(r,f)$, we have $S(r,F)=S(r,f)$. Thus the above inequality and Lemma 2.3 imply

$$\begin{aligned} T(r,F) &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,F^{(k)})+S(r,f) \\ &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right) \\ &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+(k+1)T(r,f)+T(r,f)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f) \\ &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+(k+4)T(r,f)+S(r,f). \qquad (3.1) \end{aligned}$$

On the other hand, from Lemma 2.1, we get

$$\begin{aligned} (n+1)T(r,f) &= T(r,f^{n+1})=m(r,f^{n+1})+N(r,f^{n+1}) \\ &\le m\left(r,F(z)\cdot\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right)+N\left(r,F(z)\cdot\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right)+S(r,f) \\ &\le T(r,F(z))+m\left(r,\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right)+N\left(r,\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right)+S(r,f) \\ &\le T(r,F(z))+2T(r,f)+S(r,f). \qquad (3.2) \end{aligned}$$

According to (3.1) and (3.2), we obtain

$$(n-k-5)T(r,f)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+S(r,f).$$

Note that $n>k+5$, we conclude that $F^{(k)}(z)-1$ has infinitely many zeros. This completes the proof of Theorem 1.1. □

Proof of Theorem 1.2. Let the function $F(z)$ be as in the proof of Theorem 1.1. Assume the opposite, that $F^{(k)}(z)-1$ has only a finite number of zeros. Since by assumption, f is a transcendental entire function with zero order, there exists a polynomial $P(z)$ such that

$$F^{(k)}(z)-1=P(z).$$

By integrating k times, we get from the above equation that $F(z)=Q(z)$, where $Q(z)$ is a polynomial, given by $Q(z)=f(z)^nf(qz+c)$. Obviously, $Q(z)\not\equiv 0$. Hence we can write

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &= T(r,f^{n+1}) = m(r,f^{n+1})\\ &\leq m\left(r, F(z)\cdot\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right) + S(r,f)\\ &\leq T(r,F(z)) + m\left(r,\frac{f(z)}{f(qz+c)}\right) + S(r,f)\\ &\leq T(r,F(z)) + S(r,f) = T(r,Q(z)) + S(r,f),\end{aligned} \tag{3.3}$$

which is impossible. Therefore $F^{(k)}(z)-1$ has infinitely many zeros. This completes the proof of Theorem 1.2. □

Proof of Theorem 1.5. Let $F(z)$ be as in the proof of Theorem 1.1, $G(z)=g(z)^n g(qz+c)$, and H be as in Lemma 2.5. Define

$$\Phi(z)=\frac{F^{(k)}(z)}{z},\quad \Psi(z)=\frac{G^{(k)}(z)}{z}.$$

Then $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ share 1 IM by the conditions. Since f is a transcendental entire function, from the definition of $\Phi(z)$ we deduce that $N_2(r,\Phi)=O(\log r)=S(r,f)$. Using Lemmas 2.6 and 2.3, we can write

$$\begin{aligned}N_2\left(r,\frac{1}{\Phi}\right) &\leq N_2\left(r,\frac{1}{F^{(k)}}\right) + S(r,f)\\ &\leq k\overline{N}(r,F) + N_{k+2}\left(r,\frac{1}{F}\right) + S(r,f)\\ &\leq N_{k+2}\left(r,\frac{1}{f^n}\right) + N_{k+2}\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right) + S(r,f)\\ &\leq (k+2)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right) + S(r,f)\\ &\leq (k+3)T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

In the same manner, we get

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Phi}\right) \leq (k+2)T(r,f)+S(r,f). \tag{3.4}$$

Therefore

$$N_2\left(r,\frac{1}{\Phi}\right) + N_2(r,\Phi) \leq (k+3)T(r,f)+S(r,f). \tag{3.5}$$

