

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2014

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ОПТИМАЛЬНО РАВНОМЕРНОЕ И КАСАТЕЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В УГЛЕ

С. АЛЕКСАНЯН

Институт Математики НАН Армении

E-mail: alyargia@instmath.asi.am

Аннотация. Для функций f голоморфных во внутренности данного угла и непрерывных на угле рассматриваем задачу равномерного и касательного приближения на угле мероморфными функциями имеющими оптимальный рост на бесконечности. Этот рост зависит от роста функции f в угле и от дифференциальных свойств на границе угла; рост оценивается их неванлиновской характеристикой. При этом рассматривается расположение полосов приближающих функций на комплексной плоскости.

MSC2010 numbers: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: равномерное и касательное приближение; мероморфная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работе рассматривается задача равномерного и касательного приближения в углах мероморфными функциями имеющими оптимальный рост. Аналогичная задача об оптимально равномерном и касательном приближении целыми функциями в углах исследовалась в работах [1]–[5].

Для угла $\Delta_\alpha = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \alpha/2\}$ рассмотрим класс $A(\Delta_\alpha)$ функций f , непрерывных на Δ_α и голоморфных на Δ_α° . В [6] Тер-Исраелян рассмотрел задачу равномерного приближения функции f мероморфными функциями g на $\Delta_\alpha - \delta$ для $\delta \in (0, \alpha)$, с оценкой роста функции g на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в терминах роста неванлиновской характеристики функции g . Затем в [7], [8] Аветисяном и Аракелянном был уточнен рост приближающих мероморфных функций.

Здесь для равномерного приближения в Δ_α мы предполагаем, что приближаемая функция $f \in A'(\Delta_\alpha)$: т. е. голоморфная на Δ_α° и непрерывно дифференцируемая на Δ_α , и получаем, что рост приближающих функций зависит от роста f на Δ_α и от роста f' на $\partial\Delta_\alpha$.

В [4] доказана, что если функция $f \in A(\Delta_\alpha)$ допускает равномерное приближение целыми функциями на Δ_α , то порядок приближающих функций нельзя уменьшить от $\pi/(2\pi - \alpha)$, но в случае мероморфного приближения, мы можем рост приближающих функций в терминах их неванлиновской характеристики сделать меньше чем $\exp\{\pi/(2\pi - \alpha)\}$.

В случае касательного приближения рост приближающих мероморфных функций зависит также от скорости приближения.

Задача оптимально равномерного и касательного приближения мероморфными функциями на вещественной оси $\mathbb{R}$ рассмотрена Аракеяном и Аветисяном в работе [9]. Аналогичная задача на полосах рассмотрена в [10].

Работа состоит из двух параграфов. Первый содержит введение и вспомогательные сведения, а второй - формулировки и доказательства основных результатов об оптимально равномерном и касательном приближении на углах мероморфными функциями.

1.1. Обозначения и определения. Для множества $E \subset \mathbb{C}$, замыкание, внутренность и границу E в $\mathbb{C}$ обозначим соответственно через $\bar{E}$, E° и ∂E .

Пусть E замкнутое множество в $\mathbb{C}$. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим через f_∂ сужение функции f на ∂E , и положим

$$M_f(r) = M_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r} = \sup_{z \in E \cap D_r} |f(z)|,$$

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{C}$ положим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^\circ) \quad \text{и} \quad A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ).$$

Положим также:

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\};$$

$$D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \quad \text{для } r > 0;$$

$$S_h := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq h\} \quad \text{для } h > 0 - \text{полоса};$$

$$I_a(\theta) := \{z \in \mathbb{C} : \arg(z - a) = \theta\} \quad \text{для } \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ и } a \in \mathbb{C} - \text{луч};$$

$$\Delta_\alpha(\beta) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta - \beta| \leq \alpha/2\} \quad \text{для } \alpha, \beta \in (0, 2\pi);$$

$$\gamma_\alpha = \partial \Delta_\alpha \quad \text{и} \quad \gamma_{\alpha, r} = \gamma_\alpha \cap \bar{D}_r.$$

Мы будем использовать функцию Р. Нсванлины $\log^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, определяемую формулой:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\log^+$ неотрицательная и неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$.

Пусть $T(\tau, g)$ неванлиновская характеристика мероморфной функции g , $g(0) \neq \infty$:

$$T(\tau, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(\tau e^{i\theta})| d\theta + \int_0^\tau n(t, g) t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ число полюсов g в D_t (с учетом их кратностей).

Дифференцируемая функция $\rho(r) \geq 0$ на $(0, \infty)$ называется *уточненным порядком* в смысле Валирова (см. [12]), если выполняются следующие два условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho < +\infty \text{ и } \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

1.2. Приближение на Δ_α функциями из $A(\Delta_\beta)$, $\beta > \alpha$. В этом пункте мы приблизим функцию $f \in A'(\Delta_\alpha)$ на Δ_α функциями F из класса $A(\Delta_\beta)$ с оценкой роста F на Δ_β .

Лемма 1.1. Для $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ (если $\alpha < \pi$, то и $\beta < \pi$) существует функция $q(\zeta, z) \in C(\Delta_\beta \times \Delta_\beta)$ и $q(\zeta, \cdot) \in H(\Delta_\beta)$, такая что

$$(1.1) \quad q(\zeta, \zeta) = 1 \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha^o$$

и рост q оценим неравенством

$$(1.2) \quad |q(\zeta, z)| \leq c ((\ln(|u| + 1) - \ln(|z| + 1))^2 + 1)^{-1} \text{ в } \Delta_\beta \times \Delta_\beta,$$

где $\zeta = u + iv$ и $c = c(\alpha, \beta) > 0$ зависят лишь от α и β .

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\beta < \pi$. Пусть G конформное отображение из $S_{\pi/2}^o$ в область $\mathbb{C} \setminus (l_+(\pi/2) \cup l_-(-\pi/2))$ (см. [9]):

$$z = G(w) = \frac{1}{2} (e^w - e^{-w}).$$

Очевидно

$$(1.3) \quad G(|\operatorname{Re} w|) \leq |G(w)| \leq G(|\operatorname{Re} w|) + h \text{ для } w \in S_h^o, 0 \leq h < \pi/2.$$

Положив $z = x + iy = G(u + iv)$, получим

$$x = \frac{1}{2} (e^u - e^{-u}) \cos v \text{ и } y = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}) \sin v.$$

Из (1.3), для $\beta \in (0, \pi)$ существует постоянная $h = h(\beta) \in (0, \pi/2)$, такая что $G^{-1}(\Delta_\beta) \subset S_h$. Искомую функцию можно определить формулой:

$$(1.4) \quad q(\zeta, z) = 25 \left[(G^{-1}(\zeta) - G^{-1}(z))^2 + 25 \right]^{-1} \quad \text{для } z \in \Delta_\beta \text{ и } \zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha^0.$$

Из (1.4) следует $q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha$. Очевидно, что $q(\zeta, \cdot) \in H(\Delta_\beta)$ для фиксированного $\zeta \in \Delta_\beta$. Теперь мы должны оценить рост функции $q(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha^0$ и $z \in \Delta_\beta$. Учитывая, что $|G^{-1}(\zeta)| \leq \ln(|\zeta| + 1) + 2$, из (1.3), (1.4) получим

$$(1.5) \quad |q(\zeta, z)| \leq \frac{25}{(\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta) - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2 + 3} \leq c((\ln(|u| + 1) - \ln(|z| + 1))^2 + 1)^{-1}.$$

Для случая $\beta > \alpha \geq \pi$ возьмем

$$(1.6) \quad q(\zeta, z) = 25 \left[(G^{-1}(\sqrt{\zeta}) - G^{-1}(\sqrt{z}))^2 + 25 \right]^{-1}$$

(с $\sqrt{1} = 1$). Здесь $G^{-1}(\Delta_{\beta/2}) \subset S_h$, и мы приходим к верхнему случаю.

Таким образом из (1.4) - (1.6) приходим к (1.1), (1.2). $\square$

Теорема 1.1. Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha < \beta < \min\{\alpha + \pi/2, \pi + \alpha/2\}$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $F \in A(\Delta_\beta)$, такая что

$$(1.7) \quad |f(z)\varphi(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha$$

и рост функции F на Δ_β удовлетворяет, для $r > 0$, неравенству

$$(1.8) \quad M_F(r) < 3M_f(lr)M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\{1 + c\varepsilon^{-1}\lambda(3lr, f)M_\varphi(r)\},$$

где

$$(1.9) \quad \lambda(r, f) = \max_{|\zeta| \leq r} \{(|\zeta| + 1)|f'_\partial(\zeta)|\},$$

$l = 1 + \tan((\beta - \alpha)/2) > 1$, а постоянная $c = c(\alpha, \beta) > 0$ зависит лишь от α и β .

Доказательство. Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можем свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$.

Мы докажем лемму двумя шагами. Сначала функцию $f \in A'(\Delta_\alpha)$ приблизим на Δ_α функцией $\Phi \in A(\Delta)$, потом функцию Φ приблизим на Δ_α функцией $F \in A(\Delta_\beta)$.

Шаг 1. Пусть f_* C^1 продолжение f на Δ_β , взяв $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и

$$(1.10) \quad f_*(\zeta) := if(u+v) + (1-i)f(u) \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha,$$

где $v = \text{dist}(\zeta, \gamma_\alpha) \geq 0$ и $u = \sqrt{|\zeta|^2 - v^2}$ на γ_α для $\zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha^\circ$. Из (1.10) следует, что рост f_* на Δ_β удовлетворяет неравенствам

$$(1.11) \quad M_{f_*}(r, \Delta_\beta) \leq 3M_{f'}(lr, \Delta_\alpha).$$

Из формулы Коши-Римана $\bar{\partial}f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и из (1.10) следует

$$(1.12) \quad |\bar{\partial}f_*(\zeta)| \leq 2dM_{f'}(l|\zeta|, \gamma_\alpha) \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \setminus \Delta_\alpha^\circ,$$

где $d = \text{dist}(\zeta, \gamma_\alpha) > 0$.

Пусть $\zeta \rightarrow n = n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \gamma_\beta$ будет кусочно постоянная функция; фиксируем $n(|\zeta|)$ условим

$$(1.13) \quad 0 < n(|\zeta|) - \{|\zeta| |f'_\theta(\zeta)|\} |\varphi(\zeta)| - 1 \leq 1 \text{ для } \zeta \in \gamma_\beta.$$

Теперь определим замкнутую область Λ с гладкой границей, такую что

$$(n-1)/\ln n \leq \text{dist}(\partial\Lambda, \zeta) \leq n/\ln n \text{ для } \zeta \in \gamma_\alpha.$$

Введем новую функцию $Q(\zeta, z)$, такую что $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Delta_\beta$:

$$(1.14) \quad Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0} \right)^n,$$

где ζ_0 выберем так, что $\text{dist}(\zeta_0, \gamma_\alpha) = 2\text{dist}(\zeta, \gamma_\alpha)$ для $\zeta \in \partial\Lambda$. Очевидно, $Q(\zeta, \cdot) \in H(\Lambda)$ для фиксированного $\zeta \in U = \Lambda \setminus \Delta_\alpha$.

Из теоремы и формулы Коши

$$(1.15) \quad \int_{\partial D} Q(\zeta, z) C_\zeta(z) q(\zeta, z) dz = \begin{cases} -2\pi i, & \text{если } \zeta \in D \\ 0, & \text{если } \zeta \in \Lambda - \bar{D} \end{cases}$$

для любой жордановской области $D \subset \Delta_\beta$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$ рассмотрим интегралы

$$(1.16) \quad I_r(z) = \pi^{-1} \int_{U_r} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Delta_{\beta, r},$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = (\varphi \bar{\partial} f_*)(\zeta) Q(\zeta, z) C_\zeta(z) q(\zeta, z)$, где $q(\zeta, z)$ выбраны из Леммы 1.1 удовлетворяющим условиям (1.1) и (1.2), $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ и $U_r = U \cap \bar{D}_r$.

Введем новые функции $F_r \in C(\Lambda_r)$ формулой

$$(1.17) \quad F_r(z) = f_*(z) + I_r(z) \text{ для } z \in \Lambda_r.$$

Из (1.1), (1.16) и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H(\Delta_{\beta,r}^*)$. Очевидно также, что $F_r \in A(\Lambda_r)$ для любого $r > 0$.

Теперь должны доказать, что $I_r(z)$ локально-равномерно сходится на Λ , при $r \rightarrow \infty$, к несобственному интегралу

$$(1.18) \quad I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_E G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Lambda.$$

Тогда в силу (1.17), искомую функцию $\Phi \in A(\Delta_\beta)$ можно определить формулой

$$(1.19) \quad \Phi(z) := \varphi(z) f_*(z) + I_\infty(z) \text{ для } z \in \Lambda.$$

Из определения (1.19) следует, что

$$(1.20) \quad \|f\varphi - \Phi\|_{\Delta_n} = \|I_\infty\|_{\Delta_n},$$

и

$$(1.21) \quad |\Phi(z)| \leq |f_*(z) \varphi(z)| + |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Lambda,$$

так что приближение функции $f\varphi$ на Δ_α функциями $\Phi \in A(\Lambda)$ и оценка роста Φ на Λ сводится в этой схеме к оценке I_∞ .

Перейдем к доказательству локально-равномерной сходимости интегралов $I_r(z)$ на Λ , при $r \rightarrow \infty$. Из (1.16), для $z \in \Lambda$ и $\zeta \in U$, мы получим

$$(1.22) \quad |G_\zeta(z)| \leq |q(\zeta, z)| \frac{|\varphi \bar{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left(\frac{2l(u) - v}{2l(u)} \right)^{n(lu)},$$

где $\zeta = u + iv$, $u, v \in \gamma_\alpha$ и $l(u) = n(|\zeta|) / \ln n(|\zeta|)$.

Пусть K - компактное множество и $K \subset \Lambda$. Существует $r_0 > 1$, такое что $K \subset \bar{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e|z - \zeta_0|$. Отсюда получаем следующую оценку интеграла

$$(1.23) \quad \int_0^{l(u)} \left(\frac{2l(u) - v}{2l(u)} \right)^{n(lu)} dv < \frac{2l(u)}{n(lu) + 1}.$$

Учитывая, что

$$(1.24) \quad |\varphi \bar{\partial} f_*(\zeta)| \leq c_1 v n(lu) / u \text{ для } \zeta \in U,$$

и неравенства (1.2) и (1.23), где $c_1 = c_1(\alpha, \beta) > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} |I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| &\leq c_2 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} \frac{du}{u(\ln u - \ln(|z|+1))^2} < \\ &< c_2 \left(\frac{1}{\ln(r'-r_0)} - \frac{1}{\ln(r''-r_0)} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

равномерно для $z \in K$, при $r'', r' \rightarrow \infty$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость интеграла $I_\infty(z)$ для $z \in \Lambda$ и что $I_\infty \in A(\Lambda)$.

Для доказательства (1.7), мы должны оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in \Lambda$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.25) \quad I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_{B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{E \setminus B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z),$$

где $B(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in \Lambda \text{ и } |\zeta - z| \leq 1\}$. Для $\zeta \in \Lambda \setminus B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \leq q|z - \zeta_0|$, где $q = q(\delta) > 0$. Из (1.22)-(1.24) получим

$$(1.26) \quad |J_2(z)| < \int_2^\infty \frac{1}{u \ln^2 u} du < c_3$$

Представим $\zeta - z = re^{i\theta}$ и из (1.22)-(1.24) получим

$$(1.27) \quad |J_1(z)| \leq c_4 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{n}{u} \left(1 - \frac{r\theta}{2l(u)} \right)^n d\theta dr = c_5.$$

Таким образом, с учетом (1.26), (1.27), из (1.25) получим $|I_\infty(z)| < c_6$.

Пусть сейчас $z \in \Lambda$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.28) \quad I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \int_{E \setminus D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z),$$

где

$$D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 3l(|z|)\}.$$

Второй интеграл уже оценили в (1.26).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_4 \sqrt{\text{mes} D(z)},$$

из (1.23) и $|\zeta| > (\tan \delta)|z|$ мы получим

$$(1.29) \quad J_3(z) < \exp\{2n(3l|z|)\}$$

Из (1.29) и (1.30) мы приходим к оценке (1.8).

Шаг 2. Функцию Φ непрерывно продолжим, так что $\Phi \in C^1(\Delta_\beta)$:

$$\Phi(\zeta) := i\Phi(u+v) + (1-i)\Phi(u) \text{ для } \zeta = u+iv \in \Delta_\beta \setminus \Lambda,$$

где $v = \text{dist}(\zeta, \Lambda)$ и $u = \sqrt{|\zeta|^2 - v^2}$. Рост функции Φ удовлетворяет неравенствам:
 $M_\Phi(r, \Delta_\beta) \leq 3M_\Phi(r, \Lambda)$ для всех $r > 0$.

Введем следующие функции

$$(1.30) \quad J_r(z) = \int_{W_r} \frac{\bar{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z} \right)^m d\sigma_\zeta,$$

где $W = \Delta_\beta \setminus \Lambda^o$ и $m(|\zeta|) = \max\{n(|\zeta|), \ln p\}$ и $p = M_\Phi(|\zeta|)$.

Из (1.31) и определения функции Φ следует, что $J_r(z)$ на Δ_β при $r \rightarrow \infty$ локально-равномерно сходится (повторяя рассуждения, использованные в шаге 1) к интегралу J_∞ .

Оценим J_∞ на Δ_α и Δ_β . Сначала оценим J_∞ для $z \in \Delta_\alpha$. Из определения функции $\Phi(\zeta)$, следует

$$|\bar{\partial}\Phi(\zeta)| \leq 2(2^n + M_\Phi(|\zeta|)) \text{ для всех } \zeta \in W.$$

Для оценки J_∞ на Δ_α из (1.31) мы получим

$$J_\infty(z) \leq (2^n + p) \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right)^m,$$

где p и n зависят от $|z|$.

Если $n \geq \ln p$, то $2^n > p$ и получим

$$2^n \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right)^n < 2^n \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right)^{\ln n} < c.$$

Если $n < \ln p$, то имеем

$$2p \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right)^{\ln p} < 2p \left(1 - \frac{1}{\ln \ln p} \right)^{\ln p} < c.$$

Таким образом доказано, что

$$(1.31) \quad |J_\infty(z)| < c \text{ для } z \in \Delta_\alpha.$$

Оценивая функции $J_\infty(z)$ как и выше, мы получаем

$$(1.32) \quad |J_\infty(z)| < \exp\{2m(l|z|)\}.$$

Учитывая (1.25)-(1.27) и (1.32), из (1.20) получим, что

$$|f(z)\varphi(z) - F(z)| < c \text{ для } z \in \Delta_\alpha$$

и заменяя c на $1/c$, получим оценку (1.7).

Определим искомую функцию F формулой (см. (1.19))

$$(1.33) \quad F(z) := \Phi(z) + J_\infty(z) \text{ для } z \in \Delta_\beta,$$

и с учетом (1.30) и (1.32), (1.33), мы получим

$$|F(z)| < 3M_f(l|z|)M_\varphi(|z|) + \exp\{2n(3l|z|)\} + \exp\{2m(l|z|)\} \text{ для } z \in \Delta_n,$$

доказывающее оценку (1.8). Теорема 1.1 доказана. $\square$

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Процесс оптимально равномерного приближения в угле Δ_α мероморфными функциями реализуется двумя шагами. На первом шаге мы приблизим функцию $F \in A(\Delta_\beta)$ на Δ_α мероморфными функциями G с оценкой роста G на $\mathbb{C}$, потом используя следующую Лемму 2.1, получим мероморфное приближение $f \in A'(\Delta_\alpha)$ в Δ_α .

2.1. Равномерное мероморфное приближение на Δ_α . Ниже нам понадобится следующая лемма (см. [7], стр. 548-549).

Лемма 2.1. Для ветви аналитической функции $z \rightarrow \sqrt{z}$, $\sqrt{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in [0, 1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$, с полюсами на $(-\infty, -1)$, такая, что

$$(2.1) \quad |\omega(z) - \sqrt{z}| \leq (1/2)\sqrt{|z|} \text{ для } |\arg z| \leq \pi - \delta, |z| \geq \delta$$

и

$$(2.2) \quad T(r, \omega) = O(\log^2 r) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.1. Пусть $F \in A(\Delta_\beta)$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная в $\mathbb{C}$ функция G , такая что

$$(2.3) \quad |F(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p$$

и рост функции G на $\mathbb{C}$ ограничен неравенством

$$(2.4) \quad T(r, \varepsilon^{-1}G) < k \int_1^{pr} \int_1^t \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(r+1) \text{ для } r \geq p,$$

где $k > 0$ постоянная, зависящая лишь от α , β и p . При этом, возможные полюсы приближающих функций расположены на мнимой оси для $\beta < \pi$ и на левой части вещественной оси для $\beta \geq \pi$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему используя метод развитая для доказательства Теоремы 1 из работы [7]. Из Леммы 3 с $\delta = 1$ пусть $\omega(z) = \omega_\delta(iz)$, так что

$$(2.5) \quad |\omega(\zeta)| \geq |\zeta|^{1/2} \text{ для } \zeta \in \gamma_\beta \text{ и } |\omega(z)| < k_1 + k_2 |z|^{1/2} \text{ для } z \in \Delta_\alpha,$$

где здесь и в дальнейшем через $k_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$ обозначаются постоянные, зависящие лишь от α , β and p . Из $\Delta_\alpha \subset \Delta_\beta$ следует, что существует постоянная $k_3 \in (0, 1)$, такая что

$$(2.6) \quad |\zeta - z| > k_3 (|\zeta| + |z|) \text{ для } \zeta \in \Gamma \text{ and } z \in \Delta_\alpha,$$

где $\Gamma = (\gamma_\beta \setminus D_1) \cup (\partial D_1 \cap \Delta_\alpha)$.

