ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2014

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 3-22.

О ПРОБЛЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ СЛЕДОВ ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ И ОПЕРАТОРОВ

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

Институте Математики, НАН Армении, Ереван, Армения
Бостонский университет, Бостон, США[1],

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ginovyan@math.bu.edu; sart@ysu.am*

Аннотация. Статья посвящена проблемам аппроксимации следов произведения усеченных теплицевых операторов и матриц, порожденных интегрируемыми, действительными четными функциями определенными на действительной оси (соответственно, на единичной окружности), и оценки соответствующих погрешностей. Эти приближения и соответствующие оценки погрешностей важны в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным или дискретным временем (асимптотическое распределение и большие уклонения для теплицевых квадратических функционалов и форм, параметрическое и непараметрическое оценивание и т.д.). Мы даем обзор известных результатов связанных с проблемой аппроксимации следов и приводим некоторые новые результаты.

MSC2010 numbers: 60G10; 62M20; 47B35.

Ключевые слова: Аппроксимация следов, теплицевы матрицы, усеченный теплицев оператор, оценки погрешностей, сингулярность.

1. Введение

Теплицевы матрицы и операторы, которые представлют большой самостоятельный интерес и имеют широкий спектр применения в различных областях науки (экономика, инженерия, финансы, гидрология, физика, передача сигналов и т.д.) естественным образом возникают в анализе стационарных процессов – ковариантные матрицы (операторы) стацинарных процессов с дискретным (непрерывным) временем являются усеченными теплицевыми матрицами (операторами), порожденными спектральной плотностью этого процесса. И наоборот, произвольная неотрицательная суммируемая функция порождает теплицевую матрицу (оператор), которую можно рассматривать как спектральную плотность некоторого стационарного процесса с дискретным (непрерывным) временем, и, следовательно, соответствующая усеченная матрица (оператор) является ковариантной матрицей (оператором) этого процесса.

[1]Исследования М. Гиновяна были частично поддержаны Национальным научным фондом Grant #DMS-1309009.

Усеченные теплицевы матрицы и операторы играют важную роль в различных областях спектрального и статистического анализа стационарных процессов с дискретным и непрерывным временем таких, как предельные теоремы и большие уклонения для теплицевых случайных квадратичных форм и функционалов, оценки спектральных параметров и функционалов, ассимптотические разложения оценок и т.д. (см., например, , [1], [2], [4], [6] - [17], [19], [22], [24], [25]).

Настоящая статья посвящена проблемам аппроксимации следов произведения усеченных теплицевых матриц (операторов) порожденных интегрируемыми, действительными четными функциями, определенными на единичной окружности (на действительной оси), и оценивание соответствующих погрешностей.

Статья построена следующим образом. В остальной части этого параграфа мы формулируем проблему аппрксимации следов. В параграфе 2 мы обсуждаем проблему следов для теплицевых матриц. В параграфе 3 рассматриваем эту проблему для теплицевых операторов. В параграфе 4 приведены вспомогательные леммы. В параграфе 5 доказываются теоремы 3.1 - 3.4. В параграфе 6 мы обсуждаем некоторые примеры.

1.1. Проблема аппроксимации следов. Проблему аппроксимации следов произведений усеченных Теплицевых матриц и операторов можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ – набор интегрируемых, действительных, четных функций, определенных на множестве Λ, где $\Lambda = \mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ или $\Lambda = \mathbf{T} := (-\pi, \pi]$, и пусть $A_T(h_k)$ означает либо T-усеченный теплицевый оператор, либо теплицева $(T \times T)$-матрица, порожденная функцией h_k (соответствующие определения приведены ниже). Далее, пусть $\tau := \{\tau_k : \tau_k \in \{-1, 1\}, k = \overline{1,m}\}$ – заданная последовательность чисел ± 1. Положим

$$S_{A,\mathcal{H},\tau}(T) := \frac{1}{T} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^{m} \{A_T(h_k)\}^{\tau_k} \right],$$

где $\operatorname{tr}[A]$ обозначает след A,

$$M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau} := (2\pi)^{m-1} \int_\Lambda \prod_{k=1}^{m} [h_k(\lambda)]^{\tau_k} \, d\lambda,$$

и

$$\Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) := |S_{A,\mathcal{H},\tau}(T) - M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau}|.$$

Проблема состоит в аппроксимации $S_{A,\mathcal{H},\tau}(T)$ величиной $M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau}$ в оценке погрешности $\Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T)$ при $T \to \infty$. Точнее, для заданной последовательности $\tau = \{\tau_k \in \{-1, 1\}, k = \overline{1,m}\}$ нужно найти условия на функции $\{h_k(\lambda), k = \overline{1,m}\}$ такие, что :

$$\text{Проблема (A):} \quad \Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

$$\text{Проблема (B):} \quad \Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) = O(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Проблема аппроксимации следов была рассмотрена еще в монографии Гренадера и Сеге [19]. Она интенсивно изучалась в литературе (см., например, Kac [21], Ibragimov [20], Rosenblatt [23], Taniguchi [24], Avram [1], Fox and Taqqu [7], Dahlhaus [6], Giraitis and Surgailis [17], Ginovyan [8]-[11], Taniguchi and Kakizawa

[25], Lieberman and Phillips [22], Giraitis et al. [16], Ginovyan and Sahakyan [12]-[15]).

В настоящей статье мы суммируем известные результаты по проблемам (A) и (B) и доказываем некторые новые результаты для теплицевых матриц и операторов, сформулированные в параграфах 2 и 3. Результаты о теплицевых операторах доказаны в параграфе 5. Доказательства соответствующих результатов о теплицевых матрицах аналогичны и мы их не приводим.

Мы выделяем следующий частный случай, который важен для приложений и широко обсужден в литературе: $m = 2\nu$, $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$, и

$$h_1(\lambda) = h_3(\lambda) = \cdots = h_{2\nu-1}(\lambda) := f(\lambda)$$
$$h_2(\lambda) = h_4(\lambda) = \cdots = h_{2\nu}(\lambda) := g(\lambda).$$

В дальнейшем буквами C, c и M, с индексами или без, мы обозначаем положительные постоянные, которые могут быть разными в разных формулах. Мы предполагаем также, что все функции, определенные на $\mathbb{T}$ продолжены на всю ось $\mathbb{R}$ с периодом 2π.

2. Проблема следов для Теплицевых матриц

Пусть $f(\lambda)$ – интегрируемая, четная функция на $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$. Для $T = 1, 2, \ldots$ через $B_T(f)$ обозначим теплицевую $(T \times T)$-матрицу, порожденную функцией f, т. е.

$$B_T(f) := \|\widehat{f}(s-k)\|_{s,k=\overline{1,T}},$$

где

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

суть коэффициенты Фурье функции f.

Отметим, что

$$\frac{1}{T}\operatorname{tr}[B_T(f)] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda. \tag{2.1}$$

Что будет, если мы заменим матрицу $B_T(f)$ произведением теплицевых матриц? Заметим, что произведение теплицевых матриц не является теплицевой матрицей.

Идея состоит в приближении следа произведения теплицевых матриц следом теплицевой матрицы, порожденной произведением порождающих функций. Точнее, для набора $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ действительных, четных и интегрируемых на $\mathbb{T}$ функций мы полагаем

$$S_{B,\mathcal{H}}(T) := \frac{1}{T}\operatorname{tr}\left[\prod_{i=1}^{m} B_T(h_i)\right], \qquad M_{\mathbb{T},\mathcal{H}} := (2\pi)^{m-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right] d\lambda, \tag{2.2}$$

и пусть

$$\Delta(T) := \Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T) = |S_{B,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{T},\mathcal{H}}|.$$

Отметим, что согласно (2.1),

$$M_{\mathbb{T},\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\operatorname{tr}\left[B_T\left(\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right)\right].$$

Как хорошо приближается $S_{B,\varkappa}(T)$ величиной $M_{\mathbf{T},\varkappa}$? Какова скорость стремления к нулю погрешности $\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T)$, когда $T \to \infty$? В этом состоят проблемы (A) и (B) в рассматриваемом случае.

2.1. Проблема (A) для теплицевых матриц. Напомним, что проблема (A) состоит в нахождении условий на функции $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, ..., $h_m(\lambda)$ в (2.2) таких, что $\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T) = o(1)$ при $T \to \infty$.

В теореме 2.1 и замечании 2.2 мы суммируем результаты по проблеме (A) для теплицевых матриц в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T) = |S_{B,\varkappa}(T) - M_{\mathbf{T},\varkappa}|$. *Каждое из следующих условий достаточно для выполнения условия*

$$\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{2.3}$$

(A1) $h_i \in L^{p_i}(\mathbf{T})$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = \overline{1,m}$ *и* $1/p_1 + \ldots + 1/p_m \le 1$.
(A2) *Функция* $\varphi(\mathrm{u})$, *определенная равенством*

$$\varphi(\mathrm{u}) := \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\lambda)h_2(\lambda - u_1)h_3(\lambda - u_2)\cdots h_m(\lambda - u_{m-1})\,d\lambda, \tag{2.4}$$

где $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$, *принадлежит* $L^{m-2}(\mathbf{T}^{m-1})$ *и непрерывна в точке* $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{m-1}$.

Замечание 2.1. Утверждение (A1) было доказано Аврамом [1]. В частном случае $p_i = \infty$, $i = \overline{1,m}$, когда все функции h_i ограничены, оно было доказано Гренадером и Сеге ([19], Sec. 7.4). В случае $m = 4$; $p_1 = p_3 = 2$; $p_2 = p_4 = \infty$, (A1) было доказано Ибрагимовым [20] и Розенблаттом [23]. Утверждение (A2), в случае $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ и $h_2 = h_4 := g$, было доказано Гиновяном и Саакяном [12].

Замечание 2.2. В частном случае $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ and $h_2 = h_4 := g$, Гирайтис и Сургайлис [17] (см. также Гирайтис и др. [16]), и Гиновян и Саакян [12] доказали, что следующие условия также достаточны для выполнения (2.3):
(A3) (Гирайтис и Сургайлис [17]). $f \in L^2(\mathbf{T})$, $g \in L^2(\mathbf{T})$, $fg \in L^2(\mathbf{T})$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)g^2(\lambda - \mu)\,d\lambda \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \to 0.$$

(A4) (Гиновян и Саакян [12]). Функции f и g удовлетворяют условиям

$$f(\lambda) \le |\lambda|^{-\alpha}L_1(\lambda) \quad \text{и} \quad |g(\lambda)| \le |\lambda|^{-\beta}L_2(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathbf{T},$$

для некотроых $\alpha < 1$, $\beta < 1$ с $\alpha + \beta \le 1/2$, и $L_i \in SV(\mathbf{R})$, $\lambda^{-(\alpha+\beta)}L_i(\lambda) \in L^2(\mathbf{T})$, $i = 1, 2$, где $SV(\mathbf{R})$ – класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, точнее,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{u(a\lambda)}{u(\lambda)} = 1 \quad \text{для всех} \quad a > 0,$$

при этом, $u(\lambda) \in L^\infty(\mathbf{R})$, $\lim_{\lambda\to 0} u(\lambda) = 0$, $u(\lambda) = u(-\lambda)$ и $0 < u(\lambda) < u(\mu)$ при $0 < \lambda < \mu$.

Замечание 2.3. Утверждение (A4), в частном случае, когда $\alpha + \beta < 1/2$, доказали Фокс и Такку [7].

Замечание 2.4. Было бы интересно доказать (A3) и (A4) для произвольного $m > 4$.

2.2. Проблема (B) для теплицевых матриц. Напомним, что проблема (B) состоит в нахождении условий на функции $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \ldots, h_m(\lambda)$ в (2.2), гарантирующих выполнение условия $\Delta_{B,\mathbf{T},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-\gamma})$ при $T \to \infty$ для некоторого $\gamma > 0$.

В теореме 2.2 ниже подытожены результаты, касающиеся проблемы (B) для теплицевых матриц в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$. Сначала определим некоторые классы функций (см., например, [5, 24, 25]). Напомним, что $\mathbf{T} = (-\pi, \pi]$ и положим

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{T}) := \left\{ f \in L^1(\mathbf{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\widehat{f}(k)| < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbf{T}} e^{i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda$, $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$, и

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{T}) = \mathcal{F}_{ARMA}(\mathbf{T}) := \left\{ f : f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{A(e^{i\lambda})}{B(e^{i\lambda})} \right|^2, \quad \lambda \in \mathbf{T} \right\},$$

где $0 < \sigma^2 < \infty$, а полиномы

$$A(z) := \sum_{k=0}^{q} a_k z^k \quad \text{и} \quad B(z) := \sum_{k=0}^{p} b_k z^k \quad (q, p \in \mathbf{N})$$

отрезаны от нуля при $|z| \le 1$.

Для функции $\psi \in L^p(\mathbf{T})$, $1 \le p \le \infty$, через $\omega_p(\psi, \delta)$ обозначим ее L^p–модуль непрерывности:

$$\omega_p(\psi, \delta) := \sup_{0 < h \le \delta} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_{L^p}, \quad \delta > 0.$$

Для заданных чисел $0 < \gamma \le 1$ и $1 \le p \le \infty$, через $\mathrm{Lip}(\mathbf{T}; p, \gamma)$ обозначим L^p-Липшицовый класс функций на $\mathbf{T}$ (см., например, [5]):

$$\mathrm{Lip}(\mathbf{T}; p, \gamma) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbf{T}); \quad \omega_p(\psi; \delta) = O(\delta^\gamma), \quad \delta \to 0\}.$$

Заметим, что для $\psi \in \mathrm{Lip}(p, \gamma)$, существует постоянная C такая, что $\omega_p(\psi; \delta) \le C\,\delta^\gamma$ при $\delta > 0$.

Наконец, через $B_2^{1/2}(\mathbf{T})$ обозначим класс функций Бесова, который определяется так:

$$B_2^{1/2}(\mathbf{T}) := \left\{ f \in L^1(\mathbf{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k| + 1) |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, суть коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 2.2. *Пусть $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$, $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, и пусть $\Delta_{B,\mathbf{T},\mathcal{H}}(T)$ определена как в теореме 2.1. Имеют место следующие утверждения:*

(B1) *Если $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbf{T})$, $i = \overline{1,m}$, тогда*

$$\Delta_{B,\mathbf{T},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-1}) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B2) *Если функции $h_i(\lambda)$, $i = \overline{1,m}$, имеют равномерно ограниченные производные на $\mathbf{T} := (-\pi, \pi]$, тогда для произвольного $\epsilon > 0$*

$$\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T) = O(T^{-1+\epsilon}) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B3) *Если функция $\varphi(\mathbf{u})$, определенная в (2.4) удовлетворяет условию*

$$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{0})| \le C|\mathbf{u}|^\gamma, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{T}^{m-1},$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\gamma \in (0,1]$, где $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $|\mathbf{u}| = |u_1| + \cdots + |u_{m-1}|$, тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\Delta_{B,\mathbf{T},\varkappa}(T) = O\left(T^{-\gamma+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{2.5}$$

(B4) *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbf{T}; p_i, \gamma)$, где $p_i \ge 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ с $1/p_1 + \cdots + 1/p_m \le 1$ and $\gamma \in (0,1]$. Тогда (2.5) выполняется при любом $\varepsilon > 0$.*

(B5) *Пусть функции $h_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ дифференцируемы на $\mathbf{T} \setminus \{0\}$, и для некоторых констант $C_i > 0$ и α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ с условиями $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha := \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$, имеют место оценки*

$$|h_i(\lambda)| \le C_i|\lambda|^{-\alpha_i}, \quad |h_i'(\lambda)| \le C_i|\lambda|^{-(\alpha_i+1)}, \quad \lambda \in \mathbf{T} \setminus \{0\}, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ условие (2.5) выполняется с

$$\gamma = \frac{1}{m}(1 - \alpha). \tag{2.6}$$

Замечание 2.5. Утверждение (B1) было доказано Танигучи [24] (см также [25]). Утверждение (B2), которое слабее (B1), но при более слабых условий было доказано Либерманом и Филипсом [22]. Утверждения (B3)–(B5) для $m = 4$ доказаны Гиновяном и Саакяном [15].

Замечание 2.6. Легко видеть, что при условии **(B2)** имеем, что $h_i \in \mathrm{Lip}(\mathbf{T}; \mathbf{p}, 1)$ для любых $i = 1, 2, \ldots m$ и $p \ge 1$. Следовательно, из **(B4)** вытекает **(B2)**.

Следующие результаты (ср. [11]) показывают, что в частном случае $m = 2$ оценки (B4) и (B5) теоремы 2.2 могут быть существенно улучшены.