Similarly, we obtain

$$N_2\left(r,\frac{1}{\Psi}\right) + N_2(r,\Psi) \leq (k+3)T(r,g)+S(r,g). \tag{3.6}$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Psi}\right) \leq (k+2)T(r,g)+S(r,g). \tag{3.7}$$

Next, by Lemmas 2.6 and 2.3, we get

$$\begin{aligned} N_2\left(r,\frac{1}{\Phi}\right) &\leq N_2\left(r,\frac{1}{F^{(k)}}\right)+S(r,f) \\ &\leq T(r,F^{(k)})-T(r,F)+N_{k+2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,f) \\ &\leq T(r,F^{(k)})-T(r,F)+N_{k+2}\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N_{k+2}\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right)+S(r,f) \\ &\leq T(r,F^{(k)})-T(r,F)+(k+2)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right)+S(r,f) \\ &\leq T(r,\Phi)-T(r,F)+(k+3)T(r,f)+S(r,f). \qquad (3.8) \end{aligned}$$

By (3.3) we have

$$(n+1)T(r,f)\leq T(r,F)+S(r,f). \tag{3.9}$$

Combining (3.8) and (3.9), we get

$$(n+1)T(r,f)\leq T(r,\Phi)-N_2\left(r,\frac{1}{\Phi}\right)+(k+3)T(r,f)+S(r,f). \tag{3.10}$$

Similarly, we can obtain

$$(n+1)T(r,g)\leq T(r,\Psi)-N_2\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)+(k+3)T(r,g)+S(r,g). \tag{3.11}$$

It follows from Lemma 2.5 that if $H\not\equiv 0$, then

$$\begin{aligned} T(r,\Phi)+T(r,\Psi) &\leq 2\left(N_2\left(r,\frac{1}{\Phi}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)\right)+3\left(\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Phi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)\right) \\ &\quad +S(r,\Phi)+S(r,\Psi). \end{aligned}$$

Substituting (3.4)-(3.7), (3.10) and (3.11) into the above inequality, we obtain

$$(n-5k-11)[T(r,f)+T(r,g)]\leq S(r,f)+S(r,g),$$

which is a contradiction, because by assumption we have $n>5k+11$. Hence, we have $H\equiv 0$. By integrating (2.1) two times, we get

$$\frac{1}{\Phi-1}=\frac{A}{\Psi-1}+B,$$

where $A\neq 0$ and B are constants. The above equation implies

$$\Psi=\frac{(B-A)\Phi+(A-B-1)}{B\Phi-(B+1)}. \tag{3.12}$$

Hence, we easily get

$$T(r,\Phi)=T(r,\Psi)+O(1).$$

Thus, we have $S(r,f)=S(r,g)$.

In the following, we discuss three cases.

Case 1. Suppose that $B \neq 0, -1$. In this case, from (3.12) we obtain

$$\overline{N}(r, 1/(\Phi - \frac{B+1}{B})) = \overline{N}(r, \Psi).$$

Next, from the second fundamental theorem and (3.4), we have

$$\begin{aligned} T(r,\Phi) &\leq \overline{N}(r,\Phi) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) + \overline{N}\left(r, 1/(\Phi - \frac{B+1}{B})\right) + S(r,\Phi) \\ &\leq (k+2)T(r,f) + S(r,f). \end{aligned}$$

In view of (3.8) and (3.9), we have $(n-k-2)T(r,f) \leq T(r,\Phi)$, implying that $(n-2k-4)T(r,f) \leq S(r,f)$. This contradicts the assumption $n > 5k+11$.