Теперь введем функцию $Q(\zeta, z)$ рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \gamma_\beta$:

$$(2.7) \quad Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right)^{n'},$$

где выбор полюсов ζ' и их кратностей n' осуществляется внизу. Фиксируем число $q = \min\{\sqrt{p}, \cos^2 \delta(\beta) / \cos^2 \delta(\alpha)\} > 1$, где $\delta(\alpha) = (\pi/2 - \alpha/2)$ для $\alpha < \pi$ и $\delta(\alpha) = (\pi - \alpha/2)$ для $\alpha \geq \pi$; и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $\gamma_k = \{\zeta \in \gamma_\beta : q^{k-1} < |\zeta| \leq q^k\}$, $\gamma^+ = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ и $\gamma^- = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im} \zeta < 0\}$.

Для случая $\alpha < \beta < \pi$ определим множество полюсов приближающих функций (ζ') полагая $\zeta' = iq^k / \cos(\pi/2 - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -iq^k / \cos(\pi/2 - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; и при $\pi \leq \alpha < \beta$ полагая $\zeta' = -q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; и $\zeta' = 0$, если $\zeta \in \gamma_0 = \Gamma \cap \partial D_1$ для обоих случаев.

Полагая $q_k = q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ и оценивая $Q(\zeta, z)$ для $z \in \Delta_\alpha \setminus D_p$ и $\zeta \in \Gamma$, мы из (2.7) получим

$$(2.8) \quad \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \delta(\beta) + (q-1)^2 \cos^2 \delta(\beta)}}{q \sin \delta(\alpha)} = d_1 < 1.$$

Из определения полюсов следует, что для фиксированного $d \in (d_1, 1)$ существует постоянная $\mu = \mu(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ и $\mu \neq q^{-m}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, такая что

$$(2.9) \quad \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq d$$

для $\zeta \in \Gamma$ и $z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|}$. Очевидно, что (2.9) выполняется еще и для $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma_r$, где $\Gamma_r = \Gamma \cap D_r$ и $|z| = \mu q_k$.

Таким образом из (2.7)-(2.9) имеем

$$(2.10) \quad |Q(\zeta, z)| \leq d^{m_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

для всех случаев рассмотренных выше.

Отсюда повторяя шаги доказательства Теоремы 1 работы [7], мы получим доказательство этой теоремы. $\square$

Следствие 2.1. Из Теоремы 2.1 и (2.3)-(2.4) следует, что функцию $F \in A(\Delta_\beta)$ порядка $0 < \rho_F < +\infty$ можно на Δ_α равномерно приблизить мероморфными функциями G с полюсами на мнимой оси для $\alpha < \beta < \pi$ и на $\mathbb{R}^-$ для $\pi \leq \alpha < \beta$ с $T(r, G) = O(r^{\rho_F})$, при $r \rightarrow +\infty$.

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$, $\beta > \alpha$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g , такая что

$$(2.11) \quad |f(z)\varphi(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p$$

и

$$(2.12) \quad T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{ \log^+ \frac{M(\tau, f) M(\tau, \varphi)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f) M(\tau, \varphi)}{\varepsilon} \right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + \\ + k \log^2(\tau + 1) \text{ для } r \geq p,$$

где $k = k(\alpha, p) > 0$ и $\lambda(\tau, f)$ определены в (1.9). При этом, возможные полюсы приближающих функций лежат на мнимой оси для $\alpha < \pi$ и в левой части вещественной оси для $\alpha \geq \pi$.

Доказательство. непосредственно следует из Леммы 2.1 и из Теоремы 1.1. Фиксируем $\beta > \alpha$ и $\beta < \min\{\alpha + \pi/2, 2\pi\}$, такую что $\tan(\beta/2 - \alpha/2) < p - 1$. Из (1.10) имеем

$$(2.13) \quad \log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k \log^+ \frac{M_f(pr) M_\varphi(r)}{\varepsilon} + k \frac{\lambda(3pr, f) M(r, \varphi)}{\varepsilon},$$

где $k = k(\alpha, p) > 3$.

Таким образом из (1.7) и (2.3) мы приходим к (2.11); а из (1.8)-(1.9), (2.4) и (2.13) получаем оценку (2.12). $\square$

Замечание 2.1. Если в теореме предположить, что $f \in A'(\Delta_\alpha \cup \overline{D}_p)$, то (2.11) будет выполняться для всех $z \in \Delta_\alpha$.

В Теореме 2.2, взяв $\varphi \equiv 1$, получим равномерное приближение функции $f \in A'(\Delta_\alpha)$ на Δ_α мероморфными функциями.

Теорема 2.3. Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g , такая что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p$$

и

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{ \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f)}{\varepsilon} \right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(r+1)$$

для $r \geq p$, где $k = k(\alpha, p) > 0$ и $\lambda(r, f)$ определены в (1.9). При этом, возможные полюсы приближающих функций расположены на мнимой оси для $\alpha < \pi$ и левой части вещественной оси для $\alpha \geq \pi$.

В [4] получен следующий результат: если функция $f \in A(\Delta_\alpha)$ допускает равномерное приближение целыми функциями на Δ_α , то порядок приближающих функций нельзя было уменьшить от $\pi/(2\pi - \alpha)$. Из Теоремы 2.2 мы можем указать новые условия на f , допускающее равномерное приближение на Δ_α мероморфными функциями g порядка $\rho \in (0, \pi/(2\pi - \alpha))$ (т. е. $T(r, g) = O(r^\rho)$ при $r \rightarrow +\infty$). Непосредственно из Теоремы 2.3 следует:

Следствие 2.2. Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ с $\rho_f > 0$ и функция $zf'_0(z)$ ограничена на γ_α . Тогда f допускает равномерное приближение на Δ_α мероморфными функциями порядка ρ_f .

2.2. Касательное мероморфное приближение на Δ_α . В работе [7] касательное приближение функции $f \in A(\Delta_\alpha)$ мероморфными функциями реализовано на $\Delta_{\alpha-\delta}$ для фиксированного $\delta \in (0, \alpha)$. Здесь оно реализуется на всем угле Δ_α . Доказывается следующий результат.

Теорема 2.4. Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g , такая что

$$(2.14) \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon |z|^{-\rho(|z|)} \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p,$$

и

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{ \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon} + \rho(\tau) \frac{\lambda(3\tau, f)}{\varepsilon} \right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} +$$

$$(2.15) \quad + k(1 + \rho(r)) \log^2(r+1) \text{ для } r > p,$$

где $k = k(\alpha, \rho, p) > 0$ и $\rho(r)$ уточненный порядок в смысле Валуа. При этом, возможные полюсы приближающих функций лежат на некоторых угловых областях.

Доказательство. Из теоремы 5.1 работы [11] (стр. 99) следует существование голоморфной функции $f_\rho \in H(\Delta_{\alpha+\delta} \cup D_1)$ для фиксированного $\delta \in (0, 2\pi - \alpha)$ и постоянной $k_1 > 0$, такой что

$$(2.16) \quad 2 \leq |f_\rho(z)| |z|^{-\rho(|z|)} \leq k_1.$$

Применим к функции f_ρ и к области $\Delta_{\alpha+\delta} \cup D_1$ Теорему 2.1 полагая $\varepsilon = 1$, $p = 2$ мы из (2.3) и (2.16) получим, что приближающая мероморфная функция g_ρ удовлетворяет неравенствам

$$(2.17) \quad 1 \leq |g_\rho(z)| |z|^{-\rho(|z|)} \leq 2k_1$$

а согласно (2.16) и (2.4) рост функции g_ρ ограничивается неравенством

$$T(r, g_\rho) < \int_1^{2r} \int_1^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_2 \log^2(r+1) \leq$$

$$\leq k\rho(2r) \int_1^{2r} \int_1^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_2 \log^2(r+1) \leq$$

$$(2.18) \quad \leq k_3 \rho(r) \log^3(r+1), \quad r \geq 1.$$

Применим теперь к функции $f g_\rho$ и к углу Δ_α Теорему 2.1. Если g_1 - приближающая функция, то требуемую мероморфную функцию g получим, полагая $g = g_1/g_\rho$. Тогда согласно по (2.11) мы имеем

$$|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{|g_\rho(z)|} \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \quad |z| \geq p,$$

откуда, с учетом (2.17), получим оценку (2.14). Кроме того

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) \leq T(r, \varepsilon^{-1}g_1) + T(r, g_\rho) + k_4,$$

где $k_4 > 0$, зависит лишь от выбора функции ρ . Оценка (2.15) следует из (2.12) и (2.18), если в (2.12) взять $\varphi = g_\rho$. $\square$

Abstract. For functions that are holomorphic on the interior of given angle and continuous in the angle, we discuss the problem of uniform and tangential approximation in the angle by meromorphic functions having optimal growth at infinity. We show that this growth depends on the growth of underlying function in the angle and the differential properties on the boundary of the angle. We estimate the growth of the function by its Nevanlinna characteristic. Also we describe the possible set of the poles of the approximating functions on the complex plane.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Мергелян, "Равномерное приближения функций комплексного переменного". Успехи математических наук, 7, вып. 2(48), 31 – 122 (1952).
- [2] H. Kober, "Approximation by integral functions in the complex plane", Trans. Amer. Math. Soc., 58, 7 – 31 (1944).
- [3] М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями", ДАН СССР, 47, no. 4, 243 – 245 (1945).
- [4] Н. У. Аракелян, "Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста", Сиб. Мат. Жур., 4, no. 5, 977 – 999 (1983).
- [5] S. H. Aleksanian and N. H. Arakelian, "Optimal uniform approximation on angles by entire functions", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 44, no. 3, 149 – 164 (2009).
- [6] Л. А. Тур-Исраэлян, "Равномерное и касательное приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста", Известия АН АрмССР, серия Математика, 6, no. 1, 67 – 80 (1971).
- [7] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, "Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях", Известия АН АрмССР, серия Математика, 23, no. 6, 546 – 556 (1988).
- [8] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян и А. А. Гончар, "Об асимптотических свойствах мероморфных функций", Известия АН АрмССР, серия Математика, 24, no. 3, 207 – 225 (1989).
- [9] Р. А. Аветисян и Н. У. Аракелян, "Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси", Известия АН АрмССР, серия Математика, 25, no. 6, 534 – 548 (1990).
- [10] S. H. Aleksanian, "Uniform and tangential approximation on a stripe by meromorphic functions, having optimal growth", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 46, no. 2, 319 – 328 (2011).
- [11] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, Москва, Наука (1970).

Поступила 2 мая 2013

КОВАРИОГРАММА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения

E-mails: ara1987-87@mail.ru; victo@aua.am

Аннотация. В статье получены явные выражения ковариограммы и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для параллелограмма. Также получено выражение функции распределения длины хорды для параллелограмма.

MSC2010 number: 60D05; 52A22; 53C65.

Ключевые слова: ограниченная выпуклая область; ковариограмма; распределение длины хорды; зависящая от ориентации функция распределения длины хорды.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [5] Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений. В. Нагель в [3] доказал что плоский выпуклый многоугольник восстанавливается в классе всех плоских выпуклых многоугольников по ковариограмме (с точностью до параллельных переносов и отражений). В [4] Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений. Выражения ковариограммы и зависящей от направления функции распределения длины хорды известны только для треугольника (см. [9]), для правильного многоугольника (см. [10]) и эллипса (см. [10]).

Основной целью данной работы является расширение класса областей, для которых можно записать в явном виде ковариограмму и зависящую от направления функцию распределения длины хорды.

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Выражения ковариограммы и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для любого параллелограмма.
2. Выражение функции распределения длины хорды для параллелограмма.

Пусть R^n - n -мерное евклидово пространство, $D \subset R^n$ - ограниченное выпуклое тело с внутренними точками, S^{n-1} - $(n-1)$ -мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $V_n(\cdot)$ - n -мерная мера Лебега в R^n .

Определение 1.1. ([5]). *Функция*

$$(1.1) \quad C(D, h) = V_n(D \cap (D - h)), \quad h \in R^n,$$

называется *ковариограммой тела D*. Здесь $D - h = \{x - h, x \in D\}$.

Ковариограмма $C(D, h)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Ж. Матерон (см. [2], [5]) доказал, что для $t > 0$ и $u \in S^{n-1}$

$$(1.2) \quad \frac{\partial C(D, tu)}{\partial t} = -V_{n-1}(\{y \in u^\perp : V_1(D \cap (l_u + y)) \geq t\}),$$

где $l_u + y$ есть прямая, параллельная направлению u и проходящая через точку y , причем $u^\perp$ - ортогональное дополнение к u . Правая часть (1.2) есть функция Х-лучей тела D в направлении параллельном u (см [6]) и является распределением длины хорды множества D в направлении u .

Обозначим через $b(D, u)$ ширину области $D \subset R^2$ в направлении u . Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая D имеет точку пересечения (обозначим ее через z) с прямой, параллельной направлению $u^\perp$ и проходящей через начало координат. Точка пересечения z равномерно распределена в интервале $[0, b(D, u)]$. Можно отождествлять точки интервала $[0, b(D, u)]$ с прямыми, которые пересекают D и параллельны направлению u .

Определение 1.2. *Функция*

$$(1.3) \quad F(D, u, t) = \frac{V_1\{z : V_1(g_z(u) \cap D) < t\}}{b(D, u)}$$

называется *зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды области D в направлении $u \in S^1$, где $g_z(u)$ - прямая, параллельная направлению $u \in S^1$ и пересекающая интервал $[0, b(D, u)]$ в точке z .*

Предложение 1.1. Зависящая от ориентации функция распределения длины хорды области D в направлении $u \in S^1$ определяется по формуле

$$(1.4) \quad F(D, u, t) = 1 - \frac{b((D \cap (D - tu), u))}{b(D, u)}, \quad t \geq 0.$$

Связь между ковариограммой и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды обнаружил Ж. Матерон в [5].

Лемма 1.1. Для $u \in S^1$, пусть $t > 0$ такое, что $D \cap (D - tu)$ содержит внутренние точки. Тогда $C(D, tu)$ дифференцируема по t и

$$(1.5) \quad -\frac{\partial C(D, tu)}{\partial t} = (1 - F(D, u, t)) \cdot b(D, u).$$

Очевидно, что

$$(1.6) \quad b(D, u) = - \left. \frac{\partial C(D, tu)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Обозначим через G пространство всех прямых g в евклидовой плоскости R^2 , и пусть (φ, p) - полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного на прямую g из начала координат O .

Обозначим через $\mu(\cdot)$ локально-конечную меру в пространстве G , инвариантную относительно группы всех евклидовых движений (параллельных переносов и вращений). Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет вид ([1]) $\mu(dg) = dp d\varphi$, где dp - одномерная мера Лебега, а $d\varphi$ - равномерная мера на S^1 .

Для ограниченной выпуклой области D , обозначим множество прямых, пересекающих D через

$$[D] = \{g \in G, g \cap D \neq \emptyset\}$$

Имеем (см. [1]) $\mu([D]) = \partial D$, где ∂D длина границы области D .

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[D]$.

Определение 1.3. Функция

$$(1.7) \quad F_D(t) = \frac{\mu(\{g \in [D], |g \cap D| < t\})}{\partial D}, \quad t \in R^1$$

называется функцией распределения длины хорды области D , где $|g \cap D|$ - длина хорды пересечения g с D .

2. КОВАРИОГРАММА И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ В НАПРАВЛЕНИИ u

Пусть $ABCD$ - параллелограмм. Обозначим $|AB| = a_1$, $|AD| = a_2$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = x$, $\angle BDC = y - \alpha$, площадь $ABCD$ через S . Пусть AD лежит на луче с нулевым направлением, а направление против часовой стрелки берется в качестве положительного. Не нарушая общности предположим, что $ABCD$ лежит в левой полуплоскости относительно AD . Отметим, что всегда $y < \pi$. Обозначим через $t_{\max}(u)$ хорду направления $u \in S^1$ максимальной длины. Получаем

$$(2.1) \quad C(tu) = \begin{cases} \kappa_1 t^2 - (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u))t + \kappa_2, & u \in (0, \alpha), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ -\kappa_1 t^2 - (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha))t + \kappa_2, & u \in (\alpha, \pi), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ a_1 a_2 \sin \alpha - a_1 t \sin \alpha, & u = 0, t \in [0, a_2] \\ a_1 a_2 \sin \alpha - a_2 t \sin \alpha, & u = \alpha, t \in [0, a_1]. \end{cases}$$

Здесь и ниже $\kappa_1 = \frac{\sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha}$, $\kappa_2 = a_1 a_2 \sin \alpha$, $C(ABCD, tu) = C(tu)$, причем $C(tu)$ равна 0 при $t \geq t_{\max}(u)$.

$$(2.2) \quad F(u, t) = \begin{cases} \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u))} t, & u \in (0, \alpha), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha))} t, & u \in (\alpha, \pi), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ 0, & u = 0, t \in [0, a_2] \\ 0, & u = \alpha, t \in [0, a_1] \end{cases}$$

Здесь и ниже $F(ABCD, u, t) = F(u, t)$. Значение $F(u, t)$ равно 0 при $t \leq 0$ и равно 1 при $t \geq t_{\max}(u)$, причем

$$(2.3) \quad t_{\max}(u) = \begin{cases} \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)}, & u \in (0, x) \\ \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}, & u \in [x, y], u \neq \alpha \\ \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u - \alpha)}, & u \in [y, \pi) \\ a_2, & u = 0 \\ a_1, & u = \alpha \end{cases}$$

Из (2.3) легко заметить, что $t_{\max}(u)$ непрерывная функция на S^1 , следовательно, если мы имеем величины $t_{\max}(u)$ параллелограмма на всюду плотном подмножестве из S^1 , то можно единственным образом восстановить $t_{\max}(u)$ для любого направления $u \in S^1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (2.1)-(2.3)

Вычислим ковариограмму параллелограмма $ABCD$ для направлений $u \in (0, \alpha)$. Если интерпретировать точки параллелограмма $ABCD$ векторами $-tu$ в результате мы получим параллелограмм $A_{tu}B_{tu}C_{tu}D_{tu}$. Пусть $ABCD \cap A_{tu}B_{tu}C_{tu}D_{tu}$ содержит внутренние точки. Точки пересечения $ABCD$ и $A_{tu}B_{tu}C_{tu}D_{tu}$ на сторонах AD и AB обозначим через E и F соответственно. Рассмотрим прямые, проходящие через точки E и F и параллельные направлению u , тогда пересечение этих прямых со сторонами CD и BC обозначим, соответственно E_{tu} и F_{tu} . Легко заметить, что $EE_{tu} = FF_{tu} = t$. Значение ковариограммы в tu равно площади параллелограмма $AFC_{tu}E$:

$$(3.1) \quad C(tu) = S_{AFC_{tu}E} = AF \cdot AE \cdot \sin \angle FAE$$

Легко заметить, что $AE = a_2 - ED$, $AF = a_1 - FB$ и $\angle FAE = \alpha$.

Можно найти ED из $\triangle EDE_{tu}$. $\angle EDE_{tu} = \pi - \alpha$, $\angle DE_{tu}E = \alpha - u$. По теореме синусов имеем

$$(3.2) \quad ED = \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} EE_{tu} = \frac{t \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha}$$

Найдем FB из $\triangle BFF_{tu}$. $\angle FFF_{tu}B = u$, $\angle F_{tu}BF = \pi - \alpha$. По теореме синусов получаем

$$(3.3) \quad FB = \frac{\sin u}{\sin \alpha} FF_{tu} = \frac{t \sin u}{\sin \alpha}.$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) для каждого $u \in (0, \alpha)$ получаем

$$(3.4) \quad C(tu) = \frac{\sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t^2 - (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u))t + a_1 a_2 \sin \alpha.$$

Вычислим ковариограмму $ABCD$ для направлений $u \in (\alpha, \pi)$. Пусть вектор, который образует угол u с лучом AD образует угол u' с лучом DA . Так как $u \in (\alpha, \pi)$, то $u' \in (0, \pi - \alpha)$. Этот случай был фактически рассмотрен (если рассматривать DA как нулевое направление, а в качестве положительного направления взять направление по часовой стрелке), здесь $\angle BAD$ заменен на $\angle ADC = \pi - \alpha$. Следовательно, для $u \in (\alpha, \pi)$ используя соотношение $u' = \pi - u$ получаем

$$(3.5) \quad C(tu) = \frac{\sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t^2 - (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha))t + a_1 a_2 \sin \alpha.$$

Легко заметить, что $C(t0) = a_1 a_2 \sin \alpha - a_1 t \sin \alpha$, и $C(t\alpha) = a_1 a_2 \sin \alpha - a_2 t \sin \alpha$.

Поскольку $C(D, tu) = C(D, t(\pi + u))$, то мы получаем ковариограмму параллелограмма для каждого $u \in S^1$.

Если $ABCD \cap A_{tu}B_{tu}C_{tu}D_{tu}$ не имеет внутренних точек, то $C(tu) = 0$ (ясно, что $t_{\max}(u) = \min\{t \geq 0; C(tu) = 0\}$). С другой стороны, если $ABCD \cap A_{tu}B_{tu}C_{tu}D_{tu}$ имеет внутренние точки (то есть $t < t_{\max}(u)$), то $C(tu) > 0$ и справедливо (3.4) или (3.5). Так как ковариограмма непрерывная функция, то наименьший из корней (3.4) и (3.5) совпадает с $t_{\max}(u)$.

Из теоремы Виета следует, что корнями (3.4) являются $\frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)}$ и $\frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}$, а корнями (3.5) являются $\frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}$ и $\frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u - \alpha)}$.

