ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2014

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 3-24.

ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Г. С. АРУТЮНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *hrach87@gmail.com*; *victo@aua.am*

Аннотация. В статье изучаются функции распределения в направлении для некоторых ограниченных, выпуклых тел на плоскости и в пространстве. В частности, приведены формулы для распределения длины хорды в направлении для правильного многоугольника и эллипса. Функция распределения длины хорды в направлении известна только в случае круга и треугольника. Получены выражения для распределения площади случайного сечения выпуклого тела плоскостью для эллипсоида и цилиндра. Функция распределения случайного сечения известна только в случае шара.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65.

Keywords: ограниченное выпуклое тело; функция распределения длины хорды в направлении; ковариограмма; функция распределения площади сечения.

1. Введение

Пусть G пространство прямых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ $g \in G$, (p, φ)= полярные координаты перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g; $p \geq 0$, $\varphi \in S^1$ (S^1 единичная окружность на плоскости с центром в начале координат).

В пространстве G рассмотрим локально конечную меру $\mu(\cdot)$, инвариантную относительно группы всех евклидовых движений плоскости (т.е. вращений и параллельных переносов). Элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет вид (см. [3]) $\mu(dg) = dp\,d\varphi$, где dp – одномерная мера Лебега, а $d\varphi$ – угловая мера на S^1.

Для выпуклой области D и для некоторой точки O внутри D обозначим через $S_D(\varphi)$ опорную функцию в направлении $\varphi \in S^1$, т.е. максимальное значение p относительно точки O для которой прямая $g(p, \varphi)$ пересекает D:

$$S_D(\varphi) = \max\{p : \ g(p, \varphi) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Если D имеет центр симметрии, то обычно за точку O берется центр симметрии. Функция

$$b_D(\varphi) = S_D(\varphi) + S_D(\varphi + \pi)$$

называется функцией ширины и не зависит от выбора точки O.

Для области D зависящая от направления функция распределения длины хорды $F_D(x, \varphi)$ определяется как вероятность, что случайная хорда $\chi(g) = g \cap D$, для g из пучка прямых имеющих направление φ или $\varphi + \pi$, будет иметь длину не превосходящую x. Случайная прямая которая перпендикулярна направлению φ и пересекает D имеет пересечение (обозначим точку пересечения через y) с прямой параллельной направлению φ и проходящей через начало координат. Точка пересечения y равномерно распределена в интервале $[-S_D(\varphi + \pi), S_D(\varphi)]$ (или $[0, b_D(\varphi)]$). Таким образом, имеем

$$F_D(x, \varphi) = \frac{L_1\{y : \chi(g_y(\varphi)) \leq x\}}{b_D(\varphi)}, \tag{1.1}$$

где $g_y(\varphi)$ есть прямая перпендикулярная направлению φ и пересекает отрезок $[-S_D(\varphi + \pi), S_D(\varphi)]$ в точке y.

С 30-х годов 20-ого века изучаются не только виды этих функции для различных областей но и возможность единственным образом восстановить ограниченную выпуклую область с помощью этих функций.

В [2] Матерон ввел понятие ковариограммы сформулировав гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет D в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений.

Пусть $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство, $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область с внутренними точками, S^{n-1} – $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $L_n(\cdot)$ – n-мерная Лебегова мера в $\mathbb{R}^n$. Функция

$$C_D(x) = L_n(D \cap \{D + x\}) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

называется ковариограммой области D. Ковариограмма $C_D(x)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Ж. Матерон (см. [2]) доказал, что для $t > 0$ и $\varphi \in S^{n-1}$

$$\frac{\partial C_D(t\varphi)}{\partial t} = -L_{n-1}(\{y \in \varphi^{\perp} : \; L_1(D \cap (l_\varphi + y)) \geq t\}), \tag{1.2}$$

где $l_\varphi + y$ есть прямая, параллельная направлению φ и проходящая через точку y, а $\varphi^{\perp}$ – ортогональное дополнение к φ.

Нетрудно убедиться, что для $n = 2$ (1.2) эквивалентна следующему выражению:

$$(1.3) \qquad -\frac{\partial C_D(t\varphi)}{\partial t} = \left(1 - F_D\left(t, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) b_D\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т.е. гипотеза о восстановлении выпуклого тела D по ковариограмме эквивалентна гипотезе восстановления тела D через зависящую от направления функцию распределения длины хорды.

В [6] доказана гипотеза Матерона для $n = 2$. В [7] доказано, что для $n \geq 4$ гипотеза не верна. Для $n = 3$ проблема пока не решена.

Все вышеупомянутые результаты и факты говорят о том, что распределения длины хорды в направлении, а так же ковариограмма, являются ключевыми понятиями при изучении ограниченных, выпуклых тел, и изучение этих функций в частных случаях могут дать результаты, которые могут быть обобщены на все ограниченные выпуклые тела, или на некоторый подкласс этих тел.

В 3-мерном пространстве можно рассматривать два типа распределений зависящих от направления. Первое представляет собой вероятность того, что хорда образованная при пересечении пространственной прямой с телом имеет длину меньше или равную данного числа. Во втором случае рассматриваются случайные плоскости и их пересечения с телом.

Обозначим через $\mathbf{E}$ пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Каждое $e \in \mathbf{E}$ можно определить направлением $\omega = (\varphi, \theta) \in S^2$ ($\varphi \in S^1$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) и расстоянием p плоскости e от начала координат. Обозначим через $A(e)$ площадь сечения тела D плоскостью e, а через $S_D(\omega)$ опорную функцию в направлении ω относительно некоторой внутренней точки O области D:

$$S_D(\omega) = \max\{p : \ e(p, \omega) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Случайная плоскость которая имеет направление ω и пересекает D имеет точку пересечения y с прямой параллельной направлению ω и проходящей через начало координат. Точка пересечения y равномерно распределена в интервале $[0, b_D(\omega))$, где $b_D(\omega)$ функция ширины в направлении ω ($b_D(\omega) = S_D(\omega) + S_D(-\omega)$), которая не зависит от точки O. Мы можем отождествлять точки отрезка $[0, b_D(\omega)]$ с плоскостями, которые пересекают D и имеют направление ω. Таким образом, имеем

$$(1.4) \qquad F_D(x, \omega) = \frac{L_1\{y : \ A(e_y(\omega)) \leq x\}}{b_D(\omega)},$$

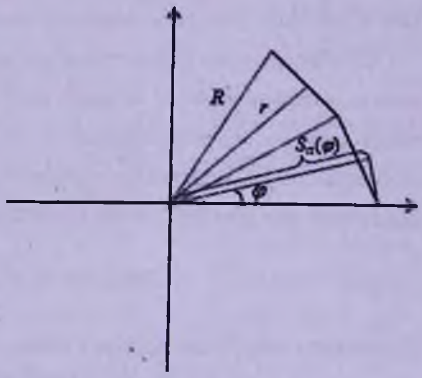
где $e_y(\omega)$ есть плоскость которая имеет направление ω и пересекает отрезок $[0, b_D(\omega)]$ в точке y.

Целью настоящей статьи является расширение класса тел для которых известен вид функции распределения длины хорды (ковариограммы) и функции распределения площади сечения в направлении. Получены следующие результаты:

(1) Функция распределения длины хорды в направлении для правильного многоугольника,
(2) Ковариограмма и функция распределения длины хорды в направлении для эллипса,
(3) Функция распределения площади сечения в направлении для эллипсоида,
(4) Функция распределения площади сечения в направлении для цилиндра.

2. Случай правильного многоугольника

Рассмотрим правильный n-угольник П со сторонами a_k, $k = 1, 2, ..., n$, длины a. Мы полагаем, что начало координат совпадает с центром многоугольника, а ось OX проходит через вершину многоугольника.



Очевидно, что $F_\Pi(x, \varphi) = 0$, если $x \le 0$ и $F_\Pi(x, \varphi) = 1$, если $x > \chi_{\max}(\varphi)$, где $\chi_{\max}(\varphi)$ максимальная хорда в направлении φ. Пусть $0 < x \le \chi_{\max}(\varphi)$.

Пусть R и r радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. Нетрудно убедиться, что a_k есть множество точек (x, y) которые принадлежат прямой l_k проходящей через a_k и удовлетворяют $r \le \sqrt{x^2 + y^2} \le R$. Нормальное уравнение прямой l_k имеет следующий вид:

$$x \cos \frac{2k-1}{n}\pi + y \sin \frac{2k-1}{n}\pi - r = 0,$$

следовательно,

$$\partial\Pi = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ (x,y) |\; x\cos\frac{2k-1}{n}\pi + y\,\sin\frac{2k-1}{n}\pi - r = 0,\; r \le \sqrt{x^2+y^2} \le R \right\}.$$

Пусть $S_\Pi(\varphi)$ опорная функция многоугольника Π в направлении φ отнесенная к началу координат. Мы будем рассматривать только случай $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, поскольку $S_\Pi(\varphi)$ и $F_\Pi(x,\varphi)$ являются периодическими функциями от φ с периодом $\frac{2\pi}{n}$, и, кроме того, для $\varphi \in \left[\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right]$

$$S_\Pi(\varphi) = S_\Pi\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \quad \text{и} \quad F_\Pi(x,\varphi) = F_\Pi\left(x, \frac{2\pi}{n} - \varphi\right).$$

Для $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ и $p \in [0, S_\Pi(\varphi)]$, $S_\Pi(\varphi) = R\cos\varphi$. Рассмотрим нормальное уравнение прямой $g(p,\varphi)$ и ее пересечения с границей Π:

$$\left\{ \begin{array}{l} x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \\ x\cos\frac{2k-1}{n}\pi + y\,\sin\frac{2k-1}{n}\pi - r = 0 \\ r \le \sqrt{x^2+y^2} \le R. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Решая последнюю систему, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p\sin\frac{2k-1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)} \\ y = -\frac{p\cos\frac{2k-1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)} \\ r^2 \le \frac{p^2 - 2pr\cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right) + r^2}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)} \le R^2. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Легко убедиться, что левая часть третьего неравенства системы (2.2) всегда выполняется. Действительно, $r^2 \le \frac{p^2 - 2pr\cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right) + r^2}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)}$ эквивалентно неравенству $\frac{\left(p - r\cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)} \ge 0$.

Понятно, что для фиксированного направления $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ прямые $g(p,\varphi)$ пересекаются только с некоторыми сторонами многоугольника, когда p изменяется на отрезке $[0, S_\Pi(\varphi)]$.

$$\left|\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right)\right| \ge \frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3}$$

Решая (2.3) получаем, что прямые $g(p,\varphi)$, где $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, пересекаются только со сторонами $a_1, a_2, \dots, a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}, a_{j(\varphi)+1}, \dots, a_n$, где

$$i(\varphi) = \left\lceil \frac{n}{4} + \frac{n\varphi}{2\pi} \right\rceil \quad \text{и} \quad j(\varphi) = \left\lfloor \frac{3n}{4} + \frac{n\varphi}{2\pi} \right\rfloor + 1,$$

и $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число не меньше x, а $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число не больше x.

Далее, найдем значения p для которых прямая $g(p,\varphi)$ пересекает пару сторон (a_i, a_j), где $i \in \{1,2,...,i(\varphi)\}$, $j \in \{j(\varphi), j(\varphi)+1,...,n\}$. Нетрудно убедиться, что для $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$

если $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\varphi\right), S_\Pi(\varphi)\right]$, то $g(p,\varphi)$ пересекает a_1 и a_n,

если $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\varphi\right)\right]$, то $g(p,\varphi)$ пересекает a_2 и a_n,

если $p \in \left[R\cos\left(\frac{4\pi}{n}-\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)\right]$, то $g(p,\varphi)$ пересекает a_2 и a_{n-1},

.....

если $p \in \left[0, R\cos\left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n}-\varphi\right)\right]$, то $g(p,\varphi)$ пересекает $a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}$.

Пусть $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right)\right]$. Имеем, что прямая $g(p,\varphi)$ пересекает a_{k+1} и a_{n+1-k}, при этом точки пересечения удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{p\sin\frac{2k+1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{k+1} = -\dfrac{p\cos\frac{2k+1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{n-k+1} = \dfrac{p\sin\frac{2(n-k)+1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2(n-k)+1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{n-k+1} = -\dfrac{p\cos\frac{2(n-k)+1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2(n-k)+1}{n}\pi-\varphi\right)}. \end{cases}$$

Расстояние между точками (x_{k+1}, y_{k+1}) и (x_{n-k+1}, y_{n-k+1}) (т.е. $\chi(p,\varphi)$) равно

$$\chi(p,\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\left(\frac{\pi}{n}-\varphi\right) - p\cos\frac{2k}{n}\pi\right)\sin\frac{2k}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi+\varphi\right)}.$$

Отсюда получаем, что когда $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right)\right]$ максимальная длина хорд образованных прямыми $g(p,\varphi)$ равна

$$M_k(\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\left(\frac{\pi}{n}-\varphi\right) - R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+\varphi\right)\cos\frac{2k}{n}\pi\right)\sin\frac{2k}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi+\varphi\right)} \tag{2.4}$$

а минимальная –

$$m_k(\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\left(\frac{\pi}{n}-\varphi\right) - R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right)\cos\frac{2k}{n}\pi\right)\sin\frac{2k}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi+\varphi\right)}. \tag{2.5}$$

Итак, для $x \in [m_k(\varphi), M_k(\varphi)]$ хорда длины x образована прямой $g(p,\varphi)$, где

$$p = \frac{2r\sin\frac{2k}{n}\pi\cos\left(\frac{\pi}{n}-\varphi\right) - x\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi+\varphi\right)}{\sin\frac{4k}{n}\pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

(2.6)

$$p_k(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le m_k(\varphi), \\ R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right) - \dfrac{2r\sin\frac{2k}{n}\pi\cos\left(\frac{\pi}{n}-\varphi\right) - x\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi+\varphi\right)}{\sin\frac{4k}{n}\pi}, & \\ & \text{если} \quad m_k(\varphi) < x \le M_k(\varphi), \\ R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right) - R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+\varphi\right), & \text{если} \quad x > M_k(\varphi). \end{cases}$$

Теперь пусть $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\varphi\right)\right]$. В этом случае прямая $g(p,\varphi)$ пересекает a_k и a_{n+1-k}, и точки пересечения удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{p\sin\frac{2k-1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{k+1} = -\frac{p\cos\frac{2k-1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{n-k+1} = \frac{p\sin\frac{2(n-k)+1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2(n-k)+1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{n-k+1} = -\frac{p\cos\frac{2(n-k)+1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2(n-k)+1}{n}\pi-\varphi\right)}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\chi(p,\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\varphi - p\cos\frac{2k-1}{n}\pi\right)\sin\frac{2k-1}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi+\varphi\right)},$$

следовательно, когда $p \in \left[R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right), R\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\varphi\right)\right]$ длина максимальной хорды равна

$$M'_k(\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\varphi - R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right)\cos\frac{2k-1}{n}\pi\right)\sin\frac{2k-1}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi+\varphi\right)} \tag{2.7}$$

а длина минимальной хорды –

$$m'_k(\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\varphi - R\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\varphi\right)\cos\frac{2k-1}{n}\pi\right)\sin\frac{2k-1}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi+\varphi\right)}. \tag{2.8}$$

Итак, если $x \in [m'_k(\varphi), M'_k(\varphi)]$, то хорда длины x образована прямой $g(p,\varphi)$, где

$$p = \frac{2r\sin\frac{2k-1}{n}\pi\cos\varphi - x\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi+\varphi\right)}{\sin\frac{4k-2}{n}\pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

(2.9)

$$p'_k(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le m'_k(\varphi), \\ R\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\varphi\right) - \frac{2r\sin\frac{2k-1}{n}\pi\cos\varphi - x\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi+\varphi\right)}{\sin\frac{4k-2}{n}\pi}, & \\ & \text{если} \quad m'_k(\varphi) < x \le M'_k(\varphi), \\ R\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\varphi\right) - R\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-\varphi\right), & \\ & \text{если} \quad x > M'_k(\varphi). \end{cases}$$

Если $p \in \left[0, R\cos\left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n}-\varphi\right)\right]$, то $g(p,\varphi)$ пересекает $a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}$, и для точек пересечения имеем

$$\begin{cases} x_{i(\varphi)} = \frac{p\sin\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{i(\varphi)} = -\frac{p\cos\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi-\varphi\right)}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{j(\varphi)} = \frac{p\sin\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi - r\sin\varphi}{\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}, \\ y_{j(\varphi)} = -\frac{p\cos\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi - r\cos\varphi}{\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}. \end{cases}$$

Так как,

$$\chi(p,\varphi) = 2\frac{\left(r\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right) - p\cos\frac{i(\varphi)-j(\varphi)}{n}\pi\right)\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)},$$

то подставляя $p = 0$ в последнем выражении, получаем

$$(2.10)\qquad 2\frac{r\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)},$$

и подставляя $R\cos\left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n}-\varphi\right)$, получаем

(2.11)

$$2\frac{\left(r\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)-R\cos\left(\frac{2(i(\varphi)-1)}{n}\pi-\varphi\right)\cos\frac{i(\varphi)-j(\varphi)}{n}\pi\right)\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi}{\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}.$$

Обозначим через $M_0(\varphi)$ максимум из (2.10) и (2.11), а через $m_0(\varphi)$ – минимум. Итак, для $x \in [m_0(\varphi), M_0(\varphi)]$ хорда длины x образовывается прямой $g(p,\varphi)$, где

$$p=\frac{2r\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)-x\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}{\sin\frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n}\pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

$$p_0(x,\varphi)=R\cos\left(\frac{2\,(i(\varphi)-1)\,\pi}{n}-\varphi\right)-$$

(2.12)

$$-\frac{2r\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)-x\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}{\sin\frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n}\pi},$$

если максимальная хорда получается при значении $p = 0$, и равна

(2.13)

$$p_0(x,\varphi)=\frac{2r\sin\frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n}\pi\cos\left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)-x\sin\left(\frac{2i(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)\sin\left(\frac{2j(\varphi)-1}{n}\pi-\varphi\right)}{\sin\frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n}\pi}$$

в противном случае. Кроме того, из (2.12) и (2.13) следует, что $p_0(x,\varphi)$ равен 0, если $x \le m_0(\varphi)$ и равен $R\cos\left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n}-\varphi\right)$, если $x > M_0(\varphi)$.

Обозначим

$$(2.14)\qquad G_\Pi(x,\varphi)=p_0(x,\varphi)+\Sigma_{k=1}^{i(\varphi)-2}p_k(x,\varphi)+\Sigma_{k=1}^{i(\varphi)-1}p'_k(x,\varphi).$$

Окончательно, для функции распределения длины хорды в направлении φ для правильного n-угольника получаем

$$(2.15)\qquad F_\Pi(x,\varphi)=\frac{G_\Pi(x,\varphi)+G_\Pi(x,\varphi+\pi)}{S_\Pi(\varphi)+S_\Pi(\varphi+\pi)}=\frac{G_\Pi(x,\varphi)+G_\Pi(x,\varphi+\pi)}{b_\Pi(\varphi)}.$$

2.1. Правильный треугольник. Рассмотрим частный случай (2.15), когда П есть правильный треугольник со стороной a. Обозначим его через T_a. Нетрудно убедиться, что в случае $n = 3$

$$i(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}, \\ 2, & \text{если} \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad j(\varphi) = 3.$$

Пусть $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$. Имеем (см. (2.10), (2.11)),

$$M_0(\varphi) = \frac{a\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)}, \quad m_0(\varphi) = 0 \ \text{ и } \ G_{T_a}(x,\varphi) = p_0(x,\varphi), \quad \text{где}$$

(2.16) $$p_0(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}, & \text{если} \quad 0 < x \le \frac{a\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}, \\ R\cos\varphi, & \text{если} \quad x > \frac{a\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}, \end{cases}$$

Если $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, то

$$m_0(\varphi) = \frac{a\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)}{2\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)} \qquad M_0(\varphi) = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)} = \chi_{\max}(\varphi) \qquad \text{и}$$

(2.17)
$$p_0(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le \frac{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{2\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}, \\ -R\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{x\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}}, & \text{если} \quad \frac{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{2\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)} < x \le \chi_{\max}(\varphi). \end{cases}$$

Далее, из (2.7) и (2.8) следует, что

$$M_1'(\varphi) = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)} = M_0(\varphi) = \chi_{\max}(\varphi), \qquad m_1'(\varphi) = 0 \qquad \text{и}$$

(2.18) $$p_1'(x,\varphi) = \frac{x\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}}, \quad \text{если} \quad 0 < x \le \chi_{\max}(\varphi).$$

Из (2.17) и (2.18) получаем, что если $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, то

(2.19)
$$G_{T_a}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}}, & \text{если} \quad 0 < x \le \frac{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{2\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}, \\ -R\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}}, & \\ & \text{если} \quad \frac{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{2\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)} < x \le \chi_{\max}(\varphi). \end{cases}$$

Итак, из (2.16) и (2.19) (для $\frac{\pi}{3} - \varphi$), получаем, что когда $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$,

$$F_{T_a}(x,\varphi) = \frac{x\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}\left(R\cos\varphi + R\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right)} = \frac{2x\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)}{a\sqrt{3}} = \frac{x}{\chi_{\max}(\varphi)}.$$

Тот же результат мы получаем в случае $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, следовательно

(2.20) $$F_{T_a}(x,\varphi) = \frac{x}{\chi_{\max}(\varphi)}, \quad \varphi \in S^1.$$

(2.20) есть частный случай результата полученного в [8] когда треугольник правильный.

2.2. Случай квадрата. Рассмотрим квадрат S_a со стороной a. Нетрудно убедиться, что для $n = 4$ (мы полагаем $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$) $i(\varphi) = 2$ и $j(\varphi) = 3$. Имеем (см. (2.10), (2.11)),

$$M_0(\varphi) = m_0(\varphi) = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)} = \chi_{\max}(\varphi),$$

поэтому

$$p_0(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < \chi_{\max}(\varphi), \\ R\sin\varphi, & \text{если} \quad x = \chi_{\max}(\varphi). \end{cases} \tag{2.21}$$

Итак, $\chi_{\max}(\varphi)$ тяжелая точка для $F_{S_a}(x,\varphi)$. Этот факт связан с присутствием параллельных сторон в квадрате.

Из (2.7) и (2.8) получаем $M_1'(\varphi) = \chi_{\max}(\varphi)$ и $m_1'(\varphi) = 0$, следовательно

$$p_1'(x,\varphi) = x\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{x\cos 2\varphi}{2}, \quad \text{если} \quad 0 < x \leq \chi_{\max}(\varphi). \tag{2.22}$$

Окончательно, имеем

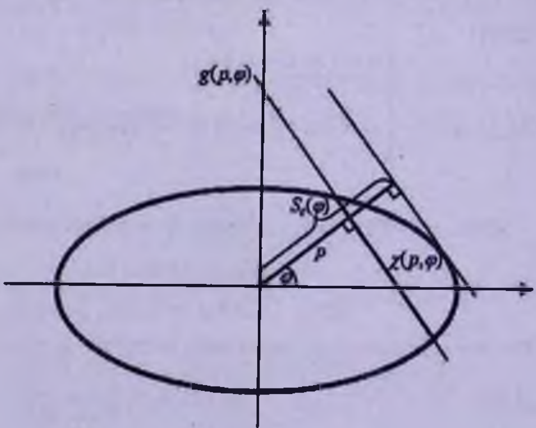
$$F_{S_a}(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ \frac{x\cos 2\varphi}{a\sqrt{2}\cos\varphi}, & \text{если} \quad 0 < x < \chi_{\max}(\varphi), \\ \frac{x\cos 2\varphi}{a\sqrt{2}\cos\varphi} + \tan\varphi & \text{если} \quad x = \chi_{\max}(\varphi), \end{cases} \tag{2.23}$$

где $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\chi_{\max}(\varphi) = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$.

3. Случай эллипса

Рассмотрим эллипс e

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Обозначим через $S_e(\varphi)$ опорную функцию эллипса в направлении φ.

Найдем $S_e(\varphi)$, а также $\chi(p,\varphi)$ для любого $\varphi \in S^1$ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$.