Case 2. Suppose that $B = 0$. From (3.12) we have

$$\Psi = A\Phi - (A-1). \tag{3.13}$$

If $A \neq 1$, then from (3.13) we can deduce $\overline{N}(r, 1/(\Phi - \frac{A-1}{A})) = \overline{N}(r, \frac{1}{\Psi})$. Then, by the second fundamental theorem and (3.7), we obtain

$$\begin{aligned} T(r,\Phi) &\leq \overline{N}(r,\Phi) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) + \overline{N}\left(r, 1/(\Phi - \frac{A-1}{A})\right) + S(r,\Phi) \\ &\leq (k+2)T(r,g) + (k+2)T(r,f) + S(r,f). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Similarly, we have

$$T(r,\Psi) \leq (k+2)T(r,g) + (k+2)T(r,f) + S(r,g). \tag{3.15}$$

By (3.10), (3.11), (3.14) and (3.15), we obtain

$$(n-3k-6)[T(r,f) + T(r,g)] \leq S(r,f) + S(r,g),$$

which is a contradiction since by assumption $n > 5k+11$. Thus, we have $A = 1$, and from (3.13), we obtain $\Phi = \Psi$, implying that

$$(f(z)^n f(qz+c))^{(k)} = (g(z)^n g(qz+c))^{(k)}.$$

Integrating the last equality, we get

$$f(z)^n f(qz+c) = g(z)^n g(qz+c) + p(z),$$

where $p(z)$ is a polynomial of degree at most $k-1$. If $p(z) \not\equiv 0$, then from the second main theorem for the small function case, we get

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &\le T(r,F)+S(r,f)\\ &\le \overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,f)\\ &\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f(qz+c)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\ &\quad +\overline{N}\left(r,\frac{1}{g(qz+c)}\right)+S(r,f)\\ &\le 2T(r,f)+2T(r,g)+S(r,f).\end{aligned}$$

Similarly, we have

$$(n+1)T(r,g) \le 2T(r,g)+2T(r,f)+S(r,f).$$

Therefore

$$(n+1)[T(r,f)+T(r,g)] \le 4[T(r,f)+T(r,g)]+S(r,f)+S(r,g),$$

which is a contradiction since by assumption $n>5k+11$. Thus, $p(z)\equiv 0$, which implies that

$$f(z)^n f(qz+c)=g(z)^n g(qz+c).$$

Let $\frac{f}{g}=h$. If h is not a constant, then the above equation implies

$$h(z)^n=\frac{1}{h(qz+c)}. \tag{3.16}$$

Thus, from the first main theorem, we obtain

$$\begin{aligned}nT(r,h(z)) &= T(r,h(z)^n)=T(r,h(qz+c)+O(1)\\ &\le T(r,h(z))+S(r,h).\end{aligned}$$

Since $n\ge 2$, we know that h is a constant. Then by (3.16), we have $h^{n+1}=1$. Hence $f(z)=tg(z)$, where t is a constant and $t^{n+1}=1$.

Case 3. Suppose that $B=-1$. From (3.12) we have

$$\Psi=\frac{(A+1)\Phi-A}{\Phi}. \tag{3.17}$$

If $A\ne -1$, then from (3.17) we can deduce $\overline{N}(r,1/(\Phi-\frac{A}{A+1}))=\overline{N}(r,\frac{1}{\Psi})$. By the same reasoning, discussed in the Case 2, we obtain a contradiction. Hence, $A=-1$. From (3.17), we have $\Phi\cdot\Psi=1$, that is,

$$(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}\cdot(g(z)^n g(qz+c))^{(k)}=z^2. \tag{3.18}$$

Notice that $n > 5k+11$, hence if z_0 is a zero of $f(z)$ with multiplicity p, then z_0 is a zero of $(f(z)^n f(qz+c))^{(k)}$ with multiplicity at least $np-k > 4k+11$, which is impossible by checking the right-hand side of (3.18). Hence, zero is a Picard exceptional value of $f(z)$, and thus $f(z)$ is a constant, which is impossible. This completes the proof of Theorem 1.5. □

Proof of Theorem 1.3. Let $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ be as in Theorem 1.5. Then $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ share 1 CM, and from (3.8) we obtain

$$N_2\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) \leq T(r, \Phi) - T(r, F) + (k+3)T(r, f) + S(r, f). \tag{3.19}$$