Найдем $t_{\max}(u)$, для $u \in (0, \alpha)$. Неравенство $\frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)} \leq \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}$ эквивалентно

$$a_2 \sin u \leq a_1 \sin(\alpha - u) = a_1(\sin \alpha \cos u - \cos \alpha \sin u),$$

разделяя обе части которого на $\sin \alpha$ получаем эквивалентное неравенство $\cot u \geq \frac{a_2}{a_1 \sin \alpha} + \cot \alpha$, откуда $u \in (0, \operatorname{arccotg}(\frac{a_2}{a_1 \sin \alpha} + \cot \alpha)]$. Используя теорему синусов в $\triangle CAD$ и тождество $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, получаем

$$(3.6) \quad x = \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_2}{a_1 \sin \alpha} + \cot \alpha \right)$$

откуда следует

$$(3.7) \quad t_{\max}(u) = \begin{cases} \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)}, & u \in (0, x] \\ \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}, & u \in [x, \alpha) \end{cases}$$

Найдем $t_{\max}(u)$, для $u \in (\alpha, \pi)$. Неравенство $\frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u} \leq \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u - \alpha)}$ эквивалентно

$$a_2 \sin u \geq a_1 \sin(u - \alpha) = a_1(\sin u \cos \alpha - \cos u \sin \alpha),$$

разделяя обе части которого на $\sin \alpha$ получаем эквивалентное неравенство $\cot u \geq \cot \alpha - \frac{a_2}{a_1 \sin \alpha}$, откуда $u \in (\alpha, \operatorname{arccotg}(\cot \alpha - \frac{a_2}{a_1 \sin \alpha})]$. Обозначим $\angle ADB$ через y_1 . Используя теорему синусов в $\triangle ADB$ и тождество $1 + \cot^2 y_1 = \frac{1}{\sin^2 y_1}$, получаем

$$(3.8) \quad y_1 = \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_2}{a_1 \sin \alpha} - \cot \alpha \right)$$

Так как $y = \pi - y_1$, то используя тождество $\operatorname{arccotg} z + \operatorname{arccotg}(-z) = \pi$ и (3.8), получаем

$$(3.9) \quad y = \operatorname{arccotg} \left(\cot \alpha - \frac{a_2}{a_1 \sin \alpha} \right)$$

Следовательно, из (3.9) имеем

$$(3.10) \quad t_{\max}(u) = \begin{cases} \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}, & u \in (\alpha, y] \\ \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u \in [y, \pi) \end{cases}$$

Из (3.7) и (3.10) получаем (2.3).

Таким образом используя (3.4), (3.5) и (2.3) получаем (2.1).

Дифференцируя (2.1) получаем

$$(3.11) \quad \frac{\partial C(tu)}{\partial t} = \begin{cases} 2\kappa_1 t - a_2 \sin u - a_1 \sin(\alpha - u), & u \in (0, \alpha), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ -2\kappa_1 t - a_2 \sin u - a_1 \sin(u - \alpha), & u \in (\alpha, \pi), t \in [0, t_{\max}(u)] \\ a_1 \sin \alpha, & u = 0, t \in [0, a_2] \\ a_2 \sin \alpha, & u = \alpha, t \in [0, a_1] \end{cases}$$

Согласно (1.5) и (3.11) получаем ширину параллелограмма

$$(3.12) \quad b(u) = \begin{cases} a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u), & u \in [0, \alpha] \\ a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha), & u \in [\alpha, \pi] \end{cases}$$

Из (3.11) и (3.12), используя Лемму 1.1 получаем (2.2). Здесь и ниже $b(u) = b(ABCD, u)$.

Из (2.2) ясно, что зависящая от ориентации функция распределения длины хорды имеет правосторонний разрыв в точке $t = t_{\max}(u)$ почти для всех $u \in S^1$. Вероятность того, что случайная прямая в направлении u образует хорду длиной $t_{\max}(u)$, равна

$$(3.13) \quad P(\chi(u) = t_{\max}(u)) = \begin{cases} \frac{a_1 \sin(\alpha - u) - a_2 \sin u}{a_1 \sin(\alpha - u) + a_2 \sin u}, & u \in (0, \alpha) \\ \frac{a_2 \sin u - a_1 \sin(\alpha - u)}{a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u)}, & u \in [\alpha, \pi) \\ \frac{a_2 \sin u - a_1 \sin(u - \alpha)}{a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha)}, & u \in (\alpha, y] \\ \frac{a_1 \sin(u - \alpha) - a_2 \sin u}{a_1 \sin(u - \alpha) + a_2 \sin u}, & u \in [y, \pi] \\ 1, & u = 0, \alpha \end{cases}$$

где $\chi(u)$ есть хорда образованная случайной прямой направления u . На рисунке 1 изображен график вероятности того, что случайная прямая в направлении u образует хорду длиной $t_{\max}(u)$ для параллелограмма с параметрами $a_1 = 1, a_2 = 2, \alpha = \pi/5$. Как видно из графика при u совпадающей с направлениями сторон параллелограмма $P(\chi(u) = t_{\max}(u))$ равна 1, а в направлении диагоналей - 0.

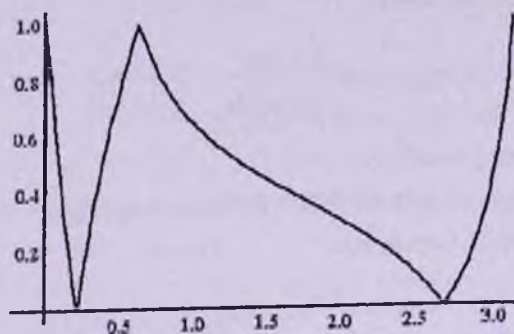


Рис. 1

4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Пусть $a_1 \leq a_2$ и $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Обозначим диагонали параллелограмма через d_1, d_2 ($d_1 \leq d_2$), а высоты через h_1, h_2 ($h_1 \leq h_2$). Легко вычислить, что

$$(4.1) \quad d_1 = (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.2) \quad d_2 = (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.3) \quad h_1 = a_1 \sin \alpha$$

$$(4.4) \quad h_2 = a_2 \sin \alpha.$$

Из (3.6) следует, что $\cot x = \frac{a_2 + a_1 \cos \alpha}{a_1 \sin \alpha}$, следовательно, используя (4.2) и (4.3) получаем $1 + \cot^2 x = \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \alpha}{a_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{d_2^2}{h_1^2}$. Отсюда

$$(4.5) \quad \sin x = \frac{h_1}{d_2}$$

$$(4.6) \quad \cos x = \frac{a_1 \cos \alpha + a_2}{d_2}$$

(4.6) имеет место так как $x \leq \frac{\pi}{2}$ (последнее вытекает из предположения $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$(4.7) \quad \sin(\alpha - x) = \frac{h_2}{d_2}$$

$$(4.8) \quad \cos(\alpha - x) = \frac{a_2 \cos \alpha + a_1}{d_2}$$

Из (3.9) следует, что $\cot y = \frac{a_1 \cos \alpha - a_2}{a_2 \sin \alpha}$, следовательно, используя (4.1) и (4.3) получаем $1 + \cot^2 y = \frac{a_1^2 \sin^2 \alpha}{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha} = \frac{h_1^2}{d_1^2}$. Отсюда

$$(4.9) \quad \sin y = \frac{h_1}{d_1}$$

$$(4.10) \quad \cos y = \frac{a_1 \cos \alpha - a_2}{d_1}$$

(4.10) выполняется так как $\cos \alpha \leq \frac{a_2}{a_1}$ и $\cos y < 0$ (последнее вытекает из предположения $\frac{\pi}{2} < y < \pi$). Из (4.9) и (4.10) следует, что

$$(4.11) \quad \sin(y - \alpha) = \frac{h_2}{d_1}$$

$$(4.12) \quad \cos(y - \alpha) = \frac{a_1 - a_2 \cos \alpha}{d_1}$$

Из (4.1), (4.10) и (4.12) имеем

$$(4.13) \quad d_1 = a_1 \cos(y - \alpha) - a_2 \cos y$$

Из (4.2), (4.6) и (4.8) имеем

$$(4.14) \quad d_2 = a_1 \cos(\alpha - x) + a_2 \cos x$$

Из (4.1) ясно, что неравенство $d_1 \geq a_1$ эквивалентно неравенству $a_2 - 2a_1 \cos \alpha \geq 0$, следовательно, из (4.3) и (4.9) получаем.

Следствие 4.1. Следующие три неравенства эквивалентны:

$$a_1 \leq d_1, \quad \cos \alpha \leq \frac{a_2}{2a_1}, \quad \sin y \leq \sin \alpha.$$

Из (4.1) ясно, что неравенство $d_1 \geq a_2$ эквивалентно неравенству $a_1 - 2a_2 \cos \alpha \geq 0$, следовательно из (4.4) и (4.11) получаем следствие 4.2.

Следствие 4.2. Следующие три неравенства эквивалентны:

$$a_2 \leq d_1, \quad \cos \alpha \leq \frac{a_1}{2a_2}, \quad \sin(y - \alpha) \leq \sin \alpha.$$

Из (4.12) следует, что неравенство $y - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ эквивалентно неравенству $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{a_2}$, следовательно получаем следствие 4.3.

Следствие 4.3. Следующие два неравенства эквивалентны:

$$y - \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \cos \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}.$$

Чтобы получить выражение для функции распределения длины хорды для $ABCD$, вычислим

$$(4.15) \quad \mu(t) := \mu(\{g \in [ABCD], |g \cap ABCD| < t\}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для этого проинтегрируем $b(u) \times F(u, t)$ на интервале $[0, \pi]$. Из (3.12) и (2.2) имеем

$$(4.16) \quad F(u, t) \cdot b(u) = \begin{cases} \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t, & u \in (0, x], t \in [0, \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)}] \\ \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t, & u \in [x, \alpha], t \in [0, \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}] \\ \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t, & u \in (\alpha, y], t \in [0, \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u}] \\ \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t, & u \in [y, \pi], t \in [0, \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u - \alpha)}] \\ 0, & u = 0, t \in [0, a_2] \\ 0, & u = \alpha, t \in [0, a_1] \end{cases}$$

Значения $F(u, t) \cdot b(u)$ равны $b(u)$ когда $t \geq t_{\max}(u)$ и равны 0 когда $t \leq 0$. Вычислим $\min t_{\max}(u)$ и $\max t_{\max}(u)$ для направлений $u \in [0, x]$, $u \in [x, \alpha]$, $u \in [\alpha, y]$ и $u \in [y, \pi]$.

Если $0 < u \leq x$, то $\sin(\alpha - x) \leq \sin(\alpha - u) < \sin \alpha$ (так как $0 < \alpha < \pi/2$ и $\sin$ возрастает на интервале $[0, \pi/2]$), следовательно из (2.3), (4.4) и (4.7) получаем

$$(4.17) \quad \min_{u \in [0, x]} t_{\max}(u) = a_2 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [0, x]} t_{\max}(u) = d_2.$$

Если $x \leq u < \alpha$, то $\sin x \leq \sin u < \sin \alpha$ (так как $0 < \alpha \leq \pi/2$ и $\sin$ возрастает на интервале $[0, \pi/2]$), следовательно из (2.3), (4.3) и (4.5) получаем

$$(4.18) \quad \min_{u \in [x, \alpha]} t_{\max}(u) = a_1 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [x, \alpha]} t_{\max}(u) = d_2.$$

Если $\cos \alpha \leq \frac{a_2}{2a_1}$ и $\alpha < u \leq y$, то $\sin y \leq \sin u \leq 1$ (так как $\alpha < \pi/2 \leq y$ и из следствия 4.1 $\sin y \leq \sin \alpha$), следовательно из (2.3), (4.3) и (4.9) получаем

$$(4.19) \quad \min_{u \in [\alpha, y]} t_{\max}(u) = h_1 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [\alpha, y]} t_{\max}(u) = d_1.$$

Если $\cos \alpha \geq \frac{a_2}{2a_1}$ и $\alpha < u \leq y$, то $\sin \alpha \leq \sin u \leq 1$ (так как $\alpha < \pi/2 \leq y$ и из свойства 4.1 $\sin \alpha \leq \sin y$), следовательно из (2.3) и (4.3) получаем

$$(4.20) \quad \min_{u \in [\alpha, y]} t_{\max}(u) = h_1 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [\alpha, y]} t_{\max}(u) = a_1.$$

Если $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{2a_2}$ и $y \leq u < \pi$, то $\sin \alpha < \sin(u - \alpha) \leq \sin(y - \alpha)$ (так как $\sin$ убывает на интервале $[\pi/2, \pi]$ и из следствия 4.2 $\sin(y - \alpha) \geq \sin \alpha$), следовательно из (2.3) и (4.3) получаем

$$(4.21) \quad \min_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = d_1 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = a_2.$$

Если $\frac{a_1}{2a_2} \leq \cos \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ и $y \leq u < \pi$, то $\sin \alpha \leq \sin(u - \alpha) \leq 1$ (так как из свойства 4.3 следует, что $\pi - \alpha \leq \pi/2 \leq y - \alpha$, а из следствия 4.2 следует, что $\sin(y - \alpha) \geq \sin \alpha$), следовательно из (2.3) и (4.4) получаем

$$(4.22) \quad \min_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = h_2 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = a_2.$$

Если $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{2a_2}$ и $y \leq u < \pi$, то $\sin(y - \alpha) \leq \sin(u - \alpha) \leq 1$ (так как из следствия 4.3 следует, что $\pi - \alpha \leq \pi/2 \leq y - \alpha$, а из следствия 4.2 следует, что $\sin(y - \alpha) \leq \sin \alpha$), следовательно из (2.3), (4.4) и (4.11) получаем

$$(4.23) \quad \min_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = h_2 \quad \text{и} \quad \max_{u \in [y, \pi]} t_{\max}(u) = d_1.$$

С точки зрения функции распределения длины хорды получим следующие семь случаев для параллелограмма:

1. $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{2a_1}$ и $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \leq a_1$ и $y - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$);
2. $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{2a_1}$ и $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \leq a_1$ и $y - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$);
3. $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{2a_1}$ и $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \geq a_1$ и $y - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$);
4. $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{2a_2}$, $\cos \alpha \leq \frac{a_2}{2a_1}$, $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ и $\sin \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \leq a_2$, $a_1 \leq d_1$, $y - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $h_2 \leq a_1$);
5. $\cos \alpha \geq \frac{a_1}{2a_2}$, $\cos \alpha \leq \frac{a_2}{2a_1}$, $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ и $\sin \alpha \geq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \leq a_2$, $a_1 \leq d_1$, $y - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $h_2 \geq a_1$);
6. $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{2a_2}$ и $\sin \alpha \leq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \geq a_2$ и $h_2 \leq a_1$);
7. $\cos \alpha \leq \frac{a_1}{2a_2}$ и $\sin \alpha \geq \frac{a_1}{a_2}$ ($d_1 \geq a_2$ и $h_2 \geq a_1$);

5. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ТИПА 1

Если $0 < t \leq h_1$, то используя (4.17), (4.18), (4.20) и (4.21) для максимальной хорды, получаем, что множество $\{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (0, \pi)$ пусто. Следовательно, интегрируя (4.16) получаем явное выражение (4.15) для $0 < t \leq h_1$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi b(u) \times F(u, t) du = \int_0^\alpha \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t du \\ &\quad + \int_\alpha^\pi \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du \\ &= \frac{t}{\sin \alpha} (2 \sin \alpha - 2\alpha \cos \alpha + \pi \cos \alpha) = t(2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha). \end{aligned}$$

В случае $h_1 < t \leq d_1$, используя неравенства (4.17), (4.18) для максимальной хорды, получаем следующее равенство для множеств

$$(5.2) \quad \{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (0, \alpha) = \emptyset$$

Так как $h_1 < t \leq d_1$, то из (4.3), (4.9) и следствия 4.1 получаем, что $\alpha \leq \pi - \gamma \leq \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \leq \gamma$. Следовательно, множество $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u} < t\} \cap (\alpha, \gamma]$ совпадает с множеством

$$(5.3) \quad \left(\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}, \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \right]$$

Для случая $h_1 < t \leq d_1$, используя неравенство (4.21) для максимальной хорды, получаем следующее равенство

$$(5.4) \quad \{u : t_{\max}(u) < t\} \cap [\gamma, \pi) = \emptyset$$

Используя (5.2)-(5.4) мы получаем явное выражение (4.15) для $h_1 < t \leq d_1$ интегрируя (4.16)

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi b(u) \times F(u, t) du = \int_0^\alpha \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t du \\ &+ \int_\alpha^{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}} \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du + \int_{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}}^{\pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}} (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha)) du \\ &+ \int_{\pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}}^\pi \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du \\ (5.5) \quad &= 2t - (2\alpha - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}) t \cot \alpha + 2a_2 \sqrt{1 - \frac{a_1^2 \sin^2 \alpha}{t^2}} \end{aligned}$$

Для случая $d_1 < t \leq a_1$, используя неравенства (4.17) и (4.18) для максимальной хорды, получаем следующее равенство для множеств

$$(5.6) \quad \{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (0, \alpha) = \emptyset$$

Так как $d_1 < t \leq a_1$, то из (4.3), (4.9) и следствия 4.1 получаем, что $\alpha \leq \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} < \pi - \gamma$ и $\gamma < \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \leq \pi - \alpha$. Следовательно, множество $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u} < t\} \cap (\alpha, \gamma]$ совпадает с множеством

$$(5.7) \quad \left(\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}, \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \right)$$

Так как $d_1 < t \leq a_1$, то из (4.4), (4.11) и следствия 4.1 получаем, что $\arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{a_1} + \alpha \leq \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} + \alpha < \pi - \gamma + 2\alpha \leq \gamma$ и $\gamma < \pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} \leq \pi +$

$\alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{a_1} \leq \pi$. Следовательно, множество направлений $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u-\alpha)} < t\} \cap [y, \pi]$ совпадает с множеством

$$(5.8) \quad \left[y, \pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} \right]$$

Используя (5.6)-(5.8) мы получаем явное выражение (4.15) для $d_1 < t \leq a_1$ интегрируя (4.16)

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi b(u) \times F(u, t) du = \int_0^\alpha \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t du \\ &+ \int_\alpha^{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}} \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du + \int_{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}}^{\pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}} (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha)) du \\ &+ \int_{\pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}}^\pi \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du \end{aligned}$$

$$= 3t - (3\alpha - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}) t \cot \alpha + a_1 \sqrt{1 - \frac{a_2^2 \sin^2 \alpha}{t^2}} + a_2 \sqrt{1 - \frac{a_1^2 \sin^2 \alpha}{t^2}}$$

Для случая $a_1 < t \leq a_2$, используя неравенство (4.17) для максимальной хорды, получаем следующее равенство для множеств

$$(5.10) \quad \{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (0, x] = \emptyset$$

Из (4.3), (4.5) и $a_1 < t \leq a_2$ следует, что $x \leq \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{a_2} \leq \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} < \alpha$ и $\pi - \alpha < \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \leq \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{a_2}$. Следовательно, множество

$\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u} < t\} \cap [x, \alpha]$ совпадает с множеством направлений

$$(5.11) \quad \left(\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}, \alpha \right)$$

Для случая $a_1 < t \leq a_2$, используя неравенство (4.20) для максимальной хорды, получаем следующее равенство для множеств

$$(5.12) \quad \{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (\alpha, y] = (\alpha, y].$$

Так как $a_1 < t \leq a_2$, то из (4.4), (4.11), следствии 4.1 и 4.3 получаем, что $2\alpha \leq \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} + \alpha < \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{a_1} + \alpha \leq y$,

$$\pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{a_1} \leq \pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} \leq \pi.$$

Следовательно, множество $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(u-\alpha)} < t\} \cap [y, \pi]$ совпадает с множеством направлений

$$(5.13) \quad \left[y, \pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} \right]$$

Используя (5.10)-(5.13) и интегрируя (4.16), получаем явное выражение (4.15) для $a_1 < t \leq a_2$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi b(u) \times F(u, t) du = \int_0^{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}} \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t du \\ &+ \int_{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}}^{\pi} (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u)) du + \int_{\pi}^{\pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}} (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha)) du \\ &+ \int_{\pi + \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}}^{\pi} \frac{2 \sin u \sin(u - \alpha)}{\sin \alpha} t du = 2a_1 + t \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$-(\alpha + \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}) t \cot \alpha + a_1 \sqrt{1 - \frac{a_2^2 \sin^2 \alpha}{t^2}} + a_2 \sqrt{1 - \frac{a_1^2 \sin^2 \alpha}{t^2}}$$

Для случая $a_2 < t \leq d_2$, из (4.4) и (4.7) следует, что $2\alpha - x - \pi \leq \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} + \alpha - \pi < 2\alpha - \pi \leq 0$ и $0 < \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} \leq x$. Следовательно, множество направлений $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - u)} < t\} \cap (0, x]$ совпадает с множеством

$$(0, \alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}) \quad (5.15)$$

Для случая $a_2 < t \leq d_2$, из (4.3) и (4.5) имеем, что $x \leq \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} < \alpha$ и $\alpha < \pi - \alpha < \pi - \arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} \leq \pi - x$. Следовательно, множество $\{u : t_{\max}(u) = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin u} < t\} \cap [x, \alpha)$ совпадает с множеством направлений

$$(\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}, \alpha) \quad (5.16)$$

Для случая $a_2 < t \leq d_2$, используя неравенства (4.20) и (4.21) для максимальной хорды, получаем следующее равенство для множеств

$$\{u : t_{\max}(u) < t\} \cap (\alpha, \pi] = (\alpha, \pi] \quad (5.17)$$

Используя (5.15)-(5.17) интегрируя (4.16), мы получаем явное выражение (4.15) для $a_2 < t \leq d_2$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi b(u) \times F(u, t) du = \int_0^{\alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}} (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u)) du \\ &+ \int_{\alpha - \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t}}^{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}} \frac{2 \sin u \sin(\alpha - u)}{\sin \alpha} t du + \int_{\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t}}^{\alpha} (a_2 \sin u + a_1 \sin(\alpha - u)) du \\ &+ \int_{\alpha}^{\pi} (a_2 \sin u + a_1 \sin(u - \alpha)) du \\ &= 2a_1 + 2a_2 - t - (\arcsin \frac{a_1 \sin \alpha}{t} + \arcsin \frac{a_2 \sin \alpha}{t} - \alpha) t \cot \alpha \end{aligned}$$

$$(5.18) \quad +a_1 \sqrt{1 - \frac{a_2^2 \sin^2 \alpha}{t^2}} + a_2 \sqrt{1 - \frac{a_1^2 \sin^2 \alpha}{t^2}}$$

Таким образом, из (5.1.), (5.5), (5.9), (5.14) и (5.18) получаем выражение функции распределения длины хорды для параллелограмма типа 1.

