

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2014

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

A NOTE ON NORMALIZED LAPLACIAN ENERGY OF GRAPHS

M. HAKIMI-NEZHAAD, A. R. ASHRAFI

University of Kashan, Kashan, Iran

E-mails: ashrafi@kashanu.ac.ir m.hakimi20@gmail.com

Abstract. The main goal of this paper is to obtain some bounds for the normalized Laplacian energy of a connected graph. The normalized Laplacian energy of the line and para-line graphs of a graph are investigated. The relationship of the smallest and largest positive normalized Laplacian eigenvalues of graphs are also studied.

MSC2010 numbers: 05C50, 05C90, 15A18, 15A42.

Keywords: Normalized Laplacian energy; normalized Laplacian eigenvalue; Randić index.

1. INTRODUCTION

We first recall some notions and definitions that will be used throughout the paper. Let $G = (V, E)$ be a simple graph with n vertices and m edges, and let $A(G)$ denote its adjacency matrix. The eigenvalues of $A(G)$ are called the eigenvalues of G and form the spectrum of G . Let $L(G) = D(G) - A(G)$ be the Laplacian matrix of the graph G , where $D(G) = [d_{ij}]$ is the diagonal matrix with entries the degree of vertices, that is, $d_{ii} = \deg(v_i)$ and $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$. The Laplacian eigenvalues of G are the eigenvalues of $L(G)$.

Suppose $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ is the spectrum of G such that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. The energy $E(G)$ of G is a graph invariant, which was introduced by Ivan Gutman (see [7, 8]), and is defined to be $E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. If $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \mu_n$ are the Laplacian eigenvalues of G , then the quantity $LE(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i - 2m/n|$ is called the Laplacian energy of G . If G is an r -regular graph, then $E(G) = LE(G)$ (see [9]). The normalized Laplacian matrix $\ell(G) = [\ell_{ij}]$ is defined as follows:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \text{ and } \deg_G(v_i) \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(v_i) \deg(v_j)}}, & \text{if } i \neq j \text{ and } v_i \text{ is adjacent to } v_j. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The eigenvalues of this matrix are called the normalized Laplacian eigenvalues of G , denoted by $0 = \delta_1(G) \leq \delta_2(G) \leq \dots \leq \delta_n(G)$. If G has exactly s distinct normalized Laplacian eigenvalues $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ and the multiplicity of δ_i is t_i , $1 \leq i \leq s$, then we

use the following compact form

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_s \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_s \end{pmatrix},$$

for the normalized Laplacian spectrum of G . In a similar way as the classical notion of characteristic polynomial, the polynomial $\varphi(G, \delta) = \det(\delta I_n - \ell(G))$ is called the normalized Laplacian characteristic polynomial of G , where I_n is the unit matrix of order n . The normalized Laplacian energy of G is defined as $E_\ell(G) = \sum_{i=1}^n |\delta_i(G) - 1|$. If G is an r -regular graph, then it is well-known that $E(G) = rE_\ell(G)$ (see [3] for details).

The line graph of a graph G , $l(G)$, is the graph whose vertices correspond to the edges of G , with two vertices of $l(G)$ being adjacent if and only if the corresponding edges of G have a common vertex. Define $l^0(G) = G$ and $l^k(G) = l(l^{k-1}(G))$, $k \geq 1$. It is well-known that for an r -regular n -vertex graph G , $l^k(G)$ is a $(2^k r - 2^{k+1} + 2)$ -regular $n \prod_{i=0}^{k-1} (2^{i-1} r - 2^i + 1)$ -vertex graph.

Following Yana et al. [10], a para-line graph $C(G)$ of G is defined as a line graph of the subdivision graph $S(G)$, where $S(G)$ is the graph obtained from G by inserting a vertex to every edge of G . This graph is also called the clique-inserted graph. Suppose $C^0(G) = G$ and $C^k(G) = C(C^{k-1}(G))$ for $k \geq 1$. Note that if G is an r -regular n -vertex graph, then $C^k(G)$ is an r -regular graph with $n r^k$ vertices, where $k \geq 0$. It is known that if G is connected, then $l(G)$ and $S(G)$ are connected, too. For two graphs G_1 and G_2 , $G_1 \cup G_2$ is the disjoint union of G_1 and G_2 . The join $G_1 + G_2$ is the graph obtained from $G_1 \cup G_2$ by connecting all vertices from $V(G_1)$ with all vertices from $V(G_2)$. If $G_1, G_2, \dots, G_k$ are graphs with mutually disjoint vertex sets, we denote $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ by $\Sigma_{j=1}^k G_j$. In the case where $G_1 = G_2 = \dots = G_k = G$, we denote $\Sigma_{j=1}^k G_j$ by G^k .

The following results are crucial throughout this paper.

Lemma 1.1. (See [3]). *Let G be a graph of order $n \geq 2$ without isolated vertices. Then 0 is a simple eigenvalue of $\ell(G)$ if and only if G is connected. Moreover, $\sum_{i=1}^n \delta_i(G) = n$ and $\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = n + 2R_{-1}(G)$, where $R_{-1}(G)$ is the Randić index of G .*

Lemma 1.2. (See [1]). *Let G be an r -regular graph with n vertices and m edges. Suppose that the spectrum of G is $r = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Then the spectrum of $l(G)$ is $2r - 2$, $\lambda_i + r - 2$ for $2 \leq i \leq n$ and -2 with multiplicity $m - n$.*

Lemma 1.3. (See [10]). *Let G be an r -regular graph with n vertices and m edges. We also assume that the eigenvalues of G are $r = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Then*

the eigenvalues of the para-line graph $C(G)$ are: 0 with multiplicity $m - n$; -2 with multiplicity $m - n$, and simple eigenvalues $\frac{r+2 \pm \sqrt{r^2 + 4(\lambda_i + 1)}}{2}$, where $1 \leq i \leq n$.

Lemma 1.4. (See [2]). Let G_1 be an r_1 -regular graph on n_1 vertices and G_2 be an r_2 -regular graph on n_2 vertices. Suppose $0 \leq \delta_1(G_1) \leq \dots \leq \delta_n(G_1) \leq 2$ are the normalized Laplacian eigenvalues of G_1 and $0 \leq \delta_1(G_2) \leq \dots \leq \delta_n(G_2) \leq 2$ are the normalized Laplacian eigenvalues of G_2 . Then the normalized Laplacian eigenvalues of the join graph $G_1 + G_2$ can be computed as follows:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{n_2 + r_1 \delta_i(G_1)}{n_2 + r_1} & \frac{n_1 + r_2 \delta_i(G_2)}{n_1 + r_2} & \frac{n_2}{n_2 + r_1} + \frac{n_1}{n_1 + r_2} \\ 1 & 2 \leq i \leq n_1 & 2 \leq i \leq n_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Throughout this paper we use standard notation, taken mainly from the standard book of graph theory. Suppose G is a graph. The complement of G is denoted by $\overline{G}$. K_n and $\overline{K}_n$ denote the complete and empty graphs on n vertices, respectively. The complete bipartite graph with a bipartition of sizes n_1 and n_2 is denoted by K_{n_1, n_2} .

2. THE MAIN RESULTS

In this section, some bounds on the normalized Laplacian energy of graphs are presented.

Proposition 2.1. Let G be a simple connected graph with n vertices. Then $E_\ell(G) > n|\varphi(G, 1)|^{\frac{1}{n}}$.

Proof. By arithmetic-geometric inequality, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} E_\ell(G) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i - 1| \geq \left(\prod_{i=1}^n |\delta_i - 1| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left| \prod_{i=1}^n (1 - \delta_i) \right|^{\frac{1}{n}} = n|\varphi(G, 1)|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

where, $\varphi(G, x) = \prod_{i=1}^n (x - \delta_i)$. Equality in the above relation occurs if and only if $\delta_i = \delta_j$. This implies that all δ_i vanish. This contradicts the connectivity of G , and the result follows. $\square$

Proposition 2.2. Suppose G is a connected graph of order n . Then

$$E_\ell(G) \geq 1 + \sqrt{\frac{n}{\Delta(G)} - 1} + 2 \binom{n-1}{2}^{-1} \sqrt{\varphi(G, 1)^2},$$

where $\Delta(G)$ is the maximal degree of vertices in G .

Proof. We have $\delta_1 = 0$, and hence $E_\ell(G) = \sum_{i=1}^n |\delta_i - 1| = 1 + \sum_{i=2}^n |\delta_i - 1|$. Applying the arithmetic-geometric inequality, we can write

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=2}^n |\delta_i - 1| \right)^2 &= \sum_{i=2}^n |\delta_i - 1|^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ 2 \leq i, j \leq n}} |\delta_i - 1| |\delta_j - 1| \\ &\geq 2R_{-1}(G) - 1 + (n-1)(n-2) \left(\prod_{\substack{i \neq j \\ 2 \leq i, j \leq n}} |\delta_i - 1| |\delta_j - 1| \right)^{\frac{1}{(n-1)(n-2)}} \\ &= 2R_{-1}(G) - 1 + 2 \binom{n-1}{2} \left(\prod_{i=2}^n (\delta_i - 1)^{2(n-2)} \right)^{\frac{1}{(n-1)(n-2)}} \\ &= 2R_{-1}(G) - 1 + 2 \binom{n-1}{2} \left(\prod_{i=2}^n (\delta_i - 1) \right)^{\frac{2}{(n-1)}} \\ &= 2R_{-1}(G) - 1 + 2 \binom{n-1}{2} \sqrt[n-1]{\left(\prod_{i=2}^n (\delta_i - 1) \right)^2} \\ &= 2R_{-1}(G) - 1 + 2 \binom{n-1}{2} \sqrt[n-1]{\varphi(G, 1)^2}. \end{aligned}$$

By [3, Theorem 2], we have $R_{-1}(G) \geq \frac{n}{2\Delta(G)}$, and therefore

$$E_\ell(G) \geq 1 + \sqrt{\frac{n}{\Delta(G)} - 1 + 2 \binom{n-1}{2} \sqrt[n-1]{\varphi(G, 1)^2}}.$$

This completes the proof. $\square$

Proposition 2.3. *Let G be an r -regular, $r \geq 2$, graph with n vertices. Then,*

$$E_\ell(l(G)) < \frac{1}{r-1} \left(\frac{LE(G)}{2} + n(r-2) \right).$$

Proof. It is well-known that the line graph of G is $(2r-2)$ -regular, and by Lemma 1.2, the non-zero Laplacian eigenvalues are $2r-2 - (-2) = 2r$ with multiplicity $m-n$ and $2r-2 - (\lambda_i + r-2) = r - \lambda_i = \mu_i$, $2 \leq i \leq n$. By [4], the normalized Laplacian eigenvalues of r -regular graphs are equal to $\delta_i = \frac{1}{r} \mu_i$, where $1 \leq i \leq n$. So, the normalized eigenvalues of $l(G)$ are 0, $\frac{r}{r-1}$ with multiplicity $m-n$ and $\frac{\mu_i}{2r-2}$,

$2 \leq i \leq n$. So, we can write

$$\begin{aligned}
 E_\ell(l(G)) &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\mu_i}{2r-2} - 1 \right| + \sum_{i=1}^{m-n} \left| \frac{r}{r-1} - 1 \right| \\
 &= \frac{1}{2r-2} \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i - 2r + 2| + n(r-2) \right) \\
 &\leq \frac{1}{2r-2} \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i - r| + \sum_{i=1}^n |r-2| + n(r-2) \right) \\
 &= \frac{1}{r-1} \left(\frac{LE(G)}{2} + n(r-2) \right).
 \end{aligned}$$

To complete the proof, it remains to observe that $E_\ell(l(G)) \neq \frac{1}{r-1} \left(\frac{LE(G)}{2} + n(r-2) \right)$. Indeed, otherwise we would have $|\mu_i - (2r-2)| = |\mu_i - r| + |r-2|$, which is impossible. $\square$

Corollary 2.1. *Let G be an r -regular graph, $r \geq 2$, with n vertices. Then $E(l(G)) < E(G) + 2n(r-2)$.*

Proof. The result follows from Proposition 2.3 and the well-known equalities $E(l(G)) = (2r-2)E_\ell(l(G))$ and $E(G) = LE(G)$.

Proposition 2.4. *Let G be an r -regular graph of order n . Then $E_\ell(C(G)) > 2$.*

Proof. By Lemma 1.3, $C(G)$ is an r -regular graph, hence the non-zero Laplacian eigenvalues of $C(G)$ are r with multiplicity $\frac{n(r-2)}{2}$, $r+2$ with multiplicity $\frac{n(r-2)}{2}$, $r - \frac{r-2+\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2}$, ($2 \leq i \leq n$), and $r - \frac{r-2-\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2}$, ($1 \leq i \leq n$).

By [4], the normalized Laplacian eigenvalues of r -regular graphs are equal to $\delta_i = \frac{1}{r}\mu_i$, where $1 \leq i \leq n$, and so the normalized eigenvalues of $C(G)$ are given by

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{r+2}{2} & \frac{r+2-\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r} & \frac{r+2+\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r} \\ 1 & \frac{n(r-2)}{2} & \frac{n(r-2)}{2} + 1 & 2 \leq i \leq n & 2 \leq i \leq n \end{pmatrix}.$$

Hence, by the definition of normalized Laplacian energy and triangle inequality we have

$$\begin{aligned}
 E_\ell(C(G)) &= 1 + \sum_{i=2}^n \left| \frac{r+2 \pm \sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r} - 1 \right| + \left| \frac{r+2}{r} - 1 \right| \left(\frac{n(r-2)}{2} + 1 \right) \\
 &= 1 + \sum_{i=2}^n \left| \frac{2-r \pm \sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r} \right| + \frac{2}{r} \left(\frac{n(r-2)}{2} + 1 \right) \\
 &\geq 1 + \sum_{i=2}^n \left| \frac{2-r}{r} \right| + \frac{n(r-2)+2}{r} \geq 2.
 \end{aligned}$$

To complete the proof, we must show that $E_\ell(C(G)) \neq 2$. Indeed, in other case,

$$\left| \frac{2-r}{r} \right| = \left| \frac{2-r + \sqrt{r^2 + 4(\lambda_i + 1)}}{2r} \right| + \left| \frac{2-r - \sqrt{r^2 + 4(\lambda_i + 1)}}{2r} \right|.$$

So, both $\frac{2-r+\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r}$ and $\frac{2-r-\sqrt{r^2+4(\lambda_i+1)}}{2r}$ have the same signs, which is impossible, and the result follows. $\square$

Corollary 2.2. *Let G be an r -regular n -vertex graph. Then $E(C(G)) > 2r$.*

Proposition 2.5. *Suppose G_j 's are r -regular graphs with n vertices. Then*

$$E_\ell\left(\sum_{j=1}^k G_j\right) = \frac{1}{n(k-1)+r} \left[rE_\ell(G_k) + (n(k-2)+r)E_\ell\left(\sum_{j=1}^{k-1} G_j\right) + 2(n-r) \right].$$

Proof. By Lemma 1.4, the normalized Laplacian eigenvalues of $G = \sum_{j=1}^k G_j$ are as follows:

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{n(k-1)+r\delta_i(G_k)}{n(k-1)+r} & \frac{n+r'\delta_i(G')}{n+r'} & \frac{n(k-1)}{n(k-1)+r} + \frac{n}{n+r'} \\ 1 & 2 \leq i \leq n & 2 \leq i \leq n(k-1) & 1 \end{array} \right),$$

where, $r' = n(k-2) + r$ is the degree of graph $G' = \sum_{j=1}^{k-1} G_j$. Hence, we can write

$$\begin{aligned} E_\ell(G) &= 1 + \sum_{i=2}^n \left| \frac{n(k-1)+r\delta_i(G_k)}{n(k-1)+r} - 1 \right| + \sum_{i=2}^{n(k-1)} \left| \frac{n+r'\delta_i(G')}{n+r'} - 1 \right| \\ &\quad + \left| \frac{n(k-1)}{n(k-1)+r} + \frac{n}{n+r'} - 1 \right| \\ &= \frac{r}{n(k-1)+r} (E_\ell(G_k) - 1) + \frac{r'}{n+r'} (E_\ell(G') - 1) \\ &\quad + \frac{n(k-1)}{n(k-1)+r} + \frac{n}{n+r'} \\ &= \frac{r}{n(k-1)+r} E_\ell(G_k) + \frac{n(k-2)+r}{n(k-1)+r} E_\ell(G') + \frac{2(n-r)}{n(k-1)+r}. \end{aligned}$$

which completes the proof. $\square$

Corollary 2.3. *Let G be an r -regular graph with n vertices. Then,*

$$E_\ell(G^k) = \frac{1}{n(k-1)+r} \left[rE_\ell(G) + (n(k-2)+r)E_\ell((k-1)G) + 2(n-r) \right].$$

Since $K_n = \sum_{i=1}^n K_1$ and $K_{n_1, n_2} = \overline{K}_{n_1} + \overline{K}_{n_2}$, by Proposition 2.7 and Corollary 2.8, we have $E_\ell(K_n) = E_\ell(K_{n,n}) = 2$.

Proposition 2.6. *Let G be a connected graph with the smallest and the largest positive normalized Laplacian eigenvalues δ_2 and δ_n , respectively. Then*

- a) $\delta_n - \delta_2 \geq \frac{2}{n-1} \sqrt{(n-1)(n+2R_{-1}(G)) - n^2}$,
- b) $\sqrt{\frac{\delta_n}{\delta_2}} + \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_n}} \geq \frac{2}{n} \sqrt{(n-1)(n+2R_{-1}(G))}$.

Proof. We may assume that $n \geq 3$. Recall the Ozekis inequality (see [6]), stating that if a_i and b_i , $1 \leq i \leq n$, are nonnegative real numbers, then

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2,$$

where $M_1 = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$, $M_2 = \max_{1 \leq i \leq n} b_i$, $m_1 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$ and $m_2 = \min_{1 \leq i \leq n} b_i$.

An application of Ozekis inequality with $a_i = 1$ and $b_i = \delta_i$, $2 \leq i \leq n$, yields

$$(n-1) \sum_{i=2}^n \delta_i^2 - \left(\sum_{i=2}^n \delta_i \right)^2 \leq \frac{(n-1)^2}{4} (\delta_n - \delta_2)^2.$$

In view of Lemma 1.1, it is easy to see that

$$\delta_n - \delta_2 \geq \frac{2}{n-1} \sqrt{(n-1)(n+2R_{-1}(G)) - n^2},$$

yielding the assertion a).

To prove the assertion b), we recall the Polya-Szegő inequality (see [6]), stating that if a_i , b_i , M_i , m_i , $1 \leq i \leq n$, are as in part a), then we have

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

Applying the last inequality with $a_i = 1$ and $b_i = \delta_i$, $2 \leq i \leq n$, we get

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_{i=2}^n \delta_i^2 &\leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\delta_n}{\delta_2}} + \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_n}} \right)^2 \left(\sum_{i=2}^n \delta_i \right)^2, \\ (n-1)(n+2R_{-1}(G)) &\leq \frac{n^2}{4} \left(\sqrt{\frac{\delta_n}{\delta_2}} + \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_n}} \right)^2. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\sqrt{\frac{\delta_n}{\delta_2}} + \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_n}} \geq \frac{2}{n} \sqrt{(n-1)(n+2R_{-1}(G))}.$$

This completes the proof of the assertion b). □

Acknowledgement. The authors are indebted to the anonymous referees whose suggestions and remarks helped to improve the original presentation. The research of the authors are partially supported by the University of Kashan under grant no 159020/79.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

- [1] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [2] S. Butler, *Eigenvalues and Structures of Graphs*, Ph.D. Thesis, University of California, San Diego (2008).
- [3] M. Cavers, S. Fallat, S. Kirkland, "On the normalized Laplacian energy and general Randić index R_{-1} of graphs", *Linear Algebra Appl.*, **433**, 172 – 190 (2010).
- [4] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc., Providence (1997).
- [5] G. H. Fath-Tabar, A. R. Ashrafi, "Some remarks on Laplacian eigenvalues and Laplacian energy of graphs", *Math. Commun.*, **15**, 443 – 451 (2010).
- [6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1988).
- [7] I. Gutman, "The energy of a graph: old and new results", in A. Betten, A. Kohnen, R. Laue, A. Wassermann (Eds.), *Algebraic Combinatorics and Applications*, Springer, Berlin, 196 – 211 (2001).
- [8] I. Gutman, The energy of a graph, 10, *Steiermärkisches Mathematisches Symposium* (Stift Rein, Graz (1978). *Ber. Math.-Statist. Sect. Forsch. Graz*, 100-105 (1978), Ber. no. 103, 22 pp.
- [9] I. Gutman and B. Zhou, "Laplacian energy of a graph", *Linear Algebra Appl.*, **414**, 29 – 37 (2006).
- [10] W. Yana, Y.-N. Yeh, F. Zhang, "The asymptotic behavior of some indices of iterated line graphs of regular graphs", *Discrete Appl. Math.*, **180**, 1232 – 1239 (2012).

Поступила 29 октября 2013.

ESTIMATES FOR IMAGINARY POWERS OF THE LAPLACE
OPERATOR IN VARIABLE LEBESGUE SPACES AND
APPLICATIONS

A. FIORENZA, A. GOGATISHVILI, T. KOPALIANI

Università di Napoli, Via Monteoliveto, Napoli, Italy
Institute of Mathematics of Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague
I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

E-mails: *fiorenza@unina.it, gogatish@math.cas.cz, tengiz.kopaliani@tsu.ge*

Abstract.¹ In this paper we study some estimates of norms in variable exponent Lebesgue spaces for singular integral operators that are imaginary powers of the Laplace operator in $\mathbb{R}^n$. Using the Mellin transform argument, from these estimates we obtain the boundedness for a family of maximal operators in variable exponent Lebesgue spaces, which are closely related to the (weak) solution of the wave equation.

MSC2010 numbers: 42B25, 42B20, 46E30, 44A10, 42B10, 35L05.

Keywords: spherical maximal function; variable Lebesgue spaces; boundedness result; Laplace operator; Mellin transform; wave equation; initial-value problem; propagation.

1. INTRODUCTION

In the recent paper [8] we studied the boundedness of Stein's spherical maximal function $\mathcal{M}$ in variable exponent Lebesgue spaces. The proof is based on the Rubio De Francia extrapolation method and one of the corresponding results in weighted Lebesgue spaces. The Stein's spherical maximal functions are closely related to the solution of the wave equation in $\mathbb{R}^3$. In order to study the wave equation in $\mathbb{R}^n$, $n > 3$ we need to consider the more general spherical maximal function $\mathcal{M}^\alpha$, $\alpha = \frac{3-n}{2}$ ([15]). To investigate such operators we use a new approach based on a Mellin transform argument used for the first time by Cowling and Mauceri in [1], which reduces the problem to that one to find sharp estimates for norms of imaginary power of the Laplace operator.

¹The research of the second and third authors was partly supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grants no.13/06 (Geometry of function spaces, interpolation and embedding theorems) and 31/48 (Operators in some function spaces and their applications in Fourier Analysis). The research of the second author was partly supported by grant no. P201-13-14743S of the Grant Agency of the Czech Republic and RVO: 67985840.

Let $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ be the set of all measurable functions $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$, which will be called variable exponents. Set $p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$ and $p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$. If $p^+ < \infty$, then the variable exponent p is bounded. For $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, let $p' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ be defined through $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1$, where we adopt the convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

For $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, let $\mathbb{R}_\infty^n$ be the set where $p = +\infty$. The symbol $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ denotes the set of measurable functions real or complex valued f on $\mathbb{R}^n$ such that for some $\lambda > 0$

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_\infty^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx + \left\|\frac{f}{\lambda}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\infty^n)} < \infty.$$

This set becomes a Banach function space when equipped with the norm

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Let $B(x, r)$ denote the open ball in $\mathbb{R}^n$ of radius r and center x . By $|B(x, r)|$ we denote the n -dimensional Lebesgue measure of $B(x, r)$. The Hardy-Littlewood maximal operator M is defined on locally integrable functions f on $\mathbb{R}^n$ by the formula

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

Define the Spherical Maximal operator $\mathcal{M}$ by

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{t>0} |\mu_t * f(x)| = \sup_{t>0} \left| \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : |y|=1\}} f(x - ty) d\mu_t(y) \right|$$

where μ_t denotes the normalized surface measure on the sphere of center 0 and radius t in $\mathbb{R}^n$. The Hardy-Littlewood maximal operator M , which involves averaging over balls, is clearly related to the spherical maximal operator, which averages over spheres. Indeed, by using polar coordinates, one easily verifies the pointwise inequality $Mf(x) \leq \mathcal{M}f(x)$ for any (continuous) function.

A function $p : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ is said to be locally log-Hölder continuous on $\mathbb{R}^n$ if there exists $c_1 > 0$ such that

$$|p(x) - p(y)| \leq c_1 \frac{1}{\log(e + 1/|x - y|)}$$

for all $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| < 1/2$. Moreover, $p(\cdot)$ satisfies the log-Hölder decay condition if there exist $p_\infty \in (0, \infty)$ and a constant $c_2 > 0$ such that

$$|p(x) - p_\infty| \leq c_2 \frac{1}{\log(e + |x|)}$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$. We say that $p(\cdot)$ is globally log-Hölder continuous on $\mathbb{R}^n$ if it is locally log-Hölder continuous and satisfies the log-Hölder decay condition. We write $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ if $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ and $\frac{1}{p(\cdot)}$ is globally log-Hölder continuous on $\mathbb{R}^n$. If

$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ with $p_+ < \infty$, then $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ if and only if p is globally log-Hölder continuous on $\mathbb{R}^n$. If $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ and $p^- > 1$, then the classical boundedness theorem for the Hardy-Littlewood maximal operator can be extended to $L^{p(\cdot)}$ (see [4, 5, 2]). For more information on variable Lebesgue spaces, log-Hölder continuity conditions and their relationship with the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, see the monographs [3, 7]. If $n \geq 3$, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ and $\frac{n}{n-1} < p^- \leq p^+ < p^-(n-1)$, then the boundedness theorem for the spherical maximal function M in $L^{p(\cdot)}$ was proved in [8].

We denote by $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ the class of all measurable functions $p : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ for which the Hardy-Littlewood maximal operator is bounded on $L^{p(\cdot)}$.

Throughout the paper, we denote by c, C, c_1, C_1, c_2, C_2 , etc. positive constant which is independent of the main parameters but which may vary from line to line.

2. IMAGINARY POWER OF LAPLACE OPERATOR IN VARIABLE LEBESGUE SPACES

Let $S(\mathbb{R}^n)$ denote the Schwartz space consisting of sufficiently smooth functions that are rapidly decreasing at infinity. Let Δ be the standard Laplace operator in $\mathbb{R}^n$, given by

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2.$$

If

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx,$$

then

$$(-\Delta f)^\wedge(\xi) = |2\pi\xi|^2 \widehat{f}(\xi), \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Starting from this relation, it is natural to define $\Delta^{\beta/2}$ for any complex exponent β by

$$((-\Delta)^{\beta/2})^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^\beta \widehat{f}(\xi), \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

In particular, for each $0 < \alpha < n$, the operator

$$I_\alpha : f \mapsto (-\Delta)^{-\alpha/2} f$$

is known as the Riesz potential. Here I_α may be expressed as

$$I_\alpha f = K_\alpha * f$$

where $K_\alpha(x) = \pi^{-n/2} 2^{-\alpha} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) |x|^{-n+\alpha}$, the symbol Γ denoting the standard gamma function, and therefore (see [16] p. 117 and [6, 3]) I_α is an integral operator.

In this paper we consider the operator I_{iu} , $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, given by

$$I_{iu}f = K_{iu} * f, \quad f \in S(\mathbb{R}^n),$$

which makes sense via

$$(I_{iu}f)^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-iu} \widehat{f}(\xi), \quad f \in S(\mathbb{R}^n),$$

that is $I_{iu} = (-\Delta)^{-iu/2}$, an imaginary power of $-\Delta$. This operator was studied by Muckenhoupt [14] in 1960 and used by Cowling and Mauceri [1] in 1978 to prove E.M. Stein's theorem on the spherical maximal function [15].

Note that $|\widehat{K}(\xi)| = |(2\pi|\xi|)^{-iu}| = 1$, so that by Plancherel's theorem we have in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(2.1) \quad \|I_{iu}f\|_2 = \|f\|_2.$$

By using further properties of the kernel K_{iu} , particularly the fact that it is locally integrable away from the origin and satisfies

$$|K_{iu}(x)| \leq C(1 + |u|)^{n/2} |x|^{-n}$$

and

$$|\nabla K_{iu}(x)| \leq C(1 + |u|)^{n/2+1} |x|^{-n-1}$$

for $x \neq 0$ (see [1] and [10]), one may observe that I_{iu} also extends to a bounded operator on $L_w^p(\mathbb{R}^n)$. By w we mean a weight, i.e. a nonnegative, locally integrable function on $\mathbb{R}^n$. When $1 < p < \infty$, we say $w \in A_p$ if for every ball B

$$\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C < \infty.$$

By $A_{p,w}$ we denote the infimum over the constants on the right-hand side of the last inequality.