Similarly, we get

$$N_2\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) \leq T(r, \Psi) - T(r, G) + (k+3)T(r, g) + S(r, g).$$

Assume that the Case 1 of Lemma 2.4 holds. Then, in view of Lemma 2.5 and (3.19), we can write

$$\begin{aligned}
T(r, \Phi) &\leq N_2\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) + N_2(r, \Phi) + N_2(r, \Psi) + S(r, \Phi) + S(r, \Psi) \\
&\leq T(r, \Phi) - T(r, F) + (k+3)T(r, f) + N_2\left(r, \frac{1}{G^{(k)}}\right) + S(r, f) + S(r, g) \\
&\leq T(r, \Phi) - T(r, F) + (k+3)T(r, f) + k\overline{N}(r, G) + N_{k+2}\left(r, \frac{1}{G}\right) + S(r, f) + S(r, g) \\
&\leq T(r, \Phi) - T(r, F) + (k+3)T(r, f) + (k+3)T(r, g) + S(r, f) + S(r, g).
\end{aligned}$$

From the above inequality we get

$$T(r, F) \leq (k+3)T(r, f) + (k+3)T(r, g) + S(r, f) + S(r, g).$$

On the other hand, from (3.3) we have

$$(n+1)T(r, f) \leq T(r, F) + S(r, f).$$

Combining the last two inequalities we conclude that

$$(n-k-2)T(r, f) \leq (k+3)T(r, g) + S(r, f) + S(r, g).$$

Similarly, we obtain

$$(n-k-2)T(r, g) \leq (k+3)T(r, f) + S(r, f) + S(r, g).$$

Therefore

$$(n-2k-5)[T(r, f) + T(r, g)] \leq S(r, f) + S(r, g),$$

which contradicts the assumption $n > 2k+5$. Hence $\Phi(z) \cdot \Psi(z) \equiv 1$ or $\Phi(z) \equiv \Psi(z)$ by Lemma 2.4.

The rest of the proof repeats the lines of the proof of Theorem 1.5. This completes the proof of Theorem 1.3. □

The proofs of Theorems 1.4 and 1.6 are similar to that of Theorems 1.3 and 1.5, and we omit them here.

Acknowledgements The authors would like to thank the referee for valuable comments and suggestions.

Список литературы

[1] W. K. Hayman, Picard values of meromorphic functions and their derivatives, Ann. of Math., 70, 9 – 42 (1959).

[2] W. K. Hayman, Meromorphic Functions, *Clarendon Press, Oxford*, 1964.

[3] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, *Walter de Gruyter, Berlin-New York*, 1993.

[4] I. Lahiri, A. Sarkar, Uniqueness of a Meromorphic Function and its derivative, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 5(1) (2004), Art 20.

[5] P. Li, C. C. Yang, Some further results on the unique range sets of meromorphic functions, *Kodai. Math. J.* 18 (1995), 437–450.

[6] K. Liu, X. L. Liu and T. B. Cao, Uniqueness and zeros of q-shift difference polynomials, *Proc. Indian Acad. Sci (Math. Sci), Vol.121, No.3, August* 2011, 301–310.

[7] K. Liu and X. G. Qi, Meromorphic solutions of q-shift difference equations, *Ann. Pol. Math.* 355 101(3)(2011), 215–225.

[8] Li. S, Z. S. Gao, Finite order meromorphic solutions of linear difference equations, *Proc. Jpn. Acad. Ser. A. Math. Sci.* 87, 73–76 (1959).

[9] J. F. Xu and H. X. Yi, Uniqueness of entire functions and differental polynomials, *Bulletin of the Korem Mathmatical Society, Vol.44, no.4* (2007), 623–629.

[10] J. F. Xu and X. B. Zhang, The zeros of q-shift difference polynomials of meromorphic functions, *Advances in Difference Equations*(2012), 2012:200.

[11] C. C. Yang and X. H. Hua, Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 22(2) (1997), 395–406.