Теорема 2.3. *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbf{T}; p_i, \gamma_i)$, где $p_i > 1$, $1/p_1 + 1/p_2 \le 1$ и $\gamma_i \in (0,1]$, $i = 1, 2$, и пусть*

$$\Delta_{2,B}(T) := \left|\frac{1}{T} tr[B_T(h_1)B_T(h_2)] - 2\pi \int_{\mathbf{T}} h_1(\lambda)h_2(\lambda)\, d\lambda\right|. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\Delta_{2,B}(T) = \begin{cases} O(T^{-(\gamma_1+\gamma_2)}), & \text{если} \quad \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \\ O(T^{-1} \ln T), & \text{если} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ O(T^{-1}), & \text{если} \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 1. \end{cases}$$

Теорема 2.4. *Допустим, что функции $h_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 2.2 (B5) с $m = 2$. Тогда*

$$\Delta_{2,B}(T) = O\left(T^{-1+(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Теорема 2.5. *Если $h_i(\lambda) \in B_2^{1/2}(\mathbf{T})$, $i = 1, 2$, тогда*

$$\Delta_{2,B}(T) = O\left(T^{-1}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

3. Проблема следов для Теплицевых операторов

В этом параграфе мы рассматриваем проблемы (A) и (B) для теплицевых операторов, т. е. в случае, когда порождающие функции определены на действительной оси. Проблема (A) включает оценку $o(1)$, а проблема (B) включает оценку $O(T^{-\gamma})$ с некоторой $\gamma > 0$. Результаты этого параграфа доказаны в параграфе 5.

Для действительной, четной и интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f и для $T > 0$, *T-усеченный оператор Теплица* $W_T(f)$, порожденный фукцией f, определяется следующим образом (см., напр., [13, 19, 20]):

$$[W_T(f)u](t) = \int_0^T \hat{f}(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0,T], \tag{3.1}$$

где

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

есть преобразование Фурье функции $f(\lambda)$.

Из (3.1), (3.2) и из формулы для следов интегральных операторов (см., напр., [18], стр. 114), следует, что

$$\operatorname{tr}[W_T(f)] = \int_0^T \hat{f}(t-t)dt = T\hat{f}(0) = T\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d\lambda.$$

Мы ставим тот же вопрос, что и в случае теплицевых матриц: что будет при замене оператора $W_T(f)$ на произведение таких операторов? Отметим, что произведение теплицевых операторов опять не является теплицевым оператором.

Подход тот же, что и в случае теплицевых матриц – приблизить след произведения теплицевых операторов следом теплицевого оператора, порожденного произведением порождающих функций. Для действительных, четных и интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ определим

$$S_{W,\mathcal{H}}(T) := \frac{1}{T}\operatorname{tr}\left[\prod_{i=1}^m W_T(h_i)\right], \quad M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} := (2\pi)^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^m h_i(\lambda)\right] d\lambda, \tag{3.3}$$

и пусть

$$\Delta(T) := \Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T) = |S_{W,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{R},\mathcal{H}}|. \tag{3.4}$$

Заметим, что согласно (3.3),

$$M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\operatorname{tr}\left[W_T\left(\prod_{i=1}^m h_i(\lambda)\right)\right].$$

Как хорошо $M_{\mathbb{R},\mathcal{H}}$ приближает $S_{W,\mathcal{H}}(T)$? Какова скорость сходимости к нулю погрешности $\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T)$, когда $T \to \infty$? В этом состоят проблемы (A) и (B) в рассматриваемом случае.

3.1. Проблема (A) для теплицевых операторов. В теореме 3.1 и замечании 3.1 ниже подытожены результаты, касающиеся проблемы (A) для теплицевых операторов.

Теорема 3.1. *Пусть $\Delta(T) := \Delta_{\mathcal{W},\mathbf{R},\mathcal{H}}(T)$ определена в (3.4). Каждое из следующих условий достаточно для выполнения условия*

$$\Delta(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.5}$$

(A1) $h_i \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^{p_i}(\mathbf{R})$, *где* $p_i \geq 1$, $i = \overline{1,m}$, $1/p_1 + \ldots + 1/p_m \leq 1$.

(A2) *Функция* $\varphi(\mathbf{u})$, *определенная равенством*

$$\varphi(\mathbf{u}) := \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda) h_2(\lambda - u_1) h_3(\lambda - u_2) \cdots h_m(\lambda - u_{m-1})\, d\lambda, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$, *принадлежит* $L^{m-2}(\mathbf{R}^{m-1})$ *и непрерывна в точке* $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{m-1}$.

Замечание 3.1. В частном случае, когда $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ and $h_2 = h_4 := g$, в работе Гиновяна и Саакяна [13] доказано, что следующие условия также достаточны для выполнения (3.5):

(A3) $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, $g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, $fg \in L^2(\mathbf{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda - \mu)\, d\lambda \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \to 0.$$

(A4) Функции f и g интегрируемы на $\mathbf{R}$, ограничены на $\mathbf{R} \setminus (-\pi, \pi)$, и удовлетворяют условиям

$$f(\lambda) \leq |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda) \quad \text{и} \quad |g(\lambda)| \leq |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

при некоторых $\alpha < 1$, $\beta < 1$ с $\alpha + \beta \leq 1/2$, и $L_i \in SV(\mathbf{R})$, $\lambda^{-(\alpha+\beta)} L_i(\lambda) \in L^2(\mathbf{T})$, $i = 1, 2$, где $SV(\mathbf{R})$ – класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, таких, что $u(\lambda) \in L^\infty(\mathbf{R})$, $\lim_{\lambda \to 0} u(\lambda) = 0$, $u(\lambda) = u(-\lambda)$ и $0 < u(\lambda) < u(\mu)$ при $0 < \lambda < \mu$.

Замечание 3.2. Было бы интересно обобщить утверждения (A3) и (A4) на произвольное $m > 4$.

3.2. Проблема (B) для теплицевых операторов. В теореме 3.2 ниже подытожены результаты, касающиеся проблеме (B) для теплицевых операторов в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$. Пусть

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{R}) := \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\widehat{f}(t)| dt < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda$, $\widehat{f}(-t) = \widehat{f}(t)$.

Для $\psi \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ через $\omega_p(\psi, \delta)$ обозначим L^p–модуль непрерывности функции ψ:

$$\omega_p(\psi, \delta) := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_{L^p}, \quad \delta > 0.$$

Для заданных чисел $0 < \gamma \leq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$, через $\mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p, \gamma)$ обозначим L^p-липшицевый класс на $\mathbf{R}$ (см., напр., [5]):

$$\mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p, \gamma) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbf{R}) \ : \ \omega_p(\psi; \delta) = O(\delta^\gamma) \text{ при } \delta \to 0\}.$$

Наконец, через $B_2^{1/2}(\mathbf{R})$ обозначим класс Бесова:

$$B_2^{1/2}(\mathbf{R}) := \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} (|t|+1)|\widehat{f}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(t)$, $t \in \mathbf{R}$ – преобразование Фурье функции f.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$, $\Delta_{W,\mathbf{R},\mathcal{H}}(T)$ и $\varphi(\mathbf{u})$ определены в (3.4) и (3.6). Справедливы следующие предложения:*

(B1) *Если $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbf{R})$, $i = 1, 2, \dots, m$, тогда*

$$\Delta_{W,\mathbf{R},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-1}) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B2) *Пусть $\varphi(\mathbf{u}) \in L^\infty(\mathbf{R}^{m-1})$ и для некоторых постоянных $C > 0$ и $\gamma \in (0, 1]$*

(3.7) $$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(0)| \le C|\mathbf{u}|^\gamma, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1},$$

где $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{m-1}$ и $|\mathbf{u}| = |u_1| + \dots + |u_{m-1}|$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

(3.8) $$\Delta_{W,\mathbf{R},\mathcal{H}}(T) = O\left(T^{-\gamma+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B3) *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p_i, \gamma)$, где $p_i \ge 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, $1/p_1 + \dots + 1/p_m \le 1$ и $\gamma \in (0, 1]$. Тогда* (3.8) *выполняется при любом $\varepsilon > 0$.*

(B4) *Пусть $h_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, m$, дифференцируемые функции на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ такие, что для некоторых постоянных $C_i > 0$ и $\sigma_i > 0$, $\delta_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, m$ с $\sigma := \sum_{i=1}^m \sigma_i < 1$, при $i = 1, 2, \dots, m$,*

(3.9) $$|h_i(\lambda)| \le C_i \begin{cases} |\lambda|^{-\sigma_i} & \text{при} \quad |\lambda| \le 1 \\ |\lambda|^{-\delta_i} & \text{при} \quad |\lambda| > 1 \end{cases}, \quad |h_i'(\lambda)| \le C_i \begin{cases} |\lambda|^{-\sigma_i - 1} & \text{при} \quad |\lambda| \le 1 \\ |\lambda|^{-\delta_i - 1} & \text{при} \quad |\lambda| > 1 \end{cases}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

(3.10) $$\Delta_{W,\mathbf{R},\mathcal{H}}(T) = O\left(T^{-\gamma+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

где

(3.11) $$\gamma = \frac{1}{m}(1 - \sigma).$$

Следующие результаты, являющиеся непрерывными аналогами Теорем 2.3 – 2.5, показывают, что в случае $m = 2$ оценки в (B3) и (B4) теоремы 3.2 могут быть существенно улучшены.

Теорема 3.3. *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p_i, \gamma_i)$ где $p_i > 1$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ и $\gamma_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$, и пусть*

(3.12) $$\Delta_{2,W}(T) := \left| \frac{1}{T} tr[W_T(h_1) W_T(h_2)] - 2\pi \int_{\mathbf{R}} h_1(\lambda) h_2(\lambda)\, d\lambda \right|.$$

Тогда

$$\Delta_{2,W}(T) = \begin{cases} O(T^{-(\gamma_1+\gamma_2)}) & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \\ O(T^{-1} \ln T) & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ O(T^{-1}) & \text{при} \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 1 \end{cases}.$$

Теорема 3.4. *Пусть функции $h_i(\lambda)$, $i = 1,2$, удовлетворяют условиям теоремы 3.2 (B4) с $m = 2$. Тогда*

$$\Delta_{2,W}(T) = O\left(T^{-1+(\sigma_1+\sigma_2)}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.13}$$

Теорема 3.5. *Пусть $h_i(\lambda) \in B_2^{1/2}(\mathbf{R})$, $i = 1,2$, а $\Delta_{2,W}(T)$ определена в (3.12). Тогда*

$$\Delta_{2,W}(T) = O\left(T^{-1}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.14}$$

4. Предварительные результаты

В этом параграфе мы докажем несколько вспомогательных лемм. Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [13], [16], стр. 8).

Лемма 4.1. *Пусть $D_T(u)$ – ядро Дирихле*

$$D_T(u) = \frac{\sin(Tu/2)}{u/2}.$$

Тогда для любого $\delta \in (0,1)$

$$|D_T(u)| \le 2T^\delta |u|^{\delta-1}, \quad u \in \mathbf{R}.$$

Обозначим

$$G_T(u) := \int_0^T e^{iTu} dt = e^{iTu/2} D_T(u), \quad u \in \mathbf{R}, \tag{4.1}$$

$$\Phi_T(\mathbf{u}) := \frac{1}{(2\pi)^{m-1}T} \cdot D_T(u_1) \cdots D_T(u_{m-1}) D_T(u_1 + \cdots + u_{m-1}), \tag{4.2}$$

$$\Psi(\mathbf{u}) := \varphi(u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + \cdots + u_{m-1}), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$, а функция $\varphi(\mathbf{u})$, соответствующая набору $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, определена в (3.6).

Следующая лемма вытекает из (3.3) и (4.1) – (4.3) (ср. [13], лемма 1).

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ – набор действительных, четных и интегрируемых на $\mathbf{R}$ функций, $\hat{h}_k$ – коэффициенты Фурье функции h_k ($k = 1, \ldots, m$), и пусть $S(T) := S_{W,\mathcal{H}}(T)$ определена в (3.3). Справедливы следующие равенства:*

1) $S(T) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \cdots \int_0^T \hat{h}_1(u_1 - u_2) \hat{h}_2(u_2 - u_3) \ldots \hat{h}_m(u_m - u_1) du_1 \ldots du_m,$

2) $S(T) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^m} h_1(u_1) \ldots h_m(u_m) G_T(u_1 - u_2) G_T(u_2 - u_3) \times \cdots \times G_T(u_m - u_1) du_1 \ldots du_m,$

3) $S(T) = (2\pi)^{m-1} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^{m-1}} \Psi(\mathbf{u}) \Phi_T(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$

Для $m = 3, 4 \ldots$ и $\delta > 0$ обозначим

$$\mathbf{E}_\delta = \{(u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1} : |u_i| \le \delta, \, i = 1, \ldots, m-1\}, \quad \mathbf{E}_\delta^c = \mathbf{R}^{m-1} \setminus \mathbf{E}_\delta,$$

$$p(3) = 2, \quad p(m) = \frac{m-2}{m-3} \quad (m > 3).$$

Лемма 4.3. *Ядро* $\Phi_T(\mathrm{u})$, $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{m-1}$, $m \geq 3$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\sup\limits_T \int_{\mathbb{R}^{m-1}} |\Phi_T(\mathrm{u})| \, d\mathrm{u} = C_1 < \infty$;

b) $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \Phi_T(\mathrm{u}) \, d\mathrm{u} = 1$;

c) $\lim\limits_{T \to \infty} \int_{\mathbf{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathrm{u})| \, d\mathrm{u} = 0$ *для любого* $\delta > 0$;

d) *для любого* $\delta > 0$ *существует постоянная* $M_\delta > 0$ *такая, что*

$$\int_{\mathbf{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathrm{u})|^{p(m)} \, d\mathrm{u} \leq M_\delta \quad \text{при} \quad T > 0, \tag{4.4}$$

Доказательство. Доказательство a) - c) можно найти в [2], лемма 3.2 (см. также [13], лемма 2). Докажем d). Сначала заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |D_T(u)|^{p(m)} \, du \leq C \cdot T^{p(m)-1} \quad \text{и} \quad |D_T(u)| \leq C_\delta \quad \text{при} \quad |u| > \delta, \quad T > 0. \tag{4.5}$$

Далее, для $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}_\delta^c} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} \quad &\leq \int\limits_{|u_1| > \delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} + \int\limits_{|u_2| > \delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} \\ &+ \ldots + \int\limits_{|u_{m-1}| > \delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} =: I_1 + I_2 + \ldots + I_{m-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Достаточно оценить I_1 ($I_2, \ldots, I_n$ оцениваются аналогично). Имеем, что

$$\begin{aligned} I_1 \quad &\leq \int\limits_{|u_1| > \delta, \ |u_2| > \delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} + \ldots + \int\limits_{|u_1| > \delta, \ |u_{m-1}| > \delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} \\ &+ \int\limits_{|u_1| > \delta, \ |u_2| \leq \delta/m, \ |u_{m-1}| \leq \delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) d\mathrm{u} =: I_1^{(2)} + \ldots + I_1^{(m-1)} + I_1^{(m)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Согласно (4.5),

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &\leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \cdot \int\limits_{|u_2| > \delta/m} |D_T(u_2)|^{p(m)} \cdots |D_T(u_{m-1})|^{p(m)} \\ &\qquad \times |D_T(u_1 + \ldots + u_{m-1})|^{p(m)} \, du_1 du_{m-1} \ldots du_2 \\ &\leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \cdot T^{(p(m)-1)(m-2)} \int\limits_{|u_2| > \delta/m} \frac{1}{|u_2|^{p(m)}} \, du_2 \leq M_\delta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Аналогично,

$$I_1^{(j)} \leq M_\delta, \qquad j = 3, \ldots, m-1. \tag{4.9}$$

Теперь, заметим, что в интеграле $I_1^{(m)}$ мы имеем, что $|u_1 + \ldots + u_{m-1}| > \delta/m$,. Следовательно, согласно (4.5)

$$I_1^{(m)} \leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \int\limits_{|u_1|>\delta} D_T^{p(m)}(u_1) \cdots D_T^{p(m)}(u_{m-1}) du_2 \ldots du_{m-1} du_1$$

$$\leq C_\delta \int\limits_{|u_1|>\delta} \frac{1}{|u_1|^{p(m)}} du_1 \leq M_\delta. \tag{4.10}$$

Из (4.6) – (4.10) получим (4.4). Лемма 4.3доказана.

Доказательство следующей леммы можно найти в [16], стр. 161.

Лемма 4.4. *Пусть* $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$, *и* $\alpha + \beta > 1$. *Тогда для любого* $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha |x + y|^\beta} dx = \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}},$$

где M *– постоянная, зависящая от* α *и* β.

Обозначим $E = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : |u_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ и $E^C = \mathbb{R}^n \setminus E$. Доказательства следующих трех лемм можно найти в [14].

