ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2015

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 3-22.

О ПОВЕРХНОСТЯХ БОРА-РИМАНА, II

А. Ф. БЕКНАЗАРЯН, С. А. ГРИГОРЯН

Казанский государственный энергетический университет
E-mails: *abeknazaryan@yahoo.com*; *gsuren@inbox.ru*

Аннотация. В статье вводятся понятия аналитической кривой и эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана. Конструктивным и алгебраическим методами доказывается, что точки поверхности Бора-Римана локально имеют одинаковое число эквивалентных точек.

MSC2010 numbers: 14H30, 22B05, 43A40.

Keywords: поверхности Римана; обобщенный диск; аналитические кривые [1].

1. Введение

В работе продолжается исследование поверхностей Бора-Римана, начатое в статье [1]. Напомним, что поверхности Бора-Римана получаются вследствие накрытий обобщенной плоскости Δ – локально компактного пространства, полученного из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$, где G группа характеров всюду плотной в евклидовой топологии τ подгруппы Γ группы вещественных чисел $\mathbf{R}$. Элементами Δ будут точки (α, r) с $\alpha \in G, r > 0$ и $* = G \times \{0\}$. Отметим, что проколотая обобщенная плоскость $\Delta \backslash \{*\} := \Delta^0$ является группой относительно естественной операции покоординатного умножения. Конструкция пространства Δ восходит к Аренсу и Зингеру [2], и Δ очевидным образом канонически отождествляется с пространством $\mathfrak{C} = \{\alpha r : \alpha \in G, r \in [0, \infty)\}$ – аналогом комплексной плоскости $\mathbf{C}$, состоящим из гомоморфизмов $\alpha r : \Gamma \to \mathbf{C} : a \mapsto \alpha(a) r^a$. Топологией на Δ будет стандартная фактортопология $\tau_\Delta = \{U \subset \Delta : U \in k \times \tau_{[0,\infty)}\}$, где k – топология на G, а $\tau_{[0,\infty)}$ – сужение на $[0, \infty)$ евклидовой топологии τ. Аналогичным образом определяется топология $\tau_{\Delta^0} \cong k \times \tau_{(0,+\infty)}$ на Δ^0. На пространстве Δ развивается теория обобщенных аналитических функций, позволяющая получать новые результаты методами классической теории аналитических функций (см. [3], [4]).

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 12-01-97016 р-поволжье-а

Напомним теперь определения обобщенных аналитической функции и тонкого множества в Δ, с помощью которых определяется поверхность Бора-Римана. Пусть $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Каждый характер $\chi^a, a \in \Gamma_+$, соответствующий элементу $a \in \Gamma_+$, можно расширить до непрерывной функции φ^a на Δ, полагая для $s = \alpha r$

$$\varphi^a(s) = \chi^a(\alpha) r^a$$

с $\chi^a(\alpha) = \alpha(a)$.

Определение 1.1. *Пусть D – открытое множество в Δ. Непрерывная на D функция f называется обобщенно аналитической, если для любого $s \in D$ найдется такая окрестность $U \subset D$, $s \in U$, что сужение f на U равномерно аппроксимируется линейными комбинациями функций $\varphi^a, a \in \Gamma_+$.*

Множество всех обобщенных аналитических функций на D обозначается $\mathcal{O}(D)$.

В следующем определении используется тот факт, что пространство $\Delta^0 = \Delta \backslash \{*\}$ локально имеет структуру вида $V \times W$, $V \subset G_a$, $W \subset \mathbb{C}$, где $G_a = \{\alpha \in G; \alpha(a) = 1\}$ с $a \in \Gamma$ (см. [3], стр. 10-11).

Определение 1.2. *Пусть D – открытое множество в Δ. Замкнутое подмножество $K \subset D$ назовем тонким если выполняются следующие условия:*

(1) *для каждой точки $s \in D, s \neq *$, существуют окрестность $U \subset D$, $U = V \times W$, и функция $f \in \mathcal{O}(U), f \neq 0$ обращающаяся в нуль на $K \cap U$,*
(2) *для каждого $\alpha \in V$ сужение f на $W_\alpha = \{\alpha\} \times W$ не равна тождественно нулю,*
(3) *если $* \in D$, то найдется нетривиальная функция $f \in \mathcal{O}(\Delta_r), \Delta_r \subset D$, обращающаяся в нуль на $\Delta_r \cap K$, где $\Delta_r = \{s \in \Delta;\ |s| \leq r\}$ – обобщенный диск радиуса r в Δ.*

Перейдем теперь к определению поверхности Бора-Римана. Как известно (см. [5], стр. 25) отображение топологических пространств $\pi : Y \to X$ называется (вообще говоря, разветвленным) *накрытием*, если оно непрерывно, открыто и дискретно, то есть для каждого $x \in X$ слой $\pi^{-1}(x)$ – дискретное множество в Y. Отображение топологических пространств $\pi : Y \to X$ называют *неразветвленным накрытием*, если каждая точка $x \in X$ имеет (так называемую ровно накрытую) окрестность U, такую, что

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in A} U_i$$

– дизъюнктное объединение открытых множеств в Y и все сужения $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ – гомеоморфизмы. Если множество A конечно (следовательно, все слои накрытия состоят из одного и того же числа точек), то (неразветвленное) накрытие называется *конечнолистным*, а число точек слоев называется его *числом листов*.

Определение 1.3. *Топологическое пространство X называется поверхностью Бора-Римана над Δ, если существует тонкое множество $K \subset \Delta$ и накрытие $\pi : X \to \Delta$, такие, что сужение π на множество $X^* = X \backslash \pi^{-1}(K)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества $\Delta^* = \Delta \backslash K$.*

Отметим, что вопросы групповых структур на поверхностях Бора-Римана рассмотрены в работах [1], [6] – [8]. Определим теперь понятие плоскости в пространстве Δ. Из плотности подгруппы Γ в $\mathbb{R}$ получаем, что отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G : t \to \alpha_t$, с $\alpha_t(a) = e^{iat}, a \in \Gamma$, инъективно и образ $\alpha(\mathbb{R})$ плотен в G (см. [9], стр. 55). Отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G$ порождает погружение

$$\varphi : \mathbb{C} \to \Delta^0 : z = t + iy \mapsto \varphi_z = \alpha_t e^{-y}.$$

Множество $\Delta^0 = G \times (0, +\infty)$, которое канонически отождествляется с пространством $\{\alpha r : \alpha \in G, r \in (0, \infty)\}$, является локально компактной группой относительно покоординатного умножения с единичным элементом $\alpha_0 = \alpha(0) = \varphi(0)$. Отметим, что образ $\varphi(\mathbb{C})$ плотен как в Δ^0 так и в Δ. Множество вида $\mathbb{C}_s = s\varphi(\mathbb{C})$ будем называть *плоскостью* в Δ^0 проходящей через точку $s \in \Delta^0$; $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_{\varphi(0)} (= \varphi(\mathbb{C}))$. Далее в работе с помощью понятия плоскости в пространстве Δ вводятся понятия аналитической кривой и эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана.

2. Аналитические кривые

Пусть $\mathbb{C}_0$ – определенная выше плоскость в Δ^0, проходящая через единичный элемент α_0 группы Δ^0. Как мы уже видели, множество $\mathbb{C}_0$ есть всюду плотная подгруппа группы Δ^0, являющаяся образом аддитивной группы комплексных чисел $\mathbb{C}$ под действием группового гомоморфизма $\varphi : \mathbb{C} \to \Delta^0$. Так как $\alpha_0 \in \mathbb{C}_0$, то для любого $s \in \Delta^0$ множество $s\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_s$ есть плоскость в Δ^0 проходящая через s. Множество всех плоскостей такого вида распадается на классы смежности группы Δ^0 по подгруппе $\mathbf{C}_0$.

Рассмотрим кривую в Δ^0, то есть отображение $\gamma : I = [0,1] \to \Delta^0$, непрерывное относительно топологии τ_{Δ^0} в Δ^0.

Определение 2.1. *Кривая $\gamma(I) \subset \Delta^0$ называется аналитической кривой, если она полностью содержится в плоскости $\mathbf{C}_{s_0}$, для некоторого $s_0 \in \Delta^0$.*

Пусть $\gamma(I)$ – некоторая аналитическая кривая в Δ^0 лежащая в плоскости $\mathbf{C}_{s_0}$, $s_0 \in \Delta^0$. Тогда для любого $s \in \Delta^0$ кривая $\gamma_s(I)$, $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$, $t \in I$, лежит в плоскости $\mathbf{C}_{ss_0}$ и, следовательно, также является аналитической кривой.

Пусть X – поверхность Бора-Римана над Δ, K – тонкое множество критических точек накрытия $\pi : X \to \Delta$ в Δ. Определим теперь понятие аналитической кривой на подмножестве $X^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$ пространства X, где $\Delta^* = \Delta \backslash K$ (мы считаем, что $* \in K$ и рассматриваем исходное накрытие над $\Delta^0 = \Delta \backslash \{*\}$).

По теореме о поднятии кривой (см. [5], §4), для каждой аналитической кривой $\gamma(I)$ в Δ^* и каждой точки $w \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ существует единственная кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$ с началом в точке w, накрывающая кривую $\gamma(I)$, то есть $\hat{\gamma}(0) = w$ и $\gamma(t) = \pi \circ \hat{\gamma}(t)$, $t \in I$. В этом случае кривая $\hat{\gamma}(I)$ называется поднятием кривой $\gamma(I)$.

Определение 2.2. *Кривая на X^* называется аналитической, если она представляет собой поднятие некоторой аналитической кривой из Δ^*.*

Таким образом, если $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$ – аналитическая кривая, то она является поднятием некоторой аналитической кривой $\gamma(I) \subset \mathbf{C}_s^*$, $s \in \Delta^0$, где $\mathbf{C}_s^* = \mathbf{C}_s \backslash K$.

Введем понятие эквивалентности на слоях $\pi^{-1}(s)$, $s \in \Delta^*$.

Определение 2.3. *Две точки $w_1, w_2 \in \pi^{-1}(s)$ назовем эквивалентными, если существует аналитическая кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$, такая что $w_1 = \hat{\gamma}(0)$ и $w_2 = \hat{\gamma}(1)$. Эквивалентность точек w_1 и w_2 будем обозначать $w_1 \sim w_2$.*

Нетрудно проверить, что если $w_1 \sim w_2$ и $w_2 \sim w_3$ то $w_1 \sim w_3$. Таким образом, множество $\pi^{-1}(s) = \{w_1, ..., w_n\}$ разбивается на конечное число классов эквивалентности. Определим на X^* функцию $\nu : X^* \to \mathbf{Z}_+$, полагая для $w_0 \in X^*$

$$\nu(w_0) = card\{w \in \pi^{-1}(\pi(w_0)) :\ w \sim w_0\}.$$

То есть ν – функция действующая на множестве X^*, которая каждой точке $w_0 \in X^*$ ставит в соответствие число эквивалентных ей точек.

3. Локальное постоянство функции ν

Основным результатом этого параграфа является доказательство локального постоянства считающей функции $\nu : X^* \to \mathbf{Z}_+$.

Сначала изучим поведение функции ν на множестве $\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$, $s \in \Delta^*$. Пусть $s \in \Delta^*$. Обозначим через $\mu(s)$ число классов эквивалентности (в смысле определения 2.3) над s, то есть число классов эквивалентности в множестве $\pi^{-1}(s)$:

$$\mu(s) = card\{C(w) : w \in \pi^{-1}(s)\},$$

где

$$C(w) = \{u \in \pi^{-1}(\pi(w)) : u \sim w\}.$$

Таким образом, C есть отображение действующее на X^*, которое каждой точке $w \in X^*$ ставит в соответствие множество эквивалентных ей точек, и, следовательно, $cardC(w) = \nu(w)$. Перейдем к доказательству локального постоянства функции ν на $\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$, $s \in \Delta^*$.

Лемма 3.1. *Пусть $s \in \Delta^*$. Тогда функция $\mu : \Delta^* \to \mathbf{Z}_+$ постоянна на $\mathbf{C}_s^*$, а функция $\nu : X^* \to \mathbf{Z}_+$ постоянна на компонентах связности прообраза $\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что поскольку непрерывное отображение $\pi_s := \pi|_{\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)} : \pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*) \to \mathbf{C}_s^*$ является накрытием связного и локально линейно связного пространства $\mathbf{C}_s^*$, вообще говоря, несвязной римановой поверхностью $\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$, то его сужение $\pi_s|_L$ на любую компоненту (линейной) связности L поверхности $\pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$ также является накрытием пространства $\mathbf{C}_s^*$. В частности, из конечнолистности накрытия π следует, что число таких компонент конечно и для любого $\sigma \in \mathbf{C}_s^*$ величина $m(L) = card(\pi^{-1}(\sigma) \cap L)$ является постоянной, не зависящей от σ, и равна числу листов накрытия пространства $\mathbf{C}_s^*$ отображением $\pi_s|_L$ (очевидно, сумма всех $m(L)$ по всем компонентам связности L даст n – число листов накрытия π).

Зафиксируем произвольное $\sigma \in \mathbf{C}_s^*$ и рассмотрим разбиение $\pi^{-1}(\sigma) = C(w_1) \cup \ldots \cup C(w_m)$ слоя $\pi^{-1}(\sigma)$ в дизъюнктное объединение классов эквивалентности над σ. По определению эквивалентных точек имеем, что для любого i, $1 \leq i \leq m$ все точки класса $C(w_i)$ соединены аналитическими кривыми, следовательно, для любого i, $1 \leq i \leq m$ класс $C(w_i)$ лежит в некоторой связной компоненте L_i пространства $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$, содержащей точку $w_i \in L_i$, причем $\pi^{-1}(\sigma) \cap L_i = C(w_i)$, потому как все точки слоя $\pi^{-1}(\sigma)$ находящиеся в одной связной компоненте с w_i очевидно эквивалентны w_i. Так как сужение накрытия π_s на каждую компоненту связности поверхности $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$ является накрытием пространства $\mathbb{C}^*_s$, то других компонент связности, кроме L_i, $i = \overline{1,m}$, у $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$ не будет, ибо существование еще одного компонента означало бы, что в $\mathbb{C}^*_s$ есть точки, которые покрываются большее число раз чем σ, что противоречит тому, что π является накрытием. Поэтому m совпадает с числом компонент связности $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$, то есть не зависит от σ. Таким образом, для любого $\sigma \in \mathbb{C}^*_s$ имеем, что $\mu(\sigma) = m$.

Далее, пусть $w \in \pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$ и L – компонента связности $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*_s)$, содержащая $w \in L$. Как показано выше, $C(w) = \pi^{-1}(\pi(w)) \cap L$. Поэтому $\nu(w) = card C(w) = m(L)$. Лемма доказана. □

Для доказательства локального постоянства ν на X^* нам понадобится следующее утверждение, которое можно рассматривать как версию теоремы о накрывающей гомотопии для накрытия $\pi : X^* \to \Delta^*$.

Лемма 3.2. *Пусть даны точка $s \in \Delta^*$ и замкнутая кривая $\gamma \subset \Delta^*$ с началом и концом в точке s: $\gamma(0) = \gamma(1) = s$. Пусть $\pi^{-1}(s) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\hat{\gamma} : I \to X^*$ – кривая в X^* с началом $\hat{\gamma}(0) = x_1$ и концом $\hat{\gamma}(1) = x_2$ с $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(s), x_1 \neq x_2$, накрывающая кривую γ: $\gamma(t) = \pi \circ \hat{\gamma}(t), t \in I$. Пусть, далее, фиксировано разложение*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i, \tag{3.1}$$

прообраза $\pi^{-1}(U)$ открытой ровно накрытой окрестности U точки s в дизъюнктное обведение открытых множеств V_i, гомеоморфных U при отображениях $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ с обратными $\varphi_i = (\pi|_{V_i})^{-1} : U \to V_i$ причем $\varphi_i(s) = x_i, i = \overline{1,n}$, то есть нумерация в (3.1) выбрана так, чтобы $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Тогда существует открытая окрестность W_0 единичного элемента α_0 группы Δ^0, такая что $sW_0 \subset U$ и для любого $\sigma \in W_0$ поднятие $\hat{\gamma}_\sigma : I \to X^*$ кривой $\gamma_\sigma(t) = \sigma\gamma(t), t \in I$ с началом в точке $\varphi_1(\sigma s) \in V_1$ имеет конец в точке $\varphi_2(\sigma s) \in V_2$.

Замечание: Иными словами, если имеется поднятие кривой γ с началом и концом на листах V_1 и V_2 соответственно, то поднятие "возмущенной" кривой γ_σ с началом на листе V_1 также заканчивается на листе V_2.

Доказательство. Воспользуемся стандартной схемой построения $\tilde{\gamma}$ с $\tilde{\gamma}(0) = x_1$, которую будем адаптировать к рассматриваемой ситуации.

Прежде всего, организуем для компакта $\gamma(I)$ открытое покрытие ровно накрытыми множествами специального вида. А именно, установим существование открытой окрестности $W \subset s^{-1}U$ единицы α_0 группы Δ^0, такой что для любого $t \in I$ множество $\gamma(t)W$ ровно накрыто.

Так как открытые ровно накрытые множества составляют базу пространства Δ^*, то существует конечное покрытие компакта $\gamma(I)$ такими множествами:

$$\gamma(I) \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i.$$

Пусть $\{W_j\}_{j \subset J}$ – открытая база локально компактного пространства Δ^0 в точке α_0, такая что для всякого $j \in J$ замыкание $\overline{W}_j$ компактно. Для каждого $j \in J$ определим множество

$$K_j = \{t \in I : \gamma(t)\overline{W}_j \subset U_i \text{ *для некоторого* } i,\ 1 \leq i \leq l\}.$$

Так как все $\overline{W}_j$ замкнуты и каждое из множеств $U_i, i = \overline{1, l}$ открыто, то K_j также открыто, $j \in J$. Далее, имеем что $\gamma(I) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l} U_i$, следовательно для любого $t \in I$ существует i такое что $\gamma(t) \subset U_i$, а так как $\{W_j\}_{j \in J}$ является базой в точке α_0, то существует $j \in J$, такое что $\gamma(t)\overline{W}_j \subset U_i$, откуда следует, что $t \in K_j$. Таким образом, семейство $\{K_j\}_{j \in J}$ образует открытое покрытие компакта I, следовательно мы можем выбрать конечное число индексов $j_1, .., j_d$, таких, что $I \subset \bigcup\limits_{k=1}^{d} K_{j_k}$. Рассмотрим теперь множество $W = \bigcap\limits_{k=1}^{d} W_{j_k} \cap s^{-1}U \subset s^{-1}U$. Так как множества $\{W_{j_k}\}_{k=1}^{d}$ и $s^{-1}U$ являются открытыми окрестностями единичного элемента α_0, то множество W не пусто и тоже является открытой окрестностью α_0. Выберем теперь произвольную точку $t \in I$. Так как $I \subset \bigcup\limits_{k=1}^{d} K_{j_k}$, то существует такое j_m, что $t \in K_{j_m}$, что по определению множества K_{j_m} влечет существование $i, 1 \leq i \leq m$, такого что $\gamma(t)\overline{W}_{j_m} \subset U_i$, откуда, в силу того что все U_i ровно накрыты, следует ровно накрытость множества $\gamma(t)W \subset \gamma(t)\overline{W}_{j_m}$. Таким образом, существование множества W с требуемыми свойствами установлено.

Напомним теперь основные элементы конструкции поднятия кривой. Открытые множества $\gamma(t)W, t \in I$, очевидно, покрывают компакт $\gamma(I)$, следовательно, существует конечное число точек $\{t'_k\}_{k=1}^m$ таких, что множества $\gamma(t'_k)W, k = \overline{1,m}$ покрывают $\gamma(I)$ и пересечение "соседних" множеств $\gamma(t'_k)W \cap \gamma(t'_{k+1})W$, $k = \overline{1,m-1}$ непусто, причем ясно, что можно выбрать $\{t'_k\}_{k=1}^m$ такими, чтобы выполнялось $t'_1 = 0, t'_m = 1$. Тогда найдется разбиение отрезка $I = [0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$, такое что для любого k, $k \in \overline{1,m}$ образ $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ целиком содержится в открытом, ровно накрытом множестве $\gamma(t'_k)W$. Ясно что $\gamma(t_k) \in \gamma(t'_k)W \cap \gamma(t'_{k+1})W$, $k \in \overline{1,m-1}$. Обозначив $\gamma_k := \gamma(t'_k)$, $k = \overline{1,m}$, для прообраза открытого, ровно накрытого множества $\gamma_k W$ получим представление

$$\pi^{-1}(\gamma_k W) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i^k,$$

причем для каждого $i, i = \overline{1,n}$, сужение $\pi|_{V_i^k} : V_i^k \to \gamma_k W$ гомеоморфизм с обратным $\varphi_i^k := (\pi|_{V_i^k})^{-1} : \gamma_k W \to V_i^k$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$. Перейдем к поэтапному построению кривой $\hat{\gamma}$. Имеем, что $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$, следовательно, на начальном отрезке $[t_0, t_1] = [0, t_1] \subset I$ имеются n возможностей построения начальной части кривой $\hat{\gamma}$, а именно: $\hat{\gamma}([0,t_1]) = \varphi_i^1 \circ \gamma([0,t_1])$, $i = \overline{1,n}$. Поскольку для поднятия $\hat{\gamma}$ имеем $\hat{\gamma}(0) = x_1$, то мы выбираем то i для которого $\varphi_i^1(\gamma(0)) = x_1$. Обозначим выбранное i через i_1. Построение непрерывной кривой $\hat{\gamma}$ продолжается путем сцепления непрерывных на $[t_{k-1}, t_k]$ кусков $\hat{\gamma} = \varphi_{i_k}^k \circ \gamma, k = \overline{1,m}$ в точках t_k за счет подбора следующего $\varphi_{i_k}^k$ по предыдущему $\varphi_{i_{k-1}}^{k-1}$ так, чтобы $\varphi_{i_k}^k(b_{k-1}) = \varphi_{i_{k-1}}^{k-1}(b_{k-1})$, где $b_{k-1} = \gamma(t_{k-1}) \in \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$. Цепочка гомеоморфизмов

$$\varphi_{i_k}^k : \gamma_k W \to V_{i_k}^k$$

обеспечивает непрерывность кривой $\hat{\gamma}$ на последовательности листов $V_{i_k}^k, k = \overline{1,m}$ на которых она лежит. Так как кривая $\hat{\gamma}, \hat{\gamma}(0) = x_1$ однозначно определяется по γ (единственность поднятия кривой), то она не зависит от представляющей ее конструкции, которую мы выбираем согласуясь с условиями леммы.

Далее, имеем что $\gamma_1 = \gamma(t'_1) = \gamma(0) = s = \gamma(1) = \gamma(t'_m) = \gamma_m$, следовательно, $\gamma_1 W = sW \subset U$ и полученный первым гомеоморфизм $\varphi_{i_1}^1 : sW \to V_{i_1}^1$ удовлетворяет условию $\varphi_{i_1}^1(\gamma(0)) = x_1 \in V_1$, следовательно $\varphi_{i_1}^1$ является сужением отображения $\varphi_1 : U \to V_1$ на множество sW: $\varphi_{i_1}^1 = \varphi_1|_{sW}$ (потому как и

φ_1 и $\varphi^1_{i_1}$ являются гомеоморфизмами, локально обратными к π). Тогда из данного в условии леммы соглашения о нумерации ($\hat{\gamma}(1) = x_2 \in V_2$) аналогичными рассуждениями получаем, что $\varphi^m_{i_m} = \varphi_2|_{sW}$.

Итак, мы представили построение поднятия кривой в нашем случае. Задача состоит в том, чтобы показать, что при малом возмущении начальной точки $x_1 \in V_1$ соответствующая (поднятая) кривая не сможет соскользнуть с указанных листов, и, следовательно, ее конец будет лежать на V_2. Для решения этой задачи обоснуем существование множеств U_k и $\tilde{U}_k$ со специальными свойствами.

Во первых, для любого k, $1 \le k \le m$ существует открытая окрестность U_k единицы α_0, такая, что $U_k\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma_k W$, доказательство которого следует из компактности $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma_k W$ и открытости $\gamma_k W$. Во вторых, для любого k, $2 \le k \le m$, найдется окрестность $\tilde{U}_k$ единицы α_0, такая, что $\varphi^k_{i_k}(\beta) = \varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(\beta)$ при всех $\beta \in b_{k-1}\tilde{U}_k$. В самом деле, имеем, что $b_{k-1} = \gamma(t_{k-1}) \in \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$ и $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(b_{k-1}) = \varphi^k_{i_k}(b_{k-1})$. Так как $\gamma_{k-1}W$ и $\gamma_k W$ открыты, то множество $\gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W \ni b_{k-1}$ также открыто, следовательно существует окрестность $\tilde{U}_k$ единичного элемента α_0, такая что $b_{k-1}\tilde{U}_k \subset \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$, откуда следует равенство $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(\beta) = \varphi^k_{i_k}(\beta), \beta \in b_{k-1}\tilde{U}_k$, потому как $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}$ и $\varphi^k_{i_k}$ являются гомеоморфизмами, локально обратными к π.