Theorem 2.1 ([10]). *Let be $1 < p < \infty$ and $w \in A_p$. For each $\delta \in (0, 1)$ and $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, the following weighted estimate holds whenever $w \in A_p$, $1 < p < \infty$:*

$$(2.2) \quad \|I_u f\|_{p,w} \leq C(1 + |u|)^{n/2+\delta} \|f\|_{p,w}, \quad f \in L_w^p(\mathbb{R}^n).$$

Our extension of this theorem in the variable Lebesgue spaces setting is the following statement.

Theorem 2.2. *Let be $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then for all $\delta \in (0, 1)$ there exists a constant C such that, for all $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*

$$(2.3) \quad \|I_{iu}f\|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |u|)^{n/2+\delta} \|f\|_{p(\cdot)}, \quad f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

To prove this Theorem we need the extrapolation theorem for variable Lebesgue spaces. By $\mathcal{F}$ we will denote a family of ordered pairs of non-negative, measurable functions (f, g) . We say that an inequality

$$(2.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0} w(x) dx, \quad (0 < p_0 < \infty)$$

holds for any $(f, g) \in \mathcal{F}$ and $w \in A_q$ (for some q , $1 < q < \infty$) if it holds for any pair in $\mathcal{F}$ such that the left-hand side is finite, and the constant C depends only on p_0 and on the constant $A_{q,w}$.

Theorem 2.3. ([7, Theorem 7.2.1, page 214], see also [6, Theorem 4.25, page 87], [3, Chap. 5]). Given a family $\mathcal{F}$, assume that (2.4) holds for some $1 < p_0 < \infty$, for every weight $w \in A_{p_0}$ and for all $(f, g) \in \mathcal{F}$. Let exponent $p(\cdot)$ be such that there exists $1 < p_1 < p_-$, with $(p(\cdot)/p_1)' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq C \|g\|_{p(\cdot)}$$

for all $(f, g) \in \mathcal{F}$ such that $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Proof of Theorem 2.2. Using Theorem 2.3, estimate (2.2) and the fact that if $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ then $(p(\cdot)/p_1)' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ for some $1 < p_1 < p_-$, (see [7, Theorem 5.7.2, page 181]) we obtain (2.3). $\square$

Corollary 2.1. Let $\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\bar{p}(\cdot)}$ for some $0 < \theta < 1$ and $\bar{p}(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Then for all $0 < \delta < 1$ there exists a constant C such that, for all $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(2.5) \quad \|I_{iu} f\|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |u|)^{\theta n/2 + \theta \delta} \|f\|_{p(\cdot)}, \quad f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Proof. By using the complex interpolation theorem for variable exponent Lebesgue spaces (see [7, Theorem.1.2, page 215]), we have $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = [L^2(\mathbb{R}^n), L^{\bar{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]_\theta$. Therefore, $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|I_{iu}\|_{L^{p(\cdot)} \rightarrow L^{p(\cdot)}} \leq \|I_u\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1-\theta} \|I_u\|_{L^{\bar{p}(\cdot)} \rightarrow L^{\bar{p}(\cdot)}}^\theta \leq C(1 + |u|)^{\theta n/2 + \theta \delta}.$$

$\square$

3. THE SPHERICAL MAXIMAL FUNCTION

For $\alpha > 0$, let $m_\alpha(x) = (1 - |x|^2)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, where $|x| < 1$, and $m_\alpha(x) = 0$ if $|x| \geq 1$. With $m_{\alpha,t}(x) = m_\alpha(x/t)t^{-n}$, $t > 0$, we define spherical means of (complex) order $\operatorname{Re} \alpha > 0$, by

$$\mathcal{M}_t^\alpha f(x) = (m_{\alpha,t} * f)(x).$$

Note that the Fourier transform of m_α is given by

$$\widehat{m}_\alpha(\xi) = \pi^{-\alpha+1} |\xi|^{-n/2-\alpha+1} J_{n/2+\alpha-1}(2\pi|\xi|).$$

The definition of $\mathcal{M}_t^\alpha$ can be extended to the region $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ by the analytic continuation. Indeed for complex α in general we can define the operator $\mathcal{M}_t^\alpha$ by

$$(\mathcal{M}_t^\alpha f)^\wedge(\xi) = \widehat{m}_\alpha(t\xi) \widehat{f}(\xi), \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

The spherical maximal operator of order α is defined by

$$(3.1) \quad \mathcal{M}^\alpha f(x) = \sup_{t>0} |\mathcal{M}_t^\alpha f(x)|.$$

Note that for $\alpha = 0$ we have $\mathcal{M}^\alpha f(x) = c\mathcal{M}f(x)$ for an appropriate constant c .

Theorem 3.1 (E.M. Stein [15]). *The inequality $\|\mathcal{M}^\alpha f\|_p \leq A_{p,\alpha} \|f\|_p$ holds in the following circumstances:*

- (a) if $1 < p \leq 2$, when $\alpha > 1 - n + n/p$,
- (b) if $2 \leq p \leq \infty$, when $\alpha > (1/p)(2 - n)$.

Note that for α in Steins's theorem we have the restriction $1 - n/2 < \alpha < 1$ and, moreover, we have

- a) if $\alpha = 0$, then $n \geq 3$, $p > \frac{n}{n-1}$,
- b) If $0 < \alpha < 1$ then $n \geq 2$, $\frac{n}{n-1+\alpha} < p \leq \infty$,
- c) If $1 - n/2 < \alpha < 0$ then $n \geq 3$, $\frac{n}{n-1+\alpha} < p < \frac{2-n}{\alpha}$.

In this section we study boundedness properties of the Stein's spherical maximal operator $\mathcal{M}^\alpha$ on the variable exponent Lebesgue spaces. Our main result is following

Theorem 3.2. *Let $1 - n/2 < \alpha < 1$ and let $\widetilde{p}(\cdot) := \frac{2p(\cdot)\theta}{2-(1-\theta)p(\cdot)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ for some $0 < \theta < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha$. Then the spherical maximal operator $\mathcal{M}^\alpha$ is bounded on $L^{\widetilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. Let $F_\alpha(\lambda) = \pi^{-\alpha+1} \lambda^{-n/2-\alpha+1} J_{n/2+\alpha-1}(2\pi\lambda)$, $\lambda > 0$, where J_ν denotes the Bessel function of order ν . Then we have

$$(\mathcal{M}_t^\alpha f)^\wedge(\xi) = F_\alpha(t|\xi|) \widehat{f}(\xi)$$

Let $F_\alpha^*(\lambda) = F_\alpha(\lambda) - F_\alpha(0)e^{-\lambda^2}$, so that $F_\alpha^*(0) = 0$. Using the Mellin transform we have

$$F_\alpha^*(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} A_\alpha(u) \lambda^{iu} du, \quad \lambda > 0,$$

that is, F_α^* is the Mellin transform of $A_\alpha(u)$ (for the Mellin transform see [9]). By the Fourier Inversion Theorem, this holds if and only if

$$A_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_\alpha^*(\lambda) \lambda^{-1-iu} d\lambda, \quad u \in \mathbb{R}.$$

For $f \in \mathcal{S}(R^n)$ we have

$$\begin{aligned} m_t^\alpha * f(x) &= (\widehat{m_t^\alpha}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x) = (F_\alpha(t|\xi|) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x) \\ &= \left((F_\alpha^*(t|\xi|) + F_\alpha(0)e^{-|t\xi|^2}) \cdot \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x). \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (F_\alpha^*(t|\xi|) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x) &= \left(\int_R A_\alpha(u)(t|\xi|)^{iu} du \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \\ &= \int_R A_\alpha(u) t^{iu} (|\xi|^{iu} \widehat{f}(\xi))^\vee(x) du \\ &= \int_R A_\alpha(u) t^{iu} (2\pi)^{-iu} \left((2\pi|\xi|)^{iu} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) du \\ &= \int_R A_\alpha(u) t^{iu} (2\pi)^{-iu} I_{iu} f(x) du. \end{aligned}$$

Since $|(2\pi)^{-iu} t^{iu}| = 1$, by using Minkovski's inequality and Corollary 2.1, we obtain

$$\begin{aligned} \|(F_\alpha^*(t|\xi|) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x)\|_{p(\cdot)} &= \left\| \int_R A_\alpha(u) (2\pi)^{-iu} t^{iu} I_{iu} f(x) du \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \int_R \|A_\alpha(u) (2\pi)^{-2i} t^{iu} I_{iu} f(x)\|_{p(\cdot)} du \\ &\leq \int_R |A_\alpha(u)| \|I_{iu} f(\cdot)\|_{p(\cdot)} du \\ &\leq C \int_R |A_\alpha(u)| (1 + |u|)^{\theta n/2 + \theta \delta} du \|f\|_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

Using the following expression for $A_\alpha(u)$ (see [11])

$$A_\alpha(u) = \frac{\Gamma(\alpha + n/2 - 1/2) \Gamma(-\frac{iu}{2})}{4\pi^{1/2}} \left[\frac{2^{-iu}}{\Gamma(\alpha + n/2 + iu/2)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha + n/2)} \right]$$

we have $A_\alpha(u) = O((1 + |u|)^{-\alpha - n/2})$. Finally we get

$$\begin{aligned} \|(F_\alpha^*(t|\xi|) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x)\|_{p(\cdot)} &\leq C \int_R (1 + |u|)^{-\alpha - n/2} (1 + |u|)^{\theta n/2 + \theta \delta} du \|f\|_{p(\cdot)} \\ &= C \int_R (1 + |u|)^{-\alpha - n/2 + \theta n/2 + \theta \delta} du \|f\|_{p(\cdot)} \end{aligned}$$

If we take δ very small, such that $-\alpha - n/2 + \theta n/2 + \theta \delta < -1$, we obtain that

$$\int_R (1 + |u|)^{-\alpha - n/2 + \theta n/2 + \theta \delta} du < \infty$$

and therefore

$$(3.2) \quad \|(F_\alpha^*(t|\xi|) \cdot \widehat{f}(\xi))^\vee(x)\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

It is known that (see [16, p. 61]).

$$\left| \left(F_\alpha(0) e^{-|\xi|^2} \cdot \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \right| \leq C(P_t * |f|)(x),$$

where P_t is the Poisson kernel. Since (see [16, Theorem 1, p.62])

$$\sup_{t>0} P_t * |f|(x) \leq cMf(x),$$

where M is the Hardy-Littlewood maximal function, using the assumption $\bar{p}(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, the identity $\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\bar{p}(\cdot)}$ and the complex interpolation method

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = [L^2(\mathbb{R}^n), L^{\bar{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]_\theta,$$

we obtain that $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, and therefore

$$(3.3) \quad \left\| \left(F_\alpha(0) e^{-|\xi|^2} \cdot \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \right\|_{p(\cdot)} \leq C \|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Using (3.2) and (3.3) we get

$$\|M^\alpha f\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

□

As a consequence, we can get another boundedness result for M^α in the variable Lebesgue spaces. We need the following

Lemma 3.1. *Let $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. If $1 - n/2 < \alpha < 1$ and $\frac{n}{n-1+\alpha} < p_- \leq p_+ < \frac{n}{1-\alpha}$, then there are exist θ , $0 < \theta < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha$ and variable exponent $\bar{p}(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, such that we have*

$$(3.4) \quad \frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\bar{p}(\cdot)}.$$

Proof. We need to find θ such that $0 < \theta < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha$ and exponent $\bar{p}(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ such that (3.4) holds. We have

$$\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{p(x)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{p(x)} < 1 - \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n}.$$

Let $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{2} + r(x)$. It is easy to see that

$$(3.5) \quad \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n}.$$

Equation (3.4) is equivalent to

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} + \frac{r(x)}{\theta} = \frac{1}{\bar{p}(x)}.$$

Using (3.5) we may take a small $\delta > 0$ such that

$$\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} + \delta < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n} - \delta.$$

Then for θ , $0 < \theta < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha$, $\theta = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha - \theta_0$, $\theta_0 > 0$ we have

$$\frac{\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} + \delta}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha - \theta_0} < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r(x)}{\theta} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r(x)}{\theta} < \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n} - \delta}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha - \theta_0}$$

and taking $\theta_0 < 2\delta$ we get

$$(3.7) \quad -\frac{1}{2} < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r(x)}{\theta} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r(x)}{\theta} < \frac{1}{2}.$$

From (3.6) and (3.7) it follows

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\tilde{p}(x)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\tilde{p}(x)} < 1.$$

Finally, it is not hard to prove that $\tilde{p}(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Indeed we may use the simple equality

$$\left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| = \theta \left| \frac{1}{\tilde{p}(x)} - \frac{1}{\tilde{p}(y)} \right|.$$

□

Remark 3.1. In fact in Lemma 3.1 we use only the simple fact that if $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ then also $\tilde{p}(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. For applications we need to consider such classes of exponents with this property, because they make the Hardy-Littlewood maximal function bounded on variable exponent Lebesgue spaces. In general the class of variable exponents $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, for which the Hardy-Littlewood maximal function are bounded on variable exponent Lebesgue spaces have not such property (see [13] and the digression in [3, Chap. 4]). The opposite statement by interpolation theorem is always true, that is if $\tilde{p}(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, then $p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. For example (see [7, Remark 4.3.10, page 114]), it is possible to replace the log-Hölder decay condition by the weaker condition $1 \in L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ with

$$\frac{1}{s(x)} := \left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty} \right|.$$

Corollary 3.1. Let $n \geq 3$, $1 - n/2 < \alpha < 1$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ and $\frac{n}{n-1+\alpha} < p_- \leq p_+ < \frac{n}{1-\alpha}$. Then spherical maximal functions $\mathcal{M}^\alpha$ are bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Using Lemma 3.1 and the complex interpolation method for variable exponent Lebesgue spaces, from Theorem 3.2 we deduce the desired result. □

Theorem 3.3. Let $n \geq 2$ and $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ with $\frac{n}{n-1+\alpha} < p_- \leq p_+ < p_- \frac{n-1+\alpha}{1-\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$. Then the spherical maximal operator $\mathcal{M}^\alpha$ is bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Fix γ such that $1 < \gamma < \frac{p_-(n-1+\alpha)}{n}$ and $p_+\gamma < \frac{p_-(n-1+\alpha)}{1-\alpha}$. Define the variable exponent

$$\bar{p}(x) := \frac{p(x)n\gamma}{p_-(n-1+\alpha)}.$$

It is clear that $\bar{p} \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$,

$$\bar{p}_- = \frac{n\gamma}{n-1+\alpha} > \frac{n}{n-1+\alpha} \quad \text{and} \quad \bar{p}_+ = \frac{p_+n\gamma}{p_-(n-1+\alpha)} < \frac{n}{n-\alpha}.$$

By Lemma 3.1 there exists θ , $0 < \theta < 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\alpha$ and a variable exponent $\tilde{p} \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, such that

$$\frac{1}{\tilde{p}(\cdot)} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\bar{p}(\cdot)}.$$

Therefore, by the complex interpolation theorem for variable exponent Lebesgue spaces, we have

$$L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = [L^2(\mathbb{R}^n), L^{\bar{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]_{\theta}.$$

From Theorem 3.2 we deduce that the spherical maximal functions $\mathcal{M}^{\alpha}$ are bounded on $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. By the complex interpolation method for variable exponent Lebesgue spaces, we have

$$[L^{\infty}(\mathbb{R}^n), L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]_{\theta} = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$$

for $\theta = \frac{n\gamma}{p_-(n-1+\alpha)} \in (0, 1)$. Finally, by using the fact that if $0 \leq \alpha < 1$ the spherical maximal functions $\mathcal{M}^{\alpha}$ are bounded on $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, we obtain that the spherical maximal functions $\mathcal{M}^{\alpha}$ are bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Taking $\alpha = 0$ in Theorem 3.3, we get the following result.

Corollary 3.2. *Let $n \geq 3$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ and $\frac{n}{n-1} < p_- \leq p_+ < p_-(n-1)$. Then the spherical maximal function $\mathcal{M}$ is bounded on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

4. AN APPLICATION

Spherical averages often make their appearance as solutions of certain partial differential equations. We state two corollaries, whose proofs are immediate consequences of the boundedness of $\mathcal{M}^{\alpha}$ in the variable exponent Lebesgue spaces and of (3.1).

a) Let $\alpha = \frac{3-n}{2}$. For an appropriate constant c_n , we have that $u(x, t) = c_n t \mathcal{M}_t^{\alpha}(x)$, where u is the solution of the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta_x(u)(x, t),$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f(x),$$

(see [16], page 519).

Corollary 4.1. *Let $n \geq 3$ and $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. If $\frac{2n}{n+1} < p_- \leq p_+ < \frac{2n}{n-1}$, then for the weak solution $u = u(x, t)$ of the wave equation with the initial data in $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, we have the following a priori estimate:*

$$(4.1) \quad \left\| \sup_{t>0} \frac{|u(x, t)|}{t} \right\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)},$$

where C depends only on $p(\cdot)$ and $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u(x, t)|}{t} = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

The estimate (4.1) tells that the integrability property of the initial velocity of propagation of a wave is preserved in the solution, under an assumption of regularity of the exponent, expressed in terms of a logarithmic Dini-type condition. In some sense (which is made precise by such logarithmic Dini-type condition), in the places where the initial velocity does not blow up (in the sense of the boundedness of the norm in a Lebesgue space which may vary pointwise), also the wave does not. For a more detailed digression, see [8].

b) Let $\alpha = \frac{3-n}{2}$. For an appropriate constant c_n , the spherical average $u(x, t) = c_n M_t^\alpha(x)$ solves Darboux's equation (see [12])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{2}{t} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta_x(u)(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Corollary 4.2. *Let $n \geq 3$ and $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. If $\frac{2n}{n+1} < p_- \leq p_+ < \frac{2n}{n-1}$, then for the weak solution $u = u(x, t)$ of the Darboux's equation with the initial data $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ we have the following a priori estimate:*

$$\left\| \sup_{t>0} u(x, t) \right\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)},$$

where C depends only on $p(\cdot)$ and $\lim_{t \rightarrow 0} |u(x, t)|t = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Cowling and G. Mauceri, "On maximal functions", *Rend. Sem. Mat. Fis. Mil.*, **49**, 79 – 87 (1979).
- [2] D. Cruz-Uribe, L. Diening, A. Fiorenza, "A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces", *Boll. U.M.I.* (9), **2**(1), 151 – 173 (2009).
- [3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhäuser, Basel (2013).
- [4] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C.J. Neugebauer, "The maximal function on variable L^p spaces", *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **28**, 223 – 238 (2003).

- [5] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C. J. Neugebauer, Corrections to: "The maximal function on variable L^p spaces", *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **29**, no. 1, 247–249 (2004).
- [6] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, C. Pérez, *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications*, 215, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel (2011).
- [7] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, "Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents", *Lecture Notes in Mathematics*, 2017, Springer, Heidelberg (2011).
- [8] A. Fiorenza, A. Gogatishvili and T. Kopaliani, "Boundedness of Stein's spherical maximal function in variable Lebesgue space and application to the wave equation", *Arch. Math.*, **100**, no. 5, 465 – 472 (2013).
- [9] G.B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Books/Cole, Pacific Grove (1992).
- [10] H. Gunawan, "On weighted estimates for Stein's maximal function", *Bull. Austral. Math. Sci.*, **54**, 35 – 39 (1996).
- [11] H. Gunawan and W. S. Budhi, "On the Behavior of the Solution of the Wave Equation", *J. Matematika dan Sains*, **9**, 255 – 258 (2004).
- [12] F. John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*, Interscience publishers (1955).
- [13] A. Lerner, Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L_p spaces, *Math. Z.*, **251**, 509 – 521 (2005).
- [14] B. Muckenhoupt, "On certain singular integrals", *Pacific J. Mat.*, **10**, 239 – 261 (1960).
- [15] E. M. Stein, "Maximal functions: Spherical means", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **73**, 2174 – 2175 (1976).
- [16] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press (1970).

Поступила 28 декабря 2013

О ГИПЕРВОЛИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ С ВЕСОМ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет

Ереванский Государственный Университет

E-mails: haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com

Аннотация. Обобщаются результаты Гординга, Ларсона, Каттабрига, Родино, Калво о корректности задачи Коши для N - гиперболических уравнений. Доказывается, что в общем случае, когда вектор $N = (N_1, \dots, N_n)$ не совпадает с вектором $(1, 0, \dots, 0)$ для корректности задачи Коши необходимо на самом деле более сильное условие, которое мы называем гиперболическостью с весом. Рассматриваются свойства гиперболических многочленов с определенным весом.

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: гиперболический оператор; гиперболический многочлен с весом; мультианизотропное пространство Жевре; вполне правильный многогранник Ньютона.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E^n и R^n - n -мерные вещественные пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответственно, $C^n = R^n \times iR^n$, $R^{n,0} = \{\xi \in R^n : \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, N_0 - множество неотрицательных целых чисел, $N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$ - множество n -мерных мультииндексов. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial x_j$ либо $D_j = \frac{1}{i} \cdot \partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Для набора точек $\aleph = \{a^1, \dots, a^M\}$, $a^k \in R^{n,0}$ ($k = 1, \dots, M$) наименьший выпуклый многогранник $\aleph(\aleph)$ в $R^{n,0}$, содержащий все точки набора $\aleph$ называется многогранником Ньютона набора $\aleph$ (см [1] или [2]).

Многогранник $\aleph$ с вершинами из $R^{n,0}$ называется полным, если $\aleph$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой оси координат $R^{n,0}$. Полный многогранник $\aleph$ называется вполне правильным, если (единичные) внешние нормали всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\aleph$ (множество которых обозначим через $\Lambda(\aleph)$) имеют положительные координаты.

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$, через $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ обозначим характеристический многочлен (полный символ) отвечающий этому оператору, через $m = m(P)$ обозначим его порядок, а через P_m его главную (m -однородную) часть и представим многочлен P в виде суммы j -однородных многочленов ($j = 1, \dots, m$)

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_{\alpha} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

Пусть $N = (N_1, \dots, N_n) \in E^n$, Ω_N — полупространство, заданное неравенством $(x, N) > 0$, f — заданная функция с носителем $\text{supp } f \subset \Omega_N$. Задача Коши для оператора $P(D)$ в Ω_N с однородными начальными данными состоит в нахождении решения уравнения $P(D)u = f$ в E^n такого, что $\text{supp } u \subset \Omega_N$.

Ниже будем полагать, что N — единичный вектор.

Определение 1.1. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гиперболическим (по Гордингу) относительно вектора $N \in E^n$, если $P_m(N) \neq 0$ и для некоторого вещественного τ_0 $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $\xi \in R^n$ и $\tau < \tau_0$.

Замечание 1.1. Легко убедиться, что если для вектора $N \in E^n$ и многочлена $P(\xi)$ $P_m(N) \neq 0$, то существует вещественное число C такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\xi, \tau) \in R^{n+1}$ и $\tau < C(|\xi| + 1)$.

Если $N = (1, 0, \dots, 0)$ часто бывает удобно рассматривать $(n+1)$ -мерное пространство E^{n+1} (или R^{n+1}) и выделять одну из переменных, которую обычно обозначают через t , а группу переменных через $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$. Чтобы изложить некоторые известные результаты, непосредственно связанные с настоящей работой, мы поступим следующим образом: будем временно считать, что $N = (1, 0, \dots, 0) \in E^{n+1}$ и вместо $P(D)$ запишем $P(D_t, D_x)$, а вместо $P(\xi)$ соответственно $P(\lambda, \xi)$, где $\lambda \in C$, $\xi \in R^n$. Оператор

$$(1.2) \quad P(D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{|\nu|+j \leq m, j \neq m} \gamma_{\nu, j} D_x^{\nu} D_t^j$$

с постоянными коэффициентами называется слабо гиперболическим относительно t , или, что то же, относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$, если для любого вещественного $\xi \in R^n$ корни по λ многочлена

$$P_m(\lambda, \xi) = \lambda^m + \sum_{|\nu|+j=m, j \neq m} \gamma_{\nu, j} \xi^{\nu} \lambda^j$$

вещественны. При этом, если корни по λ многочлена $P_m(\lambda, \xi)$ при $\xi \in R^n$ простые, то оператор называется строго гиперболическим или гиперболическим по Петровскому.

Изучение задачи Коши для общих гиперболических и, в частности, слабо гиперболических уравнений началось с работы Е. Е. Леви [3], где рассматривался двумерный случай. В 1951 году Л. Гордингом было введено понятие общего гиперболического оператора (уравнения, многочлена), обобщающее понятие гиперболичности по Петровскому (см. [4], [5] или [6, определение 12.3.3]). Было доказано, что условие гиперболичности (и тем самым условие слабой гиперболичности) необходимо для того, чтобы нехарактеристическая задача Коши имела решение в классе распределений $D'(E^n)$ Л. Шварца (см., например, [7], [8] или [6, теорема 12.3.1]).

Нахождение наиболее широких функциональных пространств, где задача Коши для слабо гиперболического оператора поставлена корректно, привело к классам Жевре (см. [9]). Эти классы являются промежуточными между классами бесконечно дифференцируемых и вещественно - аналитических функций. Однако, если условие строгой гиперболичности является достаточным для корректности постановки задачи Коши в C^∞ , эта задача вообще говоря перестаёт быть корректно поставленной для слабо гиперболических уравнений, в чём легко убедиться на примере оператора теплопроводности, для которого задача Коши поставлена корректно в классе Жевре G^s при $s < 2$, но поставлена некорректно в G^s при $s \geq 2$ или в C^∞ (см., например, [6, пункт 4.2]). При этом $G^s(\Omega)$ — это множество функций $u \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K, U) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s, \quad \alpha \in N_0^n.$$

Для слабо гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами критерии корректности задачи Коши получены в работах Леви, Гординга, Лакса, Свенссона и других (см., например, [3], [10] - [13]).

Слабо гиперболический оператор $P(D_t, D_x)$ называется s -гиперболическим ($1 < s < \infty$) относительно t , или, что то же относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$, если существует число $c > 0$ такое, что $\text{Im} \lambda \geq -c(1 + |\xi|)^{\frac{1}{s}}$ для тех точек $(\lambda, \xi) \in C \times R^n$ для которых $P(\lambda, \xi) = 0$. Если $\text{Im} \lambda \geq -c$, то оператор $P(D_t, D_x)$ называют гиперболическим (по Гордингу) (см. [5], [15]). Для более подробных сведений см. монографию Л. Хермандера [6, глава 12].

В работах [12] и [13] доказано, что для s -гиперболического оператора (1.2) задача Коши с начальными условиями $D_t^k u(0, x) = f_k(x)$ ($x \in E^n$) и начальными функциями $f_k \in G_0^{s_1}(E^n) \equiv G^{s_1}(E^n) \cap C_0^\infty(E^n)$ $k = 0, 1, \dots, m-1$, ($0 < s_1 < s$), имеет решение $u \in G^{s_1}(E^{n+1})$. При этом оказалось, что каждый s -гиперболический оператор является слабо гиперболическим и каждый слабо гиперболический оператор является $\frac{\tau}{\tau-1}$ -гиперболическим, где τ -максимальная кратность характеристик (нулей символа $P_m(\lambda, \xi)$ по λ) (см. [13] и [9]).

В работе [14] О. Липсом и Л. Родино (для более подробных сведений см. монографию [16]) для символа $P(t, \xi)$ оператора $P(D_t, D_x)$ введено понятие весовой функции гиперболичности, зависящей только от переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и определены неоднородные классы Жевре, порожденные такими весами. Ими, а далее в более общем случае Д. Калво в [17] изучены вопросы существования решения задачи Коши в этих пространствах.

Д. Калво в [17] введено также понятие $(s, \mathbb{R})$ -гиперболического (мультиквази-гиперболического) относительно $(n+1)$ -мерного вектора $N = (1, 0, \dots, 0)$, оператора, обобщающее понятие s -гиперболичности. Это оператор $P(D_t, D_x)$ вида (1.2), для которого существует число $c > 0$ такое, что символ (1.3) удовлетворяет условию: если $P(\lambda, \xi) = 0$, то $\operatorname{Im} \lambda \geq -c|\xi|_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{h(\xi)}}$, где $h(\xi) \equiv |\xi|_{\mathbb{R}}$ — некоторый (вполне определенный) вес, зависящий от ξ , но не зависящий от t . В [17] доказывается существование единственного решения соответствующей задачи Коши в $C^\infty([-T, T]) \cap G_0^{s_1, \mathbb{R}}(E_x^n)$ для любых $(T, s) : T > 0, 1 < s_1 < s$ и для произвольных начальных данных из $G_0^{s_1, \mathbb{R}}(E_x^n)$.

В серии работ К. Ягдзяна изучена корректность задачи Коши для гиперболических операторов с кратными характеристиками (см. [18], [19]).

Во всех работах, посвященных s -гиперболическим или $(s, \mathbb{R})$ -гиперболическим $N \in E^{n+1}$ операторам $P(D_t, D_x)$, выделяется одно переменное t , т.е. рассматривается случай $N = (1, 0, \dots, 0)$, при этом вес гиперболичности не зависит от t .

В настоящей работе мы выводим необходимые условия для существования единственного решения нехарактеристической задачи Коши для гиперболических уравнений с весом, когда а) (единичный) вектор $N \in E^{n+1}$ произвольный, б) вес гиперболичности зависит от всех переменных, следовательно мультианизотропное пространство Жевре, где ищется решение, порождается общим весом. При этом, так как переменные будут играть одинаковую роль, то будем считать, что изучаемые операторы действуют в n -мерном пространстве. Исследуются

свойства символов, отвечающих рассмотренным линейным дифференциальным операторам.