Лемма 4.5. *Пуст* $0 < \alpha \leq 1$ *и* $\frac{n}{n+1} < \beta < \frac{n+\alpha}{n+1}$. *Тогда*

$$B_i := \int_E \frac{|u_i|^\alpha}{|u_1 \cdots u_n(u_1 + \cdots + u_n)|^\beta} du_1 \cdots du_n < \infty, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 4.6. *Пусть* $\frac{n}{n+1} < \beta < 1$. *Тогда*

$$I := \int_{E^C} \frac{1}{|u_1 \cdots u_n(u_1 + \cdots + u_n)|^\beta} du_1 \cdots du_n < \infty.$$

Лемма 4.7. *Пусть* $p > 1$, $0 < \sigma < 1/p$ *и пусть* $f(\lambda)$ *– дифференцируемая на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *функция такая, что для некоторой константы* $M > 0$

$$|f(\lambda)| \leq \begin{cases} M|\lambda|^{-\sigma} & \text{при } |\lambda| \leq 1 \\ M|\lambda|^{-\delta} & \text{при } |\lambda| > 1 \end{cases}, \qquad |f'(\lambda)| \leq \begin{cases} M|\lambda|^{-\sigma-1} & \text{при } |\lambda| \leq 1 \\ M|\lambda|^{-\delta-1} & \text{при } |\lambda| > 1 \end{cases}. \tag{4.11}$$

Тогда $f \in \mathrm{Lip}(p, 1/p - \sigma)$.

5. Доказательства теорем 3.1 - 3.5

Мы докажем только результаты, касающиеся теплицевых операторов (теоремы 3.1 - 3.5). Соответствующие результаты о теплицевых матрицах (теоремы 2.1 - 2.5) доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 3.1. Мы начнем с утверждения (**A2**). В силу леммы 4.2, 3) и 4.3, b), имеем: $\Delta(T) = (2\pi)^{m-1}|R(T)|$, где

$$R(T) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} [\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)] \Phi_T(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Из (4.3) следует, что функция $\Psi(\mathbf{u})$ принадлежит $L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$ и непрерывна в точке $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ можем найти $\delta > 0$ такое, что

$$(5.1) \qquad |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)| < \frac{\varepsilon}{C_1}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{E}_\delta,$$

где C_1 постоянная из леммы Lemma 4.3, a). Рассмотрим разложение $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ такое, что

$$(5.2) \qquad \|\Psi_1\|_{L^{m-2}} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_\delta}} \quad \text{и} \quad \|\Psi_2\|_\infty < \infty,$$

где M_δ определена в лемме 4.3, d).

Заметим, что $\frac{1}{m-2} + \frac{1}{p(m)} = 1$, где $p(m) = \frac{m-2}{m-3}$. Поэтому применив лемму 4.3 и (5.1), (5.2), при достаточно большом T будем иметь, что

$$\begin{aligned} |R(T)| &\le \int_{\mathbf{E}_\delta} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + C_m \int_{\mathbf{E}_\delta^c} |\Psi_1(\mathbf{u})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\ &+ \int_{\mathbf{E}_\delta^c} |\Psi_2(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le \frac{\varepsilon}{C_1} \int_{\mathbf{E}_\delta} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\ &+ \|\Psi_1\|_{L^{m-2}} \left[\int_{\mathbf{E}_\delta^c} \Phi_T^{p(m)}(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right]^{1/p(m)} + C_2 \int_{\mathbf{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le 3\varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение (A2).

Доказательство **(A1)**. Согласно (A2) достаточно доказать, что функция

$$(5.3) \qquad \varphi(\mathbf{u}) := \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda)h_2(\lambda - u_1)h_3(\lambda - u_2)\cdots h_m(\lambda - u_{m-1})\, d\lambda,$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, принадлежит $L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$ и непрерывна в $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}$, при условии, что

$$(5.4) \qquad h_i \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^{p_i}(\mathbb{R}), \quad 1 \le p_i \le \infty, \quad i = 1, \dots m, \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \le 1.$$

Применив неравенство Гельдера, из (5.3) и (5.4) получаем

$$|\varphi(\mathbf{u})| \le \prod_{i=1}^m \|h_i\|_{L^{p_i}} < \infty, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Следовательно, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$. С другой стороны, из условия $h_i \in L^1(\mathbb{R})$ и (5.3) следует, что $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{m-1})$. Значит $\varphi \in L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Для доказательства непрерывности $\varphi(\mathbf{u})$ в точке 0 рассмотрим три случая.

Случай 1. $p_i < \infty, \quad i = 1, \dots, m.$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можем найти $\delta > 0$ такое, что (см. (5.4))

$$(5.5) \qquad \|h_i(\lambda - u) - h_i(\lambda)\|_{L^{p_i}} \le \varepsilon, \ \ i = 2, \dots, m, \quad \text{при} \quad |u| \le \delta.$$

Фиксируем $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{m-1})$ с $|\mathbf{u}| < \delta$ и положим

$$\overline{h}_i(\lambda) = h_i(\lambda - u_{i-1}) - h_i(\lambda), \quad i = 2, \dots, m.$$

Тогда, в силу (5.3),

$$\varphi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda) \prod_{i=2}^{m} \left(\overline{h}_i(\lambda) + h_i(\lambda)\right) d\lambda = \varphi(0) + W.$$

Из (5.5) следует, что $\|\overline{h}_i\|_{L^{p_i}} \leq \varepsilon$, $i = 2, \dots, m$. Заметим, что каждый из интегралов, составляющих W, содержит по крайней мере одну функцию $\overline{h}_i$ и, может быть оценен следующим образом:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h_1(u)\overline{h}_2(\lambda)h_3(\lambda)\dots h_{m-1}(\lambda)d\lambda\right| \leq \|h_1\|_{L^{p_1}}\|\overline{h}_2\|_{L^{p_2}}\|h_3\|_{L^{p_3}}\dots\|h_m\|_{L^{p_m}} \leq C\cdot\varepsilon.$$

Случай 2. $p_i \leq \infty$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} < 1$.

Существуют числа $p_i' < p_i$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i' \leq 1$. Тогда, в силу (5.4) мы имеем, что $h_i \in L^{p_i'}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, и функция φ непрерывна в 0, как и в случае 1.

Случай 3. $p_i \leq \infty$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$.

Сначала заметим, что по крайней мере одно из p_i конечно. Без ограничения общности можем считать, что $p_1 < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем функции h_1', h_1'' такие, что

$$h_1 = h_1' + h_1'', \quad h_1' \in L^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \|h_1''\|_{L^{p_1}} < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Тогда,

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi'(\mathbf{u}) + \varphi''(\mathbf{u}),$$

где функции φ' и φ'' определены так, как функция φ в (5.3) с h_1' и h_1'', вместо h_1 соответсвенно. Из (5.6) следует, что функция φ' непрерывна в 0 (см. Случай 2), а с учетом неравенства Гельдера, $|\varphi''(\mathbf{u})| \leq C\cdot\varepsilon$. Следовательно, при достаточно малом $|\mathbf{u}|$ будем иметь

$$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(0)| \leq |\varphi'(\mathbf{u}) - \varphi'(0)| + |\varphi''(\mathbf{u}) - \varphi''(0)| \leq (C+1)\varepsilon.$$

Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Мы начнем с утверждения (B1). Сначала заметим, что из условия $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{R})$ следует, что для некоторой константы $A > 0$,

$$\hat{h}_i \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad |\hat{h}_i(t)| \leq A, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{5.7}$$

В силу леммы 4.2 имеем:

$$T\cdot S(T) = \int_0^T \dots \int_0^T \hat{h}_1(u_1 - u_2)\hat{h}_2(u_2 - u_3)\dots\hat{h}_m(u_m - u_1)du_1\dots du_m.$$

Сделав замену переменных

$$u_1 - u_2 = t_1, \quad u_2 - u_3 = t_2, \dots, u_{m-1} - u_m = t_{m-1},$$

и учитывая, что $t_1 + \dots + t_{m-1} = u_1 - u_m$, получим (ниже мы пользуемся обозначением $\mathbf{t}_{m-1} = (t_1, \dots, t_{m-1})$ и $d\mathbf{t}_{m-1} = dt_1 \cdots dt_{m-1}$):

$$T\cdot S(T) = \int_0^T \int_{u_m - t_1 - \dots - t_{m-1} - T}^{u_m - t_1 - \dots - t_{m-1}} \int_{u_m - t_1 - \dots - t_{m-2} - T}^{u_m - t_1 - \dots - t_{m-2}} \dots \tag{5.8}$$

$$\cdots \int_{u_m - t_1 - T}^{u_m - t_1} \hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) \hat{h}_m(-t_1 - \ldots - t_{m-1}) dt_{m-1} du_m$$

$$= \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) \hat{h}_m(-t_1 - \ldots - t_{m-1}) \left[T - l(\mathbf{t}_{m-1})\right] d\mathbf{t}_{m-1},$$

где

$$|l(\mathbf{t}_{m-1})| = |l(t_1, \ldots, t_{m-1})| \le 2\left(|t_1| + \ldots + |t_{m-1}|\right). \tag{5.9}$$

С другой стороны, в силу (3.3) и равенства Парсеваля, мы имеем:

$$\begin{aligned} M : &= M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} = (2\pi)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) \hat{h}_m(-t_1 - \ldots - t_{m-1}) d\mathbf{t}_{m-1}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Из (3.3), (5.8) и (5.10) следует, что

$$\begin{aligned} &S(T) - M := S_{W,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} \\ &= -\frac{1}{T} \int_{[-T,T]^{m-1}} \hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) \hat{h}_m(-t_1 - \ldots - t_{m-1}) l(\mathbf{t}_{m-1}) d\mathbf{t}_{m-1} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{m-1} \setminus [-T,T]^{m-1}} \hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) \hat{h}_m(-t_1 - \ldots - t_{m-1}) d\mathbf{t}_{m-1} \end{aligned}$$

$$=: \Delta_T^1 + \Delta_T^2. \tag{5.11}$$

Из (5.7), (5.9) и (5.11) получаем

$$|T \cdot \Delta_T^1| \le 2A \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left|\hat{h}_1(t_1) \cdots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) t_i\right| d\mathbf{t}_{m-1} =: A_1 < \infty, \tag{5.12}$$

так как $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Далее, заметим, что

$$\mathbb{R}^{m-1} \setminus [-T, T]^{m-1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left\{(t_1, \ldots, t_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} : |t_i| > T\right\} =: \bigcup_{i=1}^{m} E_i.$$

Значит, в силу (5.7) и (5.11),

$$|T \cdot \Delta_T^2| \le 2A \sum_{i=1}^{m-1} \int_{E_i} \left|\hat{h}_1(t_1) \ldots \hat{h}_{m-1}(t_{m-1}) t_i\right| d\mathbf{t}_{m-1} =: A_2 < \infty. \tag{5.13}$$

Из (5.11) – (5.13) вытекает (B1).

Доказательство (B2). В силу леммы 4.2, 3), леммы 4.3, b), и (3.3) имеем

$$\Delta(T) = (2\pi)^{m-1} \left| \int_{\mathbb{R}^{m-1}} [\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})] \Phi_T(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right|, \quad \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}. \tag{5.14}$$

Из (3.7) и (4.3) следует, что для $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$

$$|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| \le (m-1) C \left(|u_1|^\gamma + \cdots + |u_{m-1}|^\gamma\right). \tag{5.15}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,\gamma)$. Применив лемму 4.1 с $\delta = \frac{1+\varepsilon-\gamma}{m}$, и учитывая (5.14) и (5.15), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Delta(T) &\leq C_m \int_E |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + C_m \int_{E^C} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\
&\leq \frac{C_m}{T^{1-m\delta}} \sum_{i=1}^{m-1} \int_E \frac{|u_i|^\gamma}{|u_1 \cdots u_{m-1}(u_1 + \cdots + u_{m-1})|^{1-\delta}} du_1 \cdots du_{m-1} \qquad (5.16)\\
&+ 2\|\varphi\|_\infty \frac{C_m}{T^{1-m\delta}} \int_{E^C} \frac{1}{|u_1 \cdots u_{m-1}(u_1 + \cdots + u_{m-1})|^{1-\delta}} du_1 \cdots du_{m-1},
\end{aligned}$$

где $E = \{(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}: |u_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, m-1\}$ и $E^C = \mathbf{R}^{m-1} \setminus E$. Так как

$$\frac{m-1}{m} < 1 - \delta < \frac{m-1+\gamma}{m},$$

мы можем применить леммы 4.5 и 4.6 с $\alpha = \gamma$, $n = m-1$ и $\beta = 1-\delta$ и заключить, что все интегралы в (5.16) конечны. Так как $1 - m\delta = \gamma - \varepsilon$, из (5.16) следует утверждение (B2).

Доказательство (B3). Согласно (B2) достаточно доказать, что функция

$$\varphi(\mathbf{u}) := \int_{\mathbf{R}} h_1(\lambda)h_2(\lambda-u_1)\cdots h_m(\lambda-u_{m-1})d\lambda, \quad \mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}, \qquad (5.17)$$

принадлежит $L^\infty(\mathbf{R}^{m-1})$, и при некоторой постоянной $C > 0$

$$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(0)| \leq C|\mathbf{u}|^\gamma, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{m-1}, \qquad (5.18)$$

при условии, что

$$h_i \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p_i, \gamma), \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \leq 1. \qquad (5.19)$$

В силу неравенства Гельдера и (5.19) получаем

$$|\varphi(\mathbf{u})| \leq \prod_{i=1}^m \|h_i\|_{L^{p_i}} < \infty, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

Следовательно, $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R}^{m-1})$.

Для доказательства (5.18) фиксируем $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$ и положим

$$\overline{h}_i(\lambda) = h_i(\lambda - u_{i-1}) - h_i(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad i = 2, \ldots, m. \qquad (5.20)$$

Так как $h_i \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}; p_i, \gamma)$, мы имеем

$$\|\overline{h}_i\|_{L^{p_i}} \leq C_i |\mathbf{u}|^\gamma, \quad i = 2, \ldots, m. \qquad (5.21)$$

В силу (5.17) и (5.20),

$$\varphi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{R}} h_1(\lambda) \prod_{i=2}^m \left(\overline{h}_i(\lambda) + h_i(\lambda)\right) d\lambda = \varphi(0) + W.$$

Каждый из $(2^{m-1}-1)$ интегралов, составляющих W содержит по крайней мере одну функцию $\overline{h}_i$, и с учетом (5.21), может быть оценена следующим образом:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda)\overline{h}_2(\lambda)h_3(\lambda)\cdots h_m(\lambda)d\lambda\right| \le \|h_1\|_{L^{p_1}}\|\overline{h}_2\|_{L^{p_2}}\|h_3(u)\|_{L^{p_3}}\cdots\|h_m\|_{L^{p_m}} \le C|u|^{\gamma},$$

что доказывает (B3).

Доказательство (B4). Положим

$$\frac{1}{p_i} := \sigma_i + \frac{1}{m}\left[1-(\sigma_1+\cdots\sigma_m)\right], \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Тогда,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}=1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p_i}-\sigma_i=\frac{1}{m}\left[1-(\sigma_1+\cdots\sigma_m)\right]=\gamma>0, \qquad i=1,2,\ldots,m,$$

и

$$0<\sigma_i<\frac{1}{p_i}<1<\delta_i, \qquad i=1,2,\ldots,m.$$

Значит, с учетом леммы 4.7, $h_i\in \mathrm{Lip}(p_i,\gamma)$, $i=1,2,\ldots,m$. Применив (B3), получим (3.10), где γ определена в (3.11).

Доказательство теоремы 3.3. Заметим, что в силу леммы 7 из [14]

$$S_{2,W}(T) := \frac{1}{T}\mathrm{tr}[W_T(h_1)W_T(h_2)] = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_T(s-t)h_1(s)h_2(t)\,dt\,ds, \tag{5.22}$$

где $F_T(u)$ – ядро Фейера:

$$F_T(u)=\frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin Tu/2}{u/2}\right)^2, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Нам потребуются следующие свойства $F_T(u)$ (см., напр., [5]):

$$\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\,du=1, \tag{5.23}$$

$$\int_{u\ge 1} F_T(u)du \le C\,T^{-1}, \tag{5.24}$$

$$\int_0^1 F_T(u)u^{\alpha}du \le \begin{cases} CT^{-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha<1 \\ CT^{-1}\ln T, & \text{если} \quad \alpha=1 \\ CT^{-1}, & \text{если} \quad \alpha>1. \end{cases} \tag{5.25}$$

Так как функция $F_T(u)$ четная, с учетом (5.22) имеем:

$$S_{2,W}(T)=\pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\left[h_1(u+t)h_2(t)+h_1(t)h_2(u+t)\right]du\,dt. \tag{5.26}$$

Следовательно, учитывая (5.23), (5.26) и равенство

$$\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(t)dt=\int_{\mathbb{R}} h_1(u+t)h_2(u+t)dt,$$

получим

$$\Delta_{2,W}(T): \;=\; \left|\frac{1}{T}\mathrm{tr}[W_T(h_1)W_T(h_2)] - 2\pi\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\pi\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\int_{\mathbb{R}}(h_1(t)-h_1(u+t))(h_2(u+t)-h_2(t))dtdu\right|. \tag{5.27}$$

Применив неравенство Гельдера, из (5.27) находим

$$\Delta_{2,W}(T) \le \pi\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\|h_1(u+\cdot)-h_1(\cdot)\|_{L^{p_1}}\|h_2(u+\cdot)-h_2(\cdot)\|_{L^{p_2}}du \tag{5.28}$$

и, согласно (5.28),

$$\Delta_{2,W}(T) \le C_1\int_0^1 F_T(u)|u|^{\gamma_1+\gamma_2}du + C_2\|h_1\|_{L^{p_1}}\|h_2\|_{L^{p_2}}\int_{u>1} F_T(u)du. \tag{5.29}$$

Из (5.24), (5.25) и (5.29) получим утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3.4. В силу леммы 4.7, в предположениях теоремы имеем, что $h_i \in \mathrm{Lip}(p_i, 1/p_i - \sigma_i)$, $i = 1,2$. Поэтому, применив теорему 3.3 с $\gamma_i = 1/p_i - \sigma_i$, получим (3.13).