6. ОСТАЛЬНЫЕ 6 ТИПОВ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Аналогичными рассуждениями, используя (4.1)-(4.23) и следствия 4.1-4.3 получаем выражения функций распределения длины хорды для параллелограммов типов 2-7. Отметим, что функции распределения длины хорды во всех 7 случаях являются непрерывными функциями.

Прямоугольник является параллелограммом типа 7. Подставляя $\alpha = \pi/2$ в выражение для функции распределения длины хорды для параллелограмма типа 7 получаем результат работы [7] для прямоугольника. Ромб - параллелограммы типа 2 или типа 6 (зависит от того, угол в $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Подставляя $a_1 = a_2$ в выражение функции распределения длины хорды типа 2 или типа 6 получаем результат работы [8]. В частности, явный вид функции распределения длины хорды $F_D(t)$ для квадрата можно найти в [11]. Введем обозначения $k_i = \sqrt{1 - \frac{h_i^2}{t^2}}, i = 1, 2$

Для параллелограмма типа 1 получаем

$$\begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), & 0 < t \leq h_1 \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, & h_1 < t \leq d_1 \\ \frac{t}{\partial D} (3 - (3\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, & d_1 < t \leq a_1 \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha + \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, & a_1 < t \leq a_2 \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, & a_2 < t \leq d_2 \\ 1, & t > d_2 \end{cases}$$

Для параллелограмма типа 2 имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{t}{\partial D} (2 - (\pi + 2\alpha - 2 \arcsin \frac{h_1}{t} - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, \\ \frac{t}{\partial D} (3 - (3\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha + \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0 < t \leq h_1 \\ h_1 < t \leq h_2 \\ h_2 < t \leq d_1 \\ d_1 < t \leq a_1 \\ a_1 < t \leq a_2 \\ a_2 < t \leq d_2 \\ t > d_2 \end{array}$$

Для параллелограмма типа 3 окончательно получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha + \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0 < t \leq h_1 \\ h_1 < t \leq a_1 \\ a_1 < t \leq d_1 \\ d_1 < t \leq a_2 \\ a_2 < t \leq d_2 \\ t > d_2 \end{array}$$

Для параллелограмма типа 4 имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{t}{\partial D} (2 - (\pi + 2\alpha - 2 \arcsin \frac{h_1}{t} - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, \\ \frac{2a_1}{\partial D} - \frac{t}{\partial D} (\pi - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha + \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0 < t \leq h_1 \\ h_1 < t \leq h_2 \\ h_2 < t \leq a_1 \\ a_1 < t \leq d_1 \\ d_1 < t \leq a_2 \\ a_2 < t \leq d_2 \\ t > d_2 \end{array}$$

Для параллелограмма типа 5 получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, \\ \frac{2a_1}{\partial D} - \frac{t}{\partial D} (\pi - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha + \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, \\ 1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0 < t \leq h_1 \\ h_1 < t \leq a_1 \\ a_1 < t \leq h_2 \\ h_2 < t \leq d_1 \\ d_1 < t \leq a_2 \\ a_2 < t \leq d_2 \\ t > d_2 \end{array}$$

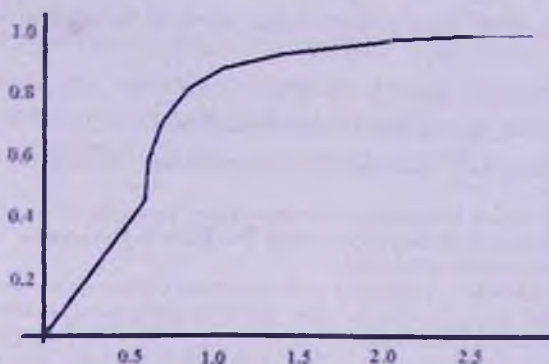


Рис. 2

В случае параллелограмма типа 6 имеем

$$\begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), & 0 < t \leq h_1 \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, & h_1 < t \leq h_2 \\ \frac{t}{\partial D} (2 - (\pi + 2\alpha - 2 \arcsin \frac{h_1}{t} - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, & h_2 < t \leq a_1 \\ \frac{2a_1}{\partial D} - \frac{t}{\partial D} (\pi - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, & a_1 < t \leq a_2 \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, & a_2 < t \leq d_1 \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, & d_1 < t \leq d_2 \\ 1, & t > d_2 \end{cases}$$

В случае параллелограмма типа 7 имеем

$$\begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha), & 0 < t \leq h_1 \\ \frac{t}{\partial D} (2 - 2(\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t}) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, & h_1 < t \leq a_1 \\ \frac{2a_1}{\partial D} + \frac{2a_2}{\partial D} k_1, & a_1 < t \leq h_2 \\ \frac{2a_1}{\partial D} - \frac{t}{\partial D} (\pi - 2 \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, & h_2 < t \leq a_2 \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha) + \frac{2a_2}{\partial D} k_1 + \frac{2a_1}{\partial D} k_2, & a_2 < t \leq d_1 \\ 1 - \frac{t}{\partial D} (1 - (\alpha - \arcsin \frac{h_1}{t} - \arcsin \frac{h_2}{t}) \cot \alpha) + \frac{a_2}{\partial D} k_1 + \frac{a_1}{\partial D} k_2, & d_1 < t \leq d_2 \\ 1, & t > d_2 \end{cases}$$

На рисунке 2 изображен график функции распределения длины хорды параллелограмма типа 3 с параметрами $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\alpha = \pi/5$.

Abstract. In this paper we obtain the explicit forms of the covariogram and the orientation-dependent chord length distribution function for any parallelogram. The

explicit form of the chord length distribution function for a parallelogram is also obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Сактало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, Наука, Москва (1983).
- [2] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).
- [3] W. Nagel, "Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons", Appl. Prob., 30, no. 3, 730 – 736 (1993).
- [4] G. Bianchi, and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body". Journal of the European Mathematical Society 11, 1187 – 1202 (2009).
- [5] G. Matheron, Les variables regionalisees et leur estimation, Masson, Paris (1965).
- [6] R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge University Press, New York, 2nd edition (2008).
- [7] W. Gille, "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases" Exp. Techn. Phys. 36, 197 – 208 (1988).
- [8] H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, "Chord length distribution function for convex polygons", Sutra: International Journal Mathematical Science Education, 4, no. 2, 1 – 15 (2011).
- [9] А. Гаспарян, В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, 48, no. 3, 25 – 42 (2013).
- [10] Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, no. 3, 3 – 24 (2014).
- [11] H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, "The chord length distribution function for regular polygons", Adv. Appl. Prob. (SGSA) 41, 358 – 366 (2009).

Поступила 12 августа 2013

СХОДИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

А. Р. НУРБЕКЯН, А. А. СААКЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: anurbekyan@gmail.com, sart@ysu.am

Аннотация. В статье рассматривается вопрос сходимости частичных сумм двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов. Доказана сходимость по Прингсхейму для функций двух переменных с ограниченной гармонической вариацией.

MSC2010 numbers: 42A15.

Ключевые слова: многомерная тригонометрическая интерполяция; гармоническая вариация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть N – произвольное натуральное число, $t_0 \in T := [-\pi, \pi]$ – произвольное действительное число, и

$$(1.1) \quad h_N = \frac{2\pi}{2N+1}, \quad t_i = t_0 + ih_N, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для 2π -периодической, интегрируемой по Риману на T функции f через $I_N(f, x)$ обозначим единственный тригонометрический полином вида:

$$I_N(f, x) = \frac{a_0^N}{2} + \sum_{\nu=1}^N (a_\nu^N \cos \nu x + b_\nu^N \sin \nu x) = \sum_{\nu=-N}^N c_\nu^N e^{i\nu x},$$

который совпадает с f в точках t_i (см. [1], гл. 10):

$$I_N(f, t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2N.$$

Точки t_i называются фундаментальными или узловыми точками интерполяции. Если обозначить через

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin t/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \left(D_n(2\pi k) = \frac{2n+1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ядро Дирихле, то имеет место следующая формула

$$I_N(f, x) = \frac{2}{2N+1} \sum_{i=0}^{2N} f(t_i) D_N(x - t_i) = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) D_N(x - t) d\omega_{2N+1}(t),$$

где $\omega_{2N+1}(t)$ — непрерывная слева ступенчатая функция, имеющая скачки h_N в точках t_i .

Коэффициенты интерполяционного полинома $I_n(f)$ называются коэффициентами Фурье-Лагранжа и определяются следующими формулами:

$$a_\nu^N = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \cos(\nu t) d\omega_{2N+1}(t), \quad b_\nu^N = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \sin(\nu t) d\omega_{2N+1}(t)$$

и

$$c_\nu^N = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) e^{-i\nu t} d\omega_{2N+1}(t).$$

Частичные суммы интерполяционного полинома имеют вид ($n = 0, 1, \dots, N$):

$$I_N^n(f, x) = \frac{a_0^N}{2} + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu^N \cos \nu x + b_\nu^N \sin \nu x) = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) D_n(x - t) d\omega_{2N+1}(t).$$

Имеет место следующий аналог хорошо известной теоремы Дирихле-Жордана ([1], гл. 2) о сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации.

Теорема 1.1 ([1], гл. X). Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi, \pi]$, тогда $I_N^n(f, x)$ сходится при $n \rightarrow \infty, N > n$ к $f(x)$ в каждой точке $x \in T$, где функция f непрерывна. Сходимость равномерна на каждом отрезке непрерывности функции f .

В работе Д. Ватермана [2] было введено понятие Λ -вариации функции.

Определение 1.1. Пусть $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, такая что ряд $\sum \lambda_n^{-1}$ расходится. Λ -вариацией функции $f(x)$, $x \in I$ на отрезке I вещественной оси называется следующая величина:

$$V_\Lambda(f, I) := \sup \sum \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}.$$

где $\sup$ берется по всем системам $\{I_n\}$ попарно непересекающихся интервалов из I , и $f(\Delta) = f(\beta) - f(\alpha)$ если $\Delta = (\alpha, \beta)$.

Обозначим

$$\Lambda BV = \Lambda BV(I) = \{f : V_\Lambda(f, I) < \infty\}.$$

В частном случае, когда $\lambda_n \equiv n$, класс ΛBV называется классом функций ограниченной гармонической вариации и пишется $V_H(f, I)$ и HBV вместо $V_\Lambda(f, I)$ и ΛBV соответственно.

Теорема 1.1 была обобщена Д. Ватерманом и Х. Ксингом [3] для класса функций с ограниченной гармонической вариацией.

Теорема 1.2 ([3]). Если функция f имеет ограниченное гармоническое изменение, тогда $I_n^\lambda(x, f)$ стремятся к $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f . Сходимость равномерна на каждом отрезке непрерывности функции f .

В двумерном случае сходимость по Прингсхейму рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации была доказана А. Саакяном в [4], где приведены определение и основные свойства гармонической вариации в двумерном случае.

Определение 1.2. Пусть $f(x, y)$ 2π -периодическая функция по каждой переменной. Для интервалов $I = (a, b)$, $\Delta = (\alpha, \beta)$ положим

$$V_{x,y}(f; I \times \Delta) = \sup \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{nk},$$

где $\sup$ берется по всем системам $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ и $\{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ попарно непересекающихся интервалов из I и Δ соответственно, и

$$(1.2) \quad f(I, \Delta) := f(a, \alpha) - f(a, \beta) - f(b, \alpha) + f(b, \beta).$$

Двумерная гармоническая вариация функции f на прямоугольнике $I \times \Delta$ определяется следующим образом:

$$V_H(f, I \times \Delta) := V_{x,y}(f; I \times \Delta) + \sup_{y_0 \in \Delta} V_x(f(x, y_0), I) + \sup_{x_0 \in I} V_y(f(x_0, y), \Delta),$$

где V_x и V_y — одномерные гармонические вариации относительно переменных x и y соответственно. Класс функций ограниченной гармонической вариации на прямоугольнике $I \times \Delta$ обозначают через $HBV = HBV(I \times \Delta)$.

В данной статье доказывается следующая теорема о сходимости частичных сумм тригонометрических интерполяционных полиномов для функций двух переменных с ограниченной гармонической вариацией.

Пусть узлы t_i определены как в (1.1), и

$$(1.3) \quad s_j = s_j^M = s_0 + \frac{2\pi j}{2M+1}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где M – натуральное число, и $s_0 \in T$. Для заданной функции $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 2π -периодической по каждой переменной, существует единственный тригонометрический полином

$$I_{N,M}(f, x, y) = \sum_{\nu=-N}^N \sum_{\mu=-M}^M c_{\nu,\mu}^{N,M} e^{i\nu x} e^{i\mu y},$$

который совпадает с f в точках (t_i, s_j) :

$$I_{N,M}(f, t_i, s_j) = f(t_i, s_j), \quad i = 0, 1, \dots, 2N, \quad j = 0, 1, \dots, 2M.$$

Частичные суммы этого полинома имеют вид ($n = 0, 1, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, M$):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} I_{N,M}^{n,m}(f, x) &= \sum_{\nu=-n}^n \sum_{\mu=-m}^m c_{\nu,\mu}^{N,M} e^{i\nu x} e^{i\mu y} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(t, s) D_n(x-t) D_m(y-s) d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(x+t, y+s) D_n(t) D_m(s) d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s), \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega}_{2N+1}(t) = \omega_{2N+1}(x+t)$, $\tilde{\omega}_{2M+1}(s) = \omega_{2M+1}(y+s)$ Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.3. Пусть функция $f \in HBV(T^2)$ интегрируема по Риману. Тогда в каждой точке $(x, y) \in T^2$, где существуют пределы по квадрантам $f(x \pm 0, y \pm 0)$, имеет место следующее равенство

$$(1.5) \quad \lim_{n,m \rightarrow \infty} I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0) \quad (N > n, M > m),$$

при условии, что отношения N/n и M/m равномерно ограничены. Если f непрерывна на открытом множестве $E \in T^2$, то сходимость равномерна на любом компакте $K \subset E$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем мы через C обозначим абсолютные постоянные, которые могут быть разными в разных формулах.

Лемма 2.1. Пусть для натурального N и $t_0 \in T$, точки t_i определены в (1.1), и $1 \leq n \leq N$. Тогда,

$$\left| \sum_{i=j}^k \sin nt_i \right| \leq \frac{\pi}{nh_N}, \quad 1 \leq j < k \leq 2N.$$

Для доказательства леммы достаточно умножить обе стороны неравенства на $\sin \frac{nh_N}{2}$ и использовать неравенство $\sin t > \frac{2}{\pi}t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$).

Лемма 2.2. Если $g \in HBV([a, b])$, $[a, b] \subset T$, тогда

$$(2.1) \quad \int_a^b g(t) \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) \leq C \cdot \frac{N}{n} (V_H(g, [a, b]) + \|g\|_{C([a, b])}).$$

Доказательство. Обозначим $\{m_1, m_1 + 1, \dots, m_2\} := \{i \in N : t_i \in [a, b]\}$. Без ограничения общности можем считать, что $[a, b] \subset [0, \pi]$, и что $t_{m_1} \geq 0$ (полагаем $\frac{\sin nt}{t} = n$, если $t = 0$). Применив преобразование Абеля, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) \right| &= \left| \sum_{k=m_1}^{m_2} g(t_k) \frac{\sin nt_k}{t_k} h_N \right| \leq \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2} g(t_k) \frac{\sin nt_k}{t_k} h_N \right| \\ &+ \left| g(t_{m_1}) \frac{\sin nt_{m_1}}{t_{m_1}} h_N \right| \leq h_N \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} \left[\frac{g(t_k)}{t_k} - \frac{g(t_{k+1})}{t_{k+1}} \right] \sum_{j=m_1+1}^k \sin nt_j \right| \\ &+ h_N \left| \frac{g(t_{m_2})}{t_{m_2}} \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \sin nt_j \right| + h_N \left| g(t_{m_1}) \frac{\sin nt_{m_1}}{t_{m_1}} \right| \end{aligned}$$

Обозначив последние слагаемые через I_1, I_2, I_3 , с учетом леммы 2.1 будем иметь, что

$$I_3 \leq h_N \|g\|_{C([a, b])} n = \frac{2\pi}{2N+1} \|g\|_{\infty} n \leq 2\pi \|g\|_{C([a, b])}.$$

$$I_2 \leq h_N \frac{\|g\|_{C([a, b])}}{t_{m_2}} \frac{\pi}{nh_N} \leq \frac{\|g\|_{C([a, b])}}{h_N} \frac{\pi}{n} = \frac{2N+1}{2n} \|g\|_{C([a, b])}.$$

$$\begin{aligned} (2.2) \leq & h_N \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} \frac{g(t_k) - g(t_{k+1})}{t_k} \sum_{j=m_1+1}^k \sin nt_j \right| \\ &+ h_N \left| \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} g(t_{k+1}) \left[\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}} \right] \sum_{j=m_1+1}^k \sin nt_j \right| \leq Ch_N V_H(g, [a, b]) \frac{N}{nh_N} \\ &+ h_N \|g\|_{C([a, b])} \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} \left[\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}} \right] \frac{\pi}{nh_N} \leq C \cdot \frac{N}{n} (V_H(g, [a, b]) + \|g\|_{C([a, b])}). \end{aligned}$$

Суммируя неравенства (2.2), получим (2.1). □

Лемма 2.3. Пусть $f(x, y), g(x, y) \in HBV(T^2)$ и на каждом прямоугольнике решетки функция g зависит только от x или от y . Тогда

$$\left| \int_{T^2} f(x+t, y+s) g(t, s) \frac{\sin nt}{t} e^{ims} d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) \right| \leq \frac{N}{n} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{C(f, g)}{\ln M}$$

для любых $x, y \in T$, $1 \leq n \leq N$, $1 \leq m \leq M$.

Доказательство. Обозначим

$$F(t, s) = f(x+t, y+s) g(t, s), \quad \varphi(s) = \int_T F(t, s) \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t).$$

Согласно теореме 2 из [3], имеем, что

$$\int_T \varphi(s) e^{ims} d\omega_{2M+1}(s) \leq \frac{2M+1}{2m} \frac{1}{\ln M} V_H(\varphi, T):$$

Для получения оценки гармонического изменения $V_H(\varphi, T)$ рассмотрим вариационную сумму φ на интервалах $\{\Delta_k\}_1^{k_0} = (\alpha_k, \beta_k)_1^{k_0}$.

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} [\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)] = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} \int_T [F(t, \beta_k) - F(t, \alpha_k)] \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) = \\ &= \int_T \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} [F(t, \beta_k) - F(t, \alpha_k)] \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) = \int_T \psi(t) \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon_k}{k} [F(t, \beta_k) - F(t, \alpha_k)], \quad \varepsilon_k = \pm 1.$$

Из леммы 2.2 вытекает

$$|I| = \left| \int_T \psi(t) \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) \right| \leq C \frac{2N+1}{2n} (V_H(\psi, T) + \|\psi\|_\infty).$$

Повторяя оценки из доказательства леммы 2.1 из [4], получим:

$$|I| \leq \frac{2N+1}{2n} C(f, g),$$

что и завершает доказательство леммы 2.3. □

Лемма 2.4. Для произвольной функции $f \in HBV(T^2)$ и $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение:

$$I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \cdot \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 равномерно на квадрате T^2 , когда $n, m \rightarrow \infty$ так, что отношения $\frac{N}{n}$ и $\frac{M}{m}$ равномерно ограничены.

Доказательство. Запишем ядро Дирихле $D_n(t)$ в следующем виде:

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

где

$$g(t) = \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \leq \pi, \quad g(0) = 0.$$

Согласно (1.4), имеем, что

$$\begin{aligned} \pi^2 I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \cdot \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \cdot \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &+ \int_{\varepsilon \leq |s| \leq \pi} \int_{|t| \leq \varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \left[g(s) \sin ms + \frac{1}{2} \cos ms \right] d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin ms}{s} \left[g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt \right] d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \left[g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt \right] \\ &\quad \times \left[g(s) \sin ms + \frac{1}{2} \cos ms \right] d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) + \sum_{p=1}^5 I_{N,M}^{n,m,p}(x, y). \end{aligned}$$

Докажем, что в условиях леммы,

$$(2.3) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} I_{N,M}^{n,m,p}(x, y) = 0, \quad p = 1, 2, 3, 4, 5$$

равномерно по $(x, y) \in T^2$, $N > n$, $M > m$. В случаях $p = 1, 2, 3, 4$ это следует из леммы 2.3 при соответствующем выборе функции $g(t, s)$. При $p = 5$ соотношение (2.3) вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Пусть $f \in R([-\pi, \pi]^2)$, а функция g ограничена. В этом случае коэффициенты Фурье-Лагранжа функции $F(t, s) = f(x+t, y+s)g(t, s)$ равномерно по $x, y \in [-\pi, \pi]^2$ сходятся к 0, когда $n, m \rightarrow \infty$.

Утверждение вытекает из того факта, что при его условиях функции $F(t, s)$ равномерно R интегрируемы по $x, y \in [-\pi, \pi]^2$. Определение понятия равномерно R интегрируемости и доказательство сходимости коэффициентов в одномерном случае даны в [1], гл. 10. В двумерном случае все суждения остаются неизменными. $\square$

Следующая лемма была доказана в [4].

Лемма 2.5. Пусть $f \in HBV(D)$, $D = I \times \Delta \subset T^2$.