Наконец, докажем, что при выполнении установленных выше условий, для любого σ из открытой окрестности $W_0 = \bigcap\limits_{k=2}^{m} (U_k \cap \tilde{U}_k) \cap U_1$ единицы α_0 поднятие $\hat{\gamma}_\sigma$ кривой γ_σ с началом в точке $\varphi_1(\sigma s)$ имеет конец в точке $\varphi_2(\sigma s)$. Для этого рассмотрим отображение

$$v(t) = \varphi^k_{i_k}(\sigma\gamma(t)),\ t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1, m},$$

и покажем, что v есть непрерывная кривая, совпадающая с $\hat{\gamma}_\sigma$. Ясно, что достаточно доказать непрерывность v в точках $t_k, k = \overline{1, m-1}$. Имеем

$$v(t) = \begin{cases} \varphi^k_{i_k}(\sigma\gamma(t)), t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(\sigma\gamma(t)), t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

Так как $\sigma \in W_0 \subset \tilde{U}_{k+1}$, то $b_k\sigma \in b_k\tilde{U}_{k+1}$, следовательно $\varphi^k_{i_k}(b_k\sigma) = \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(b_k\sigma)$, то есть $\varphi^k_{i_k}(\gamma(t_k)\sigma)) = \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(\gamma(t_k)\sigma)$ и тем самым доказана непрерывность v в t_k, то есть $v(t), t \in I$ – непрерывная кривая. Так как каждый гомеоморфизм $\varphi^k_{i_k}$, $k = \overline{1, m}$, в своей области определения является обратным к π, то из определения отображения v получаем $\pi \circ v(t) = \sigma\gamma(t) = \gamma_\sigma(t), t \in I$, следовательно, v является поднятием кривой γ_σ. Имеем, далее, $v(0) = \varphi^1_{i_1}(\sigma\gamma(0)) = \varphi^1_{i_1}(\sigma s)$. Так как

$\sigma \in W_0 \subset U_m$, то из определения множества U_m получаем, что $\sigma\gamma([t_{m-1}, t_m]) \subset \gamma_m W = sW$, то есть, в частности, $\sigma s = \sigma\gamma(t_m) \in sW$, откуда, пользуясь тем, что $\varphi^1_{i_1} = \varphi_1|_{sW}$, получаем $v(0) = \varphi^1_{i_1}(\sigma s) = \varphi_1(\sigma s)$. Таким образом v действительно есть поднятая кривая $\hat{\gamma}_\sigma$ о которой говорится в лемме. Покажем теперь, что конец кривой $\hat{\gamma}_\sigma$ лежит на листе V_2. Имеем $\hat{\gamma}_\sigma(1) = v(1) = \varphi^m_{i_m}(\sigma\gamma(1)) = \varphi^m_{i_m}(\sigma s)$, и, так как $\sigma s \in sW$ и $\varphi^m_{i_m} = \varphi_2|_{sW}$, получаем, что $\hat{\gamma}_\sigma(1) = \varphi^m_{i_m}(\sigma s) = \varphi_2(\sigma s) \in V_2$. Лемма 3.2 доказана. □

Следствие 3.1. *У каждого элемента $w \in X^*$ найдется такая окрестность V, что для любого $z \in V$ имеет место неравенство $\nu(z) \geq \nu(w)$.*

Доказательство. Пусть $w \in X^*$ и $\pi(w) = s \in \Delta^*$. Пусть U ровно накрытая окрестность точки s, такая что $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ и все $\pi : V_i \to U$ – гомеоморфизмы, с обратными $\varphi_i : U \to V_i$. Предположим, что $w \in V_1$. Выберем некоторое $u \neq w$ из $C(w)$. Тогда $\pi(u) = s$ и из гомеоморфности π на каждом V_i получаем что $u \notin V_1$. Пусть, скажем, $u \in V_2$. Так как $u \in C(w)$ то по определению множества $C(w)$ существует аналитическая кривая с началом и концом в w и u соответственно, то есть существует аналитическая кривая $\gamma \subset \Delta^*$ с $\gamma(0) = \gamma(1) = s$, такая, что для ее поднятия $\hat{\gamma} \subset X^*$ имеем $\hat{\gamma}(0) = w, \hat{\gamma}(1) = u$. Пусть теперь $W_0^{(2)}$ есть множество W_0 из предыдущей леммы для рассматриваемого случая (мы добавляем индекс 2 так как предполагаем, что $u \in V_2$). Обозначим $V_1^{(2)} = V_1 \cap \pi^{-1}(sW_0^{(2)}) = \varphi_1(sW_0^{(2)})$. Тогда, согласно предыдущей лемме, для любого $x \in V_1^{(2)}$ существует аналитическая кривая с началом в точке x и концом в множестве $\varphi_2(sW_0^{(2)}) \subset V_2$. Следовательно, точки из $V_1^{(2)}$ имеют на листе V_2 столько же эквивалентных точек сколько w(а именно, по одной эквивалентной точке). Далее поочередно рассматривая листы $V_3, ..., V_n$ и учитывая, что w может иметь эквивалентные точки только на листах $V_i, i = \overline{2, n}$ (причем не более одной эквивалентной точки на каждом листе), получаем множества $V_1^{(3)}, ..., V_1^{(n)}$. Определив теперь $V = \bigcap_{i=2}^{n} V_1^{(i)}$ получим множество V, которое, очевидно, будет удовлетворять требованию следствия. Следствие 3.1 доказано. □

Теперь все готово для формулировки и доказательства основного утверждения.

Теорема 3.1. *Функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на X^*.*

Доказательство. Сначала докажем, что функция $\mu : \Delta^* \to \mathbf{Z}_+$ является постоянной на Δ^*. Имеем $\mu(\sigma) = card\{C(w),\ w \in \pi^{-1}(\sigma)\}$. Согласно следствию 3.1 для $w_1 \in \pi^{-1}(\sigma)$ существует окрестность V_1 такая что $\nu(z) \geq \nu(w_1), z \in V_1$, то есть у точки z число эквивалентных точек не меньше чем у w_1. Пусть $\pi^{-1}(\sigma) = (w_1, ..., w_n)$ и пусть $V_1, ..., V_n$ - соответствующие окрестности этих точек. Определим $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi(V_i)$. Предположим, что $\xi \in U$ и рассмотрим $\mu(\xi) = card\{C(z),\ z \in \pi^{-1}(\xi)\}$. Выберем произвольное $z \in \pi^{-1}(\xi)$ и предположим что $z \in V_i$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Тогда по определению множества V_i имеем, что у точки $z \in \pi^{-1}(\xi)$ число эквивалентных точек не меньше чем у $w_i \in \pi^{-1}(\sigma)$: $\nu(z) \geq \nu(w_i)$, и, следовательно, число классов эквивалентности точек из $\pi^{-1}(\xi)$ не больше числа классов эквивалентности точек из $\pi^{-1}(\sigma)$, то есть $\mu(\xi) \leq \mu(\sigma)$.

Итак, для любого $\sigma \in \Delta^*$ существует окрестность U точки σ, такая что

$$\mu(\xi) \leq \mu(\sigma), \xi \in U. \tag{3.2}$$

Положим $\mu = \min_{\sigma \in \Delta^*} \mu(\sigma)$ и $D = \{\sigma \in \Delta^* : \mu(\sigma) = \mu\}$. Так как функция μ принимает значения из $\mathbf{Z}_+$, то, очевидно, $D \neq \emptyset$. Покажем, что $D = \Delta^*$, то есть $\mu(s) = \mu$ на Δ^*.

Зафиксируем произвольное $s \in \Delta^*$ и любое $\sigma \in D$. Тогда, согласно (3.2), найдется окрестность $U \ni \sigma$, такая, что $\mu|_U \leq \mu(\sigma) = \mu \leq \mu(s)$. Поскольку множество $\mathbf{C}^*_s$ всюду плотно в Δ^*, то $U \cap \mathbf{C}^*_s \neq \emptyset$, и, по лемме 3.1 получаем, что

$$\mu|_{\mathbf{C}^*_s} = \mu|_{U \cap \mathbf{C}^*_s} \leq \mu(\sigma) = \mu \leq \mu(s) = \mu|_{\mathbf{C}^*_s},$$

то есть $\mu(s) = \mu(\sigma) = \mu$, и, следовательно, $s \in D$. Таким образом, $D = \Delta^*$ и функция μ постоянна на Δ^*.

Постоянство μ на Δ^* немедленно влечет за собой равенство $\nu(z) = \nu(w)$ для любого z из окрестности V точки w (см. Следствие 3.1), так как противное – существование $z \in V$ с $\nu(z) > \nu(w)$ – приводит, согласно первой части доказательства, к строгому неравенству $\mu(\pi(z)) < \mu(\pi(w))$, что является противоречием. Тем самым показано локальное постоянство функции ν на X^*. Теорема 3.1 доказана. $\square$

4. Локальное постоянство функции ν: алгебраическая версия

В предыдущей части было показано, что из Следствия 3.1 следует локальное постоянство функции ν на X^* (Теорема 3.1), причем Следствие 3.1 было получено путем конструктивного поднятия кривых из Δ^* (Лемма 3.2). В данной части алгебраическим методом доказывается результат Следствия 3.1 для алгебраической версии теории. Вначале докажем один технический результат.

Лемма 4.1. *Пусть K – компактное множество и $p(t,x) = x^n + g_1(t)x^{n-1} + ... + g_{n-1}(t)x + g_n(t)$, $t \in K$ полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1,n}$. Пусть, далее, функция $f \in C(K)$ удовлетворяет условию $p(t, f(t)) = 0$, $t \in K$ и пусть $C = \max_{1\leq i\leq n}\{||g_i||\}$. Тогда $||f|| := \sup_{t\in K}|f(t)| < 1 + C$.*

Доказательство. Если $C = 0$, то все g_i равны 0. Это означает, что $p(x,t) = x^n$, откуда $f = 0$. Таким образом, $||f|| = 0 < 1 + 0 = 1 + C$. При $C > 0$ и $||f|| \leq 1$ заключение тривиально: $||f|| < 1 + C$.

Пусть теперь $C > 0$ и $||f|| > 1$. Тогда существует $t_0 \in K$, такое что $|f(t_0)| = ||f|| > 1$. Так как $f(t_0)^n = -g_1(t_0)f(t_0)^{n-1} - ... - g_n(t_0)$, то

$$|f(t_0)| \leq C(1 + \frac{1}{|f(t_0)|} + ... + \frac{1}{|f(t_0)|^{n-1}}) < C\frac{|f(t_0)|}{|f(t_0)| - 1},$$

следовательно $||f|| = |f(t_0)| < 1 + C$. Лемма 4.1 доказана. □

Отметим, что как показывает пример многочлена $q(x) = x^2 - C$ при достаточно малом C ($C < 1/4$), только что установленную оценку нельзя улучшить до $||f|| \leq 2C$. Следующий результат, по видимому, относится к математическому фольклору, поэтому мы приведем его с полным доказательством.

Лемма 4.2. *Пусть $K = [0,1]$, $p(t,x) = x^n + g_1(t)x^{n-1} + ... + g_n(t)$ – полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, и с дискриминантом всюду отличным от нуля: $d_p(t) \neq 0, t \in K$. Тогда существуют ровно n функций $h_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, попарно не совпадающих ни в одной точке K и представляющих множество решений уравнения $p(t,x) = 0$ над K, т.е.*

$$p(t, h_i(t)) = 0, t \in K, i = \overline{1,n}.$$

Замечание: Отметим, что поскольку для каждой точки $t_0 \in K$ уравнение $p(t_0, x) = 0$ имеет ровно n решений, то попарно различные значения $h_i(t_0), i =$

$\overline{1,n}$, будут представлять собой все решения уравнения $p(t_0,x)=0$, то есть значениями $\{h_i(t)\}_{i=1}^n$, $t\in K$, исчерпывается все множество решений уравнений $p(t,x)=0$, $t\in K$. *Доказательство леммы 4.2.* Определим множество

$$K_p=\{(t,x)\in K\times\mathbb{C}:p(t,x)=0\}.$$

Нам нужно найти непрерывные, попарно несовпадающие функции $h_i\in C(K), i=\overline{1,n}$, такие что

$$K_p=\{(t,x)\in K\times\mathbb{C}:p(t,x)=0\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{(t,h_i(t)):t\in K\}.$$

Проекция $\pi:K_p\to K:(t,x)\mapsto t$ на первую координату по теореме Гурвица-Руше будет неразветвленным n-листным накрытием, а в силу непрерывности функций $g_i\in C(K), i=\overline{1,n}$ проекция на вторую координату $\eta:K_p\to\mathbb{C}:(t,x)\mapsto x$ будет непрерывным отображением.

Рассмотрим кривую $u:I\to K$, $u(t)=t$, $t\in I(=K)$ и слой $\pi^{-1}(0)=\{(0,x_1),...,(0,x_n)\}$ над точкой $0\in K$. По теореме о поднятии кривой существуют n поднятий $\hat{u}_i:I\to K_p, i=\overline{1,n}$, кривой u, таких что $u=\pi\circ\hat{u}_i$ и $\hat{u}_i(0)=(0,x_i)$, $i=\overline{1,n}$. Положим $h_i=\eta\circ\hat{u}_i$, $i=\overline{1,n}$, и покажем, что это и есть требуемые функции. Прежде всего заметим, что функции h_i непрерывны как суперпозиции непрерывных функций η и $\hat{u}_i$, $i=\overline{1,n}$. Далее, по определению отображения η имеем, что $h_i(t)$ – вторая "координата" точки $\hat{u}_i(t)$. Из соотношения $\pi\circ\hat{u}_i(t)=u(t)=t$ получаем, что первой "координатой" точки $\hat{u}_i(t)$ является t. Таким образом,

$$\hat{u}_i(t)=(t,h_i(t)),t\in K, \tag{4.1}$$

то есть $(t,h_i(t))\in K_p, t\in K, i=\overline{1,n}$.

Покажем теперь, что для любого $t\in K$ точки $h_i(t)$ попарно различны. Предположим противное, то есть существование элемента $t_0\subset K$ и индексов $i\neq j$, таких, что $h_i(t_0)=h_j(t_0)$.

Рассмотрим множество $T=\{t\in K: h_i(t)=h_j(t)\}$. Согласно сделанному предположению T - не пусто. Из непрерывности функций h_i и h_j следует, что T является замкнутым множеством. Покажем, что T также открыто в K.

Пусть $t'\in T$. Тогда в силу (4.1) имеем, что $\hat{u}_i(t')=\hat{u}_j(t')$. Так как π – накрытие, то существует открытое множество $U\ni\pi(\hat{u}_i(t'))=t'$ в K, для которого найдется открытое множество $V\ni\hat{u}_i(t')=\hat{u}_j(t')$ в K_p, такое что $\pi:V\to U$ –

гомеоморфизм, а значит, биекция на V. С другой стороны, так как $\hat{u}_i, \hat{u}_j$ непрерывны, то существует $\delta > 0$, такое, что из $t \in K$ и $|t - t'| < \delta$ следует, что $\hat{u}_i(t)$ и $\hat{u}_j(t)$ принадлежат V. Так как на множестве V π является биекцией, то соотношение $\pi(\hat{u}_i(t)) = t = \pi(\hat{u}_j(t))$ приводит к тому, что при $t \in K, |t - t'| < \delta$ имеет место равенство поднятий

$$\hat{u}_i(t) = \hat{u}_j(t), \tag{4.2}$$

то есть $h_i(t) = h_j(t)$, откуда следует, что $K \cap (t' - \delta, t' + \delta) \subset T$, то есть множество T открыто. Так как K связно, получаем что $T = K$. Это означает, что равенство 4.2 выполняется на всем K, что заведомо невозможно, ибо $\hat{u}_i(0) = (0, x_i) \neq (0, x_j) = \hat{u}_j(0)$. Итак, установлено попарное различие точек $h_i(t), i = \overline{1, n}$ на $t \in K$. Лемма 4.2 доказана. □

Отметим, что последнее доказанное в лемме утверждение можно переформулировать как несуществование непрерывной на K функции $g \neq h_i, i = \overline{1, n}$ в каждой точке из K совпадающей с одной из функций h_i. Нашим основным инструментом в этой части работы является следующая лемма.

Лемма 4.3. *В условиях предыдущей леммы для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такое что для всякого набора функций $\varepsilon_i \in C(K), \varepsilon_i : K \to \mathbf{C}$ с $\|\varepsilon_i\| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$ найдутся n функций $\tilde{h}_i \in B_\delta(h_i), i = \overline{1, n}$ для которых при каждом $t \in K$ точки $\tilde{h}_i(t), i = \overline{1, n}$, представляют собой n различных нулей "возмущенного" полинома*

$$p_\varepsilon(t, x) := x^n + \sum_{i=1}^{n} (g_i(t) + \varepsilon_i(t)) x^{n-k}. \tag{4.3}$$

Здесь $B_\delta(h) = \{f \in C(K) : \|f - h\| < \delta\}$.

Доказательство. Вначале установим существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ любой полином вида (4.3) с $\|\varepsilon_i\| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$, удовлетворяет условиям леммы 4.2, то есть имеет всюду отличный от нуля дискриминант на K. Для этого воспользуемся известной интерпретацией $\mathbf{C}^n$ как пространства коэффициентов полиномов над полем $\mathbf{C}$. Пусть $D = \{w \in \mathbf{C}^n : d(w) = 0\}$ – множество нулей дискриминантного отображения $d : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, сопостовляющего вектору $w \in \mathbf{C}^n$ коэффициентов полинома значение $d(w)$ его дискриминанта.

Рассмотрим отображение

$$G : K \to \mathbf{C}^n : t \mapsto (g_1(t), ..., g_n(t)) \cong x^n + g_1(t) x^{n-1} + ... + g_n(t) = p(t, x).$$

Тогда образ $G(K) = g_1(K) \times ... \times g_n(K)$ есть компакт, и, по условию, $G(K) \cap D = \varnothing$ так как дискриминант полинома $p(t,x)$ отличен от нуля всюду на K. Обозначим через $d_0 = d(G(K), D)$ – расстояние между множествами $G(K)$ и D. Так как эти множества замкнуты, а первое из них, кроме того, компактно, то $d_0 > 0$. Покажем, что в качестве ε_0 можно взять постоянную $d_0/2\sqrt{n}$. Действительно, для любого набора $\tilde{G} = (\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n)$ с $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon \le \varepsilon_0, i = \overline{1,n}$, расстояние $d(\tilde{G}(t), G(t)) < \varepsilon_0\sqrt{n} = d_0/2$ для любого $t \in K$. В силу неравенства $|d(G(t), D) - d(\tilde{G}(t), D)| < d(G(t), \tilde{G}(t)), t \in K$ (см. напр. [10], стр. 377), отсюда следует, что для любого $t \in K$ имеет место цепочка неравенств $d(\tilde{G}(t), D) \ge d(G(t), D) - d(\tilde{G}(t), G(t)) > d_0 - d_0/2 > 0$, которая и обеспечивает выполнение утверждаемого условия: $\tilde{G}(K) \cap D = \varnothing$.

Таким образом, при установленных выше условиях, для любого полинома вида (4.3) в силу леммы 4.2 существуют n функций $\tilde{h}_i, i = \overline{1,n}$, представляющих его нули при каждом фиксированном $t \in K$, с $\varepsilon_i = \tilde{g}_i - g_i$. Покажем теперь существование $\varepsilon > 0$, такого что при $||\varepsilon_i|| < \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$ непрерывные решения уравнений $p_\varepsilon(t,x) = 0$ содержатся в $B_\delta(h_i), i = \overline{1,n}$.

Во первых, для любого выбора $\tilde{G}$, с $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon_0$ имеем $||\tilde{g}_i|| < ||g_i|| + \varepsilon_0, i = \overline{1,n}$. Тогда $\tilde{C} := \max_i ||\tilde{g}_i|| < C + \varepsilon_0$, где $C = \max_i ||g_i||$. По лемме 4.1 будем иметь $||\tilde{h}_i|| < 1 + \tilde{C} < 1 + C + \varepsilon_0$, для всех $i = 1, .., n$.

Пусть, далее, $\delta_0 = \min\limits_{1 \le i < j \le n} \inf\limits_{t \in K} |h_i(t) - h_j(t)|$. По лемме 4.2 имеем, что $\delta_0 > 0$. Так как при $\delta_1 < \delta_2$ очевидно $B_{\delta_1}(h) \subset B_{\delta_2}(h)$, то, не умаляя общности, можем предположить, что наше произвольное δ удовлетворяет условию $\delta < \delta_0/2$. Тогда, по теореме Гурвица-Руше, существует постоянная $\varepsilon_1 > 0$, такая, что при $|b_i - g_i(0)| < \varepsilon_1, i = \overline{1,n}$ полином $P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + .. + b_n$ в каждом из кругов $|x - h_i(0)| < \delta, i = \overline{1,n}$, имеет ровно по одному нулю (кратности 1).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ со следующими условиями:

а) $\varepsilon < \varepsilon_0$; тогда, по определению ε_0, из $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon$ следует существование попарно несовпадающих функций $\tilde{h}_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, представляющих собой нули полинома (4.3),

б) $\varepsilon < \varepsilon_1$; тогда, по определению ε_1, если $|\tilde{g}_i(0) - g_i(0)| < \varepsilon$, то можно так перенумеровать $\tilde{h}_i$, чтобы $|\tilde{h}_i(0) - h_i(0)| < \delta, i = \overline{1,n}$, и наконец,

в) $\varepsilon[(1 + C + \varepsilon_0)^n - 1]/(C + \varepsilon_0) < \delta^n$; тогда для любого $i \in \{1, .., n\}$, пользуясь равенством $p_\varepsilon(t, \tilde{h}_i(t)) = 0$ получим, что

$$|p(t,\tilde{h}_i(t))| = |p(t,\tilde{h}_i(t)) - p_\varepsilon(t,\tilde{h}_i(t))| =$$

$$= |(\tilde{h}_i(t)^n + g_i(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + .. + g_n(t)) - (\tilde{h}_i(t)^n + \bar{g}_i(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + .. + \bar{g}_n(t))| =$$

$$= |\varepsilon_1(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + ... + \varepsilon_n(t)| < \delta^n \tag{4.4}$$

на K при $||\varepsilon_i|| < \varepsilon$, где $\varepsilon_i = \bar{g}_i - g_i$.

Покажем теперь, что для таких ε выполняется импликация

$$||\varepsilon_i|| < \varepsilon \Rightarrow \tilde{h}_i \in B_\delta(h_i), \ i = 1, ..., n.$$

Выберем произвольное $i_0 \in \{1, ..., n\}$ и рассмотрим величину

$$t_0 := \sup\{\tau \in [0,1] : |h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)| < \delta \text{ при } t \in [0,\tau]\}.$$

Число $t_0 > 0$, так как модуль $r(t) = |h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)|$ непрерывен и строго меньше δ при $t = 0$ (см. п. (б)). Очевидно, $t_0 \leq 1$. Предположим, что $t_0 < 1$. По определению t_0 имеем $r(t) < \delta$ при $t \in [0, t_0)$. Далее, имеем что $r(t_0) = \delta$. Действительно, предположение $r(t) < \delta$ противоречит точности верхней грани $t_0 < 1$, а $r(t) > \delta$ – непрерывности функции $r(t)$. Наконец, для любого $j \neq i_0$ пользуясь определением δ_0 получаем

$$|h_j(t_0) - \tilde{h}_{i_0}(t_0)| = |h_j(t_0) - h_{i_0}(t_0) + h_{i_0}(t_0) - \tilde{h}_{i_0}(t_0)| \geq$$

$$\geq |h_j(t_0) - h_{i_0}(t_0)| - r(t_0) \geq \delta_0 - \delta > 2\delta - \delta = \delta. \tag{4.5}$$

Так как пары $(t_0, h_j(t_0)), j = \overline{1,n}$, являются корнями полинома $p(t,x)$, то можем записать $p(t_0,x) = \prod\limits_{j=1}^{n}(x - h_j(t_0))$, откуда, в силу (4.4) и (4.5), получаем

$$\delta^n > |p(t_0,\tilde{h}_{i_0}(t_0))| = r(t_0) \prod_{j=1, j\neq i_0}^{n} |\tilde{h}_{i_0}(t_0) - h_j(t_0)| > \delta\delta^{n-1} = \delta^n. \tag{4.6}$$

Полученное противоречие показывает, что t_0 должно быть единицей.