Доказательство теоремы 3.5. Заметим, что если $\psi \in B_2^{1/2}(\mathbb{R})$, то при $T \to \infty$,

$$\int_{|t|>T}|\widehat{\psi}(t)|^2dt = O(1/T) \quad \text{и} \quad \int_{-T}^{T}|t||\widehat{\psi}(t)|^2dt = O(1). \tag{5.30}$$

Далее, в силу (5.22) и равенства Парсеваля,

$$\Delta_{2,W}(T) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|t|\widehat{h}_1(t)\widehat{h}_2(t)dt + \int_{|t|>T}\widehat{h}_1(t)\widehat{h}_2(t)dt. \tag{5.31}$$

Следовательно, применив неравенство Шварца для к интегралам в правой части (5.31), и используя (5.30), для функций h_1 и h_2, получим (3.14).

6. Примеры

В этом параграфе мы пользуемся следующими обозначениями: $m = 2\nu$,

$$h_1(\lambda) = h_3(\lambda) = \cdots = h_{2\nu-1}(\lambda) := f_1(\lambda), \qquad h_2(\lambda) = h_4(\lambda) = \cdots = h_{2\nu}(\lambda) := f_2(\lambda),$$

и

$$S_{\nu,A}(T) = \frac{1}{T}\mathrm{tr}[A_T(f_1)A_T(f_2)]^\nu,$$

$$\Delta_{\nu,A}(T) := \left|\frac{1}{T}\mathrm{tr}[A_T(f_1)A_T(f_2)]^\nu - (2\pi)^{2\nu-1}\int_{\Lambda}[f_1(\lambda)f_2(\lambda)]^\nu\,d\lambda\right|,$$

где либо $A_T(f_i) = B_T(f_i)$ и $\Lambda = \mathbb{T}$, либо $A_T(f_i) = W_T(f_i)$ и $\Lambda = \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

Пример 6.1. Пусть $f_i(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha_i}$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$, $i = 1,2$, с $0 < \alpha_i < 1$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < 1/\nu$. Легко видеть, что условия теоремы 2.2 (B5) выполнены и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_{\nu,B}(T) = O\left(T^{-1/(2\nu)+\alpha/2+\varepsilon}\right) \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{6.1}$$

Пример 6.2. Пусть $f_i(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi}\left|1-e^{i\lambda}\right|^{-2d_i}$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$, $i=1,2$, с $0<\sigma_i^2<\infty$ и $0<d_i<1/2$. Тогда при $d=d_1+d_2<1/2$ для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\Delta_{\nu,B}(T) = O\left(T^{-1/(2\nu)+d+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Действительно, предположив, что $\lambda\in(0,\pi]$ (случай $\lambda\in[-\pi,0)$ рассматривается аналогично), и учитывая равенство $|1-e^{i\lambda}| = 2\sin(\lambda/2)$, получим, что для $i=1,2$

$$f_i(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi}\cdot 2^{-2d_i}\left[\sin\frac{\lambda}{2}\right]^{-2d_i},$$

$$f_i'(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi}\cdot\left[-2d_i 2^{-2d_i-1}\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d_i-1}\cos\frac{\lambda}{2}\right].$$

Ясно, что условия теоремы 2.2 (B5) выполняются с $\alpha_i = 2d_i$ и $M_{1i}=M_{2i}=\sigma_i^2$, $i=1,2$, и мы получим (6.1).

Пример 6.3. Пусть $f_1(\lambda) = |\lambda|^{-2\alpha}(1+\lambda^2)^{-\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, с $\beta>0$, $0<\alpha<1/(2p)$ при $p\geq 1$ и $\alpha+\beta>1/2$, и пусть $f_2(\lambda)=g(\lambda)$ действительная, четная, интегрируемая функция из класса $\mathrm{Lip}(q,1/p-2\alpha)$ с $1/p+1/q\leq 1/\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда для $\varepsilon>0$

$$\Delta_{\nu,W}(T) = O\left(T^{-1/p+2\alpha+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Действительно, заметим, что

$$f_1'(\lambda) = -\frac{2\alpha+2(\alpha+\beta)\lambda^2}{\lambda^{2\alpha+1}(1+\lambda)^{\beta+1}}. \tag{6.2}$$

Следовательно, функции f_1 и f_1' удовлетворяют условиям (4.11) с $\sigma=2\alpha$ и $\delta=2\alpha+2\beta$. Тогда, по лемме 4.7, $f_1(\lambda)\in\mathrm{Lip}(p,1/p-2\alpha)$, и остается применить теорему 3.2 (B3).

Пример 6.4. Пусть $f_i(\lambda)=|\lambda|^{-2\alpha_i}(1+\lambda^2)^{-\beta_i}$ с $0<\alpha_i<1/2$ и $\alpha_i+\beta_i>1/2$, $i=1,2$. Тогда, при $\alpha=\alpha_1+\alpha_2<1/(2\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}$, для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\Delta_{\nu,W}(T) = O\left(T^{-\frac{1}{2\nu}+\alpha+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Действительно, в силу (6.2) функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям теоремы 3.2 (B4) с $\sigma_i=2\alpha_i$ и $\delta_i=2\alpha_i+2\beta_i$, $i=1,2$.

Abstract. The paper is devoted to the problem of approximation of the traces of products of truncated Toeplitz operators and matrices generated by integrable real symmetric functions defined on the real line (resp. on the unit circle), and estimation of the corresponding errors. These approximations and the corresponding error bounds are of importance in the statistical analysis of continuous- and discrete-time stationary processes (asymptotic distributions and large deviations of Toeplitz type quadratic functionals and forms, parametric and nonparametric estimation, etc.) We review and summarize the known results concerning the trace approximation problem and prove some new results.

Список литературы

[1] Avram, F., "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Theory Related Fields, 79, 37–45 (1988).

[2] Bentkus, R., "On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process", Lit. Mat. Sb. 12, 55–71 (1972).

[3] Böttcher, A., Silbermann, B., Analysis of Toeplitz Operators (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin (2005).

[4] Bryc, W. and Dembo, A., "Large deviations for quadratic functionals of Gaussian processes", J. Theoret. Probab. 10, 307–332 (1997)

[5] Butzer, P.L., Nessel, R.J., Fourier Analysis and Approximation I. Academic Press, New York (1971).

[6] Dahlhaus, R., "Efficient parameter estimation for self-similar processes". Ann. Statist. 17, 1749–1766 (1989).

[7] Fox, R., Taqqu, M.S., "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Theory R elated Fields 74, 213–240 (1987).

[8] Ginovyan, M.S., "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals on spectral density with zeros", Theory Probab. Appl. 33, 315–322 (1988).

[9] Ginovian, M.S., "On estimate of the value of the linear functional in a spectral density of stationary Gaussian process", Theory Probab. Appl. 33, 777–781 (1988).

[10] Ginovian, M.S., "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Theory Related Fields 100, 395–406 (1994).

[11] Гиновян, М. С., "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Известия Национальной Академии Наук Армении, серия Математика, 30, 1–17 (1995).

[12] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "On the central limit theorem for Toeplitz quadratic forms of stationary sequences", Theory Probab. Appl. 49, 612–628 (2005).

[13] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "Limit theorems for Toeplitz quadratic functionals of continuous-time stationary process", Probab. Theory Related Fields 138, 551–579 (2007).

[14] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "Trace approximations of products of truncated Toeplitz operators", Theory Probab. Appl. 56 (1), 57–71 (2012).

[15] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "On the trace approximations of products of Toeplitz matrices", Statist. Probab. Lett. 83 (3), 753-760 (2013).

[16] Giraitis, L., Koul, H., Surgailis, D., Large Sample Inference for Long Memory Processes, Imperial College Press, London (2012).

[17] Giraitis, L., Surgailis, D., "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Theory Related Fields, 86, 87–104 (1990).

[18] Gohberg, I.C., Krein, M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. American Mathematical Society (1969).

[19] Grenander, U., Szegő, G., Toeplitz Forms and Their Applications. University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1958).

[20] Ibragimov, I.A., "On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process", Theory Probab. Appl. 8, 366–401 (1963).

[21] Kac, M., "Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory", Duke Math. J. 21, 501–509 (1954).

[22] Lieberman, O., Phillips, A., "Error bounds and asymptotic expansions for Toeplitz product functionals of unbounded spectra", J. Time Ser. Anal. 25, 733–753 (2004).

[23] Rosenblatt M., "Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms", J. Math. and Mech. 11, 941–950 (1962).

[24] Taniguchi, M., "On the second order asymptotic efficiency of estimators of Gaussian ARMA processes", Ann. Statist. 11, 157–169 (1983).

[25] Taniguchi, M., Kakizawa, Y., Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series. Academic Press, New York (2000).

Поступила 22 апреля 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 23-38.

GLOBAL MORREY ESTIMATES FOR A CLASS OF ORNSTEIN-UHLENBECK OPERATORS

XIAOJING FENG AND PENGCHENG NIU

Shanxi University, Taiyuan, Shanxi, PR China.[1]
Northwestern Polytechnical University, Xi'an, PR China.

E-mail: *fxj467@mail.nwpu.edu.cn*

Abstract. In this paper, we consider a class of hypoelliptic Ornstein-Uhlenbeck operators in $\mathbb{R}^N$ given by $\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\partial^2_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j}$, where (a_{ij}), (b_{ij}) are $N \times N$ constant matrices, and (a_{ij}) is symmetric and positive semidefinite. We deduce global Morrey estimates for $\mathcal{A}$ from similar estimates of its evolution operator L on a strip domain $S = \mathbb{R}^N \times [-1, 1]$.

MSC2010 numbers: 35R03, 49N60
Keywords: Ornstein-Uhlenbeck operators; Morrey estimates; Local quasidistance.

1. Introduction and main results

Consider a class of Ornstein-Uhlenbeck operators in $\mathbb{R}^N$ defined by

$$\mathcal{A} = div(A\nabla) + \langle x, B\nabla\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial^2_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j}, \tag{1.1}$$

where $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_N})$, $div(\cdot)$ and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denote the gradient, the divergence and the inner product in $\mathbb{R}^N$, respectively; $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ are $N \times N$ matrices with constant real entries, and A has the following form:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $A_0 = (a_{ij})_{i,j=1}^{p_0}$ is a $p_0 \times p_0$ constant matrix with $p_0 \le N$, which is symmetric and positive definite, and satisfies the following uniform ellipticity condition:

$$\mu|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \frac{1}{\mu}|\xi|^2 \tag{1.2}$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^{p_0}$ and for some positive constant μ.

We also assume that the following condition holds:

(H_0) $Ker(A)$ does not contain nontrivial subspaces that are invariant for B.

[1]This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11271299 and 11001221), the Mathematical Tianyuan Foundation of China (No. 11126027) and the Shanxi University Yinjin Rencai Jianshe Xiangmu(No. 010951801004).

In [1] L. Hörmander pointed out that the condition (H_0) implies the hypoellipticity of operators (1.1).

Denote

$$C(t) = \int_0^t E(s) A E^T(s) ds, \tag{1.3}$$

where $E(s) = exp(-sB^T)$. In [2] the authors showed that (H_0) is equivalent to the following condition:

$$C(t) > 0, \text{ for every } t > 0. \tag{1.4}$$

It is interesting that the condition (1.4) can also be expressed in the geometric-differential terms. Indeed, setting $X_0 = \langle x, B\nabla \rangle$, we observe that (1.4) is equivalent to the Hörmander condition:

$$rank \mathcal{L}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_{p_0}}, X_0)(x) = N, \ x \in \mathbf{R}^N, \tag{1.5}$$

where $\mathcal{L}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_{p_0}}, X_0)$ denotes the Lie algebra generated by ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, ..., $\partial_{x_{p_0}}$, X_0. The proof of the equivalence (H_0) and (1.5) is implicitly contained in the Introduction of [1], while Kuptsov [3] gave an explicit proof of the equivalence (1.4) and (1.5). In [2] the authors proved that (1.5) implies that for some basis in $\mathbf{R}^N$ the matrix B has the following form:

$$B = \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & B_r \\ * & * & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

where B_j is a $p_{j-1} \times p_j$ block of rank p_j, $j = 1, 2, \ldots, r$. Moreover $p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_r \geq 1$ and $p_0 + p_1 + \ldots + p_r = N$.

Recently, many authors have studied the Ornstein-Uhlenbech operators (see, e.g., [4]–[8], and references therein). In the nondegenerate case ($p_0 = N$), G. Prato and A. Lunardi [4] have obtained global second order Hölder estimates. L^p-estimates have been established by G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi and R. Schnaubelt [5] by using a semigroup approach. In the degenerate case, by applying an interpolation method, B. Farkass and A. Lunardi [6] obtained L^2-estimates with respect to an invariant Gaussian measure. The spectrum of operator $\mathcal{A}$ was derived by G. Metafune and D. Pallara in [7]. M. Bramanti, G. Cupini, E. Lanconelli and E. Priola [8] investigated global L^p-estimates of the operator $\mathcal{A}$.

A number of authors studied the Morrey estimates for some operators (see, e.g., [9]-[11]). For instance, local Morrey estimates for second-order nondivergence elliptic operators in Euclidean spaces were established by G. Fazio and M. Ragusa in [9].

G. Lieberman [10] derived directly local Morrey estimates for some second-order nondivergence elliptic and parabolic operators. For Hörmander type parabolic nondivergence operators, S. Tang and P. Niu [11] established local Sobolev-Morrey estimates.

In this paper, for operators $\mathcal{A}$ of the form (1.1) with matrices B given by (1.6), we prove global Morrey estimates by applying the approach in [8].

In order to state our main results, we need to introduce some notation and definitions.

Definition 1.1. *We say that a measurable function $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ belongs to the Morrey space $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ with $p \in (1,+\infty)$ and $\lambda \in [0,Q]$, if the following norm*

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} = \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^\lambda}\int_{\mathbf{B}_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

is finite, where Q and $\mathbf{B}_r$ are given in (3.1) and (3.2), respectively.

The main results in this paper is the following theorem.

Theorem 1.1. *For every $p \in (1,\infty)$ and $\lambda \in [0,Q)$ there exist a constant $c > 0$, depending on p, p_0, a matrix B and a number μ satisfying (1.2) such that*

$$\|\partial^2_{x_ix_j}u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} \le c\{\|\mathcal{A}u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)}\},\ i,j = 1,2,\dots,p_0;$$

$$\|X_0u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} \le c\{\|\mathcal{A}u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)}\},$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

We deduce global Sobolev-Morrey estimates of $\mathcal{A}$ from similar estimates of its evolution operator L on a strip domain $S = \mathbb{R}^N \times [-1,1]$. Since the distance induced by the homogeneous model, corresponding to the principal part of the operator L, is the local quasidistance, the singular integrals on spaces of homogeneous type theory are no longer valid. Thus, we split the fundamental solution of L into singular and regular parts. Then we apply the standard methods and a covering lemma to both singular and regular parts, and obtain the desired global Morrey estimates.

The paper is organized as follows: In Section 2 we discuss the evolution operator L corresponding to $\mathcal{A}$, and state Morrey estimates for operator L (Theorem 2.1). In Section 3 we discuss some known results, which we use in the proof of our main result (Theorem 1.1), given in Section 4.

2. A relation with the evolution operator

To prove estimates for the underlying operator $\mathcal{A}$, we first obtain the corresponding estimates of its evolution operator L defined by

$$Lu = \mathcal{A}u - \partial_t u = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\partial^2_{x_ix_j}u + Y_0u, \tag{2.1}$$

where $Y_0u = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u$, and using the obtained estimates, we prove our main result.

In [2] it was proved that the operator L is left-invariant with respect to the Lie group $\mathcal{K}$ whose underlying manifold is $\mathbf{R}^{N+1}$, endowed with the composition law

$$(x,t)\circ(\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau),$$

where $E(\tau) = exp(-\tau B^T)$.