а) Если в точке $(x, y) \in D$ существует предел $f(x+0, y+0)$, тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_H(f, (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = 0.$$

б) Если функция f непрерывна на открытом множестве $E \subset D$, то для любого компакта $K \subset E$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_H(f, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)) = 0.$$

равномерно по $(x, y) \in K$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

В силу лемм 2.4 и 2.5 достаточно доказать (для остальных трех квадрантов доказательства аналогичны), что для любых $(x, y) \in T^2$, $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, если

$$n \leq N \leq Ln, \quad m \leq M \leq Lm,$$

то

$$(3.1) \quad |I| := \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\tilde{\omega}_{2N+1}(t) d\tilde{\omega}_{2M+1}(s) - \frac{1}{4} f(x+0, y+0) \right| \leq B \cdot V_H(f, (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)),$$

где B — постоянная, зависящая только от L .

Пусть n, N, m, M и $(x, y) \in T^2$ фиксированы. Без ограничения общности можем считать, что

$$x = y = 0, \quad -h_N \leq t_0 < 0, \quad -h_M \leq s_0 < 0, \quad h_n, h_m \in (0, \varepsilon),$$

где t_0 и s_0 — точки из (1.1) и (1.3).

Положим

$$p_1 = \left[\frac{h_n}{h_N} \right], \quad q_1 = \left[\frac{\varepsilon}{p_1 h_N} \right], \quad p_2 = \left[\frac{h_m}{h_M} \right], \quad q_2 = \left[\frac{\varepsilon}{p_2 h_M} \right],$$

где $[a]$ — целая часть числа a . Обозначим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau_i^j &= t_0 + (jp_1 + i)h_N, \quad i = 1, 2, \dots, p_1, \quad j = 0, 1, \dots \\ \sigma_k^l &= s_0 + (lp_2 + k)h_M, \quad k = 1, 2, \dots, p_2, \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Теперь, обозначив $\phi(t, s) = f(t, s) - f(0 + 0, 0 + 0)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \pi^2 I &= \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) + o(1) \\ &= \int_0^{h_n} \int_0^{h_n} + \int_{h_n}^\varepsilon \int_0^{h_n} + \int_0^{h_n} \int_{h_n}^\varepsilon + \int_{q_2 p_2 h_M}^\varepsilon \int_{h_n}^\varepsilon \\ &\quad + \int_{h_n}^{q_2 p_2 h_M} \int_{q_1 p_1 h_N}^\varepsilon + \int_{h_n}^{q_2 p_2 h_M} \int_{h_n}^{q_1 p_1 h_N} + o(1) = \sum_{k=1}^6 I_k + o(1). \end{aligned}$$

Отдельно оценим каждый из интегралов I_k . Имеем:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left(\frac{h_n}{h_N} + 1 \right) \left(\frac{h_m}{h_M} + 1 \right) \sup_{0 \leq t \leq h_n, 0 \leq s \leq h_m} |\phi(t, s)| n m h_N h_M \\ &\leq C \sup_{0 \leq t \leq h_n, 0 \leq s \leq h_m} |\phi(t, s)| \leq C \cdot V_H(f, (0, \varepsilon)^2). \end{aligned}$$

Далее, из леммы 2.2 вытекает

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \int_0^{h_n} \frac{2M+1}{2m} \left[V_s(\phi(t, s), (0, \varepsilon)) + \sup_{s \in (0, \varepsilon)} |\phi(t, s)| \right] \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) \\ &\leq B \left(\frac{h_n}{h_N} + 1 \right) V_H(f, (0, \varepsilon)^2) n h_N \leq B \cdot V_H(f, (0, \varepsilon)^2). \end{aligned}$$

При $k = 3, 4, 5$ интегралы I_k оцениваются аналогично. Остается оценить I_6 . Имеем:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{h_n}^{q_2 p_2 h_M} \int_{h_n}^{q_1 p_1 h_N} \phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) \\ (3.3) \quad &= h_N h_M \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{k=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{q_1-1} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} \sin n \tau_i^j \sin m \sigma_k^l. \end{aligned}$$

Для фиксированных i, k оценим следующую сумму

$$(3.4) \quad J := \sum_{j=1}^{q_1-1} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} \sin n \tau_i^j \sin m \sigma_k^l.$$

Обозначим

$$Q_i^j = \sum_{r=1}^j \sin n \tau_i^r, \quad P_k^l = \sum_{r=1}^l \sin m \sigma_k^r.$$

Используя преобразование Абеля получим

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{j=1}^{q_1-1} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} \sin n\tau_i^j \sin m\sigma_k^l = \sum_{j=1}^{q_1-1} \frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\sigma_k^l} \sin m\sigma_k^l \\
 &= \sum_{j=1}^{q_1-1} \frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j} \sum_{l=1}^{q_2-2} \left[\frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^{l+1}} \right] P_k^l + \sum_{j=1}^{q_1-1} \frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{q_2-1})}{\sigma_k^{q_2-1}} P_k^{q_2-1} \\
 &= \sum_{l=1}^{q_2-2} P_k^l \sum_{j=1}^{q_1-1} \left[\frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j \sigma_k^{l+1}} \right] \sin n\tau_i^j + P_k^{q_2-1} \sum_{j=1}^{q_1-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^j \sigma_k^{q_2-1}} \sin n\tau_i^j \\
 (3.5) \quad &= \sum_{l=1}^{q_2-2} P_k^l \sum_{j=1}^{q_1-2} \left[\frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j \sigma_k^{l+1}} - \frac{\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^l)}{\tau_i^{j+1} \sigma_k^l} + \frac{\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{j+1} \sigma_k^{l+1}} \right] Q_i^j \\
 &+ \sum_{l=1}^{q_2-2} P_k^l \left[\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^l)}{\tau_i^{q_1-1} \sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{q_1-1} \sigma_k^{l+1}} \right] Q_i^{q_1-1} \\
 &+ P_k^{q_2-1} \sum_{j=1}^{q_1-2} \left[\frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^j \sigma_k^{q_2-1}} - \frac{\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{j+1} \sigma_k^{q_2-1}} \right] Q_i^j + P_k^{q_2-1} Q_i^{q_1-1} \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{q_1-1} \sigma_k^{q_2-1}} \\
 &=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
 \end{aligned}$$

Начнем с оценки J_1 .

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{l=1}^{q_2-2} \sum_{j=1}^{q_1-2} \left[\frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j \sigma_k^{l+1}} - \frac{\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^l)}{\tau_i^{j+1} \sigma_k^l} + \frac{\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{j+1} \sigma_k^{l+1}} \right] Q_i^j P_k^l \\
 (3.6) \quad &= \sum_{l=1}^{q_2-2} \sum_{j=1}^{q_1-2} \left[\frac{\Delta_{12}\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} - \frac{\Delta_1\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})p_2h_M}{\tau_i^j \sigma_k^l \sigma_k^{l+1}} - \frac{\Delta_2\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^l)p_1h_N}{\tau_i^j \tau_i^{j+1} \sigma_k^l} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p_1h_N p_2h_M \phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j \tau_i^{j+1} \sigma_k^l \sigma_k^{l+1}} \right] Q_i^j P_k^l =: K_1 + K_2 + K_3 + K_4,
 \end{aligned}$$

где (см (1.2))

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12}\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l) &= \phi((\tau_i^j, \tau_i^{j+1}), (\sigma_k^l, \sigma_k^{l+1})), \\
 \Delta_1\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1}) &= \phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{l+1}) - \phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1}), \\
 \Delta_2\phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^l) &= \phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^{l+1}) - \phi(\tau_i^{j+1}, \sigma_k^l).
 \end{aligned}$$

Учитывая неравенства (см. (3.2) и [3], стр 551)

$$\tau_i^j \geq jp_1h_N, \quad \sigma_k^l \geq lp_2h_M, \quad |Q_i^j| < 2, \quad |P_k^l| < 2,$$

будем иметь:

$$(3.7) \quad |K_1| \leq \frac{4}{p_1h_N p_2h_M} \sum_{l=1}^{q_2-2} \sum_{j=1}^{q_1-2} \frac{|\Delta_{12}\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)|}{j^l} \leq \frac{C}{p_1h_N p_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).$$

и

$$\begin{aligned}
 |K_2| &\leq \sum_{l=1}^{q_2-2} \sum_{j=1}^{q_1-2} \frac{4}{l(l+1)p_2h_Mp_1h_N} \frac{|\Delta_1\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})|}{j} \\
 (3.8) \quad &= \frac{4}{p_2h_Mp_1h_N} \sum_{l=1}^{q_2-2} \frac{1}{l(l+1)} \sum_{j=1}^{q_1-2} \frac{|\Delta_1\phi(\tau_i^j, \sigma_k^{l+1})|}{j} \\
 &\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M} V_H(\phi, [0, \varepsilon]^2) \sum_{l=1}^{q_2-2} \frac{1}{l(l+1)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad |K_3| &\leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, [0, \varepsilon]^2), \\
 |K_4| &\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M} \sum_{l=1}^{q_2-2} \sum_{j=1}^{q_1-2} \frac{\|\phi\|_{C((0, \varepsilon)^2)}}{j(j+1)l(l+1)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
 \end{aligned}$$

Из соотношений (3.6) – (3.9) находим, что

$$(3.10) \quad |J_1| \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).$$

Оценим J_2 .

$$\begin{aligned}
 |J_2| &\leq \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}} \sum_{l=1}^{q_2-2} \left| \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^l)}{\sigma_k^l} - \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^{l+1}} \right| |P_k^l| \\
 &\leq \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}} \sum_{l=1}^{q_2-2} \left| \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^l) - \phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^l} \right| |P_k^l| \\
 (3.11) \quad &+ \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}} \sum_{l=1}^{q_2-2} \phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{l+1}) \left[\frac{1}{\sigma_k^l} - \frac{1}{\sigma_k^{l+1}} \right] |P_k^l| \\
 &\leq \frac{C}{(q_1-1)p_1h_Np_2h_M} \sum_{l=1}^{q_2-2} \left| \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^l) - \phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{l+1})}{l} \right| \\
 &+ \frac{C}{(q_1-1)p_1h_N} \|\phi\|_{C((0, \varepsilon)^2)} \sum_{l=1}^{q_2-2} \left[\frac{1}{\sigma_k^l} - \frac{1}{\sigma_k^{l+1}} \right] \\
 &\leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} [V_H(\phi, [0, \varepsilon]^2) + \|\phi\|_{C((0, \varepsilon)^2)}] \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
 \end{aligned}$$

Величина J_3 оценивается аналогично, а для J_4 имеем:

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad |J_4| &= \left| P_k^{q_2-1} Q_i^{q_1-1} \frac{\phi(\tau_i^{q_1-1}, \sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{q_1-1} \sigma_k^{q_2-1}} \right| \\
 &\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M} \|\phi\|_{C((0, \varepsilon)^2)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
 \end{aligned}$$

Из (3.5) и (3.10) – (3.12) находим, что

$$(3.13) \quad |J| \leq \frac{C}{p_1 h_N p_2 h_M} V_H(f, (0, \varepsilon)^2),$$

что вместе с (3.3) и (3.4) доказывает, что

$$I_0 \leq C \cdot V_H(f, (0, \varepsilon)^2).$$

Как отмечалось выше, отсюда следует неравенство (3.1). Теорема 1.3 доказана.

Abstract. The paper considers a question of convergence of partial sums of two-dimensional trigonometric interpolation polynomials. Convergence by Pringsheim for functions of two variables with bounded harmonic variation is established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ч.2., Москва, Мир (1965).
- [2] D. Waterman, On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation, *Studia Math.*, 44, no. 1, 107 – 117 (1972).
- [3] D. Waterman, H. Xing, "The convergence of partial sums of interpolating polynomials", *J. Math. Anal. Appl.*, 333, 543 – 555 (2007).
- [4] А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", *Изв. АН АрмССР. Матем.*, 22, no. 6, 517 – 529, (1987).

Поступила 12 октября 2013

ON A CLASS OF ELLIPTIC SYSTEMS INVOLVING THE $p(x)$ -LAPLACIAN AND NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

S. H. RASOULI AND K. FALLAH

Babol University of Technology, Babol, Iran

E-mail: s.h.rasouli@nit.ac.ir

Abstract. In this paper we study an elliptic system involving the $p(x)$ -Laplacian and nonlinear boundary conditions. We prove that there exist at least two positive solutions by using the Nehari manifold and the fibering maps associated with the energy functional.

MSC2010 numbers: 35J05; 35J66

Keywords: Elliptic system; Nehari manifold; weight function.

1. INTRODUCTION

We are concerned with the existence and multiplicity of nontrivial nonnegative solutions of the following problem:

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta(x)} f(x) |u|^{\alpha(x)-2} |v|^{\beta(x)} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_{p(x)} v = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)-2} & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda g(x) |u|^{q(x)-2} u, \\ |\nabla v|^{p(x)-2} \frac{\partial v}{\partial n} = \mu h(x) |v|^{q(x)-2} v & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) is a bounded domain; p, q, α and β belong to $C(\overline{\Omega})$ and satisfy: $1 < q(x) < p(x) < \alpha(x) + \beta(x) < p^*(x)$ ($p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ if $N > p(x)$, $p^*(x) = \infty$ if $N \leq p(x)$), $1 < p^- := \text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ := \text{ess sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty$, $1 < q^- \leq q^+ < p^- \leq p^+ < \alpha^+ + \beta^- < \alpha^+ + \beta^+$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, and the weight functions f, g, h satisfy the following conditions:

(A) $f \in C(\overline{\Omega})$ with $\|f\|_\infty = 1$ and $f^+ = \max\{f, 0\} \not\equiv 0$;

(B) $g, h \in C(\partial\Omega)$ with $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty = 1$, $g^\pm = \max\{\pm g, 0\} \not\equiv 0$ and $h^\pm = \max\{\pm h, 0\} \not\equiv 0$.

The main interest in studying such problems is motivated by the presence of the $p(x)$ -Laplace operator, $\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ in (1.1). This is a generalization of the classical p -Laplace operator $\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, obtained in the case when p is a

positive constant. We point out that problems involving elliptic equations with $p(x)$ -Laplace operators are not trivial generalizations of the similar problems, studied in the constant case, since the $p(x)$ -Laplace operator is not homogeneous, and thus, some techniques, such as the Lagrange multiplier theorem, used in the classical case are no longer applicable in the general setting involving $p(x)$ -Laplace operators. On the other hand, stimulated by the development of the study of elastic mechanics, interest in variational problems and differential equations with $p(x)$ -growth conditions has grown in recent decades (see, e.g., [3, 4, 8]), and systematic discussion of the spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$ becomes necessary. Also, note that the study of Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and Sobolev spaces $W^{1,p(x)}$ has been a subject of active research area (see, e.g., [7, 9]).

In a recent paper [1], Brown and Wu considered the corresponding semilinear elliptic system. They showed that the above problem has at least two nonnegative solutions if the pair (λ, μ) belongs to a certain subset of $\mathbb{R}^2$. In [10], the authors extended the results of [1], to the corresponding p -Laplacian system. The main purpose of this paper is to develop the approach used in [10], and to extend the results obtained in [10] to the case of $p(x)$ -Laplacian with multiple parameters. This extension is nontrivial and requires more detailed analysis of the nonlinearity and an application of the variational methods under certain conditions.

2. NOTATIONS AND PRELIMINARIES

In this section we discuss some basic properties of the Sobolev spaces $W^{1,p(x)}(\Omega)$, which will be used later (for details we refer to [5, 7, 9]). Denote by $S(\Omega)$ the set of all measurable real-valued functions defined on Ω . Two functions from $S(\Omega)$ will be identified, when they are equal almost everywhere. We set

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{h : h \in C(\bar{\Omega}), h(x) > 1 \text{ for any } x \in \bar{\Omega}\},$$

$$h^- := \min_{\bar{\Omega}} h(x), \quad h^+ := \max_{\bar{\Omega}} h(x) \quad \text{for every } h \in C_+(\bar{\Omega}),$$

and define

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega) : \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \text{ for } p \in C_-(\bar{\Omega})\},$$

with the norm

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \int_{\Omega} |\frac{u(x)}{\lambda}|^{p(x)} dx \leq 1\},$$

and $W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$,

with the norm $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} + |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$. Observe that $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$ are separable and reflexive Banach spaces (see [7]).

Setting $\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{L^{p(x)}(\Omega)} dx$, for any $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, we can write

$$(2.1) \quad |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \lambda \Leftrightarrow \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$$

$$(2.2) \quad |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1 \Rightarrow |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^- \leq \rho(u) \leq |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^+$$

$$(2.3) \quad |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \Rightarrow |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^+ \leq \rho(u) \leq |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^-.$$

With $\rho(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$, we have similar to (2.1)-(2.3) relations with $\|u\|$ instead of $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.

In the spaces $W^{1,p(x)}(\Omega)$ the Poincaré inequality holds, that is, there exists a positive constant C_0 such that

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C_0 |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

implying that $|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ is a norm equivalent to the norm $\|u\|$ in the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Later we will use this equivalence, and for simplicity, we will write $\|u\|_p = |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.

The embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ is compact and continuous ($p^* = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ if $p(x) \leq N$ and is $p^* = \infty$ if $p(x) > N$) (see [7]).

If $q \in C_+(\bar{\Omega})$ and $q(x) < p^*(x)$ for any $x \in \bar{\Omega}$, then there exists a compact embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ for $1 \leq q(x) \leq p^\theta$, where p^θ is $\frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}$, when $p(x) < N$, and is ∞ , when $p(x) > N$ (see [5]).

3. THE MAIN RESULTS

Let $W^{1,p(x)} = W^{1,p(x)}(\Omega)$ be the usual Sobolev space. In the Banach space $W = W^{1,p(x)}(\Omega) \times W^{1,p(x)}(\Omega)$ we introduce the norm

$$\|(u, v)\|_W = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p(x)}},$$

and for $(u, v) \in W$ denote by $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u)$ the energy functional associated with problem (1.1), defined by the formula:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u, v) := & \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ & - \frac{1}{\alpha(x) + \beta(x)} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - \frac{1}{q(x)} K_{\lambda,\mu}(u, v), \end{aligned}$$

where

$$K_{\lambda,\mu}(u, v) = \lambda \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q(x)} ds + \mu \int_{\partial\Omega} h(x)|v|^{q(x)} ds.$$

Denote by $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega)$ the Nehari manifold, defined by

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega) := \{(u, v) \in W \setminus \{(0, 0)\} : \langle \mathcal{J}'_{\lambda,\mu}(u, v), (u, v) \rangle = 0\}.$$

The energy functional $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ is not bounded below on the whole space W , implying that $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega)$ if and only if

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v) &= \langle \mathcal{J}'_{\lambda,\mu}(u, v), (u, v) \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f(x)|u|^{\alpha(x)}|v|^{\beta(x)} dx - K_{\lambda,\mu}(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Therefore for $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega)$ we have

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \langle \mathcal{J}'(u, v), (u, v) \rangle &= \int_{\Omega} p(x)(|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\alpha(x) + \beta(x))f(x)|u|^{\alpha(x)}|v|^{\beta(x)} dx - q(x)K_{\lambda,\mu}(u, v) \leq \\ &\leq (p^+ - (\alpha^- + \beta^-)) \int_{\Omega} f(x)|u|^{\alpha(x)}|v|^{\beta(x)} dx + (p^+ - q^-)K_{\lambda,\mu}(u, v). \end{aligned}$$

We split $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ into three parts:

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+ = \{(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega) : \langle \mathcal{J}'(u, v), (u, v) \rangle > 0\},$$

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^0 = \{(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega) : \langle \mathcal{J}'(u, v), (u, v) \rangle = 0\}.$$

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^- = \{(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega) : \langle \mathcal{J}'(u, v), (u, v) \rangle < 0\}.$$

Let $C_0 = (\frac{q^+}{p^-})^{\frac{p^+}{(p^+ - \alpha^+ - \beta^+)}}$ $C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S})$ be a positive number, where

$$C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S}) = (\frac{\alpha^+ + \beta^+ - q^+}{p^- - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+})^{\frac{p^+}{(p^+ - \alpha^+ - \beta^+)}} (\frac{\alpha^- + \beta^- - p^+}{\alpha^- + \beta^- - q^-} \bar{S}^{-q^+})^{\frac{p^-}{p^- - q^+}}.$$

Theorem 3.1. *If the parameters λ and μ satisfy $0 < |\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C_0$, then the problem (1.1) has at least two solutions (u_0^+, v_0^+) and (u_0^-, v_0^-) such that $u_0^\pm \geq 0, v_0^\pm \geq 0$ in Ω and $u_0^\pm \neq 0, v_0^\pm \neq 0$. And, if $f \geq 0$, then $u_0^\pm > 0, v_0^\pm > 0$ in Ω .*

Lemma 3.1. *The energy functional $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ is coercive and bounded below on $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega)$.*

Proof. Let $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}(\Omega)$ and $\|(u, v)\|_W > 1$. By the Sobolev embedding theorem we have

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u, v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha(x) + \beta(x)} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - \\ &- \frac{1}{q(x)} K_{\lambda, \mu}(u, v) \geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - \frac{1}{q^-} K_{\lambda, \mu}(u, v) \\ &- \frac{1}{\alpha^- + \beta^-} \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - K_{\lambda, \mu}(u, v) \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\alpha^- + \beta^-} \right) \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &+ \left(\frac{1}{\alpha^- + \beta^-} - \frac{1}{q^-} \right) K_{\lambda, \mu}(u, v) \geq \left(\frac{\alpha^- + \beta^- - p^+}{(\alpha^- + \beta^-) p^+} \right) \|(u, v)\|_W^{p^-} - \\ &- \bar{S}^{q^+} \left(\frac{\alpha^- + \beta^- - q^-}{(\alpha^- + \beta^-) q^-} \right) (|\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + c_{12} |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}}) \|(u, v)\|_W^{q^+}. \end{aligned}$$

Since $p^- > q^+$, we have $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u, v) \rightarrow \infty$ as $\|(u, v)\|_W \rightarrow \infty$, implying that $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u, v)$ is coercive and bounded below on $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}(\Omega)$.