Однако, подстановка $t_0 = 1$ в (4.5) и (4.6) демонстрирует также и противоречивость предположения $r(1) = \delta$. Таким образом, $|h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)| < \delta$ при $t \in K$, а поскольку функции h_{i_0} и $\tilde{h}_{i_0}$ непрерывны, то $||\tilde{h}_{i_0} - h_{i_0}|| < \delta$, то есть $\tilde{h}_{i_0} \in B_\delta(h_{i_0})$. В силу произвольности i_0 лемма 4.3 доказана. □

Перейдем теперь к рассмотрению алгебраической версии теории развиваемой в работе. Пусть

$$p(s,x) = x^n + f_1(s)x^{n-1} + ... + f_n(s)$$

– полином с обобщенными аналитическими коэффициентами $f_i \in \mathcal{O}(\Delta^0), i = \overline{1,n}$ и дискриминантом d_p. Тогда, очевидно, d_p также является обобщенной аналитической функцией: $d_p \in \mathcal{O}(\Delta^0)$. Обозначим $N_p = N(d_p)$ – множество нулей дискриминанта d_p. Тогда либо N_p нигде не плотно (дискретно) в Δ^0, либо $N_p = \Delta^0$. Мы предполагаем что имеет место первое: N_p нигде не плотно в Δ^0, и нуль множество N_p будет играть роль тонкого множества. Рассмотрим пространство

$$\Delta_p^0 = \{(s,x) \in \Delta^0 \times \mathbf{C} : p(s,x) = 0\},$$

и накрытие

$$\pi : \Delta_p^0 \to \Delta^0 : (s,x) \mapsto s.$$

Сужение $\pi|_{\Delta_p^*} : \Delta_p^* = \pi^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ будет неразветвленным накрытием над $\Delta^* = \Delta^0 \setminus N_p$, которое мы также будем обозначать через π. Таким образом, Δ_p^0 становится поверхностью Бора-Римана. Обозначим $\mathbf{C}_s^* = \mathbf{C}_s \cap \Delta^* = \mathbf{C}_s \setminus N_p$, $\mathbf{C}_{p,s}^* = \pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*)$ и $\mathbf{C}_{p,s} = \pi^{-1}(\mathbf{C}_s)$. Напомним, что кривая $u : I \to \Delta^0$ называется аналитической, если $u(I) \subset \mathbf{C}_s$ для некоторого $s \in \Delta^0$ (это s можно взять равным $u(0)$).

Определение 4.1. *Кривая $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ в Δ_p^* называется аналитической, если аналитической будет ее проекция $u = \pi \circ \hat{u}$ при накрытии π.*

Лемма 4.4. *Следующие два условия эквивалентны:*

(1) $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ – *аналитическая кривая, и*
(2) *существует $s \in \Delta^0$, такое что $\hat{u}(I) \subset \mathbf{C}_{p,s}^*$.*

Доказательство. Предположим $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ – аналитическая кривая. Тогда существуют $s \in \Delta^0$ и кривая $u(I) \subset \mathbf{C}_s$, такая что $u = \pi \circ \hat{u}$. Так как $\hat{u}(I) \subset \Delta_p^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$ то $u(I) = \pi \circ \hat{u}(I) \subset \Delta^*$, то есть $u(I) \subset \mathbf{C}_s \cap \Delta^* = \mathbf{C}_s^*$ следовательно $\hat{u}(I) \subset \pi^{-1}(\mathbf{C}_s^*) = \mathbf{C}_{p,s}^*$.

Теперь предположим, что существует $s \in \Delta^0$, такое что $\hat{u}(I) \subset \mathbf{C}_{p,s}^*$. Тогда кривая $u(I) = \pi \circ \hat{u}(I) \subset \mathbf{C}_s^*$, то есть u – аналитическая кривая, и, следовательно, кривая $\hat{u}$ также аналитическая. Эквивалентность условий доказана. □

Как мы уже видели, имеющаяся на Δ^0 структура локально компактной абелевой группы дает возможность для каждых $s \in \Delta^0$ и аналитической кривой $u : I \to \Delta^0$ определить кривую $u_s : I \to \Delta^0$, полагая $u_s(t) = su(t), t \in I$, которая также будет аналитической.

Лемма 4.5. *Пусть $u : I \to \Delta^*$ – (аналитическая) кривая. Тогда найдется такая окрестность U единичного элемента группы Δ^0, что для всякого $s \in U$ (аналитическая) кривая $u_s(I)$ содержится в Δ^*.*

Доказательство. Имеем, что $u(I) \subset \Delta^*$, следовательно $u(I)$ не содержит точек из N_p. Так как множество N_p дискретно, то найдется окрестность кривой $u(I)$ не прересекающаяся с N_p, то есть найдется окрестность U единичного элемента α_0, такая что $u(I)U \cap N_p = \varnothing$. Тогда, очевидно, для любого $s \in U$ кривая $u_s(I) = su(I)$ не пересекается с N_p, то есть $u_s(I) \subset \Delta^*$. Лемма 4.5 доказана. □

Аналогично прежнему определению, две точки $w, w' \in \Delta_p^*$ назовем *эквивалентными* ($w \sim w'$), если $\pi(w) = \pi(w')$ и существует аналитическая кривая $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$, такая что $\hat{u}(0) = w, \hat{u}(1) = w'$. Опять же, если $w \sim w'$ и $w' \sim w''$, то $w \sim w''$. Пусть, как и прежде, $C(w)$ множество всех точек (включая w), эквивалентных w. Из n-листности накрытия имеем, что $cardC(w) \leq n$. Также, из транзитивности отношения эквивалентности следует, что для всякого $w \in \Delta_p^*$ существует аналитическая кривая $\hat{u}(I)$, такая что $\hat{u}(0) = w$ и $C(w) \subset \hat{u}(I)$. Перейдем теперь к вопросу локального поведения на Δ_p^* функции $\nu : \Delta_p^* \to \mathbb{Z}_+$, $\nu(w) = cardC(w)$. Как уже отмечалось, Следствие 3.1 влечет за собой доказательство локального постоянства функции ν на поверхности Бора-Римана (Теорема 3.1). В следующей теореме алгебраическим методом доказывается утверждение Следствия 3.1 для нашего случая, которое опять же приведет к локальному постоянству функции ν на Δ_p^*.

Теорема 4.1. *У каждого элемента $w \in \Delta_p^*$ найдется такая окрестность V, что для любого $z \in V$ имеет место неравенство $\nu(z) \geq \nu(w)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $w_0 \in \Delta_p^*$ с $\pi(w_0) = s_0 \in \Delta^*$. Пусть $\nu(w_0) = k$. Пусть, далее, $C(w_0) = (w_0, w_1, ..., w_{k-1})$ и $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ аналитическая кривая с $\hat{u}(0) = w_0$ и $C(w_0) \subset \hat{u}(I)$. Тогда найдутся $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} \leq 1$ такие, что $\hat{u}(t_i) = w_i, i = \overline{0, k-1}$ и $\pi \circ \hat{u}(t_i) = \pi(w_i) = s_0, i = \overline{0, k-1}$. Положим $u(t) = \pi \circ \hat{u}(t), t \in I$ – проекция аналитической кривой $\hat{u} \subset \Delta_p^*$. Имеем, что $u(I) \subset \Delta^*$ и $u(t_i) = \pi \circ \hat{u}(t_i) = s_0, i = \overline{0, k-1}$.

Ясно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой последовательности $w_\lambda \to w_0$ существует λ_0, такое что при $\lambda > \lambda_0$ выполняется $\nu(w_\lambda) \geq \nu(w_0) = k$.

Из сходимости $w_\lambda \to w_0$ следует сходимость $s_\lambda := \pi(w_\lambda) \to s_0$. Обозначим $s^0_\lambda = s_0^{-1}s_\lambda$. Тогда $s^0_\lambda \to \alpha_0$, где α_0 – единица группы Δ^0. Определим кривые $u_\lambda : I \to \Delta^0$ как $u_\lambda(t) = s^0_\lambda u(t), t \in I$. Тогда, по лемме 4.5 найдется λ_1 такое, что при $\lambda > \lambda_1$ кривые $u_\lambda(I)$ содержатся в Δ^*.

Рассмотрим теперь полиномы

$$p(u(t), x) = x^n + f_1(u(t))x^{n-1} + ... + f_n(u(t))$$

и

$$p(u_\lambda(t), x) = x^n + f_1(u_\lambda(t))x^{n-1} + ... + f_n(u_\lambda(t)).$$

Так как кривая $u(t), t \in I$ принадлежит множеству Δ^* то по лемме 4.2 уравнение $p(u(t), x) = 0, t \in I$ имеет ровно n непрерывных попарно не совпадающих решений. Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется λ_ε, такое что при $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\max_{1\leq i\leq n} ||f_i(u(t)) - f_i(u_\lambda(t))||_{C(I)} < \varepsilon.$$

Применяя лемму 4.3, получим, что при $\lambda > \max\{\lambda_1, \lambda_\varepsilon\}$ уравнение $p(u_\lambda(t), x) = 0$, $t \in I$ также имеет ровно n различных непрерывных решений, близких (равномерно на $[0,1]$) к решениям уравнения $p(u(t), x) = 0, t \in I$.

Пусть $\hat{u}(t) = (\hat{s}(t), \hat{x}(t)), t \in I$. Из определения накрытия π имеем $u(t) = \pi \circ \hat{u}(t) = \hat{s}(t), t \in I$, то есть $\hat{u}(t) = (u(t), \hat{x}(t)), t \in I$, и, в частности, $w_i = \hat{u}(t_i) = (u(t_i), \hat{x}(t_i)) = (s_0, \hat{x}(t_i)), i = \overline{0, k-1}$. Так как $\hat{u}(t) \subset \Delta^*_p, t \in I$ то из определения множества Δ^*_p получаем, что

$$\hat{x}^n(t) + f_1(u(t))\hat{x}^{n-1}(t) + ... + f_n(u(t)) = 0, t \in I,$$

то есть функция $\hat{x}(t)$ является одним из решений уравнения $p(u(t), x) = 0$. Поэтому, согласно лемме 4.3, при $\lambda > \lambda_{\varepsilon(\delta)}$ среди решений уравнения $p(u_\lambda(t), x) = 0$ найдется $\hat{x}_\lambda(t)$, такое что

$$||\hat{x}_\lambda - \hat{x}||_{C(I)} < \delta, \tag{4.7}$$

где

$$\delta < \min_{1\leq i<j\leq k-1} |\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j)|/2, \tag{4.8}$$

с $w_i = (s_0, \hat{x}(t_i)), i = \overline{0, k-1}$. Так как кривая u аналитическая, то аналитической является и кривая u_λ, следовательно из соотношения $u_\lambda = \pi(u_\lambda, \hat{x}_\lambda)$ получаем, что аналитической будет также кривая $\hat{u}_\lambda : I \to \Delta^*_p$ с $\hat{u}_\lambda(t) = (u_\lambda(t), \hat{x}_\lambda(t)), t \in I$.

По построению имеем $u_\lambda(t_i) = s_\lambda^0 u(t_i) = s_0^{-1} s_\lambda s_0 = s_\lambda, i = \overline{0, k-1}$. Таким образом, точки $\hat{u}_\lambda(t_i) = (s_\lambda, \hat{x}_\lambda(t_i)), i = \overline{0, k-1}$ лежат на кривой $\hat{u}_\lambda(I)$. Так как $\pi(\hat{u}_\lambda(t_0)) = s_\lambda = \pi(w_\lambda)$ и $w_\lambda \to w_0 = (s_0, \hat{x}(t_0))$, $s_\lambda \to s_0$, то выбирая δ в (4.7) достаточно маленьким а λ достаточно большим ($\lambda > \lambda_0 > \max\{\lambda_1, \lambda_{\varepsilon(\delta)}\}$), получим что $w_\lambda = \hat{u}_\lambda(t_0)$. Кроме того, используя (4.7) и (4.8), для $i \neq j$ получаем $|\hat{x}_\lambda(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_j)| = |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j)) - (\hat{x}(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_i)) - (\hat{x}_\lambda(t_j) - \hat{x}(t_j))| \geq |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j))| - |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_i))| - |\hat{x}_\lambda(t_j) - \hat{x}(t_j)| > 2\delta - \delta - \delta = 0$, то есть $\hat{x}_\lambda(t_i) \neq \hat{x}_\lambda(t_j)$, и, следовательно, $\hat{u}_\lambda(t_i) \neq \hat{u}_\lambda(t_j), i \neq j$. Таким образом, мы построили аналитическую кривую $\hat{u}_\lambda$ в Δ_p^*, для которой $\hat{u}_\lambda(0) = \hat{u}_\lambda(t_0) = w_\lambda$, $\pi(\hat{u}_\lambda(t_i)) = s_\lambda, i = \overline{0, k-1}$, и $\hat{u}_\lambda(t_i) \neq \hat{u}_\lambda(t_j), i \neq j$. Это означает, что у w_λ есть минимум k эквивалентных точек $\hat{u}_\lambda(t_i), i = \overline{0, k-1}$, то есть $\nu(w_\lambda) \geq k = \nu(w_0)$. Теорема 4.1 доказана. □

Следствие 4.1. *Функция $\nu : \Delta_p^* \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на Δ_p^*.*

Abstract. In this paper we introduce the notions of an analytic curve and equivalent points on the Bohr-Riemann surfaces. By means of constructive and algebraic methods we prove that the points of the Bohr-Riemann surfaces locally have the same number of equivalent points.

Список литературы

[1] А. Ф. Бекназарян, С. А. Григорян, "О поверхностях Бора-Римана", Известия НАН Армении, сер. Математика, 49, по. 5, 76 – 88 (2014).

[2] R. Arens, I. M. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., 81, no. 2, 379 – 393 (1956) .

[3] С. А. Григорян, "Обобщенные аналитические функции", Успехи Мат. Наук, 49, вып. 2, 3 – 43 (1994).

[4] С. А. Григорян, "Дивизор обобщенной аналитической функции", Матем. заметки, 61, вып. 5, 655 – 661 (1997).

[5] О. Форстер, Римановы Поверхности, М., Мир (1980).

[6] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev, "Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups", Lobachevskii Journal of Mathematics, 6, 39 – 46 (2000).

[7] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, "On the structure of finite coverings of compact connected groups", Topology and Its Applications, 153, 3598 – 3614 (2006).

[8] Р. Н. Гумеров, "Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп", Сиб. матем. журн., 54, вып. 2, 320 – 324 (2013).

[9] С. Моррис, "Двойственность Понтрягина и Строение Локально Компактных Абелевых Групп, М., Мир (1980).

[10] Р. Энгелькинг, Общая Топология, М., Мир (1986).

Поступила 8 апреля 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 23-40.

ALMOST EVERYWHERE STRONG SUMMABILITY OF DOUBLE WALSH-FOURIER SERIES

G. GÁT AND U. GOGINAVA

Institute of Mathematics and Computer Science, College of Nyíregyháza, Hungary
I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

E-mails: *gatgy@nyf.hu*, *zazagoginava@gmail.com*

Abstract. [1]In this paper we study a question of almost everywhere strong convergence of the quadratic partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series. Specifically, we prove that the asymptotic relation $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|S_{mm}f-f|^p \to 0$ as $n\to\infty$ holds a.e. for every function of two variables belonging to $L\log L$ and for $0<p\leq 2$. Then using a theorem by Getsadze [6] we infer that the space $L\log L$ can not be enlarged by preserving this strong summability property. for every function of two variables belonging to $L\log L$ and for $0<p\leq 2$. Then using a theorem by Getsadze [6] we infer that the space $L\log L$ can not be enlarged by preserving this strong summability property.

MSC2010 numbers: 42C10.

Keywords: two-dimensional Walsh system; strong Marcinkiewicz means; a.e. convergence.

1. Introduction

Let $\mathbb{P}$ denote the set of positive integers and let $\mathbf{N}:=\mathbb{P}\cup\{0\}$. Denote by $\mathbf{Z}_2$ the discrete cyclic group of order 2, that is, $\mathbf{Z}_2=\{0,1\}$, where the group operation is modulo 2 addition and every subset is open. The Haar measure on $\mathbf{Z}_2$ is defined such that the measure of a singleton is 1/2. Let G be the complete direct product of the countable infinite copies of the compact groups $\mathbf{Z}_2$. The elements of G are of the form $x=(x_0,x_1,...,x_k,...)$ with $x_k\in\{0,1\}$, $k\in\mathbf{N}$. The group operation on G is the coordinate-wise addition, the measure (denoted by μ) and the topology are the product measure and topology, respectively. The compact Abelian group G is called

[1]Research was supported by project TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0051 and by Shota Rustaveli National Science Foundation grant no.31/48 (Operators in some function spaces and their applications in Fourier analysis)

Walsh group. A base for the neighborhoods of G can be given in the following way:

$$I_0(x) = G, \ \ I_n(x) = I_n(x_0, ..., x_{n-1})$$
$$= \{y \in G : y = (x_0, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, ...)\}, \quad x \in G, n \in \mathbf{N}.$$

These sets are called dyadic intervals. Let $0 := (0 : i \in \mathbf{N}) \in G$ denote the null element of G, $I_n := I_n(0)$, and $e_n := (0, ..., 0, x_n = 1, 0, ...) \in G$, $n \in \mathbf{N}$.

For $k \in \mathbf{N}$ and $x \in G$, by $r_k(x)$ we denote the k-th Rademacher function:

$$r_k(x) = (-1)^{x_k}, \quad x \in G, \ k \in \mathbf{N}.$$

If $n \in \mathbf{N}$, then $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, where $n_i \in \{0,1\}$ $(i \in \mathbf{N})$, that is, n is expressed in the number system of base 2. For $n > 0$ denote $|n| = \max\{j \in \mathbf{N}: n_j \neq 0\}$, that is, $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

Throughout the paper the notation $a \lesssim b$ will stand for $a \leq c \cdot b$, where c is an absolute constant.

The Walsh-Paley system is defined to be the sequence of Walsh-Paley functions:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k} = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k} \quad (x \in G, n \in \mathbf{P}),$$

and $w_0 := 1$. The Walsh-Dirichlet kernel is defined by

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x).$$

Recall that (see [13] and [33])

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{if} \quad x \in I_n, \\ 0, & \text{if} \quad x \in \overline{I}_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

We consider the double system $\{w_n(x) \times w_m(y) : n, m \in \mathbf{N}\}$ on $G \times G$.

The rectangular partial sums of the two-dimensional Walsh-Fourier series are defined as follows:

$$S_{M,N}(x, y, f) := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{f}(i,j) w_i(x) w_j(y),$$

where the number

$$\widehat{f}(i,j) = \int_{G \times G} f(x,y) w_i(x) w_j(y) \, d\mu(x,y)$$

is called the (i,j)-th Walsh-Fourier coefficient of the function f.

Denote

$$S_n^{(1)}(x,y,f) := \sum_{l=0}^{n-1} \widehat{f}(l,y)\, w_l(x), \quad S_m^{(2)}(x,y,f) := \sum_{r=0}^{m-1} \widehat{f}(x,r)\, w_r(y),$$

where

$$\widehat{f}(l,y) = \int_G f(x,y)\, w_l(x)\, d\mu(x), \quad \widehat{f}(x,r) = \int_G f(x,y)\, w_r(y)\, d\mu(y).$$

The norm (or pre-norm) of the space $L_p(G\times G)$ is defined by

$$\|f\|_p := \left(\int_{G\times G} |f(x,y)|^p\, d\mu(x,y) \right)^{1/p} \qquad (0<p<+\infty).$$

We denote by $L\log L(G\times G)$ the class of measurable functions f satisfying

$$\int_{G\times G} |f| \log^+ |f| < \infty,$$

where $\log^+ u = \mathbf{I}_{(1,\infty)}(u) \log u$, and $\mathbf{I}_E$ is the characteristic function of the set E.

Denote by $S_n^T(x,f)$ the partial sums of the trigonometric Fourier series of f, and define the $(C,1)$ means by

$$\sigma_n^T(x,f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k^T(x,f).$$

Fejér [1] proved that $\sigma_n^T(x,f)$ converges to $f(x)$ uniformly for any 2π-periodic continuous function f. Lebesgue [17] established almost everywhere convergence of $(C,1)$ means for $f\in L_1(\mathbf{T}), \mathbf{T} := [-\pi,\pi)$. The strong summability problem, that is, the convergence of the strong means

$$\text{(1.2)} \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| S_k^T(x,f) - f(x) \right|^p, \quad x\in\mathbf{T}, \quad p>0,$$

was first considered by Hardy and Littlewood in [14]. They showed that for any $f\in L_r(\mathbf{T})$ $(1<r<\infty)$ the strong means tend to 0 a.e. as $n\to\infty$. The Fourier series of $f\in L_1(\mathbf{T})$ is said to be (H,p)-summable at $x\in T$, if the strong means, defined by (1.2), converge to 0 as $n\to\infty$. The (H,p)-summability problem in $L_1(\mathbf{T})$ has been investigated by Marcinkiewicz [22] for $p=2$, and later by Zygmund [42] for the general case $1\le p<\infty$. In [24], Oskolkov proved the following result: if $f\in L_1(\mathbf{T})$ and Φ is a continuous positive convex function on $[0,+\infty)$ with $\Phi(0)=0$ and

$$\text{(1.3)} \qquad \ln \Phi(t) = O(t/\ln\ln t) \qquad (t\to\infty),$$

then for almost all x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Phi\left(\left|S_k^T(x,f)-f(x)\right|\right)=0. \tag{1.4}$$

It was noted in [24] that Totik announced a conjecture that (1.4) holds almost everywhere for any $f\in L_1(\mathbf{T})$, provided that

$$\ln\Phi(t)=O(t)\quad(t\to\infty). \tag{1.5}$$

The next result was proved by Rodin in [25].

Theorem A. *Let $f\in L_1(\mathbf{T})$. Then for any $A>0$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\exp\left(A\left|S_k^T(x,f)-f(x)\right|\right)-1\right)=0\quad\text{for a.e.}\quad x\in\mathbf{T}.$$

In [15] Karagulyan proved the following theorem.

Theorem B. *Let $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ be a continuous increasing function satisfying the conditions: $\Phi(0)=0$ and*

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\Phi(t)}{t}=\infty.$$

Then there exists a function $f\in L_1(\mathbf{T})$ for which the relation

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Phi\left(\left|S_k^T(x,f)\right|\right)=\infty$$

holds everywhere on $\mathbf{T}$.

For quadratic partial sums of two-dimensional trigonometric Fourier series Marcinkiewicz [23] has proved that if $f\in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$, $\mathbf{T}:=[-\pi,\pi)^2$, then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(S_{kk}^T(x,y,f)-f(x,y)\right)=0$$

for a. e. $(x,y)\in\mathbf{T}^2$. In [40] Zhizhiashvili improved this result by showing that the class $L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$ can be replaced by $L_1\left(\mathbf{T}^2\right)$.

From a result of Konyagin [16] it follows that for every $\varepsilon>0$ there exists a function $f\in L\log^{1-\varepsilon}\left(\mathbf{T}^2\right)$ such that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|S_{kk}^T(x,y,f)-f(x,y)\right|\neq 0\quad\text{for a. e. }(x,y)\in\mathbf{T}^2. \tag{1.6}$$

The aforementioned results show that in the one-dimensional case, the $(C,1)$ summability and the $(C,1)$ strong summability have the same maximal convergence spaces. Namely, in both cases we have the space L_1. But, the situation changes as we step further to the two-dimensional case. In other words, the spaces of functions with almost everywhere summable Marcinkiewicz and strong Marcinkiewicz means are different.

The results on strong summation and approximation of trigonometric Fourier series have been extended for several other orthogonal systems. For instance, concerning the Walsh system we refer to Schipp [29, 30, 31], Fridli [2, 3], Leindler [17]-[21], Totik [34] - [36], Fridli and Schipp [3], Rodin [26], Weisz [38, 39], Gabisonia [4].

The problem of summability of cubic partial sums of multiple Fourier series have been studied by Gogoladze [10] - [12], Wang [37], Zhag [41], Glukhov [7], Goginava [8], Gát, Goginava, Tkebuchava [5], Goginava, Gogoladze [9].

For Walsh system Rodin [27] (see also Schipp [28]) proved the following result.

Theorem C. *Let $f \in L_1(G)$. Then for any $A > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\exp\left(A\left|S_k(x,f) - f(x)\right|\right) - 1\right) = 0$$

for a. e. $x \in G$.

In [28], Schipp introduced the operator

$$V_n f(x) := \left(\frac{1}{2^n}\int_G \left(\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1}\mathbb{I}_{I_j}(t)\, S_{2^n} f(x+t+e_j)\right)^2 d\mu(t)\right)^{1/2},$$

and proved the following theorem.