Remark 2.1. We want to stress that the group $\mathcal{K} = (\mathbf{R}^{N+1}, \circ)$ is not in general of polynomial growth (see [8]). Therefore, we cannot expect a global Morrey estimate to be true on the whole $\mathbf{R}^{N+1}$, and hence we discuss the estimates of L in the strip

$$S = \mathbf{R}^N \times [-1, 1].$$

To proceed we first introduce the Morrey function space for the strip domain S (cf. Definition 1.1).

Definition 2.1. *We say that a measurable function $f \in L^p_{loc}(S)$ belongs to the Morrey space $L^{p,\lambda}(S)$ with $p \in (1, +\infty)$ and $\lambda \in [0, Q+2]$, if the following norm*

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(S)} = \left(\sup_{z\in S, r>0} \frac{1}{r^\lambda}\int_{Q_r(z)\cap S} |f(w)|^p dw\right)^{1/p}$$

is finite, where Q and Q_r are given in (3.1) and (3.3), respectively.

Observe that the operator L is a Kolmogorov-Fokker-Planck type ultraparabolic operator, and in the special case where $p_0 = N$ and $B = 0$ it becomes a heat operator. Also, the degenerate operator L appears in many applied problems. For instance, the Kolmogorov equation

$$\partial^2_{x_1}u + x_1\partial_{x_2}u = \partial_t u, \ (x,t) \in \mathbf{R}^3$$

appears in the financial problems (see, e.g., [12, 13]), in the kinetic theory (see, e.g., [14, 15]), as well as in the visual perception problems (see [16]). Owing to its importance in physics and in mathematical finance, the operator L has been extensively studied in the literature (see e.g., [2], [18]- [23]). For instance, in the papers [2] and [17]-[19] was proved an invariant Harnach inequality for the non-negative solutions of the equation $Lu = 0$. The papers [20, 21] deal with estimates for the weak solutions of the equation $Lu = 0$. In [22] and [23] were obtained local L^p-estimates.

The first step of the proof of our main result (Theorem 1.1) is to establish the following theorem, which contains estimates for evolution operator L.

Theorem 2.1. *For every $p \in (1, \infty)$ and $\lambda \in [0, Q+2)$ there exist a constant $c > 0$, depending on p, p_0, a matrix B and a number μ satisfying (1.2) such that*

$$\|\partial^2_{x_i x_j} u\|_{L^{p,\lambda}(S)} \leq c\|Lu\|_{L^{p,\lambda}(S)}, \quad i,j = 1,2,\ldots,p_0; \tag{2.2}$$

$$\|Y_0 u\|_{L^{p,\lambda}(S)} \leq c\|Lu\|_{L^{p,\lambda}(S)}, \tag{2.3}$$

for every $u \in C_0^\infty(S)$.

3. Preliminaris

Note first that the operator L does not have a suitable family of dilations. In order to define the homogeneous norm, we consider the principal part of the operator L:

$$L_0 = div(A\nabla) + \langle x, B_0 \nabla \rangle - \partial_t,$$

where B_0 stands for the matrix for which all the $*-$blocks in B are zero matrices. For L_0 there are groups of dilations on $\mathbb{R}^N$ and $\mathbb{R}^{N+1}$, which we denote by $(\delta(\lambda))_{\lambda>0}$ and $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, respectively. More precisely, $(\delta(\lambda))_{\lambda>0}$ and $D(\lambda)$ are defined by

$$\delta(\lambda) = diag(\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_2}, \ldots, \lambda^{\alpha_N}),$$

$$D(\lambda) = diag(\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_2}, \ldots, \lambda^{\alpha_N}, \lambda^2),$$

where

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{p_0} = 1, \ \alpha_{p_0+1} = \ldots = \alpha_{p_0+p_1} = 3, \ldots,$$
$$\alpha_{p_0+\ldots+p_{r-1}+1} = \ldots = \alpha_N = 2r+1.$$

Therefore, we can write

$$\delta(\lambda) = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{p_r});$$

$$D(\lambda) = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2),$$

where I_{p_j} denotes the $p_j \times p_j$ identity matrix, and $\delta(\lambda)$ and $D(\lambda)$ denote the matrices of dilations on $\mathbb{R}^N$ and $\mathbb{R}^{N+1}$, respectively.
Note that $\det(D(\lambda)) = \lambda^{Q+2}$, where

$$Q = p_0 + 3p_1 + \ldots + (2r+1)p_r \tag{3.1}$$

is called a homogeneous dimension of $\mathbb{R}^{N+1}$. Similarly, $\det(\delta(\lambda)) = \lambda^Q$, and Q is called a homogeneous dimension of $\mathbb{R}^N$. Notice also that the operator L_0 is homogeneous of degree two with respect to the dilations $D(\lambda)$, that is,

$$L_0(u(D(\lambda)z)) = \lambda^2 (L_0 u)(D(\lambda)z), \ z \in \mathbb{R}^{N+1}, \ \lambda > 0$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. There is a natural homogeneous norm in $\mathbb{R}^{N+1}$, induced by dilation $D(\lambda)$ given by

$$\|(x,t)\| = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^{1/\alpha_j} + |t|^{1/2}.$$

With this norm we define the function $d(z,w) = \|w^{-1} \circ z\|$, and observe that

$$\|D(\lambda)z\| = \lambda\|z\|, \ \lambda > 0, \ z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Note that the operation "$\circ$"is a translation, induced by the operator L, and $\|\cdot\|$ is the homogeneous norm, induced by the dilations associated with the principal part operator L_0. This implies that d is a hybrid quasidistance. The ball with respect to d is denoted by

$$B(z,r) = B_r(z) = \{w \in \mathbb{R}^{N+1} : d(z,w) < r\}.$$

Similarly, there is a homogeneous norm in $\mathbb{R}^N$, induced by dilation $\delta(\lambda)$, defined by

$$\|(x,t)\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^{1/\alpha_j}.$$

With this norm we define the function

$$d_1(x,y) = \|y^{-1} \circ x\|_1,$$

and the ball with respect to d_1 we denote by

$$\mathbf{B}(x,r) = \mathbf{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : d_1(x,y) < r\}. \tag{3.2}$$

For $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ the cylinder in $\mathbb{R}^{N+1}$ we denote by

$$Q_r(z) = \mathbf{B}_r(x) \times (t - r^2, t + r^2). \tag{3.3}$$

For more about the general theory of homogeneous spaces we refer to [24] - [26].

Remark 3.1. If we choose the strip S as our space, then d is no longer a quasidistance. In fact, as it follows from Lemma 3.1, d is a local quasisymmetric quasidistance. This is why we cannot use the theory of homogeneous spaces, and instead we deal with singular integrals to derive the Morrey estimates by applying the properties of local quasidistances.

Lemma 3.1 ([8]). *For every compact set $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ there exists a constant $C_{\mathcal{M}}$ such that*

$$\|z^{-1}\| \le C_{\mathcal{M}}\|z\|, \quad z \in \mathcal{M} \times [-1,1];$$
$$\|z \circ \zeta\| \le C_{\mathcal{M}}(\|z\| + \|\zeta\|), \quad \zeta \in S, \quad z \in \mathcal{M} \times [-1,1].$$

Moreover, since the set $\{z : \|z\| \leq 1\}$ is compact, the above inequalities imply that there exists a constant C such that

$$d(z,\zeta) \leq Cd(\zeta,z), \quad z,\zeta \in S, \quad d(\zeta,z) \leq 1;$$

$$d(z,\zeta) \leq C(d(z,w) + d(w,\zeta)), \quad z,\zeta,w \in S, \quad d(z,w) \leq 1, \quad d(\zeta,w) \leq 1.$$

Recall that for functions f and g defined on $\mathbb{R}^{N+1}$, their convolution $f*g$ is defined by

$$f*g(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} f(z\circ\zeta^{-1})g(\zeta)d\zeta = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} g(\zeta^{-1}\circ z)f(\zeta)e^{tTrB}d\zeta,$$

where $\zeta = (x,t)$.

Lemma 3.2 ([2]). *The operator L possesses a fundamental solution:*

$$\Gamma(z,\zeta) = \gamma(\zeta^{-1}\circ z), \; z,\zeta \in \mathbb{R}^{N+1},$$

with

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{(4\pi)^{-N/2}}{\sqrt{\det C(t)}} exp(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x,x\rangle - tTrB), & t > 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

where $z = (x,t)$ and $C(t)$ is as in (1.2). (Recall that $C(t)$ satisfies (1.3) and $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\})$).

By the definition of the fundamental solution we have

$$u(z) = -(Lu*\gamma)(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \gamma(\zeta^{-1}\circ z)Lu(\zeta)d\zeta. \tag{3.5}$$

Moreover, the following representation formula holds (see [8], [18]):

$$\partial^2_{x_ix_j}u(z) = -PV(Lu*\partial^2_{x_ix_j}\gamma)(z) + c_{ij}Lu(z) \tag{3.6}$$

for every $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ and for suitable chosen constants c_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,p_0$. The principal value in (3.6) is understood as

$$PV(Lu*\partial^2_{x_ix_j}\gamma)(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|>\varepsilon} (\partial^2_{x_ix_j}\gamma)(\zeta^{-1}\circ z)Lu(\zeta)d\zeta.$$

Remark 3.2. For $u \in C_0^\infty(S)$ setting

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z), & z \in S, \\ 0, & z \in \mathbb{R}^{N+1}\setminus S, \end{cases}$$

from (3.5) we infer that

$$u(z) = -(Lu*\gamma)(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z,\zeta)L\tilde{u}(\zeta)d\zeta = -\int_S \Gamma(z,\zeta)Lu(\zeta)d\zeta. \tag{3.7}$$

Lemma 3.3 ([18]). *The fundamental solution* Γ *has the following properties: for every* $z, \zeta \in S$ *there exists* $C > 0$ *such that*

$$|\Gamma(z,\zeta)| \le \frac{C}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q}};$$

$$|\partial_{x_i}\Gamma(z,\zeta)| \le \frac{C}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+1}}, \quad i = 1,2,\ldots,p_0;$$

$$|\partial_{x_i x_j}\Gamma(z,\zeta)| \le \frac{C}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2}}, \quad i,j = 1,2,\ldots,p_0.$$

4. Proofs of Theorems 2.1 and 1.1

In this section we use the methods of the singular integral theory and the method in [8], adapted to our situation according to the properties of the local quasidistance and the fundamental solution Γ, to prove our main results.

We first introduce a suitable cutoff function $\eta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$ satisfying $0 \le \eta \le 1$, $\eta(z) = 1$, $\|z\| \le \varrho_0/2$; $\eta(z) = 0$, $\|z\| \ge \varrho_0$, where $\varrho_0 \le 1$ is a positive constant to be determined later.

Observe that (3.6) can be written as follows:

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_i x_j} u(z) &= -PV(Lu * (\eta \partial_{x_i x_j}\gamma)) - (Lu * (1-\eta)\partial_{x_i x_j}\gamma)) + c_{ij} Lu \\ &= -PV(Lu * k_0) - (Lu * k_\infty) + c_{ij} Lu, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where $k_0 = \eta \partial_{x_i x_j}\gamma$, $k_\infty = (1-\eta)\partial_{x_i x_j}\gamma$, $i,j = 1,\ldots,p_0$.

We define the following linear operators:

$$Tg = PV(g * k_0), \ Kg = (g * k_\infty),$$

and first derive the global Morrey estimate of K on S.

Lemma 4.1 ([8]). *For every* $p \in (1,\infty)$ *there exists a constant* $c = c(p, p_0, B, \mu) > 0$ *such that*

$$\|Kg\|_{L^p(S)} \le c\|g\|_{L^p(S)},$$

for every $g \in L^p(S)$.

Lemma 4.2. *There exists a constant* $c > 0$ *such that*

$$\frac{1}{c}\rho^{Q+2} \le |B(z,\rho) \cap S| \le c\rho^{Q+2}, \quad z \in S, \quad \rho > 0.$$

Remark 4.1. The proof of Lemma 4.2 can be deduced from that of Proposition 9 in [8]. However, for completeness of presentation, we give here the proof of this lemma.

Proof of Lemma 4.2. We have

$$|B(z,\rho) \cap S| = \int_{S \cap \{\|\zeta^{-1} \circ z\| < \rho\}} d\zeta.$$

To compute the integral on the right-hand side, we set $z = (x,t)$, $w = (\xi,\tau)$, $\zeta^{-1} \circ z = w$, and observe that

$$|B(z,\rho) \cap S| = \int_{S\cap\{\|(\xi,\tau)\|<\rho\}} e^{\tau \mathrm{Tr} B} d\xi d\tau.$$

Since $z,\ w \in S$ we have $|\tau| \leq 2$ and

$$\begin{aligned} |B(z,\rho) \cap S| &= \int_{S\cap\{\|(\xi,\tau)\|<\rho\}} e^{\tau \mathrm{Tr} B} d\xi d\tau \\ &\leq e^{2\mathrm{Tr} B} \int_{S\cap\{\|w\|<\rho\}} dw \leq c\rho^{Q+2}. \end{aligned}$$

Similarly, the inequality $e^{-2\mathrm{Tr}B} \leq e^{\tau \mathrm{Tr} B}$ implies $\frac{1}{c}\rho^{Q+2} \leq |B(z,\rho) \cap S|$, and the result follows. □

Lemma 4.3 ([8]). *For every $r_0 > 0$ and $K > 1$ there exist $\varrho \in (0, r_0)$, a positive integer M and a sequence of points $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ such that $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(z_i, \varrho)$ and*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B(z_i, K\varrho)}(z) \leq M \quad \text{for all } z \in S.$$

Lemma 4.4. *For every $g \in L^{p,\lambda}(S)$, $p > 1$ and $\lambda \geq 0$ there exists a constant c such that*

$$\|g\|_{L^p(S)} \leq c\|g\|_{L^{p,\lambda}(S)}.$$

Proof. For every ball $B(z_i, \rho)$, $\rho < r_0$ it follows that

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(B(z_i,\rho))} &\leq \rho^{\lambda/p} \left(\rho^{-\lambda} \int_{B(z_i,\rho)} |g(z)|^p dz \right)^{1/p} \\ &= \rho^{\lambda/p} \left(\rho^{-\lambda} \int_{B(z_i,\rho)\cap Q_\rho(z_i)} |g(z)|^p dz \right)^{1/p} \\ &\leq c\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_i,\rho))}. \end{aligned}$$

By Lemma 4.3 we can write

$$\|g\|_{L^p(S)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|g\|_{L^p(B(z_i,\rho))} \leq \sum_{i=1}^{\infty} c\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_i,\rho))} \leq Mc\|g\|_{L^{p,\lambda}(S)},$$

and the result follows. □

Lemma 4.5 ([8]). *For every $\varrho_0 > 0$ there exits a constant $m = m(\varrho_0) > 0$ such that*

$$\int_S |k_\infty(z)| dz \leq m.$$

Lemma 4.6. *Let $p \in (1,\infty)$ and $\lambda \in [0, Q+2]$. Then there exists a positive constant c depending only on p and λ, such that*

$$\|Kg\|_{L^{p,\lambda}(S)} \leq c\|g\|_{L^{p,\lambda}(S)}, \tag{4.2}$$

for every $g \in L^{p,\lambda}(S)$.

Proof. Let q be the conjugate exponent to p. Applying Hölder inequality and Lemma 4.5 we get

$$\begin{aligned}
|Kg(z)| &= \left|\int_S k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)g(\zeta)d\zeta\right| \\
&\leq \int_S |k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)|^{1/q}|k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)|^{1/p}|g(\zeta)|d\zeta \\
&\leq \left(\int_S |k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)|d\zeta\right)^{1/q}\left(\int_S |k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)||g(\zeta)|^p d\zeta\right)^{1/p} \\
&\leq m^{1/q}\left(\int_S |k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)||g(\zeta)|^p d\zeta\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Next, for every $Q = Q(y,r)$, $r<1$, we can write

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^\lambda}\|Kg\|^p_{L^p(Q\cap S)} &\leq m^{p/q}\frac{1}{r^\lambda}\int_{Q\cap S}\int_S |k_\infty(\zeta^{-1}\circ z)||g(\zeta)|^p d\zeta dz \\
&\leq m^{p/q}\frac{1}{r^\lambda}\int_{Q\cap S}\int_S \frac{c}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}(1-\eta(\zeta^{-1}\circ z))|g(\zeta)|^p d\zeta dz \\
&\leq m^{p/q}\frac{c}{r^\lambda}(\varrho_0/2)^{-(Q+2)}\int_{Q\cap S}\int_s |g(\zeta)|^p d\zeta dz \\
&\leq m^{p/q}\frac{c}{r^\lambda}(\varrho_0/2)^{-(Q+2)}|Q\cap S|\int_S |g(\zeta)|^p d\zeta \\
&\leq m^{p/q}\frac{c}{r^\lambda}(\varrho_0/2)^{-(Q+2)}r^{Q+2}\int_S |g(\zeta)|^p d\zeta
\end{aligned}$$

By the inequality $\lambda \leq Q+2$ we have

$$\frac{1}{r^{\lambda/p}}\|Kg\|_{L^p(Q\cap S)} \leq c\|g\|_{L^p(S)}. \tag{4.3}$$

Finally, for every $B = B(y,r)$, $r \geq 1$, by Lemma 4.1 we get

$$\frac{1}{r^{\lambda/p}}\|Kg\|_{L^p(Q\cap S)} \leq \|Kg\|_{L^p(Q\cap S)} \leq c\|Kg\|_{L^p(S)} \leq c\|g\|_{L^p(S)}. \tag{4.4}$$

Thus, the desired inequality (4.2) follows from (4.3), (4.4) and Lemma 4.4. This completes the proof. □

Now we proceed to discuss the global Morrey estimate for T on S.