Lemma 3.2. If $0 < |\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S})$, then $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0(\Omega) = \emptyset$.

Proof. Assume the opposite, that is, $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0(\Omega) \neq \emptyset$. Let $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0(\Omega)$ be such that $\|(u, v)\|_W > 1$. Then for $0 < |\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S})$ we can write

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathcal{J}'_{\lambda, \mu}(u, v), (u, v) \rangle &= \int_{\Omega} p(x) (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - \\ &- (\alpha(x) + \beta(x)) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - q(x) K_{\lambda, \mu}(u, v) \\ &\geq p^- \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &- q^+ \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx \right) \\ &- (\alpha^+ + \beta^+) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx \\ &\geq (p^- - q^+) \int_{\Omega} p(x) (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &+ (q^+ - (\alpha^+ + \beta^+)) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx. \end{aligned}$$

Therefore

$$0 \geq (p^- - q^+) \|(u, v)\|_W^{p^-} + c_{10} (q^+ - (\alpha^+ + \beta^+)) S^{\alpha^+ + \beta^+} \|(u, v)\|_W^{\alpha^+ + \beta^+},$$

implying

$$(3.2) \quad \|(u, v)\|_W \geq c_{14} \left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{1}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}}.$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{J}'_{\lambda, \mu}(u, v), (u, v) \rangle \\ &\leq p^+ \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - (\alpha^- + \beta^-) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - q^- K_{\lambda, \mu}(u, v) \\ &\leq p^+ \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - (\alpha^- + \beta^-) \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - K_{\lambda, \mu}(u, v) \right) \\ &\quad - q^- K_{\lambda, \mu}(u, v). \end{aligned}$$

Therefore

$$0 \leq (p^+ - (\alpha + \beta)) \|(u, v)\|_W^p + (\alpha^- + \beta^- - q^-) K_{\lambda, \mu}(u, v),$$

implying

$$(3.3) \quad \|(u, v)\|_W \leq c_{15} \left(\frac{\alpha^- + \beta^- - q^-}{\alpha^- + \beta^- - p^+} \right)^{\frac{1}{p^- - q^+}} \bar{S}^{\frac{q^+}{p^- - q^+}} (|\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}}).$$

From (3.2) and (3.3) we get $\|(u, v)\|_W < 1$ and $|\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} \geq C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S})$. The obtained contradiction implies that $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0(\Omega) = \emptyset$.

Lemma 3.3. Suppose that (u_0, v_0) is a local minimizer for $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}$ on $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}(\Omega)$, and that $(u_0, v_0) \notin \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0(\Omega)$. Then $\mathcal{J}'_{\lambda, \mu}(u_0, v_0) = 0$ in $W^{-1, p}$.

Proof. The result can be obtained by the arguments similar to that of used in Brown and Zhang [2], and so is omitted.

Lemma 3.4. We have

- if $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+$, then $K_{\lambda, \mu}(u, v) > 0$;
- if $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^0$, then $K_{\lambda, \mu}(u, v) > 0$ and $\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx > 0$;
- if $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^-$, then $\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx > 0$.

Proof. The proof is an immediate consequence of $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}$ and (3.3).

We write $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}(\Omega) = \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+(\Omega) \cup \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^-(\Omega)$, and define

$$\theta_{\lambda, \mu}^+ = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+(\Omega)} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u, v), \quad \theta_{\lambda, \mu}^- = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^-(\Omega)} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u, v).$$

Theorem 3.2. If $0 < |\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C_0$, then

- (i) $\theta_{\lambda,\mu}^+ < 0$;
- (ii) $\theta_{\lambda,\mu}^- > d_0$ for some $d_0 = d_0(\alpha, \beta, q, \bar{S}, S, \lambda, \mu) > 0$.

Proof. (i) Let $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$. From (3.2) we have

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \theta_{\lambda,\mu}(u, v) &\leq \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^+ + \beta^+} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - \frac{1}{q^+} K_{\lambda,\mu}(u, v). \end{aligned}$$

Since $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+(\Omega)$, we can write

$$(3.5) \quad p^+ \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx - (\alpha^- + \beta^-) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx - q^- K_{\lambda,\mu}(u, v) > 0.$$

Next, by (3.4) we have

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx < \frac{p^+ - q^-}{\alpha^- + \beta^- - q^-} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx,$$

and by (3.5) we can write

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \theta_{\lambda,\mu}(u, v) &\leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{q^+} \right) \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)}) dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{q^+} - \frac{1}{\alpha^+ + \beta^+} \right) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx. \end{aligned}$$

It follows from (3.6) and (3.7) that

$$\theta_{\lambda,\mu}(u, v) < - \frac{(p^- - q^+)(\alpha^+ + \beta^+ - p^-)}{(\alpha^+ + \beta^+)p^- q^+} \|(u, v)\|_W^{p^-} < 0.$$

Thus, $\alpha_{\lambda}^+ = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+(\Omega)} \theta_{\lambda,\mu}(u, v) < 0$.

(ii) Let $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}(\Omega)$. By (3.2) we have

$$\frac{(p^- - q^+)}{(\alpha^+ + \beta^+ - q^+)} \|(u, v)\|_W^{p^+} < \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx.$$

By the Sobolev embedding theorem we obtain

$$\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx \leq S^{\alpha^+ + \beta^+} \|(u, v)\|_W^{\alpha^+ + \beta^+}.$$

This implies

$$\|(u, v)\|_W > \left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{1}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}}.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u, v) &\geq \|(u, v)\|_W^{q^+} \left[\frac{\alpha^- + \beta^- - p^+}{p^+(\alpha^- + \beta^-)} \|(u, v)\|_W^{p^- - q^+} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S^{q^+} \alpha^- + \beta^- - q^-}{q^-(\alpha^- + \beta^-)} (|\lambda|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}}) \right] \\
 &> \left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}} \\
 &\quad \times \left[\frac{\alpha^- + \beta^- - p^+}{p^+(\alpha^- + \beta^-)} \left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S^{q^+} \alpha^- + \beta^- - q^-}{q^-(\alpha^- + \beta^-)} (|\lambda|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}}) \right]
 \end{aligned}$$

Choosing $0 < |\lambda|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} < C_0$, we get $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u, v) > d_0$ for all $(u, v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$ and for some $d_0 = d_0(\alpha, \beta, q, S, \lambda, \mu) > 0$. This completes the proof.

We put

$$t_{\max} = \left(\frac{(p^- - q^+) \|(u, v)\|_W^{p^-}}{(\alpha^+ + \beta^+ - q^+) \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx} \right)^{\frac{1}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}}.$$

Lemma 3.5. For each $(u, v) \in W$ with $\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx > 0$ we have

- (i) if $K_{\lambda,\mu}(u, v) \leq 0$, then there is a unique $t^- > t_{\max}$ such that $(t^-u, t^-v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$ and

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^-u, t^-v) = \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv);$$

- (ii) if $K_{\lambda,\mu}(u, v) > 0$, then there is a unique $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$ such that $(t^+u, t^+v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$, $(t^-u, t^-v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$ and

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^+u, t^+v) = \inf_{0 \leq t \leq t_{\max}} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv); \quad \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^-u, t^-v) = \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv).$$

Proof. Fix $(u, v) \in W$ with $\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx > 0$. Let

$$m(t) = t^{p^- - q^+} \|(u, v)\|_W^{p^-} - t^{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx \text{ for } t \geq 0.$$

Clearly, $m(0) = 0$, $m(t) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow \infty$. Moreover

$$m'(t) = (p^- - q^-) t^{p^- - q^+ - 1} \|(u, v)\|_W^{p^-} - (\alpha^+ + \beta^+ - q^-) t^{\alpha^+ + \beta^+ - q^+ - 1} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx.$$

Hence we have $m'(t) = 0$ at $t = t_{\max}$, $m'(t) > 0$ for $t \in [0, t_{\max})$ and $m'(t) < 0$ for $t \in (t_{\max}, \infty)$. Thus, $m(t)$ achieves its maximum at $t_{\max}$, increases for $t \in [0, t_{\max})$ and decreases for $t \in (t_{\max}, \infty)$.

Furthermore, we have

$$\begin{aligned}
 m(t_{\max}) &= \|(u, v)\|_W^{q^+} \left[\left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} \right)^{\frac{q^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}} - \left(\frac{p^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} \right)^{\frac{q^+ + \beta^+ - q^-}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}} \right] \\
 &\quad \times \left(\frac{\|(u, v)\|_W^{\alpha^+ + \beta^+}}{\int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx} \right)^{\frac{q^- - q^+}{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}} \\
 (3.8) \quad &\geq \|(u, v)\|_W^{q^+} \left(\frac{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} \right) \left(\frac{\alpha^+ + \beta^+ - q^+}{p^- - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{q^- - q^+}{p^- - \alpha^+ - \beta^-}}.
 \end{aligned}$$

(i) Let $K_{\lambda, \mu}(u, v) \leq 0$. There is a unique $t^- > t_{\max}$ such that $m(t^-) = K_{\lambda, \mu}(u, v)$ and $m'(t^-) < 0$. Then we have

$$\begin{aligned}
 (p^- - q^+)(t^-)^{p^-} \|(u, v)\|_W^{p^-} - (\alpha^+ + \beta^+ - q^+)(t^-)^{\alpha^+ + \beta^+} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx = \\
 = (t^-)^{1+q^+} m'(t^-) < 0,
 \end{aligned}$$

and hence, we can write

$$\langle \mathcal{J}'_{\lambda, \mu}(t^-u, t^-v) \rangle = (t^-)^{q^+} [m(t^-) - K_{\lambda, \mu}(u, v)] = 0,$$

implying that $(t^-u, t^-v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^-$. Thus, for $t > t_{\max}$ we have

$$(p^- - q^+) \|(tu, tv)\|_W^{p^-} - (\alpha^+ + \beta^+ - q^+) \int_{\Omega} f(x) |tu|^{\alpha(x)} |tv|^{\beta(x)} dx < 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu, tv) < 0,$$

and

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu, tv) = t \|(u, v)\|_W^{p^-} - t^{q^+} K_{\lambda, \mu}(u, v) - t^{\alpha^+ + \beta^+} \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx = 0,$$

for $t = t^-$. Thus, $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t^-u, t^-v) = \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu, tv)$.

(ii) Let $K_{\lambda, \mu}(u, v) > 0$. Using (3.8) and

$$\begin{aligned}
 m(0) &= 0 < K_{\lambda, \mu}(u, v) \leq \bar{S}^{q^+} (|\lambda|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}}) \|(u, v)\|_W^{q^+} \\
 &< \|(u, v)\|_W^{q^+} \left(\frac{\alpha^+ + \beta^+ - p^-}{\alpha^+ + \beta^+ - q^+} \right) \left(\frac{\alpha^+ + \beta^+ - q^+}{p^- - q^+} S^{\alpha^+ + \beta^+} \right)^{\frac{q^- - q^+}{p^- - \alpha^+ - \beta^-}} \leq m(t_{\max}),
 \end{aligned}$$

for $0 < |\lambda|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^- - q^+}{p^- - q^+}} < C(\alpha, \beta, q, S, \bar{S})$, we conclude that there are unique t^+ and t^- such that $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$, and

$$m(t^+) = K_{\lambda, \mu}(u, v) = m(t^-), \quad m'(t^+) > 0 > m'(t^-).$$

Then $(t^+u, t^+v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+$, $(t^-u, t^-v) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^-$, and $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t^-u, t^-v) \geq \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu, tv) \geq \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t^+u, t^+v)$ for each $t \in [t^+, t^-]$ and $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t^+u, t^+v) \leq \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu, tv)$ for each $t \in$

$[0, t^+]$. Thus,

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^+u, t^+v) = \inf_{0 \leq t \leq t_{\max}} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv) \quad \text{and} \quad \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^-u, t^-v) = \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv).$$

This completes the proof.

$$\text{We choose } \bar{t}_{\max} = \left(\frac{(\alpha^- + \beta^- - q^-)K_{\lambda,\mu}(u,v)}{(\alpha^- + \beta^- - p^+) \|(u,v)\|_W^{p^-}} \right)^{\frac{1}{p^- - q^+}} > 0 \text{ for } (u,v) \in W \text{ and } K_{\lambda,\mu}(u,v) >$$

0.

Theorem 3.3. *For each $(u,v) \in W$ with $K_{\lambda,\mu}(u,v) > 0$, we have*

- if $\int_{\Omega} f(x)|u|^{\alpha(x)}|v|^{\beta(x)} dx \leq 0$, then there is a unique $0 < t^+ < \bar{t}_{\max}$ such that $(t^+u, t^+v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$ and

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^+u, t^+v) = \inf_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv);$$

- if $\int_{\Omega} f(x)|u|^{\alpha(x)}|v|^{\beta(x)} dx > 0$, then there is a unique $0 < t^+ < \bar{t}_{\max} < t^-$ such that $(t^+u, t^+v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$, $(t^-u, t^-v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$, and

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^+u, t^+v) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}_{\max}} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv); \quad \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t^-u, t^-v) = \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(tu, tv).$$

Proof. Fix $(u,v) \in W$ and $K_{\lambda,\mu}(u,v) > 0$. Let

$$(3.9) \quad \bar{m}(t) = t^{p^+ - \alpha^- - \beta^-} \|(u,v)\|_W^{p^-} - t^{q^- - \alpha^- - \beta^-} K_{\lambda,\mu}(u,v) \quad \text{for } t > 0.$$

Clearly, $\bar{m} \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow 0^+$ and $\bar{m}(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. Now the proof can be completed using the arguments of the proof of Lemma 3.5.

Theorem 3.4. *If $0 < |\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C_0$, then the functional $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ has a minimizer (u_0^+, v_0^+) in $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$ and satisfies:*

$$(i) \quad \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u_0^+, v_0^+) = \theta_{\lambda,\mu}^+;$$

(ii) (u_0^+, v_0^+) is a nontrivial nonnegative solution of problem (1.1), such that $u_0^+ \geq 0, v_0^+ \geq 0$ in Ω and $u_0^+ \neq 0, v_0^+ \neq 0$.

Proof. Let $\{u_n, v_n\}$ be the minimizing sequence for $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ on $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$. Then in view of Lemma 3.1 and compact embedding theorem, there exist a subsequence $\{u_n, v_n\}$ and $(u_0^+, v_0^+) \in W$, such that (u_0^+, v_0^+) is a solution of problem (1.1) and

$$u_n^+ \rightharpoonup u_0^+ \text{ weakly in } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u_n^+ \rightarrow u_0^+ \text{ strongly in } L_{g(x)}^{\alpha(x)}(\partial\Omega) \text{ and in } L_{f(x)}^{\alpha+\beta}(\Omega),$$

$$v_n^+ \rightharpoonup v_0^+ \text{ weakly in } W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$$v_n^+ \rightarrow v_0^+ \text{ strongly in } L_{h(x)}^{q(x)}(\partial\Omega) \text{ and in } L_{f(x)}^{\alpha+\beta}(\Omega),$$

and we have

$$K_{\lambda,\mu}(u_n^+, v_n^+) \rightarrow K_{\lambda,\mu}(u_0^+, v_0^+) \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\Omega} f(x) |u_n^+|^{\alpha(x)} |v_n^+|^{\beta(x)} dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{\alpha(x)} |v_0^+|^{\beta(x)} dx \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

We can write

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u_n^+, v_n^+) = \frac{\alpha^- + \beta^- - p^+}{p^+(\alpha^- + \beta^-)} \|(u_n^+, v_n^+)\|_W^{p^-} - \frac{\alpha^- + \beta^- - q}{q^-(\alpha^- + \beta^- - p^+)} K_{\lambda,\mu}(u_n^+, v_n^+).$$

Therefore

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u_n^+, v_n^+) \rightarrow \theta_{\lambda,\mu}^+ < 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

It is easy to see that $K_{\lambda,\mu}(u_0^+, v_0^+) > 0$ as $n \rightarrow \infty$. We prove

$$u_n^+ \rightarrow u_0^+ \text{ strongly in } W^{1,p(x)}(\Omega),$$

$$v_n^+ \rightarrow v_0^+ \text{ strongly in } W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Otherwise, suppose

$$u_n^+ \not\rightarrow u_0^+ \text{ in } W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ and } v_n^+ \not\rightarrow v_0^+ \text{ in } W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Then we have

$$\|u_0^+\|_{W^{1,p(x)}} < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n^+\|_{W^{1,p(x)}} \text{ or } \|v_0^+\|_{W^{1,p(x)}} < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n^+\|_{W^{1,p(x)}}.$$

Let $K_{\lambda,\mu}(u_n, v_n) > 0$ and

$$I_{(u,v)}(t) = \bar{m}(t) - \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx,$$

where $\bar{m}(t)$ is as in (3.9). We have $I_{(u,v)}(t) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow 0^+$ and

$$I_{(u,v)}(t) \rightarrow - \int_{\Omega} f(x) |u|^{\alpha(x)} |v|^{\beta(x)} dx \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

We have $I'_{(u,v)}(t) = \bar{m}'(t)$. Using the argument of the proof of Lemma 3.5, we conclude that $\bar{t}_{\max}(u, v)$ is a maximum of $I_{(u,v)}(t)$, for $t \in (0, \bar{t}_{\max}(u, v))$, $I_{(u,v)}(t)$ increases and for $t \in (\bar{t}_{\max}(u, v), \infty)$ it decreases, so that

$$\bar{t}_{\max} = \left(\frac{(\alpha^- + \beta^- - q^-) K_{\lambda,\mu}(u, v)}{(\alpha^- + \beta^- - p^+) \|(u, v)\|_W^{p^-}} \right)^{\frac{1}{p^- - q^-}}.$$

Since $K_{\lambda,\mu}(u_0^+, v_0^+) > 0$, there is a unique $0 < t_0^+ < \bar{t}_{\max}(u_0^+, v_0^+)$ such that $(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$. Therefore

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}_{\max}} (u_0^+, v_0^+) \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(t u_0^+, t v_0^+),$$

and we can write

$$I_{(u_0^+, v_0^+)}(t_0^+) = (t_0^+)^{-(\alpha+\beta)} \left(\|(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+)\|_W^p - K_{\lambda, \mu}(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) - \int_{\Omega} f(x) |t_0^+ u_0^+|^{\alpha(x)} |t_0^+ v_0^+|^{\beta(x)} dx \right) = 0.$$

Moreover, for sufficiently large n we have

$$I_{(u_n, v_n)}(t_0^+) > 0,$$

implying that $\bar{t}_{\max}(u_n, v_n) > 1$. Furthermore, we have

$$I_{(u_n, v_n)}(1) = \|u_n, v_n\|_W^p - K_{\lambda, \mu}(u_n, v_n) - \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{\alpha(x)} |v_n|^{\beta(x)} dx = 0.$$

Since $I_{(u_n, v_n)}(t)$ increases for $t \in (0, \bar{t}_{\max}(u_n, v_n))$, for all $t \in (0, 1]$ and for sufficiently large n we have $I_{(u_n, v_n)}(t) \leq 0$. Therefore $1 < t_0^+ \leq \bar{t}_{\max}(u_0^+, v_0^+)$.

On the other hand, $(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+$ and

$$\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}_{\max}} (u_0^+, v_0^+) \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(tu_0^+, tv_0^+).$$

Therefore $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(t_0^+ u_0^+, t_0^+ v_0^+) < \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u_0^+, v_0^+) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u_n^+, v_n^+) = \theta_{\lambda, \mu}^+$, which is a contradiction. Thus both

$$u_n^+ \rightarrow u_0^+ \quad \text{and} \quad v_n^+ \rightarrow v_0^+ \quad \text{strongly in } W_0^{1, p(x)}(\Omega),$$

and we obtain

$$\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u_n^+, v_n^+) \rightarrow \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u_0^+, v_0^+) = \theta_{\lambda, \mu}^+ \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Hence, (u_0^+, v_0^+) is a minimizer. With $\mathcal{J}_{\lambda, \mu}(u_0^+, v_0^+) = \mathcal{J}_{\lambda, \mu}(|u_0^+|, |v_0^+|)$, $(|u_0^+|, |v_0^+|) \in \mathcal{N}_{\lambda, \mu}^+(\Omega)$ and Lemma 3.2, (u_0^+, v_0^+) is a nonnegative solution of the problem (1.1). Now, we prove that $u_0^+ \neq 0, v_0^+ \neq 0$. We assume that $v_0^+ \equiv 0$. Then, since u_0^+ is a nonzero solution of the problem

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = 0, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda g(x) |u|^{q(x)-2} u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

we have

$$\|u_0^+\|_W^{p(x)} = \lambda \int_{\partial\Omega} g(x) |u_0^+|^{q(x)} ds > 0.$$

With $w \in W^{1, p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$

$$\|w\|_W^{p(x)} = \mu \int_{\partial\Omega} h(x) |w|^{q(x)} ds \geq 0,$$

we have

$$K_{\lambda,\mu}(u_0^+, w) = \int_{\partial\Omega} g(x)|u_0^+|^{q(x)} ds + \mu \int_{\partial\Omega} h(x)|w|^{q(x)} ds > 0,$$

implying that there is a unique $0 < t^+ < \bar{t}_{\max}$ such that $(t^+u_0^+, t^+w) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+(\Omega)$.

We have

$$\bar{t}_{\max} = \left(\frac{(\alpha^- + \beta^- - q^-)K_{\lambda,\mu}(u_0^+, w)}{(\alpha^- + \beta^- - p^+) \| (u_0^+, w) \|_W^{p^-}} \right)^{\frac{-1}{p^- - q^+}} = \left(\frac{\alpha^- + \beta^- - q^-}{\alpha^- + \beta^- - p^+} \right)^{\frac{-1}{p^- - q^+}} > 1,$$

and

$$\partial_{\lambda,\mu}(t^+u_0^+, t^+w) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}_{\max}} \partial_{\lambda,\mu}(tu_0^+, tw).$$

Therefore

$$\partial_{\lambda,\mu}(t^+u_0^+, t^+w) \leq \partial_{\lambda,\mu}(u_0^+, w) < \partial_{\lambda,\mu}(u_0^+, 0) = \theta_{\lambda,\mu}^+,$$

which is a contradiction, and the result follows.