Чтобы найти $S_e(\varphi)$ нам нужно найти расстояние касательной параллельной прямой

$g(p,\varphi)$ от начала координат. Переходим к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\tan\varphi = -1,$$

где t_0 параметр соответствующий точке, где касательная к кривой перпендикулярна прямой $y = x\tan\varphi$. Не умаляя общности будем полагать, что $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $x(t_0) \ge 0$, $y(t_0) \ge 0$. Имеем,

$$\frac{b\cos t_0}{a\sin t_0} = \cot\varphi \quad \text{или} \quad \cot t_0 = \frac{a}{b}\cot\varphi.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\cos t_0 = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad \sin t_0 = \frac{b\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

следовательно уравнение касательной в точке $(x(t_0), y(t_0))$ имеет вид

$$y - \frac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \cot\varphi\left(x - \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\right). \tag{3.1}$$

Подставляя $y = x\tan\varphi$ и решая (3.1) мы находим абсцису точки пересечения касательной в точке $(x(t_0), y(t_0))$ с прямой $y = x\tan\varphi$:

$$x = x_{S_e(\varphi)} = \cos\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Очевидно, что $S_e(\varphi) = \frac{x_{S_e(\varphi)}}{\cos\varphi}$. Окончательно получаем:

$$S_e(\varphi) = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Найдем длину хорды $\chi(p,\varphi)$. Концевые точки хорды $\chi(p,\varphi)$ равны

$$x_{1,2} = \frac{a^2 p\cos\varphi \pm ab|\sin\varphi|\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - p^2}}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

С другой стороны очевидно, что $\chi(p,\varphi) = \frac{|x_1 - x_2|}{|\sin\varphi|}$, следовательно

$$\chi(p,\varphi) = \frac{2ab\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - p^2}}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{2ab\sqrt{S_e^2(\varphi) - p^2}}{S_e^2(\varphi)} \tag{3.2}$$

для всех $\varphi \in S^1$ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$.

Нетрудно убедиться, что для фиксированной φ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$, $\chi(p,\varphi) \le x$ тогда и только тогда, когда $p \ge S_e(\varphi)\sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2b^2}}$, следовательно получаем

$$F_e(x,\varphi) = \frac{S_e(\varphi) - S_e(\varphi)\sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2b^2}}}{S_e(\varphi)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2b^2}}.$$

Окончательно, для функции распределения длины хорды в направлении φ для эллипса с полуосями a и b получаем:

$$(3.3)\qquad F_e(x,\varphi)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le 0,\\ 1-\sqrt{1-\frac{x^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}{4a^2b^2}}, & \text{если}\quad 0\le x\le \chi_{\max}(\varphi),\\ 1, & \text{если}\quad x\ge \chi_{\max}(\varphi),\end{cases}$$

где $\chi_{\max}(\varphi)$ есть максимальная хорда в направлении φ:

$$\chi_{\max}(\varphi)=\frac{2ab}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}.$$

Подставляя в (3.3) $a=b=r$, получаем функцию распределения длины хорды в направлении φ для круга.

Используя (1.3) получаем, что для ковариограммы эллипса имеет место следующее равенство

$$-\frac{\partial C_e(t\varphi)}{\partial t}=2S_e(\varphi)(1-F_e(t,\varphi)),$$

следовательно

$$C_e(t\varphi)-C_e(0)=-2S_e(\varphi)\int_0^t\sqrt{1-\frac{x^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}{4a^2b^2}}dx,$$

или

$$C_e(t\varphi)=\pi ab-t\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}{4a^2b^2}t^2}-$$

$$(3.4)\qquad -2ab\arcsin\frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}{2ab}t.$$

Фактически, ковариограмма эллипса связана с максимальной хордой следующим образом:

(3.5)

$$C_e(t\varphi)=\begin{cases}2ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\sqrt{1-\frac{t^2}{\chi^2_{\max}(\varphi)}}-\arcsin\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\right), & \text{если } 0\le t\le\chi_{\max}(\varphi),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В (3.5) выражение $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\sqrt{1-\frac{t^2}{\chi^2_{\max}(\varphi)}}-\arcsin\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$ есть функция от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$. Похожая зависимость получена и в [8], поскольку доказано, что ковариограмма треугольника имеет вид

$$C_\Delta(t\varphi)=\begin{cases}A_\Delta\left(1-\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\right)^2 & \text{если}\quad 0\le t\le\chi_{\max}(\varphi),\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где A_Δ площадь треугольника Δ.

Кроме того, нетрудно видеть, что функция посредством которой ковариограмма зависит от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$ с точностью до постоянного множителя совпадает с неопределенным интегралом границы соответственной области.

Отсюда возникают следующие вопросы:

(1) При каких условиях ковариограмма $C_D(t\varphi)$ выпуклой области D зависит от φ через функцию $\chi_{\max}(\varphi)$: $C_D(t\varphi) = C_D(t, \chi_{\max}(\varphi))$?

(2) При каких условиях ковариограмма $C_D(t\varphi)$ выпуклой области D есть функция зависимая только от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$:

$$C_D(t\varphi) = C_D\left(\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\right)?$$

(3) Пусть $y = f(x)$ уравнение границы области D в окрестности точки пересечения ∂D с лучом φ. При каких условиях $C_D(t\varphi)$ представимо в виде

$$C_D(t\varphi) = C_1 + C_2 \int_0^{C_3 \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}} f(x)dx,$$

где C_1, C_2 и C_3 постоянные?

4. Случай эллипсоида

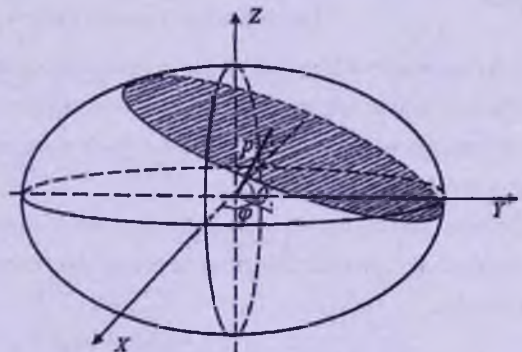
Пусть дан эллипсоид E с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.1}$$

Найдем функцию распределения площади случайного сечения эллипсоида. Из (1.4) имеем

$$F_E(x,\omega) = \frac{L_1\{p:\ A(p,\omega) \le x\}}{S_E(\omega)}.$$

Для нахождения $S_E(\omega)$ нужно найти расстояние касательной плоскости E с нормалью имеющей направление $\omega \in S^2$ от начала координат.



Из цилиндрического уравнения плоскости $e(p,\omega)$ имеем ($\omega = (\varphi,\theta)$):

$$x\cos\theta\cos\varphi + x\cos\theta\sin\varphi + z\sin\theta - p = 0.$$

Уравнение касательной плоскости к E в точке $(x_0, y_0, z_0) \in E$ имеет вид:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0, \tag{4.2}$$

следовательно вектор $\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right\}$ является нормалью касательной плоскости. Поскольку мы ищем касательную плоскость перпендикулярную направлению (φ, θ), следовательно вектор $\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right\}$ должен быть параллельным вектору $\{\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\}$, т.е. для некоторого t_0

$$\begin{cases} \frac{x_0}{a^2} = t_0 \cos\theta\cos\varphi, \\ \frac{y_0}{b^2} = t_0\cos\theta\sin\varphi, \\ \frac{z_0}{c^2} = t_0\sin\theta. \end{cases} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1) получаем

$$|t_0| = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + c^2\sin^2\theta}}$$

Расстояние точки $(0,0,0)$ от касательной плоскости равно

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} = \frac{1}{|t_0|}.$$

Окончательно, получаем

$$S_E(\varphi,\theta) = \sqrt{a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + c^2\sin^2\theta}. \tag{4.4}$$

Теперь найдем $A(p,\varphi,\theta)$. Для этого нам нужно найти площадь замкнутой области с границей удовлетворяющей системе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi + z\sin\theta - p = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Хорошо известно, что сечения эллипсоида являются эллипсами. Чтобы привести эллипс (4.5) к каноническому виду мы определим преобразование координатной системы, в результате которой полуоси эллипса совпадут с осями координат новой координатной системы.

Первым шагом мы вращаем систему OXY против часовой стрелки на угол φ относительно оси OZ. Обозначим новую систему координат через $OX'Y'Z'$. Имеем (см. [5]),

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z = z'. \end{cases}$$

После этого вращения мы можем переписать (4.5) в виде:

$$\begin{cases} \frac{(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1, \\ x'\cos\theta + z'\sin\theta - p = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Вторым шагом мы вращаем новую систему $OX'Y'Z'$ относительно оси OY' на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$ против часовой стрелки. В результате получаем новую координатную систему $OX''Y''Z''$, где

$$\begin{cases} x' = x''\sin\theta + z''\cos\theta, \\ y' = y'', \\ z' = -x''\cos\theta + z''\sin\theta. \end{cases}$$

Следовательно, мы можем переписать (4.6) в виде

$$(4.7) \qquad \begin{cases} \frac{((x''\sin\theta + z''\cos\theta)\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{((x''\sin\theta + z''\cos\theta)\sin\varphi + y''\cos\varphi)^2}{b^2} + \\ + \frac{(-x''\cos\theta + z''\sin\theta)^2}{c^2} = 1, \\ z'' - p = 0. \end{cases}$$

И наконец, мы переносим центр координатной системы $OX''Y''Z''$ на величину p в направлении оси OZ'' . Новая координатная система $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \bar{x} = x'', \\ \bar{y} = y'', \\ \bar{z} = z'' - p. \end{cases}$$

Окончательно, для границы сечения $e(p, \varphi, \theta) \cap E$ имеем следующее представление:

$$\frac{((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi)^2}{b^2} +$$

$$(4.8) \qquad + \frac{(p\sin\theta - \bar{x}\cos\theta)^2}{c^2} = 1.$$

Кривая определенная уравнением (4.8) есть плоская кривая в $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ и имеет форму

$$(4.9) \qquad a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\,\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + 2a_{13}\bar{x} + 2a_{23}\bar{y} + a_{33} = 0,$$

где

$$a_{11} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2},$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{a^2} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{b^2},$$

$$a_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2},$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{p\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{a^2} + \frac{p\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{b^2} - \frac{p\cos\theta\sin\theta}{c^2},$$

$$a_{23} = a_{32} = -\frac{p\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{a^2} + \frac{p\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{b^2},$$

$$a_{33} = \frac{p^2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{p^2\sin^2\theta}{c^2} - 1.$$

Кривые определенные посредством (4.9) есть кривые второго порядка (см. [5]), и известно что их образ зависит от инвариантов

$$(4.10) \qquad \Delta = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ D = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ I = a_{11} + a_{22}.$$

Нетрудно убедиться, что для (4.8) $D > 0$ и $\Delta I < 0$, и этот факт является еще одним доказательством что сечения эллипсоида являются эллипсами (см. [5]). Кроме того, если кривая второго порядка является эллипсом, то ее площадь можно найти формулой (см. [5])

$$(4.11) \qquad S = \pi\frac{|\Delta|}{\sqrt{D^3}}.$$

Используя (4.11) получаем

$$(4.12) \qquad A(p,\varphi,\theta) = \pi abc\frac{S_E^2(\varphi,\theta) - p^2}{S_E^3(\varphi,\theta)} = \frac{\pi abc}{S_E(\varphi,\theta)}\left(1 - \frac{p^2}{S_E^2(\varphi,\theta)}\right).$$

Подставляя $p = 0$ в (4.12) мы находим максимальную площадь сечения в направлении (φ,θ):

$$A_{\max}(\varphi,\theta) = \frac{\pi abc}{S_E(\varphi,\theta)}.$$

Очевидно что для любого направления (φ,θ) и $x \geq 0$ $A(p,\varphi,\theta) \leq x$ тогда и только тогда, когда

$$p \geq S_E(\varphi,\theta)\sqrt{1 - \frac{x\, S_E(\varphi,\theta)}{\pi abc}},$$

следовательно

$$F_E(x,\varphi,\theta) = \frac{S_E(\varphi,\theta) - S_E(\varphi,\theta)\sqrt{1 - \frac{x\, S_E(\varphi,\theta)}{\pi abc}}}{S_E(\varphi,\theta)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{x\, S_E(\varphi,\theta)}{\pi abc}}.$$

Окончательно, получаем

(4.13)

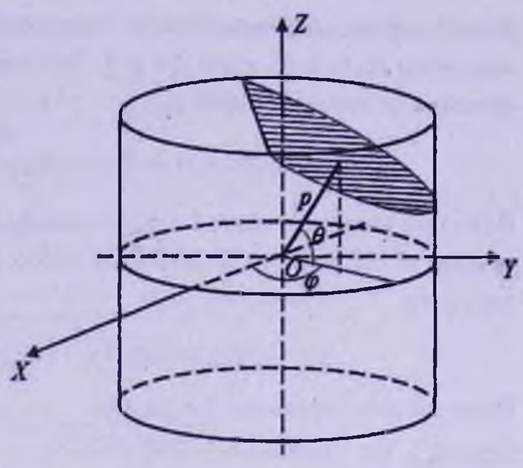
$$F_E(x,\varphi,\theta) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{x\sqrt{a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + c^2\sin^2\theta}}{\pi abc}}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi abc}{S_E(\varphi,\theta)}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi abc}{S_E(\varphi,\theta)}. \end{cases}$$

5. Случай цилиндра

Рассмотрим эллиптический цилиндр C с полуосями a и b и высотой $2h$.

Уравнение цилиндра C можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ |z| \le h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ |z| \le h. \end{cases}$$



Для любого $\omega = (\varphi, \theta) \in S^2$, плоскости $e(p,\omega)$ для различных значений p образовывают сечения в виде эллипса, или в виде усеченного эллипса (эллипсы без одного или двух эллиптических сегментов). Найдем функцию распределения площади сечения цилиндра C.

Сперва найдем значения p в случаях когда сечения являются эллипсами.

По симметрии рассмотрим только случай $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Для любого p мы рассматриваем сечение плоскости $e(p,\omega)$ с C.

Есть два значения p для которых $e(p,\omega) \cap C$ является точкой. Одна из них является значением опорной функции в направлении (φ,θ), а второе – значение после которого сечение меняет образ.

Чтобы найти эти пересечения решим следующую систему:

$$\begin{cases} x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi + h\sin\theta - p = 0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(p-h\sin\theta - x\cos\theta\cos\varphi)^2}{b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}=1,$$

которое является квадратическим уравнением вида $Ax^2+Bx+C=0$, где

$$A=\frac{1}{a^2}+\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}, \quad B=-\frac{2(p-h\sin\theta)\cos\theta\cos\varphi}{b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}, \quad C=\frac{(p-h\sin\theta)^2}{b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}-1.$$

Очевидно, что $e(p,\varphi,\theta)$ будет иметь пересечение с границей верхнего основания C тогда и только тогда, когда $B^2-4AC \ge 0$, т.е.

$$a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi - (h\sin\theta - p)^2 \ge 0.$$

Последнее эквивалентно

(5.1) $h\sin\theta - \cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \le p \le h\sin\theta + \cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$

В (5.1) выражение в правой части представляет собой опорную функцию в направлении $(\varphi, \theta) \in S^2$, где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Это означает что в общем случае опорная функция цилиндра C имеет вид:

$$S_C(\varphi, \theta) = h|\sin\theta| + \cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

В (5.1) мы видим что могут быть значения θ (для фиксированной φ) для которых сечения не могут быть эллипсами для любого $p \in [0, S_C(\varphi, \theta)]$. Этими значениями являются

$$\theta \leq \arctan\frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}{h}.$$

Итак, мы рассматриваем два случая:

Случай 1. $\theta \in \left[0, \arctan\frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}{h}\right]$.

Чтобы найти уравнение границы сечения, нам нужно решить систему:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi + z\sin\theta - p = 0 \\ |z| \leq h. \end{cases}$$

Как в случае эллипсоида, мы преобразуем координатную систему, чтобы привести кривую (5.2) в плоскость, где она представима в каноническом виде. После преобразований

$$(5.3)\qquad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$$

сечение образованное плоскостью $e(p, \varphi, \theta)$ переводится на плоскость $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ координатной системы $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$.

Из (5.3) имеем

$$\begin{cases} x = (\bar{x}\sin\theta + (\bar{z} + p)\cos\theta)\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ y = (\bar{x}\sin\theta + (\bar{z} + p)\cos\theta)\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi, \\ z = (\bar{z} + p)\sin\theta - \bar{x}\cos\theta, \end{cases}$$

которое означает что в новой координатной системе (5.2) будет иметь вид:

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \frac{((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi)^2}{b^2} = 1 \\ |p\sin\theta - \bar{x}\cos\theta| \leq h. \end{cases}$$

Когда $\theta = 0$, то сечение является прямоугольником с площадью

$$A(p, \varphi, \theta) = \frac{4abh\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - p^2}}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Когда $\theta \neq 0$, первое выражение системы (5.4) характеризует кривую второго порядка (см. (4.9)) где

$$a_{11} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}$$
$$a_{12} = a_{21} = -\frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{a^2} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{b^2},$$
$$a_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2},$$
$$a_{13} = a_{31} = \frac{p\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{a^2} + \frac{p\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{b^2},$$
$$a_{23} = a_{32} = -\frac{p\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{a^2} + \frac{p\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{b^2},$$
$$a_{33} = \frac{p^2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} - 1.$$

Очевидно, что эта кривая является эллипсом. Поскольку мы рассматриваем только те значения этого эллипсы, для которых $|p\sin\theta - \bar{x}\cos\theta| \leq h$, нам нужно перевести его в каноническую форму чтобы разобраться с его сегментами.

В [5] доказано, что существует угол β, где $\cot 2\beta = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$, что вращение координат на угол β переводит кривую второго порядка в форму

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \frac{\Delta}{D} = 0,$$

где λ_1 и λ_2 являются корнями квадратического уравнения $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$ (I, D и Δ определяются по (4.11)).

Фактически, после вышеупомянутого преобразования (5.4) будет иметь вид эллипса усеченного двумя параллельными прямыми, которые могут не быть параллельными полуосям эллипса. Для нахождения площади этой области нам нужно найти площади двух эллиптических сегментов.

Для простоты рассмотрим случай кругового цилиндра, т.е. $a = b = r$. В этом случае (5.4) имеет следующий вид :

(5.5)
$$\begin{cases} ((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi)^2 + ((\bar{x}\sin\theta + p\cos\theta)\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi)^2 = r^2 \\ |p\sin\theta - \bar{x}\cos\theta| \leq h. \end{cases}$$

Когда $\theta \neq 0$, первое уравнение системы (5.5) характеризует эллипс вида

$$\sin^2\theta\,(\bar{x} + p\cot\theta)^2 + \bar{y}^2 = r^2 \tag{5.6}$$

Если перенести начало координат системы $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ в направлении $\bar{O}\bar{X}$:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \bar{x} + p\cot\theta \\ \tilde{y} = \bar{y} \\ \tilde{z} = \bar{z}, \end{cases}$$

то (5.5) примет вид:

(5.7)
$$\begin{cases} \sin^2\theta\,\bar{x}^2+\bar{y}^2=r^2 \\ \left|\frac{p}{\sin\theta}-\bar{x}\cos\theta\right|\le h. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что площадь области A' замкнутым эллипсом $\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ и прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$ $(-l\le x_1<x_2\le l)$ равен

(5.8)
$$A'=2q\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}dx=q\left[x_2\sqrt{1-\frac{x_2^2}{l^2}}-x_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{l^2}}\right]+lq\left[\arcsin\frac{x_2}{l}-\arcsin\frac{x_1}{l}\right].$$

Сравнивая (5.7) с (5.8) получаем, что $A(p,\varphi,\theta)$ равен

$$A(p,\varphi,\theta)=r\left[\frac{p+h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1-\frac{(p+h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}}-\frac{p-h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1-\frac{(p-h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}}\right]+$$
$$\frac{r^2}{\sin\theta}\left[\arcsin\frac{p+h\sin\theta}{r\cos\theta}-\arcsin\frac{p-h\sin\theta}{r\cos\theta}\right],$$

где $0\le p\le r\cos\theta-h\sin\theta$.

Для $p\ge r\cos\theta-h\sin\theta$ сечение является эллипсом отрезанный из одного конца, следовательно имеем:

$$A(p,\varphi,\theta)=\frac{r^2}{\sin\theta}\arccos\frac{p-h\sin\theta}{r\cos\theta}-r\frac{p-h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1-\frac{(p-h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}}.$$

Случай 2. $\theta\in\left[\arctan\frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}{h},\frac{\pi}{2}\right)$.

В этом случае сечение образованное плоскостью $e(p,\varphi,\theta)$ может быть эллипсом, или эллипсом без одного эллиптического сегмента. Полноценными эллипсами являются сечения для которых

$$0\le p\le h\sin\theta-\cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi},$$

и в этом случае используя (4.12) получаем

(5.9)
$$A(p,\varphi,\theta)=\frac{\pi ab}{\sin\theta}.$$

(5.9) правильно (для всех p) и тогда, когда $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Теперь пусть $p\ge h\sin\theta-\cos\theta\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$. Сного для простоты рассмотрим случай кругового цилиндра. Имеем эллипс (5.6), отрезанный прямой $x=\frac{p-h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$, следовательно

(5.10)
$$A(p,\varphi,\theta)=\frac{r^2}{\sin\theta}\arccos\frac{p-h\sin\theta}{r\cos\theta}-r\frac{p-h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1-\frac{(p-h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}}.$$

Заметим, что подставляя $p=h\sin\theta+r\cos\theta$ получаем $A(p,\varphi,\theta)=0$, что логично.

Итак, мы получили следующие результаты:

(1) Для любого эллиптического цилиндра с высотой $2h$ и полуосями a и b, если сечение образованный плоскостью $e(p,\varphi,\theta)$ является эллипсом (непременно $\theta \neq 0$), то его площадь равен

$$A(p,\varphi,\theta) = \frac{\pi ab}{|\sin\theta|}, \tag{5.11}$$

Когда $\theta = 0$, имеем

$$A(p,\varphi,\theta) = \frac{4abh\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - p^2}}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

В частном случае, когда имеем бесконечный эллиптический цилиндр ($h = \infty$), то все его сечения эллипсы $\theta \neq 0$, следовательно площадь сечения вычисляется через (5.11) (для бесконечного цилиндра $A(p,\varphi,0) = \infty$).

(2) Для кругового цилиндра с высотой $2h$ и радиусом r площадь сечения образованной плоскостью $e(p,\varphi,\theta)$ равен

(5.12)

$$A(p,\varphi,\theta) = \begin{cases} 4h\sqrt{r^2 - p^2}, \quad \text{если} \quad \theta = 0, \\ r\left[\frac{p+h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{(p+h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}} - \frac{p-h\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{(p-h\sin\theta)^2}{r^2\cos^2\theta}}\right] + \\ + \frac{r^2}{\sin\theta}\left[\arcsin\frac{p+h\sin\theta}{r\cos\theta} - \arcsin\frac{p-h\sin\theta}{r\cos\theta}\right], \\ \qquad \text{если} \quad 0 < |\theta| \le \arctan\frac{r}{h},\ p \le r\cos\theta - h|\sin\theta|, \\ \frac{r^2}{|\sin\theta|}\arccos\frac{p-h|\sin\theta|}{r\cos\theta} - r\frac{p-h|\sin\theta|}{|\sin\theta|\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{(p-h|\sin\theta|)^2}{r^2\cos^2\theta}}, \\ \qquad \text{если} \quad 0 < |\theta| \le \arctan\frac{r}{h},\ |p - r\cos\theta| \le h|\sin\theta|, \\ \frac{\pi ab}{|\sin\theta|}, \qquad \text{если}\ \arctan\frac{r}{h} < |\theta| \le \frac{\pi}{2},\ p \le h|\sin\theta| - r\cos\theta, \\ \frac{r^2}{|\sin\theta|}\arccos\frac{p-h|\sin\theta|}{r\cos\theta} - r\frac{p-h|\sin\theta|}{|\sin\theta|\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{(p-h|\sin\theta|)^2}{r^2\cos^2\theta}}, \\ \qquad \text{если} \quad \arctan\frac{r}{h} < |\theta| < \frac{\pi}{2},\ |p - h|\sin\theta|| \le r\cos\theta. \end{cases}$$

Чтобы найти функцию распределения площади сечения цилиндра нам нужно решить систему (5.12) относительно p. Как видно в некоторых случаях невозможно найти это решение в явном виде в терминах r, h, φ, θ и A. Поэтому мы не можем найти окончательный вид $F_C(x,\varphi,\theta)$, несмотря на то, что в некоторых случаях это возможно. Но благодаря системе (5.12) мы можем найти площадь случайного сечения. Кроме того, для фиксированной r, h, мы можем получить таблицу значений $F_C(x,\varphi,\theta)$ используя формулу

$$F_C(x,\varphi,\theta) = \frac{h|\sin\theta| + r\cos\theta - p_x}{h|\sin\theta| + r\cos\theta}.$$

где p_x, числовое решение системы (5.12) (относительно p), для которого площадь сечения равен x. Другое важное заключение, что можно сделать из (5.12), это факт, что $A(p,\varphi,\theta)$, следовательно и $F_C(x,\varphi,\theta)$, не зависят от φ (в случае эллиптического цилиндра мы такого не имеем). Далее, $A(p,\varphi,\theta)$ и $F_C(x,\varphi,\theta)$ непрерывны относительно p и x соответственно для любой фиксированной $(\varphi,\theta) \in S^2$, но в отличии от эллипсоида, они не являются непрерывными относительно (φ,θ). Этот факт объясняется тяжестью точки $\theta = \frac{\pi}{2}$ и тем, что в точке $\theta = 0$ сечение превращается в прямоугольник.