Пусть $\mathfrak{R} \in R^{n,0}$ вполне правильный многогранник и $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$. Через $\mathfrak{R}^0$ обозначим множество его вершин и положим

$$d(\lambda) = d(\lambda, \mathfrak{R}) = \max_{\nu \in \mathfrak{R}} (\nu, \lambda) = \max_{\nu \in \mathfrak{R}} \sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j,$$

$$r_j = r_j(\mathfrak{R}) = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{d(\lambda)}{\lambda_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad r_0 = \max_{1 \leq j \leq n} r_j,$$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi^\nu| \equiv \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi_1^{\nu_1}| \dots |\xi_n^{\nu_n}|; \quad g(\xi) = 1 + |\xi|^{r_0}.$$

В [20] доказано существование числа $C = C(\mathfrak{R}) > 0$ такого, что

$$(1.3) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq C[h_{\mathfrak{R}}(\xi) + g(\eta)] \quad \forall \xi, \eta \in C^n$$

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$, числа $r \geq 1$ и области $\Omega \subset E^n$ введем следующие мультианизотропные пространства Жевре.

Через $\Gamma^r(\Omega)$ обозначим (см. [6]) множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|^{r|\alpha|} \quad \forall \alpha \in N_0^n.$$

Положим $\mathfrak{R}^j = \{\nu \in R^{n,0}; \nu/j \in \mathfrak{R}, (j = 1, \dots, n)\}$ и обозначим через $\Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}^j, (j = 0, 1, \dots).$$

Наконец, следуя А. Корли [21] и Л. Зангирати [22] (см. также [16] или [17]), через $G^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ обозначим множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \subset \Omega$ существует число $\kappa = \kappa(f, K) > 0$ такое, что

$$|||f|||_{\mathfrak{R}, K, \kappa} = \sup_j \max_{\alpha \in \mathfrak{R}^j} \left[\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \frac{\kappa^j}{j^j} \right] < \infty.$$

Положим также $G_0^{\mathfrak{R}}(\Omega) = \{f \in G^{\mathfrak{R}}(E^n), \text{supp } f \subset \Omega\}$. Легко убедиться, что $G^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ пространство Фреше, притом $\Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega) \subset G^{\mathfrak{R}}(\Omega)$. Известно (см. [20]), что $\Gamma^r(\Omega) \subset \Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ при $r \geq 1/r_0(\mathfrak{R})$, и $f, g \in \Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ для любых $f \in \Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ и $g \in \Gamma^r(\Omega)$.

2. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ

Лемма 2.1. Пусть последовательности положительных чисел $\{x_s\}$ и $\{y_s\}$ такие, что $y_s \rightarrow \infty$ и $x_s/y_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда для любых $r \in [0, 1)$ и $\sigma > 0$.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} \left(\frac{x_s + y_s^r}{t} \right)^t e^{-\sigma y_s} = 0.$$

Доказательство. Простые выкладки показывают, что для достаточно больших s

$$\sup_{t > 0} \left(\frac{x_s + y_s^r}{t} \right)^t e^{-\sigma y_s} = e^{-\sigma y_s + \frac{x_s + y_s^r}{t}} = e^{y_s [-\sigma + e^{-1} (\frac{x_s}{y_s} + y_s^{-1+r})]},$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Следующее предложение дает необходимое условие корректности постановки нехарактеристической задачи Коши для гиперболических относительно произвольного (единичного) вектора $N \in E^n$ уравнений. При этом будем считать, что вес $h_{\mathfrak{R}}(\xi)$ порождается вполне правильным многогранником $\mathfrak{R}$, для которого $r_0(\mathfrak{R}) < 1$. Сначала приведем пример такого многогранника.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$ и $\mathfrak{R}$ многогранник с вершинами $(0, 0)$, $(\delta_1, 0)$, (ν_1, ν_2) , $(0, \delta_2)$, где $\delta_1, \delta_2, \nu_1, \nu_2 \in (0, 1)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\nu_1}{\delta_1} + \frac{\nu_2}{\delta_2} > 1, \quad \frac{\nu_1}{\delta_1} + \nu_2 < 1, \quad \nu_1 + \frac{\nu_1}{\delta_1} < 1.$$

Легко убедиться, что это вполне правильный многогранник, для которого $r_0(\xi) < 1$ и $h_{\mathfrak{R}}(\xi) = 1 + |\xi_1|^{\delta_1} + |\xi_2|^{\delta_2} + |\xi_1|^{\nu_1} |\xi_2|^{\nu_2}$. Например, для параметров $\delta_1 = 2/3, \delta_2 = 1/3, \nu_1 = 4/9, \nu_2 = 3/18$ $r_0(\mathfrak{R}) = 3/4$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{R}$ вполне правильный многогранник, для которого $r_0 = r_0(\mathfrak{R}) < 1$. Пусть $N \in E^n$ и $P(D)$ линейный дифференциальный оператор такой, что для любой $f \in G_0^{\mathfrak{R}}(\Omega_N)$ уравнение $P(D)u = f$ имеет единственное решение $u \in G_0^{\mathfrak{R}}(\Omega_N)$. Тогда существует вещественное число c такое, что

$$(2.1) \quad P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in R^{n+1}, \quad \tau \leq c h_{\mathfrak{R}}(\xi).$$

Замечание 2.1. Очевидно, любой гиперболический по Гордигу оператор удовлетворяет условию (2.1).

Доказательство теоремы 2.1. Так как $G_0^{\mathfrak{R}}(\Omega_N)$ является замкнутым подпространством пространства Фреше $G^{\mathfrak{R}}(E^n)$, отображение $P(D) : G^{\mathfrak{R}}(E^n) \rightarrow G^{\mathfrak{R}}(E^n)$ непрерывно и по условию теоремы задача Коши для уравнения $P(D)u =$

f при всех $f \in G_0^{\mathbb{R}}(\Omega_N)$ имеет единственное решение с носителем в Ω_N , то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $P(D)$ порождает автоморфизм пространства $G_0^{\mathbb{R}}(\Omega_N)$.

Пусть $y \in \Omega_N$ и $\sigma = \frac{1}{2}(y, N)$. В силу сказанного, для точки $y \in \Omega_N$ существует компакт $K \subset \Omega_N$ и число $\kappa > 0$ такие, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$(2.2) \quad |u(y)| \leq C_1 |||P(D)u|||_{\mathbb{R}, \kappa} \quad \forall u \in G_0^{\mathbb{R}}(\Omega_N).$$

Выберем функцию $\chi \in \Gamma^{1/r_0}$ такую, что $\chi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > \sigma$. (Существование такой функции доказано в [23]).

Предположим обратное, т.е. существует последовательность $\{(\xi^s, \tau_s)\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $\tau_s/h_{\mathbb{R}}(\xi^s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $P(z^s) \equiv P(\xi^s + i\tau_s N) = 0$ ($s = 1, 2, \dots$). Положим

$$u_s(x) = e^{i(x-y, z^s)} \chi((x, N)) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Так как (см. [20]) $f\varphi \in G^{\mathbb{R}}(\Omega)$ для любых $f \in G^{\mathbb{R}}(\Omega)$ и $\varphi \in \Gamma^{1/r_0}(\Omega)$, то по определению функции χ имеем $u_s \in G_0^{\mathbb{R}}(\Omega_N)$ ($s = 1, 2, \dots$). Поэтому, в силу (2.2), определения последовательности $\{z_s\}$, и применяя обобщенную формулу Лейбница, для всех $s = 1, 2, \dots$ с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} 1 &= |u_s(y)| \leq C_1 |||P(D)u_s|||_{\mathbb{R}, \kappa} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{\alpha \in N_0^n} |||P^{(\alpha)}(z^s) \chi((x, N)) e^{i(x-y, z^s)}|||_{\mathbb{R}, \kappa} \leq \\ (2.3) \quad &\leq C_2 \sum_{0 \neq \alpha \in N_0^n} |P^{(\alpha)}(z^s)| |||D^{\alpha} \chi((x, N)) e^{i(x-y, z^s)}|||_{\mathbb{R}, \kappa}, \end{aligned}$$

где $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv D^{\alpha} P(\xi)$.

Отметим, что в правой части (2.3) стоит конечная сумма, так как $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv 0$ при $|\alpha| > m$. В силу определения функции χ отсюда следует существование положительных чисел $\kappa_1 = \kappa_1(\kappa, \chi)$ и $C_3 = C_3(C_2, \chi)$ таких, что

$$1 \leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| |||e^{i(x-y, z^s)}|||_{\mathbb{R}, \kappa'}, \quad (s = 1, 2, \dots),$$

где $K' = \{x \in K; 0 \leq (x, N) \leq \sigma\}$.

Из определения полунормы $||| \cdot |||$ для всех $s = 1, 2, \dots$ получаем

$$1 \leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| \sup_j \max_{\beta \in \mathbb{R}^j} \sup_{x \in K'} |D^{\beta} e^{i(x-y, z^s)}| \frac{\kappa_1^j}{j^j} =$$

$$= C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| \sup_j [\max_{\beta \in \mathbb{R}^j} |(z^s)^\beta|] \sup_{z \in K'} |e^{i(z-y, z^s)}| \frac{\kappa_j^j}{j^j}.$$

Так как многогранник $\mathfrak{K}$ полный, то существует натуральное число l такое, что $\{\alpha \in N_0^n, |\alpha| \leq m\} \subset \mathfrak{K}^l$. Тогда (см. [1], Лемма 2.1) существует число $C_4 > 0$ такое, что

$$\sum_{\beta \in \mathbb{R}^l} |\eta^\beta| \leq C_4 h_{\mathfrak{K}}^l(\eta), \quad \eta \in C^m.$$

Из последних двух неравенств следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что для всех $s = 1, 2, \dots$

$$1 \leq C_5 \sup_j \left\{ [C_4 h_{\mathfrak{K}}(\xi^s)]^{j+1} e^{-\sigma|\tau_s|} \frac{\kappa_j^j}{j^j} \right\}.$$

Отсюда, в свою очередь имеем для $\kappa_2 = C_4 \kappa_1$ и с некоторой постоянной $C_6 > 0$

$$1 \leq C_6 \sup_j h_{\mathfrak{K}}^j(\xi^s) e^{-\sigma|\tau_s|} \frac{\kappa_2^j}{j^j} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Отсюда и из свойства (1.4) весовой функции $h_{\mathfrak{K}}$ имеем

$$(2.4) \quad 1 \leq C_6 \sup_j [h_{\mathfrak{K}}(\xi^s) + 1 + |\tau_s|^{r_0}]^j e^{-\sigma|\tau_s|} \frac{(C\kappa_2)^j}{j^j} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

где C - постоянная из (1.4). Так как последовательности $\{x_s = C\kappa_2[h_{\mathfrak{K}}(\xi^s) + 1]\}_{s=1}^\infty$ и $y_s = \{|\tau_s| (C\kappa_2)^{1/r_0}\}$ при $r = r_0 < 1$ и $\sigma > 0$ удовлетворяют условиям леммы 2.1, то из (2.4) следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_j [(h_{\mathfrak{K}}(\xi^s) + 1 + |\tau_s|^{r_0}) \frac{C\kappa_2}{j}]^j e^{-\sigma|\tau_s|} = 0,$$

что противоречит (2.4) и доказывает теорему. $\square$

Исходя из теоремы 2.1, введем понятие весовой функции гиперболичности и понятие гиперболического оператора с весом. Причем введенное здесь понятие весовой функции отличается от соответствующего понятия, введенного Л. Хермандером, О. Лиссом, Л. Родино (см. [14] или Определение 1.8.1 в [16]) тем, что весовая функция h может не удовлетворять неравенству $h(\xi + \eta) \leq C h(\xi) (1 + |\eta|^M)$.

Определение 2.1. Локально ограниченную функцию h , определенную в $\mathbb{R}^n$ назовем весом гиперболичности, если h удовлетворяет следующим условиям

$$1) \quad h(\xi) \geq c > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$2) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} h(\xi)/|\xi| = 0,$$

3) для каждого $t > 0$ существуют числа $0 < a_1(t) < a_2(t)$ такие, что

$$a_1(t) h(\xi) \leq h(t\xi) \leq a_2(t) h(\xi) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Множество всех весовых функций обозначим через H . Очевидно, что для любой функции $h \in H$ и числа $C > 0$ $Ch \in H$.

Определение 2.2. Пусть $N \in R^n$ и $h \in H$. Многочлен P назовем h -гиперболическим относительно вектора N если (см. представление (1.1)) $P_m(N) \neq 0$ и существует вещественное число c такое, что

$$(2.5) \quad P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in R^{n+1}, \quad \tau < ch(\xi).$$

Из условия 1) на функцию h непосредственно следует, что гиперболический по Гордингу (относительно вектора N) многочлен является h -гиперболическим (относительно N) для любой весовой функции $h \in H$.

3. СВОЙСТВА h -ГИПЕРВОЛИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 3.1. Пусть $h \in H$. Если многочлен P вида (1.1) h -гиперболичесен относительно $N \in R^n$, то его главная часть P_m гиперболична по Гордингу относительно $N \in R^n$.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы существует вещественное число τ_0 , для которого

$$(3.1) \quad P_m(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in R^{n+1}, \quad \tau < \tau_0.$$

Положим для $\xi \in R^n$ и $t > 0$

$$O(\xi, t) = \{\theta = \theta(\xi, t) \in C, P(t\xi + i\theta N) = 0\}.$$

Так как для всех $\xi \in R^n$, $t > 0$ и $\theta \in O(\xi, t)$

$$0 = P(t\xi + i\theta N) = P(t[\xi - (Im\theta)N] + i(Re\theta)N),$$

то из h -гиперболичности многочлена P следует существование числа $C_1 > 0$ такого, что

$$(3.2) \quad t Re\theta \geq C_1 h(t[\xi - (Im\theta)N]) \quad \forall \xi \in R^n, t > 0, \theta \in O(\xi, t).$$

Очевидно, для каждой пары $(\xi, \theta) : \xi \in R^n, \theta \in C$

$$P_m(\xi + i\theta N) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m} P(t\xi + i\theta N).$$

Так как $P_m(N) \neq 0$, то нули (по θ) многочлена $Q_t(\theta) \equiv P(t\xi + it\theta N)$ непрерывно зависят от t . Следовательно, в силу (3.2), нули (по θ) многочлена $P_m(\xi + i\theta N)$ принадлежат множеству

$$\bigcap_{t>0} \{ \theta \in C, t \operatorname{Re} \theta \geq C_1 h(t[\xi - (Im\theta)N]) \} = \bigcap_{t>0} \{ \theta \in C, \operatorname{Re} \theta \geq \frac{C_1}{t} h(t[\xi - (Im\theta)N]) \}.$$

Отсюда непосредственно получаем, что для тех θ , для которых $P_m(\xi + i\theta N) = 0$

$$\operatorname{Re} \theta \geq c \lim_{t \rightarrow \infty} h(t[\xi - (Im\theta)N])/t,$$

где c — постоянная из (2.5).

Если $\xi - (Im\theta)N = 0$ для пары (ξ, θ) , то отсюда следует, что $\operatorname{Re} \theta \geq 0$. Если же $\xi - (Im\theta)N \neq 0$, то в силу условия 2) на функцию h имеем

$$\operatorname{Re} \theta \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t[\xi - (Im\theta)N])}{t|\xi - (Im\theta)N|} |\xi - (Im\theta)N| = 0.$$

Это значит, что нули (по $\tau = \tau(\xi)$) многочлена $P_m(\xi + i\theta N)$ лежат в полупространстве $\operatorname{Re} \tau \geq 0$ для всех $\xi \in R^n$. Поэтому $P_m(\xi + i\theta N) \neq 0$ для любых $\xi \in R^n$, $\tau < 0 \equiv \tau_0$, что и означает, что многочлен P_m гиперболичесен по Горддингу относительно вектора N . Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Если многочлен P h -гиперболичесен относительно вектора N , то он h -гиперболичесен относительно вектора $-N$.

Доказательство. По теореме 3.1 многочлен P_m гиперболичесен по Горддингу относительно N , поэтому (см. [6], лемма 8.7.3) можно считать, что коэффициенты P_m вещественны.

Пусть $\xi \in R^n$ и $\{\tau_j(\xi) : j = 1, \dots, m\}$ нули (по τ) многочлена $P(\xi + i\theta N)$. Применяя формулу Тейлора, получим для каждого $l = 0, 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} P_{m-l}(\xi + i\tau N) &= \sum_{\alpha} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-l}(i\tau N) = \\ &= \tau^{m-l} P_{m-l}(iN) + \sum_{j=1}^{m-l} \tau^{m-l-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-l}(i\tau N). \end{aligned}$$

Поэтому

$$P(\xi + i\tau N) = \tau^m P_m(iN) + \tau^{m-1} \left[\sum_{j=1}^m (D_j P_m)(iN) \xi_j + P_{m-1}(iN) \right] + \dots,$$

где не выписаны члены, содержащие τ в степени меньше $(m-1)$.

Следовательно

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \tau_j(\xi) &= -\left[\sum_{j=1}^n (D_j P_m)(iN)\xi_j + P_{m-1}(iN)\right]/P_m(iN) = \\ &= i\left[\sum_{j=1}^n (D_j P_m)(N)\xi_j + P_{m-1}(N)\right]/P_m(N).\end{aligned}$$

Так как P_m многочлен с вещественными коэффициентами и $N \in R^n$, то для $\xi \in R^n$

$$\sum_{j=1}^m \tau_j(\xi) = \operatorname{Re}[iP_{m-1}(N)]/P_m \equiv C_1.$$

Тогда в силу h -гиперболичности многочлена P и условия 1) на функцию $h \in H$ имеем с некоторыми вещественными постоянными C_2, C_3

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \tau_k &= C_1 - \sum_{j \neq k} \operatorname{Re} \tau_j \leq C_1 - C_2 \sum_{j \neq k} h(\xi - \operatorname{Im} \tau_j(\xi)N) \leq \\ &\leq C_3 \sum_{j \neq k} h(\xi - \operatorname{Im} \tau_j(\xi)N); \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаем, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для произвольных $\xi \in R^n$ и $\tau > C_3(n-1)h(\xi)$, т.е. многочлен P h -гиперболичен относительно вектора $-N$. Теорема 3.2 доказана. $\square$

Из этой теоремы непосредственно следует

Следствие 3.1. *Многочлена P h -гиперболичен относительно вектора N тогда и только тогда, когда $P_m(N) \neq 0$ и существует положительное число c такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\tau, \xi) \in R^{n+1}$, $\tau \geq ch(\xi)$.*

Следуя Л. Хермандеру для точки $\xi \in R^n$, многочлена P и числа $t > 0$ введем следующие функции (Хермандера) (см. [6], формулы (10.1.7) и (10.4.2))

$$\bar{R}(\xi) = \sqrt{\sum_{\alpha} |R^{\alpha}(\xi)|^2}, \quad \bar{R}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha} |R^{\alpha}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}}.$$

Говорят, что многочлен P сильнее многочлена Q и записывают $Q \prec P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\bar{Q}(\xi) \leq C \bar{P}(\xi) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Оказывается (см. [6], теорема 10.4.1), что $Q \prec P$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$\bar{Q}(\xi, t) \leq C_1 \bar{P}(\xi, t) \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall t > 1.$$

Определение 3.1. Пусть $h \in \Pi$. Будем говорить, что многочлен P h -сильнее многочлена Q и писать $Q \prec^h P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\bar{Q}(\xi, t) \leq C \bar{P}(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in R^{n+1}, \quad \forall t \geq h(\xi).$$

Из условия 1) на функции множества Π следует, что $Q \prec P$ влечет $Q \prec^h P$, для любой $h \in \Pi$. Обратное не верно, что подтверждается следующим примером

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$, $Q(\xi) = \xi_1^3$ и $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2}$. Легко проверить, что с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2 , многочлены P и Q на последовательности $\xi^s = (s, s)$; $s = 1, 2, \dots$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$C_1^{-1} s^3 \leq \bar{Q}(\xi^s) \leq C_1 s^3; \quad C_2^{-1} s^2 \leq \bar{P}(\xi^s) \leq C_2 s^2; \quad s = 1, 2, \dots,$$

т.е. Q не сильнее P .

С другой стороны, простые подсчеты показывают, что с некоторыми положительными постоянными C_3, C_4 и для всех $\xi \in R^2, t > 0$ многочлены P и Q удовлетворяют соотношениям

$$\bar{Q}(\xi, t) \leq C_3(|\xi_1|^3 + |\xi_1|^2 t + |\xi_1| t^2 + t^4), \quad \bar{P}(\xi, t) \geq C_4[(\xi_1^2 + \xi_2^2)t + t^4]$$

из которых следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что $\bar{Q}(\xi, t) \leq C_5 \bar{P}(\xi, t)$ для всех $(\xi, t) \in R^3, t \geq h(\xi)$ т.е. $Q \prec^h P$.

Лемма 3.1. Пусть P и Q многочлены от n переменных, а функции $h, h_1 \in \Pi$ удовлетворяют условию

$$(3.3) \quad C_1 h(\xi) \leq h_1(\xi) \leq C_2 h(\xi), \quad \xi \in R^n,$$

где C_1 и C_2 некоторые положительные постоянные. Тогда 1) $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда $Q \prec^{h_1} P$, 2) $Q(\theta \cdot) \prec^h P(\theta \cdot)$ для любого $\theta > 0$.

Доказательство. Ясно, что для любого многочлена R порядка не выше m и для произвольных $\tau > 0, \xi \in R^n, t > 0$

$$(\min\{1, \tau\})^m \bar{R}(\xi, t) \leq \bar{R}(\xi, t) \leq (\max\{1, \tau\})^m \bar{R}(\xi, t).$$

Следовательно $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда для любого $\tau > 0$ существует число $C_3 = C_3(\tau) > 0$ такое, что

$$\bar{Q}(\xi, \tau t) \leq C_3 \bar{P}(\xi, \tau t) \quad \forall \xi \in R^n, t \geq h(\xi),$$

или, что то же самое

$$\bar{Q}(\xi, \theta) \leq C_3 \bar{P}(\xi, \theta) \quad \forall \xi \in R^n, \theta \geq \tau h(\xi).$$

Пусть $\tau = C_1$ (см. неравенство (3.3)). Тогда в силу левой части (3.3) неравенство $\theta \geq h_1(\xi)$ влечёт неравенство $\theta \geq \tau h(\xi)$, поэтому отсюда следует, что

$$\bar{Q}(\xi, \theta) \leq C_3 \bar{P}(\xi, \theta) \quad \forall \xi \in R^n, \theta \geq h_1(\xi),$$

т.е. $Q \prec^{h_1} P$. Для доказательства того, что $Q \prec^{h_1} P$ влечет $Q \prec^h P$ достаточно воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{C_2} h_1(\xi) \leq h(\xi) \leq \frac{1}{C_1} h_1(\xi) \leq h_1(\xi), \quad \xi \in R^n,$$

являющимся следствием неравенства (3.3).

Докажем пункт 2) леммы. Пусть $Q \prec^h P$, т.е. с некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\bar{Q}(\xi, t) \leq C_4 \bar{P}(\xi, t), \quad \xi \in R^n, t \geq h(\xi),$$

или, что тоже самое

$$\bar{Q}(\theta\eta, t) \leq C_4 \bar{P}(\theta\eta, t), \quad \eta \in R^n, t \geq h(\theta\eta).$$

Применяя свойство 3) функций $h \in H$ и доказанный пункт настоящей леммы, получаем доказательство пункта 2). Лемма 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. Если однородный многочлен P_m гиперболичесен относительно вектора $N \in R^n$, то существует число $c > 0$ такое, что

$$(3.4) \quad c^{-1} \bar{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + iN)| \leq c \bar{P}_m(\xi, t), \quad (\xi, t) \in R^{n+1}, t > 0$$

Доказательство. В монографии [6] доказано, что в условиях настоящей леммы, существует число $C_1 > 0$ такое, что

$$C_1 P_m(\eta) \leq |P_m(\eta + itN)|, \quad \eta \in R^n.$$

Отсюда и из однородности многочлена P_m следует, что

$$C_1 t^m \bar{P}_m\left(\frac{\xi}{t}\right) \leq t^m P_m\left(\frac{\xi}{t} + iN\right) = |P_m(\xi + itN)|, \quad \xi \in R^n.$$

Так как для однородного многочлена P_m справедливо тождество

$$\begin{aligned} t^m \bar{P}_m\left(\frac{\xi}{t}\right) &= \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}\left(\frac{\xi}{t}\right)|^2 t^{2m}} = \\ &= \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 \frac{t^{2m}}{t^{2(m-|\alpha|)}}} = \bar{P}_m(\xi, t), \quad (\xi, t) \in R^{n+1}, t > 0, \end{aligned}$$

то из последних двух соотношений получаем

$$C_1 \bar{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + itN)|, \quad (\xi, t) \in R^{n+1}, t > 0,$$

что доказывает левую часть (3.4). Правая часть (3.4) получается непосредственным применением формулы Тейлора. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $h \in H$, P_m однородный многочлен порядка m и Q многочлен порядка $k \leq m$, представленный в виде суммы j -однородных многочленов

$$(3.5) \quad Q(\xi) = \sum_{j=0}^k Q_j(\xi).$$

Если $Q \prec^h P_m$, то $Q_j \prec^h P_m$ $j = 0, 1, \dots, k$.

Доказательство. Пусть $t_0, t_1, \dots, t_k$ попарно различные, отличные от нуля числа. Так как определитель матрицы $(t_j^l)_{j,l=0}^k$ отличен от нуля и

$$Q(t_j \xi) = \sum_{l=0}^k t_j^l Q_l(\xi), \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

то существуют числа $\{b_{l,j}\}_{l,j=0}^k$ такие, что

$$(3.6) \quad Q_l(\xi) = \sum_{j=0}^k b_{l,j} Q(t_j \xi), \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Применяя лемму 3.1, в силу условий настоящей леммы и тождества (3.6), получим существование положительных чисел C_1, C_2 таких, что для всех $l = 0, 1, \dots, k$

$$\bar{Q}_l(\xi, t) \leq C_1 \sum_{j=0}^k \bar{Q}(t_j \xi, t) \leq C_2 \sum_{j=0}^k \bar{P}_m(t_j \xi, t), \quad \xi \in R^n, \quad t \geq h(\xi).$$

С другой стороны, из однородности многочленов $\{P_m^{(\alpha)}\}$ следует, что для любого числа $\theta \neq 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \bar{P}_m(\theta \xi, t) &= \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\theta \xi)|^2 t^{2|\alpha|}} = \sqrt{\sum_{\alpha} |\theta|^{2(m-|\alpha|)} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}} \leq \\ &\leq C(\theta) \bar{P}_m(\xi, t), \quad \xi \in R^n, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где $C(\theta) = \max\{1, \theta^m\}$. Поэтому положив $C_3 = \max\{C(t_j) \mid 0 \leq j \leq k\}$ получим для всех $l = 0, 1, \dots, k$

$$\bar{Q}_l(\xi, t) \leq C_3 \bar{P}_m(\xi, t) \quad \forall \xi \in R^n, \quad t \geq h(\xi).$$

Лемма 3.2 доказана. $\square$

Теорема 3.3. Пусть $h \in H$ и P_m — однородный многочлен порядка m гиперболический по Гордингу относительно N . Если многочлен Q порядка $\text{ord} Q = k < m$ h -слабее P_m , то многочлен $P_m + Q$ h -гиперболичесен относительно N .

Доказательство. В силу леммы 3.3 имеем (см. представление (3.5)), что $Q_j \prec^h P_m$ $j = 0, 1, \dots, k$. Применяя формулу Тейлора и лемму 3.2, отсюда получим с некоторыми положительными числами C_1, C_2, C_3 для всех $j = 0, 1, \dots, k$, $\xi \in R^n$ и $\tau \in R^1, |\tau| > h(\xi)$

$$|Q_j(\xi + i\tau N)| \leq C_1 \bar{Q}_j(\xi, \tau) \leq C_2 \bar{P}_m(\xi, \tau) \leq C_3 |P_m(\xi + i\tau N)|.$$

Отсюда для любого $\sigma > 0$ и для всех $j = 0, 1, \dots, k$ получим

$$|Q_j(\sigma\xi + i\tau N)| \leq C_3 |P_m(\sigma\xi + i\tau N)| \quad \forall \xi \in R^n, \tau \in R^1, |\tau| > h(\sigma\xi).$$

В силу однородности многочленов P_m и $\{Q_j\}$ отсюда получаем для всех $\xi \in R^n, \tau \in R^1, |\tau| > h(\sigma\xi)$

$$(3.7) \quad |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma} N)| \leq C_3 \sigma^{m-j} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma} N)|, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Выберем число $\sigma_0 > 0$ так, чтобы $C_2 \sum_{j=0}^k \sigma_0^{m-j} \leq \frac{1}{2}$, тогда в силу (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| &\leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| - \sum_{j=0}^k |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| \leq \\ &\leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N) + \sum_{j=0}^k Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| = |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N) + \\ &+ Q(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| \leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| + \sum_{j=0}^k |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)|, \quad \xi \in R^n, \tau \in R^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi). \end{aligned}$$

В итоге получается, что при соответствующем выборе числа σ_0 для всех $\xi \in R^n, \tau \in R^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi)$ справедливо соотношение

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| \leq |(P_m + Q)(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)| \leq \frac{3}{2} |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N)|.$$

Так как в силу условий теоремы (см. также доказательство теоремы 3.1) $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N) \neq 0$ при $\tau \neq 0$, то (см. условие 1) на функцию h $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0} N) \neq 0$ при $|\tau| \geq h(\sigma_0\xi)$. Тогда из (3.8) непосредственно следует, что $P_m(\xi + i\theta N) + Q(\xi + i\theta N) \neq 0$ при всех $\xi \in R^n, \theta \in R^1$ и $\theta > \sigma_0 h(\sigma_0\xi)$.