Lemma 4.7 ([8]). *There exists a number $R_0 > 0$ such that for every $z_0 \in S$ and $R < R_0$, if a, b are two cutoff functions belonging to $C^\gamma(\mathbb{R}^{N+1})$ for some $\gamma > 0$ with* *suppa, suppb* $\subset B(z_0, R)$, *and if* $k(z,\zeta) = a(z)k_0(\zeta^{-1}\circ z)b(\zeta)$ *and*

$$Hg(z) = PV\int_{B(z_0,R)} k(z,\zeta)f(\zeta)d\zeta,$$

then the following estimate holds:

$$\|Hg\|_{L^p(B(z_0,R))} \le c\|g\|_{L^p(B(z_0,R))}$$

for all $p \in (1,\infty)$, $g \in L^p(B(z_0,R))$ *and for some* $c > 0$ *depending on the cutoff functions* a, b *only through their* C^γ *norms and on* p, *but independent of* z_0 *and* R.

Lemma 4.8. *There exists a number* $R_0 > 0$ *such that for every* $z_0 \in S$ *and* $R < R_0$, *if* $a, b, k(z,\zeta)$ *and* H *are as in Lemma 4.7, then there exists a constant* $c > 0$, *such that the following estimate holds with* $p \in (1,\infty)$ *and* $\lambda \in [0, Q+2))$:

$$\|Hg\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))} \le \|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))} \tag{4.5}$$

for all $g \in L^{p,\lambda}(B(z_0,R))$, *where the constant* c *depends on the cutoff functions* a, b *only through their* C^γ *norms, but is independent of* z_0 *and* R.

Proof. For every $Q = Q(y,\delta r)$ with $Q \cap B(z_0,R) \ne \emptyset$, where $\delta < 1$ is a positive constant to be determined later, we set $\tilde{Q} = Q(y,r)$ and $\tilde{Q}^c = \tilde{Q}^c \cap B(z_0,R)$. For a measurable set $E \subset S$, denoting the relative characteristic function by χ_E, the function $g \in L^p(B(z_0,R))$ can be represented in the form $g = g_1 + g_2$, where

$$g_1 = g\chi_{\tilde{Q}\cap B(z_0,R)}, \quad g_2 = g\chi_{\tilde{Q}^c\cap B(z_0,R)}.$$

Hence, applying Lemma 4.7, we obtain

$$\begin{aligned}\|Hg_1\|_{L^p(Q\cap B(z_0,R))} &\le \|Hg_1\|_{L^p(B(z_0,R))} \le c\|g_1\|_{L^p(B(z_0,R))} \\ &= c\|g_1\|_{L^p(\tilde{Q}\cap B(z_0,R))} \le cr^{\frac{\lambda}{p}}\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

For every $z \in Q \cap B(z_0,R)$ if $\zeta \in \tilde{Q}^c$, then by Lemma 3.1 there exist a positive constant c_{R_0} such that

$$r \le \|\zeta^{-1}\circ y\| \le c_{R_0}(\|\zeta^{-1}\circ z\| + \|z^{-1}\circ y\|) \le c_{R_0}(\|\zeta^{-1}\circ z\| + \delta r).$$

With $\delta = 1/(2c_{R_0})$ we have

$$\|\zeta^{-1}\circ z\| \ge \left(\frac{1}{c_{R_0}} - \frac{1}{2c_{R_0}}\right)r = \delta r.$$

By Lemma 4.2 we can write

$$
\begin{aligned}
|Hg_2(z)| &\le \int_{\{\zeta\in B(z_0,R):\|\zeta^{-1}\circ z\|\ge\delta r\}} |\partial_{x_ix_j}\Gamma(z,\zeta)g(\zeta)|d\zeta \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{\zeta\in B(z_0,R):2^{k-1}\delta r\le\|\zeta^{-1}\circ z\|\le 2^k\delta r\}} \frac{c}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}|g(\zeta)|d\zeta \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{(2^k\delta r)^{Q+2}}\int_{B_{2^k\delta r}(z)\cap B(z_0,R)} |g(\zeta)|d\zeta \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{(2^k\delta r)^{Q+2}}\int_{Q_{2^k\delta r}(z)\cap B(z_0,R)} |g(\zeta)|d\zeta \\
&\le c\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}},
\end{aligned}
$$

implying

$$
\begin{aligned}
\int_{Q\cap B(z_0,R)}|Hg_2(z)|^p dz &\le c^p\|g\|^p_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}r^{\lambda-(Q+2)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}\right)^p|Q| \\
&\le c^p\|g\|^p_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}r^{\lambda-(Q+2)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}\right)^p r^{(Q+2)}.
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\|Hg_2\|_{L^p(Q\cap B(z_0,R))}\le cr^{\frac{\lambda}{p}}\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}\sum_{k=1}^{\infty}(2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}, \tag{4.7}
$$

where the constant $c>0$ depends on p and R_0. Finally, by (4.6) and (4.7) we get

$$
\frac{1}{(\delta r)^{\lambda/p}}\|Hg\|_{L^p(Q\cap B(z_0,R))}\le c\delta^{-\lambda/p}\|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_0,R))}\sum_{k=0}^{\infty}(2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}.
$$

Since $\lambda<(Q+2)$, the above series is convergent, and the desired inequality (4.5) follows. □

Lemma 4.9. *Let $p\in(1,\infty)$ and $\lambda\in[0,Q+2)$. There exits a positive constant c, such that*

$$
\|Tg\|_{L^{p,\lambda}(S)}\le c\|g\|_{L^{p,\lambda}(S)}, \tag{4.8}
$$

for every $g\in L^{p,\lambda}(S)$.

Proof. Let $\alpha\in C_0^{\gamma}(S)$ be a cutoff function satisfying

$$
\alpha(z)=1,\ \|z\|<\varrho_0;\ \alpha(z)=0,\ \|z\|\ge 2\varrho_0.
$$

Denote $a_i(z) = \alpha(z^{-1} \circ z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, and observe that when $\|\zeta^{-1} \circ z\| > \varrho_0$, then $k_0(\zeta^{-1} \circ z) = 0$. Hence by $z \in B(z_i, \varrho_0)$ and $k_0(\zeta^{-1} \circ z) \neq 0$, it follows that there exists a constant $C > 0$ such that $\zeta \in B(z_i, C\varrho_0)$.

Define the second cutoff function $\beta \in C_0^\gamma(S)$:

$$\beta(z) = 1, \ \|z\| < C\varrho_0; \ \alpha(z) = 0, \ \|z\| \geq 2C\varrho_0.$$

Let $b_i(z) = \beta(z^{-1} \circ z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Setting $r_0 = R_0/2D$, and applying Lemma 4.3 we concluse that there exist a constant $\rho_0 < r_0$ to satisfy

$$\|Tg\|_{L^{p,\lambda}(S)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|Tg\|_{L^{p,\lambda}((B(z_i,\rho_0)))}. \tag{4.9}$$

Now choosing $\varrho_0 = \rho_0$, we find that $\zeta \in B(z_i, C\varrho_0)$ for every $z \in B(z_i, \rho_0)$, and hence

$$\begin{aligned} Tg(z) &= PV \int_{\mathbb{R}^{N+1}} k_0(\zeta^{-1} \circ z) g(\zeta) d\zeta \\ &= PV \int_{\mathbb{R}^{N+1}} a_i(z) k_0(\zeta^{-1} \circ z) b_i(\zeta) g(\zeta) d\zeta \\ &= PV \int_{B(z_i, 2C\rho_0)} a_i(z) k_0(\zeta^{-1} \circ z) b_i(\zeta) g(\zeta) d\zeta = T_i g(z). \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Tg\|_{L^{p,\lambda}((B(z_i,\rho_0)))} = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_i g\|_{L^{p,\lambda}((B(z_i,\rho_0)))}. \tag{4.10}$$

By $2C\rho_0 \leq R_0$ and Lemma 4.8 we get

$$\|T_i g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_i, 2C\rho_0))} \leq c \|g\|_{L^{p,\lambda}(B(z_i, 2C\rho_0))}, \tag{4.11}$$

where c depends on the cutoff functions a_i, b_i only through their C^γ norms, and does not depend on z_i and $2C\rho_0$. Also, note that

$$\|a_i\|_{C^\gamma} = \|\alpha\|_{C^\gamma}, \ i = 1, 2, \ldots, \ \|b_i\|_{C^\gamma} = \|\beta\|_{C^\gamma}, \ i = 1, 2, \ldots,$$

Therefore, the constant c in (4.11) is independent of i.

Finally, by (4.9) - (4.11) and Lemma 4.3, we obtain

$$\|Tg\|_{L^{p,\lambda}(S)} \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \|g\|_{L^{p,\lambda}((B(z_i, 2C\rho_0)))} \leq cM \|g\|_{L^{p,\lambda}(S)},$$

implying (4.8). This completes the proof. □

Now we are in position to prove our main results, Theorems 2.1 and 1.1. .

Proof of Theorem 2.1. It follows from (4.1) that

$$\partial^2_{x_i x_j} u(z) = -TLu(z) - KLu(z) + c_{ij} Lu(z).$$

Next, by Lemmas 4.6 and 4.9 we obtain

$$\begin{aligned}\|\partial^2_{x_ix_j}u\|_{L^{p,\lambda}(S)} &\le \|TLu\|_{L^{p,\lambda}(S)} + \|KLu\|_{L^{p,\lambda}(S)} + \|{}_{ij}Lu\|_{L^{p,\lambda}(S)} \\ &\le c\|Lu\|_{L^{p,\lambda}(S)},\ i,j = 1,2,\dots,p_0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Now the estimate of $\|Y_0u\|_{L^{p,\lambda}(S)}$ follows from (4.12) and

$$Y_0u = Lu - \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\partial^2_{x_ix_j}u.$$

Therefore, (2.2) and (2.3) are fulfilled. Theorem 2.1 is proved.

Proof of Theorem 1.1. Let $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ be a cutoff function such that $\mathrm{supp}\psi \subset [-1,1]$ and $\int_{-1}^1 |\psi(t)|^p dt > 0$. Letting $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ be a C_0^∞ solution to the equation $\mathcal{A}u = f$ in $\mathbb{R}^N$, for some $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ and $U(x,t) = u(x)\psi(t)$, we have

$$LU(x,t) = f(x)\psi(t) - u(x)\psi'(t) = F(x,t).$$

According to Theorem 2.1

$$\|\partial^2_{x_ix_j}U\|_{L^{p,\lambda}(S)} \le c\|F\|_{L^{p,\lambda}(S)},\ i,j = 1,2,\dots,p_0. \tag{4.13}$$

Next, for $\lambda \in [2, Q+2)$ and $i,j = 1,2,\dots,p_0$ the left-hand side of (4.13) can be estimated as follows

$$\begin{aligned}\|\partial^2_{x_ix_j}U\|^p_{L^{p,\lambda}(S)} &= \sup_{z\in S, r>0} \frac{1}{r^\lambda}\int_{Q_r(z)\cap S} |\partial^2_{x_ix_j}u(x)|^p|\psi(\tau)|^p dx d\tau \\ &= \sup_{t\in[-1,1], r>0} \frac{1}{r^2}\int_{t-r^2}^{t+r^2} |\psi(\tau)|^p d\tau \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |\partial^2_{x_ix_j}u(x)|^p dx \\ &= \sup_{t\in[-1,1], r>0} \int_{-1}^{1} |\psi(r^2\eta + t)|^p d\eta \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |\partial^2_{x_ix_j}u(x)|^p dx \\ &\ge \int_{-1}^{1} |\psi(\eta)|^p d\eta \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |\partial^2_{x_ix_j}u(x)|^p dx \ge c_1\|\partial^2_{x_ix_j}u\|^p_{L^{p,\lambda-2}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Now we estimate the norm $\|f\psi\|_{L^{p,\lambda}(S)}$ for $\lambda \in [2, Q+2)$. We have

$$\begin{aligned}\|f\psi\|^p_{L^{p,\lambda}(S)} &= \sup_{z\in S, r>0} \frac{1}{r^\lambda}\int_{Q_r(z)\cap S} |f(y)\psi(\tau)|^p dy d\tau \\ &= \sup_{t\in[-1,1], r>0} \frac{1}{r^2}\int_{t-r^2}^{t+r^2} |\psi(\tau)|^p d\tau \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \\ &= \sup_{t\in[-1,1], r>0} \int_{-1}^{1} |\psi(r^2\eta + t)|^p d\eta \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^N, r>0} \frac{1}{r^{\lambda-2}}\int_{B_r(x)\cap\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \le \|f\|^p_{L^{p,\lambda-2}(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{A}u\|^p_{L^{p,\lambda-2}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Similarly, we get $\|u\psi'\|_{L^{p,\lambda}(S)} \le c\|u\|_{L^{p,\lambda-2}(\mathbb{R}^N)}$. In view of (4.13) the above inequalities imply that for $\lambda \in [0, Q)$

$$\|\partial^2_{x_i x_j} u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} \le c\{\|\mathcal{A}u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)}\}, \ i,j = 1,2,\dots,p_0,$$

where the constant c depends on ψ and ψ'.

Finally, the estimate of $\|X_0 u\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)}$ follows from the equality $X_0 u = \mathcal{A}u - \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\partial^2_{x_i x_j} u$. This completes the proof. Theorem 1.1 is proved.

REFERENCES

[1] L. Hörmander, "Hypoelliptic second order differential equations", Acta Math., 119, 147 171 (1967).

[2] E. Lanconelli, S. Polidoro, "On a class of hypoelliptic evolution operators", Partial differential equations, II (Turin, 1993), Rend. Sem. Mat. Univ. Po-litec. Torino, 52, 29 – 63 (1994).

[3] L. P. Kupcov, "The fundamental solutions for a class of second-order elliptic- parabolic equations" [in Russian], Differenc. Urav., 8, 1649 – 1660 (1972); English Transl.: Differential Equations 8, 1269 – 1278 (1972).

[4] G. Prato, A. Lunardi, "On the Ornstein-Uhlenbeck operator in spaces of continuous functions", J. Funct. Anal., 131, 94 – 114 (1995).

[5] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, "The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an L^p-space with invariant measure", Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 1, 471 – 485 (2002).

[6] B. Farkas, A. Lunardi, "Maximal regularity for Kolmogorov operators in L^2 spaces with respect to invariant measures", J. Math. Pures Appl., 86, 310 – 321 (2006).

[7] G. Metafune, D. Pallara, "Spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures", J. Funct. Anal., 196, 40 – 60 (2002).

[8] M. Bramanti, G. Cupini, E. Lanconelli, E. Priola, "Global L^p estimates for degenerate Ornstein-Uhlenbeck operators", Mathematische Zeitschrift, 266, 789 – 816 (2010).

[9] G. Di Fazio, M.A. Ragusa, "Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients", J. Funct.Anal., 112, 241 – 256 (1993).

[10] G.M. Lieberman, "A mostly elementary proof of Morrey space estimates for elliptic and parabolic equations with VMO coefficients", J. Funct.Anal., 201, 457 – 479 (2003).

[11] S. Tang, P. Niu, "Morrey estimates for parabolic nondivergence operators of Hörmander type", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 123, 91 – 129 (2010).

[12] E. Barucci, S. Polidoro, and V. Vespri, "Some results on partial differential equations and Asian options", Math. Models Methods Appl. Sci., 11, 475 – 497 (2001).

[13] M. Di Francesco, A. Pascucci, "On the complete model with stochastic volatility by Hobson and Rogers", Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 460, 3327 – 3338 (2004).

[14] L. Desvillettes, C. Villani, "On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation", Comm. Pure Appl. Math., 54, 1 – 42 (2001).

[15] P. Lions, "On Boltzmann and Landau equations", Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 346, 191 – 204 (1994).

[16] D. Mumford, Elastica and Computer Vision in Algebraic Geometry and its Applications, Springer, New York (1994).

[17] S. Polidoro, "On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type", Le Matematiche, 49, 53 – 105 (1994).

[18] M. Di Francesco, S. Polidoro, "Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov-type operators in non-divergence form", Adv. Differential Equations, 11, 1261 – 1320 (2006).