Abstract. In the paper the orientation dependent chord length distribution functions for some bounded convex domains are obtained. In particular, formulae for the orientation dependent chord length distributions for a regular polygon and an ellipse are obtained. Explicit forms of the orientation dependent chord length distributions were known only in the cases of a disc and a triangle. We also obtain the cross-section area distribution functions for an ellipsoid and a cylinder. The cross-section area distribution function was known only in the case of a ball.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addision-Wesley, Reading, MA, (2004).
[2] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry, New York, Wiley (1975).
[3] Р.В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян, Введение в стохастическую геометрию, М., Наука (1990).
[4] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer, Berlin-Heidelberg (2008).
[5] П. С. Александров, Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры, Москва, Наука (1968).
[6] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body", Journal of the European Mathematical Society, 11, 1187 – 1202 (2009).
[7] G. Bianchi, "Matheron's conjecture for the covariogram problem", J. London Math. Soc., 71, no. 1, 203 – 220 (2005).
[8] A. G. Gasparyan, V. K. Ohanyan, "Recognition of triangles by covariogram", Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences), 48, no. 3, 110 – 122 (2013).

Поступила 3 июля 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 25- 38.

CONSTRUCTING POLYNOMIALS OF MINIMAL GROWTH

IAN DETERS

Farmers Insurance Group, Akron, USA

E-mail: *iandeters@iandeters.com*

Abstract. In [2] a cyclic diagonal operator on the space of functions analytic on the unit disk with eigenvalues (λ_n) is shown to admit spectral synthesis if and only if for each j there is a sequence of polynomials (p_n) such that $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_k) = \delta_{j,k}$ and $\limsup_{n\to\infty} \sup_{k>j} |p_n(\lambda_k)|^{1/k} \leq 1$. The author also shows, through contradiction, that certain classes of cyclic diagonal operators are synthetic. It is the intent of this paper to use the aforementioned equivalence to constructively produce examples of synthetic diagonal operators. In particular, this paper gives two different constructions for sequences of polynomials that satisfy the required properties for certain sequences to be the eigenvalues of a synthetic operator. Along the way we compare this to other results in the literature connecting polynomial behavior ([4] and [9]) and analytic continuation of Dirichlet series ([1]) to the spectral synthesis of diagonal operators.

MSC2010 numbers: 30B10, 30B50, 47B36, 47B38

Keywords: Polynomials construction; invariant subspaces; diagonal operators; spectral synthesis.

1. Introduction

A vector x in a complete, metrizable, topological, vector space $\mathcal{X}$ is said to be *cyclic* for a continuous, linear operator $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ if the closed, linear span of the orbit $\{T^n x : n \geq 0\}$ of x under T is all of $\mathcal{X}$. Operators that have a cyclic vector are said to be *cyclic.* A vector x is said to be a *root vector* for T if there exist $\lambda \in \mathbb{C}$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $(T - \lambda I)^n x = 0$. A continuous, linear operator $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ on a complete, metrizable, topological, vector space $\mathcal{X}$ is said to *admit spectral synthesis* or *be synthetic* if every closed invariant subspace $\mathcal{M}$ of T equals the closed linear span of the root vectors for T contained in $\mathcal{M}$. Cyclicity results yield interesting approximation results. For instance, the Weierstrass Approximation Theorem asserts that the function $f(x) \equiv 1$ on $[0, 1]$ is cyclic for the operator $T : g(x) \to xg(x)$ of multiplication by x on the Banach space $C([0, 1])$ of continuous functions on $[0, 1]$.

Results about polynomials are intimately related to the results about cyclicity and synthesis since the vector space generated by the set $\{T^n x : x \in X\}$ is equal to the set $\{p(T) : p \in \mathbb{C}[z]\}$, where $\mathbb{C}[z]$ is the set of polynomials with coefficients in $\mathbb{C}$. There are three recent results which demonstrate this connection. To state these results, we first present the notation, used in the original papers, and the necessary background.

The operator $J(\lambda_n, m_n)$ is a Jordan block acting on a finite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}_n$. The space of functions analytic on the unit disk in $\mathbb{C}$ is denoted as H_1, and the space of functions analytic on $\mathbb{C}$ is denoted as $H(\mathbb{C})$. A linear operator $D : H_1 \to H_1$ or $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ is called *diagonal* if it has as eigenvectors the monomials z^n for $n \geq 0$. Formally, these maps are given by $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$. The sequence (λ_n) is called D's associated sequence. A diagonal operator D with associated sequence (λ_n) on H_1 or $H(\mathbb{C})$ is defined and continuous if and only if $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ or $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$, respectively (see Proposition 1 in [3] and Lemma 1 in [7], respectively). In either case, the operator D is cyclic if and only if the eigenvalues are distinct (see Theorem 1 in [3] and Proposition 3 in [7]). Note that the root vectors for a diagonal operator are precisely its eigenvectors. The aforementioned results are as follows.

Theorem 1.1 ([9], Theorem 3). *Let $\{\lambda_n\}$ be a bounded sequence of distinct complex numbers, let $\{m_n\}$ be a bounded sequence of positive integers, and let $J = \oplus J(\lambda_n, m_n)$ be a Jordan operator acting on a Hilbert space $\mathcal{H} = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. If for each positive integer i, the orthogonal projection $P_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$ is in the weakly closed algebra, generated by J and the identity, then the Jordan operator $J = \oplus J(\lambda_n, m_n)$ admits spectral synthesis.*

Theorem 1.2 ([9], Theorem 4). *Let $\{\lambda_n\}$ be a bounded sequence of distinct complex numbers, let $\{m_n\}$ be a bounded sequence of positive integers, and let $J = \oplus J(\lambda_n, m_n)$ be a Jordan operator acting on a Hilbert space $\mathcal{H} = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Let i be any positive integer and $\{p_\alpha\}$ be a set of polynomials. Then $\{p_\alpha(J)\}$ converges in the weak operator topology to the projection operator $P_{\mathcal{H}_i}$ if and only if*

(1) $\lim_\alpha p_\alpha(\lambda_k) = \begin{cases} 0 & \textit{if } k \neq i \\ 1 & \textit{if } k = i, \end{cases}$

(2) $\lim_\alpha p_\alpha^{(j)}(\lambda_k) = 0$ *for all* $j, k \geq 1$, *and*

(3) $\sup_{\alpha,k} |p_\alpha^{(j)}(\lambda_k)| < \infty$ *for all* $j \geq 0$,

where

$$\hat{p}_\alpha^{(j)}(\lambda_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \geq m_k \\ p_\alpha^{(j)}(\lambda_k) & \text{if } j < m_k. \end{cases}$$

Theorem 1.3 ([2], Theorem 8). *Let $D : H_1 \to H_1$ be a diagonal operator with distinct eigenvalues and let $\mathfrak{D}$ be the algebra generated by D. The following statements are equivalent:*

(1) *In the SOT, $\pi_n \in \overline{\mathfrak{D}}$ for all $n \geq 0$.*

(2) *D is synthetic.*

(3) *The function $f \in H_1$ is cyclic, where $f(z) = \frac{1}{1-z}$.*

(4) *For each $j \geq 0$ there is some sequence of polynomials $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$, depending on j, such that $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_k) = \delta_{j,k}$ and*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{k>j}(\{|p_n(\lambda_k)|^{\frac{1}{k}}\}) \leq 1.$$

Theorem 1.4 ([4], Theorem 3.1). *Let D be a cyclic diagonal operator on $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ having eigenvalues $\{\lambda_n\}$. If for each $j \geq 0$ there exists a sequence $\{p_{j,n}(z)\}$ of polynomials for which $\lim_{n\to\infty} p_{j,n}(\lambda_k) = \delta_{j,k}$ and $\sup(\{|p_{j,n}(\lambda_k)|^{1/k} : k \geq 0, n \geq 1\} < \infty$, then D admits spectral synthesis.*

All three results have similar kinds of conditions which guarantee that an operator is synthetic. First, condition (1) in Theorem 1.2, the first condition on the sequences of polynomials in Theorem 1.4, and the first condition on the sequences of polynomials in part 4 of Theorem 1.3 can colloquially be thought of as separating a sequence of points. Second, condition (3) in Theorem 1.2, the second condition on the sequences of polynomials in Theorem 1.4, and the second condition on the sequences of polynomials in part 4 of Theorem 1.3 specifies a growth condition on the polynomials on the sequence of points. In particular, the growth condition in part 4 of Theorem 1.3 is the strictest it can be and still allow for unbounded eigenvalues. This will be colloquially referred to as satisfying a minimal growth condition.

Seubert and Deters present examples of synthetic diagonal operators (see [9], Theorem 5, [3], Corollary 1 and Theorem 5, [2], Theorem 6, [4], Theorem 3.2 and Corollary 3.3). In [9] and [4] the authors use the existence of nets and sequences of polynomials to demonstrate the synthesis of some subset of diagonal operators. While Deters does not do this in [3], Theorem 8 of [3] guarantees the existence of sequences of polynomials which separate eigenvalues and satisfy a minimal growth condition.

No sequences of polynomials are constructed in [9] or [3]. Rather, they are shown to exist through arguments based on contradiction or using existence theorems like Mergelyan's Theorem. In the proof of Theorem 3.3 in [4], Seubert and Deters construct sequences of polynomials simply by looking at the power series expansion of canonical products. For instance, for a diagonal operator on $H(\mathbb{C})$ with eigenvalues (λ_n) such that $\lambda_n = n^2$ for $n \geq 0$, the polynomials (p_n) defined by $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2-z}{k^2}$ satisfy the conditions in Theorem 1.4 for λ_0. However, observe that the growth restriction on the polynomials in the conditions of part 4 of Theorem 1.3 is much more restrictive than the growth restriction in Theorem 1.4. The purpose of this paper is to construct polynomials which satisfy the conditions in part 4 of Theorem 1.3.

2. Constructing Polynomials Of Minimal Growth

For the sake of brevity, we enumerate the conditions in part 4 of Theorem 1.3 as follows:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_k) = \delta_{j,k}, \tag{2.1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{k>j}(\{|p_n(\lambda_k)|^{\frac{1}{k}}\}) \leq 1. \tag{2.2}$$

Constructing polynomials which satisfy conditions (1) and (2) appears to be non-trivial. For instance, consider the diagonal operator with eigenvalues $\lambda_n = n$ for $n \geq 0$. Such an operator is synthetic by Theorem 6 in [2]. A natural choice for the polynomials corresponding to λ_0 would be $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-k}{-k}$. However, note that

$$|p_n(2n)|^{\frac{1}{2n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{k}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} 1 + \frac{n-1}{k}\right)^{\frac{1}{2n}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Hence, while the sequence clearly satisfies condition (1) for $j = 0$, it does not satisfy condition (2).

It may also be thought that Theorem 3.2 in [4] would provide some insight into such constructions. Following the proof of Theorem 3.2 in [4], if D is a diagonal operator on H_1 with associated sequence (λ_n), then the equivalent condition to Theorem 3.2 in [4] would be that there is some non-trivial, entire function E of order ρ and type τ such that $E(\lambda_n) = 0$ for all $n \geq 0$ and $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n|^\rho/n = 0$. However, if $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ for $n \geq 0$ and $n(r) = |\{z : E(z) = 0, |z| \leq r\}|$, then, for sufficiently large k, Theorem

4.5.1 in [5] would imply that

$$1 \leq \frac{n(|\lambda_k|)}{k} \leq \frac{-\ln|E(0)| + (\tau+1)(3|\lambda_k|)^\rho}{k\ln 2} \to 0 \text{ as } k \to \infty.$$

Thus, the "obvious" candidates for sequences of polynomials do not work and more creativity must be used. We shall first construct polynomials which satisfy (1) and (2) for a particular family of bounded eigenvalues. To accomplish this we shall make use of polynomial approximations of Blaschke products.

Theorem 2.1. *Let $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ be a sequence such that $|\lambda_n| < 1$ and $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) < \infty$, then for each $j \geq 0$, there is some sequence $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$ such that* $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_k) = \delta_{j,k}$ *and* $\limsup_{n\to\infty} \sup_{k>j} |p_n(\lambda_k)|^{\frac{1}{k}} \leq 1$.

Proof. Fix $j \geq 0$, and for $n > j$ define

$$A_n = \max(\{|\lambda_k| : 1 \leq k \leq n\}) \quad \text{and} \quad B_n(z) = \prod_{k\neq j}^{n} \frac{(z-\lambda_k)|\lambda_k|}{(1-\overline{\lambda_k}z)\lambda_k}.$$

Choose M_n such that $(2/(1-A_n))^{n-1}(2nA_n^{M_n+1}/(1-A_n)) < 1/n$, and for $n \geq 1$ define

$$q_n(z) = \prod_{k\neq j}^{n} \frac{(z-\lambda_k)|\lambda_k|}{\lambda_k} \sum_{m=0}^{M_n} (\overline{\lambda_k}z)^m.$$

For $|z| \leq 1$ and $0 \leq k \leq n$ observe that

$$|(z-\lambda_k)(|\lambda_k|/\lambda_k) \sum_{m=0}^{M_n} (\overline{\lambda_k}z)^m| \leq 2\sum_{m=0}^{M_n} A_n^m \leq 2/(1-A_n).$$

Since $|(z-\lambda_k)(|\lambda_k|/\lambda_k)|/|1-\overline{\lambda_k}z| \leq 1$ for $|z| \leq 1$, we have that for $n > \max(\{1, j\})$ and $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |q_n(z) - B_n(z)| &\leq \left(\frac{2}{1-A_n}\right)^{n-1} \sum_{k\neq j}^{n} |z-\lambda_k| \sum_{m=M_n+1}^{\infty} |\overline{\lambda_k}z|^m \\ &\leq \left(\frac{2}{1-A_n}\right)^{n-1} \frac{2nA_n^{M_n+1}}{1-A_n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Next, since $\sum_{k\neq j}^{\infty}(1-|\lambda_k|) < \infty$, there is some $B \in H_1$ such that B_n converges to B in H_1, $B(\lambda_k) = 0$ for $k \neq j$, and $B(\lambda_j) \neq 0$ (see Theorem 15.21 in [8]). Note that $\lim_{n\to\infty} q_n = B$ in H_1. Define $p_n = q_n/B(\lambda_j)$. Since

$$|p_n(\lambda_k)|^{\frac{1}{k}} \leq (|(q_n(\lambda_k) - B_n(\lambda_k)|/|B(\lambda_j)|)^{\frac{1}{k}} + |B_n(\lambda_k)/B(\lambda_j)|)^{\frac{1}{k}},$$

the sequence (p_n) clearly possesses the desired properties. □

Corollary 2.1. *If $D : H_1 \to H_1$ is a diagonal operator with associated sequence $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ such that $|\lambda_n| < 1$ and $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) < \infty$, then D is synthetic.*

A more general, but non-constructive version of this result is known from Corollary 1 in [3]. However, the proof of Corollary 1 in [3] relies on Proposition 2 of [12] whose proof is nontrivial.

We now are going to construct polynomials that satisfy conditions (1) and (2) for a particular collection of sequences (λ_n) such that $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ and $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Although there will be many details in what follows, the main spirit of the approach will be to consider sequences (λ_n) such that $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} = \infty$. Informally, the sequence (λ_n) does not grow too quickly. We will then find a sequence (z_n) of positive numbers such that $\lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{z_n} = 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_n} = \infty$. Informally, the sequence (z_n) will grow faster than the sequence $(|\lambda_n|)$, but not too fast. The desired sequence (p_n) of polynomials will then look like $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{\lambda_\ell - z_k}$. The first step will be the following lemma which follows directly from elementary entire function theory.

Lemma 2.1. *Let $z, z_0 \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ and a sequence of positive numbers (z_n) such that $z_n \uparrow \infty$ be given. If $z \notin \{z_n : n \geq 1\}$, then $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_n}{z_0 - z_n} \to 0$ if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} = \infty$.*

Proof. Since $z_k \uparrow \infty$, there is a sequence of numbers (u_n) such that $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ and $(|z - z_n|/|z_0 - z_n|)^2 = 1 + 2(\operatorname{Re} z_0 - \operatorname{Re} z)u_n/z_n$. Hence, by Theorem 15.5 in [8], the result follows. □

In light of the above proposition, we will concentrate our efforts on polynomials of the form $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{\lambda_\ell - z_k}$ that satisfy conditions (1) and (2) for some sequence (z_n). To this end, we now develop some ideas to judiciously select sequences of zeros for the polynomials. Our definitions will be recursive. Define $a_0(x) = x$, $a_n(x) = \ln a_{n-1}(x)$, $e_0 = 1$, and $e_n = e^{e_{n-1}}$ for $n \geq 1$. Also, define $b_n(x) = \prod_{k=0}^{n} a_k(x)$ for $n \geq 0$. We collect some basic results about these functions below. In particular, we will obtain an estimate for $\prod_{k=1}^{n} a_m(x + k - 1)$ similar in spirit to Stirling's formula.

Lemma 2.2. *Let a_n and b_n be defined as above. The following assertions hold.*

(1) *Let $m \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, and $x \geq e_m$ be given. There is a function $\varepsilon_{m,x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ such that $\prod_{k=1}^{n} a_m(x + k - 1) = a_m(x + n - 1)^{n\varepsilon_{m,x}(n)}$ and $\limsup_{n\to\infty}(1 - \varepsilon_{m,x}(n)) \ln n = 1$.*

(2) *Let $m \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, and $x \geq e_m$ be given. There is a function $\varepsilon_{m,x} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ such that $\prod_{k=1}^{n} b_m(x+k-1) = b_m(x+n-1)^{n\varepsilon_{m,x}(n)}$ and $\limsup_{n\to\infty}(1 - \varepsilon_{m,x}(n)) \ln n = 1$.*

(3) *If $n \geq 1$ and $0 < c < 1$, then $\sup_x (ca_n(x))^{\frac{1}{x}} \leq e^{1/a_n^{-1}(1/c)}$.*

(4) *For $x, y \geq 2$ and $n \geq 0$, $a_n^{-1}(xy) \geq a_n^{-1}(x)a_n^{-1}(y)$.*

(5) *For each $\varepsilon \in (0,1)$ there is some M such that $a_n^{-1}(x^y) \geq (a_n^{-1}(x))^y$ for $x \geq M$, $y \in [\varepsilon, 1)$, and $n \geq 0$.*

Proof. (1) Define a sequence $\{\varepsilon_{m,x}(n),\ n \in \mathbf{N}\}$ as follows: we put $\varepsilon_{m,x}(1) = 1$ and for $n \geq 2$ define

$$\varepsilon_{m,x}(n) = \frac{1}{na_{m+1}(x+n-1)} \sum_{k=1}^{n} a_{m+1}(x+k-1).$$

Observe that the only task is to prove the second property of $\varepsilon_{m,x}$. The proof will be by induction on m. The case $m = 0$ follows directly from Stirling's Formula (see [6], p. 313). Suppose that the result holds for some $m \geq 0$ and let $x \geq e_{m+1}$ be given. For $n \geq 2$ define

$$f_n(y) = \frac{a_{m+2}(y)}{a_{m+2}(x+n-1)} - \frac{a_{m+1}(y)}{a_{m+1}(x+n-1)}.$$

First, observe that

$$f_n(x+n-1) = 0, \qquad f_n\left(a_{m+1}^{-1}\left(a_{m+1}(x+n-1)^{\frac{1}{a_{m+1}(x+n-1)}}\right)\right) < 0,$$

and

$$f_n\left(a_{m+1}^{-1}\left(a_{m+1}(x+n-1)^{\frac{2}{a_{m+1}(x+n-1)}}\right)\right) > 0$$

for sufficiently large n. Write $y_n = a_{m+1}^{-1}(a_{m+1}(x+n-1)/a_{m+2}(x+n-1))$ and note that f_n has a unique maximum at y_n. Observe that for sufficiently large n, $x < y_n < x+n-1$. Define k_n to be the smallest k such that $|(x+k_n-1) - y_n| = \min(\{|(x+k-1) - y_n| : 1 \leq k \leq n\})$ and observe that $|y_n - (x+k_n-1)| \leq 1/2$ for sufficiently large n.

Next, by the Mean Value Theorem, there is some c_n between y_n and $x+k_n-1$ such that $|f_n(x+k_n-1) - f_n(y_n)| = |f_n'(c_n)||(x+k_n-1) - y_n|$. It is easy to see that $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. Since $\lim_{n\to\infty} f_n'(c_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(y_n) = 1$, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x+k_n-1) - f_n(y_n)| = 0$ and $\lim_{n\to\infty} f_n(x+k_n-1) = 1$. Hence, for sufficiently large n, we have

$$x+1 > a_{m+1}^{-1}\left(a_{m+1}(x+n-1)^{\frac{2}{a_{m+1}(x+n-1)}}\right)$$

and

$$n(\varepsilon_{m+1,x}(n) - \varepsilon_{m,x}(n)) \geq \frac{-a_{m+1}(x)}{a_{m+1}(x+n-1)} + \frac{a_{m+2}(x+k_n-1)}{a_{m+2}(x+n-1)} - \frac{a_{m+1}(x+k_n-1)}{a_{m+1}(x+n-1)}$$
$$+ \sum_{k=2, k\neq k_n}^{n} \frac{a_{m+2}(x+k-1)}{a_{m+2}(x+n-1)} - \frac{a_{m+1}(x+k-1)}{a_{m+1}(x+n-1)} > 0.$$

Therefore,

$$\limsup_{n\to\infty} \ln n(1-\varepsilon_{m+1,x}(n)) \leq \limsup_{n\to\infty} \ln n(1-\varepsilon_{m,x}(n)) \leq 1$$

and the result is proven.

(2) It follows from part 1 that, for each $0 \leq j \leq m$, there is some function $\hat{\varepsilon}_{j,x}$, defined on $\mathbf{N}$, such that $\limsup_{n\to\infty}(1-\hat{\varepsilon}_{j,x}(n))\ln n \leq 1$ and

$$\prod_{k=1}^{n} a_j(x+k-1) = a_j(x+n-1)^{n\hat{\varepsilon}_{j,x}(n)}.$$

Next, we put $\varepsilon_{m,x}(1) = 1$ and for $n \geq 2$ define

$$\varepsilon_{m,x}(n) = \frac{1}{\ln b_m(x+n-1)} \sum_{j=0}^{m} a_{j+1}(x+n-1)\hat{\varepsilon}_{j,x}.$$

Clearly, we have

$$b_m(x+n-1)^{n\varepsilon_{m,x}(n)} = \prod_{k=1}^{n} b_m(x+k-1).$$

The other part of the assertion follows by noting that

$$\sum_{j=0}^{m} a_{j+1}(x+n-1)/\ln b_m(x+n-1) = 1.$$

(3) Follows from a simple calculation.

(4) Follows by induction and the observation that $xy \geq x+y$ for $x, y \geq 2$.

(5) Follows by induction and the observation that $\lim_{y\to 1^-} y^{1/(y-1)} = e$. □

We now proceed to the main result. In particular, the theorem that follows will produce a construction of polynomials whose existence is guaranteed in Corollary 1 of [2], and mildly extend the result of Theorem 6 in [2].

Theorem 2.2. *Suppose (λ_n) is a sequence of distinct complex numbers such that $0 < \operatorname{Re}\lambda_n < \operatorname{Re}\lambda_{n+1}$ and $|\operatorname{Im}\lambda_n| \leq \operatorname{Re}\lambda_n$ for $n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\lambda_n = \infty$, and there is some $p \geq 0$ such that $|\lambda_n| \leq b_p(n)$ for $n \geq e_p$. Then for each $\ell \geq 0$, there is a sequence $(p_n) \subset \mathbf{C}[z]$ such that (p_n) satisfies (1) and (2).*

Proof. Let $\alpha > 0$ be given, fix a nonnegative integer ℓ, and define $\theta = \max(\{e_{p+1}, |\lambda_\ell|\})$. For $n, k \geq 1$, define $z_k = b_{p+1}(\theta + k - 1)$,

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{\lambda_\ell - z_k}, \qquad A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{-z_k}{\lambda_\ell - z_k},$$

and $j_n = \min(\{j : \operatorname{Re} \lambda_j > z_n/2\})$. Note that

$$|A_n| \leq \prod_{k=1}^{n} 1 + \frac{|\lambda_\ell|}{z_k - |\lambda_\ell|} \leq e^{\frac{|\lambda_\ell| z_1}{z_1 - |\lambda_\ell|} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}} \leq e^{\frac{|\lambda_\ell| z_1}{z_1 - |\lambda_\ell|} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq e^{\frac{|\lambda_\ell| z_1}{z_1 - |\lambda_\ell|}} n^{\frac{|\lambda_\ell| z_1}{z_1 - |\lambda_\ell|}}.$$

By assumption, there is some J_1 such that $|\lambda_j| \leq b_p(j)$ for $j \geq J_1$. Since

$$\lim_{x \to \infty} \frac{b_p(x a_{p+1}(x))}{b_{p+1}(x)} = 1,$$

there is some M_1 such that $b_p((x/4) a_{p+1}(x/4)) \leq 2 b_{p+1}(x/4)$ for $x \geq M_1$.