Theorem D. ([28]) *Let $f \in L_1(G)$, and let $Vf := \sup_n V_n f$. Then*

$$\mu\{|Vf| > \lambda\} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

The exponential uniform strong approximation of the Marcinkiewicz means of two-dimensional Walsh-Fourier series has been studied in [9]. Recall that a function ψ is said to belong the class Ψ if it increases on $[0, +\infty)$ and satisfies the condition:

$$\lim_{u\to 0} \psi(u) = \psi(0) = 0.$$

Theorem E. ([9]) a) *Let $\varphi \in \Psi$ be such that*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}} < \infty.$$

Then for any function $f \in C(G \times G)$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(e^{\varphi(|S_{ll}(f)-f|)}-1\right)\right\|_C=0.$$

b) For any function $\varphi \in \Psi$ *satisfying the condition*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}=\infty$$

there exists a function $F \in C(G \times G)$ *such that*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left(e^{\varphi(|S_{ll}(0,0,F)-F(0,0)|)}-1\right)=+\infty.$$

For the two-dimensional Walsh-Fourier series Weisz [39] proved that if $f \in L_1(G \times G)$, then

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(S_{j,j}(x,y;f)-f(x,y)\right)\to 0$$

for a. e. $(x,y) \in G \times G$.

In this paper we consider the strong means

$$H_n^p f := \left(\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{2^n-1}|S_{mm}f|^p\right)^{1/p}$$

and the maximal strong operator

$$H_*^p f := \sup_{n\in\mathbb{N}} H_n^p f,$$

and study the a. e. convergence of strong Marcinkiewicz means of the two-dimensional Walsh-Fourier series. The following theorem is the main result of the present paper.

Theorem 1.1. *Let* $f \in L\log L(G \times G)$ *and* $0 < p \leq 2$. *Then*

$$\mu\{H_*^p f > \lambda\} \lesssim \frac{1}{\lambda}\left(1+\iint_{G\times G}|f|\log^+|f|\right).$$

The weak type $(L\log^+ L, 1)$ inequality and the usual density arguments of Marcinkiewicz and Zygmund imply the next result.

Theorem 1.2. *Let* $f \in L\log L(G \times G)$ *and* $0 < p \leq 2$. *Then*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|S_{mm}(x,y,f)-f(x,y)|^p\right)^{1/p}\to 0 \quad \textit{for a.e.} \quad (x,y)\in G\times G \quad \textit{as} \quad n\to\infty.$$

It is worthwhile to note that from a theorem by Getsadze [6] it follows that the class $L\log L$ in the last theorem is necessary in the context of strong summability in question. In other words, it is impossible to give a larger convergence space (of the form $L\log L\phi(L)$ with $\phi(\infty)=0$) than the space $L\log L$. This emphasizes a sharp contrast between the one- and two-dimensional strong summability properties.

We also note that in the case of trigonometric system Sjölin [32] proved that for every $p>1$ and $f\in L_p(\mathbf{T}^2)$ the almost everywhere convergence $S_{nn}f\to f$ $(n\to\infty)$ holds. Since for Walsh system this issue is still an open problem, from this point of view Theorem 1.2 becomes more interesting.

2. Proof of Theorem 1.1

Let $f\in L_1(G\times G)$. The dyadic maximal function is given by

$$Mf(x,y):=\sup_{n\in\mathbb{N}}2^{2n}\int\limits_{I_n\times I_n}|f(x+s,y+t)|\,d\mu(s,t).$$

For an integrable function f of two variables, we need to introduce the following hybrid maximal functions:

$$M_1f(x,y):=\sup_{n\in\mathbb{N}}2^{n}\int\limits_{I_n}|f(x+s,y)|\,d\mu(s),$$

$$M_2f(x,y):=\sup_{n\in\mathbb{N}}2^{n}\int\limits_{I_n}|f(x,y+t)|\,d\mu(t),$$

$$V_1(x,y,f)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2^n}\int\limits_G\left(\sum_{j=0}^{n-1}2^{j-1}\mathbb{I}_{I_j}(t)S_{2^n}^{(1)}f(x+t+e_j,y)\right)^2d\mu(t)\right)^{1/2}\tag{2.1}$$

$$V_2(x,y,f)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2^n}\int\limits_G\left(\sum_{j=0}^{n-1}2^{j-1}\mathbb{I}_{I_j}(t)\,S_{2^n}^{(2)}f(x,y+t+e_j)\right)^2d\mu(t)\right)^{1/2}\tag{2.2}$$

It is well-known that for $f\in L\log^+L$ the following estimate holds

$$\begin{aligned}\lambda\mu\{(x,y)\in G\times G: Mf(x,y)>\lambda\}\\ \lesssim 1+\iint\limits_{G\times G}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,d\mu(x,y),\end{aligned}\tag{2.3}$$

and for $s = 1,2$

$$\iint\limits_{G\times G} |M_s f(x,y)|\, d\mu(x,y) \lesssim 1 + \iint\limits_{G\times G} |f(x,y)| \log^+ |f(x,y)|\, d\mu(x,y). \tag{2.4}$$

Setting

$$\Omega = \{(x,y) \in G \times G : V_1 f(x,y) > \lambda\},$$

we can use Fubini's Theorem and Theorem D to write

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{G\times G} \mathbf{I}_\Omega(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_G \left(\int\limits_G \mathbf{I}_\Omega(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \tag{2.5}$$

$$\lesssim \frac{1}{\lambda} \int\limits_G \left(\int\limits_G |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Similarly, we can show that

$$\mu\{(x,y) \in G \times G : V_2 f(x,y) > \lambda\} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{2.6}$$

For Dirichlet kernel Schipp proved the following representation (see [28, p. 622]):

$$\begin{aligned} D_m(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{I}_{I_k \setminus I_{k+1}}(x) \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_{kj} 2^{j-1} w_m(x + e_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} w_m(x) + (m + 1/2)\, \mathbf{I}_{I_n}(x), \end{aligned} \tag{2.7}$$

where $m < 2^n$ and

$$\varepsilon_{kj} = \begin{cases} -1, & \text{if } j = 0,1,\ldots,k-1, \\ +1, & \text{if } j = k. \end{cases}$$

Proof of Theorem 1.1. First, we prove that the following estimation holds

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} |S_{mm}(x,y,f)|^2 \right)^{1/2} \\ \lesssim\ & V_2(x,y,M_1 f) + V_1(x,y,M_2 f) + Mf(x,y) + V_2(x,y,A) + V_1(x,y,A) + \|f\|_1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

where A is an integrable on $G \times G$ function of two variables, which will be defined below.

It is easy to show that

$$\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}\left|S_{mm}(x,y,f)\right|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}\left|S_{mm}(x,y,S_{2^n,2^n}f)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}\left|\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\,D_m(s)\,D_m(t)\,d\mu(s,t)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq\sup_{\{\alpha_{mn}(x,y)\}}\left|\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,D_m(s)\,D_m(t)\,d\mu(s,t)\right|.$$

The last inequality is obtained by taking the supremum over all $\{\alpha_{mn}(x,y)\}$ for which

$$\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}\left|\alpha_{mn}(x,y)\right|^2\right)^{1/2}\leq 1.$$

In view of (2.7) we can write

$$\text{(2.9)}\qquad \iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,D_m(s)\,D_m(t)\,d\mu(s,t)$$

$$=\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\mathrm{I}_{I_{k_1}\setminus I_{k_1+1}}(s)$$

$$\times\mathrm{I}_{I_{k_2}\setminus I_{k_2+1}}(t)\,\varepsilon_{k_1j_1}\varepsilon_{k_2j_2}2^{j_1+j_2-2}$$

$$\times\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s+t+e_{j_1}+e_{j_2})\,d\mu(s,t)$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{j_1=0}^{k_1}\mathrm{I}_{I_{k_1}\setminus I_{k_1+1}}(s)$$

$$\times\varepsilon_{k_1j_1}2^{j_1-1}\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s+t+e_{j_1})\,d\mu(s,t)$$

$$+\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{j_1=0}^{k_1}\mathrm{I}_{I_{k_1}\setminus I_{k_1+1}}(s)$$

$$\times\varepsilon_{k_1j_1}2^{j_1-1}\mathrm{I}_{I_n}(t)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s+e_{j_1})\,(m+1/2)\,d\mu(s,t)$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}f(x+s,y+t)\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\mathrm{I}_{I_{k_2}\setminus I_{k_2+1}}(t)$$

$$\times\varepsilon_{k_2 j_2}2^{j_2-1}\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s+t+e_{j_2})\,d\mu(s,t)$$

$$+\frac{1}{4}\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s+t)\,d\mu(s,t)$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(s)\left(m+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_{I_n}(t)\,d\mu(s,t)$$

$$+\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\mathrm{I}_{I_{k_2}\setminus I_{k_2+1}}(t)$$

$$\times\varepsilon_{k_2 j_2}2^{j_2-1}\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t+e_{j_2})\left(m+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_{I_n}(s)\,d\mu(s,t)$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t)\left(m+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_{I_n}(s)\,d\mu(s,t)$$

$$+\iint_{G\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,f)\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{I}_{I_n}(s)\,\mathrm{I}_{I_n}(t)\,d\mu(s,t)=\sum_{k=1}^{9}J_k.$$

It is easy to show that

$$|J_9|\lesssim\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}|\alpha_{mn}(x,y)|^2\right)^{1/2}\times 2^{(5/2)n}\iint_{I_n\times I_n}|f(x+s,y+t)|\,d\mu(s,t)\lesssim 2^{n/2}Mf(x,y),\tag{2.10}$$

$$|J_5|\lesssim 2^{n/2}\left(\sum_{m=0}^{2^n-1}|\alpha_{mn}(x,y)|^2\right)^{1/2}\|f\|_1\lesssim 2^{n/2}\|f\|_1.\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}|J_8|&\lesssim\iint_{I_n\times G}S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,|f|)\\&\quad\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t)(m+1/2)\right|d\mu(s,t)\\&=\iint_{I_n\times G}\left(2^n\int_{I_n}|f(x+s,y+t+v)|\,d\mu(v)\right)\\&\quad\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t)(m+1/2)\right|d\mu(s,t)\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$= \int_G \left(\int_{I_n} \left(2^n \int_{I_n} |f(x+s, y+t+v)| \, d\mu(s) \right) d\mu(v) \right)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t) \, (m+1/2) \right| d\mu(t) \lesssim \int_G \left(\int_{I_n} M_1 f(x, y+t+v) \, d\mu(v) \right)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t) \, (m+1/2) \right| d\mu(t) \lesssim 2^{-n} \int_G S_{2^n}^{(2)}(x, y+t, M_1 f)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t) \, (m+1/2) \right| d\mu(t)$$

$$\lesssim 2^{-n} \left(\int_G \left(S_{2^n}^{(2)}(x, y+t, M_1 f) \right)^2 d\mu(t) \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int_G \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t) \, (m+1/2) \right|^2 d\mu(t) \right)^{1/2}$$

$$\lesssim 2^{n/2} \left(\sum_{m=0}^{2^n-1} |\alpha_{mn}(x,y)|^2 \right)^{1/2} V_2(x, y, M_1 f) \lesssim 2^{n/2} V_2(x, y, M_1 f).$$

Similarly, we can prove that

$$|J_6| \lesssim 2^{n/2} V_1(x, y, M_2 f). \tag{2.13}$$

Now, we estimate J_7. Since

$$\int_{I_n} S_{2^n,2^n}(x+s, y+t, |f|) \, d\mu(s) = 2^{-n} S_{2^n,2^n}(x, y+t, |f|),$$

we can write

$$|J_7| \lesssim \sum_{j_2=0}^{n-1} \sum_{k_2=j_2}^{n-1} 2^{j_2-1} \iint_{I_n \times (I_{k_2} \setminus I_{k_2+1})} S_{2^n,2^n}(x+s, y+t, |f|) \tag{2.14}$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t+e_{j_2}) \, (m+1/2) \right| d\mu(s,t)$$

$$\lesssim \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \iint_{I_n \times I_{j_2}} S_{2^n,2^n}(x+s, y+t, |f|)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y) \, w_m(t+e_{j_2}) \, (m+1/2) \right| d\mu(s,t)$$

$$\lesssim \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \int_{I_{j_2}} \left(\int_{I_n} S_{2^n,2^n}(x+s, y+t, |f|)\, d\mu(s) \right)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(t+e_{j_2})(m+1/2) \right| d\mu(t)$$

$$\lesssim 2^{-n} \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \int_{I_{j_2}} S_{2^n,2^n}(x, y+t, |f|)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(t+e_{j_2})(m+1/2) \right| d\mu(t)$$

$$\lesssim 2^{-n} \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \int_{I_{j_2}} S_{2^n,2^n}(x, y+t+e_{j_2}, |f|)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(t)(m+1/2) \right| d\mu(t)$$

$$\lesssim 2^{-n} \int_G \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \mathbb{I}_{I_{j_2}}(t)\, S_{2^n,2^n}(x, y+t+e_{j_2}, |f|)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(t)(m+1/2) \right| d\mu(t)$$

$$\lesssim \left(\int_G \left(\sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \mathbb{I}_{I_{j_2}}(t)\, S_{2^n,2^n}(x, y+t+e_{j_2}, |f|) \right)^2 d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Taking into account that

$$S_{2^n,2^n}(x, y+t+e_{j_2}, |f|) = 2^n \int_{I_n} \left(2^n \int_{I_n} |f(x+u, y+t+e_{j_2}+v)|\, d\mu(u) \right) d\mu(v)$$

$$\lesssim 2^n \int_{I_n} M_1 f(x, y+t+e_{j_2}+v)\, d\mu(v) = S_{2^n}^{(2)}(x, y+t+e_{j_2}, M_1 f),$$

we can use (2.14) to obtain

$$|J_7| \lesssim \left(\int_G \left(\sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_2-1} \mathbb{I}_{I_{j_2}}(t)\, S_{2^n}^{(2)}(x, y+t+e_{j_2}, M_1 f) \right)^2 d\mu(t) \right)^{1/2} \tag{2.15}$$

$$\lesssim 2^{n/2} V_2(x, y, M_1 f).$$

Similarly, we can prove that

$$|J_3| \lesssim 2^{n/2} V_1 (x, y, M_2 f) . \tag{2.16}$$

For J_1 we have

$$\begin{aligned}
J_1 \lesssim & \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} 2^{j_1+j_2-2} \\
& \times \iint\limits_{(I_{k_1} \setminus I_{k_1+1}) \times (I_{k_2} \setminus I_{k_2+1})} S_{2^n, 2^n} (x + s, y + t, |f|) \\
& \times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn} (x, y) w_m (s + t + e_{j_1} + e_{j_2}) \right| d\mu (s, t) \\
\lesssim & \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_1+j_2-2} \iint\limits_{I_{j_1} \times I_{j_2}} S_{2^n, 2^n} (x + s, y + t, |f|) \\
& \times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn} (x, y) w_m (s + t + e_{j_1} + e_{j_2}) \right| d\mu (s, t) \\
= & \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{j_1} 2^{j_1+j_2-2} \iint\limits_{I_{j_1} \times I_{j_2}} S_{2^n, 2^n} (x + s, y + t, |f|) \\
& \times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn} (x, y) w_m (s + t + e_{j_1} + e_{j_2}) \right| d\mu (s, t) \\
& + \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{n-1} 2^{j_1+j_2-2} \iint\limits_{I_{j_1} \times I_{j_2}} S_{2^n, 2^n} (x + s, y + t, |f|) \\
& \times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn} (x, y) w_m (s + t + e_{j_1} + e_{j_2}) \right| d\mu (s, t) = J_{11} + J_{12}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

It is easy to show that $s + t + e_{j_2} = (0, ..., 0, t_{j_2} + 1, t_{j_2+1}, ..., t_{j_1-1}, t_{j_1} + s_{j_1}, ...) \in I_{j_2}$ for $s \in I_{j_1}, t \in I_{j_2}$ and $j_2 \leq j_1$. Hence, we can write

$$\begin{aligned}
J_{11} \lesssim & \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{j_1} 2^{j_1+j_2-2} \iint\limits_{I_{j_1} \times I_{j_2}} S_{2^n, 2^n} (x + s, y + t + s + e_{j_2}, |f|) \\
& \times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn} (x, y) w_m (t + e_{j_1}) \right| d\mu (s, t) \\
\lesssim & 2^{2n} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{j_1} 2^{j_1+j_2-2} \iint\limits_{I_{j_1} \times I_{j_2}} \left(\iint\limits_{I_n \times I_n} |f (x + s + u, y + t + s + e_{j_2} + v)| \, d\mu (u, v) \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t+e_{j_1})\right|d\mu(s,t)\lesssim 2^{2n}\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}$$

$$\times\int\limits_{I_{j_2}}\left(\iint\limits_{I_n\times I_n}\left(2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|f(x+s+u,y+t+s+e_{j_2}+v)|\,d\mu(s)\right)\right)d\mu(u,v)$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t+e_{j_1})\right|d\mu(t)\lesssim 2^{2n}\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}$$

$$\times\int\limits_{I_{j_2}}\left(\iint\limits_{I_n\times I_n}\left(2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|f(x+s,y+t+s+e_{j_2}+u+v)|\,d\mu(s)\right)\right)d(u,v)$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t+e_{j_1})\right|d\mu(t)\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}$$

$$\times\int\limits_{I_{j_2}}\left(2^n\int\limits_{I_n}\left(2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|f(x+s,y+t+s+e_{j_2}+v)|\,d\mu(s)\right)\right)d(v)$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m(t+e_{j_1})\right|d\mu(t).$$

We set

$$A_{j_1}(x,y)=2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|f(x+s,y+s)|\,d\mu(s).$$

and observe that

$$A_{j_1}(x,y+x)=2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|f(x+s,y+x+s)|\,d\mu(s)=2^{j_1}\int\limits_{I_{j_1}}|F_2(x+s,y)|\,d\mu(s),$$

where $F_2(x,y)=f(x,y+x)$. It follows from the condition of the theorem that $F_2\in L\log L(G\times G)$. On the other hand, we have

$$\sup_j A_j(x,x+y)\lesssim M_1F_2(x,y).$$

Let $A(x,y)=\sup_j A_j(x,y)$. It is clear that

$$\iint\limits_{G\times G}A(x,y)\,d\mu(x,y)=\iint\limits_{G\times G}A(x,y+x)\,d\mu(x,y)\tag{2.19}$$

$$\lesssim\iint\limits_{G\times G}M_1F_2(x,y)\,d\mu(x,y)$$

$$\lesssim 1+\iint_{G\times G}\left|F_2(x,y)\right|\log^+\left|F_2(x,y)\right|d\mu(x,y)$$

$$\lesssim 1+\iint_{G\times G}\left|f(x,y)\right|\log^+\left|f(x,y)\right|d\mu(x,y).$$

Then, from (2.18) we have

$$|J_{11}|\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}\int_{I_{j_2}}\left(2^n\int_{I_n}A\left(x,y+t+v+e_{j_2}\right)\right)d(v) \tag{2.20}$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m\left(t+e_{j_1}\right)\right|d\mu(t)\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}\int_{I_{j_2}}S_{2^n}^{(2)}\left(x,y+t+e_{j_2},A\right)$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m\left(t+e_{j_1}\right)\right|d\mu(t)\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}\int_G\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}\mathrm{I}_{I_{j_2}}(t)\,S_{2^n}^{(2)}\left(x,y+t+e_{j_2},A\right)$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m\left(t+e_{j_1}\right)\right|d\mu(t)$$

$$\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}\left(\int_G\left(\sum_{j_2=0}^{j_1}2^{j_2-2}\mathrm{I}_{I_{j_2}}(t)\,S_{2^n}^{(2)}\left(x,y+t+e_{j_2},A\right)\right)^2d\mu(t)\right)^{1/2}$$

$$\lesssim\sum_{j_1=0}^{n-1}2^{j_1/2}V_2(x,y,A)\lesssim 2^{n/2}V_2(x,y,A),$$

where $A\in L_1(G\times G)$. Similarly, we can prove that

$$J_{12}\lesssim 2^{n/2}V_1(x,y,A). \tag{2.21}$$

Combining (2.17), (2.20) and (2.21) we conclude that

$$|J_1|\lesssim 2^{n/2}V_1(x,y,A)+2^{n/2}V_2(x,y,A). \tag{2.22}$$

Similarly, we can write

$$|J_2|\leq\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{n-1}2^{j_1-1}\iint_{I_{j_1}\times G}S_{2^n,2^n}\left(x+s,y+t,|f|\right) \tag{2.23}$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{2^n-1}\alpha_{mn}(x,y)\,w_m\left(t+s+e_{j_1}\right)\right|d\mu(s,t)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{n-1}2^{j_1-1}\iint_{I_{j_1}\times G}S_{2^n,2^n}\left(x+s,y+t,|f|\right)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(e_0)\, w_m(t+s+e_{j_1}+e_0) \right| d\mu(s,t)$$

$$\leq \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} 2^{j_1+j_2-2} \iint_{I_{j_1}\times I_{j_2}} S_{2^n,2^n}(x+s,y+t,|f|)$$

$$\times \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha_{mn}(x,y)\, w_m(e_0)\, w_m(t+s+e_{j_1}+e_{j_2}) \right| d\mu(s,t)$$

$$\lesssim 2^{n/2} V_1(x,y,A) + 2^{n/2} V_1(x,y,A),$$

$$|J_4| \lesssim 2^{n/2} V_1(x,y,A) + 2^{n/2} V_1(x,y,A).] \tag{2.24}$$

Combining (2.9), (2.10)-(2.16), and (2.22)-(2.24) we obtain the estimate (2.8). Taking into account the inequality $H_*^p f \leq H_*^2 f$ $(0 < p \leq 2)$ and the estimate

$$\mu\{Mf > \lambda\} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda},$$

from (2.3) – (2.6), (2.8), (2.19) and Theorem D we conclude that

$$\mu\{H_*^p f > \lambda\} \lesssim \frac{1}{\lambda}\left(\|M_1 f\|_1 + \|M_2 f\|_1 + \|A\|_1 + \|f\|_1\right) \lesssim \frac{1}{\lambda}\left(1 + \iint_{G\times G} |f| \log^+ |f|\right),$$

and the result follows. Theorem 1.1 is proved. □

Список литературы

[1] L. Fejer, "Untersuchungen über Fouriersche Reihen", Math. Annalen, 58, 501 – 569 (1904).

[2] S. Fridli, F. Schipp, "Strong summability and Sidon type inequalities", Acta Sci. Math. (Szeged) 60, no. 1-2, 277 - 289 (1995).

[3] S. Fridli, F. Schipp, "Strong approximation via Sidon type inequalities", J. Approx. Theory 94, 263 – 284 (1998).

[4] O. D. Gabisonia, "On strong summability points for Fourier series", Mat. Zametki, 5, no. 14, 615 - 626 (1973).

[5] G. Gat, U. Goginava, G. Tkebuchava, "Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series", J. Math. Anal. Appl., 323, no. 1, 535 – 549 (2006).

[6] R. Getsadze, "On the boundedness in measure of sequences of superlinear operators in classes $L\phi(L)$", Acta Sci. Math. (Szeged) 71, no. 1-2, 195 – 226 (2005).

[7] V. A. Glukhov, "Summation of multiple Fourier series in multiplicative systems (Russian)", Mat. Zametki 39, no. 5, 665 – 673 (1986).

[8] U. Goginava, "The weak type inequality for the maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejer means of the two-dimensional Walsh-Fourier series", J. Approx. Theory 154, no. 2, 161 – 180 (2008).

[9] U. Goginava, L. Gogoladze, "Strong approximation by Marcinkiewicz means of two-dimensional Walsh-Fourier series", Constr. Approx. 35, no. 1, 1 – 19 (2012).

[10] L. Gogoladze, "On the exponential uniform strong summability of multiple trigonometric Fourier series", Georgian Math. J. 16, 517 – 532 (2009).

[11] L. D. Gogoladze, "Strong means of Marcinkiewicz type (Russian)", Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 102, no. 2, 293 – 295 (1981).

[12] L. D. Gogoladze, "On strong summability almost everywhere (Russian)", Mat. Sb. (N.S.) **135**(177), no. 2, 158 – 168, 271 (1988); translation in Math. USSR-Sb. **63**, no. 1, 153 – 169 (1989).

[13] B. I. Golubov, A. V. Efimov, V. A. Skvortsov, "Series and transformations of Walsh [in Russian]", Moscow, (1987); English translation, Kluwer Academic, Dordrecht (1991).

[14] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Sur la series de Fourier d'une fonction a carre sommable", Comptes Rendus (Paris) **156**, 1307 - 1309 (1913).

[15] G. A. Karagulyan, "Everywhere divergent Φ-means of Fourier series [in Russian], Mat. Zametki **80**, no. 1, 50 – 59 (2006); translation in Math. Notes **80**, no. 1-2, 47 – 56 (2006).

[16] S. V. Konyagin, "On the divergence of subsequences of partial sums of multiple trigonometric Fourier series", Trudy MIAN **190**, 102 – 116 (1989).

[17] H. Lebesgue, "Recherches sur la sommabilite forte des series de Fourier", Math. Annalen **61**, 251 – 280 (1905).

[18] L. Leindler, "Über die Approximation im starken Sinne", Acta Math. Acad. Hungar, **16**, 255 – 262 (1965).