[19] S. Polidoro, "A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations", Arch. Rational Mech. Anal., 137, 321 – 340 (1997).
[20] C. Cinti, A. Pascucci, S. Polidoro, "Pointwise estimates for a class of non-homogeneous Kolmogorov equations", Math. Ann., 340, 237 – 264 (2008).
[21] S. Polidoro, M. Ragusa, "Höder regularity for solutions of Ultraparabolic equations in divergence form", Potential Anal., 14, 341 – 350 (2001).
[22] M. Bramanti, M. C. Cerutti, M. Manfredini, "L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients", J. Math. Anal. Appl., 200, 332 – 354 (1996).
[23] M. Bramanti, M. C. Cerutti, M. Manfredini, "L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coeficients", Sixth International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, 18–23 August (1995).
[24] L. P. Rothschild, E. M. Stein, "Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups", Acta Math., 137, 247 – 320 (1976).
[25] G.B. Folland, "Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups", Arkiv for Math., 13, 161 – 207 (1975).
[26] E.M. Stein, Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton (1993).

Поступила 21 декабря 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 39-46.

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ $A^2_\omega \subset H^2$

А. М. ДЖРБАШЯН

Институт математики НАН Армении
Университет Антиохии, Меделлин, Колумбия
E-mail: *armen_jerbashian@yahoo.com*

Аннотация. Статья посвящена исследованию гильбертовых пространств A^2_ω, содержащихся в пространстве Харди H^2 функций голоморфных в $|z| < 1$. В частности, доказана теорема об описании граничных свойств функций из A^2_ω некоторыми тонкими ω-емкостями и, с помощью явного вида изометрии между A^2_ω и H^2, в A^2_ω найдены биортогональные системы функций, содержащие малые степени ядра Коши.

MSC2010 numbers: 32A35, 31A05.

Ключевые слова: весовые пространства, голоморфные функции, биортогональные системы.

1. Введение

Широкие, общие пространства A^p_ω голоморфных в $|z| < 1$ функций введены и исследованы в работе [2], по аналогии с пространствами $H^p(\alpha) \equiv A^p_\alpha$ $(1 \le p < +\infty$ $(-1 < \alpha < +\infty)$, исследованными в работе М.М. Джрбашяна [1]. Пространства A^p_ω - множества голоморфных функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} |f(z)|^p |d\mu_\omega(z)|\right\}^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty,$$

где $d\mu_\omega(\rho e^{i\vartheta}) = -d\omega(\rho^2)d\vartheta$ и $\omega(t) \in \Omega_A$, т.е. функция $\omega(t)$ определена на $[0,1]$ и такова, что:

(i) $\quad 0 < \bigvee\limits_\delta^1 \omega < +\infty$ при любом $\delta \in [0,1)$,

(ii) $\quad \Delta_n \equiv \Delta_n(\omega) = -\int_0^1 t^n d\omega(t) \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$

(iii) $\quad \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Delta_n|} \ge 1.$

В [2] в частности доказано, что A^p_ω банаховы пространства, превращающиеся в гильбертовы пространства, когда $p = 2$ и функция $\omega(x)$ монотонна. Что при любом $p \ge 1$ пространства A^p_ω покрывают множество всех функций голоморфных в $|z| < 1$. Кроме того, в [2] установлена явная формула для изометрии между A^2_ω и пространством Харди H^2, что позволяет перевести любой результат аддитивного характера из H^2 в A^2_ω. В простом случае $\omega(t) = (1-t)^\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ пространства A^p_α переходят в хорошо известные пространства

$$H^p(\alpha) \equiv A^p_\alpha := \iint_{|z|<1} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p d\sigma(z) < +\infty, \tag{1.1}$$

исследованые в [1]. Здесь $d\sigma(z)$ - двумерная мера Лебега. В общем же случае греческая буква ω в [2] означает то же, что в исследованиях М.М. Джрбашяна [3, 7] классов мероморфных функций, т.е. подчеркивает то, что A^p_ω исчерпывают все голоморфные в $|z| < 1$ функции.

Настоящая статья посвящена исследованию, в случае $p = 2$, несколько иных весовых пространств A^p_ω $(1 \le p < +\infty)$ типа Дирихле функций голоморфных в $|z| < 1$, которые содержатся в пространстве Харди H^p в $|z| < 1$. Эти "узкие" пространства введены в [2] предположением о том, что не сама голоморфная функция $f(z)$, а ее производная $f'(z)$ принадлежит A^p_ω. Такое определение, очевидно, обеспечивает банаховость новых пространств, а также их переход в гильбертовы пространства в случае $p = 2$, где скалярное произведение то же, что в A^2_ω, однако с заменой функции на ее производную.

В настоящей статье даны некоторые усиления и продолжения результатов работы [2] в случае $p = 2$. Именно, установлена другая явная формула изометрии с пространством Харди H^2, более тонкий результат о граничном поведении функций из $A^2_\omega \subset H^2$, а также некоторые результаты о биортогональных системах функций в $A^2_\omega \subset H^2$.

2. Пространства $A^2_\omega \subset H^2$ и их граничные свойства

Определение пространств $A^2_\omega \subset H^2$, данное в [2], целесообразно немного модифицировать и привести к удобной для рассматриваемых задач форме.

Определение 2.1. *Класс $\widetilde{\Omega}_A$ - множество непрерывно дифференцируемых в $[0,1]$ функций $\omega_0(t) \in \Omega_A$ таких, что*

(a) $\omega_0(t) \searrow$ *в* $[0,1]$, $\omega_0(1) = 0$ *и* $\omega_0(0) = a < +\infty$,

(b) $|\omega_0'(t)| \nearrow$ *в* $[0,1)$ *и* $\big||\omega_0'(t)| - 1\big| \le Kt$, $0 < t < \delta$, *при некоторых постоянных* $K > 0$ *и* $0 < \delta < 1$.

Всюду ниже будем считать, что $\omega_0(t) \in \widetilde{\Omega}_A$ и $\omega_1(x)$ - квадрат Вольтерра

$$\omega_1(x) = -\int_x^1 \omega_0\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) d\omega_0(\sigma), \quad 0 < x < 1.$$

Тогда, как это показано в доказательстве теоремы 1.5 из [2], $\omega_1(x) \in \Omega_A$, $\omega_1(0) = 1$, $\omega_1(1-0) = 0$ и

$$\omega(x) \equiv |\omega_1'(x)| = \int_x^1 \omega_0'\left(\frac{x}{t}\right)\omega_0'(t)\frac{dt}{t}, \quad 0 < x < 1.$$

Отметим, что в случае $\omega_0(x) = \alpha^{-1}(1-x)^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$

$$\omega_1(x) \asymp (1-x)^{2\alpha} \quad \text{и} \quad \omega(x) \asymp (1-x)^{2\alpha-1} \quad \text{при} \quad x \to 1-0,$$

где $f(x) \asymp g(x)$ для двух неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$ означает, что $c_1 f(x) \le g(x) \le c_2 f(x)$ с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$.

Определение 2.2. *Если $\omega_0(x) \in \widetilde{\Omega}_A$, то A^2_ω - множество голоморфных в $|z| < 1$ функций $f(z)$ таких, что $f'(z) \in A^2_{\omega_1}$.*

Теорема 2.1. *Если $\omega_0(x) \in \widetilde{\Omega}_A$, то множество A^2_ω является гильбертовым пространством, где норма порождается скалярным произведением*

$$(f,g)_\omega = \frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} f'(z)\overline{g'(z)}d\mu_{\omega_1}(z),$$

и $A^2_\omega \subset H^2$.

Доказательство. Ввиду результатов [2] следует доказать лишь вложение $A^2_\omega \subset H^2$. С этой целью заметим, что если $f(z) \in A^2_\omega$, то в силу теоремы 1.5 из [2]

$$\varphi_0(z) = L_{\omega_0}f'(z) \equiv -\int_0^1 f'(tz)d\omega_0(t) \in H^2 \quad \text{и} \quad \|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_\omega}.$$

Кроме того, если $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ - разложение Тейлора функции $f(z)$ в $|z| < 1$, то очевидно

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^\infty a_k \left(k\int_0^1 t^{k-1}|\omega_0'(t)|dt\right) z^{k-1}, \quad |z| < 1.$$

Далее, в силу теоремы 8 из [4] существует убывающая функция $\beta(x)$ в $[0,1]$ такая, что $\beta(0) = 1$, $\beta(1) = 0$ и

$$k\int_0^1 t^{k-1}|\omega_0'(t)|dt = \left(-\int_0^1 t^k d\beta(t)\right)^{-1} \equiv [\Delta_k(\beta)]^{-1}, \quad k \ge 1.$$

Таким образом

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{\Delta_k(\beta)} z^{k-1} \in H^2,$$

и $L_\beta[z\varphi_0(z)] \in H^2$, поскольку при любом $r \in (0,1)$

$$\int_0^{2\pi} \left|L_\beta\left[re^{i\vartheta}\varphi_0(re^{i\vartheta})\right]\right|^2 d\vartheta \le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 tr\left|\varphi_0(tre^{i\vartheta})\right||d\beta(t)|\right)^2 d\vartheta$$

$$\le \int_0^1 |d\beta(t)| \int_0^{2\pi} \left|\varphi_0(tre^{i\vartheta})\right|^2 d\vartheta \le \|\varphi_0\|^2_{H^2} < +\infty.$$

Остается заметить, что

$$L_\beta[z\varphi_0(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Delta_k(\beta)} \left(-\int_0^1 t^k d\beta(t)\right) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = f(z) - f(0),$$

и, тем самым, $f(z) \in H^2$.

Теорема 2.2. *При любом $\omega_0(x) \in \widetilde{\Omega}_A$ пространство A^2_ω совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{|\omega_0'|}(ze^{-i\vartheta}) e^{i\vartheta} \varphi(e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < 1, \tag{2.1}$$

где $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$ и

$$C_{|\omega_0'|}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k \int_0^1 t^{k-1} |\omega_0'(t)| dt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(|\omega_0'|)} \Bigg|_{\omega_0(x) = (1-x)^\alpha/\alpha} = \frac{1}{(1-z)^\alpha}.$$

Для любого $f(z) \in A^2_\omega$ существует единственная функция $\varphi_0(z)$ из пространства Харди H^2, обеспечивающая равенство (2.1), *и*

$$\varphi_0(z) = L_{\omega_0} f(z) = -\int_0^1 f(tz) d\omega_0(t), \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_\omega}$, и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любой функции $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, с которой верно (2.1). *Оператор L_{ω_0} изометрически отображает подпространство функций A^2_ω, обращающихся в ноль в начале координат, в H^2, и интеграл в правой части* (2.1) *является обратной изометрией $(L_{\omega_0})^{-1}$.*

Доказательство. По определению 2.2 включение $f(z) \in A^2_\omega$ означает $f'(z) \in A^2_{\omega_1}$, и поэтому по теореме 1.5 из [2]

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{\omega_0}(ze^{-i\vartheta}) \varphi_0(e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < 1,$$

где $\varphi_0(z) = L_{\omega_0} f'(z) \in H^2$ и $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_\omega}$. Следовательно,

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(e^{i\vartheta}) d\vartheta \int_0^z C_{\omega_0}(\zeta e^{-i\vartheta}) d\zeta, \quad |z| < 1, \tag{2.2}$$

где

$$\int_0^z C_{\omega_0}(\zeta e^{-i\vartheta}) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ik\vartheta}}{\Delta_k(\omega_0)} \int_0^z \zeta^k d\zeta = e^{i\vartheta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\vartheta})^{k+1}}{(k+1)\Delta_k(\omega_0)}$$

и

$$(k+1)\Delta_k(\omega_0) = (k+1)\left(-\int_0^1 t^k d\omega_0(t)\right) = (k+1)\int_0^1 t^k |\omega_0'(t)| dt = \Delta_{k+1}(|\omega_0'|).$$

Тем самым

$$\int_0^z C_{\omega_0}(\zeta e^{-i\vartheta}) d\zeta = e^{i\vartheta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\vartheta})^{k+1}}{\Delta_{k+1}(|\omega_0'|)} = e^{i\vartheta} \left[C_{|\omega_0'|}(ze^{-i\vartheta}) - 1\right],$$

и формула (2.2) переходит в (2.1), поскольку из $\varphi_0(z) \in H^2$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}\varphi_0(e^{i\vartheta})d\vartheta = 0.$$

Обратно, если формула (2.1) верна с какой-либо $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0,2\pi]$, то очевидно

$$\int_0^z f'(\zeta)d\zeta = \int_0^z \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_{\omega_0}(\zeta e^{-i\vartheta})\varphi(e^{i\vartheta})d\vartheta\right)d\zeta, \quad |z|<1.$$

Отсюда следует, что

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_{\omega_0}(ze^{-i\vartheta})\varphi(e^{i\vartheta})d\vartheta, \quad |z|<1,$$

и $f'(z) \in A^2_\omega$ по теореме 1.5 из [2]. Оставшаяся часть доказательства очевидна.

Отметим, что рассматриваемые пространства A^2_ω схожи с теми классами $N\{\omega\}$ М.М.Джрбашяна [3, 7], которые содержатся в неванлинновском классе N мероморфных функций ограниченного вида в $|z|<1$. А именно, $A^2_\omega \subset H^2$ и A^2_ω обладают тем же граничным свойством, что классы $N\{\omega\} \subset N$.

Прежде чем привести теорему о граничных свойствах функций из A^2_ω, напомним определение ω-емкости, введенное М.М. Джрбашяном и В.С. Захаряном [5, 6, 3, 7] в качестве обобщения хорошо известной α-емкости Фростмана (случай $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1<\alpha<0$). Полагая, что $\omega(x)>0$ непрерывна на $[0,1)$, $|\omega(x)-1| \le Kx$ $(0 \le x < \delta)$ при некотором $K>0$, $\delta \in (0,1)$, $\omega(0)=1$, $\int_0^1 \omega(x)dx < +\infty$ и

$$C_\omega(z) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k\int_0^1 t^{k-1}\omega(x)dx}\Bigg|_{\omega(x)=(1-x)^\alpha} = \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}},$$

они ввели

Определение 2.3. *Борелевское множество $E \subset [0,2\pi]$ имеет положительную ω-емкость, если существует борелевская мера $\mu \prec E$ такая, что*

$$\sup_{|z|\le 1}\int_0^{2\pi} |C_\omega(ze^{-i\vartheta})|d\mu(\vartheta) < +\infty.$$

В противном случае, когда этот интеграл бесконечен для любой Борелевской меры $\mu \prec E$, множество E имеет нулевую ω-емкость.

Теорема 2.3. *Если $\omega_0(x) \in \widetilde{\Omega}_A$, то любая функция $f(z) \in A^2_\omega$ обладает конечными угловыми граничными значениями $f(e^{i\vartheta})$ для всех $\vartheta \in [0,2\pi]$ с возможным исключением множества $E \subset [0,2\pi]$ нулевой $|\omega_0'|$-емкости.*

Замечание 2.1. *Утверждение теоремы 2.3 является следствием теоремы 8 из [3] (см. также [7], стр. 112) и представления (2.1) теоремы 2.2. Теорема 2.3 уточняет теорему 2.1 из [2], поскольку если $f'(z) \in A^2_\omega$ с $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ (0 <*

$\alpha < 1$), то теорема 2.1 из [2] *описывает граничное поведение $f(z)$ в терминах $(\alpha - 1)$-емкости, в то время как теорема 2.3 - в терминах $(\alpha/2 - 1)$-емкости.*

3. Биортогональные системы функций в $A^2_\omega \subset H^2$

Теорема 2.2 позволяет перевести результаты аддитивного характера из пространства харди H^2 в подобные же утверждения в пространствах $A^2_\omega \subset H^2$. Приведенные ниже утверждения - аналоги результатов М.М. Джрбашяна и Г.М. Айрапетяна [8] [10] по биортогональным системам функций в H^2. В полученных утверждениях функции из A^2_ω аппроксимируются ядрами $C_{|\omega_0'|}(z)$ которые в некотором смысле, лучше ядра Коши, поскольку при $\omega_0(x) = \alpha^{-1}(1-x)^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадают с $(1-z)^{-\alpha}$.

Для простоты будем рассматривать случай простых узлов, т.е. будем рассматривать последовательности $\{a_j\}_1^\infty$ *попарно различных* чисел из $|z| < 1$, удовлетворяющих условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |a_j|) < +\infty. \tag{3.1}$$

Принято писать $\{a_j\}_1^\infty \in \Delta$, если множество $\{a_j\}_1^\infty$ равномерно отделено, т.е.

$$\inf_{k\geq 1} \prod_{j=1,\, j\neq k} \left|\frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a}_j a_k}\right| = \delta > 0.$$

Далее, введем произведение Бляшке с нулями $\{a_j\}_1^\infty$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a}_j z}\frac{|a_j|}{a_j}$$

и обозначим подпространство функций из A^2_ω, обращающихся в ноль в начале координат, через $A^2_\omega(0)$, а изометрию $H^2 \longrightarrow A^2_\omega(0)$ теоремы 2.2 через

$$T_{\omega_0} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_{|\omega_0'|}(ze^{-i\theta})e^{i\theta} f(e^{i\theta})d\theta, \quad |z| < 1, \quad (T_{\omega_0} = (L_{\omega_0})^{-1}).$$

Известное неравенство Шапиро-Шилдса [11] приобретает следующую форму.