Отсюда и из условия 3) на функцию h получаем, что многочлен $P_m + Q$ h -гиперболичесен относительно N . Теорема 3.3 доказана. $\square$

Приведем два примера многочленов, не являющихся гиперболическими по Горддингу, но являющимися h -гиперболическими для определенных функций $h \in H$. При этом во втором примере обе координаты вектора N отличны от нуля.

Пример 3.2. Пусть $n = 2$ и $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \xi_1^3 \equiv P_4(\xi) + P_3(\xi)$. Легко убедиться, что многочлен P_4 гиперболичесен по Горддингу относительно вектора $N = (0, 1)$. С другой стороны, так как многочлен P_3 не слабее многочлена P_4 (см. пример 3.1), то по теореме Горддинга - Свенссона (см. [11] или [6], теорема 12.4.6) многочлен P не является гиперболическим по Горддингу относительно $N = (0, 1)$. Однако, так как (см. пример 3.1) $P_3 \prec^h P_4$ для $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2} \in H$, то по теореме 3.3 многочлен P является h -гиперболическим относительно вектора $N = (0, 1)$.

Пример 3.3. Пусть $n = 2$, $P_{10}(\xi) = \xi_1^6 \xi_2^4$, $Q(\xi) = \xi_1^6 \xi_2^2 (\xi_1^4 + \xi_2^4) + \xi_1^8 + \xi_2^8$, $h(\xi) = 1 + |\xi_1|^{1/2} + |\xi_2|^{2/3}$, $N = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Легко убедиться в том, что P_{10} гиперболический по Горддингу относительно N многочлена, $Q \prec^h P_{10}$, но Q не слабее P_{10} . Поэтому многочлен $P_{10} + Q$ не является гиперболическим по Горддингу, но является h -гиперболическим относительно N .

Abstract. The results by Görding, Larsson, Cattabriga, Rodino, Calvo on correctness of Cauchy problem for N -hyperbolic equations are generalized. We prove that in the general case where the vector $N = (N_1, \dots, N_n)$ is different from the vector $(1, 0, \dots, 0)$, for the correctness of the Cauchy problem more stronger condition is required, which we call weighted hyperbolicity condition. We also discuss the properties of polynomials possessing weighted hyperbolicity property.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, 91, 59 - 91 (1987).
- [2] Л. Р. Волеяч, С. Г. Гиндиян, "Об одном классе гипогиперболических операторов", Мат. Сборник, 75 (117), no. 3, 400 - 416 (1968).
- [3] E. E. Levi, "Caratteristiche multiple e probleme di Cauchy", Ann. Mat. Pure Appl., (3) 16, 161 - 201 (1909).
- [4] И. Г. Петровский, "О проблеме Копля для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций", Вулл. Моск. ун-та, (А), 1, no. 7, 1 - 72 (1951).
- [5] L. Görding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., 85, 1 - 62 (1951).
- [6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1983).
- [7] S. Mizohata, On the Cauchy problem. Notes and Reports in Mathematics, in Science and Engineering 3, Academic Press, Inc., Orlando, FL, Science Press, Beijing (1985).
- [8] W. Matsumoto, H. Yamahara, "On Cauchy - Kowalevskaya theorem for sistem", Proc. Japan Acad. ser. A, Math Sci. 67, no. 6, 181 - 185 (1991).

- [9] M. Gevrey, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivatives partielles", Ann. Ec. Norm. Sup., Paris, **35**, 129 – 190 (1918).
- [10] P. D. Lax, "Asimptotic solutions of oscillatory initial value problems", Duke Math. J. **24**, 627 – 646 (1974).
- [11] S. L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal parts", Ark. Mat. **8**, 145 – 162 (1969).
- [12] E. Larsson, "Generalized hyperbolicity", Ark. Mat. **7**, 11 – 32 (1967).
- [13] L. Cattabriga, "Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti", Quad. Un. Mat. It. **24**, Pitagora, Bologna (1983).
- [14] O. Liess, L. Rodino, "Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators", Anal. Funz. Appl. Suppl. Boll. Un. Mat. It., vol. **3C**, no.1, 233 – 323 (1984).
- [15] L. Gårding, "Local hyperbolicity", Proc. of the International Symposium on Partial Diff. Equations (Jerusalem, 1972), Israel J. Math. **13**, 65 – 81 (1972).
- [16] L. Rodino, Linear Partial Diff. Operators in Gevrey Spaces, World Scientific, Singapore (1993).
- [17] D. Calvo, Multianisotropic Gevrey Classes and Cauchy Problem. Ph. D. Thesis in Mathematics, Universita degli Studi di Pisa.
- [18] К. А. Ягджян, "Необходимые условия корректной постановки задачи Коши для операторов с кратными характеристиками", Изв. АН Арм. ССР, сер. Мат., **23**, no. 5, 439 – 462 (1988).
- [19] K. Yagjian, "The Cauchy problem for hyperbolic operators. Multiple characteristics", Micro - local approach. Mathematical Topics, **12**, Akademie Verlag, Berlin, 398 p. (1997).
- [20] V. N. Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", Изв. НАН Арм. ССР, сер. Мат., **31**, no. 2, 33 – 47 (2002).
- [21] A. Corli, "Un teorema di rappresentazione per certe classi generalizzate di Gevrey", Boll. Un. Mat. It. Serie **6**, 4 -C, no.1, 245 – 257 (1985).
- [22] L. Zanghirati, "Iterati di operatori e regolarita Gevrey microlocale anisotropa", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67**, 85 – 104 (1982).
- [23] H. Komatsu, "Ultradistributions. Structure theorems and a characterisation", J. Pac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. JA, **20**, 25 – 105 (1973).

Поступила 23 ноября 2013

PERIODIC AND SUBHARMONIC SOLUTIONS FOR $2n$ TH-ORDER p -LAPLACIAN DIFFERENCE EQUATIONS

XIA LIU, YUANBIAO ZHANG, HAIPING SHI

Hunan Agricultural University, Changsha, China

Jinan University, Zhuhai, China

Guangdong Construction Vocational Technology Institute

E-mails: xia991002@163.com, abiao@163.com, shp7971@163.com

Abstract.¹ By using the critical point theory, some new criteria for the existence and multiplicity of periodic and subharmonic solutions for $2n$ th-order p -Laplacian difference equations are obtained. The proof is based on the Linking Theorem in combination with variational technique. Our results generalize and improve the known in the literature results.

MSC2010 numbers: 39A11

Keywords: periodic and subharmonic solutions; $2n$ th-order; nonlinear difference equations; discrete variational theory; p -Laplacian.

1. INTRODUCTION

Existence of periodic solutions of higher-order differential equations has been the subject of many investigations (see, e.g., [8], [13], and reference therein). By using various methods and techniques, such as the fixed point theory, the Kaplan-Yorke method, the critical point theory, the coincidence degree theory, the bifurcation theory and the dynamical system theory, etc., a number of existence results for periodic solutions have been obtained in the literature. Difference equations, the discrete analogs of differential equations, occur widely in numerous settings and forms, both in mathematics itself and in its applications to statistics, computing, electrical circuit analysis, dynamical systems, economics, biology and other fields. For the general background of difference equations, one can refer the monograph [1]. Since the last decade, there has been much progress on the study of qualitative

¹This project is supported by Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20114410110002), National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171078), Science and Research Program of Hunan Provincial Science and Technology Department (Grant No. 2012FJ4109) and Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (Grant No. 12CC0170).

properties of difference equations, which includes results on stability and attractivity (see [12]), and results on oscillation and other topics (see [1], [18]). Only a few papers are devoted to the periodic solutions of higher-order difference equations. Therefore, it is worthwhile to explore this topic.

Let $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{R}$ denote the sets of all natural numbers, integers and real numbers, respectively. For $a, b \in \mathbf{Z}$ ($a \leq b$), define $\mathbf{Z}(a) = \{a, a+1, \dots\}$ and $\mathbf{Z}(a, b) = \{a, a+1, \dots, b\}$. The symbol $*$ will denote the transpose of a vector. In this paper we consider the following 2ⁿth-order p -Laplacian difference equation

$$(1.1) \quad \Delta^n (r_{k-n} \varphi_p(\Delta^n u_{k-1})) + (-1)^n q_k \varphi_p(u_k) = (-1)^n f(k, u_k), \quad n \in \mathbf{Z}(1), \quad k \in \mathbf{Z},$$

where Δ is the forward difference operator $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $\Delta^n u_k = \Delta(\Delta^{n-1} u_k)$, $\varphi_p(s)$ is the p -Laplacian operator $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ ($1 < p < \infty$), $\{r_k\}$ and $\{q_k\}$ are real sequences, $f \in C(\mathbf{Z} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, T is a given positive integer, $r_{k+T} = r_k > 0$, $q_{k+T} = q_k \geq 0$, $f(k+T, v) = f(k, v)$. Some special cases of (1.1) has been widely used to study discrete models appearing in many fields. For example, the simple logistic equation $u_{n+1} = ru_n$ was used to approximate the evolution of an animal population over time, where u_n denotes the number of animals this year, u_{n+1} is the number of animals next year, and r is the growth rate or fecundity.

Note that the equation (1.1) is a discrete analogue of the following nonlinear differential equation

$$(1.2) \quad \frac{d^n}{dt^n} \left[r(t) \varphi_p \left(\frac{d^n u(t)}{dt^n} \right) \right] + (-1)^n q(t) \varphi_p(u(t)) = (-1)^n f(t, u(t)),$$

which was extensively studied by a number of authors (see [1]).

The widely used tools in the study of the existence of periodic solutions of difference equations are the various fixed point theorems in cones (see [1]). It is well known that the critical point theory is a very powerful tool that deals with the problems of differential equations (see [13], [14]). Only since 2003, the critical point theory has been employed to establish sufficient conditions for the existence of periodic solutions of difference equations. By using the critical point theory, Guo and Yu [9]-[11] and Shi et al. [17], found sufficient conditions for the existence of periodic solutions of second-order nonlinear difference equations. Compared to one- or second-order difference equations, the study of higher-order equations has received considerably less attention (see, e.g., [1], [6], [7], and the references therein). In 1994, Ahlbrandt and Peterson

[2] studied the $2n$ th-order difference equation of the form:

$$(1.3) \quad \sum_{i=0}^n \Delta^i (r_i(k-i) \Delta^i u(k-i)) = 0$$

in the context of the discrete calculus of variations, while Peil and Peterson [15] studied the asymptotic behavior of solutions of (1.3) with $r_i(k) \equiv 0$ for $1 \leq i \leq n-1$. In 1998, Anderson [3] considered (1.3) for $k \in \mathbb{Z}(a)$, and obtained a formulation of generalized zeros and (n, n) -disconjugacy for (1.3). In 2004, Migda [14] studied an n th-order linear difference equation.

If $q_k \equiv 0$, $p = 2$ and $n = 2$, then replacing $f(k, u_k)$ by $-f(k, u_k)$, the equation (1.1) reduces to

$$(1.4) \quad \Delta^2 (r_{k-2} \Delta^2 u_{k-2}) + f(k, u_k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In 2005, Cai, Yu and Guo [5] have obtained some criteria for the existence of periodic solutions of the fourth-order difference equation (1.4). If $q_k \equiv 0$ and $p = 2$, then replacing $f(k, u_k)$ by $(-1)^{n+1} f(k, u_k)$, the equation (1.1) reduces to the following:

$$(1.5) \quad \Delta^n (r_{k-n} \Delta^n u_{k-n}) + f(k, u_k) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}(3), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recently, Cai and Yu [4] have obtained some criteria for the existence of periodic solutions of the $2n$ th-order difference equation (1.5) in the case where f grows superlinearly both at 0 and at ∞ . A great deal of work has also been done to study the existence of solutions for discrete boundary value problems with p -Laplacian operator. Because of their applications in many fields, we refer the reader a monograph by Agarwal [1]. However, to the best of our knowledge, results on periodic solutions of higher-order nonlinear difference equations with p -Laplacian are very scarce in the literature. The main purpose of this paper is to give some sufficient conditions for the existence and multiplicity of periodic and subharmonic solutions for $2n$ th-order p -Laplacian difference equations. Our methods are similar to that of used in [13], [16]. The main approach used in our paper is a variational technique and the Linking Theorem. Notice that our results not only generalize, but also improve the results from [4] and [5] (for details see Remarks 1.2 and 1.4 below). The motivation for the present work stems from the recent papers [6], [7].

Let P be the $mT \times mT$ matrix defined by

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The eigenvalues of P are given by

$$(1.6) \quad \lambda_j = 2 \left(1 - \cos \frac{2j}{mT} \pi \right), \quad j = 0, 1, \dots, mT-1.$$

Thus, $\lambda_0 = 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_{mT-1} > 0$, and hence

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{mT-1}\} = 2 \left(1 - \cos \frac{2}{mT} \pi \right),$$

$$(1.7) \quad \lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{mT-1}\} = \begin{cases} 4, & \text{if } mT \text{ is even,} \\ 2 \left(1 + \cos \frac{1}{mT} \pi \right), & \text{if } mT \text{ is odd.} \end{cases}$$

Denote

$$W = \ker P = \{u \in E_{mT} | Pu = 0 \in \mathbb{R}^{mT}\}.$$

Then $W = \{u \in E_{mT} | u = \{c\}, c \in \mathbb{R}\}$. Let V be the orthogonal complement of E_{mT} to W , that is, $E_{mT} = V \oplus W$. For convenience, we identify the element $u \in E_{mT}$ with $u = (u_1, u_2, \dots, u_{mT})^*$. Set

$$\underline{r} = \min_{k \in \mathbb{Z}(1, T)} \{r_k\}, \quad \bar{r} = \max_{k \in \mathbb{Z}(1, T)} \{r_k\}, \quad \underline{q} = \min_{k \in \mathbb{Z}(1, T)} \{q_k\}, \quad \bar{q} = \max_{k \in \mathbb{Z}(1, T)} \{q_k\}.$$

Now we are in position to state our main results.

Theorem 1.1. Assume that the following hypotheses are satisfied:

(F_1) there exists a functional $F(k, v) \in C^1(Z \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, such that $F(k, v) \geq 0$, $\frac{\partial F(k, v)}{\partial v} = f(k, v)$ and $F(k + T, v) = F(k, v)$;

(F_2) there exist constants $\delta_1 > 0$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{p} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^p \left(\underline{r} \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} + \underline{q}\right)\right)$, such that $F(k, v) \leq \alpha |v|^p$, for $k \in \mathbb{Z}$ and $|v| \leq \delta_1$;

(F_3) there exist constants $\rho_1 > 0$, $\zeta > 0$, $\beta \in \left(\frac{1}{p} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^p \left(r\lambda_{\max}^{\frac{p}{p-1}} + q\right), +\infty\right)$, such that

$$F(k, v) \geq \beta|v|^p - \zeta, \text{ for } k \in \mathbb{Z} \text{ and } |v| \geq \rho_1,$$

where c_1, c_2 are constants satisfying (2.4), and $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ are as in (1.7).

Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.1) has at least three mT -periodic solutions.

Remark 1.1. By (F_3) it is easy to see that there exists a constant $\zeta' > 0$ such that

$$(F'_3) \quad F(k, v) \geq \beta|v|^p - \zeta', \quad \forall (k, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

As a matter of fact, let $\zeta_1 = \max \{|F(k, v) - \beta|v|^p + \zeta| : k \in \mathbb{Z}, |v| \leq \rho_1\}$, $\zeta' = \zeta + \zeta_1$, the continuity of ζ_1 with respect to the second variable in bounded closed regions implies that we can easily get the desired result.

Corollary 1.1. Assume that $(F_1) - (F_3)$ are satisfied. Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.1) has at least two nontrivial mT -periodic solutions.

Remark 1.2. If $q_k \equiv 0$, $p = 2$ and $n = 2$, Corollary 1.1 reduces to the Theorem 1.1 in [5]. If $q_k \equiv 0$ and $p = 2$, Corollary 1.1 reduces to the Theorem 1.1 in [4].

Theorem 1.2. Assume that (F_1) and the following conditions are satisfied:

$$(F_4) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{F(k, v)}{|v|^p} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

(F_5) there exist constants $R_1 > 0$ and $\theta > p$ such that for $k \in \mathbb{Z}$ and $|v| \geq R_1$,

$$0 < \theta F(k, v) \leq f(k, v)v.$$

Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.1) has at least three mT -periodic solutions.

Remark 1.3. Assumption (F_5) implies that there exist constants $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$ such that

$$(F'_5) \quad F(k, v) \geq a_1|v|^\theta - a_2, \quad \forall (k, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

Corollary 1.2. Assume that $(F_1), (F_4)$ and (F'_5) are satisfied. Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.1) has at least two nontrivial mT -periodic solutions.

In the case where $q_k \equiv 0$ and $f(k, u_k) = p_k g(u_k)$, the equation (1.1) reduces to the following $2n$ th-order p -Laplacian equation:

$$(1.8) \quad \Delta^n (r_{k-n} \varphi_p(\Delta^n u_{k-1})) = (-1)^n p_k g(u_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $p_{k+T} = p_k > 0$ for all $k \in \mathbb{Z}$. Then, we have the following results.

Theorem 1.3. Assume that the following hypotheses are satisfied:

(G₁) there exists a functional $G(v) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $G(v) \geq 0$ and $G'(v) = g(v)$;

(G₂) there exist constants $\delta_2 > 0$, $\alpha \in \left(0, \frac{p}{p} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{p}}\right)$ such that $G(v) \leq \alpha|v|^p$, for $|v| \leq \delta_2$;

(G₃) there exist constants $\rho_2 > 0$, $\zeta > 0$, $\beta \in \left(\frac{p}{p} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{p}}, +\infty\right)$ such that $G(v) \geq \beta|v|^p - \zeta$, for $|v| \geq \rho_2$, where c_1, c_2 are constants satisfying (2.4), and $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ are as in (1.7). Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.6) has at least three mT -periodic solutions.

Corollary 1.3. Assume that (G₁) – (G₃) are satisfied. Then for any given positive integer $m > 0$, the equation (1.6) has at least two nontrivial mT -periodic solutions.

Remark 1.4. If $p = 2$ and $n = 2$, Corollary 1.3 reduces to Theorem 1.2 in [5]. If $p = 2$, Corollary 1.3 reduces to Corollary 1.1 in [4].

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we establish the variational framework associated with equation (1.1), and transfer the problem of the existence of periodic solutions of (1.1) into that of the existence of critical points of the corresponding functional. Some related fundamental results will also be recalled. In Section 3 we prove our main results, by using the critical point method. Finally, in Section 4 we give an example to illustrate the main result. For the basic concepts of variational methods, we refer the reader the references [13], [16].

2. VARIATIONAL STRUCTURE AND SOME LEMMAS

In order to apply the critical point theory, we first establish the corresponding variational framework for equation (1.1), and give some lemmas, which will be used in the proofs of our main results. We start with some basic notation. Let S be the set of sequences $u = (\dots, u_{-k}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_k, \dots) = \{u_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, that is, $S = \{\{u_k\} : u_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$. For any $u, v \in S$ and $a, b \in \mathbb{R}$ we define $au + bv$ by

$$au + bv = \{au_k + bv_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}.$$

Then S is a vector space.

For any given positive integers m and T , by E_{mT} we denote a subspace of S , defined by

$$E_{mT} = \{u \in S | u_{k+mT} = u_k, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

It is clear that the subspace E_{mT} is isomorphic to $\mathbf{R}^{mT}$, and it can be equipped with the inner product:

$$(2.1) \quad \langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{mT} u_j v_j, \quad u, v \in E_{mT},$$

which induced the norm $\|\cdot\|$, defined by

$$(2.2) \quad \|u\| = \left(\sum_{j=1}^{mT} u_j^2 \right)^{1/2}, \quad u \in E_{mT}.$$

It is clear that E_{mT} with the inner product (2.1) is a finite dimensional Hilbert space and is linearly homeomorphic to $\mathbf{R}^{mT}$. Also, for all $u \in E_{mT}$ and $s > 1$, we define the norm $\|u\|_s$ on E_{mT} as follows:

$$(2.3) \quad \|u\|_s = \left(\sum_{j=1}^{mT} |u_j|^s \right)^{1/2}.$$

Observe that the norms $\|u\|_s$ and $\|u\|_2$ are equivalent, and hence, there exist constants c_1, c_2 ($c_2 \geq c_1 > 0$), such that

$$(2.4) \quad c_1 \|u\|_2 \leq \|u\|_s \leq c_2 \|u\|_2, \quad \forall u \in E_{mT}.$$

Clearly, $\|u\| = \|u\|_2$. For all $u \in E_{mT}$, define the functional J on E_{mT} as follows:

$$(2.5) \quad J(u) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} r_{k-1} |\Delta^n u_{k-1}|^p + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} q_k |u_k|^p - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k),$$

where $\frac{\partial F(k, v)}{\partial v} = f(k, v)$.

It is easy to see that $J \in C^1(E_{mT}, \mathbf{R})$, and for any $u = \{u_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in E_{mT}$, by using $u_0 = u_{mT}$, $u_1 = u_{mT+1}$, we can compute the partial derivative as

$$\frac{\partial J}{\partial u_k} = (-1)^n \Delta^n (r_{k-n} \varphi_p(\Delta^n u_{k-1})) + q_k \varphi_p(u_k) - f(k, u_k).$$

Thus, u is a critical point of J on E_{mT} if and only if

$$\Delta^n (r_{k-n} \varphi_p(\Delta^n u_{k-1})) + (-1)^n q_k \varphi_p(u_k) = (-1)^n f(k, u_k), \quad \forall k \in \mathbf{Z}(1, mT).$$

Due to the periodicity of $u = \{u_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in E_{mT}$ and $f(k, v)$ in the first variable k , we can reduce the existence of periodic solutions of equation (1.1) to the existence of critical points of J on E_{mT} . That is, the functional J is just the variational framework of equation (1.1).

Let E be a real Banach space. We assume that $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, that is, J is a continuously Fréchet-differentiable functional defined on E . The functional J is said to

satisfy the Palais-Smale condition, (PS)-condition, for short, if any sequence $\{u^{(i)}\} \subset E$ for which $\{J(u^{(i)})\}$ is bounded and $J'(u^{(i)}) \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$ possesses a convergent subsequence in E .

Let B_ρ denote the open ball in E of radius ρ centered at 0, and let ∂B_ρ denote its boundary.

Lemma 2.1 (Linking Theorem, [16]). *Let E be a real Banach space, $E = E_1 \oplus E_2$, where E_1 is finite dimensional. Suppose that $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfies the (PS)-condition and also the following:*

(J₁) *there exist constants $a > 0$ and $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap E_2} \geq a$;*

(J₂) *there exists an element $e \in \partial B_1 \cap E_2$ and a constant $R_0 \geq \rho$ such that $J|_{\partial Q} \leq 0$, where $Q = (\bar{B}_{R_0} \cap E_1) \oplus \{se | 0 < s < R_0\}$.*

Then J possesses a critical value $c \geq a$, where

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u)),$$

and $\Gamma = \{h \in C(\bar{Q}, E) \mid h|_{\partial Q} = \text{id}\}$, where id denotes the identity operator.

Lemma 2.2. *Assume that the conditions (F₁) and (F₃) are satisfied. Then the functional J is bounded from above in E_{mT} .*

Proof. In view of (F₃') and (2.4), for any $u \in E_{mT}$, we can write

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} r_{k-1} |\Delta^n u_{k-1}|^p + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} q_k |u_k|^p - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k) \\ &\leq \frac{\bar{r}}{p} c_2^p \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-1} u_k - \Delta^{n-1} u_{k-1})^2 \right]^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \left(\sum_{k=1}^{mT} u_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k) \\ &\leq \frac{\bar{r}}{p} c_2^p (x^* P x)^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|u\|_2^p - \sum_{k=1}^{mT} (\beta |u_k|^p - \zeta') \\ &\leq \frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|u\|_2^p - \beta \left[\left(\sum_{k=1}^{mT} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p + mT \zeta' \\ &\leq \frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|u\|_2^p - \beta c_1^p \left(\sum_{k=1}^{mT} u_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} + mT \zeta' \\ &\leq \frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|u\|_2^p - \beta c_1^p \|u\|_2^p + mT \zeta', \end{aligned}$$

where $x = (\Delta^{n-1} u_1, \Delta^{n-1} u_2, \dots, \Delta^{n-1} u_{mT})^*$. Since

$$\|x\|_2^p = \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2} u_{k+1} - \Delta^{n-2} u_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \leq \left[\lambda_{\max} \sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2} u_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \leq \lambda_{\max}^{\frac{(n-1)p}{2}} \|u\|_2^p,$$

we have

$$J(u) \leq \left(\frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p - \beta c_1^p \right) \|u\|_2^p + mT\zeta' \leq mT\zeta'.$$

This completes the proof of Lemma 2.2.

Remark 2.1. The case $mT = 1$ is trivial. For the case $mT = 2$, the matrix P has a different form, namely, we have $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. However, in this special case, similar arguments can be used, and so we omit the details.

Lemma 2.3. Assume that the conditions (F_1) and (F_3) are satisfied. Then the functional J satisfies the (PS)-condition.

Proof. Let $\{J(u^{(i)})\}$ be a sequence such that with some positive constant M_1 : $-M_1 \leq J(u^{(i)})$, $i \in \mathbb{N}$. Using the arguments of the proof of Lemma 2.2, it is easy to see that

$$-M_1 \leq J(u^{(i)}) \leq \left(\frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p - \beta c_1^p \right) \|u^{(i)}\|_2^p + mT\zeta', \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Therefore,

$$\left(\beta c_1^p - \frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} - \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \right) \|u^{(i)}\|_2^p \leq M_1 + mT\zeta'.$$

Since $\beta > \frac{1}{p} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^p \left(\bar{r} \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} + \bar{q} \right)$, it is not difficult to check that $\{u^{(i)}\}$ is a bounded sequence in E_{mT} . As a consequence, we conclude that $\{u^{(i)}\}$ possesses a convergence subsequence in E_{mT} , implying the (PS)-condition. Lemma 2.3 is proved.

3. PROOF OF THE MAIN RESULTS

In this Section, we prove our main results by using the critical point method.

Proof of Theorem 1.1. Observe first that the assumptions (F_1) and (F_2) imply $F(k, 0) = 0$ and $f(k, 0) = 0$ for $k \in \mathbb{Z}$. Hence $u = 0$ is a trivial mT -periodic solution of equation (1.1). By Lemma 2.2, the functional J is bounded from the above on E_{mT} . We define $c_0 = \sup_{u \in E_{mT}} J(u)$. The arguments of the proof of Lemma 2.2 imply $\lim_{\|u\|_2 \rightarrow +\infty} J(u) = -\infty$. This means that $-J(u)$ is coercive. By the continuity of $J(u)$, there exists $\bar{u} \in E_{mT}$ such that $J(\bar{u}) = c_0$. Clearly, $\bar{u}$ is a critical point of J .

We claim that $c_0 > 0$. Indeed, by (F_2) , for any $u \in V$ with $\|u\|_2 \leq \delta_1$, we have

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} r_{k-1} |\Delta^n u_{k-1}|^p + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} q_k |u_k|^p - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k) \\ &\geq \frac{\bar{r}}{p} c_1^p \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-1} u_k - \Delta^{n-1} u_{k-1})^2 \right]^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p \left(\sum_{k=1}^{mT} u_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \frac{\bar{r}}{p} c_1^p (x^* P x)^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p \|u\|_2^p - \alpha \left[\left(\sum_{k=1}^{mT} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \geq \frac{\bar{r}}{p} c_1^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p \|u\|_2^p - \alpha \sum_{k=1}^{mT} |u_k|^p \\
 &= \frac{\bar{r}}{p} c_1^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p \|u\|_2^p - \alpha \left[\left(\sum_{k=1}^{mT} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \geq \frac{\bar{r}}{p} c_1^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} \|x\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p \|u\|_2^p - \alpha c_2^p \|u\|_2^p,
 \end{aligned}$$

where $x = (\Delta^{n-1} u_1, \Delta^{n-1} u_2, \dots, \Delta^{n-1} u_{mT})^*$. Since

$$\|x\|_2^p = \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2} u_{k+1} - \Delta^{n-2} u_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \geq \left[\lambda_{\min} \sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2} u_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \geq \lambda_{\min}^{\frac{(n-1)p}{2}} \|u\|_2^p,$$

we have

$$J(u) \geq \left(\frac{\bar{r}}{p} c_1^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p - \alpha c_2^p \right) \|u\|_2^p.$$

Take $\sigma = \left(\frac{\bar{r}}{p} c_1^p \lambda_{\min}^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_1^p - \alpha c_2^p \right) \delta_1^p$, to obtain $J(u) \geq \sigma$, $u \in V \cap \partial B_{\delta_1}$. Therefore, $c_0 = \sup_{u \in E_{mT}} J(u) \geq \sigma > 0$. At the same time, we have also proved that there exist constants $\sigma > 0$ and $\delta_1 > 0$ such that $J|_{\partial B_{\delta_1} \cap V} \geq \sigma$, implying that J satisfies the condition (J_1) of the Linking Theorem.