Thus, if $\max(\{J_1, e_p\}) \leq j_n \leq (n/4) a_{p+1}(n/4)$ and $n \geq M_1$, then

$$2 \operatorname{Re} \lambda_{j_n} \leq 2|\lambda_{j_n}| \leq 2 b_p(j_n) \leq 2 b_p((n/4) a_{p+1}(n/4))$$

$$\leq 4 b_{p+1}(n/4) = n \prod_{k=1}^{p+1} a_k(n/4) \leq z_n < 2 \operatorname{Re} \lambda_{j_n}.$$

Hence, if $j_n \geq \max(\{J_1, e_p\})$ and $n \geq M_1$, then $j_n > (n/4) a_{p+1}(n/4)$. Thus, $\lim_{n \to \infty} |A_n|^{1/j_n} = 1$ and there is some N_1 such that $|A_n|^{1/j_n} < \sqrt{1 + \alpha}$ for $n \geq N_1$.

By part 2 of Lemma 2.2, there is a function $\varepsilon : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ such that for $n \geq 1$

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (b_{p+1}(\theta + n - 1)^n)^{\varepsilon(n)} = z_n^{n\varepsilon(n)}$$

and $\limsup_{n \to \infty} (1 - \varepsilon(n)) \ln(n) = 1$. For $n \geq 1$ and $0 \leq k \leq p$, define

$$c_{n,k} = (a_k(\theta + n - 1) a_{p+1}(\theta + n - 1)^{\frac{1}{p+1}})^{\varepsilon(n)},$$

and note that for $n \geq 1$,

$$\prod_{k=0}^{p} c_{n,k} = \prod_{k=0}^{p} (a_k(\theta + n - 1) a_{p+1}(\theta + n - 1)^{\frac{1}{p+1}})^{\varepsilon(n)} = \prod_{k=0}^{p+1} a_k(\theta + n - 1)^{\varepsilon(n)} = z_n^{\varepsilon(n)}.$$

From part 5 of Lemma 2.2, there is some M_2 such that $a_k^{-1}(x^y) \geq a_k^{-1}(x)^y$ for $x \geq M_2$, $y \in [\frac{1}{2(p+1)}, 1)$, and $0 \leq k \leq p+1$. Since $\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 1$ and $\lim_{x \to \infty} a_k(x) = \infty$ for $0 \leq k \leq p+1$, there is some N_2 such that $\frac{1}{2} \leq \varepsilon(n)$, $a_k(\theta + n - 1)^{\frac{1}{2}} \geq 2$ for $0 \leq k \leq p$, $a_{p+1}(\theta + n - 1)^{\frac{1}{2(p+1)}} \geq 2$, and $a_{p+1}(\theta + n - 1) \geq M_2$ for $n \geq N_2$.

Thus, for $n \geq N_2$ and $0 \leq k \leq p$, we have that

$$
\begin{aligned}
&n^{\varepsilon(n)} a_{p+1}(\theta+n-1)^{\frac{\varepsilon(n)}{p+1}} \leq (\theta+n-1)^{\varepsilon(n)} a_{p+1}(\theta+n-1)^{\frac{\varepsilon(n)}{p+1}} \\
\leq& (\theta+n-1)^{\varepsilon(n)} a_{p+1-k}(\theta+n-1)^{\frac{\varepsilon(n)}{p+1}} \\
\leq& a_k^{-1}(a_k(\theta+n-1)^{\varepsilon(n)}) a_k^{-1}(a_{p+1}(\theta+n-1)^{\frac{\varepsilon(n)}{p+1}}) \\
\leq& a_k^{-1}(a_k(\theta+n-1)^{\varepsilon(n)} a_{p+1}(\theta+n-1)^{\frac{\varepsilon(n)}{p+1}}) = a_k^{-1}(c_{n,k})
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\sup_x \left(\frac{b_p(x)}{z_n^{\varepsilon(n)}}\right)^{\frac{n}{x}} \leq \prod_{k=0}^{p} \sup_x \left(\frac{a_k(x)}{c_{n,k}}\right)^{\frac{n}{x}} = \prod_{k=0}^{p} e^{\frac{n}{a_k^{-1}(c_{n,k})}} \leq e^{\frac{n(p+1)}{n^{\varepsilon(n)} a_{p+1}(\theta+n-1)^{\varepsilon(n)}}}.
$$

Thus, there is some N_3 such that $\sup_x (b_p(x)/z_n^{\varepsilon(n)})^{n/x} < \sqrt{1+\alpha}$ for $n \geq N_3$.

Next, since $\lim_{j\to\infty} \operatorname{Re}\lambda_j = \infty$, there is some J_2 such that $\operatorname{Re}\lambda_j > 2\operatorname{Re}\lambda_\ell$. Define $J = \max(\{J_2, e_p, j_{N_1}, j_{N_3}, \ell+1\})$, and observe that

$$
\sum_{k=1}^{n} 1/z_k \geq \int_\theta^{\theta+n} 1/b_{p+1}(x)dx = a_{p+2}(\theta+n) - a_{p+2}(\theta).
$$

Hence, $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_j) = \delta_{j,\ell}$ for $j \geq \ell$. Choose N_0 such that $|p_n(\lambda_j)| \leq 1$ for $\ell < j \leq J$ and $n \geq N_0$, and define $N = \max(\{N_0, N_1, N_3\})$. If $n \geq N$, $j > \ell$, and $|p_n(\lambda_j)| > 1$, then $j > J$, $\operatorname{Re}\lambda_j > z_{N_1}/2$ and there are two possibilities.

First, there is some m with $1 \leq m \leq n-1$ such that $z_m/2 \leq \operatorname{Re}\lambda_j < z_{m+1}/2$.

Second, $z_n/2 \leq \operatorname{Re}\lambda_j$. In the first case, if $m < N_1$, then $m+1 \leq N_1$ and

$$
\frac{z_{N_1}}{2} < \operatorname{Re}\lambda_{j_{N_1}} \leq \operatorname{Re}\lambda_J \leq \operatorname{Re}\lambda_j < \frac{z_{m+1}}{2} \leq \frac{z_{N_1}}{2}.
$$

Thus, in the first case, $m \geq N_1$. Similarly, $m \geq N_3$ in the first case, and hence we have

$$
\begin{aligned}
|p_n(\lambda_j)|^{\frac{1}{j}} &= \left| A_m \prod_{k=1}^{m} \frac{\lambda_j - z_k}{-z_k} \prod_{k=m+1}^{n} \frac{\lambda_j - z_k}{\lambda_\ell - z_k} \right|^{\frac{1}{j}} \leq |A_m|^{\frac{1}{j}} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_j|}{z_k} \right)^{\frac{1}{j}} \\
&\leq |A_m|^{\frac{1}{j_m}} \left(\frac{b_p(j)}{z_m^{\varepsilon(m)}} \right)^{\frac{m}{j}} < \sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha} = 1+\alpha.
\end{aligned}
$$

Similarly, in the second case, we have $|p_n(\lambda_j)|^{1/j} < 1+\alpha$, implying that for $n \geq N$

$$
\sup_{j>\ell} |p_n(\lambda_j)|^{\frac{1}{j}} < 1+\alpha.
$$

Since α is arbitrary, we have

$$
\limsup_{n\to\infty} \sup_{j>\ell} |p_n(\lambda_j)|^{\frac{1}{j}} \leq 1
$$

and $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda_j) = \delta_{j,\ell}$ for $j > \ell$.

If $\ell = 0$, then we are done. If $\ell > 0$, then define $p(z) = \prod_{k=0}^{\ell-1} \frac{z-\lambda_k}{\lambda_\ell - \lambda_k}$ and $q_n = p \cdot p_n$, and observe that $\lim_{n\to\infty} q_n(\lambda_j) = \delta_{j,\ell}$ for $j \geq 0$ and

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{j>\ell} |q_n(\lambda_j)|^{\frac{1}{j}} \leq 1.$$

This completes the proof of Theorem 2.2. □

Corollary 2.2. *Suppose* (λ_n) *is a sequence of distinct complex numbers such that* $0 < \operatorname{Re}\lambda_n < \operatorname{Re}\lambda_{n+1}$ *and* $|\operatorname{Im}\lambda_n| \leq \operatorname{Re}\lambda_n$ *for* $n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = \infty$, *and there is some* $p \geq 0$ *such that* $|\lambda_n| \leq b_p(n)$ *for* $n \geq e_p$. *Then the diagonal operator with associated sequence* (λ_n) *is synthetic.*

3. Discussion

One may wonder how far one may push the technique used in Theorem 2.2 to constructively produce examples of synthetic diagonal operators on H_1. To help answer this question we turn to some results from [1]. The two theorems from [1] of the greatest importance to this paper are stated below.

Theorem 3.1 ([1] Theorem 3.1). *For any* $p > 2$, *writing* $\lambda_n = n^p$ $(n \geq 0)$, *there exists a complex sequence* $\{c_n\}$ *satisfying*

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \delta_p = e^{-\pi \cot \frac{\pi}{p}} \tag{3.1}$$

such that

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

(which converges for $\operatorname{Re} z \geq 0$, *and extends as a* C^∞ *function to the closed right half-plane) has an infinite-order zero at* $z = 0$. *In other terms,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n^{pk} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Moreover, for positive x

$$|f(x)| \leq Ce^{-cx^{-1/p}},$$

where C, c *are positive constants.*

For integral p, *the constant on the right-hand side of (3.1) is sharp, in the sense that no such sequence* $\{c_n\}$ *exists with* $0 < \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < \delta_p$.

Theorem 3.2 ([1] Theorem 2.1). *Let $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, and*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{\lambda_n} = 0.$$

Suppose, for some $\varepsilon > 0$, $|c_n| \le e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda_n}}$. If

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n^k = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

then all c_n vanish.

The use of the two above theorems becomes evident when compared with the following result (stated in abbreviated form) from [3].

Theorem 3.3 (Theorem 3 in [3]). *Let D be a cyclic diagonal operator on $\mathcal{H}_R$ having distinct eigenvalues $\{\lambda_n\}$. Then the following are equivalent:*

(1) *D admits spectral synthesis.*
(2) *There does not exist a sequence $\{w_n\}$ of complex numbers, not identically zero, for which $\limsup |w_n|^{1/n} < 1$ and $0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda_n^k$ for all $k \ge 0$.*

A combination of Theorems 3.1, 3.2, and 3.3 yields the following corollary.

Corollary 3.1. *Let $D : H_1 \to H_1$ be the diagonal operator with associated sequence (n^p). Then the following hold:*

(1) *If $p > 2$, then D is not synthetic.*
(2) *If $1 < p \le 2$, then D is synthetic.*

Consider the diagonal operator $D : H_1 \to H_1$ with associated sequence (n^p).

If $p > 2$, then by Corollary 3.1 and Theorem 1.3 it would be fruitless to try to construct polynomials which separate points and satisfy the minimal growth condition.

However, if $1 < p \le 2$ then Corollary 3.1 and Theorem 1.3 guarantee the existence of polynomials which separate points and satisfy the minimal growth condition.

How shall such polynomials be constructed? Observe that since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, the ideas used to prove Theorem 2.2 may not apply. To make this precise, let $(p_n) \subseteq \mathbf{C}[z]$ be such that (p_n) satisfies conditions (2.1) and (2.2) for $j = 0$. How would such polynomials look like? Once again, as it was mentioned above, the "obvious"polynomials $o_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - k^p)/(-k^p)$ fail. To see this, note that by the Mean Value Theorem $(n+1)^p - k^p \ge (n+1-k)pk^{p-1}$. Hence

$$|o_n(\lambda_{n+1})| = \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^p - k^p}{k^p} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{p(n+1-k)}{k} = p^n,$$

implying that $\sup_{k>0} |o_n(\lambda_k)|^{1/k} \geq p^{n/(n+1)}$.

Assume, without loss of generality, that no p_n is constant and $p_n(0) = 1$ for all $n \geq 1$. For each $n \geq 1$ write $p_n(z) = \prod_{k=1}^{d_n}(z - z_{n,k})/(-z_{n,k})$ for some $z_{n,1}, \ldots, z_{n,d_n} \in \mathbb{C}$. Define $q_n(z) = \prod_{k=1}^{d_n}(z - |z_{n,k}|)/(-|z_{n,k}|)$ and note that the sequence (q_n) also satisfies (2.1) and (2.2) for $j = 0$. Hence, we may assume, without loss of generality, that for $n \geq 1$, p_n is not constant, $p_n(0) = 1$, and p_n has real positive zeroes.

Suppose momentarily that $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)/(-z_k)$ for some sequence of positive numbers (z_n) and reason heuristically rather than precisely. One possibility is that $\{\lambda_n : n \geq 1\} \subseteq \{z_n : n \geq 1\}$. However, we have already seen that the polynomials $\prod_{k=1}^{n}(z - \lambda_k)/(-\lambda_k)$ do not satisfy (2). If this is the case, then the sequence (p_n) would seem to fail for the same reason that the sequence (o_n) failed. Thus, there is some $\lambda_{n_0} \notin \{z_n : n \geq 1\}$. Then by Lemma 2.1 we have $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n = \infty$. This implies that (z_n) grows slower than (λ_n), and hence that p_n grows faster than o_n. Thus, it would seem that (p_n) does not satisfy (2).

Therefore, it appears that there is not some sequence of positive numbers (z_n) for which $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)/(-z_k)$ satisfies conditions (1) and (2), and greater creativity would be required to construct polynomials (p_n).

Список литературы

[1] J. M. Anderson, D. Khavinson, and H. S. Shapiro, "Analytic continuation of Dirichlet series Revista Matematica Iberoamericana, 11, no. 2, 453 - 476 (1995).

[2] I. Deters, "A connection between operator topologies, polynomial interpolation, and synthesis of diagonal operators J. Math. Anal. Appl., 350, 354 – 359 (2009).

[3] I. Deters and S. M. Seubert, "Cyclic vectors of diagonal operators on the space of functions analytic on a disk J. Math. Anal. Appl., 334, 1209 – 1219 (2007).

[4] I. Deters and S. M. Seubert, "An application of entire function theory to the synthesis of diagonal operators on the space of entire functions Houston Journal Of Mathematics, 38, 201 - 207 (2012).

[5] A. S. B. Holland, Introduction To The Theory Of Entire Functions, Academic Press (1973).

[6] G. Latta and G. Polya, Complex Variables, John Wiley And Sons, Inc. (1974).

[7] J. Marin Jr. and S. M. Seubert, "Cyclic vectors of diagonal operators on the space of entire functions," J. Math. Anal. Appl. 320, 599 - 610 (2006).

[8] W. Rudin, Real And Complex Analysis, 3rd Edition, McGraw-Hill (1987).

[9] S. M. Seubert, "Spectral Synthesis Of Jordan Operators J. Math. Anal. Appl., 249, 652 - 667 (2000).

[10] S. M. Seubert, "Spectral synthesis of diagonal operators on the space of entire functions," Houston Journal of Mathematics, 34 no. 3, 807 - 816 (2008).

[11] S. M. Seubert and J. Gordon Wade, "Spectral synthesis of diagonal operators and representing systems on the space of entire functions," J. Math. Anal. Appl., 344, 9 – 16 (2008).

[12] R. V. Sibilev, Uniqueness theorem for Wolff-Denjoy series, Algebra i Analiz, 7, 170 - 199 (1995); English translation in St. Petersburg Math. J., 7, 145 - 168 (1996).

Поступила 29 сентября 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 39-49.

CONVERGENCE IN MEASURE OF STRONG LOGARITHMIC MEANS OF DOUBLE FOURIER SERIES

U. GOGINAVA AND L. GOGOLADZE

Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

E-mails: *zazagoginava@gmail.com*, *lgogoladze1@hotmail.com*

Abstract. Nörlund strong logarithmic means of double Fourier series acting from space $L\log L(\mathbf{T}^2)$ into space $L_p(\mathbf{T}^2)$, $0<p<1$, are studied. The maximal Orlicz space such that the Nörlund strong logarithmic means of double Fourier series for the functions from this space converge in two-dimensional measure is found.

MSC2010 numbers: 42A24.

Keywords: double Fourier series; Orlicz space; convergence in measure.

1. Introduction

It is known that the rectangular partial sums of double Fourier series $S_{n,m}(f;x,y)$ of a function $f\in L_p(\mathbf{T}^2)$, $\mathbf{T}:=[-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, converge in L_p norm to the function f as $n\to\infty$ (see [14]). In the case $L_1(\mathbf{T}^2)$ this result does not hold. But for $f\in L_1(\mathbf{T})$, the operator $S_n(f;x)$ is of weak type $(1,1)$ (see [16]). This fact implies convergence of $S_n(f;x)$ in measure on $\mathbf{T}$ to the function $f\in L_1(\mathbf{T})$. However, for double Fourier series this result does not hold (see [7, 9]). Moreover, it is proved that the quadratic partial sums $S_{n,n}(f;x,y)$ of double Fourier series do not converge in two-dimensional measure on $\mathbf{T}^2$ even for functions from Orlicz spaces wider than the Orlicz space $L\log L(\mathbf{T}^2)$. On the other hand, it is well-known that the rectangular partial sums $S_{n,m}(f;x,y)$ of a function $f\in L\log L(\mathbf{T}^2)$ converge in measure on $\mathbf{T}^2$.

Note that the classical regular summation methods often improve the convergence of Fourier series. For instance, the Fejér means of the double Fourier series of a function $f\in L_1(\mathbf{T}^2)$ converge in $L_1(\mathbf{T}^2)$ norm to the function f (see [14]). These means represent the particular case of the Nörlund means.

[0]The research of U. Goginava was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grant no.31/48 (Operators in some function spaces and their applications in Fourier analysis)

The Nörlund logarithmic means of a double Fourier series are defined by

$$t_{n,m}(f;x,y) := \frac{1}{l_n l_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_{i,j}(f;x,y)}{(n-i+1)(m-j+1)},$$

where $l_n := \sum_{k=1}^{n+1}(1/k)$ and $S_{i,j}(f;x,y)$ denote the rectangular partial sums of the double Fourier series of the function f.

It is well known that the method of Nörlund logarithmic means of double Fourier series is weaker than the Cesбro method of any positive order. In [10] Tkebuchava proved that these means of double Fourier series in general do not converge in two-dimensional measure on $\mathbb{T}^2$ even for functions from Orlicz spaces wider than the Orlicz space $L\log L(\mathbb{T}^2)$. For Nörlund logarithmic means $t_{n,m}(f;x,y)$ of double Fourier series Tkebuchava [11] proved the following result.

Theorem 1.1. *Let $L_Q(\mathbb{T}^2)$ be an Orlicz space, such that*

$$L_Q(\mathbb{T}^2) \nsubseteq L\log L(\mathbb{T}^2).$$

Then the set of function from the Orlicz space $L_Q(\mathbb{T}^2)$ with logarithmic means of rectangular partial sums of double Fourier series, convergent in measure on $\mathbb{T}^2$, is of first Baire category in $L_Q(\mathbb{T}^2)$.

On the other hand, as it was noted in [1] Remark 1, the regularity of summation method does not allow to deduce the summability in measure of a functional sequence from its convergence in measure.

In this paper we consider the strong logarithmic means of rectangular partial sums of double Fourier series and prove that these means are acting from the space $L\log L(\mathbb{T}^2)$ into the space $L_p(\mathbb{T}^2), 0 < p < 1$ (Theorem 4.1). This fact implies convergence of strong logarithmic means of rectangular partial sums of double Fourier series in measure on $\mathbb{T}^2$ to the function $f \in L\log L(T^2)$ (Corollary 4.1). Uniting these results with Tkebuchava result from [10] (see Theorem 1.1), we prove that the rectangular partial sums of double Fourier series converge in measure for all functions from Orlicz space if and only if their Nörlund logarithmic means and strong Nörlund logarithmic means converge in measure (Theorem 4.3). Thus, not all classical regular summation methods can improve the convergence in measure of double Fourier series.

For the results on summability of logarithmic means of Walsh-Fourier series we refer the papers [3] - [5], [12, 13].

2. Double Fourier series and conjugate functions

We denote by $L_0 = L_0(\mathbf{T}^2)$ the Lebesgue space of functions that are measurable and finite almost everywhere on $\mathbf{T}^2$.

Let $L_Q = L_Q(\mathbf{T}^2)$ be the Orlicz space (see [8]), generated by Young function Q, that is, Q is a convex continuous even function, such that $Q(0) = 0$ and

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{Q(u)}{u} = +\infty, \quad \lim_{u\to 0}\frac{Q(u)}{u} = 0.$$

This space is endowed with the norm

$$\|f\|_{L_Q(\mathbf{T}^2)} = \inf\{k > 0 : \iint\limits_{\mathbf{T}^2} Q(|f(x,y)|/k)dxdy \le 1\}.$$

In particular, if $Q(u) = u\log^+ u$, $\log^+ u := 1_{\{u>1\}}\log u$, then the corresponding space will be denoted by $L\log L(\mathbf{T}^2)$.

Given a function $f \in L_1(\mathbf{T}^2)$, its double Fourier series is defined by

$$\sum_{(n,m)\in\mathbf{Z}^2} \widehat{f}(m,n)\, e^{imx}e^{iny}, \tag{2.1}$$

where $\mathbf{Z}$ is the set of integers and

$$\widehat{f}(m,n) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\mathbf{T}^2} f(x,y)e^{-imx}e^{-iny}dxdy \tag{2.2}$$

are the Fourier coefficients of f.

Denote by $S_{n,m}(f;x,y)$ the $(n,m)^{th}$ symmetric rectangular partial sums of series (2.1). As is it well-known, we have

$$S_{n,m}(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\mathbf{T}^2} f(s,t)\, D_n(x-s)\, D_m(y-t)\, dsdt,$$

where

$$D_n(u) := \frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)}$$

is the Dirichlet kernel.

One can associate three conjugate series to the double Fourier series (2.1):

(a) conjugate with respect to the first variable:

$$\widetilde{f}^{(1,0)} \sim \sum_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} (-i\,\mathrm{sign}j)\, \widehat{f}(j,k)\, e^{i(jx+ky)} \tag{2.3}$$

(b) conjugate with respect to the second variable:

$$\widetilde{f}^{(0,1)} \sim \sum_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} (-i\,\mathrm{sign}k)\, \widehat{f}(j,k)\, e^{i(jx+ky)} \tag{2.4}$$

(c) conjugate with respect to both variables:

$$\widetilde{f}^{(1,1)} \sim \sum_{(j,k)\in Z^2} (-i\,\mathrm{sign}j)(-i\,\mathrm{sign}k)\,\widehat{f}(j,k)\,e^{i(jx+ky)}. \tag{2.5}$$

It is well known that for an integrable function f we have

$$\widetilde{f}^{(1,0)}(x,y) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{T}} \frac{f(s,y)}{2\tan\left(\frac{x-s}{2}\right)}ds,$$

$$\widetilde{f}^{(0,1)}(x,y) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{T}} \frac{f(x,t)}{2\tan\left(\frac{y-t}{2}\right)}dt$$

and

$$\widetilde{f}^{(1,1)}(x,y) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathrm{T}^2} \frac{f(s,t)}{2\tan\left(\frac{x-s}{2}\right)2\tan\left(\frac{y-t}{2}\right)}dsdt.$$

Privalov's theorem (see, e.g., [16], vol. II, p. 121) immediately implies the a. e. existence of $\widetilde{f}^{(1,0)}$ and $\widetilde{f}^{(0,1)}$ under the assumption $f\in L_1(\mathrm{T}^2)$. The a. e. existence of $\widetilde{f}^{(1,1)}$ for $f\in L\log L(\mathrm{T}^2)$ was proved by Zygmund (see [15, 17]).
We consider the symmetric rectangular partial sums of series (2.3)-(2.5) defined by

$$\widetilde{S}^{10}_{n,m}(f;x,y) := \sum_{|j|\le n}\sum_{|k|\le m} (-i\mathrm{sign}j)\,\widehat{f}(j,k)\,e^{i(jx+ky)},$$

$$\widetilde{S}^{01}_{n,m}(f;x,y) := \sum_{|j|\le n}\sum_{|k|\le m} (-i\mathrm{sign}k)\,\widehat{f}(j,k)\,e^{i(jx+ky)}$$

and

$$\widetilde{S}^{11}_{n,m}(f;x,y) := \sum_{|j|\le n}\sum_{|k|\le m} (-i\mathrm{sign}j)(-i\mathrm{sign}k)\,\widehat{f}(j,k)\,e^{i(jx+ky)}.$$

It follows from (2.2) that

$$\widetilde{S}^{10}_{n,m}(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathrm{T}^2} f(s,t)\,\widetilde{D}_n(x-s)\,D_m(y-t)\,dsdt,$$

$$\widetilde{S}^{01}_{n,m}(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathrm{T}^2} f(s,t)\,D_n(x-s)\,\widetilde{D}_m(y-t)\,dsdt$$

and

$$\widetilde{S}^{11}_{n,m}(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathrm{T}^2} f(s,t)\,\widetilde{D}_n(x-s)\,\widetilde{D}_m(y-t)\,dsdt,$$

where

$$\widetilde{D}_m(u) := \frac{1}{2\tan(u/2)} - \frac{\cos((m+1)u)}{2\sin(u/2)}, \quad m=1,2,\ldots \tag{2.6}$$

is the conjugate Dirichlet kernel.