[12] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 2003.

[13] H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions and a question of C.C. Yang, *Complex Var.* 14 (1990), 169–176.

[14] J. L. Zhang and Risto Korhonen, On the Nevanlinna characteristic of $f(qz)$ and its applications, *J. Math. Anal. Appl.* 369 (2010) 537–544.

[15] J. L. Zhang and L. Z. Yang, Entire solutions of q-difference equations and value distribution of q-difference polynomials, *Annales Polonici Mathematici.* 109.1 (2013) 39–46.

Поступила 13 марта 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 80-84.

THE PROBLEM OF ADDITIONAL SAMPLES FOR SPATIO-TEMPORAL SAMPLING IN $l^2(\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2})$

R. ACESKA, A. PETROSYAN, SUI TANG

Ball State University, USA,
Institute of Mathematics, NAN of Armenia
Vanderbilt University, USA

E-mails: roza.aceska@gmail.com, arm.petros@gmail.com sui.taug@vanderbilt.edu

Abstract.The problem of recovering a time-varying signals from their spatio-temporal samples, often referred by dynamical sampling problem, has been well-studied for one-variable signals. Many examples coming from real-world applications (sampling of air pollution, wireless networks etc.) involve spatial coordinates. We state the problem of spatio-temporal sampling for two-variable functions and consider the problem of finding additional sampling locations for one specific family of kernels.

MSC2010 numbers: 94A20, 40C05.
Keywords: sampling and reconstruction.

1. Introduction

Let V and V', $V \subseteq V'$ be spaces of functions defined on a set X. We assume the initial state of a (linear time-invariant dynamical) system $f_n = A^n f_{n-1}$, is given by an unknown function $f \in V$, i.e. $f_0 = f$, and $A : V' \to V'$ is a known linear operator. At each time instance n ($n = 0, \dots, L-1$) the values (samples) of the evolved function $A^n f$ are measured on some subset $\Omega_n \subseteq X$:

$$y_0 = f \restriction_{\Omega_0},\ y_1 = (Af) \restriction_{\Omega_1},\ \dots\ y_{L-1} = (A^{L-1} f) \restriction_{\Omega_{L-1}}.$$

The main problem in dynamical sampling is to uniquely reconstruct the function $f \in V$ from these samples.

In [1] – [4] the dynamical sampling problem for a single variable function f on domains $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$, $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{R}$ is treated. The assumption is that the evolution operator is given as a repeated convolution with a kernel a: $A_n(f) = a * a * \dots * a * f = a^n f$ for $n = 0, 1, \dots, L-1$ and, at each time n, the evolved state $A_n(f)$ is undersampled at fixed positions Ω:

$$\{f(\Omega),\ a * f(\Omega),\ \cdots,\ (a^{L-1} * f)(\Omega)\},\ \text{ for } \Omega \subset X.$$

In [5] the case when the positions of sampling points are allowed to change at different time levels is considered. If the number of sampling points at any time is constant, a necessary and sufficient condition is found for the existence of positions that allow full recovery of any function by samples taken at those positions. Also, for single measurement per time level, a lower bound on the number of such sampling configurations is computed.

2. Dynamical sampling in $l^2(\mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2})$

Let the domain be the direct sum of two cyclic groups $X = \mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2}$, $d_1, d_2 \in \mathbf{N}^+$ and the evolution operator be given as a convolution with a kernel $a = (a_{k,l})_{(k,l)\in X}$:

$$Af(k,l) = a * f(k,l) = \sum_{(s,p)\in X} a_{s,p} f(k-s, l-p) \quad \text{for all} \quad (k,l) \in X$$