[19] L. Leindler, "On the strong approximation of Fourier series", Acta Sci. Math. (Szeged) **38**, 317 – 324 (1976).

[20] L. Leindler, "Strong approximation and classes of functions", Mitteilungen Math. Seminar Giessen, **132**, 29 – 38 (1978).

[21] L. Leindler, Strong Approximation by Fourier Series", Akadémiai Kiadó, Budapest, (1985).

[22] J. Marcinkiewicz, "Sur la sommability forte de series de Fourier [in French], J. London Math. Soc. **14**, 162 – 168 (1939).

[23] J. Marcinkiewicz, "Sur une methode remarquable de sommation des series doublefes de Fourier", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **8**, 149 – 160 (1939).

[24] K. I. Oskolkov, "Strong summability of Fourier series [in Russian]", "Studies in the theory of functions of several real variables and the approximation of functions", Trudy Mat. Inst. Steklov. **172**, 280 – 290, 355 (1985).

[25] V. A. Rodin, "The space BMO and strong means of Fourier series", Anal. Math. **16**, no. 4, 291 – 302 (1990).

[26] V. A. Rodin, "BMO-strong means of Fourier series [in Russian]", Funct. anal. Appl. **23**, 73 – 74 (1989).

[27] Rodin, "The space BMO and strong means of Fourier-Walsh series [in Russian]", Mat. Sb. **182**, no. 10, 1463 – 1478 (1991); translation in Math. USSR-Sb. **74**, no. 1, 203 – 218 (1993).

[28] F. Schipp, "On the strong summability of Walsh series", Publ. Math. Debrecen **52**, no. 3-4, 611 – 633 (1998).

[29] F. Schipp, "Über die starke Summation von Walsh-Fourier Reihen", Acta Sci. Math. (Szeged), **30**, 77 – 87 (1969).

[30] F. Schipp, "On strong approximation of Walsh-Fourier series [in Hungarian]", MTA III. Oszt. Kozl. **19**, 101 – 111 (1969).

[31] F. Schipp, N. X. Ky, "On strong summability of polynomial expansions", Anal. Math. **12**, 115 – 128 (1986).

[32] P. Sjölin, "Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series", Ark. Mat. **9**, 65 – 90 (1971).

[33] F. Schipp, W. Wade, P. Simon, P. Pol, Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol, New York (1990).

[34] V. Totik, "On the strong approximation of Fourier series", Acta Math. Sci. Hungar **35**, 151 – 172 (1980).

[35] V. Totik, 11On the generalization of Fejér's summation theorem", Functions, Series, Operators; Coll. Math. Soc. J. Bolyai (Budapest) Hungary, **35**, North Holland, Amsterdam-Oxford-New-Yourk, 1195 – 1199 (1980).

[36] V. Totik, "Notes on Fourier series: Strong approximation", J. Approx. Theory, **43**, 105 – 111 (1985).

[37] Wang, Kun Yang, "Some estimates for the strong approximation of continuous periodic functions of the two variables by their sums of Marcinkiewicz type [in Chinese]", Beijing Shifan Daxue Xuebao, no. 1, 7 – 22 (1981).

[38] F. Weisz, "Strong Marcinkiewicz summability of multi-dimensional Fourier series", Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 29, 297 – 317 (2008).

[39] F. Weisz, "Convergence of double Walsh–Fourier series and Hardy spaces", Approx. Theory Appl. (N.S.) 17:2, 32 – 44 (2001).

[40] L. V. Zhizhiashvili, "Generalization of a theorem of Marcinkiwicz [in Russian]", Izvest.AN USSR, ser. matem. 32, 1112 – 1122 (1968).

[41] Y. Zhang, X. He, "On the uniform strong approximation of Marcinkiewicz type for multivariable continuous functions", Anal. Theory Appl. 21, 377 – 384 (2005).

[42] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge (1959).

Поступила 7 мая 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 41-50.

ON THE GENERALIZATIONS OF POLYNOMIAL INEQUALITIES IN THE COMPLEX DOMAIN

P. N. KUMAR

Birla Institute of Technology and Science Pilani, Zuarinagar, Goa India

E-mail: *prasannakornaya@rediffmail.com*

Abstract. In this paper we establish some generalizations of Bernstein-type inequalities for polynomials having zeros in the closed interior or closed exterior of a circle of radius $|z| = K$.

MSC2010 numbers: 30A10; 30C15.

Keywords: polynomial; zeros; inequalities.

1. Introduction and statement of results

The geometrical relation between the maximum modulus of a complex polynomial on a circle and the location of zeros of this polynomial within or outside this circle is one of the attractive and fertile subjects in geometry of polynomials. Bernstein-type inequalities play a fundamental role for many propositions in the area of polynomial inequalities. There are many results on Bernstein's theorems and their generalizations in different forms. Before proceeding towards specific results concerning the zeros of polynomials, we find it useful to consider certain fundamental theorems, which will be used throughout this paper. We begin by stating a classical result due to Bernstein [5]. Let $P(z)$ be a polynomial of degree n. Then

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \leq n \max_{|z|=1}|P(z)|. \tag{1.1}$$

We also state an inequality which is a simple consequence of maximum principle (see [9, 20]).

$$\max_{|z|=R}|P(z)| \leq R^n \max_{|z|=1}|P(z)|, \quad R \geq 1. \tag{1.2}$$

The above results are best possible and the equalities hold for polynomials having zeros at the origin.

Observe that (1.2) can also be obtained from (1.1) by using Gauss-Lucas theorem (see [12]). Refinements of inequalities (1.1) and (1.2) can be found in a number of important papers (see [2, 4, 6, 8, 10, 11, 16, 18, 19], and references therein).

If $P(z)$ is a polynomial of degree n, having all its zeros in $|z| < 1$, then Aziz and Dawood [3] proved that for $|z| = 1$,

$$\min_{|z|=R} |P(z)| \geq R^n \min_{|z|=1} |P(z)|, \quad R \geq 1. \tag{1.3}$$

This inequality is sharp for the polynomial $P(z) = me^{i\beta}z^n, \quad m > 0$.

Jain [14], generalized inequality (1.2) by proving that if $P(z)$ is a polynomial of degree n, then for $|z| = 1$ and $|\alpha| \leq 1$,

$$|P(Rz) + \alpha(\frac{R+1}{2})^n P(z)| \leq |R^n + \alpha(\frac{R+1}{2})^n| \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad R \geq 1. \tag{1.4}$$

This result is best possible for $P(z) = \beta + \gamma z^n$, where $|\beta| = |\gamma|$.

It was shown by Ankeny and Rivlin [1] that if $P(z) \neq 0$ in $|z| < 1$, then (1.2) can also be replaced by

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq \frac{R^n + 1}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad R \geq 1. \tag{1.5}$$

Inequality (1.5) is sharp for $P(z) = \beta + \gamma z^n$, where $|\beta| = |\gamma| = 1/2$.

Aziz and Dawood [3], improved the above inequality by introducing the minimum value of $|P(z)|$ on $|z| = 1$ as follows:

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq \frac{R^n + 1}{2} \max_{|z|=1} |P(z)| - \frac{R^n - 1}{2} \min_{|z|=1} |P(z)|, \quad R \geq 1. \tag{1.6}$$

This result is best possible for $P(z) = \beta + \gamma z^n$, where $|\beta| \geq |\gamma|$.

Jain [15], improved (1.4) for polynomials having no zeros in $|z| < 1$ with $|\alpha| \leq 1$, $R \geq 1$ and $|z| = 1$ as given below

$$\begin{aligned} &|P(Rz) + \alpha(\frac{R+1}{2})^n P(z)| \\ &\leq \frac{1}{2}\{|R^n + \alpha(\frac{R+1}{2})^n| + |1 + \alpha(\frac{R+1}{2})^n|\} \max_{|z|=1} |P(z)|. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Equality in (1.7) holds for $P(z) = \beta + \gamma z^n$, where $|\beta| = |\gamma| = 1/2$.

Recently, Dewan and Hans [7], proved a result concerning minimum modulus of polynomials $P(z)$, which is an analog of inequality (1.3).

Theorem A. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| < 1$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$ and $R \geq 1$,*

$$\min_{|z|=1} \left|P(Rz) + \beta(\frac{R+1}{2})^n P(z)\right| \geq \left|R^n + \beta(\frac{R+1}{2})^n\right| \min_{|z|=1} |P(z)|. \tag{1.8}$$

The inequality (1.8) is best possible and equality holds for $P(z) = me^{i\beta}z^n, \quad m > 0$.

Dewan and Hans [7] also improved inequality (1.7) by proving the following theorem.

Theorem B. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having no zeros in $|z| < 1$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$, $R \geq 1$, and $|z| = 1$,*

$$|P(Rz) + \beta(\frac{R+1}{2})^n P(z)| \leq \frac{1}{2}\{|R^n + \beta(\frac{R+1}{2})^n| + |1 + \beta(\frac{R+1}{2})^n|\} \max_{|z|=1} |P(z)|$$

$$-\frac{1}{2}\{|R^n + \beta(\frac{R+1}{2})^n| - |1 + \beta(\frac{R+1}{2})^n|\} \min_{|z|=1} |P(z)|. \tag{1.9}$$

Equality in (1.9) holds for $P(z) = \alpha + \gamma z^n$, where $|\alpha| = |\gamma| = 1/2$.

Recently, Mezerji et al. [17], generalized Theorems A and B to a class of polynomials having zeros in the closed interior and closed exterior of a circle $|z| = K$, given by the following two theorems.

Theorem C. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq K$, $K \leq 1$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$, and $R \geq 1$,*

$$\min_{|z|=1} \left| P(Rz) + \beta \left(\frac{R+K}{1+K}\right)^n P(z) \right| \geq \frac{1}{K^n} \left| R^n + \beta \left(\frac{R+K}{1+K}\right)^n \right| \min_{|z|=K} |P(z)|. \tag{1.10}$$

The result is the best possible and equality holds for $P(z) = \alpha z^n$.

Theorem D. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having no zeros in $|z| < K$, $K \geq 1$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$, $R \geq 1$, and $|z| = 1$,*

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{1+K}\right)^n P(K^2z)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\{K^n|R^n + \beta \left(\frac{RK+1}{1+K}\right)^n| + |1 + \beta\left(\frac{RK+1}{1+K}\right)^n|\} \max_{|z|=K} |P(z)|$$

$$-\frac{1}{2}\{K^n|R^n + \beta \left(\frac{RK+1}{1+K}\right)^n| - |1 + \beta\left(\frac{RK+1}{1+K}\right)^n|\} \min_{|z|=K} |P(z)|. \tag{1.11}$$

The result is best possible and equality in (1.11) holds for $P(z) = z^n - K^n$.

While making an attempt towards the generalization of the above inequalities, the author found that there is a room for the generalization of the condition $R \geq 1$ in the above theorems to $R \geq r > 0$, which induces inequalities towards more generalized form. The essence in the papers by Govil et al. [13] and Mezerji et al. [17] is the origin of thought for the new inequalities presented in this paper.

Now we are in position to state our main results. Our first result, Theorem 1.1, is a further generalization of Theorem C. It involves an inequality on a class of polynomials having all its zeros in $|z| \leq K$, $K > 0$.

Theorem 1.1. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n, having all its zeros in $|z| \leq K$, $K > 0$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$, $|z| \geq 1$, and*

$R \geq r, \ \ Rr \geq K^2,$

$$(1.12) \quad \min_{|z|=1} |P(Rz) + \beta (\frac{R+K}{r+K})^n P(rz)| \geq \frac{1}{K^n} |R^n + \beta r^n (\frac{R+K}{r+K})^n| \min_{|z|=K} |P(z)|.$$

The result is best possible and equality in (1.12) holds for $P(z) = me^{i\beta} z^n$, $m > 0$.

Remark 1.1. *If $r = 1$ and $K \leq 1$, then Theorem 1.1 reduces to Theorem C; if $K = 1$, then it further reduces to Theorem A, and if, in addition, $\beta = 0$. then inequality (1.12) becomes inequality (1.3).*

Remark 1.2. *If $r = K$, then inequality (1.12) takes the following simple form:*

$$|P(Rz) + \beta \left(\frac{R+K}{2K}\right)^n P(Kz)| \geq \left|\frac{R^n}{K^n} + \beta \left(\frac{R+K}{2K}\right)^n\right| \min_{|z|=K} |P(z)|.$$

Our second theorem extends Theorem D to the class of polynomials having no zeros in $|z| < K$, $K > 0$.

Theorem 1.2. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n, having no zeros in $|z| < K$, $K > 0$, then for every real or complex number β with $|\beta| \leq 1$ and $R \geq r$, $rR \geq \frac{1}{K^2}$, $|z| = 1$,*

$$|P(RK^2 z) + \beta \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2 z)|$$
$$\leq \frac{1}{2}\{K^n |R^n + \beta \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n| + |1 + \beta \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n |\} \max_{|z|=K} |P(z)|$$
$$(1.13) \quad - \frac{1}{2}\{K^n |R^n + \beta r^n \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n| - |1 + \beta \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n |\} \min_{|z|=K} |P(z)|.$$

The result is best possible and equality in (1.13) holds for $P(z) = az^n + bK^n$, $|b| \geq |a|$.

Remark 1.3. *If $r = 1$ and $K \geq 1$, then Theorem 1.4 reduces to the Theorem D, and if $\beta = 0$ and $K = 1$, then inequality (1.13) becomes inequality (1.6).*

Remark 1.4. *If $\beta = 0$, then inequality (1.13) becomes*

$$|P(RK^2 z)| \leq \frac{1}{2}(K^n R^n + 1) \max_{|z|=K} |P(z)| - (K^n R^n - 1) \min_{|z|=K} |P(z)|.$$

2. Lemmas

We begin with a lemma due to Govil et al. [13].

Lemma 2.1. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having all its zeros in $|z| \leq K$, $K > 0$, then for every $R \geq r$ and $Rr \geq K^2$, we have*

$$(2.1) \quad |P(Rz)| \geq \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n |P(rz)| \ \ for \ \ |z| = 1.$$

Lemma 2.2. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n having no zeros in $|z| < K$, $K > 0$, then for any β with $|\beta| \le 1$, $R \ge r$, $rR \ge \frac{1}{K^2}$, and $|z| = 1$, we have*

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)| \le K^n|Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(rz)|, \tag{2.2}$$

where $Q(z) = z^n\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$.

Proof. Since $P(z) \ne 0$ in $|z| < K$, the polynomial $Q(z)$ has all its zeros in $|z| \le \frac{1}{K}$. Note that $|Q(z)| = \frac{1}{K^n}|P(K^2z)|$ for $|z| = \frac{1}{K}$. Therefore by Rouche's theorem, the polynomial $S(z) = K^nQ(z) - \alpha P(K^2z)$ of degree n has all its zeros in $|z| \le \frac{1}{K}$ for $|\alpha| < 1$. Hence using Lemma 2.1, for $R \ge r$, $Rr \ge \frac{1}{K^2}$ and $|z| = 1$, we have

$$|S(Rz)| \ge \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n |S(rz)|,$$

implying

$$|K^nQ(Rz) - \alpha P(RK^2z)| \ge \left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n |K^nQ(rz) - \alpha P(rK^2z)|.$$

Denote

$$T(z) := K^n\{Q(Rz)+\beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(rz)\}-\alpha\{P(RK^2z)+\beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)\},$$

and note that $T(z) \ne 0$ for $|\beta| < 1$ and $|z| = 1$. This implies that (2.2) is true. Indeed, if it is not true, then there exists a point $z = z_0$ with $|z_0| = 1$ such that

$$|P(RK^2z_0) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z_0)| > K^n|Q(Rz_0) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(rz_0)|.$$

Wc take

$$\alpha = \frac{K^n\{Q(Rz_0) + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^nQ(rz_0)\}}{P(RK^2z_0) + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^nP(rK^2z_0)},$$

and observe that $|\alpha| < 1$. Clearly with this choice of α, we have $T(z_0) = 0$ for $|z_0| = 1$, yielding a contradiction to the fact that $T(z)$ is nonzero on the circle $|z| = 1$. If $|\beta| = 1$, inequality (2.2) follows by continuity. Hence the proof is complete.

Lemma 2.3. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n, then for every real or complex number β with $|\beta| \le 1$ and $K > 0$, and for every $R \ge r$, $rR \ge K^2$ and $|z| \ge 1$, we have*

$$|P(Rz) + \beta(\frac{R+K}{r+K})^nP(rz)| \le \frac{|z|^n}{K^n}|R^n + \beta r^n(\frac{R+K}{r+K})^n)| \max_{|z|=K}|P(z)|. \tag{2.3}$$

Proof. Consider the reciprocal polynomial of $P(z)$ given by $Q(z) = z^n\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$. Take $M = \max_{|z|=\frac{1}{K}} |Q(z)| = \frac{1}{K^n} \max_{|z|=K} |P(z)|$. By Rouche's theorem, for every α with $|\alpha| > 1$, the polynomial $I(z) = Q(z) - \alpha M$ does not vanish in $|z| < \frac{1}{K}$. Hence the polynomial

$$Y(z) = z^n\overline{I(\frac{1}{\bar{z}})} = P(z) - \overline{\alpha}Mz^n$$

has all its zeros in $|z| \le K$, $K > 0$. Applying Lemma 2.1 to the polynomial $Y(z)$, for $|z| = 1$ and every $R \ge r$ and $rR \ge K^2$, we obtain

$$|Y(Rz)| \ge (\frac{R+K}{r+K})^n|Y(rz)|.$$

Since $Y(Rz)$ has all its zeros in $|z| \le \frac{K}{R} \le 1$, again applying Rouche's theorem, we conclude that for every β with $|\beta| < 1$, all the zeros of the polynomial

$$Y(Rz) + \beta(\frac{R+K}{r+K})^n Y(rz)$$

lie in $|z| < 1$. In other words, all the zeros of the polynomial

$$T(z) = P(Rz) + \beta(\frac{R+K}{r+K})^n P(rz) - \overline{\alpha}((MR^nz^n) + \beta(\frac{R+K}{r+K})^n Mr^nz^n) \tag{2.4}$$

lie in $|z| < 1$. We claim that this implies inequality (2.3). We prove the claim by contradiction. If the claim is not true, then there exists a point $z = z_0$ with $|z_0| \ge 1$, such that

$$|P(Rz_0) + \beta\left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz_0)| > \frac{|z_0|^n}{K^n}|R^n + \beta r^n\left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n| \max_{|z|=K}|P(z)|,$$

or equivalently,

$$|P(Rz_0) + \beta\left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz_0)| > M|z_0|^n|R^n + \beta r^n\left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n|.$$

We take

$$\overline{\alpha} = \frac{P(Rz_0) + \beta(\frac{R+K}{r+K})^n P(rz_0)}{Mz_0^n\{R^n + \beta r^n(\frac{R+K}{r+K})^n\}},$$

and observe that $|\alpha| > 1$. In view of (2.4), it is easy to see that with this choice of α, we have $T(z_0) = 0$ for $|z_0| \ge 1$, yielding a contradiction to the fact that $T(z)$ is nonzero in the closed exterior of the circle $|z| = 1$. If $|\beta| = 1$, inequality (2.3) follows by continuity. Hence the proof is complete.

Lemma 2.4. *If $P(z)$ is a polynomial of degree n, then for any β with $|\beta| \le 1$, $K > 0$ and $R \ge r$, $Rr \ge \frac{1}{K^2}$, and $|z| = 1$, we have*

$$|P(RK^2z)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nP(rK^2z)|+K^n|Q(Rz)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nQ(rz)|$$

$$\le\{K^n|R^n+\beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|+|1+\beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|\}\max_{|z|=K}|P(z)|, \tag{2.5}$$

where $Q(z)=z^n\overline{P(\frac{1}{\bar z})}$.

Proof. Let $M=\max\limits_{|z|=K}|P(z)|$. Then $|P(z)|\le M$ for $|z|=K$. Therefore, for a given real or complex number λ with $|\lambda|>1$, it follows from Rouche's theorem that the polynomial $T(z)=P(z)+\lambda M$ does not vanish in $|z|<K$. Hence applying Lemma 2.2 to the polynomial $T(z)$ for β with $|\beta|\le 1$, $|z|=1$ and $R\ge r$, $Rr\ge\frac{1}{K^2}$, we get

$$|P(RK^2z)+\lambda M+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n(P(rK^2z)+\lambda M)|$$

$$\le K^n|Q(Rz)+\bar\lambda MR^nz^n+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n(Q(rz)+\bar\lambda Mr^nz^n)|,$$

implying

$$|P(RK^2z)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nP(rK^2z)+\lambda M(1+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|$$

$$\le K^n|Q(Rz)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nQ(rz)+\bar\lambda Mz^n(R^n+\beta r^n\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|.$$

Now choosing the argument of λ appropriately, we get

$$|P(RK^2z)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nP(rK^2z)|-|\lambda|M|1+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|$$

$$\le||\lambda|MK^n|z|^n|R^n+\beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|-K^n|Q(Rz)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nQ(rz)||.$$

Next, applying Lemma 2.3 to the polynomial $Q(z)$, we can write

$$|\lambda|MK^n|z|^n|R^n+\beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|\ge K^n|Q(Rz)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nQ(rz)|.$$

Therefore

$$|P(RK^2z)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nP(rK^2z)|-|\lambda|M|1+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|$$

$$\le|\lambda|MK^n|z|^n|R^n+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|-K^n|Q(Rz)+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^nQ(rz)|,$$

implying

$$|P(RK^2z)+\beta\big(\tfrac{RK+1}{rK+1}\big)^nP(rK^2z)|+K^n|Q(Rz)+\beta\big(\tfrac{RK+1}{rK+1}\big)^nQ(rz)|$$

$$\le|\lambda|MK^n|R^n+\beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n)|+|\lambda|M|1+\beta\Big(\frac{RK+1}{rK+1}\Big)^n|$$

on $|z|=1$.

Letting $|\lambda| \to 1$ in the last inequality, we get the desired inequality (2.5), and thus the proof is complete.

3. Proofs of the theorems

Proof of Theorem 1.1. Let $m = \min_{|z|=K} |P(z)|$, then $0 < m \leq |P(z)|$ for $|z| = K$. Therefore if λ is a complex number such that $|\lambda| < 1$, then by Rouche's theorem, it follows that the polynomial

$$G(z) = P(z) - \frac{\lambda}{K^n} m z^n \tag{3.1}$$

of degree n has all its zeros in $|z| < K$. Applying Lemma 2.1 to the polynomial $G(z)$ with $K > 0$, $R \geq r$ and $rR \geq K^2$, for $|z| = 1$ we get

$$|G(Rz)| \geq \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n |G(rz)|.$$

Since $G(Rz)$ has all its zeros in $|z| < \frac{K}{R} \leq 1$, then applying Rouche's theorem, for real or complex number β with $|\beta| \leq 1$, one can show that the polynomial

$$T(z) = G(Rz) + \beta \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n G(rz) \tag{3.2}$$

has all its zeros in $|z| < 1$. Substituting $G(z)$ from (3.1) into (3.2), we conclude that for every λ with $|\lambda| < 1$, $|\beta| \leq 1$ and $|z| \geq 1$ the polynomial

$$T(z) = \{|P(Rz) + \beta \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz)\} - \frac{\lambda}{K^n} m\{R^n z^n + \beta r^n \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n z^n\} \tag{3.3}$$

is nonzero. In view of the above facts, we can conclude that for every β with $|\beta| \leq 1$ and $|z| \geq 1$

$$|P(Rz) + \beta \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz)| \geq \frac{1}{K^n} |R^n + \beta r^n \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n |m|z|^n. \tag{3.4}$$

We prove our conclusion by contradiction. If the inequality (3.4) is not true, then there exists a point $z = z_0$ with $|z_0| \geq 1$, such that

$$K^n |P(Rz_0) + \beta \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz_0)| < |R^n + \beta r^n \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n |m|z_0|^n.$$

We take

$$\lambda = \frac{K^n (P(Rz_0) + \beta \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n P(rz_0))}{(R^n + \beta r^n \left(\frac{R+K}{r+K}\right)^n) m z_0^n},$$

and observe that $|\lambda| < 1$. In view of (3.3), it is easy to see that with this choice of λ, we have $T(z_0) = 0$ for $|z_0| \geq 1$, yielding a contradiction to the fact that $T(z) \neq 0$ for $|z| \geq 1$. This completes the proof.