In this paper we also consider the following operators

$$\widetilde{\overline{S}}^{10}_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{T}^2} f(s,t)\,\widetilde{D}_n(x-s)\,\overline{D}_m(y-t)\,dsdt,$$

$$\widetilde{\overline{S}}^{01}_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{T}^2} f(s,t)\,\overline{D}_n(x-s)\,\widetilde{D}_m(y-t)\,dsdt$$

and

$$\overline{S}_{n,m}(f;x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{T}^2} f(s,t)\,\overline{D}_n(x-s)\,\overline{D}_m(y-t)\,dsdt,$$

where $\overline{D}_n(u)$ is the modified Dirichlet kernel defined by

$$\overline{D}_n(u):=\frac{\sin(nu)}{2\tan(u/2)}.$$

3. Strong Riesz logarithmic and strong Nörlund logarithmic means

The strong Riesz logarithmic means, the strong Nörlund logarithmic means and the strong Fejér means of rectangular partial sums $\widetilde{S}^{ab}_{i,j}f$ are defined by the following formulas, respectively:

$$\widetilde{R}^{ab}_{n,m}(f;x,y):=\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|\widetilde{S}^{ab}_{i,j}(f;x,y)\right|}{(i+1)(j+1)},$$

$$\widetilde{\tau}^{ab}_{n,m}(f;x,y):=\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|\widetilde{S}^{ab}_{i,j}(f;x,y)\right|}{(n-i+1)(m-j+1)},$$

$$\widetilde{\sigma}^{ab}_{n,m}(f;x,y):=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|\widetilde{S}^{ab}_{i,j}(f;x)\right|,\ a,b=0,1.$$

Denote

$$\widetilde{R}^{00}_{n,m}(f)=R_{n,m}(f),\ \widetilde{S}^{00}_{n,m}(f)=S_{n,m}(f),$$
$$\widetilde{\tau}^{00}_{n,m}(f)=\tau_{n,m}(f),\ \widetilde{\sigma}^{00}_{n,m}(f)=\sigma_{n,m}(f).$$

In [6], among others, it was proved the following result.

Theorem 3.1. *Let $f\in L\log L(\mathbf{T}^2)$ and $0<p<1$. Then for any $a,b=0,1$ the following inequality holds*

$$\left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\sup_{n,m}\widetilde{\sigma}^{(a,b)}_{n,m}(f;x,y)\right)^p dxdy\right)^{1/p}\le c_1\iint_{\mathbf{T}}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dxdy+c_2.$$

Applying Hardy's transformation, we obtain

$$l_n l_m \widetilde{R}^{ab}_{n,m}(f;x,y) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\widetilde{\sigma}^{ab}_{i,j}(f;x,y)}{(i+2)(j+2)} + \tag{3.1}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j+2}\widetilde{\sigma}^{ab}_{n,j}(f;x,y)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+2}\widetilde{\sigma}^{ab}_{i,m}(f;x,y)+\widetilde{\sigma}^{ab}_{n,m}(f;x,y).$$

Consequently, for $f\in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$ from Theorem 3.1 we obtain

$$\left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\widetilde{R}^{ab}_{n,m}(f;x,y)\right)^p dxdy\right)^{1/p} \tag{3.2}$$

$$\leq 4\left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\sup_{n,m}\widetilde{\sigma}^{(a,b)}_{n,m}(f;x,y)\right)^p dxdy\right)^{1/p}$$

$$\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dxdy+c_2.$$

Since

$$\left(\int_{\mathbf{T}}\left(\sup_n\sigma_n(f;x)\right)^p dx\right)^{1/p},\left(\int_{\mathbf{T}}\left(\sup_n\widetilde{\sigma}_n(f;x)\right)^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq c_1\int_{\mathbf{T}}|f(x)|\,dx,\ f\in L_1(\mathbf{T}),\quad 0<p<1.$$

Similarly, for one dimensional case we can show that

$$\left(\int_{\mathbf{T}}(R_n(f;x))^p dx\right)^{1/p},\left(\int_{\mathbf{T}}\left(\widetilde{R}_n(f;x)\right)^p dx\right)^{1/p} \tag{3.3}$$

$$\leq c_1\int_{\mathbf{T}}|f(x)|\,dx,\ f\in L_1(\mathbf{T}),\quad 0<p<1,$$

where $\sigma_n(f;x)$, $\widetilde{\sigma}_n(f;x)$, $R_n(f;x)$ and $\widetilde{R}_n(f;x)$ are the strong Fejér and the strong Riesz means of Fourier series and conjugate Fourier series, respectively.

4. Main Results

Theorem 4.1. *Let $f\in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$ and $0<p<1$. Then the following inequality holds*

$$\left(\iint_{\mathbf{T}^2}(\tau_{n,m}(f;x,y))^p dxdy\right)^{1/p}\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dxdy+c_2.$$

Theorem 4.2. *Let $f \in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$ and $0 < p < 1$. Then*

$$\iint\limits_{\mathbf{T}^2} \left(\frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{|S_{i,j}(f;x,y) - f(x,y)|}{(n-i+1)(m-j+1)} \right)^p dxdy \to 0$$

as $n,m \to \infty$.

Corollary 4.1. *Let $f \in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right)$. Then*

$$\frac{1}{l_n l_m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{|S_{i,j}(f;x,y) - f(x,y)|}{(n-i+1)(m-j+1)} \to 0$$

in measure on $\mathbf{T}^2$ as $n,m \to \infty$.

Uniting these results with Tkebuchava theorem (Theorem 1.1), we can state the following result.

Theorem 4.3. *The following assertions are equivalent:*

(a) *the embedding $L_Q(\mathbf{T}^2) \subset L\log L(\mathbf{T}^2)$ holds;*

(b) *the strong Nörlund logarithmic means of double Fourier series for all functions from Orlicz space $L_Q(\mathbf{T}^2)$ converges in measure on $\mathbf{T}^2$;*

(c) *the Nörlund logarithmic means of double Fourier series for all functions from Orlicz space $L_Q(\mathbf{T}^2)$ converges in measure on $\mathbf{T}^2$.*

5. Proof of main results

Proof of Theorem 4.1. Setting $\alpha_n(t) := \sin((n+1)t)$ and $\beta_n(t) := \cos((n+1)t)$, we can write

$$S_{n-k}(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(t) \frac{\sin((n-k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)} dt \tag{5.1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(t) \sin((n+1)(x-t)) \frac{\cos((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)} dt$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(t) \cos((n+1)(x-t)) \frac{\sin((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(t) \sin((n+1)(x-t)) \left(\frac{\cos((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)} - \frac{\cos((x-t)/2)}{2\sin((x-t)/2)} \right) dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\frac{\sin((n+1)(x-t))}{2\tan((x-t)/2)}dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\cos((n+1)(x-t))\frac{\sin((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)}dt$$
$$= -\frac{\alpha_n(x)}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\beta_n(t)\widetilde{D}_k(x-t)\,dt+\frac{\beta_n(x)}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\alpha_n(t)\widetilde{D}_k(x-t)\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\frac{\sin((n+1)(x-t))}{2\tan((x-t)/2)}dt$$
$$-\frac{\beta_n(x)}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\beta_n(t)\frac{\sin((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)}dt$$
$$-\frac{\alpha_n(x)}{\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)\alpha_n(t)\frac{\sin((k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)}dt$$
$$= -\alpha_n(x)\widetilde{S}_k(f\beta_n;x)+\beta_n(x)\widetilde{S}_k(f\alpha_n;x)$$
$$-\beta_n(x)S_k(f\beta_n;x)-\alpha_n(x)S_k(f\alpha_n;x)+\overline{S}_{n+1}(f;x).$$

Hence

$$\tau_n(f;x) := \frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|S_k(f;x)|}{n-k+1}\le \widetilde{R}_n(f\beta_n,x)+\widetilde{R}_n(f\alpha_n,x)$$
$$+R_n(f\beta_n,x)+R_n(f\alpha_n,x)+\overline{S}_{n+1}(f;x).$$

Since

$$\left(\int_{\mathbf{T}}|S_n(f;x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le c_p\int_{\mathbf{T}}|f(x)|\,dx,$$

from (3.3) we conclude that for $0<p<1$ and $f\in L_1(\mathbf{T})$

$$\left(\int_{\mathbf{T}}(\tau_n(f;x))^p\,dx\right)^{1/p}\le c_p\int_{\mathbf{T}}|f(x)|\,dx, f\in L_1(\mathbf{T}). \tag{5.2}$$

Now we consider the rectangular partial sums of double Fourier series. In view of (5.1) we can write

$$\begin{aligned} S_{n-i,m-j}(f;x,y) &= S_{n-i}(S_{m-j}(f;y);x) = -\alpha_n(x)\widetilde{S}_i(S_{m-j}(f;y)\beta_n;x)\\ &+\beta_n(x)\widetilde{S}_i(S_{m-j}(f;y)\alpha_n;x)-\beta_n(x)S_i(S_{m-j}(f;y)\beta_n;x)\\ &-\alpha_n(x)S_i(S_{m-j}(f;y)\alpha_n;x)+\overline{S}_{n+1}(S_{m-j}(f,y);x)\\ &=\sum_{s=1}^{4}I_s(i,j;x,y)+\overline{S}_{n+1}(S_{m-j}(f,y);x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Next, for $I_1(i,j;x,y)$, in view of (5.1) we have

$$
\begin{aligned}
(5.4)\quad I_1(i,j;x,y) &= -\alpha_n(x)\, S_{m-j}\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x);y\right)\\
&= \alpha_n(x)\,\alpha_m(y)\,\widetilde{S}_j\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x)\,\beta_m;y\right) - \alpha_n(x)\,\beta_m(y)\,\widetilde{S}_j\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x)\,\alpha_m;y\right)\\
&\quad +\alpha_n(x)\,\beta_m(y)\,S_j\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x)\,\beta_m;y\right) + \alpha_n(x)\,\alpha_m(y)\,S_j\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x)\,\alpha_m;y\right)\\
&\quad -\alpha_n(x)\,\overline{S}_{m+1}\left(\widetilde{S}_i(f\beta_n;x);y\right) = \alpha_n(x)\,\alpha_m(y)\,\widetilde{S}_{ij}^{11}(f\beta_n\beta_m;x,y)\\
&\quad -\alpha_n(x)\,\beta_m(y)\,\widetilde{S}_{ij}^{11}(f\beta_n\alpha_m;x,y) + \alpha_n(x)\,\beta_m(y)\,\widetilde{S}_{ij}^{10}(f\beta_n\beta_m;x,y)\\
&\quad +\alpha_n(x)\,\alpha_m(y)\,\widetilde{S}_{ij}^{10}(f\beta_n\alpha_m;x,y) - \alpha_n(x)\,\overline{\widetilde{S}}_{i,m+1}^{01}(f\beta_n;x,y)\\
&= \sum_{l=1}^{4} I_{1l}(i,j;x,y) + I_{15}(i,m;x,y).
\end{aligned}
$$

From (3.2) we obtain

$$
\begin{aligned}
(5.5)\quad &\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_n l_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{|I_{11}(i,j;x,y)|}{(i+1)(j+1)}\right)^p dxdy\\
&\le \iint_{\mathbf{T}^2}\left|\widetilde{R}_{n,m}^{11}(f\beta_n\beta_m;x,y)\right|^p dxdy\\
&\le c_1\iint_{\mathbf{T}^2}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dxdy + c_2.
\end{aligned}
$$

Similarly it can be shown that

$$
\begin{aligned}
(5.6)\quad &\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_n l_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{|I_{1l}(i,j;x,y)|}{(i+1)(j+1)}\right)^p dxdy\\
&\le c_1\iint_{\mathbf{T}^2}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dxdy + c_2, \quad l=2,3,4.
\end{aligned}
$$

Now, we turn to $I_{15}(i,m;x,y)$. Taking into account that

$$\overline{\widetilde{S}}_{i,m+1}^{10}(f\beta_n;x,y) = \widetilde{S}_i\left(\overline{S}_{m+1}(f;y)\,\beta_n;x\right),$$

$$f(\cdot,y)\in L\log L(\mathbf{T}) \text{ for a.e. } y\in\mathbf{T} \text{ and } f\in L\log L\left(\mathbf{T}^2\right),$$

and

$$\int_{\mathbf{T}}\left|\overline{S}_{m+1}(f;x,y)\right|dx \le c_1\int_{\mathbf{T}}|f(x,y)|\log^+|f(x,y)|\,dx + c_2,$$

from (3.3) we obtain

$$\left(\int_{\mathbf{T}}\left(\frac{1}{l_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\left|\overline{S}^{10}_{i,m+1}\left(f\beta_n;x,y\right)\right|}{i+1}\right)^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \int_{\mathbf{T}}\left|\overline{S}_{m+1}\left(f;x,y\right)\right| dx \leq c_1\int_{\mathbf{T}}\left|f\left(x,y\right)\right|\log^+\left|f\left(x,y\right)\right| dx + c_2.$$

Consequently,

$$\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|I_{15}\left(i,m;x,y\right)\right|}{\left(i+1\right)\left(j+1\right)}\right)^p dxdy \tag{5.7}$$

$$\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}\left|f\left(x,y\right)\right|\log^+\left|f\left(x,y\right)\right| dxdy + c_2.$$

A combination of (5.4)-(5.7) yields

$$\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|I_1\left(i,j;x,y\right)\right|}{\left(i+1\right)\left(j+1\right)}\right)^p dxdy \tag{5.8}$$

$$\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}\left|f\left(x,y\right)\right|\log^+\left|f\left(x,y\right)\right| dxdy + c_2.$$

Similarly, we can prove that

$$\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|I_s\left(i,j;x,y\right)\right|}{\left(i+1\right)\left(j+1\right)}\right)^p dxdy \tag{5.9}$$

$$\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}\left|f\left(x,y\right)\right|\log^+\left|f\left(x,y\right)\right| dxdy + c_2, \quad s = 2,3,4,$$

and

$$\left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|\overline{S}_{n+1}\left(S_{m-j}\left(f,y\right);x\right)\right|}{\left(i+1\right)\left(j+1\right)}\right)^p dxdy\right)^{1/p} \tag{5.10}$$

$$= \left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|S_{m-j}\left(\overline{S}_{n+1}\left(f,x\right);y\right)\right|}{\left(i+1\right)\left(j+1\right)}\right)^p dxdy\right)^{1/p}$$

$$= \left(\iint_{\mathbf{T}^2}\left(\frac{1}{l_m}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left|S_{m-j}\left(\overline{S}_{n+1}\left(f,x\right);y\right)\right|}{j+1}\right)^p dxdy\right)^{1/p}$$

$$\leq c_1\iint_{\mathbf{T}^2}\left|f\left(x,y\right)\right|\log^+\left|f\left(x,y\right)\right| dxdy + c_2.$$

Combining (5.3) and (5.8) - (5.10), we complete the proof of Theorem 4.1. □

Proof of Theorem 4.2. The result follows immediately from the density of polynomials and by virtue of standard arguments (see [16]). □

Список литературы

[1] G. Gát, U. Goginava, G. Tkebuchava, Convergence of logarithmic means of multiple Walsh-Fourier series. Anal. Theory Appl. 21 (2005), no. 4, 326–338.

[2] Gát, G.; Goginava, U.; Tkebuchava, G. Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), no. 1, 535–549.

[3] G. Gát, U. Goginava, K. Nagy, On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system. Studia Sci. Math. Hungar. 46 (2009), no. 3, 399–421.

[4] G. Gát and U. Goginava, uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 22 (2006), no. 2, 497–506.

[5] U. Goginava, The weak type inequality for the maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejér means of the two-dimensional Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory 154 (2008), no. 2, 161–180.

[6] L. Gogoladze, The (H, k)-summability of multiple trigonometric Fourier series. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977), no. 4, 937–958.

[7] R. Getsadze, *On the divergence in measure of multiple Fourier seties*, Some problems of functions theory, 4 (1988), 84-117(in Russian).

[8] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz space*(English translation), P. Noorhoff (Groningen, 1961).

[9] S. V. Konyagin, Divergence with respect to measure of multiple Fourier series. (Russian) Mat. Zametki 44 (1988), no. 2, 196–201, 286; translation in Math. Notes 44 (1988), no. 1-2, 589–592 (1989)

[10] G. Tkebuchava, Subsequences of partial sums of multiple Fourier and Fourier-Walsh series. Bull. Georgian Acad. Sci. 169 (2004), no. 2, 252–253.

[11] G. Tkebuchava, Divergence in measure of logarithmic means of multiple Fourier series. Bull. Georgian Acad. Sci. 170 (2004), no. 2, 224–225

[12] O. Szász, On the logarithmic means of rearranged partial sums of Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 705–711.

[13] K. Yabuta, Quasi-Tauberian theorems, applied to the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means, Тфhфku Math. Journ. 22 (1970), 117–129.

[14] L. V. Zhizhiashvili, *Some problems of multidimensional harmonic analysis*, Tbilisi, TGU, 1996 (Russian).

[15] L. V. Zhizhiashvili, Trigonometric Fourier Series and Their Conjugates, Mathematics and its Applications, 372. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[16] A. Zygmund, *Trigonometric Series, vol. 1*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

[17] A. Zygmund, On the boundary values of functions of several complex variable, Fund. Math. 36 (1949), 207-235.

Поступила 8 февраля 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 50-67.

О МНОГОЧЛЕНАХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: vachagan.margaryan@yahoo.com

Аннотация. Для одного класса многочленов найдены необходимые и достаточные условия чтобы эти многочлены были гипоэллиптическими относительно группы переменных.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Keywords: гипоэллиптичность, частичная гипоэллиптичность, гипоэллиптичность относительно группы переменных.

1. Основные обозначения и определения

Пусть N- множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество n - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0 \quad j = 1, ..., n$, R^n - n- мерное вещественное эвклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $C = R \times iR \quad (i^2 = -1)$, $R_+^n = \{\xi \in \ R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$ и $R_0^n = \{\xi \in \in R^n, \xi_1 ... \xi_n \neq 0\}$.

Для $\xi, \eta \in R^n$, $k, r \in N_0$, $1 \leq k < n$, $1 \leq r \leq n$, $t \in R_+$, $\lambda \in R_+^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + ... + \xi_n\eta_n$, $\xi \cdot \eta = (\xi_1 \cdot \eta_1, ..., \xi_n \cdot \eta_n)$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$, $\quad \xi = (\xi', \xi'')$, $\quad \xi(r) = (\xi_1, ..., \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, ..., \xi_n)$, $\quad |\xi| = (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^{1/2}$, $\quad t^\lambda = (t^{\lambda_1}, ..., t^{\lambda_n})$, $\quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_n!$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial / \partial \xi_j \quad j = 1, ..., n$.

Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$, многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha, \alpha \in N_0^n, a_\alpha \neq 0\}$, $\quad a_\alpha \in C$.

В дальнейшем будем считать, что $D_1 P \cdot ... \cdot D_n P \neq 0$.

Многогранником Ньютона или характеристическим многогранником (х.м.) набора (P), (многочлена P) называется минимальный выпуклый многогранник $\Re(P) \subset R_+^n$ содержащий множество $(P) \cup \{0\}$.

Многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re$ неотрицательны (положительны).

Для х.м. $\Re(P)$ набора $(P) \subset N_0^n$ введем следующие обозначения
$\Re^0(P)$ - множество вершин многогранника $\Re(P)$,
$\Lambda(\Re(P))$ - множество единичных, внешних (относительно $\Re(P)$) нормалей
$(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re(P)$,

$$\Lambda^+(\Re(P)) \equiv \{\lambda \in \Lambda(\Re(P)) \quad \lambda > 0 \quad (\lambda \in R_+^n \cap R_0^n)\},$$

$$\partial\Re(P) \equiv \{\nu \in \Re(P), \quad \exists\lambda \in \Lambda(\Re(P)); \quad (\nu,\lambda) = d(\lambda), \quad d(\lambda) \equiv \max_{\nu\in\Re(P)}(\nu,\lambda)\}.$$

Грань Γ многогранника $\Re \subset R_+^n$ называется главной, если существует (внешняя) нормаль λ этой грани, имеющая хотя бы одну положительную координату.

Определение 1.1. *(см. [1]) Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1,...,\xi_n)$ называется гипоэллиптическим, если для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $\quad D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.*

Определение 1.2. *(см. [1]) Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1,...,\xi_n)$ называется частично гипоэллиптическим относительно $\xi' \equiv (\xi_1,...,\xi_k), k < n$, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий*

(1) для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ при $|\xi| \to \infty$, когда $\xi'' = (\xi_{k+1},...,\xi_n)$ остается ограниченным $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$,

(2) если многочлен P представить в следующем виде

$$P(\xi) = \sum_{\alpha''\in N_0^{n-k}} (\xi'')^{\alpha''} P_{\alpha''}(\xi'),$$

то a) многочлен $P_{0''}(\xi')$ гипоэллиптичен как многочлен от ξ',

b) $P_{\alpha''}(\xi')/P_{0''}(\xi') \to 0$ при $|\xi'| \to \infty\, (\xi' \in R^k)$ для любого $0 \neq \alpha'' \in N_0^{n-k}$.

Определение 1.3. *(см. [3]). Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1,...,\xi_n)$ называется гипоэллиптическим относительно $\xi' = (\xi_1,...,\xi_k)$ $k < n$, если для любых $0 \neq \alpha \in N_0^n$ и последовательностей $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$*

$$D^\alpha P(\xi^s)/P(\xi^s) \to 0 \text{ как только } |(\xi^s)'| \to \infty \text{ при } s \to \infty.$$

Определение 1.4. *(см. [4]). Многочлен $P(\xi) = P((\xi_1,...,\xi_n))$ называется регулярным (не вырожденным), если существует постоянная $c > 0$ для которой*

$$\sum_{\alpha\in\Re^0(P)} |\xi^\alpha| \leq c(|P(\xi)|+1) \quad \forall\xi \in R^n.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий легко проверяемый результат

Замечание 1.1. *(см. [4] – [6]). 1) Если х.м. $\Re(P)$ регулярного многочлена P вполне правильный, то многочлен P гипоэллиптичен. 2) Если многочлен P гипоэллиптичен, то его х.м. $\Re(P)$ вполне правильный. 3) Любая $(n-1)$ - мерная некоординатная грань х.м. $\Re \subset R^n_+$ главная. 4) Если х.м. $\Re(P)$ набора $(P) \subset N^n_0$ вполне правильный, то его любая некоординатная грань главная.*

2. Предварительные результаты

Из определений 1) - 3) непосредственно следует:

Предложение 2.1 Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$ (частично гипоэллиптичен относительно ξ'), то

(1) для любого $j : 1 \leq j \leq k$ многочлен $Q_j(\xi_j; \xi'') = P(0, ..., 0, \xi_j, 0, ..., 0, \xi'')$ где $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ гипоэллиптичен относительно ξ_j (частично гипоэллиптичен относительно ξ_j),

(2) для любого $j : k+1 \leq j \leq n$ многочлен $Q_j(\xi'; \xi_j) = P(\xi', 0, ..., 0, \xi_j, 0, ..., 0)$ гипоэллиптичен относительно ξ' (частично гипоэллиптичен по ξ'),

(3) если многочлен P гипоэллиптичен относительно ξ', то он частично гипоэллиптичен относительно ξ',

(4) для любого $\xi'' \in R^{n-k}$ многочлен $\tilde{Q}_{\xi''}(\xi') = P(\xi'; \xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от ξ', следовательно (см. пункт 2) замечания 1.1) $\Re(\tilde{Q}_{\xi''}) \subset R^k_+$ является вполне правильным многогранником и поэтому $\Lambda(\Re(\tilde{Q}_{\xi''})) = \Lambda^+(\Re(\tilde{Q}_{\xi''}))$ при всех $\xi'' \in R^{n-k}$.

Лемма 2.1. *(см. [8]) Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, то*

(1) *для любого $\alpha \in (P)$, $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in N^k_0$, $0 \neq \alpha'' = (\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n) \in \in N^{n-k}_0$*

$$\alpha' \in \Re(\tilde{Q}_0) \backslash \partial \Re(\tilde{Q}_0), \quad \text{где} \quad \tilde{Q}_0(\xi') = P(\xi'; 0''),$$

(2) *для любого $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n) \in R^{n-k}$ $\quad \Re(\tilde{Q}_{\xi''}) = \Re(\tilde{Q}_0)$,*

(3) *если для $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\Re(P))$ при некотором $j : 1 \leq j \leq k$ $\quad \lambda_j > 0$, то существует индекс $l : k+1 \leq l \leq n$ для которого $\lambda_l > 0$.*

Лемма 2.2. *(см. [8]) Пусть $n, k \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, то*

(1) *для любого* $\alpha \in (P), \alpha'' \neq 0 \quad \alpha' \in \Re(\bar{Q}_0)\backslash\partial\Re(\bar{Q}_0)$ *где* $\bar{Q}_0(\xi') \equiv P(\xi'; 0'')$,
(2) $\Re(\bar{Q}_{\xi''}) = \Re(\bar{Q}_0) \quad \forall \xi'' \in R^{n-k}$,
(3) *для любого* $c > 0$ *существует постоянная* $T > 0$ *такая, что*

$$|P(\xi)| \geq c, \forall \xi \in R^n, |\xi'| \geq T, \tag{2.1}$$

(4) *если для* $\lambda \in \Lambda(\Re(P))$ *при некотором* $j : 1 \leq j \leq k \quad \lambda_j > 0$, *то*

$$\lambda \in \Lambda^+(\Re(P)),$$

(5) *если* $\lambda \in \Lambda(\Re(P))$ *нормаль грани для которой некоторая некоординатная грань* $\Re(\bar{Q}_0)) \subset R^k$ *является подгранью, то* $\lambda \in \Lambda^+(\Re(P))$.