where $(k-s, l-p)$ is understood in terms of summation operations in cyclic groups $\mathbf{Z}_{d_1}$ and $\mathbf{Z}_{d_2}$. We assume that $d_1 = J_1 m_1$, $d_2 = J_2 m_2$, where d_1, d_2 are odd numbers and the initial state f and its temporally evolved states $Af, A^2 f, \ldots, A^{L-1} f$ are sampled on a uniform grid $\Omega = m_1 \mathbf{Z}_{d_1} \times m_2 \mathbf{Z}_{d_2}$. Let $S_{m_1,m_2} = \mathbf{1}_{m_1\mathbf{Z}_{d_1} \times m_2 \mathbf{Z}_{d_2}} f$ be the subsampling operator on $m_1 \mathbf{Z}_{d_1} \times m_2 \mathbf{Z}_{d_2}$. Our objective is to reconstruct f from the samples set

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} y_0 = S_{m_1,m_2} f \\ y_1 = S_{m_1,m_2} A f \\ \quad \vdots \\ y_{L-1} = S_{m_1,m_2} A^{L-1} f. \end{cases}$$

Denote by $\hat{g}$ the discrete Fourier transform (DFT) of $g \in l^2(\mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2})$:

$$\hat{g}(s,p) = \sum_{k=0}^{d_1-1} \sum_{l=0}^{d_2-1} g(s,p) e^{\frac{-i2\pi sk}{d_1}} e^{\frac{-i2\pi pl}{d_2}} \quad \text{for all} \quad (s,p) \in \mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2}.$$

After applying the DFT to both sides of (2.1), and using the fact that the Fourier transform of downsampled signal $S_{m_1,m_2} g$ is

$$(S_{m_1,m_2} g)^{\hat{}}(s,p) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{l=0}^{m_2-1} \hat{g}(s + kJ_1, p + lJ_2),$$

also $(a * f)^{\hat{}}(s,p) = \hat{a}(s,p)\hat{f}(s,p)$, we get

$$\text{(2.2)} \qquad \hat{y}_n(i,j) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{l=0}^{m_2-1} \hat{a}^n (i + kJ_1, j + lJ_2) \hat{f}(i + kJ_1, j + lJ_2)$$

for $(i,j) \in I = \{0, \cdots, J_1 - 1\} \times \{0, \cdots, J_2 - 1\}$ and $n = 0, 1, \ldots, L-1$.

We use the block-matrices

$$A_{l,m_1,m_2}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{a}(i,j+lJ_2) & \hat{a}(i+J_1,j+lJ_2) & \cdots & \hat{a}(i+(m_1-1)J_1,j+lJ_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}^{L-1}(i,j+lJ_2) & \hat{a}^{L-1}(i+J_1,j+lJ_2) & \cdots & \hat{a}^{L-1}(i+(m_1-1)J_1,j+lJ_2) \end{pmatrix},$$

where $l=0,1,...,m_2-1$, and for all $(i,j)\in I$ we define

$$A_{m_1,m_2}(i,j)=[A_{0,m_1m_2}(i,j)\ A_{1,m_1m_2}(i,j)...A_{m_2-1,m_1m_2}(i,j))] \tag{2.3}$$

For every $(i,j)\in I$ put $\bar{\mathbf{y}}(i,j)=[\hat{y}_0(i,j)\ \ \hat{y}_1(i,j)\ \ ...\ \ \hat{y}_{L-1}(i,j)]^T$, and let

$$\bar{\mathbf{f}}(i,j)=\begin{pmatrix} \hat{f}(i,j) \\ \hat{f}(i+J_1,j) \\ \cdots \\ \hat{f}(i+(m_1-1)J_1,j) \\ \hat{f}(i,j+J_2) \\ \cdots \\ \hat{f}(i+(m_1-1)J_1,j+J_2) \\ \cdots \\ \cdots \\ \hat{f}(i,j+(m_2-1)J_2) \\ \cdots \\ \hat{f}(i+(m_1-1)J_1,j+(m_2-1)J_2) \end{pmatrix}.$$

Then the equations (2.2) can be written as

$$\bar{\mathbf{y}}(i,j)=\frac{1}{m_1m_2}A_{m_1,m_2}(i,j)\bar{\mathbf{f}}(i,j). \tag{2.4}$$

Note that, to be able to recover the vector f from (2.1), we need to take samples at least m_1m_2 times and, when $L=m_1m_2$, $A_{m_1,m_2}(i,j)$ becomes a square matrix.