Proof of Theorem 1.4. By the assumption the polynomial $P(z)$ has all its zeros in $|z| \geq K$. Let $m = \min_{|z|=K} |P(z)|$. Then $|P(z)| \geq m$ for $|z| = K$. If α is a complex number such that $|\alpha| < 1$, then it follows from Rouche's theorem that the polynomial $H(z) = P(z) - \alpha m$ has no zeros in $|z| < K$. Hence by Lemma 2.2, we get for $|z| = 1$,

$$\left|\{P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)\} - \alpha m\{1 + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\}\right|$$

$$\leq K^n|\{Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(rz)\} - m\bar{\alpha}z^n\{R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\}|.$$

By a proper choice of argument of α, we get

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)| - |\alpha|m\left|1 + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\right|$$

$$\leq |K^n|Q(Rz) + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^n Q(rz)| - mK^n|\alpha||z|^n\left|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\right|. \tag{3.5}$$

An application of Theorem 1.1 to the polynomial $Q(z)$ yields

$$|Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(z)| \geq |\alpha|m|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|, \quad |z| = 1,$$

and hence (3.5) can be rewritten as

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)| - |\alpha|m|1 + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^n|$$

$$\leq K^n|Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(z)| - |\alpha|mK^n|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|.$$

Therefore

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)| - K^n|Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(z)|$$

$$\leq m|\alpha|\left|1 + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\right| - |\alpha|mK^n\left|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\right|, \quad |z| = 1.$$

Letting $|\alpha| \to 1$, we obtain for $|z| = 1$,

$$|P(RK^2z) + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^n P(rK^2z)| - K^n|Q(Rz) + \beta(\frac{RK+1}{rK+1})^n Q(z)|$$

$$\leq -\{|K^n|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n| - |1 + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n|\}. \tag{3.6}$$

Next, by Lemma 2.4, we have

$$|P(RK^2z) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n P(rK^2z)| + K^n|Q(Rz) + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n Q(rz)|$$

$$\leq \{K^n|R^n + \beta r^n\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n| + \left|1 + \beta\left(\frac{RK+1}{rK+1}\right)^n\right|\} \max_{|z|=K} |p(z)|, \quad |z| = 1. \tag{3.7}$$

Finally, adding (3.6) and (3.7) and rearranging, we get the desired result. Hence the proof is complete. We conclude the paper by the following remark.

Remark 3.1. *It would be of interest to find the analogues of the above theorems for polynomials all of whose critical points lie within a unit distance away from each root.*

Acknowledgement. The author is deeply indebted to the referee for careful reading and comments, which brought improvements to the first version of this paper.

Список литературы

[1] N. C. Ankeny and T. J. Rivlin, "On a theorem of S. Bernstein", Pacific J. Math., 5, 849 – 852 (1955).

[2] A. Aziz, "Inequalities for the derivatives of a polynomial", Proc. Amer. Math. Soc., 89, 259 – 266 (1983).

[3] A. Aziz and Q. M. Dawood, "Inequalities for a polynomial and its derivative", J. Approx. Th., 54, 306 – 313 (1988).

[4] A. Aziz and W. M. Shah, "Inequalities for a polynomial and its derivative", Math. Ineq. Appl., 7(3), 379 – 391 (2004).

[5] S. Bernstein, "Sur la lmitation des derive des polynms", Comp. Rend. de lAcad. des Sciences, 190, 338 – 340 (1930).

[6] K. K. Dewan and S. Hans, "On maximum modulus for the derivative of a polynomial", Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect. A, 63, 55 – 62 (2009).

[7] K. K. Dewan and S. Hans, "Some polynqmial inequalities in the complex domain", Anal. The. Appl., 26(1), 01 – 06 (2010).

[8] C. Frappier, Q. I Rahman and St. Ruscheweyh, "New inequalities for polynomials", Trans. Amer. Math. Soc., 288, 69 – 99 (1985).

[9] A. Giroux, Q. I. Rahman and G. Schmeisser, "On Bernstein's inequality", Canad. J. Math., 31, 347 – 353 (1979).

[10] N. K. Govil, "On the derivative of a polynomial", Proc. Amer. Math. Soc., 41, 543 – 546 (1973).

[11] N. K. Govil, "On the maximum modulus of polynomials", J. Math. Anal. Appl., 41, 253 – 258 (1985).

[12] N. K. Govil and R. N. Mohapatra, "Markov and Bernstein type inequalities for polynomials", J. Ineq. Appl., 3, 349 – 387 (1999).

[13] N. K. Govil, A. Liman and W. M. Shah, "Some inequalities concerning derivative and maximum modulus of polynomials", Austr. J. Math. Anal. Appl., 8(1), 1 – 8 (2011).

[14] V. K. Jain, "On maximum modulus of polynomials", Ind. J. Pure Appl. Math., 23, 815 – 819 (1992).

[15] V. K. Jain, "Generalization of certain well known inequalities for polynomials", Glasn. Math., 32, 45 – 51 (1997).

[16] V. K. Jain, "On polynomials having zeros in closed exterior or interior of a circle", Ind. J. Pure Appl. Math., 30, 153 – 159 (1999).

[17] H. A. S. Mezerji, M. A. Baseri, M. Bidkham and A. Zireh, "Generalization of certain inequalities for a polynomial and its derivative", Lob. J. Math., 33(1), 68 – 74 (2012).

[18] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic and Th. M. Rassias, Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros", World Scientific Pub Co Inc (1994).

[19] N. Prasanna Kumar, "A note on the inequalities for a polynomial and its derivative", Acta Math. Viet., 37(1), 63 – 69 (2012).

[20] Q. I. Rahman and Schmeisser, Analytic Theory of Polynomials, Oxf. Univ. Press, NY (2003).

Поступила 24 января 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 51-64.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КРАТНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ЗА ПРЕДЕЛЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

А. Д. МКРТЧЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *Alex0708@bk.ru*

Аннотация. В работе исследуются множества регулярности на границе области сходимости заданного кратного степенного ряда. В качестве таких множеств рассматриваются наборы полидуг на остовах поликругов сходимости ряда. В терминах свойств целой функции, интерполирующей коэффициенты ряда, находятся размеры полидуг, составляющих регулярное множество. Основную роль для вычисления размеров полидуг играет множество линейных мажорант для логарифма модуля интерполирующей целой функции.

MSC2010 numbers: 32A05; 30B30.

Keywords: [1] степенные ряды; аналитическое продолжение; преобразование Линделофа; многомерные вычеты.

1. Введение

Для степенных рядов одного переменного проблематика описания сингулярных точек на границе круга сходимости имеет давнюю историю, насыщенную значительными достижениями. Эта проблематика была предметом исследований К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Е. Фабри, Г. Полиа и многих других авторов (см., например, монографию Л. Бибербаха [1], а также статьи [2] – [4]).

Для кратных степенных рядов имеется гораздо меньше результатов об описании сингулярных подмножеств на границе области сходимости или, что то же самое, об описании подмножеств границы, через которые аналитически продолжаются такие ряды. В настоящей статье на случай кратных степенных рядов распространяется результат Н. Аракеляна [4]. В статье [4] был указан размер дуги регулярности (через которую аналитически продолжается ряд) на границе

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор 14.Y26.31.0006). Работа осуществлена также при частичной финансовой поддержке фонда "Династия".

круга сходимости в терминах индикатрисы роста целой функции экспоненциального типа, интерполирующей коэффициенты степенного ряда. Приведем точную формулировку этого результата. При этом мы будем следовать обозначениям и дословным формулировкам статьи Н. Аракеляна, В. Лу и Ю. Мюллера [5], где было приведено другое доказательство результата из [4], основанное на интегральном представлении Линделефа.

Итак, в [5] рассматривается одномерный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} f_k z^k, \tag{1.1}$$

имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, что, согласно теореме Коши-Адамара, означает

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|f_k|} = 1. \tag{1.2}$$

Пусть Δ_σ– сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbf{C} : |\theta| \leq \sigma,\ \sigma \in [0, \pi)\}$. Тогда теорема 2 из [5] гласит:

Открытая дуга $\gamma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности ряда (1.1) тогда и только тогда, когда существует целая функция экспоненциального типа φ, интерполирующая коэффициенты ряда: $\varphi(k) = f_k,\ k \in \mathbf{N}$, у которой индикатриса роста $h_\varphi(\theta)$ удовлетворяет условиям: $h_\varphi(0) = 0$ и

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} \leq \sigma.$$

Напомним, что индикатриса определяется пределом

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{log|\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим n-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} f_k z^k, \tag{1.3}$$

со свойством

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}} \sqrt[|k|]{|f_k| R^k} = 1, \tag{1.4}$$

где $R^k = R_1^{k_1} ... R_n^{k_n}$, а $|k| = k_1 + ... + k_n$. Согласно многомерной теореме Коши-Адамара ([6], раздел 7), указаное в (1.4) свойство выражает тот факт, что R_j составляют набор *радиусов поликруга сходимости* ряда (1.3).

Множество G назовем *множеством регулярности для ряда* (1.3), если сумма ряда аналитически продолжается через любую точку этого множества.

Пусть $D_\rho(a) := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < \rho\}$ – открытый круг с центром $a \in \mathbf{C}$ и радиусом $\rho > 0$. Обозначим $D_\rho := D_\rho(0)$, а для $\sigma \in (0, \pi]$ через $\gamma_{\sigma,\rho}$ обозначим открытую дугу $\partial D_\rho \setminus \Delta_\sigma$.

В многомерной ситуации нет универсального определения индикатрисы роста целой функции. Более того, часто информацию о росте целой функции выражают в геометрических терминах. Следуя В. Иванову [7] (см. также [8], гл. 3, §3), введем следующее множество, в котором неявно отражается понятие индикатрисы целой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbf{R}^n : \ln|\varphi(re^{i\theta})| \le \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\},$$

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbf{R}^n_+$ при некоторой константе $C_{\nu,\theta}$. Здесь $re^{i\theta}$ – это вектор $(r_1e^{i\theta_1}, ..., r_ne^{i\theta_n})$. Таким образом, $T_\varphi(\theta)$ – это множество линейных мажорант (с точностью до сдвига $C_{\nu,\theta}$)

$$\nu = \nu(r) = \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n$$

для логарифма модуля функции φ. Определим множество

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta) := \{\nu \in \mathbf{R}^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi(\theta), \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi(\theta) \quad \text{для любого} \ \ \varepsilon \in \mathbf{R}^n_+\},$$

которое можно назвать *граничным множеством линейных мажорант.*

Скажем, что целая функция φ интерполирует коэффициенты ряда (1.3), если

$$\varphi(k) = f_k \ \ \text{для всех} \ \ k \in \mathbf{N}^n. \tag{1.5}$$

Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ – область сходимости ряда (1.3). Введем семейство

$$G = \bigcup_R \gamma_{\sigma,R} = \bigcup_R (\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}) \subset \partial D \tag{1.6}$$

полидуг $\gamma_{\sigma,R}$, где R пробегает поверхность сопряженных радиусов сходимости ряда (1.3), а $\sigma = \sigma(R) = (\sigma_1(R), ..., \sigma_n(R))$.

Теорема 1.1. *Семейство G полидуг (1.6) является множеством регулярности для ряда (1.3) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:*

1) $0 \in \mathcal{M}_{R^*\varphi}(0)$,

2) существует вектор-функция $\nu_R(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^*\varphi}(\theta)$, для которой

$$\varlimsup_{(\theta_1,..\overset{j}{\vee}..,\theta_n)\to 0} \ \varlimsup_{\theta_j \to 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j(R), \quad j = 1, ..., n. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы достаточно провести для полидуги $\gamma_{\sigma,R}$ из остова поликруга сходимости

$$\{|z_1| < R_1, ..., |z_n| < R_n\} = D_{R_1} \times ... \times D_{R_n}.$$

А именно, при фиксированных $R_1, ..., R_n$ мы будем доказывать следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Полидуга $\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$ является множеством регулярности для ряда* (1.3) *тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:*

1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$,

2) существует вектор-функция $\nu(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$, для которой

$$\overline{\lim_{(\theta_1,..\overset{j}{\vee}..,\theta_n)\to 0}}\ \overline{\lim_{\theta_j\to 0}}\ \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.8}$$

Любопытно отметить, что для класса гипергеометрических функций (а такому классу принадлежит и общая алгебраическая функция, т.е. определенная полиномиальным уравнением с независимыми переменными коэффициентами) полидугу регулярности можно расширить до политопа регулярности (см. [9] и [10], гл. 4,7). Речь идет о продолжении ряда через кусок границы области сходимости, который в угловых координатах $\theta_1, ..., \theta_n$ определяется политопом, т.е. ограниченным многогранником.

2. Необходимость условия теоремы 1.1

Пусть сумма ряда (1.3) продолжается через полидугу $\gamma_{\sigma,R} = \gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$. Покажем, что существует целая функция $\varphi(\zeta)$, которая интерполирует коэффициенты f_k и удовлетворяет условиям 1) и 2).

Согласно предположению существует односвязная область Ω, которая содержит $(D_{R_1} \times ... \times D_{R_n}) \cup \gamma_{\sigma,R}$ и в которой сумма ряда (1.3) голоморфна. По теореме Гартогса ([6], раздел 32) эта сумма голоморфно продолжается в область, содержащую

$$(D_{R_1} \cup \gamma_{\sigma_1,R_1}) \times ... \times (D_{R_n} \cup \gamma_{\sigma_n,R_n}).$$

Зафиксируем числа $r_0^j \in (0, R_j|1 - e^{i\sigma_j}|)$, $j = 1, ..., n$, так, что

$$(\bar{D}_{r_0^1}(-R_1)) \times ... \times (\bar{D}_{r_0^n}(-R_n)) \subset \Omega.$$

Обозначим $e^{\mu_o^j} := R_j + r_o^j$ $j = 1, ..., n$. Для любых $\delta_j \in (0, \pi - \sigma_j)$ зафиксируем $\mu_j = \mu_{\delta_j}^j \in (\ln R_j, \mu_o^j)$ так, что

$$(\bar{D}_{e^{\mu_1}} \setminus \Delta^o_{\sigma_1+\delta_1}) \times ... \times (\bar{D}_{e^{\mu_n}} \setminus \Delta^o_{\sigma_n+\delta_n}) \subset \Omega.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ область $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \Omega^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times \Omega^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$, где

$$\Omega^j_{\varepsilon_j,\delta_j} := (D_{r_o^j}(-R_j)) \cup (\bar{D}_{e^{\mu_j}} \setminus \Delta_{\sigma_j+\delta_j}) \cup D_{R_j e^{-\varepsilon_j}}, \quad j = 1, ..., n,$$

удовлетворяет условию $\bar{\Omega}_{\varepsilon,\delta} \subset \Omega$.

Обозначим $\Gamma_{\varepsilon,\delta} := \partial\Omega^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times \partial\Omega^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$ – остов $\Omega_{\varepsilon,\delta}$. Так как $f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}_{\varepsilon,\delta})$, то, применяя интегральную формулу Коши для коэффициентов степенного ряда (1.3), получим

$$f_k = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \zeta^{-k-I} f(\zeta) d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}^n,$$

где $I = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^n$, а $d\zeta = d\zeta_1 ... d\zeta_n$. В качестве искомой интерполирующей функции φ возьмем тот же самый интеграл, но с комплексным параметром z вместо целочисленного k:

$$\varphi(z) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \zeta^{-z-I} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } \zeta_j^{z_j} = e^{z_j \log \zeta_j}. \tag{2.1}$$

Функция $\varphi(z)$ целая так как является интегралом по компакту от функции, непрерывной вплоть до границы по совокупности переменных $(\zeta, z) \in (\Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)^n) \times \mathbb{C}^n$ и голоморфной всюду по параметру z (здесь R_- – отрицательная вещественная полуось) [11].

Теперь нам нужно получить оценку для функции φ. Для этого произведем деформацию остова $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ следующим образом. Куски дуг из $\partial D_{r_o^j}(-R_j)$, изображенные на рис. 1 пунктиром, заменяем двумя дугами на $\partial D_{e^{\mu_j}}$ и на пару противоположно ориентированных отрезков $[-e^{\mu_o^j}, -e^{\mu_j}]$ и $[-e^{\mu_j}, -e^{\mu_o^j}]$. Полученный для каждого $j = 1, ..., n$ контур обозначим $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$. Весь остов $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ деформируется в n-мерный цикл $L_{\varepsilon,\delta} = L^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times L^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$. Заметим, что при фиксированном $r_0 \in \mathbb{R}^n_+$ и выбранном $\sigma \in \mathbb{R}^n_+$ кривые $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$ и $L^j_{\hat{\varepsilon}_j,\hat{\delta}_j}$ ограничивают цепь, где подынтегральное выражение в (2.1) однозначно и голоморфно по ζ_j, поэтому задание $\varphi(z)$ интегралом (2.1) не зависит от ε и δ.

Обозначая $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, ..., n$, и

$$M_{\varepsilon,\delta} := \sup_{\zeta \in L_{\varepsilon,\delta}} |f(\zeta)|,$$

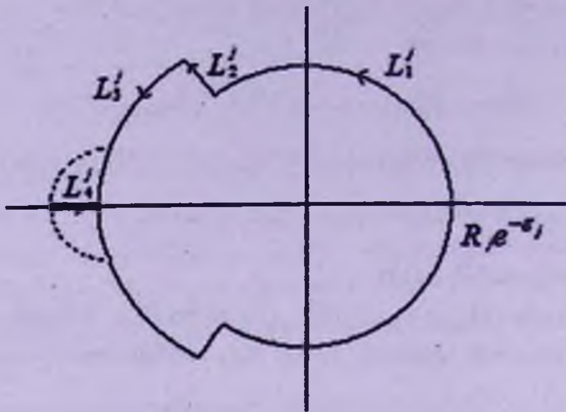

Рис. 1

из (2.1) получаем оценку

$$|\varphi(z)| \le M_{\varepsilon,\delta}\mathfrak{I}, \quad z \in \mathbf{C}^n, \tag{2.2}$$

где

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{(\pi)^n} \int\limits_{L_1^+\times\ldots\times L_n^+} |\zeta_1|^{-\varepsilon_1-1} e^{|\eta_1|\arg\zeta_1}\ldots|\zeta_n|^{-\varepsilon_n-1} e^{|\eta_n|\arg\zeta_n}|d\zeta_1|\ldots|d\zeta_n|.$$

Здесь L_j^+ – это часть $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$, лежащая в верхней полуплоскости, т.е.

$$L_+^j = L_1^j \cup L_2^j \cup L_3^j \cup L_4^j,$$

где

$$L_1^j = \{R_j e^{-\varepsilon_j + i\omega_j} : \omega_j \in [0, \sigma_j + \delta_j)\}, \quad L_2^j = \{t_j e^{i(\sigma_j+\delta_j)} : t_j \in [R_j e^{-\varepsilon_j}, e^{\mu_j})\},$$

$$L_3^j = \{e^{\mu_j + i\omega_j} : \omega_j \in [\sigma_j + \delta_j, \pi)\}, \quad L_4^j = \{t_j e^{i\pi} : t_j \in [e^{\mu_j}, e^{\mu_0^j}]\}.$$

Следовательно, $\mathfrak{I}$ можно представить как сумму интегралов $\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n}$ по цепям $L^1_{p_1}\times\ldots\times L^n_{p_n}$, $p_1,\ldots,p_n = 1,2,3,4$. Каждая такая цепь есть прямое произведение *дуг* (с центрами в нуле) и *отрезков* прямых (проходящих через нуль). Это позволяет сделать эффективные оценки интегралов $\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n}$. Например,

$$\mathfrak{I}_{1\ldots1} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{L_1^1\times\ldots\times L_1^n} |\zeta_1|^{-\varepsilon_1} e^{|\eta_1|\arg\zeta_1}\ldots|\zeta_n|^{-\varepsilon_n} e^{|\eta_n|\arg\zeta_n}\left|\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\right|\ldots\left|\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_0^{\sigma_1+\delta_1} \dots \int\limits_0^{\sigma_n+\delta_n} \prod_{j=1}^{n} (R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j + |\eta_j| \omega_j}) d\omega_1 \dots d\omega_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left(R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \; \frac{e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|} - 1}{|\eta_j|} \right).$$

С учетом того, что $\sigma_j + \delta_j \le \pi$, мы из очевидного неравенства $e^{ax} - 1 \le a e^{ax}$, где $a \ge 0$, $x \ge 0$, получаем оценку

$$\mathfrak{I}_{1\dots1} \le \prod_{j=1}^{n} \left(R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \; e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|} \right).$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\mathfrak{I}_{2\dots2} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{L_2^1 \times \dots \times L_2^n} |\zeta_1|^{-\xi_1} e^{|\eta_1| \arg \zeta_1} \dots |\zeta_n|^{-\xi_n} e^{|\eta_n| \arg \zeta_n} \left|\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\right| \dots \left|\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{R_1 e^{-\varepsilon_1}}^{e^{\mu_1}} \dots \int\limits_{R_j e^{-\varepsilon_n}}^{e^{\mu_n}} \prod_{j=1}^{n} \left(t_j{}^{-\xi_j - 1} e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} \right) dt_1 \dots dt_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} \left(\frac{e^{-\mu_j \xi_j} - R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j}}{-\xi_j} \right) \right).$$

Следовательно, при $\xi_j \ge 1$ получаем оценку

$$\mathfrak{I}_{2\dots2} \le \prod_{j=1}^{n} \left(e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \right).$$

Далее, имеем

$$\mathfrak{I}_{3\dots3} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\sigma_1+\delta_1}^{\pi} \dots \int\limits_{\sigma_n+\delta_n}^{\pi} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\mu_j \xi_j} e^{\omega_j |\eta_j|} \right) d\omega_1 \dots d\omega_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\mu_j \xi_j} \left(\frac{e^{|\eta_j| \pi} - e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}}{|\eta_j|} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} \left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j} - 1}{|\eta_j|} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left((\pi - \sigma_j - \delta_j) e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} \left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} - 1}{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} \right) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\pi e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)} e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} \right) \le \prod_{j=1}^{n} e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}.$$

Наконец,

$$\mathfrak{I}_{4\ldots 4} = \frac{1}{\pi^n}\int_{e^{\mu_1}}^{e^{\mu_0^1}}\ldots\int_{e^{\mu_n}}^{e^{\mu_0^n}} t_1^{-\xi_1-1}e^{\pi|\eta_1|}\ldots t_n^{-\xi_n-1}e^{\pi|\eta_n|}dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\pi|\eta_j|}\left(\frac{e^{-\mu_j\xi_j}+e^{-\mu_0^j\xi_j}}{\xi_j}\right)\right),$$

откуда при $\xi_j \geq 1$ приходим к оценке

$$\mathfrak{I}_{4\ldots 4} \leq \prod_{j=1}^{n} e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}.$$

Полученные результаты показывают, что при повторном вычислении интеграла $\mathfrak{I}_{p_1\ldots p_n}$ в зависимости от значения p_j (показывающего, что интегрирование по переменной ζ_j ведется по куску $L^j_{p_j}$), вклад в оценку этого интеграла дают выражения:

$$R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|}, \text{ если } p_j = 1,$$

$$e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}, \text{ если } p_j = 2 \text{ и } \xi_j \geq 1,$$

$$e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}, \text{ если } p_j = 3,$$

$$e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}, \text{ если } p_j = 4 \text{ и } \xi_j \geq 1.$$

Каждый набор $p_1,\ldots,p_n$ разобьем на 4 группы: A_1, A_2, A_3, A_4, где A_j – это номера $k \in \{1,\ldots,n\}$, для которых $p_k = j$. Тогда при $\xi_l \geq 1$, $j = 1,\ldots n$, получим:

$$\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n} \leq \prod_{j\in A_1} R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|}\prod_{j\in A_2} e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\times$$

$$\times\prod_{j\in A_3} e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}\prod_{j\in A_4} e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}.$$

При $\pi|\eta_j| \leq \mu_j\xi_j$ выполняется неравенство $e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|} \leq 1$, поэтому из предыдущей оценки получаем следующую оценку для суммарного интеграла:

$$\mathfrak{I} < C_{\varepsilon,\delta}R_1^{-\xi_1}\ldots R_n^{-\xi_n}e^{|\eta_1|(\sigma_1+\delta_1)+\varepsilon\xi_1}\ldots e^{|\eta_n|(\sigma_n+\delta_n)+\varepsilon\xi_n}.$$

Таким образом, в обозначениях $\zeta_j = r_je^{i\theta_j}$ и $\alpha_j = \arctan(\mu_j/\pi)$ неравенство (2.2) дает нам оценку для функции φ:

$$(2.3)\quad |\varphi(re^{i\theta})| \leq cR^{-r\cos\theta}e^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|+\varepsilon_1\cos\theta_1)r_1+\ldots+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|+\varepsilon_n\cos\theta_n)r_n},$$

если $|\theta_j| \le \alpha_j,\ \ j = 1, ..., n$.

Неравенство (2.3) можно переписать в следующем виде

$$R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta})| \le ce^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|+\varepsilon_1\cos\theta_1)r_1+...+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|+\varepsilon_n\cos\theta_n)r_n}.$$

Логарифмируя последнее неравенство, получим при $|\theta_j| \le \alpha_j,\ j = 1, ..., n$

$$\ln(R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta}|) \le c + \sum_{j=1}^{n}(((\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j| + \varepsilon_j\cos\theta_j)r_j)\,. \tag{2.4}$$

Взяв $\theta = 0$ в неравенстве (2.4), получим

$$\ln(R^r|\varphi(r)|) \le c + <\varepsilon, r> \tag{2.5}$$

для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$. Это означает, что $0 \in T_{R^z\varphi}(0)$.