Theorem 3.5. *If $0 < (|\lambda|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} + |\mu|^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} < C_0$, then the functional $\mathcal{J}_{\lambda,\mu}$ has a minimizer (u_0^-, v_0^-) in $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$ and satisfies:*

$$(i) \mathcal{J}_{\lambda,\mu}(u_0^-, v_0^-) = \theta_{\lambda,\mu}^-;$$

(ii) (u_0^-, v_0^-) is a nontrivial nonnegative solution of the problem (1), such that $u_0^- \geq 0, v_0^- \geq 0$ in Ω and $u_0^- \neq 0, v_0^- \neq 0$.

Proof. The proof is similar to that of Theorem 3.4, and so is omitted.

The Proof of Theorem 3.1. In view of Theorems 3.4 and 3.5, we conclude that there exist $(u_0^+, v_0^+) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+$ and $(u_0^-, v_0^-) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^-$, such that $u_0^\pm \geq 0, v_0^\pm \geq 0$ in Ω and $u_0^\pm \neq 0, v_0^\pm \neq 0$. We have $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+ \cap \mathcal{N}_{\lambda,\mu}^- = \emptyset$, implying that (u_0^+, v_0^+) and (u_0^-, v_0^-) are distinct. If $f \geq 0$, then by the maximum principle we have $u_0^\pm > 0, v_0^\pm > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. J. Brown and T.F. Wu, "A semilinear elliptic system involving nonlinear boundary condition and sign-changing weight function", J. Math. Anal. Appl., **337**, 1328 – 1336 (2008).
- [2] K. J. Brown and Y. Zhang, "The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function", J. Differential Equations, **193**, no. 2, 481 – 499 (2003).
- [3] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration", SIAM J. Appl. Math. **68**, no. 4, 1383 – 1406 (2006).
- [4] G. Dai, "Infinitely many solutions for a Neumann-type differential inclusion problem involving the $p(x)$ -Laplacian", Nonlinear Anal. **70**, 2297 – 2305 (2009).
- [5] S. G. Dend, "Eigenvalues of the $p(x)$ -Laplacian Steklov problem", J. Mat. Anal. Appl., **339**, 925 – 937 (2008).
- [6] D. Edmunds and J. Rakosnik, "Sobolev embeddings with variable exponent", Studia Math., **143**, no. 3, 267 – 293 (2000).

- [7] X. L. Fan, D. Zhao, "On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ", J. Math. Anal. Appl., **263**, 424 – 446 (2001).
- [8] X. L. Fan, "Solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients", J. Math. Anal. Appl., **312**, no. 2, 464 – 477 (2005).
- [9] X. L. Fan, J. S. Shen and D. Zhao, "Sobolev embedding theorems for spaces", J. Math. Anal. Appl., **262**, no. 2, 749 – 780 (2001).
- [10] S. H. Rasouli and G. A. Afrouzi, "The Nehari manifold for a class of concave-convex elliptic systems involving the p -Laplacian and nonlinear boundary condition", Nonlinear Anal. **73**, 3390 – 3401 (2010).

Поступила 2 июня 2013

SOME PROPERTIES OF m -TH ROOT FINSLER METRICS

A. TAYEBI, A. NANKALI AND E. PEYGHAN

University of Qom, Qom, Iran
Arak University, Arak, Iran

E-mails: akbar.tayebi@gmail.com, ali.nankali2327@yahoo.com, epeyghan@gmail.com

Abstract. We prove that every m -th root metric with isotropic mean Berwald curvature reduces to a weakly Berwald metric. Then we show that an m -th root metric with isotropic mean Landsberg curvature is a weakly Landsberg metric. We find necessary and sufficient condition under which conformal β -change of an m -th root metric is locally dually flat. Finally, we prove that the conformal β -change of locally projectively flat m -th root metrics are locally Minkowskian.

MSC2010 numbers: 53C60, 53C25.

Keywords: Conformal change; m -th root metric; β -change; locally dually flat metric; projectively flat metric.

1. INTRODUCTION

Let (M, F) be a Finsler manifold of dimension n , TM be its tangent bundle and (x^i, y^i) be the coordinates in a local chart on TM .

An m -th root Finsler metric on M , denoted by F , is defined to be $F = \sqrt[m]{A}$, where A is given by $A := a_{i_1 \dots i_m}(x)y^{i_1}y^{i_2} \dots y^{i_m}$ with $a_{i_1 \dots i_m}$ symmetric in all its indices (see [4], [9], [14] – [16]).

The theory of m -th root metrics has been developed by Shimada [14], and applied to Biology as an ecological metric [2]. It can be regarded as a direct generalization of Riemannian metric in the sense that the second root metric is a Riemannian metric.

Let (M, F) be a Finsler manifold of dimension n . Denote by $\tau(x, y)$ the distortion of the Minkowski norm F_x on $T_x M_0$, and let $\sigma(t)$ be the geodesic with $\sigma(0) = x$ and $\dot{\sigma}(0) = y$. The rate of change of $\tau(x, y)$ along Finslerian geodesics $\sigma(t)$ is called S -curvature. The Finsler metric F is said to have isotropic S -curvature and almost isotropic S -curvature if $S = (n+1)cF$ and $S = (n+1)cF + dh$, respectively, where $c = c(x)$ and $h = h(x)$ are scalar functions defined on M and $dh = h_{x^i}(x)y^i$ is the

differential of h [19]. Taking twice vertical covariant derivatives of the S -curvature gives rise to the E -curvature. The Finsler metric F is called weakly Berwald metric if $E = 0$ and is said to have isotropic mean Berwald curvature if $E = \frac{n+1}{2}cFh$, where $c = c(x)$ is a scalar function defined on M and $h = h_{ij}dx^i dx^j$ is the angular metric.

Theorem 1.1. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(i) For a scalar function $c = c(x)$ on M , the following are equivalent:

$$: (ia) \quad S = (n+1)cF + \eta;$$

$$: (ib) \quad S = \eta.$$

(ii) For a scalar function $c = c(x)$ on M , the following are equivalent:

$$: (iia) \quad E = \frac{n+1}{2}cFh;$$

$$: (iib) \quad E = 0.$$

Let (M, F) be a Finsler manifold. There are two basic tensors on Finsler manifolds: the fundamental metric tensor g_y and the Cartan torsion C_y , which are the second and the third order derivatives of $\frac{1}{2}F_x^2$ at $y \in T_x M_0$, respectively. Taking a trace of Cartan torsion C_y gives us the mean Cartan torsion I_y . The rate of change of the Cartan torsion along the Finslerian geodesics, L_y , is called Landsberg curvature (see [17], [18]). Taking a trace of Landsberg curvature L_y yields the mean Landsberg curvature J_y . The metric F is called isotropic mean Landsberg curvature if $J = cFI$, where $c = c(x)$ is a scalar function on M .

Theorem 1.2. *Let (M, F) be a non-Riemannian m -th root Finsler manifold. For a scalar function $c = c(x)$ defined on M , the following are equivalent:*

$$(ia): \quad J + cFI = 0;$$

$$(ib): \quad J = 0.$$

There are two important transformation in Finsler geometry: the conformal change and the β -change. Two metric functions F and $\bar{F}$ defined on a manifold M are called conformal if the length of an arbitrary vector in the one is proportional to the length in the other, that is, if $\bar{g}_{ij} = \varphi g_{ij}$. Here the length of a vector ϵ means the fact that

φg_{ij} , as well as g_{ij} , must be Finsler metric tensors and showed that φ falls into a point function.

A change of Finsler metric $F \rightarrow \bar{F}$ is called a β -change of F , if $\bar{F}(x, y) = F(x, y) + \beta(x, y)$, where $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ is an 1-form on a smooth manifold M . It is easy to see that, if $\sup_{F(x, y)=1} |b_i(x)y^i| < 1$, then $\bar{F}$ is again a Finsler metric. The notion of a β -change has been proposed by Matsumoto, named by Hashiguchi-Ichijyō, and was studied in detail by Shibata (see [6], [8], [13]). If the Finsler metric F reduces to a Riemannian metric, then $\bar{F}$ reduces to a Randers metric. So, the β -change is also called the Randers change of Finsler metric.

Let (M, F) be a Finsler manifold. We consider the conformal β -changes of Finsler metrics $\bar{F} = e^{\alpha(x)}F + \beta$, where $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ is an 1-form on a smooth manifold M and $\alpha = \alpha(x)$ is the conformal factor. It is easy to see that, if $\sup_{F(x, y)=1} \|\beta\| < 1$, then $\bar{F}$ is again a Finsler metric.

Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$. Put

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial y^i}, \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^j \partial y^i}, \quad A_{x^i} = \frac{\partial A}{\partial x^i}, \quad A_0 = A_{x^i}y^i.$$

Suppose that A_{ij} defines a positive definite tensor and let A^{ij} denote its inverse. The following equalities hold:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{A^{\frac{2}{m}} - 2}{m^2} [mAA_{ij} + (2 - m)A_iA_j], \\ g^{ij} &= A^{-\frac{2}{m}} [mAA^{ij} + \frac{m-2}{m-1}y^i y^j], \\ y^i A_i &= mA, \quad y^i A_{ij} = (m-1)A_j, \quad A^{ij}A_i = \frac{1}{m-1}y^j, \\ y_i &= \frac{1}{m}A^{\frac{2}{m}-1}A_i, \quad A_i A_j A^{ij} = \frac{m}{m-1}A. \end{aligned}$$

In [1], Amari-Nagaoka introduced the notion of dually flat Riemannian metrics when they studied the information geometry on Riemannian manifolds. A Finsler metric F on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$ is called dually flat if it satisfies the equality $(F^2)_{x^i}y^i y^k = 2(F^2)_{x^i}$ (see [12], [19]).

We consider conformal β -changes of locally dually flat m -th root Finsler metrics and prove the following result.

Theorem 1.3. Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$, where A is irreducible. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F , where $\beta = b_i(x)y^i$ and $\alpha = \alpha(x)$. Then $\bar{F}$ is locally dually flat if and only if there exists a 1-form $\theta = \theta_i(x)y^i$ on U such that the following equalities hold:

$$(1.1) \quad \beta_{0i}\beta + \beta_i\beta_0 = 2\beta\beta_{x^i},$$

$$(1.2) \quad A_{x^i} = \frac{1}{3m}[mA\theta_i + 2\theta A_i + 2(\alpha_0 A_i - \alpha_{x^i} A)],$$

$$(1.3) \quad \beta[(\frac{1}{m} - 2)A_i A^{-1} A_0 - 4A_{x^i} + \alpha_0 A_i] + 2[A_i \beta_0 + (A_0 \beta)_i] = -2me^\alpha A \Psi,$$

where $\beta_{0i} = \beta_{x^k y^i} y^k$, $\alpha_0 = \alpha_{x^i} y^i$, $\beta_{x^i} = (b_i)_{x^i} y^i$, $\beta_0 = \beta_{x^i} y^i$, $\beta_{0i} = (b_i)_0$ and $\Psi = \alpha_0 \beta_i + \beta_{0i} - 2\beta_{x^i} - 2\alpha_{x^i} \beta$.

A Finsler metric is said to be locally projectively flat if at any point there is a local coordinate system in which the geodesics are straight lines as point sets. It is known that a Finsler metric $F(x, y)$ on an open domain $U \subset \mathbb{R}^n$ is locally projectively flat if and only if $G^i = P y^i$, where $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$, $\lambda > 0$ (see [7]). Finally, we study conformal β -change of locally projectively flat m -th root metrics and prove the following result.

Theorem 1.4. Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$, where A is irreducible. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F , where $\beta = b_i(x)y^i$ and $\alpha = \alpha(x)$. Then $\bar{F}$ is locally projectively flat if and only if it is locally Minkowskian.

2. PRELIMINARIES

Let M be a n -dimensional C^∞ manifold. Denote by $T_x M$ the tangent space at $x \in M$, by $TM = \cup_{x \in M} T_x M$ the tangent bundle of M , and by $TM_0 = TM \setminus \{0\}$ the slit tangent bundle. A Finsler metric on M is a function $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ which has the following properties:

- (i) F is C^∞ on TM_0 ;
- (ii) F is positively 1-homogeneous on the fibers of tangent bundle TM ;
- (iii) for each $y \in T_x M$, the following quadratic form g_y on $T_x M$:

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)]|_{s,t=0}, \quad u, v \in T_x M$$

is positive definite.

Let $x \in M$ and $F_x := F|_{T_x M}$. To measure the non-Euclidean feature of F_x , define $C_y : T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$C_y(u, v, w) := \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [g_{y+tw}(u, v)]|_{t=0}, \quad u, v, w \in T_x M.$$

The family $\mathbf{C} := \{C_y\}_{y \in TM_0}$ is called the Cartan torsion. It is well known that $\mathbf{C} = 0$ if and only if F is Riemannian.

Given a Finsler manifold (M, F) , then a global vector field G is induced by F on TM_0 , which in standard coordinates (x^i, y^i) for TM_0 is given by

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

where $G^i(y)$ are local functions on TM . G is called the associated spray to (M, F) . The projection of an integral curve of G is called a geodesic in M . In local coordinates, a curve $c(t)$ is a geodesic if and only if its coordinates $(c^i(t))$ satisfy the equation $\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0$.

Define $B_y : T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow T_x M$ and $E_y : T_x M \otimes T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ by $B_y(u, v, w) := B^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ and $E_y(u, v) := E_{jk}(y)u^j v^k$, respectively, where

$$B^i_{jkl}(y) := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y), \quad E_{jk}(y) := \frac{1}{2} B^m_{jkm}(y),$$

$u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ and $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ are called the Berwald curvature and the mean Berwald curvature, respectively. A Finsler metric is called Berwald metric and mean Berwald metric if $\mathbf{B} = 0$ or $\mathbf{E} = 0$, respectively.

A scalar function $\tau = \tau(x, y)$ on $TM \setminus \{0\}$

$$\tau(x, y) := \ln \left[\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\text{Vol}(B^n(1))} \cdot \text{Vol} \left\{ (y^i) \in \mathbb{R}^n \mid F \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right) < 1 \right\} \right],$$

is called the distortion. Let

$$S(x, y) := \frac{d}{dt} \left[\tau(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) \right]_{t=0},$$

where $\sigma(t)$ is the geodesic with $\sigma(0) = x$ and $\dot{\sigma}(0) = y$. S is called the S-curvature. S said to be *isotropic* if there is a scalar functions $c(x)$ on M such that

$$S(x, y) = (n+1)c(x)F(x, y).$$

3. PROOF OF THEOREM 1.1

In local coordinates (x^i, y^i) , the vector field $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ is a global vector field on TM_0 , where $G^i = G^i(x, y)$ are local functions on TM_0 given by

$$G^i := \frac{1}{4} g^{ij} \left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^i} y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} \right], \quad y \in T_x M.$$

By a simple calculation, we have the following result (see [22]).

Lemma 3.1. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Then the spray coefficients of F are given by*

$$G^i = \frac{1}{2} (A_{0j} - A_{x^j}) A^{ij}.$$

Thus the spray coefficients of an m -th root Finsler metric are rational functions with respect to y .

Lemma 3.2. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Then the following are equivalent:*

a): $S = (n+1)cF + \eta$;

b): $S = \eta$,

where $c = c(x)$ is a scalar function and $\eta = \eta_k(x)y^k$ is a 1-form on M .

Proof. By Lemma 3.1, the E -curvature of an m -th root metric is a rational function in y . On the other hand, by taking twice vertical covariant derivatives of the S -curvature, we get the E -curvature. Thus the S -curvature is a rational function in y . Suppose that F has almost isotropic S -curvature, $S = (n+1)c(x)F + \eta$, where $c = c(x)$ is a scalar function and $\eta = \eta_k(x)y^k$ is a 1-form on M . Then the left hand side of $S - \eta = (n+1)c(x)F$ is a rational function in y , while the right hand side is an irrational function, implying that $c = 0$ and $S = \eta$.

Lemma 3.3. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Then the following are equivalent:*

a): $E = \frac{n+1}{4} c F h$;

b): $E = 0$,

where $c = c(x)$ is a scalar function on M .

Proof. Suppose that $F = \sqrt[n]{A}$ has an isotropic mean Berwald curvature:

$$E = \frac{n+1}{2} c F h,$$

where $c = c(x)$ is a scalar function on M . The left hand side of $E = \frac{n+1}{2} c F h$ is a rational function in y , while the right hand side is an irrational function, implying that $c = 0$ and $E = 0$.

Proof of Theorem 1.1 is an immediate consequence of Lemmas 3.2 and 3.3.

From Theorem 1.1 we infer the following result.

Corollary 3.1. *Let $F = \sqrt[n]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suppose that F has isotropic S -curvature $S = (n+1)cF$, for some scalar function $c = c(x)$ on M . Then $S = 0$.*

A Finsler metric F satisfying $F_{x^*} = F F_{y^*}$ is called a Funk metric. The standard Funk metric on the Euclidean unit ball $B^n(1)$, denoted by Θ , is defined by

$$\Theta(x, y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)} + \langle x, y \rangle}{1 - |x|^2}, \quad y \in T_x B^n(1) \simeq \mathbb{R}^n,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $|\cdot|$ denote the Euclidean inner product and norm on $\mathbb{R}^n$, respectively. In [5], Chen-Shen has introduced the notion of isotropic Berwald metrics. A Finsler metric F is said to be isotropic Berwald metric if its Berwald curvature has the following form:

$$(3.1) \quad B^i_{jkl} = c \{ F_{y^j y^k} \delta^i_l + F_{y^k y^l} \delta^i_j + F_{y^l y^j} \delta^i_k + F_{y^j y^k y^l} y^i \},$$

for some scalar function $c = c(x)$ on M . Berwald metrics are trivially isotropic Berwald metrics with $c = 0$. Funk metrics are also non-trivial isotropic Berwald metrics. In (3.1), putting $i = l$ we get

$$E_{ij} = \frac{n+1}{2} c F^{-1} h_{ij}.$$

Plugging it into (3.1) we obtain

$$(3.2) \quad B^i_{jkl} = \frac{2}{n+1} \{ E_{jk} \delta^i_l + E_{kl} \delta^i_j + E_{lj} \delta^i_k + E_{jkl} y^i \}.$$

This means that every isotropic Berwald metric is a Douglas metric. For the definition of Douglas metrics we refer to [3].

Now, let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suppose that F has isotropic Berwald curvature given by (3.1). By Lemma 3.1, the left hand side of (3.1) is a rational function in y , while the right hand side is an irrational function, implying that $c = 0$. Thus we have the following result.

Theorem 3.1. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suppose that F has isotropic Berwald curvature. Then F is a Berwald metric.*

In [21], Tayebi-Rafie Rad proved that every isotropic Berwald metric (3.1) on a manifold M has isotropic S -curvature $S = (n+1)cF$, for some scalar function $c = c(x)$ on M . Thus, as an immediate consequence of Theorem 3.1, we can state the following result.

Corollary 3.2. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suppose that F has isotropic Berwald curvature. Then $S = 0$.*

4. PROOF OF THEOREM 1.2

The quotient J/I is regarded as the relative rate of change of the mean Cartan torsion I along Finslerian geodesics. Then F is said to be isotropic mean Landsberg metric if $J = cFI$, where $c = c(x)$ is a scalar function on M . In this section, we are going to prove Theorem 1.2. More precisely, we show that every m -th root isotropic mean Landsberg metric reduces to a weakly Landsberg metric.

Proof of Theorem 1.2: The mean Cartan tensor of F is given by the following formula:

$$\begin{aligned} I_i &= g^{jk} C_{ijk} = \frac{1}{m} A^{-3} \left[mAA^{jk} + \frac{m-2}{m-1} y^j y^k \right] \\ &\quad \times \left[A^2 A_{ijk} + \left(\frac{2}{m} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{2}{m} - 2 \right) A_i A_j A_k + A[A_i A_{jk} + A_j A_{ki} + A_k A_{ij}] \right\} \right]. \end{aligned}$$

The mean Landsberg curvature of F is given by

$$\begin{aligned} J_i &= g^{jk} L_{ijk} = A^{-\frac{2}{m}} \left[mAA^{jk} + \frac{m-2}{m-1} y^j y^k \right] \left[-\frac{1}{2m} A^{\frac{2}{m}-1} A_s G_{ijk}^s \right] \\ &= -\frac{1}{2m} A^{-1} A_s G_{ijk}^s \left[mAA^{jk} + \frac{m-2}{m-1} y^j y^k \right]. \end{aligned}$$

Since $J = cFI$, then

$$A_s G_{ijk}^s = -2cA^{\frac{1}{m}-2} \left[A^2 A_{ijk} + \left(\frac{2}{m} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{2}{m} - 2 \right) A_i A_j A_k + A[A_i A_{jk} + A_j A_{ki} + A_k A_{ij}] \right\} \right].$$

By Lemma 3.1, the left hand side is a rational function in y , while its right-hand side is an irrational function in y . Thus, either $c = 0$ or A satisfies the following PDE:

$$A^2 A_{ijk} + \left(\frac{2}{m} - 1 \right) \left(\frac{2}{m} - 2 \right) A_i A_j A_k + \left(\frac{2}{m} - 1 \right) A \{ A_i A_{jk} + A_j A_{ki} + A_k A_{ij} \} = 0.$$

This implies that $C_{ijk} = 0$. Hence, by Deike's theorem, F is a Riemannian metric, which contradicts our assumption, and hence $c = 0$. This completes the proof. $\square$

By the similar method can be proved the following result.