Следствие 2.1. *При условии леммы 2.2*

(1) $\inf\limits_{\xi'' \in R^{n-k}} |P(\xi)| \to \infty$ *при* $|\xi'| \to \infty$,
(2) *если* $k = n - 1$, *то для любого* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\Re(P))$ *имеем* $\lambda_n > 0$.

Доказательство. Пункт 1) непосредственно следует из пункта 3) леммы 2.2. Пункт 2) непосредственно следует из пункта 4) леммы 2.2 и пункта 3) замечания 1.1. . □

Следствие 2.2. *Многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k) \quad (k < n, \quad k, n \in N)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $a \in C$ *многочлен* $P + a$ *гипоэллиптичен относительно* ξ'.

Доказательство. непосредственно следует из пункта 1) следствия 2.1 и определения 3. □

Пусть $k, n \in N, k < n$. Обозначим

$$\Pi''(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \exists \alpha' \in N_0^k \quad \alpha \equiv (\alpha' ; \alpha'') \in (P)\},$$

$$\Pi_j''(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \exists \alpha' = (0, ..., 0, \alpha_j, 0, ..., 0) \in N_0^k \quad \alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)\}, \quad j = 1, ..., k$$

а через $\Re(\Pi''(P))$ и $\Re(\Pi_j''(P))$ характеристический многогранник в R^{n-k} наборов $\Pi''(P)$ и $\Pi_j''(P) \quad j = 1, ..., k$ соответственно.

Лемма 2.3. *Пусть* $k, n \in N$ *и* $k < n$. *Если многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, *то* $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi_j''(P)) \quad j = 1, ..., k$.

Доказательство. Пусть, наоборот, при условии леммы существует индекс j_0 : $1 \le j_0 \le k$ для которого $\Re(\Pi''_{j_0}(P)) \neq \Re(\Pi''(P))$. Так как $\Pi''_{j_0}(P) \subset \subset \Pi''(P)$, следовательно $\Re(\Pi''_{j_0}(P)) \subset \Re(\Pi''(P))$, то это означает, что существует $\lambda'' \in \Lambda(\Re(\Pi''(P)))$ для которого

$$d_{\Pi''(P)}(\lambda'') = \sup_{\nu'' \in \Re(\Pi''(P))} (\nu'', \lambda'') > \sup_{\nu'' \in \Re(\Pi''_{j_0}(P))} \equiv d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'') \ge 0. \tag{2.2}$$

Из определений множеств $\Pi''(P)$ и $\Pi''_{j_0}(P)$ в силу (2.2) имеем, что существует $\beta \in (P), \beta'' \in \Pi''(P) \backslash \Pi''_{j_0}(P)$, следовательно $\sum_{j=1, j \neq j_0} \beta_j \neq 0$ для которого $(\beta'', \lambda'') = d_{\Pi''(P)}(\lambda'')$. Представим многочлен P в виде суммы $\lambda = (0'; \lambda''), 0' \in R^k$ однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in (P), (\alpha, \lambda) = d_j} a_\alpha \xi^\alpha$$

где $d_0 > ... > d_M$.

Из определений вектора λ и множества $\Pi''(P)$ имеем

$$d_0 = \max_{\alpha \in (P)} (\alpha, \lambda) = \max_{\alpha \in (P)} (\alpha'', \lambda'') = \max_{\nu'' \in \Pi''(P)} (\nu'', \lambda'') = d_{\Pi''(P)}(\lambda''). \tag{2.3}$$

Отсюда, в силу (2.2), имеем, что $d_0 = d_{\Pi''(P)}(\lambda'') > 0$.

Пусть $G(P) = \{\alpha \in (P_0), \alpha_j = \beta_j, j = 1, ..., k, j \neq j_0\}$, $m_{j_0}(0) = \max_{\alpha \in G(P)} \alpha_{j_0}$ и $G_0(P) = \{\alpha \in G(P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(0)\} = \{\alpha = (\gamma'; \alpha'') \in G(P)\}$, где $\gamma' = (\beta_1, ..., \beta_{j_0-1}, m_{j_0}(0), \beta_{j_0+1}, ..., \beta_k)$.

Из определения множества $G_0(P)$ следует, что $G_0(P) \neq \emptyset$ и поэтому существует точка $a \in R_0^{n-k}$ для которой

$$\sum_{\alpha \in G_0(P)} a_\alpha \cdot a^{\alpha''} \equiv c_1 \neq 0 \tag{2.4}$$

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_{\xi'}^{\gamma'} P_j(\xi)$ $j = 0, ..., M$ на $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$, где $\xi_j^s = 0$, $j = 1, ..., k$, $j \neq j_0$, $\xi_{j_0} = s^\varepsilon$, $(\xi'')^s = a \cdot s^{\lambda''}$, $s = 1, 2, ...$, а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число. Из определений последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ и множества $\Pi''_{j_0}(P)$ (если для $\alpha \in (P)$ $\alpha'' \notin \Pi''_{j_0}(P)$, то $((\xi')^s)^{\alpha'} = 0$ $s = 1, 2, ...$) с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем при всех $s = 1, 2, ...$

$$|P(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha (\xi^s)^\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in (P), \alpha'' \in \Pi''_{j_0}(P)} a_\alpha (\xi_{j_0}^s)^{\alpha_{j_0}} ((\xi'')^s)^{\alpha''} \right| = \tag{2.5}$$

$$= \left| \sum_{\alpha\in(P),\alpha''\in\Pi''_{j_0}(P)} a_\alpha s^{\varepsilon\alpha_{j_0}} a^{\alpha''} s^{(\alpha'',\lambda'')} \right| \leq c_2 \cdot s^{d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'')+\varepsilon\cdot m_{j_0}},$$

где $m_{j_0} = \max\limits_{\alpha\in(P),\alpha''\in\Pi''_{j_0}(P)} \alpha_{j_0}$.

Из определений многочлена P_0 ($\alpha \in (P_0)$ <=> $\alpha \in (P)$, $(\alpha,\lambda) = (\alpha'',\lambda'') = d_0$), мультииндекса γ', числа $m_{j_0}(0)$, множества $G_0(P)$ и последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ в силу (2.1) при всех $s = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(2.6)\qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_0(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha\in(P),\alpha'\geq\gamma'} a_\alpha \cdot \frac{\alpha'!}{(\alpha'-\gamma')!} ((\xi')^s)^{\alpha'-\gamma'} ((\xi'')^s)^{\alpha''} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\alpha\in G_0(P)} a_\alpha \quad \gamma'! \quad a^{\alpha''} \quad s^{(\alpha'',\lambda'')} \right| = c_1 \cdot s^{d_0}.$$

Аналогичным образом с некоторой постоянной $c_3 > 0$ при всех $j = 1, \ldots, M$ и $s = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(2.7)\qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_0(\xi^s)| \leq c_3 \cdot s^{d_j+\varepsilon(m_{j_0}(j)-m_{j_0}(0))} \quad \text{при } m_{j_0}(j) \geq m_{j_0}(0),$$

$$(2.8')\qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_j(\xi^s)| = 0 \text{ при } m_{j_0}(j) < m_{j_0}(0),$$

где $m_{j_0}(j) = \max\limits_{\alpha\in(P_j),\alpha'\geq\gamma'} \alpha_{j_0}$.

Из оценок (2.6)-(2.8), (2.8′) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (в силу (2.2) и (2.5)) при $s \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{D_{\xi'}^{\gamma'} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| \geq \frac{c_1 \cdot s^{d_0}(1+0(1))}{c_2 \cdot s^{d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'')+\varepsilon m_{j_0}}} \to \infty.$$

Полученное соотношение противоречит условию леммы, так как $\gamma' \neq 0 \quad m_{j_0}(0) > 0$, $(\xi')^s \to \infty$ при $s \to \infty \quad (\xi_{j_0}^s = s^\varepsilon, 1 \leq j_0 \leq k)$, и доказывает справедливость утверждения. Лемма 2.3 доказана. □

Следствие 2.3. *При условиях леммы 2.3 для любых* $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq k$ $(l \leq k)$

$$\Re(\Pi''_{j_1,\ldots,j_l}(P)) = \Re(\Pi''(P)) \quad \textit{где} \quad \Re(\Pi''_{j_1,\ldots,j_l}(P))$$

характеристический многогранник набора

$$\Pi''_{j_1,\ldots,j_l}(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \quad \exists\alpha' \in N_0^k, \quad \alpha_j = 0, j \neq j_1,\ldots,j_l, \quad \alpha = (\alpha';\alpha'') \in (P)\}.$$

Доказательство. непосредственно следует из леммы 2.3 так как

$$\Pi''_{j_1}(P) \subset \Pi''_{j_1,\ldots,j_l}(P) \subset \Pi''(P)$$

и следовательно $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi''_{j_1}(P)) \subset \Re(\Pi''_{j_1,\ldots,j_l}(P)) \subset \Re(\Pi''(P))$. □

Следствие 2.4. *При условиях леммы 2.3 имеем*

$$ord_j P = \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j = ord_{k+1} Q_j \quad j = k+1, ..., n,$$

где $Q_j((\xi', \xi_j)) \equiv P((\xi', 0, ..., 0, \xi_j, 0...0)) \quad j = k+1, ..., n.$

Доказательство. непосредственно следует из леммы 2.3, если заметить, что $\Pi''(Q_j) = \Pi''_j(P) \quad j = k+1, ..., n.$ □

3. Некоторые свойства многогранников

Лемма 3.1. *Пусть* $n \in N$. *Если многочлен*

$$P((\xi_1; \eta)) = P((\xi_1, \eta_1, ..., \eta_n)) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \beta) \in (P), \beta \in N_0^n} a_{\alpha_1, \beta} \cdot \xi_1^{\alpha_1} \eta^\beta$$

гипоэллиптичен относительно ξ_1, *то многогранник* $\Re(\Pi''(P)) \subset R_+^n$ *правильный, где*

$$\Pi''(P) = \{\beta \in N_0^n . \exists \alpha_1 \in N_0 \quad \alpha = (\alpha_1, \beta) \in (P)\}.$$

Доказательство. Пусть, наоборот, существуют $\mu \in \Lambda(\Re(\Pi''(P))) \subset R_+^n$ и индекс $j : 1 \leq j \leq n$ для которого $\mu_j < 0$. Ради определенности (см. пункт 3 замечания 1.1)

$$\mu' \equiv (\mu_1, ..., \mu_l) \geq 0 \quad (1 \leq l < n) \text{ и } \mu'' = (\mu_{l+1}, ..., \mu_n) < 0.$$

Через $d_{\Pi''(P)}(\mu)$ и $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$ обозначим

$$d_{\Pi''(P)}(\mu) = \max_{\nu \in \Re(\Pi''(P))} (\nu, \mu) = \max_{\beta \in \Re^0(\Pi''(P))} (\beta, \mu) = \max_{\beta \in \Pi''(P)} (\beta, \mu),$$

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) \equiv \max_{\beta \in \Re^0(\Pi''(P))} \max_{\nu \in \Pi(\beta)} (\nu, \mu),$$

где для данного $\beta \in N_0^n \quad \Pi(\beta) \equiv \{\nu, \nu \in R_+^n, \nu \leq \beta\}$. Так как $\mu \in \Lambda(\Re(\Pi''(P)))$, следовательно существует $\gamma \in \Re^0(\Pi''(P))$ для которого $\gamma'' \neq 0$ и

$$(\gamma, \mu) = d_{\Pi''(P)}(\mu). \tag{3.1}$$

Отсюда в силу предположения $\mu'' < 0$ имеем

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) > d_{\Pi''(P)}(\mu). \tag{3.2}$$

Пусть

$$A(P, \gamma'') \equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in (P), \beta'' \geq \gamma''\} \equiv A_1(P, \gamma'') \cup \tilde{A}_1(P, \gamma'') \equiv$$

$$\equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A(P, \gamma''), (\beta', \mu') = d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)\} \cup$$

$$\cup \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A(P, \gamma''), (\beta', \mu') < d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)\},$$

$$A_0(P, \gamma'') \equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A_1(P, \gamma''), \beta'' = \gamma''\},$$

$$m_1 = \max_{(\alpha_1;\beta)\in A_1(P,\gamma'')} \alpha_1,$$

$$\tilde{A}_0(P,\gamma'') = \{\alpha = (m_1;\beta) \in A_0(P,\gamma'')\}$$

для $\nu \in N_0^n, \nu' = (\nu_1, ..., \nu_l)$ и $\nu'' = (\nu_{l+1}, ..., \nu_n)$. Так как из определений мульти-индекса γ и числа m_1 следует, что $\tilde{A}_0(P,\gamma'') \neq \emptyset$, то существует точка $a \in R_0^l$ для которого

$$\sum_{\alpha=(m_1;\beta)\in\tilde{A}_0(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta} \cdot \gamma''! a^{\beta'} = c_1 \neq 0. \tag{3.3}$$

Не трудно заметить, что

(1) для любого $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in \tilde{A}_1(P,\gamma'')$

$$(\beta', \mu') + (\beta'' - \gamma'', \mu'') \leq \tilde{d}_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu), \tag{3.4}$$

где

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) > \tilde{d}_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) \equiv \max_{(\alpha_1;\beta)\in\tilde{A}_1(P,\gamma'')} (\beta', \mu'), \tag{3.5}$$

(2) для любого $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in A_1(P,\gamma'')\backslash A_0(P,\gamma'')$

$$(\beta', \mu') + (\beta'' - \gamma'', \mu'') \leq d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) - \min_{l+1\leq j\leq n} \mu_j. \tag{3.6}$$

Рассмотрим поведение отношения $D_{\eta''}^{\gamma''} P((\xi_1;\eta))/P((\xi_1;\eta))$ на последовательности $\{(\xi_1^s;\eta^s)\}_{s=1}^{\infty} \subset R^{n+1}$, где $\xi_1^s = s^{\varepsilon}, (\eta')^s = a \cdot s^{\mu'}, (\eta'')^s = s^{\mu''}$ $s = 1, 2, ...$, а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число

$$m_1^0 = ord_1 P \equiv \max_{(\alpha_1;\beta)\in(P)} \alpha_1 \geq m_1.$$

Так как $A(P,\gamma'') = \tilde{A}_0(P,\gamma'') \cup (A_0(P,\gamma'')\backslash\tilde{A}_0(P,\gamma'')) \cup (A_1(P,\gamma'')\backslash A_0(P,\gamma''))\cup$ $\cup\tilde{A}_1(P,\gamma'') \equiv \tilde{A}_0(P,\gamma'') \cup B_1(P,\gamma'') \cup B_2(P,\gamma'') \cup \tilde{A}_1(P,\gamma'')$, то в силу соотношений (3.3)-(3.4),(3.6), определения множеств $\tilde{A}_0(P,\gamma'')$, $B_1(P,\gamma'')$, $B_2(P,\gamma'')$, $\tilde{A}(P,\gamma'')$ и чисел m_1, m_1^0, $d_{\Pi''(P)}(\mu)$, $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$, $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем

$$|D_{\eta''}^{\gamma''} P((\xi_1^s;\eta^s))| = |\sum_{(\alpha_1;\beta)\in A(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta} \cdot \frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!} \cdot a^{\beta'} \cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}| \geq$$

$$\geq |\sum_{(\alpha_1;\beta)\in\tilde{A}_0(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta} \cdot \gamma''! \cdot a^{\beta'} \cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')}| -$$

$$-|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in B_1(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta} \cdot \gamma''! \cdot a^{\beta'} \cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')}| -$$

$$-|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in B_2(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta} \cdot \frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!} \cdot a^{\beta'} \cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}| -$$

$$-\Big|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in \bar{A}_1(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot \frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}\Big| \geq$$

$$\geq c_1\cdot s^{\varepsilon m_1+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)} - c_2\cdot s^{\varepsilon(m_1-1)+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)} -$$

$$-c_2\cdot s^{\varepsilon m_1^0+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)-\min\limits_{k+1\leq j\leq n}\mu_j} - c_2\cdot s^{\varepsilon m_1^0+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)}.$$

Отсюда при достаточно малых $\varepsilon > 0$, в силу (3.5) имеем, что

$$|D^{\gamma''}_{\eta''}P((\xi_1^s;\eta^s))| \geq c_1\cdot s^{\varepsilon m_1+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)}(1+0(1)). \tag{3.7}$$

Для многочлена P с некоторой постоянной c_3 при всех $s=1,2,\ldots$ имеем

$$|P((\xi_1^s;\eta^s))| = \Big|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in(P)} a_{\alpha_1;\beta}\cdot(\xi_1^s)^{\alpha_1}(\eta^s)^{\beta}\Big| = \tag{3.8}$$

$$= \Big|\sum_{\beta\in\Pi''(P),(\alpha_1;\beta)\in(P)} a_{\alpha_1;\beta}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta,\mu)}\Big| \leq c_3\cdot s^{\varepsilon m_1^0+d_{\Pi''(P)}(\mu)}.$$

Из оценок (3.6) и (3.7), в силу (3.2), при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$|D^{\gamma''}_{\eta''}P((\xi_1^s;\eta^s))|/|P((\xi_1^s;\eta^s))| \geq \frac{c_1}{c_3}\cdot s^{d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)-d_{\Pi''(P)}(\mu)+\varepsilon(m_1-m_1^0)} \to \infty,$$

когда $s\to\infty$. Это противоречит условию леммы так как $\gamma''\neq 0$ и $\xi_1^s = s^{\varepsilon}\to\infty$ при $\to\infty$. Полученное противоречие доказывает, что при условии леммы многогранник $\Re(\Pi''(P))\subset R^n_+$ правильный. Лемма 3.1 доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть $k<n$. Если многочлен $P(\xi)=P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ гипоэллиптичен относительно $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, то многогранник $\Re(\Pi''(P))$ правильный.*

Доказательство. непосредственно следует из леммы 3.1., если заметить, что в силу пункта 1) предложения 2.1 многочлен $Q_1(\xi_1;\xi'')=P(\xi_1,0,\ldots,0,\xi'')$ $(\xi''=(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n))$ гипоэллиптичен относительно ξ_1 а в силу леммы 2.3 и следствия 2.4 получаем $\Re(\Pi''(P))=\Re(\Pi''(Q_1))$. □

Лемма 3.2. *Пусть $k,n\in N$ и $k<n$. Если многочлен $P(\xi)=P(\xi_1,\ldots,\xi_n)=$ $=\sum\limits_{\alpha\in(P)}a_\alpha\xi^\alpha$ гипоэллиптичен относительно $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, то $\Re(P\cup\tilde{\Pi}''(P))\subset$ $\subset R^n_+$ правильный, где $\tilde{\Pi}''(P)\equiv\{(0';\alpha'')\in N^n_0,\alpha''\in\Pi''(P)\}$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, существует $\lambda\in\Lambda(\Re(P\cup\tilde{\Pi}''(P)))$ и индекс $j_0: 1\leq j_0\leq n$ для которого $\lambda_{j_0}<0$. Представим многочлен P в виде суммы λ - однородных многочленов

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{M}P_j(\xi)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{(\alpha,\lambda)=d_j}a_\alpha\xi^\alpha,$$

где $d_0>\ldots>d_M$, $\quad d_0\geq 0,\ 0\in\Re(P)$.

Пусть $m_{j_0}(j) = \max_{\alpha \in (P_j)} \alpha_{j_0} \quad j = 0, ..., M$. Так как λ - нормаль $(n-1)$ - мерной некоординатной грани, то не трудно заметить, что существует мультииндекс $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \cap (P)$ для которого $\beta_{j_0} > 0$ следовательно $m_{j_0}(0) > 0$. Пусть $B \equiv \{j; \quad 0 \le j \le M, \quad m_{j_0}(j) \ge m_{j_0}(0)\}$,

$$\chi \equiv \max_{j \in B}\{d_j - m_{j_0}(j) \cdot \lambda_{j_0}\}, \quad B_1 \equiv \{j \in B, d_j - m_{j_0}(j) \cdot \lambda_{j_0} = \chi\},$$

$$m^0_{j_0} \equiv \max_{j \in B_1} m_{j_0}(j) \quad (\ge m_{j_0} > 0).$$

Так как $0 \in B$, то отсюда, в силу предположения $\lambda_{j_0} < 0$ имеем, что

$$\chi \ge d_0 - m_{j_0}(0)\lambda_{j_0} > 0. \tag{3.9}$$

Поскольку $d_0 > ... > d_M$ и $\lambda_{j_0} < 0$, следовательно $d_j/\lambda_{j_0} < d_l/\lambda_{j_0}$ при всех $j < l, \quad j, l = 0, ..., M$, то существует единственный индекс $j_1 : 0 \le j_1 \le M$ для которого $m_{j_0}(j_1) = m^0_{j_0}$, так как в обратном случае при $j, l \in B_1, j < l$ имели бы

$$m_{j_0}(j) = \frac{d_j - \chi}{\lambda_{j_0}} < \frac{d_l - \chi}{\lambda_{j_0}} = m_{j_0}(l).$$

Отсюда имеем, что

$$\{j\}^M_{j=0} = \{j_1\} \cup \{j : 0 \le j \le M, m_{j_0}(j) < m_{j_0}(j_1)\} \cup$$
$$\cup \{j : 0 \le j \le M, m_{j_0}(j) > m_{j_0}(j_1)\} \equiv \{j_1\} \cup G_1 \cup G_2.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи

1. $\quad \lambda' \not\le 0 \quad$ 2. $\quad \lambda' \le 0$ где $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$.

Пусть $\lambda' \not\le 0$. Тогда, существует $l : 1 \le l \le k$ такое, что $\lambda_l > 0$. Рассмотрим поведение отношения

$$D^{m_{j_0}(j_1)}_{j_0} P(\xi)/P(\xi)$$

на последовательности $\{\xi^s\}^{\infty}_{s=1} \subset R^n$, где $\xi^s_j = a_j s^{\lambda_j} \quad j = 1, ..., n, \quad j \ne \ne j_0$ и $\xi^s_{j_0} = s^{\lambda_{j_0}} \quad s = 1, 2, ...$, а точка $a(j_0) = (a_1, ..., a_{j_0 - 1}, a_{j_0+1}, ..., a_n) \in \in R^{n-1}_0$ выбрано так, чтобы

$$\sum_{\alpha \in (P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot a^{\alpha(j_0)}(j_0) \cdot m_{j_0}(j_1)! \equiv c_1 \ne 0. \tag{3.10}$$

С некоторой постоянной $c_2 > 0$ при достаточно больших s имеем

$$|P(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M} |P_j(\xi^s)| \le c_2 \cdot s^{d_0}(1 + 0(1)). \tag{3.11}$$

Из определений чисел $m_{j_0}(j_1)$ и χ, в силу (3.9) при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

(3.12)
$$|D^{m_{j_0}(j_1)}_{j_0} P_{j_1}(\xi^s)| = |\sum_{\alpha \in (P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot a^{\alpha(j_0)}(j_0) \cdot m_{j_0}(j_1)! \cdot s^{(\alpha, \lambda) - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}}| =$$

$$= c_1 \cdot s^{d_{j_1} - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}} = c_1 \cdot s^{\chi}.$$

При $j \in G_1$ из определений чисел $m_{j_0}(j)$ и j_1 имеем, что

$$D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s) = 0 \quad s = 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Так как $\lambda_{j_0} < 0$ и $m_{j_0}(j) > m_{j_0}(j_1)$, то при $j \in G_2$, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем, что

(3.14)

$$|D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s)| = |\sum_{\alpha \in (P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot \frac{\alpha_{j_0}!}{(\alpha_{j_0} - m_{j_0}(j_1))!} (\xi^s_{j_0})^{\alpha_{j_0} - m_{j_0}(j_1)} \cdot (\xi^s(j_0))^{\alpha(j_0)}| =$$

$$= c_3 \cdot s^{d_j - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}} = 0(s^{d_j - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}}) = 0(s^{\chi}).$$

Так как $\lambda_{j_0} < 0, \quad m_{j_0}(0) > 0$, следовательно в силу (3.8) $d_0 < d_0 - m_{j_0}(0)\,\lambda_{j_0} \le \chi$, то из оценок (3.9) - (3.13) при $s \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| = \frac{|D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s)| - \sum_{j \in G_1 \cup G_2} |D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \ge \frac{c_1 s^{\chi}(1 + 0(1))}{c_2 s^{d_0}(1 + 0(1))} \to \infty.$$

Это противоречит условию леммы и доказывает, что при условии леммы случай 1) не возможен. Рассмотрим случай 2). Сначала покажем, что при условии леммы в случае 2) $\lambda' = 0$ и следовательно $k + 1 \le j_0 \le n \quad (\lambda_{j_0} < 0)$.