С помощью равенств (1.4) и (1.5) заключаем, что

$$\ln(R^k|\varphi(k)|)^{\frac{1}{|k|}} = 0, \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \tag{2.6}$$

то есть для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ вектор $-\varepsilon \notin T_{R^z\varphi}(0)$. Следовательно, из (2.5) и (2.6) получаем $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$.

Также из неравенства (2.4) следует, что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$

$$((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1| + \varepsilon_1\cos\theta_1, ..., (\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n| + \varepsilon_n\cos\theta_n) \in T_{R^z\varphi}(\theta),$$

если $|\theta_j| \le \alpha_j,\ j = 1, ..., n$.

Следовательно существует $\nu(\theta) = (\nu_1(\theta), ..., \nu_n(\theta)) \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$ со свойством

$$\nu_j(\theta) \le (\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j| \ \text{при}\ |\theta_j| \le \alpha_j,\ j = 1, ..., n.$$

Для компонент $\nu(\theta)$ получаем

$$\overline{\lim_{(\theta_1,..\overset{\vee}{j}..,\theta_n)\to 0}}\ \overline{\lim_{\theta_j\to 0}}\frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Тем самым необходимость условия Предложения 1.1, следовательно и Теоремы 1.1, доказана.

3. Достаточность условия теоремы 1.1

Пусть φ целая функция, которая удовлетворяет условиям 1) и 2) Предложения 1.1. Покажем, что ряд (1.3) продолжается через полидугу $\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$. Из условия 2) следует, что для любого $\delta_j \in (0, \frac{\pi-\sigma_j}{2})$ существует α_j такое, что

$$\nu_j(\theta) \le (\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j|, \ \text{ если }\ |\theta_j| \le \alpha_j,\ \ j = 1, ..., n.$$

Поскольку $\nu(\theta) \in \mathcal{M}_{R^s\varphi}(\theta)$, выполняется неравенство

$$\ln\left(R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta})|\right) \le ((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|)r_1 + \ldots + ((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|)r_n + c,$$

из которого вытекает следующая оценка

$$(3.1)\qquad |\varphi(re^{i\theta})| \le e^c R_1^{-r_1\cos\theta_1}\ldots R_n^{-r_n\cos\theta_n} e^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|)r_1+\ldots+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|)r_n}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$g(\zeta,z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z_j^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i\zeta_j}-1)},$$

где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1,\ldots,n$. Эта функция является мероморфной функцией по переменным ζ из $\mathbb{C}^n$ и голоморфной по переменным z из $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$.

Обозначим $D^* = \cup_{m\in\mathbb{Z}} D_{1/4}(m)$. Заметим, что существует константа $C > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$(3.2)\qquad |e^{2\pi i w} - 1| > \frac{e^{\pi(|\operatorname{Im} w| - \operatorname{Im} w)}}{C} \quad \text{при} \quad w \in \mathbb{C}\setminus D^*.$$

Из него легко получается оценка

$$(3.3)\qquad |g(\zeta,z)| < Ce^{<\xi,\log|z|> - <(\pi-|\pi-\arg z|),|\eta|>}$$

при $\zeta \in (\mathbb{C}\setminus D^*)^n$ и $z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$.

Используя (3.1) и (3.3) для $\zeta \in (\Delta_{\sigma_1}\setminus D^*)\times\ldots\times(\Delta_{\sigma_n}\setminus D^*)$ и $z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$, получим

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta,z)| < cR^{-\xi}e^{<\sigma+\delta,\eta>}e^{<\xi,\log|z|> - <(\pi-|\pi-\arg z|),|\eta|>} =$$

$$= cR^{-\xi}e^{<\xi,\log|z|> - <(\pi-|\pi-\arg z|-\sigma-\delta),|\eta|>}.$$

Обозначая

$$d(z) = (d_1(z_1),\ldots,d_n(z_n)),\quad d_j(z_j) = \pi - |\pi - \arg z_j| - \sigma_j - \delta_j,\quad j = 1,\ldots,n,$$

получим

$$(3.4)\qquad |\varphi(\zeta)||g(\zeta,z)| < cR^{-\xi}e^{<\xi,\log|z|> - <d(z),|\eta|>}.$$

Введем множества

$$K_j = \bar{D}_{R_je^{\varepsilon_j}} \setminus (\Delta^o_{\sigma_j+2\delta_j} \cup D_{R_j/2}),\quad \varepsilon_j > 0,\quad j = 1,\ldots,n.$$

Покажем, что

$$(3.5)\qquad d_j(z_j) \ge \delta_j \quad \text{при} \quad z_j \in K_j \quad j = 1,\ldots,n.$$

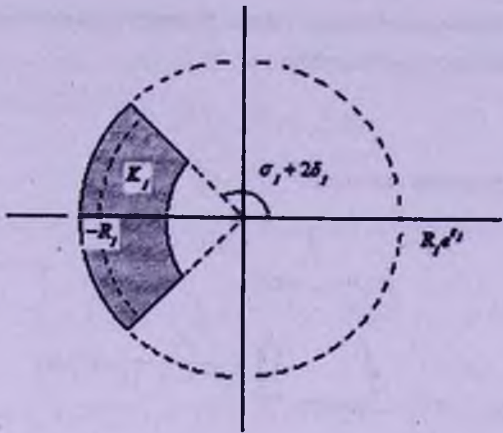

Рис. 2

Действительно,

$$d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - |\pi - \arg z_j|, \quad j = 1, ..., n.$$

Поскольку $z_j \in K_j$, то

$$1)\ \sigma_j + 2\delta_j < \arg z_j < \pi, \ \ => \ \ d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - \pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j,$$

$$2)\ \pi < \arg z_j < 2\pi - \sigma_j - 2\delta_j, \ \ => \ \ d_j(z_j) = 2\pi - \sigma_j - \delta_j - 2\pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j.$$

Таким образом, для $(z_1, ..., z_n) \in (K_1 \times ... \times K_n)$ и $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in (\partial\Delta_{\alpha_1} \setminus D^*) \times ... \times (\partial\Delta_{\alpha_n} \setminus D^*)$ получим

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < cR^{-\xi}e^{<\xi, \log|z|> - <\delta, |\eta|>} \leq$$

$$\leq cR^{-\xi}e^{<\xi, \log(Re^{\epsilon})> - <\delta, |\eta|>} = ce^{<\xi, \epsilon> - <\delta, |\eta|>}.$$

Взяв $2\epsilon_j = \delta_j \sin\alpha_j$, $j = 1, ..., n$, получим

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < ce^{<-\epsilon, |\zeta|>}. \tag{3.6}$$

Для каждого $j \in \{1, ..., n\}$ рассмотрим область $G_j = D_{R_j} \cup \Delta^{o}_{\alpha_j}$, и пусть $\Gamma_j = \partial G_j$ – граница этой области, положительно ориентированная относительно нуля. Для каждого натурального m_j рассмотрим следующий кусок Γ_j :

$$\Gamma^j_{m_j} = \{\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in \Gamma_j : \xi_j \leq m_j + \frac{1}{2}\}.$$

Обозначим через $I^j_{m_j}$– вертикальный отрезок с вершинами (см. рис. 3)

$$(m_j + \frac{1}{2})(1 \pm i\tan\alpha_j) \ \text{ для } \ m_j \in \mathbf{N},$$

ориентированный движением снизу вверх. Ограниченную объединением $\Gamma^j_{m_j} \cup L^j_{m_j}$ область обозначим $G^j_{m_j}$ так, что

$$\partial G^j_{m_j} = \Gamma^j_{m_j} \cup L^j_{m_j}.$$

Рассмотрим следующий интеграл

$$I_m = \int\limits_{\partial G_1^{m_1} \times \ldots \times \partial G_n^{m_n}} g(\zeta, z)\varphi(\zeta)d\zeta = \tag{3.7}$$

$$= \int\limits_{\partial G_1^{m_1} \times \ldots \times \partial G_n^{m_n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta)d\zeta.$$

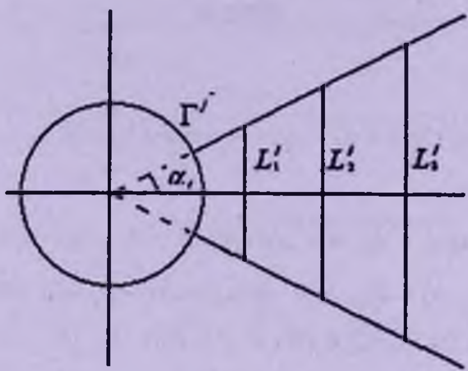

Рис. 3

Вычислим этот интеграл с помощью многомерных вычетов. Его подынтегральное выражение определяет дифференциальную форму

$$\omega = \prod_{j=1}^{n} \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta)d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

с полюсами на дивизорах

$$Q_1 = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : f_1 = e^{2\pi i \zeta_1} - 1 = 0\} = \mathbf{Z} \times \mathbf{C}^{n-1},$$

. . . .

$$Q_n = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : f_n = e^{2\pi i \zeta_n} - 1 = 0\} = \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{Z}.$$

Так как пересечение $Z = Q_1 \cap ... \cap Q_n = \mathbf{Z}^n$ дискретно и якобиан $\partial(f)/\partial(\zeta) = (2\pi i)^n \neq 0$ в точках $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbf{Z}^n$, то для каждой точки $k \in \mathbf{Z}^n$ определяется локальный вычет (см. [12], [13]) :

$$res_k\omega = \frac{z^k \varphi(k)}{\frac{\partial(f)}{\partial(\zeta)}(k)} = \varphi(k) z^k. \tag{3.8}$$

Остов интегрирования в (3.7) связан с полярными дивизорами $Q_1, ..., Q_n$ следующими соотношениями:

$$Q_1 \cap (\partial G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) = (\mathbf{Z} \times \mathbf{C}^{n-1}) \cap (\partial G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) = \emptyset,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_n \cap (G_1^{m_1} \times ... \times \partial G_n^{m_n}) = (\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{Z}) \cap (G_1^{m_1} \times ... \times \partial G_n^{m_n}) = \emptyset.$$

Согласно терминологии [12], это означает, что полиэдр $G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}$ согласован с дивизорами $Q_1, ..., Q_n$. Поэтому, согласно принципу разделяющих циклов, интеграл (3.7) после умножения на $(2\pi i)^{-n}$ равен сумме вычетов по всем точкам

$$k \in (G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) \cap (\mathbf{Z} \times ... \times \mathbf{Z}).$$

С учетом формулы (3.8) получаем

$$I_m = \sum_{k_1=0}^{m_1} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} \varphi(k_1, ..., k_n) z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}. \tag{3.9}$$

Представим интеграл (3.7) как сумму 2^n интегралов по цепям

$$\Gamma_{m_1}^1 \times ... \times \Gamma_{m_n}^n, ..., L_{m_1}^1 \times ... \times L_{m_n}^n.$$

Для каждой такой цепи переменные интегрирования $\zeta_1, ..., \zeta_n$ разобьем на 2 группы: B_1, B_2, где B_1 – это номера $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $\zeta_j \in L_{m_j}^j$, а B_2 – это номера $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $\zeta_j \in \Gamma_{m_j}^j$. Тогда, используя (3.4), получим

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < C \prod_{j \in B_1} e^{m_j \log \frac{|z_j|}{R_j}} \prod_{j \in B_2} e^{-\varepsilon_j |\zeta_j|}, \tag{3.10}$$

где $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times ... \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$.

Из (3.10) видно, что, если $B_1 \neq \emptyset$, то интеграл по соответствующей цепи стремится к нулю, когда $m_j \to \infty$, $j \in B_1$. Рассмотрим интеграл

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{\Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n} g(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Из оценки (3.6) следует, что интеграл I сходится равномерно для z из компакта $(K_1 \times ... \times K_n)$, определяя голоморфную функцию на внутренности этого компакта. Поскольку $I_m \to \mathfrak{I}$ при $m_j \to \infty$, $j = 1, ..., n$, получаем $\mathfrak{I}(z) = f(z)$ при $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times ... \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$. Это означает, что полидуга $\gamma_{\sigma | 2\delta, R}$ является полидугой регулярности для f, если δ достаточно близок к нулю. Таким образом, $\gamma_{\sigma, R}$ – полидуга регулярности для f, что и требовалось доказать.

Abstract. In this paper we study the sets of regularity on the boundary of the domain of convergence for a given multiple power series. As such sets we consider collections of polyarcs on the frames of polydisk of convergence of the series. In terms of an entire function, interpolating the coefficients of series, we find the sizes of polyarcs, constituting the regular set. To compute the sizes of polyarcs we essentially use the set of linear majorants for the logarithm of the interpolating entire function.

Список литературы

[1] Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, Москва, Наука (1967).
[2] Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация сингулярностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН Армении, серия Математика, **22**, но. 1, 3-21 (1987).
[3] Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости. II", Изв. АН Армении, серия Математика, **23**, но. 2, 123 – 137, (1988).
[4] N. U. Arakelian, "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in approximation theory (FL: Tampa, 1990); Computational Mathematical Series, **19**, New York, Springer, 295 -Ц 313 (1992).
[5] N. Arakelian, W. Luh, J. Muller, "On the localization of singularities of lacunar power series", Complex Variables and Elliptic Equations, **52**, no. 7, 561 – 573 (2007).
[6] Б. В. Шабат, "Введение в комплексный анализ", **2**, М., Наука (1987).
[7] В. К. Иванов, "Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов", Мат. сборник, **47(89)**, но. 1, 4 – 5 (1959).
[8] Л. И. Ронкин, Введение в Теорию Целых Функций Многих Переменных, Москва, Наука (1971).
[9] И. А. Антипова, "Обращение многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений", Матем. сб., **198**, вып. 4, 3 – 20 (2007).
[10] Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и Алгебраические Функции Многих Переменных, М., Наука (2014).
[11] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, Лекции по Теории Функций Комплексного Переменного, Наука (1989).
[12] A. K. Tsikh, Multidimensional Residues and Their Applications, AMS. **103**, Providence (1992).
[13] О. Н. Жданов, А. К. Цих, "Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов", Сиб. мат. журн., **39:2**, 281 - 298 (1998).

Поступила 8 сентября 2014

Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 65-76.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATORS FOR A GENERALIZED PARETO-TYPE DISTRIBUTION

D. FARBOD

Quchan University of Advanced Technology, Quchan, Iran

E-mails: *d.farbod@qiet.ac.ir*

Abstract. Astola and Danielian [1], using stochastic birth-death process, have proposed a regular four-parameter discrete probability distribution, called *generalized Pareto-type model*, which is an appealing distribution for modeling phenomena in Bioinformatics. Farbod and Gasparian [5], fitted this distribution to the two sets of real data, and have derived conditions under which a solution for the system of likelihood equations exists and coincides with the maximum likelihood estimators (MLE) for the model unknown parameters. Also, in [5], an accumulation method for approximate computation of the MLE has been considered with simulation studies. In this paper we show that for sufficiently large sample size the system of likelihood equations has a solution, which according to [5], coincides with the MLE of vector-valued parameter for the underlying model. Besides, we establish asymptotic unbiasedness, weak consistency, asymptotic normality, asymptotic efficiency, and convergence of arbitrary moments of the MLE, by verifying the so-called regularity conditions.

MSC2010 numbers: 62F10, 62F12.

Keywords: Generalized Pareto-type frequency distribution; Maximum likelihood estimator.

1. Introduction

The mechanism of biomolecular large-scale systems dynamic often can be explained with the help of standard stochastic birth-death process with various specific constraints on its coefficients. The stationary solutions of the process, which always are right-skewed, can be used as frequency distributions of different events, occurring in large-scale biomolecular systems. For details we refer to [1, 4].

Based on the standard *birth-death models*, several frequency distributions have been considered for biomolecular applications (see, for instance, Bornholdt and Ebel [2], Kuznetsov [6, 7], Kuznetsov et al. [8], and Danielian and Astola [4]). Since then Astola and Danielian [1], based on data sets, have introduced the following "four-parameter"regular frequency distribution, called *generalized Pareto-type frequency* *distribution* (see also [5]):

$$(1.1)\quad \begin{cases} p_\alpha(k) = \mathbb{P}_\alpha(\xi = k) = [g(\alpha)]^{-1} \cdot \frac{\theta^k}{(k+b)^\rho} \cdot \prod_{m=0}^{k-1}(1 + \frac{c-1}{(m+b)^\rho}), \quad k = 1, 2..., \\ p_\alpha(0) = [g(\alpha)]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{(n+b)^\rho} \cdot \prod_{m=0}^{n-1}(1 + \frac{c-1}{(m+b)^\rho})\right]^{-1}, \end{cases}$$

where $\alpha = (\theta, c, b, \rho)$ is an unknown parameter, such that $0 < \theta < 1$, $0 < c < \infty$, $0 < b < \infty$, $1 < \rho < \infty$, $b^\rho > 1 - c$.

The model (1.1) is described by a four-component vector parameter: $\alpha = (\theta, c, b, \rho)$, in which c is the *non-linear scale* parameter (or *exponential scale* parameter), b is the *location* parameter, the parameter ρ describes the *shape* of the probability distribution, as for the parameter θ, its role is explained in [1], Ch. 4, Theorem 4.2.

The problem of interest is to investigate the statistical properties of the parameters for the *generalized Pareto-type frequency distribution*, given by (1.1). However, the model (1.1) suffers from two major drawbacks. First, it lacks a simple closed form expression for probability mass function. The second disadvantage is that the r-th ($r \in \mathbb{N}$) absolute moment of this distribution exists only for $\rho > r+1$ (see [5], Lemma 1). This leads to a serious difficulties in making statistical inferences about the model unknown parameters.

Some aspects of this problem has been considered in [5]. For instance, conditions under which a solution of the system of likelihood equations exists and coincides with the MLE for the unknown parameters of the model (1.1), were obtained; an approximate method (with *simulation studies*) for estimating the model parameters was proposed, as well as, two real data sets on the number of proteins and the number of residues have been proposed for fitting the model (1.1).

The purpose of the present paper is to continue the investigations conducted in [5]. Specifically, in this paper we prove that for sufficiently large sample size the system of likelihood equations has a solution, which according to the results from [5], coincides with the Maximum Likelihood Estimator (MLE) of a vector parameter for the underlying model. Besides, we establish asymptotic unbiasedness, weak consistency, asymptotic normality, asymptotic efficiency, and convergence of arbitrary moments of the MLE to the corresponding moments of the limiting normal distribution. To this end, we make use the well-known results on asymptotic behavior of the MLE (see [3], [9]), by verifying the corresponding regularity conditions, called RR-conditions.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 contains the RR conditions (in the general case), and the asymptotic properties of the MLE. In Section 3 we introduce some notation and prove an auxiliary result (Lemma 3.1). The main results of the paper are given in Section 4.

2. The RR–conditions and the asymptotic properties of the MLE

Let $X^n = (X_1, ..., X_n)$ be a random sample drawn from the distribution $\mathbf{P}_\alpha$ belonging to the parametric family of distributions $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\alpha,\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A \subset \mathbb{R}^k\}$, and let $p_\alpha(x)$ be the density function of $\mathbf{P}_\alpha$.

We say that the parametric family of distributions $\mathcal{P}$ satisfies the RR–conditions if the following are satisfied (see [3]):

1. There exists a *compact* subset Ω of the parametric set $A = \{\alpha\}$ containing an open neighborhood of the true value α^0 of the parameter α.
2. The distributions $\mathbf{P}_\alpha$ are *distinct*, that is, $p_{\alpha^1}(x) \neq p_{\alpha^2}(x)$ for all $\alpha^1 \neq \alpha^2$ ($\alpha^1, \alpha^2 \in \Omega$) and all $x \in Supp\ \mathbf{P}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : p_\alpha(x) > 0\}$.
3. The distributions $\mathbf{P}_\alpha$ have a *common support*, that is, the set $Supp\ \mathbf{P}_\alpha$ does not depend on α.
4. For all $x \in Supp\ \mathbf{P}_\alpha$ the functions $l_\alpha(x) = \ln p_\alpha(x)$ are twice continuously differentiable in α, and there exists a function $M(x)$ satisfying $\int_{\mathbb{R}} |M(x)| p_\alpha(x) dx < \infty$ and
$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\alpha \in \Omega} \int_{|M(x)| > N} M(x) p_\alpha(x) dx = 0,$$
such that for all $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \Omega$ and $x \in Supp\ \mathbf{P}_\alpha$
$$| l_\alpha^{ij}(x) | \leq M(x),$$
where $l_\alpha^{ij}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$.
5. The Fisher information matrix
$$I(\alpha) = \| I_{ij}(\alpha) \|_{1 \leq i,j \leq 4},$$
where $I_{ij}(\alpha) = E_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i} l_\alpha(X_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_j} l_\alpha(X_1)\right] = -E_\alpha[l_\alpha^{ij}(X_1)]$ is a positive definite continuous function for all $\alpha \in \Omega$ such that $| I(\alpha) | = \det I(\alpha) > 0$.

Here and in what follows $E_\alpha[\cdot]$ stands for the expectation by the distribution $\mathbf{P}_\alpha$ of the random variable in brackets.

Theorem 2.1. *(see [3]). Let the RR-conditions be satisfied. Then with probability tending to one as n tends to infinity, there exists a solution $\widehat{\alpha}_n = \widehat{\alpha}(X^n)$ of the system of likelihood equations*

$$\frac{\partial L_\alpha(X^n)}{\partial \alpha_i} = 0, \; 1 \le i \le k, \tag{2.1}$$

where $L_\alpha(X^n) = \sum_{i=1}^n l_\alpha(X_i)$ is the logarithm of the likelihood function $f_\alpha(X^n) = \prod_{i=1}^n p_\alpha(X_i)$, possessing the following properties:

(i) *$\widehat{\alpha}_n$ is an asymptotically normal and asymptotically efficient estimator for α, that is,*

$$u_n = \sqrt{n}(\widehat{\alpha}_n - \alpha) \xrightarrow{d} u \sim N(0, I^{-1}(\alpha)),$$

where $u \sim N(0, I^{-1}(\alpha))$ is a k-dimensional normally distributed random variable with mean vector 0 and covariance matrix $I^{-1}(\alpha)$, and $\xrightarrow{d}$ means convergence in distribution.

(ii) *$\widehat{\alpha}_n$ is a consistent estimator for α, that is, $\widehat{\alpha}_n \xrightarrow{P_\alpha} \alpha$ as $n \longrightarrow \infty$, where $\xrightarrow{P_\alpha}$ means convergence in probability.*

(iii) *for all $k \ge 1$*

$$E_\alpha[u_n^k] \longrightarrow E_\alpha[u^k].$$

(iv) *$\widehat{\alpha}_n$ is an asymptotically unbiased estimator for α, that is,*

$$E_\alpha[\widehat{\alpha}_n] = \alpha + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad as \quad n \to \infty,$$

and also

$$E_\alpha\Big[(\widehat{\alpha}_n - \alpha)^T(\widehat{\alpha}_n - \alpha)\Big] = \frac{1}{n} \cdot I^{-1}(\alpha) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad as \quad n \to \infty,$$

where m^T stands for the transpose of a vector $m \in R^k$.

Remark 2.1. It follows from the results of [5] that the solution $\widehat{\alpha}_n$ of the system (2.1) coincides with the MLE of the parameter α (recall that the statistic $\widehat{\alpha}_n = \widehat{\alpha}(X^n)$ on which the function $L_\alpha(X^n)$ attains its (local) maximal value is called the MLE for parameter α).

3. Notation and Preliminaries

Let ξ be a discrete random variable with probability distribution given by (1.1), and let the parametric space Ω be defined as follows:

$$\Omega = \Big\{\alpha: \ 0 < \theta_0 \le \theta \le \Theta_0 < 1, \ 1 < c_0 \le c \le C_0 < \infty, \ 0 < b_0 \le b \le B_0 < \infty$$

$$(b_0 < 1), 3 < \rho_0 \le \rho \le R_0 < \infty\Big\}.$$

For $x \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \Omega$, $j, k \in \mathbf{N}$ and $\gamma \in \mathbf{R}$, we denote (see [5]):

$$h_{\gamma,j}(x,\alpha) = \textstyle\sum_{m=0}^{x-1}(m+b)^{-\gamma}[(m+b)^{\rho}+c-1]^{-j};$$

$$l_{\gamma,j,k}(x,\alpha) = \textstyle\sum_{m=0}^{x-1}(m+b)^{\gamma}\ [(m+b)^{\rho}+c-1]^{-j}\cdot[\ln(m+b)]^{k};$$

$$H(x,\alpha) = (c-1)h_{1,1}(x,\alpha) + (x+b)^{-1};$$
$$\Lambda(x,\alpha) = (c-1)\ l_{0,1,1}(x,\alpha) + \ln(x+b).$$

According to [5], the first and second order partial derivatives of function $l_\alpha(x)$ with respect to α_i, where $\alpha_1 = \theta$, $\alpha_2 = c$, $\alpha_3 = b$, $\alpha_4 = \rho$, are finite if $\rho_0 > 3$, and can be represented as follows.