Noting that $J(0) = 0$, we conclude that the critical point $\bar{u}$ of J corresponding to the critical value c_0 is a nontrivial mT -periodic solution of the equation (1.1). In order to obtain another nontrivial mT -periodic solution of (1.1), different from $\bar{u}$, we use the conclusion of Lemma 2.1. Since J satisfies the (PS)-condition on E_{mT} , we have to verify the condition (J_2) .

To this end, take $e \in \partial B_1 \cap V$, any $z \in W$ and $s \in \mathbb{R}$, and put $u = se + z$. Then, we can write

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} r_{k-1} |\Delta^n u_{k-1}|^p + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{mT} q_k |u_k|^p - \sum_{k=1}^{mT} F(k, u_k) \\
 &\leq \frac{\bar{r}}{p} s^p \sum_{k=1}^{mT} |\Delta^n e_k|^p + \frac{\bar{q}}{p} \sum_{k=1}^{mT} |se_k + z_k|^p - \sum_{k=1}^{mT} F(k, se_k + z_k) \\
 &\leq \frac{\bar{r}}{p} s^p c_2^p \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-1} e_k - \Delta^{n-1} e_{k-1})^2 \right]^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \left(\sum_{k=1}^{mT} |se_k + z_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} - \sum_{k=1}^{mT} F(k, se_k + z_k) \\
 &\leq \frac{\bar{r}}{p} s^p c_2^p (y^* P y)^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p s^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|z\|_2^p - \sum_{k=1}^{mT} (\beta |se_k + z_k|^p - \zeta') \\
 &\leq \frac{\bar{r}}{p} s^p c_2^p (y^* P y)^{\frac{p}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p s^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|z\|_2^p - \beta c_1^p \left(\sum_{k=1}^{mT} |se_k + z_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} + mT \zeta' \\
 &\leq \frac{\bar{r}}{p} s^p c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}} \|y\|_2^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p s^p + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \|z\|_2^p - \beta c_1^p s^p - \beta c_1^p \|z\|_2^p + mT \zeta',
 \end{aligned}$$

where $y = (\Delta^{n-1}e_1, \Delta^{n-1}e_2, \dots, \Delta^{n-1}e_{mT})^*$. Since

$$\|y\|_2^p = \left[\sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2}e_{k+1} - \Delta^{n-2}e_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \leq \left[\lambda_{\max} \sum_{k=1}^{mT} (\Delta^{n-2}e_k)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \leq \lambda_{\max}^{\frac{(n-1)p}{2}},$$

we have

$$\begin{aligned} J(u) \leq & \left(\frac{\bar{r}}{p} c_2^p \lambda_{\max}^{\frac{np}{2}} + \frac{\bar{q}}{p} c_2^p - \beta c_1^p \right) s^p - \left(\beta c_1^p - \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \right) \|z\|_2^p + mT\zeta' \leq \\ & - \left(\beta c_1^p - \frac{\bar{q}}{p} c_2^p \right) \|z\|_2^p + mT\zeta'. \end{aligned}$$

Thus, there exists a positive constant $R_2 > \delta_1$ such that $J(u) \leq 0$ for any $u \in \partial Q$, where

$$Q = (\bar{B}_{R_2} \cap W) \oplus \{se | 0 < s < R_2\}.$$

By the Linking Theorem, J possesses a critical value $c \geq \sigma > 0$, where

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u)), \quad \Gamma = \{h \in C(\bar{Q}, E_{mT}) \mid h|_{\partial Q} = id\}.$$

Let $\bar{u} \in E_{mT}$ be a critical point associated with the critical value c of J , that is, $J(\bar{u}) = c$. If $\bar{u} \neq \bar{u}$, then the conclusion of Theorem 1.1 holds. Otherwise, $\bar{u} = \bar{u}$. Therefore $c_0 = J(\bar{u}) = J(\bar{u}) = c$, that is,

$$\sup_{u \in E_{mT}} J(u) = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u)).$$

Choosing $h = id$, we get

$$\sup_{u \in Q} J(u) = c_0.$$

Since the choice of $e \in \partial B_1 \cap V$ is arbitrary, we can take $-e \in \partial B_1 \cap V$. Similarly, there exists a positive number $R_3 > \delta_1$ such that $J(u) \leq 0$ for any $u \in \partial Q_1$, where $Q_1 = (\bar{B}_{R_3} \cap W) \oplus \{-se | 0 < s < R_3\}$.

Again, by the Linking Theorem, J possesses a critical value $c' \geq \sigma > 0$, where

$$c' = \inf_{h \in \Gamma_1} \sup_{u \in Q_1} J(h(u)), \quad \Gamma_1 = \{h \in C(\bar{Q}_1, E_{mT}) \mid h|_{\partial Q_1} = id\}.$$

If $c' \neq c_0$, then the proof is finished. If $c' = c_0$, then we have $\sup_{u \in Q_1} J(u) = c_0$. Due to the facts $J|_{\partial Q} \leq 0$ and $J|_{\partial Q_1} \leq 0$, the functional J attains its maximum at some points in the interior of sets Q and Q_1 . However, $Q \cap Q_1 \subset W$ and $J(u) \leq 0$ for any $u \in W$. Therefore, there must be a point $u' \in E_{mT}$ to satisfy $u' \neq \bar{u}$ and $J(u') = c' = c_0$. This completes the proof of Theorem 1.1.

Remark 3.1. The proofs of Theorems 1.2 and 1.3 can be carried out by the same arguments used in the proof of Theorem 1.1. As for Corollaries 1.1 - 1.3, the results are immediate consequences of Theorems 1.1 - 1.3. So we omit the details.

4. AN EXAMPLE

In this section we give an example to illustrate our main result, stated in Theorem 1.1.

Example 4.1. For all $n \in \mathbb{Z}(1)$ and $k \in \mathbb{Z}$, consider the equation

$$(4.1) \quad \Delta^n(r_{k-n}\varphi_p(\Delta^n u_{k-1})) + (-1)^n q_k \varphi_p(u_k) = (-1)^n \mu \left(3 + \cos^2\left(\frac{\pi k}{T}\right)\right) u_k^{\mu-1},$$

where $\{r_k\}$ and $\{q_k\}$ are real sequences, T is a given positive integer, $r_{k+T} = r_k > 0$, $q_{k+T} = q_k \geq 0$, $1 < p < \infty$, and $\mu > p$. We have

$$f(k, v) = \mu \left(3 + \cos^2\left(\frac{\pi k}{T}\right)\right) v^{\mu-1} = \frac{\partial F(k, v)}{\partial v},$$

$$F(k, v) = \left(3 + \cos^2\left(\frac{\pi k}{T}\right)\right) v^\mu.$$

It is easy to check that all the assumptions of Theorem 1.1 are satisfied. Consequently, for any given positive integer $m > 0$, the equation (4.1) has at least three mT -periodic solutions.

Remark 4.1. A specific application of (4.1) is discrete models appearing in economics. For example, the price-demand curve of cobweb phenomenon $D_n = -m_d p_n + b_d$, $m_d > 0$, $b_d > 0$ is a special case of (4.1), where D_n is the number of units demanded in period n , p_n is the price per unit in period n , and m_d represents the sensitivity of consumers to price.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications* (Marcel Dekker, New York, 1992).
- [2] C.D. Ahlbrandt and A.C. Peterson, "The (n, n) -disconjugacy of a 2ⁿth-order linear difference equation", *Comput. Math. Appl.*, **28**(1-3), 1-9, 1994.
- [3] D. Anderson, "A 2ⁿth-order linear difference equation", *Comput. Math. Appl.*, **2**(4), 521-529, 1998.
- [4] X.C. Cai and J.S. Yu, "Existence of periodic solutions for a 2ⁿth-order nonlinear difference equation", *J. Math. Anal. Appl.*, **329**(2), 870-878, 2007.
- [5] X.C. Cai, J.S. Yu and Z.M. Guo, "Existence of periodic solutions for fourth-order difference equations", *Comput. Math. Appl.*, **50**(1-2), 49-55, 2005.
- [6] P. Chen and H. Fang, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order p -Laplacian difference equations", *Adv. Difference Equ.*, **2007**, 1-9, 2007.
- [7] P. Chen and X.H. Tang, "Existence and multiplicity of homoclinic orbits for 2ⁿth-order nonlinear difference equations containing both many advances and retardations", *J. Math. Anal. Appl.*, **381**(2), 485-505, 2011.
- [8] G. Cordaro, "Existence and location of periodic solution to convex and non coercive Hamiltonian systems", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **12**(5), 983-996, 2005.
- [9] Z.M. Guo and J.S. Yu, "Applications of critical point theory to difference equations", *Fields Inst. Commun.*, **42**, 187-200, 2004.
- [10] Z.M. Guo and J.S. Yu, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations", *Sci. China Math.*, **46**(4), 508-515, 2003.

- [11] Z.M. Guo and J.S. Yu, "The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations", *J. London Math. Soc.*, **68**(2), 419-430, 2003.
- [12] H. Matsunaga, T. Hara and S. Sakata, "Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay", *Computers Math. Appl.*, **41**(5-6), 543-551, 2001.
- [13] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems* (Springer, New York, 1989).
- [14] M. Migda, "Existence of nonoscillatory solutions of some higher order difference equations", *Appl. Math. E-notes*, **4**(2), 33-39, 2004.
- [15] T. Peil and A. Peterson, "Asymptotic behavior of solutions of a two-term difference equation", *Rocky Mountain J. Math.*, **24**(1), 233-251, 1994.
- [16] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations* (Amer. Math. Soc., Providence, 1986).
- [17] H.P. Shi, W.P. Ling, Y.H. Long and H.Q. Zhang, "Periodic and subharmonic solutions for second order nonlinear functional difference equations", *Commun. Math. Anal.*, **5**(2), 50-59, 2008.
- [18] J.S. Yu and Z.M. Guo, "On boundary value problems for a discrete generalized Emden-Fowler equation", *J. Differential Equations*, **231**(1), 18-31, 2006.

Поступила 6 июля 2013

MEROMORPHIC FUNCTIONS SHARING TWO OR THREE VALUES WITH THEIR DERIVATIVES IN SOME ANGULAR DOMAINS

XIAO-MIN LI AND HONG-XUN YI

Ocean University of China, Qingdao, China
Shandong University, Jinan, China

E-mails: xunli01267@gmail.com, hxyi@sdu.edu.cn

Abstract. We study the uniqueness of transcendental meromorphic functions sharing two or three values with their derivatives in some angular domains instead of the whole complex plane. The obtained results extend the corresponding results of Frank-Weissenborn [8] and Frank-Schick[9], and improve Theorems 1-3 from Zheng [19]. Some examples are given to show that the obtained results, in a sense, are the best possible.

MSC2010 numbers: 30D35; 30D30.

Keywords: Nevanlinna theory; meromorphic functions; shared values; uniqueness theorems.¹

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be a transcendental meromorphic function, where $\mathbb{C}$ is the complex plane. Let $\delta(a, f)$ be the Nevanlinna deficiency f with respect to $a \in \mathbb{C}$ and $T(r, f)$ be the Nevanlinna characteristic of f . Moreover, the lower order $\mu(f)$ and the order $\rho(f)$ of f are in turn defined as follows:

$$\mu(f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$
$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

For the references, see, e.g., Hayman [11]. An $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is called an IM (ignoring multiplicities) shared value in a domain $X \subseteq \mathbb{C}$ of two meromorphic functions f and g if in X , $f(z) = a$ if and only if $g(z) = a$. R. Nevanlinna [15] proved that if two meromorphic functions f and g have five distinct IM shared values in $X = \mathbb{C}$, then $f = g$. Later on, many mathematicians treated some uniqueness of meromorphic functions with shared values in the whole complex plane (see, e.g., Yang and Yi

¹This work is supported by the NSFC (No.11171184), the NSFC & RFBR (Joint Project)(No. 10911120056), the NSF of Shandong Province, China (No. Z2008A01), and the NSF of Shandong Province, China (No. ZR2009AM008).

[17], and references therein). In this paper, we consider the uniqueness question of meromorphic functions sharing two or three values with their derivatives in some angular domain $X \subset \mathbb{C}$. Next we consider q pair of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$, such that

$$(1.1) \quad -\pi \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_q < \beta_q \leq \pi,$$

and define

$$(1.2) \quad \omega = \max \left\{ \frac{\pi}{\beta_1 - \alpha_1}, \frac{\pi}{\beta_2 - \alpha_2}, \dots, \frac{\pi}{\beta_q - \alpha_q} \right\}.$$

In order to give the definition of the Borel direction of a meromorphic function, we first introduce some notation. Let $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ be such that $\beta - \alpha < 2\pi$, and let $r > 0$. We set

$$\Omega(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$$

and

$$\Omega(\alpha, \beta, r) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\} \cap \{z : |z| < r\}.$$

The following result was proved by Frank-Weissenborn in [8].

Theorem A. Let f be a nonconstant meromorphic function. If f and $f^{(k)}$ share two distinct finite values a and b CM, where $k \geq 1$ is a positive integer, then $f = f^{(k)}$.

Later on, Frank-Schick [9] proved the following result:

Theorem B. Let f be a nonconstant meromorphic function. If f and $f^{(k)}$ share three distinct finite values a_1, a_2, a_3 IM, where $k \geq 1$ is a positive integer, then $f = f^{(k)}$.

In 2004, Zheng [19] first considered the uniqueness of meromorphic functions with shared values in an angular domain, and proved the following result (see [19], Theorem 3).

Theorem C. Let f be a transcendental meromorphic function of finite lower order μ and such that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. For q pairs of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$ satisfying (1.1) and (1.2), assume that f and $f^{(k)}$ have three distinct IM shared values in $X = \bigcup_{j=1}^q \{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j\}$. If $\omega < \rho(f)$, then $f = f^{(k)}$.

Observe that from Lemma 2.1 and the conclusion $f = f^{(k)}$ of Theorem C we can deduce that every nonconstant solution of $f = f^{(k)}$ is of order $\rho(f) = 1$, which contradicts the assumption $\rho(f) > \omega \geq 1$ if $q \geq 2$. Therefore, Theorem C is invalid if $q \geq 2$. Our Theorem 1.3 improves Theorem C.

The main results of this paper are the following statements.

Theorem 1.1. Let f be a transcendental meromorphic function of finite lower order μ and such that $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$ for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$. For $q \geq 2$ pairs of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$ satisfying (1.1) and

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^q (\alpha_{j+1} - \beta_j) < \frac{4}{\sigma} \arcsin \sqrt{\frac{\delta}{2}},$$

where $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$ and ω is as in (1.2), assume that f and $f^{(k)}$ share a_1, a_2 CM in $\bar{X} = \bigcup_{j=1}^q \{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j\}$, where a_1, a_2 are two distinct finite numbers in the complex plane, and $k \geq 1$ is a positive integer. If $\rho(f) \neq \omega$, then $f = f^{(k)}$.

If in Theorem 1.1 we remove the assumption " $\mu(f) < \infty$ ", then we have the following result.

Theorem 1.2. Let f be a transcendental meromorphic function such that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. Assume that for $q \geq 2$ radii $\arg z = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq q$) satisfying

$$(1.4) \quad -\pi \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_q < \pi, \quad \alpha_{q+1} = \alpha_1 + 2\pi,$$

f and $f^{(k)}$ share a_1, a_2 CM in $X = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^q \{z : \arg z = \alpha_j\}$, where a_1, a_2 are two distinct finite numbers in the complex plane, and $k \geq 1$ is a positive integer. If $\rho(f) \neq \frac{\pi}{\min_{1 \leq j \leq q} \{\alpha_{j+1} - \alpha_j\}}$, then $f = f^{(k)}$.

Theorem 1.3. Let f be a transcendental meromorphic function of finite lower order μ and such that $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$ for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$. For $q \geq 2$ pairs of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$ satisfying (1.1) and (1.3), where $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$ and ω is as in (1.2), assume that f and $f^{(k)}$ share a_1, a_2, a_3 IM in $\bar{X} = \bigcup_{j=1}^q \{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j\}$, where a_1, a_2, a_3 are three distinct finite numbers in the complex plane, and $k \geq 1$ is a positive integer. If $\rho(f) \neq \omega$, then $f = f^{(k)}$.

If in Theorem 1.3 we remove the assumption " $\mu(f) < \infty$ ", then we have the following result.

Theorem 1.4. Let f be a transcendental meromorphic function such that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. Assume that for $q \geq 2$ radii $\arg z = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq q$) satisfying (1.4), f and $f^{(k)}$ share a_1, a_2, a_3 IM in $X = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^q \{z : \arg z = \alpha_j\}$, where a_1, a_2, a_3 are three distinct finite numbers in the complex plane, and $k \geq 1$ is a positive integer. If $\rho(f) \neq \frac{\pi}{\min_{1 \leq j \leq q} \{\alpha_{j+1} - \alpha_j\}}$, then $f = f^{(k)}$.

2. PRELIMINARIES

In this section, we introduce some important lemmas that will be used in the proofs of the main results. First we give the following result due to Valiron [16]:

Lemma 2.1 ([16]). *Let f be a meromorphic function and let k be a positive integer. Suppose that f is a solution of the following differential equation*

$$a_0\omega^{(k)} + a_1\omega^{(k-1)} + \cdots + a_k\omega = 0,$$

where $a_0, a_1, \dots, a_k$ are constants and $a_0 \neq 0$. Then $T(r, f) = O(r)$. Furthermore, if f is transcendental, then $r = O(T(r, f))$.

Let f be a meromorphic function on the angular domain $\bar{\Omega}(\alpha, \beta) = \{z : \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$, where $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, and so $0 \leq \beta - \alpha < 2\pi$. Following Nevanlinna theory (see [10], pp. 23-26), we define

$$(2.1) \quad A_{\alpha, \beta}(r, f) = \frac{\omega}{\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^\omega} - \frac{t^\omega}{r^{2\omega}} \right) \{ \log^+ |f(te^{i\alpha})| + \log^+ |f(te^{i\beta})| \} \frac{dt}{t},$$

$$(2.2) \quad B_{\alpha, \beta}(r, f) = \frac{2\omega}{\pi r^\omega} \int_\alpha^\beta \log^+ |f(re^{i\theta})| \sin \omega(\theta - \alpha) d\theta,$$

and

$$(2.3) \quad C_{\alpha, \beta}(r, f) = 2 \sum_{1 < |b_m| < r} \left(\frac{1}{|b_m|^\omega} - \frac{|b_m|^\omega}{r^{2\omega}} \right) \sin \omega(\theta_m - \alpha),$$

where $\omega = \pi/(\beta - \alpha)$, $1 \leq r < +\infty$ and $b_m = |b_m|e^{i\theta_m}$ are the poles of f on $\bar{\Omega}(\alpha, \beta)$ appearing often according to their multiplicities. $C_{\alpha, \beta}$ is called the angular counting function of the poles of f on $\bar{X}(\alpha, \beta)$ and the Nevanlinna angular characteristic function is defined as

$$S_{\alpha, \beta}(r, f) = A_{\alpha, \beta}(r, f) + B_{\alpha, \beta}(r, f) + C_{\alpha, \beta}(r, f).$$

Similarly, for any finite value a , we define $A_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, $B_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, $C_{\alpha, \beta}(r, f_a)$ and $S_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, where $f_a = 1/(f - a)$. For the sake of simplicity, below we will omit the subscript in all the above notation, and will use the notation $A(r, a)$, $B(r, a)$, $C(r, a)$ and $S(r, a)$ instead of $A_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, $B_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, $C_{\alpha, \beta}(r, f_a)$ and $S_{\alpha, \beta}(r, f_a)$, respectively, for any finite complex value a .

Lemma 2.2 ([10, Theorem 3.1]). *Let f be meromorphic on $\bar{\Omega}(\alpha, \beta)$. Then, for a complex number $a \in \mathbb{C}$ and an integer $k \geq 0$ we have*

$$S_{\alpha, \beta} \left(r, \frac{1}{f - a} \right) = S_{\alpha, \beta}(r, f) + O(1),$$

$$S_{\alpha,\beta}\left(r, f^{(k)}\right) \leq 2^k S_{\alpha,\beta}(r, f) + R_{\alpha,\beta}(r, f)$$

and

$$A_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + B_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = R_{\alpha,\beta}(r, f),$$

where, and in what follows, $R_{\alpha,\beta}(r, f)$ is such a quantity that if $\rho(f) < \infty$, then $R_{\alpha,\beta}(r, f) = O(1)$ as $r \rightarrow \infty$, and if $\rho(f) = \infty$, then $R_{\alpha,\beta}(r, f) = O\{\log(rT(r, f))\}$ for $r \notin E$ and $r \rightarrow \infty$, where, and in what follows, E denotes a set of positive real numbers with finite linear measure, which is not necessarily the same for every occurrence in the context.

Lemma 2.3 ([10, Theorem 3.3]). *Let f be meromorphic on $\bar{\Omega}(\alpha, \beta)$. Then for arbitrary q distinct values $a_j \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ($1 \leq j \leq q$) we have*

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \bar{C}_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + R_{\alpha,\beta}(r, f).$$

For the proof of the next lemma we refer to Edrei [7] and Yang [18].

Lemma 2.4. *Let f be transcendental and meromorphic in $\mathbb{C}$ with the lower order $0 \leq \mu < \infty$ and the order $0 < \rho < \infty$. Then for any positive number σ satisfying $\mu \leq \sigma \leq \rho$ and a set E with finite linear measure, there exist a sequence of positive numbers $\{r_n\}$ such that*

- (i) $r_n \notin E$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \infty$,
- (ii) $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geq \sigma$ and
- (iii) $T(t, f) < (1 + o(1)) \left(\frac{t}{r_n}\right)^\sigma T(r_n, f)$.

A sequence $\{r_n\}$ satisfying (i)-(iii) in Lemma 2.4 is called a Pólya peak of order σ outside E .

For $r > 0$ and $a \in \mathbb{C}$, we define

$$(iv) \quad D(r, a) := \left\{ \theta \in [-\pi, \pi) : \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} > \frac{1}{\log r} T(r, f) \right\} \text{ and}$$

$$D(r, \infty) := \left\{ \theta \in [-\pi, \pi) : \log^+ |f(re^{i\theta})| > \frac{1}{\log r} T(r, f) \right\}.$$

The following result is a special version of Baernstein's theorem from [1].

Lemma 2.5. *Let f be transcendental and meromorphic in $\mathbb{C}$ with the finite lower order μ and the order $0 < \rho \leq \infty$, and $\delta(a, f) = \delta > 0$ for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Then for an arbitrary Pólya peak $\{r_n\}$ of order $\sigma > 0$, $\mu \leq \sigma \leq \rho$, we have*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{mes} D(r_n, a) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\sigma} \arcsin \sqrt{\frac{\delta}{2}} \right\}.$$

Remark 2.1. Lemma 2.5 was proved in [1] for the Pólya peak of order μ , the same arguments can be used to derive Lemma 2.5 for the Pólya peak of order σ , $\mu \leq \sigma \leq \rho$.

For the next result we refer to Hayman and Miles [12].

Lemma 2.6. Let f be a transcendental meromorphic function in $\mathbb{C}$. Then for each $K > 1$, there exists a set $M(K)$ of the lower logarithmic density at most $d(K) = 1 - (2e^{K-1} - 1)^{-1} > 0$, that is,

$$\underline{\log dens} M(K) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\log r} \int_{M(K) \cap [1, r]} \frac{dt}{t} \leq d(K),$$

such that for every positive integer k , we have

$$\limsup_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin M(K)}} \frac{T(r, f)}{T(r, f^{(k)})} \leq 3eK.$$

The following result is due to Edrei [6]:

Lemma 2.7. Let f be a meromorphic function with $\delta(\infty, f) = \delta > 0$. Then for given $\varepsilon > 0$ we have

$$\text{mes} E(r, f) > \frac{1}{[T(r, f)]^\varepsilon [\log r]^{1+\varepsilon}}, \quad r \notin F,$$

where F is a set of positive real numbers with finite logarithmic measure depending on ε and

$$E(r, f) = \left\{ \theta \in [-\pi, \pi) : \log^+ |f(re^{i\theta})| > \frac{\delta}{4} T(r, f) \right\}.$$

Lemma 2.8 ([10], Theorem 2.7). Let f be a meromorphic function on $\bar{\Omega}(\alpha, \beta)$. If $S_{\alpha, \beta}(r, f) = O(1)$, then

$$\log |f(re^{i\phi})| = r^\omega c \sin(\omega(\phi - \alpha)) + o(r^\omega)$$

uniformly for $\alpha \leq \phi \leq \beta$ as $r \notin F$ and $r \rightarrow \infty$, where c is a positive constant, $\omega = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$, and F is a set of finite logarithmic measure.

3. PROOF OF THEOREMS

Proof of Theorem 1.3. Suppose that $f \not\equiv f^{(k)}$. Then, in the same manner as in the proof of Theorems 8.22 and 8.23 in Yang and Yi [17], using Lemmas 2.2 and 2.3 for $1 \leq j \leq q$ we can write

$$S_{\alpha_j, \beta_j}(r, f) \leq \sum_{0 \leq i < l \leq k+2} A_{\alpha_j, \beta_j} \left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(i)} - b_i} \right) +$$

$$(3.1) \quad \sum_{0 \leq i < j \leq k+2} B_{\alpha_j, \beta_j} \left(r, \frac{f^{(j)}}{f^{(i)} - b_i} \right) + O(\log r)$$

$$(3.2) \quad \leq O\{\log r T(r, f)\}$$

as $r \notin E$ and $r \rightarrow \infty$, where $b_1, b_2, \dots, b_{k+1}, b_{k+2}$ are some finite numbers. First we prove that

$$(3.3) \quad \rho(f) \leq \omega.$$

Suppose the opposite that (3.3) does not hold, that is,

$$(3.4) \quad \rho(f) > \omega.$$

Now we are going to show that (3.4) contradict the assumptions of Theorem 1.3. To this end, we consider two cases: $\rho(f) > \mu(f)$ and $\rho(f) = \mu(f)$.

Case 1. Suppose that $\rho(f) > \mu(f)$. Then, taking into account that $\rho(f) = \rho(f^{(p)})$, $\mu(f) = \mu(f^{(p)})$ and $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$, we obtain

$$(3.5) \quad \rho(f^{(p)}) = \rho(f) > \sigma \geq \mu(f) = \mu(f^{(p)}).$$

In view of (1.3) we can find some sufficiently small positive number ε such that

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^q (\alpha_{j+1} - \beta_j) + 2\varepsilon < \frac{4}{\sigma + 2\varepsilon} \arcsin \sqrt{\frac{\delta}{2}}$$

and

$$(3.7) \quad \rho(f^{(p)}) > \sigma + 2\varepsilon > \mu(f^{(p)}).$$

Applying Lemma 2.4 to $f^{(p)}$, we conclude that there exists a Pólya peak of order $\sigma + 2\varepsilon$ outside E . Combining this with Lemma 2.5 and

$$(3.8) \quad \sigma + 2\varepsilon \geq \omega + 2\varepsilon \geq \omega_j + 2\varepsilon \geq 1 + 2\varepsilon,$$

we get

$$(3.9) \quad \text{meas} D(r_n, a) \geq \frac{4}{\sigma + 2\varepsilon} \arcsin \sqrt{\frac{\delta}{2}} - \varepsilon.$$

Without loss of generality, we can assume that (3.8) holds for all n . Then, setting

$$(3.10) \quad K_n = \text{meas} \left(D(r_n, a) \cap \bigcup_{j=1}^q (\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon) \right),$$

from (3.6), (3.9) and (3.10), we obtain

$$K_n \geq \text{meas} D(r_n, a) - \text{meas} \left([0, 2\pi) \setminus \bigcup_{j=1}^q (\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{meas} D(r_n, a) - \text{meas} \left(\bigcup_{j=1}^q (\beta_j - \varepsilon, \alpha_{j+1} + \varepsilon) \right) \\
(3.11) \quad &= \text{meas} D(r_n, a) - \sum_{j=1}^q (\alpha_{j+1} - \beta_j + 2\varepsilon) \geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

It follows from (3.11) that there exists some positive integer j_0 with $1 \leq j_0 \leq q$, such that for infinitely many positive integers n , we have

$$(3.12) \quad \text{meas} (D(r_n, a) \cap (\alpha_{j_0} + \varepsilon, \beta_{j_0} - \varepsilon)) \geq \frac{K_n}{q} > \frac{\varepsilon}{q}.$$

Without loss of generality, we can assume that (3.12) holds for all positive integers n .