Proposition 2.1. *For $L=m_1m_2$, any $f\in l^2(\mathbf{Z}_{d_1}\times\mathbf{Z}_{d_2})$ can be uniquely recovered from its samples (2.1) if and only if for every $(i,j)\in I$ we have*

$$\det A_{m_1,m_2}(i,j)\neq 0. \tag{2.5}$$

If we put

$$A=\begin{pmatrix} A_{m_1,m_2}(0,0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{m_1,m_2}(1,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m_1,m_2}(J_1-1,J_2-1) \end{pmatrix}$$

then (2.4) is equivalent to

$$\frac{1}{m_1m_2}A\bar{\mathbf{f}}=\bar{\mathbf{y}}, \tag{2.6}$$

where

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{f}(0,0) \\ \hat{f}(1,0) \\ \vdots \\ \hat{f}(J_1-1, J_2-1) \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}(0,0) \\ \hat{y}(1,0) \\ \vdots \\ \hat{y}(J_1-1, J_2-1) \end{pmatrix}.$$

Notice that, $\bar{\mathbf{f}}$ is the column with rearranged Fourier coefficients of f such that they match the order of columns in matrix $\mathcal{A}$.

Proposition 2.2. *Any $f \in l^2(\mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2})$ can be uniquely recovered from its samples (2.1), if an only if the matrix $\mathcal{A}$ is non-singular.*

3. The set of additional sampling points

Because $\mathcal{A}_{m_1,m_2}(i,j)$ is a Vandermonde matrix, it is singular at an $(i,j) \in I$ if and only if

$$\hat{a}\,(i + kJ_1, j + lJ_2) = \hat{a}\,(i + k'J_1, j + l'J_2) \tag{3.1}$$

for some $(k,l), (k',l') \in \{0, \cdots, m_1 - 1\} \times \{0, \cdots, m_2 - 1\}$. Hence, taking samples after the first $m_1 m_2$ measurements is not going to add anything new in terms of recovery. In that case, we need to consider adding extra sampling points to overcome the singularities of $\mathcal{A}_{m_1,m_2}(i,j)$. For functions of one variable the problem of additional samples has been discussed in [1]. If the operator $\mathcal{A}$ in (2.6) is singular, we want to be able to find a set $\Omega_{add} \subset X \setminus (m_1\mathbf{Z}_{d_1} \times m_2\mathbf{Z}_{d_2})$ such that, for the related sampling operator $S_{\Omega_{add}}$, any function can be uniquely recovered from the samples

$$\{S_{\Omega_{add}} f, S_{m_1,m_2} f, \cdots, S_{m_1,m_2} A^{m_1 m_2 - 1} f\}. \tag{3.2}$$

Let $\dim(\ker(\mathcal{A})) = n$. Note that $ker(\mathcal{A}) = \bigoplus_{(i,j)\in I} ker(\mathcal{A}_{m_1,m_2})(i,j)$, hence, if the nullity of matrix $\mathcal{A}_{m_1,m_2}(i,j)$ is $w_{i,j}$, then $n = \sum_{i,j} w_{i,j}$.

The kernel of A is generated by linearly independent vectors $\bar{v}_s$, $s = 1, \ldots, n$ where every $\bar{v}_s$ has exactly two non-zero components, 1 and -1, corresponding to a pair of coinciding columns in $\mathcal{A}_{m_1,m_2}(i,j)$, for an $(i,j) \in I$.