Предположим обратное, что при условии леммы в случае 2) для некоторого $l : 1 \le l \le k \quad \lambda_l < 0$. Так как λ - нормаль $(n-1)$ - мерной некоординатной грани многогранника $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$, то существует мультииндекс $\beta \in \Re^0(P \cup \cup \tilde{\Pi}''(P)) \cap (P)$ для которого $\beta_l \ne 0$ и $(\beta, \lambda) = d_0$. Поскольку, в силу определения множества $\Pi''(P) \quad \beta'' = (\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n) \in \Re(\Pi''(P)) \subset R_+^{n-k}$, то $(0', \beta'') \in \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ и следовательно

$$(\beta'', \lambda'') \le d_0 = (\beta, \lambda).$$

Откуда $(\beta', \lambda') \ge 0$. Это противоречит предположению $\lambda_l > 0$ так как $\beta_l > > 0, \quad \beta_j \ge 0$ и $\lambda_j \le 0 \quad j = 1, \ldots, k, \quad j \ne l$. Полученное противоречие доказывает, что при условии леммы в случае 2) $\lambda' = 0$. Тогда

$$(P_0) = \{\alpha \in (P), \quad (\alpha, \lambda) = d_0\} = \{\alpha = (\alpha'\alpha'') \in (P), \quad (\alpha'', \lambda'') = d_0\}.$$

Пусть

$$m_0' = \max_{\alpha \in (P_0)} |\alpha'|, \quad A_0(P) \equiv \{\alpha \in (P_0), |\alpha| = m_0'\}.$$

Рассмотрим поведение отношения

$$D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P(\xi)/P(\xi)$$

на последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, где $\xi_j^s = s^\varepsilon \quad j = 1, ..., k \quad (\xi'')^s = a \cdot s^{\lambda''}$, $\varepsilon > 0$ пока произвольное число, а точка $a \in R_0^{n-k}$ выбрано так, чтобы

$$\sum_{\alpha \in A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha''(j_0)}(j_0) = c_4 \neq 0, \tag{3.15}$$

где для точки $b = (b_{k+1}, ..., b_n) \in R_0^{n-k}$ и числа $j_0 : k+1 \leq j_0 \leq n$

$$b(j_0) = (b_{k+1}, ..., b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, ..., b_n).$$

Так как $\lambda' = 0$, следовательно $(\alpha'', \lambda'') = d_j$ для любого $\alpha \in (P_j) \quad j = 0, ..., M$, то с некоторой постоянной $c_5 > 0$ при всех s имеем

$$|P(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M} |P_j(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M} \Big| \sum_{\alpha \in (P), (\alpha'', \lambda'') = d_j} a_\alpha \cdot (s^\varepsilon)^{\alpha'} \cdot (a \cdot s^{\lambda''})^{\alpha''} \Big| \leq \tag{3.16}$$

$$\leq c_5 \sum_{j=0}^{M} s^{d_j + \varepsilon \cdot m'} \leq c_5 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'}(1 + 0(1)),$$

где $m' \equiv \max\limits_{\alpha \in (P)} |\alpha'| \geq m_0'$. Из определения числа $m_{j_0}(0)$, в силу (3.14) при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$|D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_0(\xi^s)| = \Big| \sum_{\alpha \in (P_0), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(0)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha''(j_0)}(j_0) \cdot s^{\varepsilon|\alpha'|} \cdot s^{(\alpha'', \lambda'') - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0}} \Big| \geq$$

$$\geq \Big| \sum_{\alpha \in A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha(j_0)}(j_0) \Big| \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'} - \tag{3.17}$$

$$- \Big| \sum_{\alpha \in (P_0) \setminus A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha(j_0)}(j_0) \Big| \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon(m_0' - 1)} =$$

$$= c_4 s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'}(1 + 0(1)).$$

С некоторой постоянной $c_6 > 0$, при $j = 1, ..., M$, аналогичным образом имеем

$$|D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_j(\xi^s)| \leq c_6 \cdot s^{d_j - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m'}. \tag{3.18}$$

Из оценок (3.15)-(3.17), так как $d_j < d_0 \quad j = 1, ..., k, \quad \lambda_{j_0} < 0$ и $m_{j_0}(0) > 0$ то, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, когда $s \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| = \frac{|D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_0(\xi^s)| - \sum\limits_{j=1}^{M} |D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \geq \tag{3.19}$$

$$\geq \frac{c_4 \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'} - c_6 \cdot s^{d_1 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m'}(1 + 0(1))}{c_5 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'}} = \frac{c_4}{c_5} s^{-m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon(m_0' - m')} \to \infty.$$

Это противоречит условию леммы так как $(\xi^s)' \to \infty$ при $s \to \infty$. Следовательно, многогранник $\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))$ правильный. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *При условии леммы 3.2 для любого* $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$ $\lambda'' \equiv (\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) > 0$.

Доказательство. В силу леммы 3.2 имеем, что для любого $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$, $\lambda \geq 0$. Предположим, обратное, что при условии леммы существуют $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$ и индекс $j_0 : k+1 \leq j_0 \leq n$ (не умаляя общности будем считать, что $j_0 = k+1$) для которого с учетом выше сказанного $\lambda_{k+1} = 0$. Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве пункта 4) леммы 2.2 и учитывая, что $\lambda_{k+1} = 0$ получим $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_k) = 0$. Так как λ нормаль к $(n-1)$- мерной некоординатной грани многогранника $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$, то в силу вышесказанного существует индекс $j_1 : k+2 \leq j_1 \leq n$ для которого $\lambda_{j_1} > 0$. Пусть ради определенности $\lambda_j = 0 \quad j = 1, ..., k+l, \quad 1 \leq l < n-k$ и $\lambda_j >> 0 \quad j = k+l+1, ..., n$. Представим многочлен P в виде суммы λ - однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in (P), (\alpha, \lambda) = d_j} a_\alpha \cdot \xi^\alpha,$$

где $d_0 > ... > d_M$. В силу предположения $\lambda_j = 0 \quad j = 1, ..., k+l$ имеем, что

$$(P_0) = \{\alpha \in (P), (\alpha, \lambda) = d_0\} = \{\alpha \in (P), \sum_{j=k+l+1}^{n} \alpha_j \lambda_j = d_0\} = \{\alpha \in (P), (\alpha'', \lambda'') = d_0\}.$$

Так как λ - нормаль к $(n-1)$- мерной некоординатной грани $\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))$, то существует мультииндекс $\beta \in (P_0)$ для которого $\beta_{k+1} \neq 0$. Пусть

$$m_{k+1}(0) = \max_{\alpha \in (P_0)} \alpha_{k+1}, \quad A(P_0) = \{\alpha \in (P_0), \alpha_{k+1} = m_{k+1}(0)\},$$
$$m' = \max_{\alpha \in A(P_0)} |\alpha'|, \quad A_1(P_0) = \{\alpha \in A(P_0), |\alpha'| = m'\}.$$

Из определения множества $A_1(P_0)$ имеем, что $A_1(P_0) \neq \emptyset$, следовательно существует точка $b \in R_0^{n-k-1}$ для которого

$$\sum_{\alpha \in A_1(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0)! b^{\alpha(k+1)} \neq c_1 \neq 0, \tag{3.20}$$

где $\alpha(k+1) = (\alpha_{k+2}, ..., \alpha_n)$. Рассмотрим поведение отношения $D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P(\xi)/P(\xi)$ на последовательности $\{\xi_{s=1}^{\infty}\}$, где $\xi_j^s = a_j \cdot s^\varepsilon$, $j = 1, ..., k$, $a_j \in R$, $j = 1, ..., k$, $\xi_{k+1}^s = 0$, $\xi_j^s = b_j \cdot s^{\lambda_j}$, $j = k+2, ..., n$, а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число. Из вида вектора λ и определения числа m' с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

(3.21)

$$|P(\xi^s)| \leq |P_0(\xi^s)| + \sum_{j=1}^{M} |P_j(\xi^s)| \leq c_2 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'} + c_2 \sum_{j=1}^{M} s^{d_j + \varepsilon \cdot \tilde{m}'} = c_2 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'}(1 + 0(1)).$$

где $\bar{m}' = \max_{\alpha\in(P)} |\alpha'|$.

Из определения числа $m_{k+1}(0)$ и вида λ $(\lambda_{k+1} = 0)$ в силу (3.18) при достаточно больших s с некоторой постоянной имеем

$$(3.22)\quad |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_0(\xi^s)| = |\sum_{\alpha\in A(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0)! b^{\alpha(k+1)} \cdot s^{\varepsilon\alpha'} \cdot s^{(\alpha'',\lambda'')-\alpha_{k+1}\cdot\lambda_{k+1}}| =$$

$$= |\sum_{\alpha\in A(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)} \cdot s^{d_0+\varepsilon|\alpha'|}| \geq |\sum_{\alpha\in A_1(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)}| \cdot s^{d_0+\varepsilon m'} -$$

$$- \sum_{\alpha\in A(P_0)\setminus A_1(P_0)} |a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)}| \cdot s^{d_0+\varepsilon|\alpha'|} \geq c_1 \cdot s^{d_0+\varepsilon m'} - c_3 \cdot s^{d_0+\varepsilon(m'-1)} =$$

$$= c_1 \cdot s^{d_0+\varepsilon m'}(1+0(1)).$$

Для $j = 1, ..., M$ аналогичным образом с некоторой постоянной $c_4 > 0$ при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$(3.23)\qquad |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_j(\xi^s)| =$$

$$\left| \sum_{\alpha\in(P_j),\alpha_{k+1}\geq m_{k+1}(0)} a_\alpha \cdot \frac{\alpha_{k+1}!}{(\alpha_{k+1} - m_{k+1}(0))!} \cdot s^{\varepsilon|\alpha'|} \cdot s^{(\alpha'',\lambda'')-(\alpha_{k+1}-m_{k+1}(0))\cdot\lambda_{k+1}} \right| \leq$$

$$\leq c_3 \cdot s^{d_j+\varepsilon \bar{m}'}.$$

Из оценок (3.19)-(3.21) при достаточно малых $\varepsilon > 0$, в силу того, что $d_j <$ $< d_0$ $\quad j = 1, ..., M$ имеем

$$\left|\frac{D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right| \geq \frac{|D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M} |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \geq$$

$$\geq \frac{c_1 \cdot s^{d_0+\varepsilon m'}(1+0(1))}{c_2 \cdot s^{d_0+\varepsilon m'}} \geq \frac{c_1}{c_2}(1+0(1)).$$

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы 3.3. □

Лемма 3.4. *При условиях леммы 3.2, при всех* $\nu'' \in \Pi''(P)$ *для которых существует* $0 \neq \nu' \in R_+^k$ *такое, что* $(\nu';\nu'') \in \Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))$ *многогранник*

$$\Im(P,\nu'') \equiv \{\beta' \in R_+^k, (\beta';\nu'') \in \Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))\} \subset R_+^k$$

вполне правильный.

Доказательство. Пусть $\{\lambda^j\}_{j=1}^m = \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$, $\quad m \in N$. Тогда $\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)) = \{\nu \in R_+^n, (\nu,\lambda^j) \leq d(\lambda^j) \quad j = 1, ..., m\}$, где

$$d(\lambda^j) = \max_{\nu\in\Re(P\cup\bar{\Pi}''(P))} (\nu,\lambda^j) \quad j = 1, ..., m.$$

В силу пункта 5) леммы 2.2 и леммы 3.2 существует $r \in N, r \leq m$ такое, что быть может после перенумерации $\{\lambda^j\}_{j=1}^m$ $\lambda^j > 0$ $j = 1, ..., r$ и $(\lambda')^j \equiv (\lambda_1^j, ..., \lambda_k^j) = 0$, $(\lambda'')^j \equiv (\lambda_{k+1}^j, ..., \lambda_n^j) > 0$, $j = r+1, ..., m$ если $r < m$. Так как

$$\Im(P, \nu'') = \{\beta' \in R_+^k, (\nu', (\lambda')^j) \leq d(\lambda^j) - (\nu'', (\lambda'')^j) \quad j = 1, ..., m\},$$

а в силу условия $(\nu', \nu'') \in \Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)), \nu' \neq 0$ леммы $(\nu'', (\lambda'')^j) < d(\lambda^j)$ $j = 1, ..., r$, $(\nu'', (\lambda'')^j) \leq d(\lambda^j)$, $(\nu', (\lambda')^j) = 0$ $j = r+1, ..., m$ если $r < m$, то

$$\Im(P, \nu'') = \{\beta' \in R_+^k, (\nu', (\lambda')^j) \leq d(\lambda^j) - (\nu'', (\lambda'')^j) \quad j = 1, ..., r\}$$

Так как $(\lambda')^j > 0$ $j = 1, ..., r$ то отсюда получаем, что

$$\Lambda(\Im(P, \nu'')) \subset \{(\lambda')^j / |(\lambda')^j|\}_{j=1}^r,$$

следовательно $\Im(P, \nu') \in R_+^k$ является вполне правильным многогранником. Лемма 3.4 доказана. □

Следствие 3.2. *Если при условии леммы 3.2 для* $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)$ $\alpha_j \neq 0$ $1 \leq j \leq k$, *то* $\alpha' - e^j \in \Im(P, \alpha'') \setminus \partial\Im(P, \alpha'')$, *где* $e^j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ *единичный орт по* j*-тому направлению в* R^k.

Доказательство. непосредственно следует из вполне правильности многогранника $\Im(P, \alpha'')$ (см. лемма 3.4). □

4. Основной результат

Пусть $k < n$, $(P) \subset N_0^n$ некоторый набор а множество $\Pi''(P), \Pi_j''(P)$ $j = 1, ..., k$ по набору (P) и числа k определены как в §2. Через $G(P)$ обозначим

$$G(P) \equiv \Re^0(P) \cap \Re^0(P \cup \bar{\Pi}''(P))$$

где множество $\bar{\Pi}''(P)$ по $\Pi''(P)$ определено в §3. Очевидно, что $G(P) = \Re^0(P)$ тогда и только тогда, когда $\Re(P)$ правильный.

Лемма 4.1. *Пусть* $k, n \in N, k < n$ *и для многочлена* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ *с некоторой постоянной* $c_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \in G(P)} |\xi^\alpha| \leq c_1(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n. \tag{4.1}$$

Если для любого $j : j = 1, ..., k$ $\Re(\Pi_j''(P)) = \Re(\Pi''(P))$, *то существует постоянная* $c_2 > 0$ *для которой*

$$\sum_{\alpha \in \Re^0(P \cup \bar{\Pi}''(P))} |\xi^\alpha| \leq c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n, |\xi'| \geq 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как для любого набора $A \subset N_0^n$ $\Re^0(A) \subset A$ и $\tilde{\Pi}''(P) = \{(0';\alpha'') \in N_0^n,\ \exists \alpha' \in N_0^k\,(\alpha';\alpha'') \in (P)\}$, то $\Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) = G(P) \cup \{\alpha'' \in \Re^0(\Pi''(P))\}$. Следовательно для любого $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P)\beta' = 0$. Так как по условию леммы $\Re(\Pi_j''(P)) = \Re(\Pi''(P))$ $j = 1, ..., k$, то для любых $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P)$ и индекса $j : 1 \leq j \leq k$ существует мультииндекс $\alpha^j(\beta'') = (0, ..., 0, \alpha_j(\beta''), 0, ..., 0, \beta''), \alpha_j(\beta'') \neq 0$ такой, что $(\alpha_j(\beta''), \beta'') \in \Re^0(Q_j)$ (см. следствие 2.4), где многочлен Q_j по многочлену P и индексу $j : 1 \leq j \leq k$ определено в пункте 1) предложения 2.1. Отсюда непосредственно получаем, что $\alpha^j(\beta'') \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ следовательно $\alpha^j(\beta'') \in G(P)$ $(\alpha_j(\beta'') \neq 0)$, $j = 1, ..., k$.

Тогда для любого $\xi \in R^n$ при $|\xi'| \geq 1$ в силу оценки (4.1) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ имеем

$$\sum_{\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))} |\xi^\beta| = \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + \sum_{\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P)} |\xi^\beta| =$$

$$= \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} |(\xi'')^{\beta''}| \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + c_3 \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} \sum_{j=1}^{k} |(\xi'')|^{\beta''} |\xi_j^{\alpha_j(\beta'')}| =$$

$$= \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + c_3 \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} \sum_{j=1}^{k} |\xi^{\alpha^j(\beta)}| \leq$$

$$\leq c_4 \sum_{\alpha \in G(P)} |\xi^\alpha| \leq c_4 \cdot c_1(|P(\xi)| + 1).$$

Лемма 4.1 доказана. □

Замечание 4.1. *(см. [4] или [5])*

(1) *Если многочлен $Q(\xi) = Q(\xi_1, ..., \xi_n)$ регулярен, то*
   (a) *для любого $\alpha \in \Re(Q) \backslash \partial\Re(Q)$ при $|\xi| \to \infty$ $\xi^\alpha / Q(\xi) \to 0$,*
   (b) *существует постоянная $c > 0$ для которого*

$$\sum_{\alpha \in \Re(Q)} |\xi^\alpha| \leq c(|Q(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n.$$

(2) *Если х.м. регулярного многочлена правильный, то $Q(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$.*

Теорема 4.1. *Пусть $k < n$. Если для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$*

(1) *для любого $j : 1 \leq j \leq k$ $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi_j''(P))$,*
(2) *с некоторой постоянной $c_1 > 0$ выполняется оценак (4.1),*

(3) $\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))$ *правильный,*

(4) $\Lambda^+\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)) \neq \emptyset$ *и для любого* $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)))$

$$\lambda'' = (\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) > 0,$$

(5) *для любого* $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P), \alpha' \neq 0$ $\Im(P, \alpha'')$*- вполне правильный,*

то многочлен P *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$.

Доказательство. В силу работы [7] достаточно показать, что для любой последовательности $\{\xi\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$ при $s \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{n} |D_j P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \to 0 \tag{4.3}$$

как только $|(\xi')^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Из условия теоремы, в силу леммы 4.1 и пункта 1) замечания 4.1 существует постоянная $c_2 > 0$ для которого

$$h_P(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)) \cap N_0^n} |\xi^\alpha| \leq c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\xi'| \geq 1. \tag{4.4}$$

В силу пункта 2) замечания 4.1 и условия 3) теоремы из оценки (4.4) следует, что существуют постоянные $c_3 > 0$ и $t > 0$ для которых

$$h_P(\xi) \leq c_4|P(\xi)| \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\xi'| \geq t. \tag{4.5}$$

Из определения функции h_P и оценки (4.5) непосредственно следует, что для доказательства соотношения (4.3) достаточно, показать, что для любых $\alpha \in (P)$ и $j : 1 \leq j \leq n$, при $\alpha_j \geq 1$

$$(\xi^s)^{\alpha - e^j}/h_P(\xi^s) \to 0. \tag{4.6}$$

когда $s \to \infty$, где $e^j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ единичный орт по j - тому направлению в R^n. Если $k + 1 \leq j \leq n$, то в силу пункта 4) теоремы

$$\alpha - e^j \in \Re(P \cup \bar{\Pi}''(P)) \backslash \partial\Re(P \cup \bar{\Pi}''(P))$$

и выполнение соотношения (4.6) для таких α непосредственно следует из пункта 1) замечания 4.1 Пусть $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)$ и $\alpha_j \geq 1$ $1 \leq j \leq k$. Тогда на основании пункта 5) теоремы, в силу леммы 3.4 $\Im(P, \alpha'') \subset R_+^k$ вполне правильный и в силу следствия 3.2. $\alpha' - (e')^j \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_k) \in \Im(P, \alpha'') \backslash \partial\Im(P, \alpha'')$. Пусть

$$h_P(\xi', \alpha'') \equiv \sum_{\beta' \in \Im^0(P, \alpha'')} |\xi'|^{\beta'}.$$

Тогда в силу пункта 1) замечания 4.1 при $s \to \infty$ (так как $|(\xi')^s| \to \infty$ при $s \to \infty$)

$$|((\xi')^s)^{\alpha' - |e'|^j}|/h_P((\xi')^s, \alpha'') \to \infty.$$

Так как (не трудно заметить) с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$|(\xi'')^{\alpha''}| \cdot h_P(\xi', \alpha'') \le c_3 h_P(\xi) \quad \forall \xi \in R^n,$$

то отсюда, поскольку $h_P(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$,

$$\left|\frac{(\xi^s)^{\alpha - e^j}}{h_P(\xi^s)}\right| \le \frac{\alpha|((\xi'')^s)^{\alpha''}| \cdot o(h_P((\xi')^s, \alpha''))}{|((\xi'')^s)^{\alpha''}| \cdot h_P((\xi')^s, \alpha'') + h_P(\xi^s)} \to 0$$

когда $s \to \infty$. Этим утверждение теоремы 4.1 доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть $k, n \in N, k < n$ и для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ выполняется оценка 4.1. Для того, чтобы многочлен P был гипоэллиптическим относительно $\xi' =$*
$= (\xi_1, ..., \xi_k)$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия 1), 3)-5) теоремы 4.1.

Доказательство. непосредственно следует из лемм 3.1-3.4 и теоремы 4.1. □

Abstract. For a class of polynomials a necessary and sufficient condition is found for those polynomials to be hypoelliptic with respect to a group of variables.

Список литературы

[1] Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциалных операторов с частными производными, Мир, 2 (1986).
[2] L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentieles partiallement hypoelliptiques et partiellment elliptiques", Mah. Scand. 9, 6 – 21 (1961).
[3] R. J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators", Proceed of the London Math. Society, 53-19(3), 537 – 552 (1969).
[4] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, 91, 59 – 81 (1961).
[5] L. Volevich, S. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedrons in the Theory of PDE, Kluwer Acad. Publ. (1962).
[6] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, 144, no. 4, 767 – 769 (1962).
[7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН. Арм. ССР, 21, no. 5, 453 – 470 (1986).
[8] В. Н. Маргарян, С. Р. Айрапетян, "О некоторых свойствах гипоэллиптических относительно группы переменных многочленов", Вестник РАУ, no. 1, 16 – 26 (2013).

Поступила 23 ноября 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 68-80.

О ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Л. ПОГОСЯН, А. ПОГОСЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mails: *lusine@instmath.sci.am*; *arnak@instmath.sci.am*

Аннотация. Работа рассматривает поточечную сходимость квазипериодической интерполяции и приводит точную константу для главного члена асимптотической ошибки для гладких функций.

MSC2010 numbers: 42A15.

Keywords: Тригонометрическая интерполяция; квазипериодическая интерполяция; поточечная сходимость.

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение квазипериодической (КП) интерполяции $I_{N,m}(f,x)$, $m \geq 0$ (m целое), $x \in [-1,1]$, которая интерполирует f на равномерной сетке

$$x_k = \frac{k}{N}, \ |k| \leq N \tag{1.1}$$

и точна для квазипериодических функций

$$e^{i\pi n\sigma x}, \ |n| \leq N, \ \sigma = \frac{2N}{2N+m+1} \tag{1.2}$$

с периодом $2/\sigma$ который стремится к 2 при $N \to \infty$.

Идея КП интерполяции предложена в [2]. Работы [7] и [8] рассматривают $L_2(-1,1)$-сходимость и поведение в окрестностях $x = \pm 1$ с точки зрения предельной функции. Некоторые результаты представлены также в [5] и [6].

Здесь, рассматриваем поточечную сходимость КП интерполяции на $(-1,1)$ и получаем точную константу для главного члена асимтотической ошибки. Некоторые результаты данной работы представлены также в [9].

2. Квазипериодическая интерполяция

Более подробно рассмотрим основные положения реализующие КП интерполяцию (см. (1.1) и (1.2)). Рассмотрим новую функцию $f^*(t)$ определенную на

$[-\sigma, \sigma]$ согласно следующей замены переменной

$$f^*(t) = f\left(\frac{t}{\sigma}\right) = f(x),\ x \in [-1, 1],\ t \in [-\sigma, \sigma],\ t = \sigma x.$$

Тогда, интерполяция $f(x)$ на сетке (1.1) влечет интерполяцию $f^*(t)$ на сетке

$$t_k = \sigma x_k = \frac{2k}{2N+m+1},\ |k| \le N.$$

Получается, что КП интерполяция фактически интерполирует $f^*(t)$ на сетке t_k и точна для функций $e^{i\pi n t}$, $|n| \le N$. Важно отметить, что для $m > 0$, сетка t_k (продолженная на числовую ось 2-периодически) неравномерная, так как

$$t_k - t_{k-1} = \frac{2}{2N+m+1} = h,\ k = -N+1, \dots,\ N,$$

в то время как $1 - t_N + t_{-N} - (-1) = (m+1)\frac{2}{2N+m+1} \ne h$. Этой неравномерностью и объясняется более быстрая ($O(N^{-q-m-1})$) поточечная сходимость (Теорема 3.1) КП интерполяции по сравнению со сходимостью ($O(N^{-q-1})$ для четных q или $O(N^{-q-2})$ для нечетных) классической тригонометрической интерполяции реализованной на равномерной сетке (см. [3]). Таким образом, чем больше m, тем более плотнее сетка интерполяции внутри $(-1, 1)$, и в результате, тем больше точность. Важно также отметить, что функция f^* зависит от N и в теоремах сходимости этот факт нужно учесть и хотя $f^* \to f$ при $N \to \infty$, но эта зависимость в сущности меняет свойства КП интерполяции.