Next, we set $E_n = D(r_n, a) \cap (\alpha_{j_0} + \varepsilon, \beta_{j_0} - \varepsilon)$, and use (3.12) and the definition of $D(r, a)$ in part (iv) of Lemma 2.4, to obtain

$$(3.13) \quad \int_{\alpha_{j_0} + \varepsilon}^{\beta_{j_0} - \varepsilon} \log^+ \frac{1}{|f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a|} d\theta \geq \frac{T'(r_n, f^{(p)})}{\log r_n} \text{meas} E_n > \frac{\varepsilon}{q} \frac{T(r_n, f^{(p)})}{\log r_n}.$$

On the other hand, by (3.3), Lemmas 2.2 and 2.6, and the definition of $B_{\alpha, \beta}(r, f)$ from (2.2), we can write

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha_{j_0} + \varepsilon}^{\beta_{j_0} - \varepsilon} \log^+ \frac{1}{|f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a|} d\theta \\
&\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon\omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} B_{\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}} \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a} \right) \\
&\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon\omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} (S_{\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}}(r_n, f^{(p)}) + O(1)) \\
&\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon\omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} (2^{j_0} S_{\alpha_{j_0}} \\
&\quad \beta_{j_0}(r_n, f) + R_{\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}}(r_n, f)) \\
&\leq K_{j_0, \varepsilon} r_n^{\omega_{j_0}} \log(r_n T(r_n, f)) \\
(3.14) \quad &\leq K_{j_0, \varepsilon} r_n^{\omega_{j_0}} \{\log r_n + \log T(r_n, f^{(p)})\} + O(1),
\end{aligned}$$

where $r_n \notin E$ and $\omega_{j_0} = \frac{\pi}{\beta_{j_0} - \alpha_{j_0}}$, $K_{j_0, \varepsilon}$ is a positive constant depending only on j_0 and ε . From (3.13) and (3.14) we have

$$(3.15) \quad \log T(r_n, f^{(p)}) \leq \log \log T(r_n, f^{(p)}) + \omega_{j_0} \log r_n + 3 \log \log r_n + O(1),$$

where $r_n \notin E$ and $r_n \rightarrow \infty$. Noting that $\{r_n\}$ is a Pólya peak of order $\sigma + 2\varepsilon$ of $f^{(p)}$ outside E , from (3.15) we get

$$\sigma + 2\varepsilon \leq \lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f^{(p)})}{\log r_n} \leq \omega_{j_0} \leq \omega,$$

which contradicts the assumption $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$.

Case 2. Suppose that $\rho(f) = \mu(f)$. Then we have $\mu(f) = \rho(f) = \mu(f^{(p)}) = \rho(f^{(p)})$. By the same arguments as in the Case 1 with $\sigma (= \mu(f) = \rho(f))$ instead of $\sigma + 2\varepsilon$, we can derive that $\rho(f) = \sigma \leq \omega$, which contradicts (3.4).

Next, from (3.1), (3.3) and Lemma 2.2 we have

$$(3.16) \quad S_{\alpha_j, \beta_j}(r, f) = O(1) \quad \text{for } 1 \leq j \leq q.$$

From (3.16) and Lemma 2.2 we get

$$(3.17) \quad S_{\alpha_j, \beta_j} \left(r, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) = O(1) \quad \text{for } 1 \leq j \leq q.$$

From (3.17) and Lemma 2.8 for $1 \leq j \leq q$ we have

$$(3.18) \quad \log \left| \frac{1}{f^{(p)}(re^{i\phi}) - a} \right| = r^{\omega_j} c_j \sin(\omega_j(\phi - \alpha_j)) + o(r^{\omega_j})$$

as $r \notin F$ and $r \rightarrow \infty$, where c_j is some positive constant, $\omega_j = \frac{\pi}{\beta_j - \alpha_j}$ and $\alpha_j \leq \phi \leq \beta_j$.

Finally, from (3.3) and (3.18) we have

$$\begin{aligned} M_1 r^\omega &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j \leq q} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \log^+ \left| \frac{1}{f^{(p)}(re^{i\phi}) - a} \right| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f^{(p)}(re^{i\phi}) - a} \right| d\phi \\ (3.19) \quad &= m \left(r, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) \leq T(r, f^{(p)}) + O(1) \leq 2T(r, f^{(p)}), \end{aligned}$$

as $r \notin F$ and $r \rightarrow \infty$, where M_1 is some positive constant.

By the standard arguments of removing exceptional sets (see, e.g., [13], Lemma 1.1.2), in view of (3.19) we conclude that there exists some positive number r_0 such that for all $r \geq r_0$

$$(3.20) \quad M_1 r^\omega \leq 2T(r^2, f^{(p)}).$$

Hence, from (3.20) and the definition of the order of a meromorphic function we deduce

$$(3.21) \quad \omega \leq \rho(f^{(p)}).$$

Noting that $\rho(f) = \rho(f^{(p)})$, from (3.3) and (3.21) we obtain $\rho(f) = \omega$, which contradicts the assumption of Theorem 1.3. This completes the proof of Theorem 1.3.

Proof of Theorem 1.4. Suppose that $f \neq f^{(k)}$. Then in the same manner as in the Case 1 of the proof of Theorems 1.3, we have

$$(3.22) \quad S_{\alpha_j, \alpha_{j+1}}(r, f) \leq \sum_{0 \leq i < l \leq k+2} A_{\alpha_j, \beta_j} \left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(i)} - b_i} \right) + \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k+2} B_{\alpha_j, \beta_j} \left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(i)} - b_i} \right) + O(\log r)$$

$$(3.23) \quad \leq O\{\log r T(r, f)\}$$

for $1 \leq j \leq q$, as $r \notin E$ and $r \rightarrow \infty$, where $b_1, b_2, \dots, b_{k+1}, b_{k+2}$ are some finite numbers. Next, we prove that

$$(3.24) \quad \mu(f) < \infty.$$

Indeed, observe first that for the exceptional set F in Lemma 2.7 and the exceptional set E in (3.23rc), we have $\overline{\log dens}(F \cup E) = 0$. Hence for $M(K)$ in Lemma 2.6, where $K \geq 2$ is a positive number, we have

$$\underline{\log dens}(M(K) \cup F \cup E) \leq \underline{\log dens}(M(K)) \leq d(K),$$

where $d(K) = 1 - (2e^{K-1} - 1)^{-1}$.

Therefore, applying Lemma 2.7 to $f^{(p)}$, we conclude that there exist a sequence of positive numbers $r_n \notin M(K) \cup F \cup E$ such that as $r_n \rightarrow \infty$

$$(3.25) \quad \text{meas} E \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) > \frac{1}{[T(r_n, f^{(p)})]^\varepsilon [\log r_n]^{1+\varepsilon}}.$$

Setting

$$(3.26) \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2q+1} \frac{1}{[T(r_n, f^{(p)})]^\varepsilon [\log r_n]^{1+\varepsilon}},$$

from (3.25) and (3.26) we have

$$\text{meas} \left(E \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) \cap \bigcup_{j=1}^q (\alpha_j + \varepsilon_n, \alpha_{j+1} - \varepsilon_n) \right) \\ \geq \text{meas} E \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) - \text{meas} \left(\bigcup_{j=1}^q (\alpha_j - \varepsilon_n, \alpha_j + \varepsilon_n) \right) \\ > (2q+1)\varepsilon_n - 2q\varepsilon_n = \varepsilon_n,$$

implying that there exists some j_0 with $1 \leq j_0 \leq q$ such that

$$(3.27) \quad \text{meas} \left(E \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) \cap (\alpha_{j_0} + \varepsilon_n, \alpha_{j_0+1} - \varepsilon_n) \right) \geq \frac{\varepsilon_n}{q}.$$

Without loss of generality, we can assume that (3.27) holds for all n . Next, setting

$$(3.28) \quad \bar{E}_n = E \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right) \cap (\alpha_{j_0} + \varepsilon_n, \alpha_{j_0+1} - \varepsilon_n),$$

by (3.28) and the definition of $\bar{E} \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)} - a} \right)$, we have

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \int_{\alpha_{j_0} + \varepsilon_n}^{\alpha_{j_0+1} - \varepsilon_n} \log^+ \frac{1}{|f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a|} d\theta &\geq \int_{\bar{E}_n} \log^+ \frac{1}{|f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a|} d\theta \\ &\geq \text{meas}(\bar{E}_n) \frac{\delta(a, f^{(p)})}{4} T(r_n, f^{(p)}) \\ &\geq \frac{\varepsilon_n \delta(a, f^{(p)})}{4q} T(r_n, f^{(p)}). \end{aligned}$$

On the other hand, from (3.23), Lemmas 2.2 and 2.6, and the definition of $B_{\alpha, \beta}(r, f)$ in (2.2), we have

$$(3.30) \quad \begin{aligned} &\int_{\alpha_{j_0} + \varepsilon_n}^{\alpha_{j_0+1} - \varepsilon_n} \log^+ \frac{1}{|f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a|} d\theta \\ &\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon_n \omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} B_{\alpha_{j_0}, \alpha_{j_0+1}} \left(r_n, \frac{1}{f^{(p)}(r_n e^{i\theta}) - a} \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon \omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} (S_{\alpha_{j_0}, \alpha_{j_0+1}}(r_n, f^{(p)}) + O(1)) \\ &\leq \frac{\pi}{2\omega_{j_0} \sin(\varepsilon \omega_{j_0})} r_n^{\omega_{j_0}} (2^{j_0} S_{\alpha_{j_0}, \alpha_{j_0+1}}(r_n, f) + R_{\alpha_{j_0}, \alpha_{j_0+1}}(r_n, f)) \\ &\leq \bar{K}_{j_0, \varepsilon} r_n^{\omega_{j_0}} \log(r_n T(r_n, f)) \leq \bar{K}_{j_0, \varepsilon} r_n^{\omega_{j_0}} \{\log r_n + \log T(r_n, f^{(p)})\} + O(1), \end{aligned}$$

as $r_n \notin M(K) \cup F \cup E$ and $r_n \rightarrow \infty$, where $\omega_{j_0} = \frac{\pi}{\alpha_{j_0+1} - \alpha_{j_0}}$, $\bar{K}_{j_0, \varepsilon}$ is a positive constant depending only on j_0 and ε .

Next, from (3.29) and (3.30) we have

$$(3.31) \quad \delta(a, f^{(p)}) [T(r_n, f^{(p)})]^{1-\varepsilon} \leq 4q(2q+1) \bar{K}_{j_0, \varepsilon} r_n^{\omega_{j_0}} [\log r_n]^{1+\varepsilon} \{\log r_n + \log T(r_n, f^{(p)})\} + O(1),$$

as $r_n \notin M(K) \cup F \cup E$ and $r_n \rightarrow \infty$.

Finally, from (3.31) we derive

$$\mu(f) = \mu(f^{(p)}) \leq \omega_{j_0} \leq \omega,$$

implying (3.24).

Now, by the arguments, similar to that of used in the proof of Theorem 1.3, from (3.22) and (3.24) we can get the conclusion of Theorem 1.4. Theorem 1.4 is proved.

Proof of Theorem 1.1. Suppose that $f \neq f^{(k)}$. Then, in the same manner as in the proofs of Theorems 8.16, 8.17, 8.19 and 8.20 from Yang and Yi [17], we can use Lemmas 2.2 and 2.3 to conclude that under the assumptions of Theorem 1.1,

the estimates (3.1) and (3.2) hold. Next, the arguments, similar to that of used in the proof of Theorem 1.3 can be applied to get a contradiction, yielding the result. Theorem 1.1 is proved.

Proof of Theorem 1.2. Suppose that $f \neq f^{(k)}$. Then, in the same manner as in the proofs of Theorems 8.16, 8.17, 8.19 and 8.20 from Yang and Yi [17], we can use Lemmas 2.2 and 2.3 to conclude that under the assumptions of Theorem 1.2, the estimates (3.22) and (3.23) hold. Next, the arguments, similar to that of used in the proof of Theorem 1.4 can be applied to get a contradiction, yielding the result. Theorem 1.2 is proved.

4. CONCLUDING REMARKS

We first recall two theorems from Zheng [19].

Theorem D ([19], Theorem 1). *Let f and g be transcendental meromorphic functions. Assume that f is of finite lower order μ and that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. For q pairs of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$ satisfying (1.1) and (1.3), where $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$ and ω is as in (1.2), assume that f and g share a_1, a_2, a_3 IM in $\overline{X} = \bigcup_{j=1}^q \{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j\}$, where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are five distinct numbers in the extended complex plane. If $\rho(f) > \omega$, then $f = g$.*

Theorem E ([19], Theorem 2). *Let f and g be transcendental meromorphic functions such that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. Assume that for q radii $\arg z = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq q$) satisfying (1.4), f and g share a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 IM in $X = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^q \{z : \arg z = \alpha_j\}$, where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are five distinct numbers in the extended complex plane. If $\rho(f) > \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq q} \{\alpha_{j+1} - \alpha_j\}}$, then $f = g$.*

Using the methods of the proofs of Theorems 1.3 and 1.4, we can get the following results, which improve Theorems D and E, respectively:

Theorem 4.1. *Let f and g be transcendental meromorphic functions. Suppose that f is of finite lower order μ and that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. For q pairs of real numbers $\{\alpha_j, \beta_j\}$ satisfying (1.1) and (1.3), where $\sigma = \max\{\omega, \mu\}$ and ω is as in (1.2), assume that f and g share a_1, a_2, a_3 IM in $\overline{X} = \bigcup_{j=1}^q \{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j\}$, where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are five distinct numbers in the extended complex plane. If $\rho(f) \neq \omega$, then $f = g$.*

Theorem 4.2. *Let f and g be transcendental meromorphic functions such that for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and an integer $p \geq 0$, $\delta = \delta(a, f^{(p)}) > 0$. Assume that for q*

radii $\arg z = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq q$) satisfying (1.4), f and g share a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 IM in $X = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^q \{z : \arg z = \alpha_j\}$, where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are five distinct numbers in the extended complex plane. If

$$\rho(f) \neq \frac{\pi}{\min_{1 \leq j \leq q} \{\alpha_{j+1} - \alpha_j\}},$$

then $f = g$.

Now we consider three examples, showing that the obtained results, in a sense, are the best possible.

Example A ([19], Remark A). Let $a_n = n^{2/3}$, consider the functions:

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n - z} - \frac{1}{z} \right), \quad g(z) = z + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + z} + \frac{1}{z} \right).$$

Then we have $\rho(f) = \rho(g) = 3/2$ and $\omega = 1$. It follows from a result by Cebotarev [5] (see, also, [3], [14]), that there exist five distinct real numbers $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ such that all the equations $f(z) = b_j$ and $g(z) = b_j$ have only real roots for $1 \leq j \leq 5$, and so, all the b_j are IM shared values of f and g in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. But $f \neq g$. This implies that the assumption " $\delta(a, f^{(p)}) > 0$ for some $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ " in Theorems 4.1 and 4.2 cannot be removed.

Example B ([19], Remark A). It is easy to see that for each real number a satisfying $0 \leq a \leq 1$, $\sin z$ and $\cos z$ can take over a only on the real axis, and so they can IM five distinct values in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and $\omega = 1$.

Obviously, $\rho(\sin z) = \rho(\cos z) = 1$ and $\delta(\infty, \sin z) = \delta(\infty, \cos z) = 1$. This example shows that the assumption " $\rho(f) \neq \omega$ " in Theorem 4.1 and the assumption " $\rho(f) \neq \pi / \min_{1 \leq j \leq q} \{\alpha_{j+1} - \alpha_j\}$ " in Theorem 4.2 are the best possible.

The next example shows that the condition $\mu(f) < \infty$ in Theorem 4.1 is necessary, and hence can not be removed. We use the theory of complex dynamics, for the basic concepts of which we refer to Bergweiler [4].

Example C ([19], Remark A). Consider the following function:

$$f(z) = z - (a + 1) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{e^{e^t}}{t - z} dt,$$

where L is the boundary of the region $\{z : \operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ specified in a clockwise direction. Then f is an entire function with infinite lower order. It follows from the proof of Theorem 2 in Baker [2] that, for suitable chosen a and h , the Julia set $J(f)$ of f lies in the region $\{z : \operatorname{Re} z > -a, -h < \operatorname{Im} z < h\}$. Since $J(f)$ does not contain any isolated Jordan arc, there exists a horizontal straight line

which intersects $J(f)$ at least at five points. By a translation, we conjugate g to an entire function $f(z)$ such that the Julia set $J(f)$ of $f(z)$ contains at least five real points c_j ($1 \leq j \leq 5$). Then all the roots of $f(z) = c_j$ ($1 \leq j \leq 5$) lie in $G = \{z : \operatorname{Re} z > -a, -2h < \operatorname{Im} z < 2h\}$. It is well known that $\tan z = c_j$ ($1 \leq j \leq 5$) have only real roots. Thus, f and $\tan z$ share five distinct IM shared values in $\mathbb{C} \setminus GUR$ and $\delta(\infty, f) = 1$, but $f(z) \not\equiv \tan z$.

Acknowledgements. The authors wish to express their thanks to the referee for valuable suggestions and comments.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Baernstein, "Proof of Edrei's spread conjecture", *Proc. London Math. Soc.*, **26**, 418 – 434 (1973).
- [2] I. N. Baker, "Sets of non-normality in iteration theory", *J. London Math. Soc.*, **40**, 499 – 502 (1965).
- [3] I. N. Baker, J. Kotus and Y. Lü, "Iterates of meromorphic functions", *I. Ergodic Theory Dynamical Systems*, **11**, 241 – 248 (1991).
- [4] W. Bergweiler, "Iteration of meromorphic functions", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**, 151 – 188 (1993).
- [5] N. G. Čebotarev, "Ueber die Realität von Nullstellen ganzer transzendenten Funktionen", *Math. Ann.*, **99**, 660 – 686 (1928).
- [6] A. Edrei, "Meromorphic functions with three radially distributed values", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78**, 276 – 293 (1955).
- [7] A. Edrei, "Sums of deficiencies of meromorphic functions", *J. Analyse Math.*, **14**, 79 – 107 (1965).
- [8] G. Frank and G. Weissenborn, "Meromorphe Funktionen, die mit einer ihrer Ableitungen Werte teilen", *Complex Variables*, **7**, 33 – 43 (1986).
- [9] G. Frank and W. Schwick, "Meromorphe Funktionen, die mit einer Ableitung drei Werte teilen", *Results Math.*, **22**, 679 – 684 (1992).
- [10] A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, *Value Distribution of Meromorphic Functions*, 2nd Edition (Translations of Mathematical Monographs), **236**, American Mathematical Society, Rhode Island, Providence (2008).
- [11] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, The Clarendon Press, Oxford (1964).
- [12] W. K. Hayman and J. Miles, "On the growth of a meromorphic function and its derivatives", *Complex Variables*, **12**, 245 – 260 (1989).
- [13] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin/New York (1993).
- [14] B. Ya. Levin, "Distribution of zeros of entire functions. (Russian original, Moscow, 1956), Transl. Math. Monographs **5**, American Mathematical Society, Providence (1964).
- [15] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des Fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris (1929).
- [16] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Edouard Privat, Toulouse (1923).
- [17] C. C. Yang and H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (2003).
- [18] L. Yang, "Borel directions of meromorphic functions in an angular domain. (Chinese)", *Sci. Sinica, Special Issue I on Math.*, 149 – 164 (1979).
- [19] J. H. Zheng, "On uniqueness of meromorphic functions with shared values in some angular domains", *Canad. Math. Bull.*, **47**, 152 – 160 (2004).

Поступила 9 августа 2013

О C^* -АЛГЕБРАХ ПОРОЖДЕННЫХ ИНВЕРСНЫМИ ПОДПОЛУГРУППАМИ ВИЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ

К. Г. ОВСЕПЯН

Казанский Государственный Энергетический Университет
E-mail: karep.hovsep@gmail.com

Аннотация. В работе приводятся ряд свойств C^* -алгебр порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы Z_+^* . Доказывается, что такие алгебры обобщают алгебру Теплица. Дается описание неприводимых представлений C^* -алгебр порожденных инверсными подполугруппами полугруппы Z_+^* .

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: индекс монома; алгебра Теплица; неприводимое представление; C^* -алгебра; бициклическая полугруппа; инверсная полугруппа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кобурн в [1] показал, что неунитарные изометрические представления полугруппы положительных целых чисел Z_+ порождают C^* -алгебры, канонически изоморфные алгебре Теплица. Дуглас [2] и Мерфи [3] доказали подобные утверждения для абелевых полугрупп с полным порядком. С другой стороны, Аухадиев и Тепоян в работе [4] привели критерий на полугруппу, при котором каждое неунитарное изометрическое представление расширяется до представления инверсной полугруппы, порожденной этой полугруппой. Из этого критерия следует, что каждое изометрическое представление полугруппы Z_+ расширяется до изометрического представления бициклической полугруппы Z_+^* . В данной работе вводится понятие индекса элемента полугруппы Z_+^* и исследуются подполугруппы S_m , $m \in Z_+$, порожденные элементами, индексы которых имеют общий делитель m и $S(m)$, порожденная элементами a^m и a^{*m} . Показывается, что неунитарные изометрические представления таких полугрупп порождают подалгебры алгебры Теплица T_m и $T(m)$, состоящие из тех элементов, которые неподвижны относительно некоторой конечной группы автоморфизмов порядка m . Дается полное описание неприводимых представлений C^* -алгебры T_m .

2. ПОДПОЛУГРУППЫ ВИЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ

Полугруппа S называется *инверсной*, если для любого $a \in S$ существует единственный инверсный элемент $a^* \in S$, такой, что справедливы равенства $a^*aa^* = a^*$ и $aa^*a = a$. Из определения следует, что $a^{**} = a$. Идempотенты инверсной полугруппы образуют коммутативную подполугруппу $P_S = \{a \in S : a = a^2\}$ в полугруппе S .

Инверсная полугруппа с единицей e называется *бициклической* полугруппой, если она порождена одним элементом a и соотношением $a^*a = e$. Отметим, что бициклической полугруппой является инверсная полугруппа, порожденная изометрическими представлениями полугруппы неотрицательных целых чисел. Ввиду этого в дальнейшем бициклическую полугруппу будем обозначать через Z_+^* .

Из равенства $a^*a = e$ непосредственно следует, что каждый элемент бициклической полугруппы имеет вид $a^m a^{*n}$, где m и n неотрицательные целые числа. В дальнейшем будем полагать $a^0 = (a^*)^0 = e$. *Индексом* элемента $b = a^m a^{*n}$ из Z_+^* назовем число $m - n$ и обозначим его через $\text{ind}(b)$. Отметим, что $\text{ind}(b \cdot c) = \text{ind}(b) + \text{ind}(c)$ для любых элементов $b, c \in Z_+^*$.

Рассмотрим гомоморфизм $\tau: Z_+^* \rightarrow Z_+^*$, $\tau(b) = aba^*$, который есть вложение полугруппы Z_+^* в себя. Заметим, что $\text{ind}(\tau^n(b)) = \text{ind}(b)$ для любого $n \in Z_+$ и $b \in Z_+^*$. Зафиксируем целое число m . Пусть $S_m = \{b \in Z_+^* : \text{ind}(b) = k \cdot m, k \in Z\}$. Отметим, что в случае $m = 1$ полугруппа $S_1 = Z_+^*$. Пусть $S(m)$ инверсная полугруппа, порожденная элементом a^m . Очевидно, что S_m и $S(m)$ являются инверсными подполугруппами бициклической полугруппы Z_+^* . Отметим, что полугруппа $S(m)$ также является бициклической. Укажем связь между полугруппами S_m и $S(m)$.

Лемма 2.1. *Полугруппа S_m представляется в виде:*

$$S_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} \tau^k(S(m)).$$

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $b \in S_m$ справедливо $b \in \tau^l(S(m))$, для некоторого $0 \leq l \leq m - 1$. Действительно, если $b \in S_m$, то $b = a^{mk+l} a^{*mr+l}$, где $0 \leq l \leq m - 1$, $k, r \in Z_+$. Тогда

$$b = a^l a^{mk} a^{*mr} a^{*l} \in \tau^l(S(m)).$$

Включение $\bigcup_{k=0}^{m-1} \tau^k(S(m)) \subset S_m$ очевидно. $\square$

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с естественным ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Пусть T – оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, то есть на базисе действует следующим образом:

$$Te_k = e_{k+1}.$$

Очевидно, что $T^*T = I$, где T^* – сопряженный оператор к оператору T , I – тождественный оператор, и $TT^* = P$ – проектор на $l^2(\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\})$. Следовательно, полугруппа, порожденная операторами T и T^* , образует бициклическую полугруппу. Элементы бициклической полугруппы в дальнейшем будем называть мономами [5]. Конечные линейные комбинации мономов образуют инволютивную подалгебру алгебры $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ всех линейных ограниченных операторов гильбертова пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Равномерное замыкание этой подалгебры в $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ называется алгеброй Теплица и обозначается через $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – подалгебра алгебры Теплица $\mathcal{T}$ состоящая из конечных линейных комбинаций мономов.

Определим представление $\sigma: S^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{P})$ единичной окружности S^1 в группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{P}$ полагая:

$$\sigma(z)(T^m T^{*m}) = z^{(n-m)} T^m T^{*m}.$$

Из результатов, полученных в работах [6], [7] вытекает следующая лемма.

Лемма 2.2. *Представление $\sigma: S^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{P})$ расширяется до сильно непрерывного представления $\sigma_0: S^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T})$.*

Напомним, что представление называется сильно непрерывным, если $\mathcal{T}$ -значная функция $\bar{A}(z) = \sigma_0(z)(A)$ непрерывна для любого A из $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – C^* -подалгебра унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$. Положительное линейное отображение $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *условным ожиданием*, если $P(b) = b$ для любого $b \in \mathcal{B}$, и $P(abc) = aP(b)c$ для любых $a, c \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{T}_m$ – C^* -подалгебра алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденная мономами, индексы которых кратны числу m .

Теорема 2.1. *Существует условное ожидание: $P_m: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_m$.*

Доказательство. Пусть G_m — конечная подгруппа группы S^1 порядка m . Очевидно, что

$$G_m = \{z \in S^1 : z^m = 1\}.$$

Определим $P_m: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_m$, полагая

$$P_m(A) = \frac{1}{m} \sum_{z \in G_m} \sigma_0(z)(A).$$

Если $T^n T^{*l}$ любой элемент из $\mathcal{T}_m$, то $\text{ind}(T^n T^{*l}) = jm, j \in \mathbb{Z}$, и тогда для z из G_m

$$\sigma_0(z)(T^n T^{*l}) = z^{n-l} T^n T^{*l} = (z^m)^j T^n T^{*l} = T^n T^{*l}.$$

Обратно, пусть D такой элемент из $\mathcal{T}$, что $\sigma_0(z)(D) = D$ для любого z из G_m , следовательно, $P_m(D) = D$. Покажем, что тогда D принадлежит $\mathcal{T}_m$. Так как конечные линейные комбинации мономов плотны в $\mathcal{T}$, то D можно аппроксимировать с такими комбинациями, то есть: $\forall \epsilon > 0$

$$(2.1) \quad \left\| D - \sum_{i=1}^l \alpha_{n_i, m_i} T^{n_i} T^{*m_i} \right\| < \epsilon.$$

Применяя выше определенный P_m к (2.1) и используя непрерывность P_m , получается:

$$(2.2) \quad \left\| P_m(D - \sum_{i=1}^l \alpha_{n_i, m_i} T^{n_i} T^{*m_i}) \right\| = \left\| D - \sum_{i=1}^l \alpha_{n_i, m_i} z^{n_i - m_i} T^{n_i} T^{*m_i} \right\| < \epsilon \|P_m\| = \epsilon.$$

Из неравенства (2.1) и (2.2) следует, что $z^{n_i - m_i} = 1$. Последнее значит, что $(n_i - m_i)/m \in \mathbb{Z}$ для любого $1 \leq i \leq l$.

Таким образом, получили, что элемент D приближается с конечными линейными комбинациями мономов из $\mathcal{T}_m$, следовательно, D принадлежит $\mathcal{T}_m$. Отсюда получается:

$$\mathcal{T}_m = \{A \in \mathcal{T} : \sigma_0(z)(A) = A, z \in G_m\}.$$

Можно проверять, что $P_m(ABC) = AP_m(B)C$, где A, C из $\mathcal{T}_m$, а B из $\mathcal{T}$. $\square$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{T}_m$

Пусть $\pi: \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathcal{T}$ — точное представление бициклической полугруппы $\mathbb{Z}_+^*$ в алгебре Теплица:

$$\pi(a^n a^{*m}) = T^n T^{*m}.$$

Очевидно, что сужение представления π на подполугруппу S_m порождает алгебру $\mathcal{T}_m$.

Определим эндоморфизм $\alpha: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$:

$$\alpha(A) = TAT^*, A \in \mathcal{T}$$

Заметим, что при этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_+^* & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{Z}_+^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{T} \end{array}$$

Действительно, $\pi(\tau(b)) = T\pi(b)T^* = \alpha(\pi(b))$, $b \in \mathcal{Z}_+$.

Обозначим через $\mathcal{T}(m)$ — C^* -подалгебру алгебры Теплица, порожденную полугруппой $\pi(\mathcal{Z}_+^*(m))$. Очевидно, что $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$.