Let $R_{\Omega_{add}}$ be $|\Omega_{add}| \times n$ matrix with rows corresponding to $\{(v_1(k,l), \cdots, v_n(k,l)) : (k,l) \in \Omega_{add}\}$, where v_s is the vector whose rearranged DFT is $\bar{v}_s$. With this notation, the following result holds:

Theorem 3.1. *Every $f \in l^2(\mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2})$ can be uniquely reconstructed from its spatio-temporal samples (3.2) if and only if $rank(R_{\Omega_{add}}) = n$.*

Corollary 3.1. *If for the set Ω_{add} any $f \in l^2(\mathbf{Z}_{d_1} \times \mathbf{Z}_{d_2})$ can be uniquely determined by its samples (3.2), then $|\Omega_{add}| \geq dim(\ker(\mathcal{A}))$.*

4. Quadrantally symmetric kernels

We consider one special class of filters for which we are able to explicitly construct an additional sampling set of possible minimal size.

Definition 4.1. *The matrix $\hat{a}$ is quadrantally symmetric, if*

$$\hat{a}(s,p) = \hat{a}(d_1 - s, p) = \hat{a}(s, d_2 - p) = \hat{a}(d_1 - s, d_2 - p)$$

for all $(s,p) \in \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2}$, and $\hat{a}(s,p) \neq \hat{a}(k,l)$ for any other pairs (k,l) .

If for the kernel a, $\hat{a}$ is quadrantally symmetric, then it can be easily verified that (in particular) $\mathcal{A}_{m_1,m_2}(0,0)$ is singular. In fact, the following lemma holds

Lemma 4.1. *For quandrantally symmetric $\hat{a}$,*

$$dim(ker(\mathcal{A})) = \frac{d_1(m_2-1)}{2} + \frac{d_2(m_1-1)}{2} - \frac{(m_1-1)(m_2-1)}{4}.$$

Theorem 4.1. *Let the DFT $\hat{a}$ of the kernel a be quadrantally symmetric and let*

$$\begin{aligned} \Omega_{add} \;\; &= \;\; \left\{(k,l) : k = 1, \cdots, \frac{m_1-1}{2},\ l \in \mathbb{Z}_{d_2}\right\} \\ &\bigcup \;\; \left\{(k,l) : k \in \mathbb{Z}_{d_1},\ l = 1, \cdots, \frac{m_2-1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Then, any $f \in l^2(\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2})$ can be uniquely recovered from the expanded set of samples

$$\left\{S_{\Omega_{add}} f, S_{m_1,m_2} f, \cdots, S_{m_1,m_2} A^{m_1 m_2 - 1} f\right\}. \tag{4.1}$$

Note that, from Lemma 4.1, the cardinality of Ω_{add} in the previous theorem is equal to $dim(\ker(\mathcal{A}))$ which from Corollary 3.1 is the possible minimal size among the sets of additional sampling points which allow unique recovery of every f from (4.1).

Список литературы

[1] A. Aldroubi, J. Davis, and I. Krishtal, "Dynamical Sampling: Time Space Trade-off", Applied and Computational Harmonic Analysis, 34, no. 3, 495 – 503 (2013).

[2] R. Aceska and S. Tang, "Dynamical Sampling in Hybrid Shift Invariant Spaces", AMS Contemporary Mathematics book series, 626, 149 – 168 (2014).

[3] A. Petrosyan, R. Aceska, A. Aldroubi, J. Davis, "Dynamical sampling in shift-invariant spaces", AMS Contemporary Mathematics book series, 603, 139 – 148 (2013).

[4] A. Aldroubi, C. Cabrelli, U. Molter, S. Tang, Dynamical sampling, // arXiv:1409.8333 [math.CA] (2014).

[5] A. Petrosyan, "Dynamical sampling with moving devices", Proc. of the Yerevan State Univ., Phys. and Math. Sci., 1, pp. 31 – 35 (2015).

Поступила 20 января 2015

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 50, No. 1, 2015

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 50, номер 2, 2015

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 50, No. 2, 2015

Contents