For the first order partial derivatives we have

$$\frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta}E_\alpha[\xi] + \frac{x}{\theta}, \qquad \frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial c} = -\Big\{E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)] - h_{0,1}(x,\alpha)\Big\},$$

$$\frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial b} = \rho\Big\{E_\alpha[H(\xi,\alpha)] - H(x,\alpha)\Big\}, \quad \frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial\rho} = E_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)] - \Lambda(x,\alpha).$$

For the second order partial derivatives we have

$$l_\alpha^{11}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}\Big\{(E_\alpha[\xi]-x) - Var_\alpha[\xi]\Big\}, \quad l_\alpha^{12}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta\partial c} = -\frac{1}{\theta}Cov_\alpha[\xi, h_{0,1}(\xi,\alpha)],$$

$$l_\alpha^{13}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta\partial b} = \frac{\rho}{\theta}Cov_\alpha[\xi, H(\xi,\alpha)], \quad l_\alpha^{14}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta\partial\rho} = \frac{1}{\theta}Cov_\alpha[\xi, \Lambda(\xi,\alpha)],$$

$$l_\alpha^{22}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial c^2} = \Big(E_\alpha[h_{0,2}(\xi,\alpha)] - h_{0,2}(x)\Big) - Var_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)],$$

$$l_\alpha^{23}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial c\partial b} = \rho\Big\{(E_\alpha[h_{1-\rho,2}(\xi)] - h_{1-\rho,2}(x)) + Cov_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha), H(\xi,\alpha)]\Big\},$$

$$l_\alpha^{24}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial c\,\partial\rho} = \{E_\alpha[l_{\rho,2,1}(\xi,\alpha)] - l_{\rho,2,1}(x,\alpha)\} + Cov_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha), \Lambda(\xi,\alpha)],$$

$$l_{\alpha}^{33}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial b^2} = \rho^2 Var_{\alpha}[H(\xi,\alpha)] - \rho\{E_\alpha[\tfrac{1}{\xi+b}]^2 - \tfrac{1}{x+b}\} - \rho(c-1)\{E_\alpha[h_{2,1}(\xi,\alpha)]$$

$$-h_{2,1}(x,\alpha)\} - \rho^2(c-1)\{E_\alpha[h_{2-\rho,2}(\xi,\alpha)] - h_{2-\rho,2}(x,\alpha)\},$$

$$l_{\alpha}^{34}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial b \partial \rho} = \{E_\alpha[H(\xi,\alpha)] - H(x,\alpha)\} + \rho(c-1)\{E_\alpha[l_{\rho-1,2,1}(\xi,\alpha)]$$

$$-l_{\rho-1,2,1}(x,\alpha)\} - \rho\, Cov_\alpha[H(\xi,\alpha),\Lambda(\xi,\alpha)],$$

$$l_{\alpha}^{44}(x) = \frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial \rho^2} = -Var_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)] - (c-1)\{E_\alpha[l_{\rho,2,2}(\xi,\alpha)] - l_{\rho,2,2}(x,\alpha)\}.$$

Lemma 3.1. *For all $x \subset \mathbf{N}$, $\alpha \subset \Omega$, $j,k \subset \mathbf{N}$ and $\gamma \subset \mathbf{R}$ the following inequalities hold:*

(i) $h_{\gamma,j}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0 j+\gamma}}$, *if* $\rho j + \gamma > 0$;

(ii) $l_{\gamma,j,k}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0 j-\gamma-k}}$, *if* $\rho j - \gamma - k > 0$;

(iii) $H(x,\alpha) < \frac{(C_0-1)\,x}{b_0^{R_0+1}} + \frac{1}{x+b_0}$;

(iv) $\Lambda(x,\alpha) < \frac{(C_0-1)\,x}{b_0^{R_0-1}} + x + B_0$.

Proof. We have

$$h_{\gamma,k}(x,\alpha) = \sum_{m=0}^{x-1} \frac{1}{(m+b)^\gamma} \cdot \frac{1}{[(m+b)^\rho + c - 1]^j} < \sum_{m=0}^{x-1} \frac{1}{(m+b)^{j\rho+\gamma}} < \frac{x}{b_0^{jR_0+\gamma}},$$

implying the inequality (i).

To prove (ii), observe that

$$l_{\gamma,j,k}(x,\alpha) = \sum_{m=0}^{x-1} (m+b)^\gamma \cdot \frac{[\ln(m+b)]^k}{[(m+b)^\rho + c - 1]^j} < \sum_{m=0}^{x-1} \frac{1}{(m+b)^{j\rho-\gamma-k}} < \frac{x}{b_0^{R_0 j-\gamma-k}},$$

and the result follows.

To prove the inequality (iii), we use the inequality (i), to obtain

$$H(x,\alpha) = (c-1)h_{1,1}(x,\alpha) + (x+b)^{-1} < (C_0-1)\cdot\frac{x}{b_0^{R_0+1}} + (x+b_0)^{-1}.$$

Finally, using the inequality (ii), we can write

$$\Lambda(x,\alpha) = (c-1)l_{0,1,1}(x,\alpha) + \ln(x+b) < (C_0-1)\frac{x}{b_0^{R_0-1}} + x + B_0,$$

implying the inequality (iv). Lemma 3.1 is proved.

4. The Main Results

Let, as above, ξ be a discrete random variable with probability distribution $\mathbf{P}_\alpha$ given by (1.1), and let $X^n = (X_1, ..., X_n)$ be a random sample from the distribution $\mathbf{P}_\alpha$. We first prove a lemma, which will be used in the proof of our main result.

Lemma 4.1. *For all $\alpha \in \Omega$ there exist positive numbers A_{ij} and B_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ such that the second order partial derivatives $l_\alpha^{ij}(x)$ satisfy the following inequalities:*

$$| l_\alpha^{ij}(x) | \leq A_{ij} + B_{ij} \cdot x, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

for all $x \in \mathbf{N}$.

Proof. The following inequalities from [5] we use repeatedly:

$$E_\alpha[\xi^k] \leq \zeta_k(0) \exp\{(C_0 - 1)\zeta(0)\} \equiv S_k(0), \quad k = 1, 2,$$

where

$$\zeta_k(0) := \zeta_k(\rho_0, b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{(n + b_0)^{\rho_0}} < \infty,$$

$$\zeta(0) := \zeta_0(\rho_0, b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + b_0)^{\rho_0}} < \frac{1}{b_0^{\rho_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho_0}} < \infty,$$

and $\mathbf{Z}(\rho_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho_0}}$ is the Riemann's Zeta-Function.

Now, we estimate the partial derivatives $l_\alpha^{ij}(x)$ for $i, j = 1, ..., 4$. First, for $l_\alpha^{11}(x)$ we have

$$| l_\alpha^{11}(x) | \leq \frac{1}{\theta_0^2}\left(E_\alpha[\xi] + E_\alpha[\xi]^2 + x\right) \leq \frac{1}{\theta_0^2}\left[S_1(0) + S_2(0)\right] + \frac{1}{\theta_0^2} \cdot x \equiv A_{11} + B_{11} \cdot x.$$

To estimate $l_\alpha^{12}(x)$, observe first that

$$| l_\alpha^{12}(x) | \leq \frac{1}{\theta_0} E_\alpha[\xi \cdot h_{0,1}(\xi, \alpha)] + \frac{1}{\theta_0} E_\alpha[\xi] \cdot E_\alpha[h_{0,1}(\xi, \alpha)].$$

Taking into account that by Lemma 3.1 (i)

$$h_{0,1}(x, \alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0}}, \tag{4.1}$$

we obtain

$$| l_\alpha^{12}(x) | < \frac{1}{\theta_0 \; b_0^{R_0}} \cdot E_\alpha[\xi^2] + \frac{1}{\theta_0 \; b_0^{R_0}} \cdot (E_\alpha[\xi])^2 \leq \frac{2}{\theta_0 \; b_0^{R_0}} S_2(0) \equiv A_{12}.$$

To estimate $l_\alpha^{13}(x)$, we use the inequality (see Lemma 3.1 (iii))

$$H(x, \alpha) < \frac{C_0 - 1}{b_0^{R_0+1}} \cdot x + \frac{1}{x + b_0}, \tag{4.2}$$

to obtain

$$| l_\alpha^{13}(x) | \le \tfrac{R_0}{\theta_0} \cdot E_\alpha[\xi \cdot H(\xi,\alpha)] + \tfrac{R_0}{\theta_0} \cdot E_\alpha[\xi] \cdot E_\alpha[H(\xi,\alpha)]$$

$$< \tfrac{R_0}{\theta_0} + \tfrac{R_0}{\theta_0} \cdot E_\alpha[\xi] + \tfrac{2R_0(C_0-1)}{\theta_0\, b_0^{R_0+1}} \cdot E_\alpha[\xi^2] \le \tfrac{R_0}{\theta_0}\Big(1 + S_1(0) + \tfrac{2(C_0-1)}{b_0^{R_0+1}} S_2(0)\Big) \equiv A_{13}.$$

Next, using now the inequality (see Lemma 3.1 (iv))

$$\Lambda(x,\alpha) < \frac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}} \cdot x + x + B_0, \tag{4.3}$$

we get

$$| l_\alpha^{14}(x) | \le \tfrac{1}{\theta_0}\Big\{E_\alpha[\xi \cdot \Lambda(\xi,\alpha)] + E_\alpha[\xi] \cdot E_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)]\Big\}$$

$$< \tfrac{2}{\theta_0}\Big\{(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}} + 1)E_\alpha[\xi^2] + B_0 \cdot E_\alpha[\xi]\Big\}$$

$$\le \tfrac{2}{\theta_0}\Big\{B_0 \cdot S_1(0) + (\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}} + 1)S_2(0)\Big\} \equiv A_{14}.$$

To estimate $l_\alpha^{22}(x)$, we use the inequality (see Lemma 3.1 (i))

$$h_{0,2}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{2R_0}} \tag{4.4}$$

and the inequality (4.1) to obtain

$$| l_\alpha^{22}(x) | \le E_\alpha[h_{0,2}(\xi,\alpha)] + E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)]^2 + h_{0,2}(x,\alpha)$$

$$< \tfrac{1}{b_0^{2R_0}}\Big(E_\alpha[\xi] + E_\alpha[\xi^2] + x\Big)$$

$$\le \tfrac{1}{b_0^{2R_0}}\Big(S_1(0) + S_2(0)\Big) + \tfrac{1}{b_0^{2R_0}} x \equiv A_{22} + B_{22}\, x.$$

Now we estimate $l_\alpha^{23}(x)$. We have

$$| l_\alpha^{23}(x) | \le R_0 \cdot \Big\{E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha) \cdot H(\xi,\alpha)] + E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)] \cdot E_\alpha[H(\xi,\alpha)]$$

$$+ E_\alpha[h_{1-\rho,2}(\xi,\alpha)] + h_{1-\rho,2}(x,\alpha)\Big\}.$$

Hence, taking into account that by Lemma 3.1 (i)

$$h_{1-\rho,2}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{1+R_0}}, \tag{4.5}$$

from (4.1), (4.2) and (4.5), we obtain

$$| l_\alpha^{23}(x) | < R_0 \cdot \Big\{E_\alpha\Big[\tfrac{\xi}{b_0^{R_0}} \cdot (\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0+1}}\xi + \tfrac{1}{\xi+b_0})\Big] + E_\alpha[\tfrac{\xi}{b_0^{R_0}}] \cdot E_\alpha\Big[\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0+1}}\xi + \tfrac{1}{\xi+b_0}\Big]$$

$$+ \tfrac{1}{b_0^{1+R_0}} \cdot E_\alpha[\xi] + \tfrac{x}{b_0^{1+R_0}}\Big\}$$

$$\le \tfrac{R_0}{b_0^{R_0}} \cdot \Big\{1 + (1 + \tfrac{1}{b_0}) \cdot S_1(0) + \tfrac{2(C_0-1)}{b_0^{R_0+1}} \cdot S_2(0)\Big\} + \tfrac{R_0}{b_0^{R_0+1}}\, x \equiv A_{23} + B_{23}\, x.$$

For $l_\alpha^{24}(x)$ we have

$$| l_\alpha^{24}(x) | \le E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)\cdot\Lambda(\xi,\alpha)] + E_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)]\cdot E_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)] + E_\alpha[l_{\rho,2,1}(\xi,\alpha)] + l_{\rho,2,1}(x).$$

Hence, using (4.1), (4.3) and the following inequality (see Lemma 3.1 (i))

$$l_{\rho,2,1}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0-1}},$$

we get

$$| l_\alpha^{24}(x) | < \tfrac{1}{b_0^{R_0}}\cdot E_\alpha\Big[\xi\cdot(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}}\xi+\xi+B_0)\Big] + \tfrac{1}{b_0^{R_0}}\cdot E_\alpha[\xi]\cdot E_\alpha\Big[(1+\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}})\xi+B_0\Big]$$

$$+\tfrac{1}{b_0^{R_0-1}}\cdot E_\alpha[\xi] + \tfrac{1}{b_0^{R_0-1}}\, x$$

$$\le \tfrac{1}{b_0^{R_0}}\cdot\Big\{(2B_0+b_0)\cdot S_1(0) + 2(1+\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}})\cdot S_2(0)\Big\} + \tfrac{1}{b_0^{R_0-1}}\, x \equiv A_{24} + B_{24}\, x.$$

To estimate $l_\alpha^{33}(x)$, we use (4.2) and the inequalities (see Lemma 3.1 (i))

$$h_{2-\rho,2}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0+2}}, \qquad h_{2,1}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0+2}},$$

to obtain

$$| l_\alpha^{33}(x) | < R_0^2\cdot E_\alpha[H(\xi,\alpha)]^2 + 2R_0 + R_0^2(C_0-1)\Big(\tfrac{1}{b_0^{R_0+2}}\cdot E_\alpha[\xi] + \tfrac{x}{b_0^{R_0+2}}\Big)$$

$$+R_0(C_0-1)\Big(\tfrac{1}{b_0^{R_0+2}}E_\alpha[\xi] + \tfrac{x}{b_0^{R_0+2}}\Big) \le 2R_0(1+R_0)$$

$$+\tfrac{R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0+2}}\cdot\Big\{(R_0+1)S_1(0) + \tfrac{2R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0}}S_2(0)\Big\} + \tfrac{R_0(R_0+1)(C_0-1)}{b_0^{R_0+2}}\cdot x \equiv A_{33} + B_{33}\, x.$$

For $l_\alpha^{34}(x)$ we have

$$| l_\alpha^{34}(x) | \le R_0\Big\{E_\alpha[H(\xi,\alpha)\cdot\Lambda(\xi,\alpha)] + E_\alpha[H(\xi,\alpha)]\cdot E_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)]\Big\} + E_\alpha[H(\xi,\alpha)] + H(x,\alpha)$$

$$+R_0(C_0-1)\Big\{E_\alpha[l_{\rho-1,2,1}(\xi,\alpha)] + l_{\rho-1,2,1}(x,\alpha)\Big\}.$$

Hence, from (4.2), (4.3) and the inequality (see Lemma 3.1 (i))

$$l_{\rho-1,2,1}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0}},$$

we obtain

$$
\begin{aligned}
| l_{\alpha}^{34}(x) | &< \tfrac{2R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0}}\left(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0}}+\tfrac{1}{b_0}\right)\cdot E_{\alpha}[\xi^2]+\left(\tfrac{2B_0(C_0-1)R_0}{b_0^{1+R_0}}+\tfrac{R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0-1}}+R_0+\tfrac{C_0-1}{b_0^{1+R_0}}\right.\\
&\quad \left.+\tfrac{R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0}}\right)E_{\alpha}[\xi]+R_0\left(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}}+1+B_0\right)+R_0B_0+2+\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0}}\left(\tfrac{1}{b_0}+R_0\right)\cdot x\\
&\le \tfrac{2R_0(C_0-1)}{b_0^{R_0}}\left(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0}}+\tfrac{1}{b_0}\right)\cdot S_2(0)+R_0\left\{\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{R_0}}\left[\tfrac{2B_0}{b_0}+b_0+1+\tfrac{1}{b_0^{R_0}}\right]+1\right\}\cdot S_1(0)\\
&\quad +R_0\left(\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0-1}}+1+2B_0\right)+2+\tfrac{C_0-1}{b_0^{R_0}}\left(\tfrac{1}{b_0}+R_0\right)\cdot x \equiv A_{34}+B_{34}\ x.
\end{aligned}
$$

Finally, for $l_{\alpha}^{44}(x)$ we have

$$
| l_{\alpha}^{44}(x) | \le E_{\alpha}[\Lambda(\xi,\alpha)]^2+(C_0-1)\Big\{E_{\alpha}[l_{\rho,2,2}(\xi,\alpha)]+l_{\rho,2,2}(x,\alpha)\Big\}.
$$

So, using (4.3) and the inequality (see Lemma 3.1 (i))

$$
l_{\rho,2,2}(x,\alpha) < \frac{x}{b_0^{R_0-2}},
$$

we obtain

$$
\begin{aligned}
| l_{\alpha}^{44}(x) | &\le 2\left[\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{2(R_0-1)}}\cdot E_{\alpha}[\xi^2]+E_{\alpha}[\xi+B_0]^2\right]+\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{R_0-2}}\cdot E_{\alpha}[\xi]+\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{R_0-2}}\cdot x\\
&= 2\left(\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{2(R_0-1)}}+1\right)\cdot S_2(0)+\left(4B_0+\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{R_0-2}}\right)\cdot S_1(0)+2B_0^2+\tfrac{(C_0-1)}{b_0^{R_0-2}}\cdot x \equiv A_{44}+B_{44}\ x.
\end{aligned}
$$

Thus Lemma 4.1 is proved.

The main result of this paper is the following statement.

Theorem 4.1. *The distribution $\mathbb{P}_{\alpha}$ given by (1.1) satisfies the RR–conditions.*

Proof. Observe first that the Conditions 1-3 are obviously satisfied. All the expressions on the right-hand side of the representations for the functions $l_{\alpha}^{ij}(x)$, introduced in Section 3, are finite and are continuous functions in $\alpha \in \Omega$ (see [5]). So, we have to verify only the Conditions 4 and 5.

Proof of Condition 4: We look for a function $M(x)$ to satisfy $| l_{\alpha}^{ij}(x) | \le M(x)$ for all $\alpha \in \Omega$ and $x \in Supp\ \mathbb{P}_{\alpha}$. To this end, denote

$$
L_0 = \max\{A_{ij}\},\ 1 \le i \le 4,\ i \le j \le 4,
$$

$$
N_0 = \max\{B_{11}, B_{ij}\},\ 2 \le i \le 4,\quad i \le j \le 4,\qquad M(x) = L_0 + N_0\ x.
$$

Then using Lemma 4.1 we obtain

$$
| l_{\alpha}^{ij}(x) | \le M(x) \quad \textit{for all } \alpha \in \Omega \textit{ and } i,j = 1,\dots,4.
$$

Besides, we have $E_\alpha[M(\xi)] \le L_0 + N_0 \cdot S_1(0)$ for all $\alpha \in \Omega$. Now we verify the condition

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{\alpha\in\Omega} E_\alpha\Big[M(\xi)\cdot \mathbf{I}_{M(\xi)\ge N}\Big] = 0. \tag{4.6}$$

Observe first that for arbitrary $N > 0$

$$E_\alpha\Big[M(\xi)\cdot \mathbf{I}_{M(\xi)\ge N}\Big] = L_0 + N_0\cdot E_\alpha[\xi\cdot \mathbf{I}_{\xi\ge\bar N}],$$

where $\bar N = \frac{N-L_0}{N_0}$. On the other hand, we have

$$E_\alpha\Big[\xi\cdot\mathbf{I}_{\xi\ge\bar N}\Big] = [g(\alpha)]^{-1}\sum_{n\ge\bar N}\frac{\theta^n}{(n+b)^\rho}\prod_{m=0}^{n-1}\Big(1+\frac{c-1}{(m+b)^\rho}\Big) \le \sum_{n\ge\bar N}\frac{1}{(n+b_0)^{R_0}} \le \sum_{n\ge\bar N}\frac{1}{n^{R_0}},$$

which implies (4.6), and thus completes the proof of Condition 4.

Proof of Condition 5: Using the representations for functions $l_\alpha^{ij}(x)$, given in the Section 3, we can write

$I_{11}(\alpha) = \frac{1}{\theta^2}Var_\alpha(\xi), \quad I_{12}(\alpha) = I_{21}(\alpha) = \frac{1}{\theta}Cov_\alpha[\xi, h_{0,1}(\xi,\alpha)],$

$I_{13}(\alpha) = I_{31}(\alpha) = -\frac{\rho}{\theta}Cov_\alpha[\xi, H(\xi,\alpha)], \quad I_{14}(\alpha) = I_{41}(\alpha) = -\frac{1}{\theta}Cov_\alpha[\xi, \Lambda(\xi,\alpha)],$

$I_{22}(\alpha) = Var_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha)], \quad I_{23}(\alpha) = I_{32}(\alpha) = -\rho\, Cov_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha), H(\xi,\alpha)],$

$I_{24}(\alpha) = I_{42}(\alpha) = -Cov_\alpha[h_{0,1}(\xi,\alpha), \Lambda(\xi,\alpha)], \quad I_{44}(\alpha) = Var_\alpha[\Lambda(\xi,\alpha)]$

$I_{33}(\alpha) = -\rho^2\, Var_\alpha[H(\xi,\alpha)], \quad I_{34}(\alpha) = I_{43}(\alpha) = \rho\, Cov_\alpha[H(\xi,\alpha), \Lambda(\xi,\alpha)].$

Using the results from [5], we conclude that for sufficiently large n the matrix $I(\alpha)$ is positive definite, and so $|\, I(\alpha)\, | > 0$ for all $\alpha \in \Omega$. The continuity of $I(\alpha)$ on the set Ω is obvious. Thus, the Condition 5 is fulfilled. Theorem 4.1 is proved.

As an immediate consequence of Theorems 2.1 and 4.1 we obtain the following result.

Corollary 4.1. *Let $X^n = (X_1, ..., X_n)$ be a random sample from the generalized Pareto-type distribution $\mathbf{P}_\alpha$ given by (1.1) with unknown vector parameter $\alpha = (\theta, c, b, \rho)$, and let $\widehat{\alpha}_n = \widehat{\alpha}(X^n)$ be the MLE of α. Then for sufficiently large sample size n the statistic $\widehat{\alpha}_n$ is asymptotically unbiased, weak consistence, asymptotically normal and asymptotically efficient point estimator for α, and for any $k \ge 1$ the k^{th} moment of $\widehat{\alpha}_n$ converges to the k^{th} moment of the limiting normal distribution as $n \to \infty$.*

Acknowledgements. The author is grateful to the referee for helpful suggestions to improve the original presentation.

Список литературы

[1] J. Astola, E. Danielian, Frequency Distributions in Biomolecular Systems and Growing Networks", Tampere International Center for Signal Processing (TICSP), Series no. 31, Tampere, Finland, 251 pages (2007).

[2] S. Bornholdt, H. Ebel, Wolrd wide web scaling exponent from Simon's 1955 model, Physical Review E, 64 (3-2), 035104(4), (2001).

[3] A. A. Borovkov, Mathematical Statistics, Gordon and Breach Science Publishers (1998) (translated from original *Russian* edition).

[4] E. Danielian, J. Astola, "On the steady state of birth-death process with coefficients of moderate growth", Facta Universitatis: Ser. Elec. Energ., 17, 405 - 419 (2004).

[5] D. Farbod, K. Gasparian, "On the maximum likelihood estimators for some generalized Pareto-like frequency distribution", Journal of the Iranian Statistical Society (JIRSS), 12(2), 211 – 234 (2013).

[6] V. A. Kusnetsov, "Distributions associated with stochastic processes of gene expression in a single eukaryotic cell", EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 4, 258 – 296 (2001).

[7] V. A. Kusnetsov, "Family of skewed distributions associated with the gene expression and proteome evolution", Signal Processing, 33 (4), 889 – 910 (2003).

[8] V. A. Kuznetsov, V. A. Pickalov, O. V. Senko, G. D. Knott, "Analysis of the evolving proteomes: Predictions of the number for protein domains in nature and the number of genes in eukaryotic organisms", Journal of Biological Systems, 10(4), 381 - 407 (2002).

[9] E. L. Lehmann, Theory of Point Estimation, Wiley and Sons (1983).

Поступила 27 сентября 2013

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 49, No. 6, 2014

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 50, номер 1, 2015

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 50, No. 1, 2015

Contents