Лемма 3.1. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ является C^* -алгеброй, порожденной операторами T^m , T^{*m} и проекторами $T^l T^{*l}$, где $0 \leq l \leq m-1$.*

Доказательство. По определению алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается элементами V , индекс которых кратен m , то есть $V = T^{mk+l} T^{*mn+l}$, где $k, n, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq l \leq m-1$. Тогда $V = T^{mk} T^l T^{*l} T^{*mn} = (T^m)^k (T^l T^{*l}) (T^{*m})^n$. Отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Будем обозначать проектор $T^l T^{*l}$ через P_l , $1 \leq l \leq m-1$. Очевидно, $P_i P_j = P_j P_i = P_j$ для $1 \leq i \leq j \leq m-1$. Это означает, что $P_i > P_j$, $i < j$. Таким образом, справедливо $I = P_0 > P_1 > \dots > P_{m-1}$.

Представим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ в виде прямой суммы

$$(3.1) \quad l^2(\mathbb{Z}_+) = H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_{m-1},$$

где базис пространства H_i состоит из $\{e_{i+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $0 \leq i \leq m-1$.

Лемма 3.2. *Подпространства H_i , $0 \leq i \leq m-1$, инвариантны относительно алгебры $\mathcal{T}_m$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{T}_m$ есть линейная комбинация элементов вида $V = T^k T^{*l}$, где $\text{ind}(V) = k - l$ кратен m , то есть $k - l = dm$, $d \in \mathbb{Z}$. Тогда для любых H_i и $e_j \in H_i$ если $V e_j \neq 0$, то $V e_j = e_{j+\text{ind}(V)} = e_{j+dm} \in H_i$. Следовательно, $A e_j \in H_i$. $\square$

Теорема 3.1. *Сужения C^* -алгебры $\mathcal{T}_m$ на H_i , $0 \leq i \leq m-1$, образуют семейство m унитарно неэквивалентных, неприводимых, бесконечномерных представлений.*

Доказательство. Рассмотрим представление $\pi: \mathcal{T}_m \rightarrow B(l^2(\mathbb{Z}_+))$, $\pi(A) = A$, $A \in \mathcal{T}_m$. По лемме 3.2 все пространства H_i , $0 \leq i \leq m-1$, инвариантны относительно алгебры $\mathcal{T}_m$, следовательно:

$$\pi(A) = \pi_0(A) \oplus \pi_1(A) \oplus \dots \oplus \pi_{m-1}(A),$$

где $\pi_i(A) = A|_{H_i}$ для любого $A \in \mathcal{T}_m$, $0 \leq i \leq m-1$.

Из леммы 3.1 следует, что алгебра $\mathcal{T}_m$ действует на каждом из пространств H_i как алгебра Теплица. Действительно, поскольку $\mathcal{T}_m$ порождается операторами T^m , T^{*m} , $T^l T^{*l}$, $0 \leq l \leq m-1$, и $T^m e_{i+mk} = e_{i+m(k+1)}$ для любого k , а $T^{*m} e_{i+mk} = e_{i+m(k-1)}$ при $k \neq 0$ и $T^{*m} e_i = 0$, то оператор T^m является оператором сдвига на базисе $\{e_{i+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ в пространстве H_i . А проекторы P_j , $1 \leq j \leq m-1$, действуют на подпространствах H_i , $1 \leq i \leq m$, следующим образом:

$$P_j e_{i+km} = \begin{cases} e_{i-1+km}, & i+km \geq j \\ 0, & i+km < j \end{cases}$$

Это означает, что

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I, & i \geq j \\ T^m T^{*m}, & i < j \end{cases}$$

Таким образом, представления π_i , $0 \leq i \leq m-1$, неприводимы и алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет m неприводимых представлений.

Покажем, что представления π_i унитарно не эквивалентны. Предположим обратное, что среди π_i , $0 \leq i \leq m-1$, есть унитарно эквивалентные, то есть существуют π_i, π_j , $0 \leq i, j \leq m-1$ и унитарный оператор $U: H_j \rightarrow H_i$ такой, что

$$U\pi_j(A) = \pi_i(A)U,$$

для любого $A \in \mathcal{T}_m$. Для определенности будем считать, что $i > j$. Возьмем $A = T^i T^{*i}$. Тогда $\pi_i(A) = (T^i T^{*i})|_{H_i} = I|_{H_i}$, а $\pi_j(A) = (T^i T^{*i})|_{H_j} \neq I|_{H_j}$, так как $T^i T^{*i} e_j = 0$. Следовательно, $U\pi_j(A)e_j = U\pi_j(T^i T^{*i})e_j = 0$, а $\pi_i(A)Ue_j = \pi_i(A)e_i = \pi_i(T^i T^{*i})e_i = e_i \neq 0$. Получили противоречие. Таким образом, у алгебры $\mathcal{T}_m$ есть m неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $\pi: \mathcal{T}_m \rightarrow B(H)$ - неприводимое представление $\mathcal{T}_m$ на гильбертовом пространстве H , тогда сужение $\pi|_{\mathcal{T}(m)}: \mathcal{T}(m) \rightarrow B(H)$ тоже неприводимо.

Доказательство. Так как $\pi(T^m)$ — изометрический оператор, следовательно, по теореме Уолда-Фон-Неймана [8], есть сумма операторов сдвига и унитарного оператора, то есть гильбертово пространство H представляется в виде: $H = \bigoplus_{i \in I} H'_i \oplus H'_0$, где $\pi|_{\mathcal{T}(m)}(H'_i) \subset H'_i, i \in I, i = 0$. Покажем, что тогда $H'_i, i \in I, i = 0$ также являются инвариантными для алгебры $\pi(\mathcal{T}_m)$. Таким образом, по предположению $\pi(T^m)$ на $H'_i, i \in I$ действует как оператор сдвига, а на H'_0 как унитарный оператор. Из равенства $T^m T^{*m} P_k = T^m T^{*m}, k < m$, где $P_k = T^k T^{*k}$ — проектор, следует, что $\pi(T^m T^{*m})\pi(P_k) = \pi(T^m T^{*m})$. Так как $\pi(T^m)$ на H'_0 действует как унитарный оператор, то $\pi(T^m T^{*m}) = \pi(I) = I$ и, следовательно, $\pi(P_k) = I, k = 0, \dots, m-1$. Из этого и из того, что $\pi|_{\mathcal{T}(m)}(H'_0) \subset H'_0$ следует, что H'_0 — есть собственное инвариантное подпространство для π , а это противоречит, тому что π неприводимое представление $\mathcal{T}_m$. То есть $H'_0 = 0$. Таким образом, $H = \bigoplus_{i \in I} H'_i$. Это означает, что ядро $L_0 = \text{Ker}(T^m)$ оператора T^m не пусто.

Пусть $k = \dim(L_0)$. Если $k = 1$, то $\pi|_{\mathcal{T}(m)}$ — неприводимо и теорема доказана. Предположим противное, то есть $k > 1$.

Покажем, что проекторы $P_0 = I, P_i = T^i T^{*i} (i = 1, \dots, m-1)$ переводят L_0 в себя, то есть $\pi(P_i)(L_0) \subset L_0, i = 0, \dots, m-1$. Действительно, пусть $h \in L_0$, тогда $\pi(T^m T^{*m})\pi(P_i)h = \pi(T^m T^{*m})h = 0$, то $P_i h \in L_0, i = 0, 1, \dots, m-1$. Построим из семейства коммутирующих проекторов $I = P_0 > P_1 > \dots > P_{m-1}$ семейство ортопроекторов $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$ следующим образом: $Q_i = P_i - P_{i+1}, i = 0, 1, \dots, m-2$ и $Q_{m-1} = P_{m-1}$. Тогда пространство L_0 можно представить в виде прямой суммы подпространств:

$$L_0 = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_{m-1},$$

где $E_j = \pi(Q_j)(L_0), j = 0, \dots, m-1$. Заметим, что хотя бы одно из этих подпространств отлично от нуля. Так как $\dim(L_0) > 1$ найдутся $x_1, x_2 \in L_0$ такие, что $x_1 \perp x_2$ x_1, x_2 принадлежат одному и тому же E_j , либо разным $E_i, E_j, 1 \leq i \neq j \leq m-1$.

Рассмотрим подпространства $K_1 = \pi(\mathcal{T}(m))x_1, K_2 = \pi(\mathcal{T}(m))x_2$. Очевидно, что $K_1 \perp K_2$. Ввиду вышесказанного $\pi(P_i)(K_1) \subset K_1, \pi(P_i)(K_2) \subset K_2$ для $i = 0, \dots, m-1$. Поэтому согласно лемме 3.1, получаем $\pi(\mathcal{T}_m)(K_1) \subset K_1, \pi(\mathcal{T}_m)(K_2) \subset K_2$. То есть π — приводимо. Получили противоречие. $\square$

Известно, что у бициклической полугруппы Z_+^* существует с точностью до унитарной эквивалентности одно бесконечномерное неприводимое представление и серия одномерных, унитарных представлений, параметризуемых единичной окружностью S^1 (см., например, [9]).

Поскольку алгебра $T(m)$ изоморфна алгебре Теплица T и порождается бициклической полугруппой, то у нее есть одно бесконечномерное неприводимое представление. Возникает вопрос, в некотором смысле обратный к лемме 3.3: как можно расширить неприводимое представление алгебры $T(m)$ до неприводимых представлений алгебры T_n , и сколько всего таких представлений существует? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 3.2. *C^* -алгебра T_m имеет ровно m неприводимых, унитарно не эквивалентных, бесконечномерных представлений.*

Доказательство. Пусть $\pi: T(m) \rightarrow B(H)$ – неприводимое бесконечномерное представление алгебры $T(m)$. Доопределим представление π до представления алгебры $T(m)$. Из леммы 3.1 получаем, что для этого необходимо доопределить π на проекторы $P_i, i = 1, \dots, m-1$. Так как $T^m T^{*m} P_i = T^m T^{*m}, i = 1, \dots, m-1$ и $\pi: T(m) \rightarrow B(H)$ – неприводимое представление, то $I - \pi(T^m T^{*m})$ одномерный проектор. Поэтому либо $\pi(P_i) = \pi(T^m T^{*m})$, либо $\pi(P_i) = I$ для всех $i = 1, \dots, m-1$. Таким образом, в силу неравенств $I > P_1 > P_2 > \dots > P_{m-1}$, получаем m различных представлений алгебры T_m :

- 1) $\pi_0(T^m) = \pi(T^m), \pi_0(P_1) = \dots = \pi_0(P_{m-1}) = \pi(T^m T^{*m})$
- 2) $\pi_1(T^m) = \pi(T^m), \pi_1(P_1) = I, \pi_1(P_2) = \dots = \pi_1(P_{m-1}) = \pi(T^m T^{*m})$
- 3) $\pi_2(T^m) = \pi(T^m), \pi_2(P_1) = \pi_2(P_2) = I, \pi_2(P_3) = \dots = \pi_2(P_{m-1}) = \pi(T^m T^{*m})$
-
- m) $\pi_{m-1}(T^m) = \pi(T^m), \pi_{m-1}(P_1) = \dots = \pi_{m-1}(P_{m-1}) = I$.

Очевидно, построенные представления исчерпывают всевозможные расширения представления π .

Заметим, что построенные представления $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-1}$ унитарно эквивалентны представлениям, построенным в теореме 3.1. Действительно, рассмотрим представление $\pi_k = \pi|_{H_k}$ для некоторого k из теоремы 3.1. Базис-пространства H_k совпадает с множеством $\{e_{k+n\mathbf{m}}\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Очевидно, что все проекторы $\pi_k(P_i), 1 \leq i \leq m-1$, сохраняют все элементы базиса, кроме начального элемента e_k , и $\pi_k(P_i)e_k = e_k$ при $i \leq k$ и $\pi_k(P_i)e_k = 0$ при $i > k$. Поэтому справедливо тождество $\pi_k(P_1) = \dots = \pi_k(P_k) = I$ и $\pi_k(P_{k+1}) = \dots = \pi_k(P_{m-1}) = \pi(T^m T^{*m})$.

Из теоремы 3.1 следует, что представления $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-1}$ неприводимы и унитарно не эквивалентны. $\square$

В заключении, автор выражает искреннюю благодарность профессору Григорян Сурену Аршаковичу и Липачевой Екатерине Владимировне за полезные обсуждения и за ценные указания.

Abstract. The paper presents a number of properties of the C^* -algebras generated by the inverse subsemigroups of bicyclic semigroup Z_+^2 . We prove that such algebras generalize the Toeplitz algebra. A description of the irreducible representations of C^* -algebras generated by the inverse subsemigroups of semigroup Z_+^2 is also given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Coburn, "The C^* -algebra generated by an isometry", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967).
- [2] R. G. Douglas, "On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries", Acta Math., **128**, 143 – 152 (1972).
- [3] G. J. Murphy, "Ordered groups and Toeplitz algebras", J. Operator Theory, **18**, 303 – 326 (1987).
- [4] M. A. Aukhadiev, V. H. Tepoyan, "Isometric representations of totally ordered semigroups", Lobachevskii Journal of Mathematics, **33** (3), 239 – 243 (2012).
- [5] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, " C^* -алгебры, порожденные полугруппами с сокращением", Сиб. матем. журн., **51** (1), 16 – 25 (2010).
- [6] М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, "Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией", Изв. вузов. Матем., **10**, 89 – 93 (2011).
- [7] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigorian, E. V. Lipacheva, "Infinite-dimensional compact quantum semigroup", Lobachevskii Journal of Mathematics, **32** (4), 304 – 316 (2010).
- [8] K. R. Davidson, " C^* -algebras by example", Fields Institute Monograph 6, AMS (1996).
- [9] В. А. Арзуманян, " C^* -представления инверсных полугрупп", Изв. АН Арм.ССР, сер. "Математика", **13**, по. 2, 107 – 113 (1978).

Поступила 19 марта 2014

О ПОВЕРХНОСТЯХ БОРА-РИМАНА

А. Ф. БЕКНАЗАРЯН, С. А. ГРИГОРЯН

Казанский государственный энергетический университет, Россия
Ереванский Государственный Университет, Армения
E-mails: abeknazaryan@yahoo.com; gsuren@inbox.ru

Аннотация. В работе исследуются поверхности Бора-Римана над обобщенной плоскостью Δ . Доказывается, что топологический изоморфизм $\rho: G \times (0, +\infty) \rightarrow G(0, +\infty)$, связывающий две интерпретации проколотой обобщенной плоскости Δ^0 , индуцирует некоторый морфизм в категории накрытий пространства Δ^0 с однозначным восстановлением по Δ^0 групповых структур в покрывающих пространствах. Далее этот факт используется для обоснования алгебраичности произвольного n -листного накрытия группы Δ^0 .

MSC2010 numbers: 22D05, 22D12, 22D35.

Ключевые слова: Поверхности Римана; алгебраические накрытия; накрытия Галуа; обобщенный диск.

1. ВВЕДЕНИЕ

Появление обобщенной плоскости Δ и разворачиваемой на ней теории функций, как ее иногда называют, полутора комплексных переменных, оказалось возможным благодаря следующей известной дихотомии для произвольной подгруппы Γ аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$: Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, либо Γ плотна в $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии τ . Применение конструкции, восходящей к Аренсу и Зингеру (переход к группе характеров $G = \hat{\Gamma}$ и построение конуса $\Delta = G \times [0, \infty) / G \times \{0\}$, см. [1]), в первом случае приводит к $G = \mathbb{T}$ и $\Delta \cong \mathbb{C}$, где $\mathbb{T}$ – единичная окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и определение обобщенной аналитической функции не выводит теорию за рамки теории аналитических функций одного комплексного переменного. Во втором же случае возникает целая шкала пространств, венчаемая компактом Бора $G = \hat{\mathbb{R}}_d$, где $\mathbb{R}_d$ – группа вещественных чисел в дискретной топологии, порождающая теорию функций, существенно отличающуюся от своего классического прототипа (см. [2], [3]). Тем не менее, одной из задач теории обобщенных аналитических функций остается поиск новых эффектов при "прокручивании" классических сценариев. На этом пути естественным образом возникают поверхности Бора-Римана.

2. ПОВЕРХНОСТИ БОРА-РИМАНА

Пусть Γ – аддитивная подгруппа группы $\mathbb{R}$, всюду плотная относительно евклидовой топологии τ (то есть имеет место второй случай отмеченной выше дихотомии), и $G = \hat{\Gamma}$ – группа характеров группы Γ . По теореме двойственности Понтрягина, группа характеров группы G изоморфна группе Γ : $\hat{G} \cong \Gamma$. Пусть $\chi^a \in \hat{G}$ – характер, соответствующий элементу $a \in \Gamma$. Очевидно $\chi^a \chi^b = \chi^{a+b}$.

Рассмотрим локально компактное пространство Δ , полученное из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. Элементами Δ будут точки (α, r) , $\alpha \in G$, $r > 0$ и $*$ = $G \times \{0\}$, а топологией на Δ – стандартная фактортопология $\tau_\Delta = \{U \subset \Delta : U \in k \times \tau_{[0, \infty)}\}$, где k – топология на G , а $\tau_{[0, \infty)}$ – сужение на $[0, \infty)$ евклидовой топологии τ . Обозначим далее $\Delta^0 = \Delta \setminus \{*\}$ и $\tau_{\Delta^0} \cong k \times \tau_{(0, +\infty)}$ – топологию на Δ^0 , определяемую аналогично τ_Δ . Пространство Δ будет локально компактным хаусдорфовым пространством, канонически отождествляемым с пространством $\mathcal{C} = \{\alpha r : \alpha \in G, r \in [0, \infty)\}$ – аналогом комплексной плоскости $\mathbb{C}$, состоящим из гомоморфизмов $\alpha r : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \alpha(a)r^a$. Всюду в дальнейшем считаем $\Delta = \mathcal{C}$. Представление $s = \alpha r$ будем называть полярным разложением, а число $r = |s|$ – модулем элемента $s \in \Delta$. Обобщенным диском будет множество $\Delta_r = \{s \in \Delta; |s| \leq r\}$.

Пусть $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Каждый характер χ^a , $a \in \Gamma_+$, можно расширить до непрерывной функции φ^a на Δ , полагая для $s = \alpha r$

$$\varphi^a(s) = \chi^a(\alpha)r^a$$

с $\chi^a(\alpha) = \alpha(a)$.

Определение 2.1. Пусть D – открытое множество в Δ . Непрерывная на D функция f называется обобщенной аналитической, если для любого $s \in D$ найдется такая окрестность $U \subset D$, что сужение f на U равномерно аппроксимируется линейными комбинациями функций φ^a , $a \in \Gamma_+$.

Множество всех обобщенных аналитических функций на D будем обозначать через $\mathcal{O}(D)$.

Рассмотрим теперь отображение $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G : t \rightarrow \alpha_t$, где $\alpha_t(a) = e^{iat}$, $a \in \Gamma$. В силу плотности Γ это отображение инъективно. Также, пользуясь тем, что $\alpha(\mathbb{R})$ разделяет точки группы Γ , можно доказать, что образ $\alpha(\mathbb{R})$ является плотным в G (см. [4], стр. 55). Таким образом, G – компактный соленид.

Множество $\Delta^0 = G \times (0, +\infty)$, которое канонически отождествляется с пространством $\{\alpha r : \alpha \in G, r \in (0, \infty)\}$, является локально компактной группой относительно покомпонентного умножения с единичным элементом $\alpha_0 = \alpha(0)$.

Наконец, перейдем к определению поверхности Бора-Римана. Прежде отметим, что для удобства читателя в статье приведены детальные доказательства всех изложенных утверждений. Как известно (см. [5], стр. 25) отображение топологических пространств $\pi : Y \rightarrow X$ называется (вообще говоря, разветвленным) *накрытием*, если оно непрерывно, открыто и дискретно, то есть для каждого $x \in X$ слой $\pi^{-1}(x)$ — дискретное множество в Y . Отображение топологических пространств $\pi : Y \rightarrow X$ называют *неразветвленным накрытием*, если каждая точка $x \in X$ имеет (так называемую ровно накрытую) окрестность U , такую, что

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in A} U_i$$

— дизъюнктное объединение открытых множеств в Y и все сужения $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ — гомеоморфизмы. Если множество A конечно (я, следовательно, все слои накрытия состоят из одного и того же числа точек), то (неразветвленное) накрытие называется *конечнолистным*, а число точек слоев называется его *числом листов*. Для определения поверхности Бора-Римана нам понадобится понятие *тонкого* множества из Δ , для определения которого мы воспользуемся тем фактом, что пространство $\Delta^0 = \Delta \setminus \{*\}$ локально имеет структуру вида $V \times W$, $V \subset G_a$, $W \subset \mathbb{C}$, где $G_a = \{\alpha \in G; \alpha(a) = 1\}$, $a \in \Gamma$ (см. [2], стр. 10-11).

Определение 2.2. Пусть D — открытое множество в Δ . Подмножество K в D назовем *тонким*, если оно замкнуто в D и выполняются следующие условия:

- (1) для каждой точки $s \in D, s \neq *$, существует окрестность $U \subset D, U = V \times W$, и функция $f \in \mathcal{O}(U), f \neq 0$ обращающаяся в нуль на $K \cap U$,
- (2) для каждого $\alpha \in V$ сужение f на $W_\alpha = \{\alpha\} \times W$ не равно тождественно нулю,
- (3) если $*$ $\in D$, то найдется нетривиальная функция $f \in \mathcal{O}(\Delta_r), \Delta_r \subset D$, обращающаяся в нуль на $\Delta_r \cap K$.

Перейдем теперь к определению поверхности Бора-Римана.

Определение 2.3. Топологическое пространство X называется *поверхностью Бора-Римана над Δ* , если существуют тонкое множество $K \subset \Delta$ и накрытие

$\pi : X \rightarrow \Delta$, такие, что сужение π на множество $X^* = X \setminus \pi^{-1}(K)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества $\Delta^* = \Delta \setminus K$.

Отметим, что так как множество $K = \{*\}$ очевидно является тонким множеством, то существование накрытия $\pi : X \rightarrow \Delta$, такого, что сужение π на множество $X^* = X \setminus \pi^{-1}(*)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества Δ^0 означает, что пространство X является поверхностью Бора-Римана над Δ . Приведенное определение можно распространить и на открытые подмножества Δ .

Определение 2.4. Пусть D – открытое множество в Δ . Топологическое пространство X называется поверхностью Бора-Римана над D , если существуют тонкое множество $K \subset D$ и накрытие $\pi : X \rightarrow D$, такие, что сужение π на множество $X^* = X \setminus \pi^{-1}(K)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества $D^* = D \setminus K$.

3. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫТИЯ

Перейдем к исследованию основных свойств неразветвленных накрытий пространства Δ^0 . Для этого сначала определим понятие цилиндрической окрестности кривой в Δ^0 .

Определение 3.1. Пусть $\gamma : I \rightarrow \Delta^0$ – непрерывное отображение определяющее кривую $\gamma(I)$ в Δ^0 и U – произвольная окрестность единичного элемента $\alpha_0 \in \Delta^0$. Тогда (открытое) множество $W = U \cdot \gamma(I)$ будем называть цилиндрической окрестностью кривой $\gamma(I)$ или открытым цилиндром. Множество $U \cdot \gamma(0)$ назовем началом, а $U \cdot \gamma(1)$ – концом цилиндра W .

Из определения следует, что если W – цилиндрическая окрестность кривой $\gamma(I)$, то для любого $s \in U$ множество W будет цилиндрической окрестностью и для кривой $\gamma_s(I)$, где $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$, $t \in I$.

Пусть теперь $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ – неразветвленное n -листное накрытие и $\gamma(I) \subset \Delta^0$ – некоторая кривая без точек самопересечения с $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. По теореме о поднятии кривой (или, как ее еще называют, теореме о накрывающем пути), существуют n непересекающихся кривых

$$\hat{\gamma}_i(I) \subset X^0, i = 1, \dots, n,$$

накрывающих кривую $\gamma(I)$: $\gamma_i(I) = \pi \circ \tilde{\gamma}_i(I)$, $i = 1, \dots, n$ (см. [5], §4). Более того, покажем, что у каждой кривой $\tilde{\gamma}_i(I)$ найдется такая окрестность $W_i \supset \tilde{\gamma}_i(I)$, что

$$\pi(W_i) = \pi(W_j), 1 \leq i, j \leq n,$$

и сужение π на W_i является гомеоморфизмом между W_i и $V = \pi(W_i)$. Действительно, в силу хаусдорфовости X^0 , для компактов $\tilde{\gamma}_i(I)$ найдутся попарно непересекающиеся открытые множества $\tilde{W}_i \subset X^0$, такие, что $\tilde{\gamma}_i(I) \subset \tilde{W}_i$, $i = 1, \dots, n$ (см. [6], стр. 197). Тогда, очевидно, кривая $\gamma(I)$ лежит в каждом $\pi(\tilde{W}_i)$ и, следовательно, в пересечении $\bigcap_{i=1}^n \pi(\tilde{W}_i) := V$. Положим $W_i = \tilde{W}_i \cap \pi^{-1}(V)$. Тогда при $i = 1, \dots, n$ будем иметь $\pi(W_i) = \pi(\tilde{W}_i \cap \pi^{-1}(V)) \subset \pi(\pi^{-1}(V)) = V$. Покажем теперь обратное включение. Пусть $g \in V$, тогда, по построению V , существует $x_i \in \tilde{W}_i$ такое, что $\pi(x_i) = g$, то есть $x_i \in \pi^{-1}(g) \subset \pi^{-1}(V)$ и $g = \pi(x_i) \in \pi(\tilde{W}_i \cap \pi^{-1}(V)) = \pi(W_i)$. Таким образом, $\pi(W_i) = V$, $i = 1, \dots, n$. Так как множества $\tilde{W}_i$ (а, значит, и W_i) не пересекаются, то вновь по построению V отображение $\pi|_{W_i}: W_i \rightarrow V$ для каждого i , $1 \leq i \leq n$, является биекцией (сюръективность и инъективность сужения n -листного накрытия π на каждое из множеств W_i , $i = 1, \dots, n$ прямо следуют из установленных соотношений $\pi(W_i) = V$, $i = 1, \dots, n$ и $\bigcap_{i=1}^n W_i = \emptyset$) а так как оно открыто, то будет и гомеоморфизмом (см. [6], стр. 64-65).

Используя компактность $\gamma(I)$ можно показать, что любая окрестность кривой $\gamma(I)$ содержит ее цилиндрическую окрестность. Очевидно, что если $U \subset V$ — цилиндрическая окрестность кривой $\gamma(I)$, то $W^i := W_i \cap \pi^{-1}(U)$ является окрестностью кривой $\tilde{\gamma}_i(I)$, которую мы также назовем цилиндрической. Таким образом справедлива следующая

Лемма 3.1. Пусть $\gamma(I) \subset \Delta^0$ — кривая без точек самопересечения, $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Тогда у нее существует такая цилиндрическая окрестность U , что множество $W = \pi^{-1}(U)$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$W = \bigsqcup_{i=1}^n W_i$$

цилиндрических окрестностей W_i кривых $\tilde{\gamma}_i(I)$, причем каждая окрестность W_i гомеоморфна множеству U .

Из леммы и непрерывности π следует, что если $\gamma'(I)$ некоторая кривая в U , то каждая накрывающая ее кривая содержится в некотором W_i , $1 \leq i \leq n$.

В следующей теореме представляется способ определения структуры группы на пространствах накрывающих группу Δ^0 , и описывается строение этих групп с точностью топологического изоморфизма.

Теорема 3.1. Пусть $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ — неразветвленное n -листное накрытие прокалотой обобщенной плоскости Δ^0 связным топологическим пространством X^0 . Тогда на X^0 можно так задать структуру группы, что π станет групповым гомоморфизмом X^0 на Δ^0 , а группа X^0 — топологически изоморфной декартову произведению $G_1 \times (0, +\infty)$, где G_1 — компактная подгруппа X^0 .

Доказательство. Пусть $(x, t) \in X^0 \times (0, +\infty)$ и $t > 1$. Рассмотрим в Δ^0 путь $\pi(x)\xi$, $\xi \in [1, t]$. Пусть $\widehat{\pi(x)\xi}$, $\xi \in [1, t]$, путь в X^0 с началом в точке x , накрывающий путь $\pi(x)\xi$, то есть $\widehat{\pi(x)} = x$, $\pi(x)\xi = \pi \circ \widehat{\pi(x)\xi}$, $\xi \in [1, t]$. Определим $T_t(x) = \widehat{\pi(x)t}$ (конечная точка пути $\widehat{\pi(x)\xi}$, $\xi \in [1, t]$) и $T_1(x) = \widehat{\pi(x)} = x$. Имеем

$$(3.1) \quad \pi(x)t = \pi \circ T_t(x).$$

При $t \in (0, 1)$ кривая $\widehat{\pi(x)\xi}$ и соответственно функция $T_t(x)$ определяются аналогичным образом путем рассмотрения поднятия кривой $\pi(x)\xi$, $\xi \in [t, 1]$. Рассмотрим отображение

$$T : X^0 \times (0, +\infty) \rightarrow X^0 : (x, t) \mapsto T_t(x).$$

В последствии мы определим интересующий нас лист прообраза окрестности точки $\pi(x)t \in \Delta^0$ относительно n -листного накрытия $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ и, следовательно, из (3.1) получим более явный вид функции $T_t(x) = \widehat{\pi(x)t}$ с помощью гомеоморфизма, локально обратного к π .