Theorem 4.1. *Let $F = \sqrt[m]{A}$ be an non-Riemannian m -th root Finsler metric on an open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suppose that F has an isotropic Landsberg curvature, that is, $L = cFC$, where $c = c(x)$ is a scalar function on M . Then F reduces to a Landsberg metric.*

5. PROOF OF THEOREM 1.3

A Finsler metric $F = F(x, y)$ on a manifold M is said to be locally dually flat if at any point there is a coordinate system (x^i) in which the spray coefficients have the form $G^i = -\frac{1}{2} g^{ij} H_{y^j}$, where $H = H(x, y)$ is a C^∞ scalar function on $TM_0 = TM \setminus \{0\}$ satisfying $H(x, \lambda y) = \lambda^3 H(x, y)$ for all $\lambda > 0$. Such a coordinate system is called an adapted coordinate system (see [15]). Recently, Shen proved that the Finsler metric F on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$ is dually flat if and only if it satisfies $(F^2)_{x^k y^i} y^k = 2(F^2)_{x^i}$. In this case we have $H = -\frac{1}{6} [F^2]_{x^m} y^m$.

In this section, we prove an extended version of Theorem 1.3. More precisely, we find a necessary and sufficient condition under which a conformal β -change of a generalized m -th root metric is locally dually flat. Let F be a scalar function on TM defined by $F = \sqrt{A^{2/m} + B}$, where A and B are given by

$$A := a_{i_1 \dots i_m}(x) y^{i_1} \dots y^{i_m}, \quad B := b_{ij}(x) y^i y^j.$$

Then F is called generalized m -th root Finsler metric. Suppose that matrix (A_{ij}) defines a positive definite tensor and (A^{ij}) denotes its inverse. Now, we are going to prove the following result.

Theorem 5.1. *Let $F = \sqrt{A^{2/m} + B}$ be a generalized m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$, where A is irreducible. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F , where $\beta = b_i(x)y^i$ and $\alpha = \alpha(x)$. Then $\bar{F}$ is locally dually flat if and only if there exists a 1-form $\theta = \theta_i(x)y^i$ on U such that the following equalities hold:*

$$(5.1) \quad e^{2\alpha}[2B_{x^i} + 4\alpha_{x^i}B - B_{0i} - 2\alpha_0B_i] = 2(\beta_i\beta_0 + \beta\beta_{0i} - 2\beta\beta_{x^i}),$$

$$(5.2) \quad A_{x^i} = \frac{1}{3m}[mA\theta_i + 2\theta A_i + 2(\alpha_0A_i - \alpha_{x^i}A)],$$

$$(5.3) \quad \Upsilon_i\Upsilon_0\beta = 2\Upsilon[(\Upsilon_0\beta)_i + \Upsilon_i\beta_0 + \alpha_0\beta\Upsilon_i - 2\Upsilon_{x^i}\beta] + 2e^\alpha\Upsilon\Psi,$$

where $\Upsilon := A^{\frac{2}{m}} + B$, $\beta_{0i} = \beta_{x^k}y^k$, $\alpha_0 = \alpha_{x^i}y^i$, $\beta_{x^i} = (b_i)_{x^i}y^i$, $\beta_0 = (b_i)_0y^i$, $\beta_{0i} = (b_i)_{0i}$, and

$$\Upsilon_p = \frac{2}{m}A^{\frac{2}{m}-1}A_p + B_p,$$

$$\Upsilon_{0p} = \frac{2}{m}A^{\frac{2}{m}-2}\left[\left(\frac{2}{m} - 1\right)A_pA_0 + AA_{0p}\right] + B_{0p},$$

$$\Psi = \alpha_0\beta_i + \beta_{0i} - 2\beta_{x^i} - 2\alpha_{x^i}\beta.$$

To prove Theorem 5.1, we need the following lemma.

Lemma 5.1. *Suppose that the equation $\Phi A^{\frac{2}{m}-2} + \Psi A^{\frac{2}{m}-1} + \Theta = 0$ holds, where Φ, Ψ, Θ are polynomials in y and $m > 2$. Then $\Phi = \Psi = \Theta = 0$.*

Proof of Theorem 5.1: We have

$$\bar{F}^2 = e^{2\alpha}(A^{\frac{2}{m}} + B) + 2e^\alpha\beta(A^{\frac{2}{m}} + B)^{1/2} + \beta^2,$$

$$\begin{aligned} (\bar{F}^2)_{x^k} &= 2\alpha_{x^k}e^{2\alpha}(A^{\frac{2}{m}} + B) + e^{2\alpha}\left(\frac{2}{m}A^{\frac{2}{m}-1}A_{x^k} + B_{x^k}\right) + 2\alpha_{x^k}e^\alpha\beta(A^{\frac{2}{m}} + B)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + e^\alpha[(A^{\frac{2}{m}} + B)^{-1/2}\left(\frac{2}{m}A^{\frac{2}{m}-1}A_{x^k} + B_{x^k}\right)\beta + 2(A^{\frac{2}{m}} + B)^{1/2}\beta_{x^k}] + 2\beta_{x^k}\beta. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} [F^2]_{x^k}y^i &= 2\alpha_0e^{2\alpha}\Upsilon_i + e^{2\alpha}\Upsilon_{0i} + 2\alpha_0e^\alpha\beta_i\Upsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha_0e^\alpha\beta\Upsilon^{-\frac{1}{2}}\Upsilon_i + 2e^\alpha\beta_{0i}\Upsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + e^\alpha\beta_0\Upsilon^{-\frac{1}{2}}\Upsilon_i + e^\alpha\beta_i\Upsilon^{-\frac{1}{2}}\Upsilon_0 - \frac{1}{2}e^\alpha\beta\Upsilon^{-\frac{3}{2}}\Upsilon_i\Upsilon_0 + e^\alpha\beta\Upsilon^{-\frac{1}{2}}\Upsilon_{0i} \\ &\quad + 2\beta_i\beta_0 + 2\beta\beta_{0i}. \end{aligned}$$

Since $\bar{F}$ is a locally dually flat metric, we can write

$$\begin{aligned} e^\alpha \Upsilon^{-\frac{1}{2}} & \left[-\frac{1}{2} \beta \Upsilon_l \Upsilon_0 + \Upsilon(\beta \Upsilon_{0l} + \beta_l \Upsilon_0 + \beta_0 \Upsilon_l + \alpha_0 \beta \Upsilon_l - 2\beta \Upsilon_{x^l}) \right. \\ & \quad \left. + 2e^\alpha \Upsilon^2 (\alpha_0 \beta_l + \beta_{0l} - 2\alpha_{x^l} \beta - 2\beta_{x^l}) \right] \\ & \quad + \frac{2}{m} e^{2\alpha} A^{\frac{2}{m}-2} \left[2\alpha_0 A A_l + \left(\frac{2}{m} - 1\right) A_l A_0 + A A_{0l} - 2\alpha_{x^l} A^2 - 2A A_{x^l} \right] \\ & \quad + e^{2\alpha} \left[2\alpha_0 B_l + B_{0l} - 4\alpha_{x^l} B - 2B_{x^l} \right] \\ & \quad - 4\beta \beta_{x^l} + 2\beta_l \beta_0 + 2\beta \beta_{0l} = 0. \end{aligned}$$

By Lemma 5.1, we have

$$(5.4) \quad 2\alpha_0 A A_l + \left(\frac{2}{m} - 1\right) A_l A_0 + A A_{0l} - 2\alpha_{x^l} A^2 = 2A A_{x^l},$$

$$(5.5) \quad \frac{1}{2} \beta \Upsilon_l \Upsilon_0 = \Upsilon[(\beta \Upsilon_0)_l + \beta_0 \Upsilon_l + \alpha_0 \beta \Upsilon_l - 2\beta \Upsilon_{x^l} + 2e^\alpha \Upsilon \Psi],$$

$$(5.6) \quad e^{2\alpha} [2\alpha_0 B_l + B_{0l} - 4\alpha_{x^l} B - 2B_{x^l}] = 2(2\beta \beta_{x^l} - \beta_l \beta_0 - \beta \beta_{0l}).$$

The equality (5.4) can be written as follows

$$(5.7) \quad A(2A_{x^l} - A_{0l} + 2\alpha_{x^l} A) = \left(\left(\frac{2}{m} - 1\right) A_0 + 2\alpha_0 A\right) A_l.$$

Irreducibility of A and $\deg(A_l) = m - 1$ imply that there exists an 1-form $\theta = \theta_l y^l$ on U such that

$$(5.8) \quad A_0 = \theta A.$$

By (5.8) we get

$$(5.9) \quad A_{0l} = A\theta_l + \theta A_l - A_{x^l}.$$

Substituting (5.8) and (5.9) into (5.7) we get (5.2). The converse assertion can be obtained by a direct computation. This completes the proof. $\square$

6. PROOF OF THEOREM 1.4

It is known that a Finsler metric $F(x, y)$ on $\mathcal{U}$ is projective if and only if its geodesic coefficients G^i have the form $G^i(x, y) = P(x, y)y^i$, where $T\mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is positively homogeneous with degree one, while $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$, $\lambda > 0$. We call $P(x, y)$ the *projective factor* of $F(x, y)$. The following lemma plays an important role.

Lemma 6.1. (Rapcsák) *Let $F(x, y)$ be a Finsler metric on an open subset $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Then $F(x, y)$ is projective on $\mathcal{U}$ if and only if it satisfies*

$$(6.1) \quad F_{x^k y^i} y^k = F_{x^i}.$$

In this case, the projective factor $P(x, y)$ is given by

$$(6.2) \quad P = \frac{F_{x^k} y^k}{2F}.$$

Much earlier, G. Hamel proved that a Finsler metric $F(x, y)$ on $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is projective if and only if

$$(6.3) \quad F_{x^k y^i} = F_{x^i y^k}.$$

Thus (6.1) and (6.2) are equivalent.

In this section, we prove an extended version of Theorem 1.4. Specifically, we study the conformal β -change of a generalized m -th root metric $F = \sqrt[A]{A^{\frac{1}{m}} + B}$, where A is irreducible, and prove the following result.

Theorem 6.1. *Let $F = \sqrt[A]{A^{\frac{1}{m}} + B}$ be a generalized m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$, where A is irreducible. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F , where $\beta = b_i(x) y^i$, $\alpha = \alpha(x)$. Then $\bar{F}$ is locally projectively flat if and only if it is locally Minkowskian.*

To prove Theorem 1.4, we need the following lemma.

Lemma 6.2. *Let (M, F) be a Finsler manifold. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F . Then $\bar{F}$ is a projectively flat Finsler metric if and only if the following holds:*

$$(6.4) \quad e^\alpha (F_{0i} - F_{xi}) = e^\alpha (\alpha_{xi} F - \alpha_0 F_i) + (b_i)_{xi} y^i - (b_i)_0.$$

Proof. We have

$$\bar{F} = e^\alpha F + \beta,$$

$$\bar{F}_{x^k} = \alpha_{x^k} e^\alpha F + e^\alpha F_{x^k} + (b_i)_{x^k} y^i,$$

$$\bar{F}_0 = \alpha_0 e^\alpha F + e^\alpha F_0 + (b_i)_0 y^i,$$

$$\bar{F}_{0i} = \alpha_0 e^\alpha F_i + e^\alpha F_0 + (b_i)_0,$$

and the result follows. This completes the proof.

Proposition 6.1. *Let $F = \sqrt{A^{2/m} + B}$ be a generalized m -th root Finsler metric on an open subset $U \subset \mathbb{R}^n$, where A is irreducible, $m > 4$ and $B \neq 0$. Suppose that $\bar{F} = e^\alpha F + \beta$ is a conformal β -change of F , where $\beta = b_i(x)y^i$, $\alpha = \alpha(x)$. If $\bar{F}$ is a projectively flat metric, then F reduces to a Berwald metric.*

Proof. By Lemma 6.2 we have

$$F_{x^i} = \frac{2A^{2/m}A_{x^i} + mA B_{x^i}}{2mA\sqrt{A^{2/m} + B}},$$

Therefore

$$\begin{aligned} F_{x^k}y^i y^k &= (A^{\frac{2}{m}} + B)^{-1/2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{2A^{2/m}A_0}{mA} + B_0 \right) \left(\frac{2A^{2/m}A_l}{mA} + B_l \right) (A^{\frac{2}{m}} + B)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{4A^{2/m}A_0A_l}{m^2A^2} + \frac{2A^{2/m}A_{0l}}{mA} - \frac{2A^{2/m}A_0A_l}{mA^2} + B_{0l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} F_{0l} - F_{x^i} &= e^\alpha \frac{(A^{\frac{2}{m}} + B)^{-\frac{3}{2}}}{m^2A^2} \left[A^{\frac{4}{m}}(mAA_l\alpha_0 + (1-m)A_lA_0 + mAA_{0l} - mAA_{x^i}) \right. \\ &\quad + A^{\frac{2}{m}}(mAA_lB\alpha_0 + \frac{1}{2}m^2A^2B_l\alpha_0 + (2-m)A_lA_0B + mAA_{0l}B) \\ &\quad + \frac{1}{2}mA^{\frac{2}{m}+1}(mAB_{0l} - A_0B_l - A_lB_0 - A_{x^i}B - mAB_{x^i}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}m^2A^2(BB_l\alpha_0 + B_{0l}B - \frac{1}{2}B_0B_l - BB_{x^i}) \right]. \end{aligned}$$

By (6.4) we obtain $\Phi A^{\frac{2}{m}} + \Psi A^{\frac{4}{m}} + \Theta = 0$, where

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{mA}{2} \left[A_0B_l + B_0A_l + 2B(A_{x^i} - A_l\alpha_0 - A_{0l}) + mA(B_{x^i} - B_l\alpha_0 - B_{0l}) \right] \\ &\quad - (m-2)A_0A_lB, \end{aligned}$$

$$\Psi = mA(A_{0l} + A_l\alpha_0 - A_{x^i}) - (m-1)A_0A_l,$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{4}m^2A^2 \left[2BB_l\alpha_0 - 2B_{0l}B + B_0B_l + 2B_{x^i}B \right], \\ &\quad + m^2A^2(A^{\frac{2}{m}} + B)^{\frac{3}{2}}e^{-2\alpha} \left[(b_l)_0 - (b_l)_{x^i}y^i + e^\alpha(\alpha_{x^i}A^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{m}\alpha_0A^{\frac{1}{m}-1}A_l) \right]. \end{aligned}$$

By Lemma 5.1 we have

$$(6.5) \quad \Phi = 0,$$

$$(6.6) \quad \Psi = 0,$$

$$(6.7) \quad \Theta = 0.$$

It follows from (6.6) that

$$(6.8) \quad mA(A_l\alpha_0 + A_{0l} - A_{x^l}) = (m-1)A_0A_l.$$

The irreducibility of A and $\deg(A_l) = m-1 < \deg(A)$ imply that A_0 is divisible by A . This means that there is an 1-form $\theta = \theta_ly^l$ on U , such that

$$(6.9) \quad A_0 = 2mA\theta.$$

Substituting (6.9) into (6.8), we obtain

$$(6.10) \quad A_{0l} = A_{x^l} - A_l\alpha_0 + 2(m-1)\theta A_l.$$

Plugging (6.9) and (6.10) into (6.5), we get

$$(6.11) \quad mA(2\theta B_l - B_{0l} - B_l\alpha_0 + B_{x^l}) = A_l(4B\theta - B_0).$$

Clearly, the right-hand side of (6.11) is divisible by A . Since A is irreducible, and both $\deg(A_l)$ and $\deg(2\theta B - \frac{1}{2}B)$ are less than $\deg(A)$, we have

$$(6.12) \quad B_0 = 4B\theta.$$

By (6.9) and (6.12), we get the spray coefficients $G^i = Py^i$ with $P = \theta$, showing that F is a Berwald metric. This completes the proof.

The Riemann curvature

$$K_y = R^i_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x : T_x M \rightarrow T_x M$$

is a family of linear maps on tangent spaces, defined by

$$R^i_k = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

For a flag $P = \text{span}\{y, u\} \subset T_x M$ with flagpole y , the flag curvature $K = K(P, y)$ is defined by

$$K(P, y) := \frac{g_y(u, K_y(u))}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}.$$

When F is Riemannian, $K = K(P)$ is independent of $y \in P$, which is precisely the sectional curvature of P in Riemannian geometry. We say that a Finsler metric F is of scalar curvature if for any $y \in T_x M$, the flag curvature $K = K(x, y)$ is a scalar function on the slit tangent bundle TM_0 . One of the important problems in Finsler geometry is to characterize the Finsler manifolds of scalar flag curvature (see

[10], [11]). If $K = \text{constant}$, then the Finsler metric F is said to be of constant flag curvature.

Proof of Theorem 6.1. By Proposition 6.1, F is a Berwald metric. On the other hand, according to Numata's theorem, every Berwald metric of non-zero scalar flag curvature K must be Riemannian. This contradicts to our assumption. Therefore $K = 0$, showing that F reduces to a locally Minkowskian metric. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.-I. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag (1985).
- [2] P. L. Antonelli, R. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Acad. publ., Netherlands (1993).
- [3] S. Bácsó and M. Matsumoto, "On Finsler spaces of Douglas type, A generalization of notion of Berwald space", *Publ. Math. Debrecen*, **51**, 385 – 406 (1997).
- [4] V. Balan and N. Brinzei, "Einstein equations for (h, v) -Berwald-Moór relativistic models", *Balkan. J. Geom. Appl.*, **11**(2), 20 – 26 (2006).
- [5] X. Chen and Z. Shen, "On Douglas metrics", *Publ. Math. Debrecen*, **68**, 503 – 512 (2005).
- [6] H. Hashiguchi and Y. Ichijyo, "Randers spaces with rectilinear geodetics", *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.)*, **13**, 33 – 40 (1980).
- [7] B. Li and Z. Shen, "On projectively flat fourth root metrics", *Canad. Math. Bull.*, **55**, 138 – 145 (2012).
- [8] M. Matsumoto, "On Finsler spaces with Randers metric and special forms of important tensors", *J. Math. Kyoto Univ.*, **14**, 477 – 498 (1975).
- [9] M. Matsumoto and H. Shimada, "On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moór's metric $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$ ", *Tensor N. S.*, **32**, 275 – 278 (1978).
- [10] B. Najafi, Z. Shen and A. Tayebi, "On Finsler metrics of scalar curvature with some non-Riemannian curvature properties", *Geom. Dedicata*, **131**, 87 – 97 (2008).
- [11] B. Najafi and A. Tayebi, "Finsler metrics of scalar flag curvature and projective invariants", *Balkan. J. Geom. Appl.*, **15**, 90 – 99 (2010).
- [12] Z. Shou, *Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry*, *Chin. Ann. Math.*, **27**, 73 – 94 (2006).
- [13] C. Shibata, "On invariant tensors of β -changes of Finsler metrics", *J. Math. Kyoto Univ.*, **24**, 163 – 188 (1984).
- [14] H. Shimada, "On Finsler spaces with metric $L = \sqrt[n]{a_{i_1 i_2 \dots i_m} y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_m}}$ ", *Tensor, N.S.*, **33**, 365 – 372 (1979).
- [15] A. Tayebi and B. Najafi, "On m -th root Finsler metrics", *J. Geom. Phys.* **61**, 1479 – 1484 (2011).
- [16] A. Tayebi and B. Najafi, "On m -th root metrics with special curvature properties", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **349**, 691 – 693 (2011).
- [17] A. Tayebi and E. Peyghan, "Finsler metrics with special Landsberg curvature", *Iran. J. Sci. Tech, Trans A*, **33**, no. A3, 241 – 248 (2009).
- [18] A. Tayebi and E. Peyghan, "On a special class of Finsler metrics", *Iran. J. Sci. Tech, Trans A*, **33**, no. A2, 179 – 186 (2009).
- [19] A. Tayebi, E. Peyghan and H. Sadeghi, "On a class of locally dually flat Finsler metrics with isotropic S-curvature", *Iran. J. Sci. Tech, Trans A*, **36**, accepted (2012).
- [20] A. Tayebi, E. Peyghan and M. Shabbazi, "On generalized m -th root Finsler metrics", *Linear Algebra. Appl.*, **437**, 675 – 683 (2012).

- [21] A. Tayebi and M. Rafie Rad, "S-curvature of isotropic Berwald metrics", *Science in China, Series A: Mathematics*, **51**, 2198 – 2204 (2008).
- [22] Y. Yu and Y. You, "On Einstein m -th root metrics", *Diff. Geom. Appl.*, **28**, 290 – 294 (2010).

Поступила 7 августа 2013

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 49, номер 4, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

С. АЛЕКСАНИЯН, Оптимально равномерное и касательное приближение мероморфными функциями в угле	3
А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН, Ковариограмма параллелограмма	17
А. Р. НУРБЕКЯН, А. А. СААКЯН, Сходимость двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации	35
S. H. RASOULI AND K. FALLAH, On a class of elliptic systems involving the $p(x)$ -Laplacian and nonlinear boundary conditions	47
A. TAYEBI, A. NANKALI AND E. PEYGHAN, Some properties of m -th root Finsler metrics	61 - 76

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 49, No. 4, 2014

CONTENTS

S. ALEKSANYAN, Optimal uniform and tangential approximation in an angle by meromorphic functions	3
A. GASPARYAN, V. K. OHANYAN, Covariogram of a parallelogram	17
A. R. NURBEKYAN, A. A. SAHAKYAN, Convergence of two-dimensional trigonometric interpolation polynomials of functions of bounded harmonic variation	35
S. H. RASOULI AND K. FALLAH, On a class of elliptic systems involving the $p(x)$ -Laplacian and nonlinear boundary conditions	47
A. TAYEBI, A. NANKALI AND E. PEYGHAN, Some properties of m -th root Finsler metrics	61 - 76

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

*JOURNAL OF
CONTEMPORARY
MATHEMATICAL
ANALYSIS*

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 49, No. 3, 2014

CONTENTS

U. GOGINAVA AND L. GOGOLADZE, Convergence in measure of strong logarithmic means of double Fourier series	109
I. DETERS, Constructing polynomials of minimal growth	117
V. N. MARGARYAN, On polynomials hypoelliptic with respect to a group of variables	126
H. S. HARUTYUNYAN AND V. K. OHANYAN, Orientation- dependent section distributions for convex bodies	139