Рассмотрим случай $m = 0$ для которой сетка t_k равномерная. Тогда КП интерполяция $I_{N,0}(f, x)$ функции f совпадает с классической тригонометрической интерполяцией $I_N^*(f^*, x)$ функции f^* на равномерной сетке $2k/(2N+1)$, $|k| \le N$, и соответственно,

$$I_N^*(f^*, t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f^*\left(\frac{2k}{2N+1}\right) e^{-i\pi n \frac{2k}{2N+1}} \right) e^{i\pi n t}$$
$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-i\pi n \sigma \frac{k}{N}} \right) e^{i\pi n \sigma x} = I_{N,0}(f, x),$$

где $t = \sigma x$. Тероема 3.2 изучает поточечную сходимость $I_{N,0}$ на $(-1, 1)$ и приводит точные константы для главного члена асимптотической ошибки.

Пусть $m > 0$. Согласно вышеприведенным замечаниям, имеем

$$I_{N,m}(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) c_k(x), \tag{2.1}$$

где c_k неизвестные функции подлежащие определению. Так как (2.1) точна для $e^{i\pi n\sigma x}$, получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных

$$e^{i\pi n\sigma x} = \sum_{k=-N}^{N} e^{i\pi n\sigma \frac{k}{N}} c_k(x), \ |n| \leq N.$$

Отсюда получим (подробности в [7])

$$c_k(x) = \frac{1}{2N+m+1}\left(\sum_{\ell=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi\ell(Nx-k)}{2N+m+1}}\right.$$

$$\left.-\sum_{\ell=1}^{m} e^{\frac{2i\pi(\ell+N)(N+m-k)}{2N+m+1}} \sum_{s=1}^{m} v_{\ell,s}^{-1} \sum_{j=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi j(Nx+s-N-m-1)}{2N+m+1}}\right),$$

где $v_{\ell,s}^{-1}$ элементы матрицы обратной к матрице Вандермонда

(2.2) $$v_{s,\ell} = \alpha_\ell^{s-1}, \ \alpha_\ell = e^{\frac{2i\pi(\ell+N)}{2N+m+1}}, \ s,\ell = 1,\ldots,m,$$

которые имеют следующее явное выражение (см. [1])

(2.3) $$v_{\ell,s}^{-1} = -\frac{1}{\alpha_\ell^s \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{m}(\alpha_\ell - \alpha_k)} \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j \alpha_\ell^j, \ \ell, s = 1,...,m.$$

Здесь, γ_j коэффициенты следующего полинома

$$\prod_{j=1}^{m}(x-\alpha_j) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j x^j.$$

Явное выражение для c_k приводит к следующей явной формуле для КП интерполяции

$$I_{N,m}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} F_{n,m} e^{i\pi n\sigma x},$$

где

(2.4) $$F_{n,m} = \check{f}_{n,m} - \sum_{\ell=1}^{m} \theta_{n,\ell} \check{f}_{\ell+N,m},$$

$$\check{f}_{n,m} = \frac{1}{2N+m+1} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi nk}{2N+m+1}}$$

(2.5) $$\theta_{n,\ell} = e^{\frac{2i\pi(\ell+N)(N+m)}{2N+m+1}} \sum_{s=1}^{m} v_{\ell,s}^{-1} e^{\frac{2i\pi n(s-N-m-1)}{2N+m+1}}.$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) следует, что

(2.6) $$F_{N+k,m} = 0, \ F_{-N-k,m} = 0, \ k = 1,...,m.$$

Тогда, ввиду $\alpha_s - \alpha_i = O(1/N)$, получим из (2.3), что

$$v_{\ell,s}^{-1} = O\left(N^{m-1}\right), \ N \to \infty, \tag{2.7}$$

$$\theta_{n,\ell} = O\left(N^{m-1}\right), \ N \to \infty. \tag{2.8}$$

Через $R_{N,m}$ обозначим ошибку КП интерполяции $R_{N,m}(f,x) = f(x) - I_{N,m}(f,x)$.

3. Анализ сходимости

Пусть $f \in C^q[-1,1]$ и $A_{sk}(f) = f^{(k)}(1) - (-1)^{k+s} f^{(k)}(-1), \ k = 0,\dots,q$. Обозначим через f_n коэффициенты Фурье функции f

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi n x} dx.$$

Пусть

$$\delta_n^p\left(\{f_s\}_{s=-\infty}^{\infty}\right) = \delta_n^p\left(\{f_s\}\right) = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} f_{n+p-k}.$$

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 3.1. *Имеет место следующая оценка для $|n| \le N$ при $N \to \infty$*

$$\delta_n^p\left(\left\{(-1)^s e^{\frac{i\pi\beta s}{2N+m+1}}\right\}_{s=-\infty}^{\infty}\right) = \frac{(-1)^n (\pi\beta)^{2p}}{(2N+m+1)^{2p}} e^{\frac{i\pi\beta n}{2N+m+1}} + O\left(N^{-2p-1}\right), \tag{3.1}$$

где β некоторая константа и $p > 0$.

Доказательство. Согласно определению $\delta_n^p(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned}
\delta_n^p\left(\left\{(-1)^s e^{\frac{i\pi\beta s}{2N+m+1}}\right\}\right) &= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k e^{-\frac{i\pi\beta k}{2N+m+1}} \\
&= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(i\pi\beta)^t (-1)^t k^t}{t!(2N+m+1)^t} \\
&= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t (i\pi\beta)^t}{t!(2N+m+1)^t} \omega_{2p,t},
\end{aligned}$$

где

$$\omega_{p,t} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k k^t \sim p^t, \ t \to \infty$$

и ([10]) $\omega_{p,t} = 0, \ 0 \le t \le p-1, \ \omega_{p,p} = (-1)^p\, p!$. Это завершает доказательство. □

Пусть $f \in C^{q+2m}[-1,1]$. Обозначим

$$f^*(x) = \begin{cases} f_{left}(x), & x \in [-1,-\sigma), \\ f\left(\frac{x}{\sigma}\right), & x \in [-\sigma,\sigma], \\ f_{right}(x), & x \in (\sigma,1], \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$f_{left}(x) = \sum_{j=0}^{q+2m} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!}\left(\frac{x}{\sigma}+1\right)^j, \quad f_{right}(x) = \sum_{j=0}^{q+2m} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}\left(\frac{x}{\sigma}-1\right)^j.$$

Пусть

$$B_n(k) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}.$$

Лемма 3.2. [8] *Пусть* $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m \geq 1$, $q \geq 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \ k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $n, N \to \infty$

$$f_n^* = \sum_{j=q}^{q+2m} \frac{1}{2^j N^j} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}(2N+m+1)^k}{(j-k)!} B_n(k) + o(n^{-q-2m-1}). \tag{3.3}$$

Пусть

$$\Phi_{k,m}(e^{i\pi x}) = e^{\frac{i\pi}{2}(m-1)x} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{r(m+1)}}{(2r+x)^{k+1}}.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m \geq 1$, $q \geq 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \ k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|n| \leq N + 2m$ *при* $N \to \infty$

$$\begin{aligned} F_{n,m} - f_n^* = {} & \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1} \sum_{j=q}^{q+m+1} \frac{1}{N^j} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!} \\ & \times \Bigg(\sum_{r \neq 0} \frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r + \frac{2n}{2N+m+1}\right)^{k+1}} - e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau} \\ & - e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}} \sum_{\tau=m}^{q-j+2m} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \sum_{\ell=1}^{m} \left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau} \sum_{s=1}^{m} v_{\ell,s}^{-1} e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}} \Bigg) \\ & + o\left(N^{-q-m-2}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем (детали см. в [8])

$$F_{n,m} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{n+r(2N+m+1)}^* - \sum_{\ell=1}^{m} \theta_{n,\ell} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{N+\ell+r(2N+m+1)}^*, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{3.5}$$

которая показывает, что

$$F_{n,m} - f_n^* = \sum_{r \neq 0} f_{n+r(2N+m+1)}^* - \sum_{\ell=1}^{m} \theta_{n,\ell} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{N+\ell+r(2N+m+1)}^*. \tag{3.6}$$

Теперь, для $|n| \le N + 2m$, согласно Лемме 3.2 и формул (2.5), (2.8), получим

$$\sum_{r\neq 0} f^*_{n+r(2N+m+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!} \times \sum_{r\neq 0}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2n}{2N+m+1}\right)^{k+1}} + o\left(N^{-q-2m-1}\right), \tag{3.7}$$

и

$$\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}$$
$$\times e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}\sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right)\sum_{s=1}^{m} v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}} + o\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Тогда, согласно разложению в ряд Тейлора

$$\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right) = \sum_{\tau=0}^{2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau} + O(N^{-2m-1}),$$

получаем

$$\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}$$
$$\times\sum_{\tau=0}^{2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\sum_{s=1}^{m} v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}} + o\left(N^{-q-m-2}\right).$$

В завершение, принимая во внимание следующие соотношения

$$\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\sum_{s=0}^{m-1} v^{-1}_{\ell,s+1}e^{\frac{2i\pi n s}{2N+m+1}} = \left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau},\ \tau = 0,\dots,m-1,$$

имеем

$$\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}$$
$$\times\sum_{j=q}^{q+m+1}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}\left(\sum_{\tau=0}^{m-1}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\right.$$
$$\left.+\sum_{\tau=m}^{q-j+2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\sum_{s=1}^{m} v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}}\right) + o\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Подставляя это и (3.7) в (3.6), получим требуемое. □

Лемма 3.4. *Пусть* $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m \ge 1$, $q \ge 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0,\ k = 0,\dots,q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка при $N \to \infty$

$$F_{N-p,m} = C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+p+1}}{N^{q+m+1}}\binom{m+p}{m} + O\left(N^{-q-m-2}\right),\ p \geq 0, \tag{3.8}$$

$$F_{-N+p,m} = -F_{N-p,m} + O\left(N^{-q-m-2}\right),\ p \geq 0, \tag{3.9}$$

где

$$C_{q,m}(f) = \sum_{k=0}^{q}\frac{A_{kq}(f)(m+1)^{q-k}}{2^{q-k+1}i^k\pi^{k-m+1}(q-k)!}\Phi_{k,m}^{(m)}(-1). \tag{3.10}$$

Доказательство. Имеем из (3.5)

$$F_{N-p,m} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f^{*}_{N-p+r(2N+m+1)} - \sum_{\ell=1}^{m}\theta_{N-p,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^{*}_{N+\ell+r(2N+m+1)}.$$

Согласно Лемме 3.2 и (2.8)

$$F_{N-p,m} = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}$$

$$\times\left((-1)^p\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2(N-p)}{2N+m+1}\right)^{k+1}} - \sum_{\ell=1}^{m}(-1)^{\ell}\theta_{N-p,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2(N+\ell)}{2N+m+1}\right)^{k+1}}\right)$$

$$+ o\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Ввиду (2.5) получим

$$\begin{aligned} F_{N-p,m} = {} & \frac{(-1)^{N+p+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-p)}{2N+m+1}}}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!} \\ & \times\left(\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N-p)}{2N+m+1}}\right) - \sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right)\sum_{s=0}^{m-1}v^{-1}_{\ell,s+1}e^{\frac{2i\pi(N-p)s}{2N+m+1}}\right) \\ & + o\left(N^{-q-m-2}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Далее, упростим выражение в скобках, которое обозначим как S (см. также (2.2))

$$\begin{aligned} S &= \Phi_{k,m}(\alpha_{-p}) - \sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}(\alpha_\ell)\sum_{s=0}^{m-1}v^{-1}_{\ell,s+1}\alpha_{-p}^{s} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\underset{z=\alpha_j}{res}\frac{\omega(\alpha_{-p})\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)(z-\alpha_{-p})} + \underset{z=\alpha_{-p}}{res}\frac{\omega(\alpha_{-p})\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)(z-\alpha_{-p})}, \end{aligned}$$

где $\omega(z) = \prod_{\ell=1}^{m}(z-\alpha_\ell)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega(\alpha_{-p})\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)(z-\alpha_{-p})}dz,$$

где Γ включает точки $\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^m$ и α_{-p}. Тогда получим

$$S = \frac{(i\pi)^m}{N^m 2\pi i}\frac{(m+p)!}{p!}\int_\Gamma \frac{\Phi_{k,m}(z)}{(z+1)^{m+1}}dz + O\left(N^{-m-1}\right)$$
$$= \frac{(i\pi)^m \Phi_{k,m}^{(m)}(-1)}{N^m}\binom{m+p}{m} + O\left(N^{-m-1}\right).$$

Подставляя это в (3.11), получим первую оценку. Вторую можно доказать аналогично. □

Следующие теоремы представляют основные результаты работы.

Теорема 3.1. *Пусть $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $m \geq 1$, $q \geq 0$ и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \;\; k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место оценка для $|x| < 1$ при $N \to \infty$

(3.12)
$$R_{N,m}(f,x) = iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^N}{N^{q+m+1}}\left[\sin(\pi(N+1)\sigma x)\sum_{k=0}^{\check{m}}\binom{m-k}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\cos^{2k+2}\frac{\pi x}{2}}\right.$$
$$\left. - \sin(\pi N\sigma x)\sum_{k=0}^{\check{m}-1}\binom{m-k-2}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+3}\cos^{2k+4}\frac{\pi x}{2}}\right] + o(N^{-q-m-1}),$$

где $\check{m} = \left[\frac{m}{2}\right]$ и $C_{q,m}(f)$ определен в (3.10).

Доказательство. Согласно определению f^* (см. (3.2)), при фиксированном N имеем

$$f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{i\pi n x}, \;\; x \in (-1,1).$$

Тогда, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{i\pi n\sigma x}$, $x \in [-1,1]$. Поэтому

$$R_{N,m}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N}(f_n^* - F_{n,m})e^{i\pi n\sigma x} + \sum_{|n|>N} f_n^* e^{i\pi n\sigma x}.$$

Легко проверить следующее разложение ошибки (см. также [4] для аналогичного разложения)

$$
\begin{aligned}
R_{N,m}(f,x) &= e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde m}\frac{\delta^k_{N+1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}\\
&- e^{i\pi(N+1)\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde m}\frac{\delta^k_{N}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}\\
&+ e^{-i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde m}\frac{\delta^k_{-N-1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}\\
&- e^{-i\pi(N+1)\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde m}\frac{\delta^k_{-N}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} + r_{N,m}(f,x),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
r_{N,m}(f,x) &= \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+1}}\sum_{n=-N}^{N}\delta^{\tilde m+1}_n(\{f^*_s - F_{s,m}\})e^{i\pi\sigma nx}\\
&+ \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+1}}\sum_{|n|>N}\delta^{\tilde m+1}_n(\{f^*_s\})e^{i\pi\sigma nx}.
\end{aligned}
$$

Покажем, что

$$
r_{N,m}(f,x) = o(N^{-q-m-1}),\ N\to\infty,\ |x|<1. \tag{3.14}
$$

Применение аналогичного разложения приводит к следующему разложению для $r_{N,m}(f,x)$

$$
\begin{aligned}
r_{N,m}(f,x) &= \frac{\delta^{\tilde m+1}_{-N-1}(\{F_{n,m}\})\,e^{-i\pi N\sigma x} - \delta^{\tilde m+1}_{N}(\{F_{n,m}\})\,e^{i\pi(N+1)\sigma x}}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}}\\
&+ \frac{\delta^{\tilde m+1}_{N+1}(\{F_{n,m}\})\,e^{i\pi N\sigma x} - \delta^{\tilde m+1}_{-N}(\{F_{n,m}\})\,e^{-i\pi(N+1)\sigma x}}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}}\\
&+ \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}}\sum_{n=-N}^{N}\delta^{\tilde m+2}_n(\{f^*_s - F_{s,m}\})e^{i\pi\sigma nx}\\
&+ \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\tilde m+2}}\sum_{|n|>N}\delta^{\tilde m+2}_n(\{f^*_s\})e^{i\pi\sigma nx}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Согласно оценке (3.3) Леммы 3.2, получим

$$
\begin{aligned}
\delta^{\tilde m+2}_n(\{f^*_s\}) = &\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{2^jN^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}(2N+m+1)^k}{(j-k)!}\delta^{\tilde m+2}_n\left(\{B_s(k)\}_{s=-\infty}^{\infty}\right)\\
&+ o(n^{-q-2m-1}).
\end{aligned}
$$

Имеем (см. [3]) $\delta_n^{\acute{m}+2}(\{B_s(k)\}_{s=-\infty}^{\infty}) = O(n^{-2\acute{m}-k-5})$, и поэтому,

$$\delta_n^{\acute{m}+2}(\{f_s^*\}) = O(n^{-2\acute{m}-5}N^{-q}) + o(n^{-q-2m-1}), \ |n| > N, \ N \to \infty.$$

Мы видим, что последний член в правой части (3.15) имеет порядок $o(N^{-q-m-1})$.

Тогда, согласно оценке (3.4) Леммы 3.3, напишем

$$\delta_n^{\acute{m}+2}(\{F_{s,m} - f_s^*\}) = \frac{1}{2N+m+1} \sum_{j=q}^{q+m+1} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!N^j}$$
$$\times \left(\frac{(2N+m+1)^{k+1}(i\pi)^{k+1}}{2^k} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ \sum_{r \neq 0} B_{t+r(2N+m+1)}(k) \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) \right.$$
$$- \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\Phi_{k,m}^{(s)}(-1)}{s!} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ (-1)^{t+1} \left(e^{\frac{2i\pi t}{2N+m+1}} + 1 \right)^s e^{-\frac{i\pi(m-1)t}{2N+m+1}} \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right)$$
$$\left. - \sum_{\tau=m}^{q-j+2m} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \sum_{\ell=1}^{m} \left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}} + 1 \right)^{\tau} \sum_{s=0}^{m-1} v_{\ell,s+1}^{-1} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ (-1)^{t+1} e^{\frac{i\pi t(2s-m+1)}{2N+m+1}} \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) \right)$$
$$+ o(N^{-q-m-2}).$$

Ввиду следующей оценки (см. [3])

$$\delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ \sum_{r \neq 0} B_{t+r(2N+m+1)}(k) \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) = O\left(N^{-2\acute{m}-k-5}\right)$$

и согласно Лемме 3.1 и (2.7), имеем

$$\delta_n^{\acute{m}+2}\left(\{F_{s,m} - f_s^*\}\right) = o\left(N^{-q-m-2}\right)$$

и поэтому, третий член в правой части (3.15) имеет порядок $o(N^{-q-m-1})$.

Далее, оценим первые два члена в правой части (3.15). Имеем

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = \sum_{k=0}^{2\acute{m}+2} \binom{2\acute{m}+2}{k} F_{N+\acute{m}+1-k,m}.$$

Ввиду (2.6), получим

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = \sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2} \binom{2\acute{m}+2}{k} F_{N+\acute{m}+1-k,m}.$$

Согласно Лемме 3.4

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = C_{q,m}(f) \frac{(-1)^{N+\acute{m}}}{N^{q+m+1}} \sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2} (-1)^k \binom{2\acute{m}+2}{k} \binom{m+k-\acute{m}-1}{m} +$$
$$+ O\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Ввиду тождества (см. [10])

$$\sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2}(-1)^k\binom{2\acute{m}+2}{k}\binom{m+k-\acute{m}-1}{m}=0,$$

мы заключаем, что

$$\delta_N^{\acute{m}+1}(\{F_{n,m}\})=O\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Аналогично оценив остальные члены получим (3.14).

Далее, вернемся к первым четырем членам в правой части (3.13), которые обозначим как I_1, I_2, I_3 и I_4, соответственно.

Для I_1 имеем $\delta_{N+1}^k(\{F_{n,m}\})=$

$$=\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}F_{N+1+k-s,m}=\sum_{s=k+1}^{2k}\binom{2k}{s}F_{N+1+k-s,m}=\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{s+k+1}F_{N-s,m}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}I_1&=e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\acute{m}}\frac{\delta_{N+1}^k(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}\\&=e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\acute{m}}\frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}}\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{s+k+1}F_{N-s,m}.\end{aligned}$$

Ввиду Леммы 3.4, мы получим

$$I_1=C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}}e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=1}^{\acute{m}}\frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\binom{2k}{s+k+1}\binom{m+s}{m}$$
$$+O(N^{-q-m-2}).$$

Применив тождество (см. [10])

$$\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\binom{2k}{s+k+1}\binom{m+s}{m}=(-1)^{k+1}\binom{m-k-1}{k-1}$$

получим

$$I_1=C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}}e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\acute{m}-1}\binom{m-k-2}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+4}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}}+O(N^{-q-m-2}).$$

Аналогично, согласно (2.6) и Лемме 3.4, имеем для I_3

$$\begin{aligned}\delta_{-N-1}^k(\{F_{n,m}\})&=\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}F_{-N-1+k-s,m}=\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{s}F_{-N-1+k-s,m}\\&=\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{k-1-s}F_{-N+s,m}=-\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{k+s+1}F_{N-s,m}+O(N^{-q-m-2}).\end{aligned}$$

Тогда,

$$
\begin{aligned}
I_3 &= e^{-i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde{m}} \frac{\delta^k_{-N-1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} \\
&= -e^{-i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\tilde{m}} \frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{k+s+1} F_{N-s} + O(N^{-q-m-2}) \\
&= -C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} e^{-i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \binom{m-k-2}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+4}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}).
\end{aligned}
$$

В заключение $I_1 + I_3 =$

$$
= iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}}\sin(\pi N\sigma x)\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1}\binom{m-k-2}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+3}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}).
$$

Аналогичным образом, $I_2 + I_4 =$

$$
= -iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}}\sin(\pi(N+1)\sigma x)\sum_{k=0}^{\tilde{m}}\binom{m-k}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}),
$$

что завершает доказательство. □

Также рассматривается случай $m = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть $f^{(q+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторого $q \geq 0$ и*

$$
f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, \ldots, q-1.
$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|x| < 1$ при $N \to \infty$

$$
R_{N,0}(f,x) = A_{0q}(f)\frac{(-1)^N}{2^{q+2}N^{q+1}}\frac{\sin\pi Nx}{\cos\frac{\pi x}{2}}\sum_{k=0}^{[q/2]}\frac{(-1)^k}{(q-2k)!\pi^{2k+1}}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2k+1}} + o(N^{-q-1}).
$$

Abstract. The paper considers pointwise convergence of quasi-periodical interpolations and obtains an exact constant for the leading term of asymptotic error for smooth functions.

Список литературы

[1] I. Gohberg, V. Olshevsky, "The fast generalized Parker-Traub algorithm for inversion of Vandermonde and related matrices", J. of Complexity 13, no. 2, 208 – 234 (1997).

[2] A. Nersessian, N. Hovhannesyan, "Quasiperiodic interpolation", Reports of the National Academy of Sciences of Armenia, 101, no. 2, 115 – 121 (2001).

[3] A. Poghosyan, "Asymptotic behavior of the Krylov-Lanczos interpolation", Analysis and Applications, 7, no. 2, 199 - 211 (2009).

[4] A. Poghosyan, "On a fast convergence of the rational-trigonometric-polynomial interpolation", Advances in Numerical Analysis, 2013, article ID 315748, 13 pages, DOI:10.1155/2013/315748.

[5] L. Poghosyan, "On a convergence of the quasi-periodic interpolation", The International Workshop on Functional Analysis, October 12-14, 2012, Timisoara, Romania.

[6] L. Poghosyan, "On a convergence of the quasi-periodic interpolation", The III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, Georgia, September 2-9 (2012).

[7] L. Poghosyan, "On L_2-convergence of the quasi-periodic interpolation", Reports of the National Academy of Sciences of Armenia 113, no. 3, 240 – 247 (2013).

[8] L. Poghosyan and A. Poghosyan, "Asymptotic estimates for the quasi-periodic interpolations", Armenian Journal of Mathematics, 5, no. 1, 34 – 57 (2013).

[9] L. Poghosyan and A. Poghosyan, "Convergence acceleration of the quasi-periodic interpolation by rational and polynomial corrections", (abstract) Second International Conference Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives, 24-31 August, Tsaghkadzor, Armenia (2013).

[10] J. Riordan, Combinatorial Identities, Wiley, New York (1979).

Поступила 25 ноября 2013

[1300 դր.]

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 49, No. 2, 2014

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 49, номер 3, 2014

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 49, No. 3, 2014

Contents