Положим $G_1 = \pi^{-1}(G) \subset X^0$ и рассмотрим сужение $p = T|_{G_1 \times (0, +\infty)}$, то есть отображение

$$p : G_1 \times (0, +\infty) \rightarrow X^0 : p(u, r) = T_r(u).$$

Заметим, что из определения множества $G_1 \ni u$ имеем $\pi(u) \in G \Rightarrow |\pi(u)| = 1$, откуда, пользуясь (3.1), получаем что $|\pi(T_r(u))| = |\pi(u)r| = r$. Отсюда, как легко проверить, следует что обратное к отображению p имеет вид

$$q : X^0 \rightarrow G_1 \times (0, +\infty) : q(x) = (T_{|\pi(x)|^{-1}}(x), |\pi(x)|).$$

Покажем, что p является гомеоморфизмом из $G_1 \times (0, +\infty)$ на X^0 . Для этого локализуем ситуацию с использованием леммы 3.1. Зафиксируем произвольное $(x, t) \in G_1 \times (0, +\infty)$, $t > 1$. Тогда, согласно лемме 3.1, у кривой $\pi(x)\xi$, $\xi \in [1, t]$ существует цилиндрическая окрестность $U = U_0\pi(x)\xi$, $\xi \in [1, t]$, такая, что

$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n W_i$, где каждая цилиндрическая окрестность W_i гомеоморфна U (U_0 - окрестность единичного элемента $\alpha_0 \in \Delta^0$, определяющая цилиндрическую окрестность U). Обозначим через W то множество W_i которое содержит кривую $\overline{\pi(x)\xi}$, $\xi \in [1, t]$. Тогда $\overline{\pi(x)\xi} \subset W$ и $\pi : W \rightarrow U$ - гомеоморфизм. Обозначим $\phi : U \rightarrow W$ обратное к нему отображение: $\phi \circ \pi = id_W$. По определению топологии $\tau_{\Delta^0} \cong k \times \tau_{(0, +\infty)}$ в Δ^0 найдутся окрестность $\bar{U} \in k$ единицы α_0 в G и число $\delta > 0$ такие, что окрестность $\rho(\bar{U} \times (e^{-\delta}, e^{\delta})) = \bar{U}(e^{-\delta}, e^{\delta})$ единицы α_0 уже в Δ^0 лежит в U_0 , где ρ -определенный выше топологический изоморфизм между двумя интерпретациями обобщенной плоскости Δ^0 .

Следовательно, $\rho(\pi(x)\bar{U} \times (te^{-\delta}, te^{\delta})) = \pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta}) \subset \pi(x)U_0t \subset U$, то есть множество $\pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta})$ лежит в области определения полученного выше гомеоморфизма $\phi : U \rightarrow W$. Из построений сразу следует, что $(x, t) \in \phi(\pi(x)\bar{U}) \times (te^{-\delta}, te^{\delta})$, то есть $\phi(\pi(x)\bar{U}) \times (te^{-\delta}, te^{\delta})$ является окрестностью точки (x, t) в $X^0 \times (0, +\infty)$. Исследуем теперь отображение p в этой окрестности. Пусть $\bar{u} \in \bar{U}$ и $r \in (te^{-\delta}, te^{\delta})$. Тогда, по определению отображения p , $p(\phi(\pi(x)\bar{u}), r) = T_r(\phi(\pi(x)\bar{u}))$. Из (3.1) имеем, что $\pi \circ T_r(\phi(\pi(x)\bar{u})) = \pi(\phi(\pi(x)\bar{u}))r = \pi(x)\bar{u}r$. Так как $\pi(x)\bar{u}r \in \pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta}) \subset U$ то мы можем применить $\phi = \pi^{-1}$ к выведенному выше равенству, и получим: $T_r(\phi(\pi(x)\bar{u})) = \phi(\pi(x)\bar{u}r)$. Следовательно, p отображает множество $\phi(\pi(x)\bar{U}) \times (te^{-\delta}, te^{\delta})$, которая является окрестностью точки (x, t) , на $\phi(\pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta}))$. Ввиду произвольности (x, t) и биективности отображения p , требуемое заключение устанавливается следующей локальной факторизацией p :

$$\begin{array}{ccc} \phi(\pi(x)\bar{U}) \times (te^{-\delta}, te^{\delta}) & \xrightarrow{p} & \phi(\pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta})) \\ \downarrow \pi \times id_k & & \uparrow \phi \\ (\pi(x)\bar{U}) \times (te^{-\delta}, te^{\delta}) & \xrightarrow{p} & \pi(x)\bar{U}(te^{-\delta}, te^{\delta}) \end{array}$$

я которой все отображения, составляющие p , будут непрерывными и открытыми (случай $t \in (0, 1]$ рассматривается аналогично).

Итак, p - гомеоморфизм. Компактность G_1 следует из компактности G и открытости и непрерывности π . Покажем, что G_1 связно. Действительно, так как X^0 связно, а p (следовательно и q) - гомеоморфизм, то $G_1 \times (0, +\infty) = q(X^0)$ связно, и значит G_1 также связно. Таким образом, для сужения $\varphi = \pi|_{G_1} : G_1 \rightarrow G$ выполнены условия Теоремы из [7]. Согласно этой теореме на G_1 можно так задать групповую структуру, что $\varphi = \pi|_{G_1}$ будет групповым гомоморфизмом G_1

на G . Очевидно, что имея групповую структуру на G_1 можем определить групповую структуру и на $G_1 \times (0, +\infty)$. Обозначим через $\cdot$ операцию умножения в группе $G_1 \times (0, +\infty)$. Определим теперь умножение в X^0 следующим образом:

$$x_1 x_2 := p(q(x_1) \cdot q(x_2)),$$

для $x_1, x_2 \in X^0$. Тогда, как легко проверить, X^0 становится группой, с единичным элементом $p(e, 1)$, где e — единица G_1 , и с $x^{-1} := p(q(x)^{-1})$ — обратным к элементу $x \in X^0$. Из определения умножения следует, что

$$p(q(x_1))p(q(x_2)) = x_1 x_2 = p(q(x_1) \cdot q(x_2)),$$

для $x_1, x_2 \in X^0$, то есть p — гомоморфизм, что означает, что X^0 — топологически изоморфно $G_1 \times (0, +\infty)$. Наконец, установим гомоморфность π . Пусть $x \in X^0$ и $x = p(\xi, r)$, $\xi \in G_1, r \in (0, +\infty)$. Тогда из (3.1) получим $\pi(x) = \pi(p(\xi, r)) = \pi(T_r(\xi)) = \pi(\xi)r$, следовательно, для $x_1, x_2 \in X^0$ с $x_1 = p(\xi_1, r_1), x_2 = p(\xi_2, r_2)$, используя гомоморфность p и сужения $\pi|_{G_1}$, получим

$$\begin{aligned} \pi(x_1 x_2) &= \pi(p(\xi_1, r_1) \cdot p(\xi_2, r_2)) = \pi(p(\xi_1 \xi_2, r_1 r_2)) = \pi(\xi_1 \xi_2) r_1 r_2 = \\ &= \pi(\xi_1) r_1 \pi(\xi_2) r_2 = \pi(x_1) \pi(x_2), \end{aligned}$$

то есть π — групповой гомоморфизм. Теорема доказана. $\square$

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НАКРЫТИЯ

Определение 4.1. Поверхность Бора-Римана X называется алгебраической над $D \subset \Delta$, если существуют такие полиномы $P_j(x, s) = x^{k_j} + f_{1,j}(s)x^{k_j-1} + \dots + f_{k_j,j}(s)$ с $f_{m,j} \in \mathcal{O}(D)$, $1 \leq m \leq k_j$, $j = \overline{1, N}$, что X гомеоморфно подпространству $X_N = \{(s, z_1, \dots, z_N) \in D \times \mathbb{C}^N : P_j(z_j, s) = 0, 1 \leq j \leq N\}$ общих нулей указанных полиномов.

Нам неизвестно, каждая ли поверхность Бора-Римана является алгебраической поверхностью. Пока мы можем утверждать только, что алгебраическими будут неразветвленные накрытия над проколотой обобщенной плоскостью Δ^0 .

Лемма 4.1. Пусть групповой гомоморфизм $\varphi : G_1 \rightarrow G$ осуществляет неразветвленное n -листное накрытие (компактной соленоидальной) группы G связанной группой G_1 . Тогда группа G_1 коммутативна, и существуют такие $a_1, \dots, a_m \in G_+$ и $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, что G_1 изоморфна алгебраическому накрытию группы G с помощью алгебраических уравнений

$$y_i^{n_i} - x^{a_i} = 0, i = \overline{1, m}.$$

Отметим, что алгебраичность накрытия следует из [8],[9], однако в лемме 4.1 приводится построение конкретных алгебраических уравнений определяющих алгебраическое накрытие в рассматриваемом нами случае.

Доказательство. По определению накрытия существуют окрестности $V \ni \alpha_0$ и $W \ni e$ единичных элементов групп G и G_1 соответственно, такие что φ на W есть гомеоморфизм между W и V . Пусть $W_0 \subset G_1$ окрестность единицы e , такая, что $W_0^2 \subset W$. Тогда, из коммутативности группы $G \subset \Delta$, для любых $\alpha, \beta \in W_0$ имеем $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\beta)\varphi(\alpha) = \varphi(\beta\alpha)$, откуда $\alpha\beta = \beta\alpha$, так как φ гомеоморфно, а следовательно инъективно на множестве $W \supset W_0^2 \ni \alpha\beta, \beta\alpha$. Связность G_1 влечет за собой представление $G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_0^n$, что позволяет распространить коммутативность на всю группу G_1 . Из этого следует, в частности, что группа $K = \ker \varphi$ есть конечная абелева группа (из n -листности накрытия имеем, что $|K| = n$). Обозначим через $\varphi^- : \hat{G} \rightarrow \hat{G}_1$ сопряженное к φ отображение, где $\hat{G}$ и $\hat{G}_1$ - группы характеров G и G_1 соответственно. Из определения сопряженного отображения, для $\hat{g} \in \hat{G}$ имеем $\varphi^-(\hat{g}) = \hat{g} \circ \varphi \in \hat{G}_1$. При $k \in K$ имеем, что $\hat{g} \circ \varphi(k) = \hat{g}(\alpha_0) = 1$, откуда следует, что образ $\varphi^-(\hat{G})$ при сопряженном отображении $\varphi^- : \hat{G} \rightarrow \hat{G}_1$ имеет вид

$$(4.1) \quad \varphi^-(\hat{G}) = \{\chi \in \hat{G}_1 : \chi(K) = 1\}.$$

Из сюръективности φ следует, что отображение φ^- инъективно, и, следовательно, осуществляет топологический изоморфизм $\hat{G}$ на $\{\chi \in \hat{G}_1 : \chi(K) = 1\}$ - подгруппу группы $\hat{G}_1$ (φ^- наследует непрерывность и открытость от φ (см. [10], стр.498). Рассмотрим гомоморфизмы $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G : \alpha(t) = \alpha_t$ и $\sigma : \alpha(\mathbb{R}) \rightarrow G_1 : \sigma(\alpha(t)) = T_t(e)$, где $T_t(e) = \hat{\alpha}(t)$ -путь в G_1 с началом в e , накрывающий путь $\alpha(t) = \alpha_t, t \in \mathbb{R}$, в G . Обозначим $R_e = \{T_t(e) : t \in \mathbb{R}\} = \sigma(\alpha(\mathbb{R})) \subset G_1$. Так как $\overline{R_e} = G_1$ (см. [7]), то образ гомоморфизма $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow G_1$, задаваемого суперпозицией $\kappa = \sigma \circ \alpha$, плотен в $G_1 : \overline{\kappa(\mathbb{R})} = G_1$, и, следовательно, сопряженное отображение $\kappa^- : \hat{G}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ инъективно. Обозначим $\Gamma_1 := \kappa^-(\hat{G}_1)$, откуда Γ_1 - алгебраическая подгруппа $\mathbb{R}$, и $\Gamma_1 \cong \hat{G}_1$ - алгебраический изоморфизм, следовательно, топологический изоморфизм дискретных групп, а значит $\hat{\Gamma}_1 \cong G_1$ - топологический изоморфизм компактных групп. В силу вышеизложенного, пользуясь (4.1) и тем, что G - группа характеров группы Γ , можно считать, что

$$(4.2) \quad \Gamma = \{b \in \Gamma_1 : \chi^b(K) = 1\},$$

где $b \mapsto \chi^b$ – (обобщая для $\hat{G}$ и $\hat{G}_1$) параметризация характеров групп $\hat{G} \hat{\subset} \hat{G}_1$ группами $\Gamma \subset \Gamma_1$, вытекающая из теоремы двойственности. Найдем явный вид Γ_1 . Конечная абелева группа K изоморфна прямому произведению $K_1 \dots K_m$, где каждая группа K_i – циклическая порядка $n_i, i = \overline{1, m}$ ($n_1 n_2 \dots n_m = n$). Как известно, группа характеров $\hat{K}_i$ – циклическая того же порядка: $\hat{K}_i = \{\hat{e}, \gamma_i, \dots, \gamma_i^{n_i-1}\}, i = \overline{1, m}$ ($\hat{e}$ – единица группы $\hat{G}_1$). В силу компактности K каждый характер из $\hat{K} \cong \hat{K}_1 \dots \hat{K}_m$ продолжается до характера группы G_1 (см. [4], с. 56). Поэтому для каждого $i, 1 \leq i \leq m$, найдется $c_i \in \Gamma_{1+}$, такое, что $\chi^{c_i}|_{K_i} = \gamma_i, \chi^{c_i}|_{K_j} = \hat{e}_{1,j}, j \neq i, 1 \leq i, j \leq m$ (являющийся продолжением соответствующего характера из $\hat{K}_1 \dots \hat{K}_m$ на $\hat{G}_1$). Тогда для $0 < k < n_i$ имеем, что $\chi^{kc_i}(K) \neq 1$, следовательно из (4.2) получаем, что $kc_i \notin \Gamma, 0 < k < n_i$, а для $a_i := n_i c_i$ уже имеем $\chi^{a_i}(K) = 1$ откуда следует, что $a_i \in \Gamma_+$. Из вышесказанного следует, что группа Γ_1 будет иметь вид

$$(4.3) \quad \Gamma_1 = \{k_1 c_1 + \dots + k_m c_m + d : d \in \Gamma, 0 \leq k_i < n_i, i = \overline{1, m}\},$$

при этом, снова по определению $c_i, i = \overline{1, m}$, имеем $k_1 c_1 + \dots + k_m c_m \notin \Gamma$. Для построения требуемого алгебраического накрытия, изоморфного G_1 , рассмотрим множество

$$G_0 = \{(\alpha, z_1, \dots, z_m) \in G \times \mathbb{T}^m : z_i^{n_i} = \chi^{a_i}(\alpha), i = \overline{1, m}\},$$

являющейся компактной абелевой группой относительно покомпонентного умножения

$$(\alpha, z_1, \dots, z_m)(\beta, w_1, \dots, w_m) = (\alpha\beta, z_1 w_1, \dots, z_m w_m)$$

($a_i = n_i c_i$). Отображение $\psi : G_0 \rightarrow G : (\alpha, z_1, \dots, z_m) \mapsto \alpha$ есть гомоморфизм групп, осуществляющий n -листное алгебраическое накрытие группы G (гомоморфность прямо следует из определения умножения на G_0 , а n -листность следует из того, что для данного α уравнение $z_i^{n_i} = \chi^{a_i}$ имеет n_i решений, $i = \overline{1, m}$, и $n_1 n_2 \dots n_m = n$). Итак, нам осталось показать, что $G_1 \cong G_0$. Пойдем дуальную к группе G_0 . Группа G_0 является подгруппой декартова произведения $G \times \mathbb{T}^m$. По Теореме 54 из [11] (с.283), имеем

$$(4.4) \quad \hat{G}_0 \cong \widehat{G \times \mathbb{T}^m} / A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0),$$

где $A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0) = \{\chi \in \widehat{G \times \mathbb{T}^m} : \chi(G_0) = 1\}$ – аннулятор группы G_0 в группе $\widehat{G \times \mathbb{T}^m} \cong \Gamma \times \mathbb{Z}^m$. (Отметим, что в силу компактности G_0 , каждый характер из $\hat{G}_0$ продолжается до характера из $\widehat{G \times \mathbb{T}^m}$, таким образом, можно считать, что

$\widehat{G}_0 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}^m$.) С использованием топологического изоморфизма двойственности $\Gamma \times \mathbb{Z}^m \cong \widehat{G \times \mathbb{T}^m}$ действие группы $\Gamma \times \mathbb{Z}^m$ на $\widehat{G \times \mathbb{T}^m}$ можно описать следующим образом:

$$\Gamma \times \mathbb{Z}^m \ni (c, q_1, \dots, q_m) \mapsto [\chi^{(c, q_1, \dots, q_m)} : (\alpha, z_1, \dots, z_m) \mapsto \chi^c(\alpha) z_1^{q_1} \dots z_m^{q_m}] \in \widehat{G \times \mathbb{T}^m}.$$

С помощью такого описания группа G_0 представляется в виде

$$(4.5) \quad G_0 = \{(\alpha, z_1, \dots, z_m) \in G \times \mathbb{T}^m : \chi_i(\alpha, z_1, \dots, z_m) = 1, i = \overline{1, m}\},$$

где $\chi_i := \chi^{(-a_i, 0, \dots, 0, n_i, 0, \dots, 0)}$, $i = \overline{1, m}$, потому как $z_i^{n_i} = \chi^{a_i}(\alpha) \Leftrightarrow \chi^{-a_i}(\alpha) z_i^{n_i} = 1$, $i = \overline{1, m}$. Применим это представление для описания аннулятора $A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0)$. Мы утверждаем, что характеры $\chi_1, \dots, \chi_m$ составляют его систему образующих:

$$(4.6) \quad A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0) = \{\chi_1^{p_1} \dots \chi_m^{p_m} : p_1, \dots, p_m \in \mathbb{Z}\}$$

Действительно, включение " $\supset$ " следует из (4.5), а для того, чтобы доказать включение " $\subset$ " предположим, что

$$(4.7) \quad \chi^{(c, q_1, \dots, q_m)}(G_0) = 1$$

Представляя $q_i = p_i n_i + k_i$, $0 \leq k_i < n_i$, $i = \overline{1, m}$, получим

$$\begin{aligned} \chi^{(c, q_1, \dots, q_m)} &= \chi^{(c, p_1 n_1 + k_1, \dots, p_m n_m + k_m)} = \chi^{(c + p_1 a_1 - p_1 a_1 + \dots + p_m a_m - p_m a_m, p_1 n_1 + k_1, \dots, p_m n_m + k_m)} = \\ &= \chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m, k_1, \dots, k_m)} \chi^{(-p_1 a_1, p_1 n_1, 0, \dots, 0)} \dots \chi^{(-p_m a_m, 0, \dots, 0, p_m n_m)} = \\ (4.8) \quad &= \chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m, k_1, \dots, k_m)} \chi_1^{p_1} \dots \chi_m^{p_m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $g_j = (\alpha_0, 1, \dots, 1, e^{2\pi i/n_j}, 1, \dots, 1)$, $j = \overline{1, m}$ (α_0 — единица G). Очевидно, $\chi_i(g_j) = 1$, $i = \overline{1, m}$, и, следовательно, все g_j , $j = \overline{1, m}$, принадлежат G_0 . Имеем

$$\chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m, k_1, \dots, k_m)} = e^{2\pi i k_j / n_j},$$

что в силу (4.7) должно быть равно 1, откуда $k_j = 0$, $j = \overline{1, m}$. Тогда, согласно (4.7) и (4.8) (используя также тот факт, что $\chi_i(G_0) = 1$, $i = \overline{1, m}$) получим

$$\chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m, 0, \dots, 0)}(G_0) = 1,$$

что означает

$$\chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m)}(G) = 1,$$

откуда $c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m = 0$, и (4.8) дает нам (4.6). Таким образом, в силу (4.4),

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0 &\cong \widehat{G \times \mathbb{T}^m} / A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0) = \\ &= \{\chi^{(c, q_1, \dots, q_m)} A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0) : c \in \Gamma, q_i = p_i n_i + k_i, 0 \leq k_i < n_i, i = \overline{1, m}\} = \\ &= \{\chi^{(c + p_1 a_1 + \dots + p_m a_m, k_1, \dots, k_m)} \chi_1^{p_1} \dots \chi_m^{p_m} A(\widehat{G \times \mathbb{T}^m}, G_0) : c \in \Gamma, 0 \leq k_i < n_i, i = \overline{1, m}\}, \end{aligned}$$

откуда, в силу того, что $a_i \in \Gamma, i = \overline{1, m}$ (и, следовательно $p_i a_i \in \Gamma, i = \overline{1, m}$) и $\chi_i \in A(\widehat{G \times T^m}, G_0), i = \overline{1, m}$, получаем, что

$$\hat{G}_0 \cong \{\chi^{(d, k_1, \dots, k_m)} A(\widehat{G \times T^m}, G_0) : d \in \Gamma, 0 \leq k_i < n_i, i = \overline{1, m}\}$$

Из (4.3) получаем, что правая часть последнего соотношения изоморфна группе Γ_1 , откуда $\hat{G}_0 \cong \Gamma_1$, следовательно $G_0 \cong \hat{\Gamma}_1 \cong G_1$. Лемма 4.1 доказана. $\square$

Определение 4.2. Пусть X и Y – топологические пространства, $\pi : Y \rightarrow X$ – накрытие. Накрывающим преобразованием этого накрытия называется послыйный гомеоморфизм $f : Y \rightarrow Y$, то есть гомеоморфизм f , такой, что $\pi \circ f = \pi$. Неразветвленное накрытие $\pi : Y \rightarrow X$ называется накрытием Галуа, если для любых $y_1, y_2 \in Y$ с $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ существует накрывающее преобразование $f : Y \rightarrow Y$ с $f(y_1) = y_2$.

Применяя теорему 3.1 и лемму 4.1, получим следующее утверждение.

Теорема 4.1. Каждое неразветвленное n -листное накрытие $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ является алгебраическим накрытием Галуа.

Доказательство. Рассмотрим пространство

$$Y^0 = \{(s, w_1, \dots, w_m) \in \Delta^0 \times \mathbb{C}^m : w_i^{n_i} = \varphi^{a_i}(s), i = \overline{1, m}\}$$

и соответствующее ему алгебраическое накрытие $\sigma : Y^0 \rightarrow \Delta^0 : (s, w_1, \dots, w_m) \mapsto s$ пространства Δ^0 . Из леммы 4.1 имеем $G_0 \cong G_1$, следовательно $G_0 \times (0, +\infty) \cong G_1 \times (0, +\infty) \cong X^0$ (теорема 3.1). Изоморфность накрытия $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ алгебраическому накрытию $\sigma : Y^0 \rightarrow \Delta^0$ теперь следует из следующего топологического изоморфизма групп, которое мы обозначим через η :

$$\eta : G_0 \times (0, +\infty) \rightarrow Y^0 : (\alpha, z_1, \dots, z_m, r) \mapsto (\alpha r, r^{c_1} z_1, \dots, r^{c_m} z_m, r)$$

(с обратным

$$\eta^{-1} : Y^0 \rightarrow G_0 \times (0, +\infty) : (s, w_1, \dots, w_m) \mapsto (s|s|^{-1}, w_1|s|^{-c_1}, \dots, w_m|s|^{-c_m}, |s|),$$

где числа c_i определяются по n_i и a_i : $c_i n_i = a_i, i = \overline{1, m}$. Наконец покажем, что

$$\pi_1 : G_1 \times (0, +\infty) \rightarrow G \times (0, +\infty) : \pi_1(\xi, r) = \pi(\xi)r$$

является накрытием Галуа, откуда, в силу $G_1 \times (0, +\infty) \cong X^0$ и $G \times (0, +\infty) \cong \Delta^0$, будет следовать, что накрытие $\pi : X^0 \rightarrow \Delta^0$ также является накрытием Галуа.

Для $\theta \in \ker \pi|_{G_1}$ определим отображение $f_\theta : G_1 \times (0, +\infty) \rightarrow G_1 \times (0, +\infty) : f_\theta(\xi, r) = (\theta\xi, r)$. Так как $\pi(\theta) = \alpha_0$ – единица группы G , то $\pi_1 \circ f_\theta(\xi, r) =$

$\pi_1(\theta\xi, r) = \pi(\theta\xi)r = \pi(\theta)\pi(\xi)r = \pi(\xi)r = \pi_1(\xi, r)$, то есть $\pi_1 \circ f_\theta = \pi_1$. Поэтому f_θ – накрывающее преобразование. Наконец, если $\pi_1(\xi, r) = \pi_1(\omega, r)$ то $\pi(\xi) = \pi(\omega)$ и, следовательно, $\theta = \omega\xi^{-1} \in \ker \pi|_{G_1}$, причем для накрывающего преобразования f_θ имеем, что $f_\theta(\xi, r) = (\theta\xi, r) = (\omega, r)$, то есть π_1 а, следовательно, и π , является накрытием Галуа. Теорема доказана. $\square$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 12-01-97016 р-поволжье-а.

Abstract. In the paper the Bohr-Riemann surfaces over a generalized plane Δ are investigated. It is shown that topological isomorphism $\rho: G \times (0, +\infty) \rightarrow G(0, +\infty)$, which connects two interpretations of punctured generalized plane Δ^0 , induces a morphism in the category of coverings of the space Δ^0 with unique reconstruction of the group structures on the covering spaces by Δ^0 . Further this fact is used to prove the algebraicity of an arbitrary n -fold covering of a group Δ^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Arens, I. M. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., 81, no. 2, 379 – 393 (1956).
- [2] С. А. Григорян, "Обобщенные аналитические функции", Успехи Мат. Наук, 49, вып. 2, 3 – 43 (1994).
- [3] С. А. Григорян, "Дивизор обобщенной аналитической функции", Матем. заметки, 61, вып. 5, 655 – 661 (1997).
- [4] С. Моррис, Двойственность Понтрягина и Структура Локально Компактных Абелевых Групп, пер. с англ., М., Мир (1980).
- [5] О. Форстер, Римановы Поверхности, пер. с нем., М., Мир (1980).
- [6] Р. Энгелькинг, Общая Топология, пер. с англ., М., Мир (1986).
- [7] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev, "Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups", Lobachevskii Journal of Mathematics, 6, 39 – 46 (2000).
- [8] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, "On the structure of finite coverings of compact connected groups", Topology and Its Applications, 153, 3598 – 3614 (2006).
- [9] Р. Н. Гумеров, "Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп", Сиб. матем. журн., 54, вып. 2, 320 – 324 (2013).
- [10] Э. Хьюитт, К. Росс, Абстрактный Гармонический Анализ, пер. с англ., 1, М., Наука (1975).
- [11] Л. С. Понтрягин, Непрерывные Группы, М., Наука (1973).

Поступила 19 марта 2014

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 49, номер 5, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

M. HAKIMI-NEZHAAD AND A. R. ASHRAFI, A note on normalized Laplacian energy of graphs.....	3
A. FIORENZA, A. GOGATISHVILI AND T. KOPALIANI, Estimates for imaginary powers of the Laplace operator in variable Lebesgue spaces and applications	11
Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН, О гиперболических многочленах с весом	23
XIA LIU, YUANBIAO ZHANG AND HAIPING SHI, Periodic and subharmonic solutions for $2n$ th-order p -Laplacian difference equations	40
XIAO-MIN LI AND HONG-XUN YI, Meromorphic functions sharing two or three values with their derivatives in some angular domains	53
К. Г. ОВСЕПЯН, О C^* -алгебрах порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы.....	67
А. Ф. БЕКНАЗАРЯН, С. А. ГРИГОРЯН, О поверхностях Бора-Римана	76 — 88

IZVESTIYA NAN ARMENII: МАТЕМАТИКА

Vol. 49, No. 5, 2014

CONTENTS

M. HAKIMI-NEZHAAD AND ALI REZA ASHRAFI, A note on normalized Laplacian energy of graphs.....	3
A. FIORENZA, A. GOGATISHVILI AND T. KOPALIANI, Estimates for imaginary powers of the Laplace operator in variable Lebesgue spaces and applications	11
H. G. GHAZARYAN AND V. N. MARGARYAN, On weighted hyperbolic polynomials	23
XIA LIU, YUANBIAO ZHANG AND HAIPING SHI, Periodic and subharmonic solutions for $2n$ th-order p -Laplacian difference equations	40
XIAO-MIN LI AND HONG-XUN YI, Meromorphic functions sharing two or three values with their derivatives in some angular domains	53
K. H. HOVSEPYAN, On C^* -algebras, generated by inverse subsemigroups of bicyclic semigroup.....	67
A. F. BEKNAZARYAN AND S. A. GRIGORYAN, On Bohr-Riemann surfaces	76— 88

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 49, No. 4, 2014

CONTENTS

A. R. NURBEKYAN, A. A. SAIHAKYAN, Convergence of two-dimensional trigonometric interpolation polynomials of functions of bounded harmonic variation	157
S. ALEKSANYAN, Optimal uniform and tangential approximation in an angle by meromorphic functions.....	166
S. H. RASOULI AND K. FALLAH, On a class of elliptic systems involving the $p(x)$ -Laplacian and nonlinear boundary conditions	175
A. TAYEBI, A. NANKALI AND E. PEYGHAN, Some properties of m -th root Finsler metrics	184
A. GASPARYAN, V. K. OHANYAN, Covariogram of a parallelogram	194