Предложение 3.1. *Если $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta$, то для любого $F(z) \in A^2_\omega$, с некоторой постоянной $C > 0$*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |a_j|^2)|L_{\omega_0}F(a_j)|^2 \leq C\|F\|_{A^2_\omega}.$$

Для приведения ряда утверждений, которые в основном следуют [10], обозначим

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - \overline{a}_k z} \quad \text{и} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - a_k}$$

и заметим, что голоморфные в $|z| < 1$ функции $T_{\omega_0}(r_k(z)) = \mathcal{R}_k(z)$ и $T_{\omega_0}(\Omega_k(z)) = \mathcal{S}_k(z)$ допускают представления

$$\mathcal{R}_k(z) = \bar{a}_k^{-1}\left[C_{|\omega_0'|}(\bar{a}_k z) - 1\right], \quad \mathcal{S}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1,k}}{\Delta_n(|\omega_0'|)} z^n, \quad |z| < 1, \tag{3.2}$$

где $b_{n,k}$ - коэффициенты степенного разложения $B(z)(z - a_k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} z^n$.

Предложение 3.2. *Если последовательность $\{a_k\}_1^{\infty}$ не удовлетворяет условию Бляшке, т.е. ряд (3.1) расходится, то обе системы (3.2) полны в $A^2_\omega(0)$.*

Будем полагать, что $\lambda\{a_k\}$ - множество функций $F(z) \in A^2_\omega(0)$, для которых существуют $\psi(z) \in H^2$, $\psi(0) = 0$, такие, что граничные значения $\psi(z)/B(1/z)$ совпадают с граничными значениями $L_{\omega_0}F(z)$ почти всюду на $|z| = 1$.

Предложение 3.3. *Функции (3.2) принадлежат $\lambda\{a_k\}$, а системы (3.2) биортогональны в A^2_ω, т.е.*

$$(\mathcal{R}_k, \mathcal{S}_k)_\omega \equiv \iint_{|z|<1} \mathcal{R}_k'(z)\overline{\mathcal{S}_k'(z)}\, d\mu_{\omega_1}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \nu = k, \\ 0 & \text{при} \quad \nu \neq k. \end{cases}$$

Предложение 3.4. *Если $F(z) \in A^2_\omega(0)$, то $F(z) \in \lambda\{a_k\}$ равносильно*

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{L_{\omega_0}F(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1.$$

Предложение 3.5. *Любая функция $f(z) \in A^2_\omega(0)$ представима в виде*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad \|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2,$$

где $f_1(z) \in \lambda\{a_k\}$ и

$$f_2(z) = T_{\omega_0}\big(B(z)g(z)\big) \in A^2_\omega \quad \text{с} \quad g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{L_{\omega_0}f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^2.$$

Предложение 3.6. *Если $\{a_k\}_1^{\infty} \in \Delta$ и $\{w_k\}_1^{\infty}$ - последовательность, для которой*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|)|w_k|^2 < +\infty,$$

то существует единственная функция $F(z) \in \lambda\{a_k\}$ такая, что

$$L_{\omega_0}F(a_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Эта функция представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \mathcal{S}_k(z), \quad |z| < 1,$$

где ряд сходится в норме пространства A^2_ω, а $F(z)$ - решение интерполяционной задачи (3.3), обладающее минимальной нормой.

Предложение 3.7. *Обе системы* $\{(1-|a_k|^2)^{1/2}\mathcal{R}_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{(1-|a_k|^2)^{-1/2}\mathcal{S}_k(z)\}_1^\infty$ *- безусловные базисы в* $\lambda\{a_k\}$ *тогда и только тогда, когда* $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Предложение 3.8. *Если* $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то любая функция* $F(z) \in \lambda\{a_k\}$ *представима обоими рядами*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(F)\mathcal{R}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} L_{\omega_0}F(a_k)\mathcal{S}_k(z), \quad |z| < 1, \quad c_k(F) = (F', \mathcal{S}_k')_{\omega_1},$$

которые сходятся в норме пространства A^2_ω.

Abstract. The paper is devoted to investigation of some Hilbert spaces A^2_ω which are contained in Hardy's H^2 of functions holomorphic in $|z| < 1$. In particular, it is proved that the boundary properties of functions from A^2_ω are characterized by some sharp ω-capacities, and some biorthogonal systems of functions containing small degrees of the Cauchy kernel are found in A^2_ω by means of an explicit isometry between A^2_ω and H^2.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, **2**, 3-40 (1948).

[2] A. M. Jerbashian, "On the Theory of Weighted Classes of Area Integrable Regular Functions", Complex Variables, **50** (3), 155-183 (2005).

[3] M. M. Djrbashian, "Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc", In: Proceedings of the ICM, Vancouver, B.C., 1974, **2**, 197-202 (USA, 1975).

[4] М. М. Джрбашян, "Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые приложения", Известия АН СССР, Сер. матем., **32**, 1075-1111 (1968).

[5] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, "Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида", Изв. АН СССР, **34** (6), 1262-1339 (1970).

[6] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, "Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **6** (2-3), 182-194 (1971).

[7] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, *Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге* (Наука, Москва, 1993).

[8] М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и представления ядрами Коши", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **8** (5), 384-409 (1973).

[9] М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в H^2", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **9** (5), 339-373 (1974).

[10] Г. М. Айрапетян, "О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **10** (2), 133-152 (1975).

[11] H. Shapiro, A. Shields, "On Some Interpolation Problems for Analytic Functions", American Journal of Mathematics, **83**, 513-532 (1961).

Поступила 25 марта 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 47-59.

EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR SECOND-ORDER IMPULSIVE DIFFERENTIAL INCLUSIONS

NEMAT NYAMORADI

Razi University, Kermanshah, Iran[1]

E-mail: *nyamoradi@razi.ac.ir; neamat80@yahoo.com*

Abstract. In this paper we consider a class of a second-order impulsive differential inclusions. Using a variational method based on the non-smooth critical point theory, we prove the existence and multiplicity of anti-periodic solutions.

MSC2010 numbers: 35B38, 35A15, 34A60, 35R12

Keywords: Non-smooth critical point, variational methods, locally Lipschitz, impulsive, anti-periodic solution.

1. Introduction

The aim of this paper is to establish the existence and multiplicity of solutions for the following second-order impulsive differential inclusion subject to anti-periodic boundary conditions

$$(1.1)\quad \begin{cases} -(\Phi_p(u'(x)))' + M\Phi_p(u(x)) \in \partial F(x, u(x)), & \text{in } [0,T]\backslash\{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \\ -\Delta\Phi_p(u'(x_k)) = I_k(u(x_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ u(0) = -u(T), \quad u'(0) = -u'(T), \end{cases}$$

where $p > 1$, $T > 0$, $M \geq 0$, $\Phi_p(x) := |x|^{p-2}x$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = T$, $\Delta\Phi_p(u'(x_k)) = \Phi_p(u'(x_k^+)) - \Phi_p(u'(x_k^-))$, where $u'(x_k^+)$ and $u'(x_k^-)$ stand for the right and left limits of $u'(x)$ at $x = x_k$, respectively; $I_k \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $k = 1, 2, \dots, m$, $F : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a measurable function such that for all $t \in [0,T]$, $F(t, \cdot)$ is locally Lipschitz and $\partial F(t, \cdot)$ denotes the generalized subdifferential in the sense of Clarke [1].

In recent years much attention was paid to the question of existence of solutions for impulsive boundary value problems, which have a number of applications in chemotherapy, population dynamics, optimal control, ecology, industrial robotics and physics.

[1]This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11271299 and 11001221), the Mathematical Tianyuan Foundation of China (No. 11126027) and the Natural Science Foundation Research Project of Shaanxi Province (No. 2012JM1014).

For the background, theory and applications of impulsive differential equations, we refer to [2]–[12] and references therein.

In [13], Tian and Henderson studied the following equations with impulsive effects:

$$\begin{cases} -(\Phi_p(u'(x)))' + M\Phi_p(u(x)) \in \partial F(u(x)) + \mu G(x,u(x)), & \text{in } [0,T]\backslash\{x_1,x_2,\dots,x_m\}, \\ -\Delta\Phi_p(u'(x_k)) = I_k(u(x_k)), \quad k=1,2,\dots,m, \\ u(0) = -u(T), \quad u'(0) = -u'(T). \end{cases}$$

In [13] it was proved that under some conditions imposed on F, G and I_j the problem (1) has at least three positive solutions via the three critical point theorem of Ricceri (see [14]).

In this paper, motivated by the above work, we study the question of existence of solutions of the problem (1.1), and using a variational method based on the non-smooth critical point theory, we prove the existence and multiplicity of anti-periodic solutions of problem (1).

The paper is organized as follows. In Section 2 we give some preliminary results and establish a variational principle for the problem (1.1), which are needed in the proofs of the main results. Section 3 is devoted to our main results.

2. Preliminaries

In this section we present some preliminaries, basic notion and results from the theory of non-smooth analysis – the calculus for locally Lipschitz functionals, developed by Clarke [1], which will be used in the proofs of the main results of the paper.

Let $(X, ||\cdot||_X)$ be a Banach space, $(X^*, ||\cdot||_{X^*})$ be its topological dual, and let $\varphi : X \to \mathbb{R}$ be a functional. Recall that a functional φ is locally Lipschitz if for all $u \in X$ there exist a neighborhood U of u and a real number $L_U > 0$ such that for all $x, y \in U$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L_U ||x-y||_X.$$

If f is locally Lipschitz and $u \in X$, the generalized directional derivative of φ at u along the direction $v \in X$ is defined by

$$\varphi^\circ(u;v) = \limsup_{w\to u, t\downarrow 0} \frac{\varphi(w+tv)-\varphi(w)}{t}.$$

The generalized gradient of φ at u is the set

$$\partial\varphi(u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, v\rangle \le \varphi^\circ(u;v) \text{ for all } v \in X\}.$$

So $\varphi : X \to 2^{X^*}$ is a multifunction. Observe that the function $(u,v) \mapsto \varphi^0(u;v)$ is upper semicontinuous and satisfies

$$\varphi^\circ(u;v) = \max\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial\varphi(u)\} \quad \text{for all } v \in X.$$

We say that φ has compact gradient if $\partial\varphi$ maps bounded subsets of X into relatively compact subsets of X^*. Also, an element $u \in X$ is said to be a critical point of a locally Lipschitz functional φ if $0 \in \partial\varphi(u)$.

In the proofs of our main results, we will use some facts from the non-smooth critical point theory. To state these results, we first give some definitions.

Definition 2.1. *We say that an operator $A : X \to X^*$ is of type $(S)_+$ if for any sequence $\{u_n\}$ from X the conditions $u_n \rightharpoonup u$ and $\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ imply $u_n \to u$.*

Definition 2.2. *We say that a locally Lipschitz function $\varphi : X \to \mathbf{R}$ satisfies the non-smooth Palais-Smale condition (non-smooth (PS)-condition for short) if any sequence $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ such that $\{J(u_n)\}_{n\geq 1}$ is bounded and*

$$\rho(u_n) := \min\{||u^*||_{X^*} : u^* \in \partial\varphi(u_n)\} \to 0 \quad as\ n \to +\infty,$$

has a strongly convergent subsequence.

Definition 2.3. *We say that a locally Lipschitz function $J : X \to \mathbf{R}$ satisfies the non-smooth Cerami condition (non-smooth (C)-condition for short) if any sequence $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ such that $\{J(u_n)\}_{n\geq 1}$ is bounded and*

$$(1 + ||u_n||_X)\rho(u_n) \to 0 \quad as\ n \to +\infty,$$

has a strongly convergent subsequence.

For the next result we refer to [15], Proposition 1.1.

Lemma 2.1. *Let $\varphi \in C^1(X)$ be a functional. Then φ is locally Lipschitz and*

$$\varphi^\circ(u; v) = \langle\varphi'(u), v\rangle \quad for\ all\ u, v \in X,$$
$$\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\} \quad for\ all\ u \in X.$$

Consider the space $X = \{u \in W^{1,p}([0,T]) : u(0) = -u(T)\}$ endowed with the norm

$$||u||_X = \left(\int_0^T (|u'(x)|^p + M|u(x)|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in X.$$

Observe that the norm $||u||_X$ is equivalent to the usual norm: $\left(\int_0^T (|u'(x)|^p + |u(x)|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}$ (see [13], Lemma 3.1). The next lemma, which will be used in the proofs of our main results, was proved in [13] (see [13], Lemma 3.3).

Lemma 2.2. *Let $u \in X$. Then $||u||_{C^0} \leq \frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}||u||_X$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

It is known (see [13], Lemma 3.2) that the space X is reflexive and separable Banach space.

The functional $J : X \to \mathbb{R}$ corresponding to the problem (1.1) is defined by

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \sum_{i=1}^{m}\int_0^{u(x_i)} I_i(s)ds - \int_0^T F(x,u(x))dx.$$

Now, we are going to establish a variational principle for the problem (1.1). To this end, we impose the following conditions on the non-smooth potential $F(x,u)$ and the real continuous function I_j:

(H1) For all $u \in \mathbb{R}$, the function $x \to F(x,u)$ is measurable.

(H2) For all $x \in [0,T]$, the function $u \to F(x,u)$ is locally Lipschitz and $F(x,0) = 0$.

(H3) There exist $a, b \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ and $1 \le r < +\infty$ such that $|u^*| \le a(x) + b(x)|u|^{r-1}$ for all $x \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$ and $u^* \in \partial F(x,u)$.

(I1) There exist constants $a_j, b_j > 0$ and $\gamma_j \in [0, p-1)$, $j = 1,2,\dots,m$ such that $|I_j(x)| \le a_j + b_j|u|^{\gamma_j}$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $j = 1,2,\dots,m$.

Definition 2.4. *We say that $u \in X$ is a weak solution to the problem (1.1) if*

$$-\int_0^T (\Phi_p(u'(x))v'(x) + M\Phi_p(u(x))v(x) - u^*(x)v(x))dx - \sum_{i=1}^{m} I_i(u(x_i))v(x_i) = 0,$$

for all $u^* \in \partial F(x,u(x))$, $v \in X$ and for a.e. $x \in [0,T]$.

Proposition 2.1. *Assume that the potential $F(x,u)$ satisfies the conditions (H1)-(H3). Then the functional $J : X \to \mathbb{R}$ is well defined and is locally Lipschitz on X. Moreover, every critical point $u \in X$ of J is a solution to the problem (1.1).*

Proof. The proof is similar to that of Lemmas 3.5 and 4.4 from [13], and so is omitted.

Observe that, according to the Proposition 2.1, in order to find solutions of the problem (1.1), it suffices to obtain the critical points of the functional J.

3. Main results

In this section we state and prove our main results. We first establish some existence and multiplicity results for the problem (1.1), by using results from critical point theory. Our first result is as follows.

Theorem 3.1. *Assume that the conditions (H1)-(H3) and (I1) are fulfilled, and also the potential $F(x,u)$ satisfies the following conditions:*

(H4) *There exist $\mu \in (0, \frac{1}{p})$, $c_0 > 0$ and $M > 0$ such that $c_0 < F(x,u) \le -\mu F^\circ(x,u;-u)$ for all $u \in \mathbb{R}$ with $|u| \ge M$ and $x \in [0,T]$.*

(H5) $\lim_{|u|\to 0} \frac{u^*}{|u|^p} = 0$ *uniformly for all $x \in [0,T]$ and all $u^* \in \partial F(x,u)$.*

Then, the problem (1.1) has at least one nonzero solution on X.

Proof. First, we claim that J satisfies the non-smooth (PS)-condition.

By the conditions (H2), (H3) and the Lebourg's mean value theorem, for all $|u| \leq M$ and $x \in [0,T]$ we have

$$|F(x,u)| = |F(x,u) - F(x,0)| = |(u^*,u)| \leq a(x)|u| + b(x)|u|^r \leq Ma(x) + M^r b(x).$$

Next, by the property of generalized directional derivative of a locally Lipschitz function, for all $|u| \leq M$ and $x \in [0,T]$ we get

$$|F^\circ(x,u;-u)| = |\max\{(u^*,-u) : u^* \in \partial F(x,u)\}| \leq a(x)|u| + b(x)|u|^r \leq Ma(x) + M^r b(x).$$

Thus, for all $u \in \mathbb{R}$ with $|u| \leq M$ and $x \in [0,T]$ we have

$$F(x,u) + \mu F^\circ(x,u;-u) \leq a_1(x), \tag{3.1}$$

where $a_1(x) \in L^1([0,T],\mathbb{R})$.

Suppose $\{u_n\} \subset X$ satisfies

$$|J(u_n)| \leq C \quad \text{and} \quad \rho(u_n) \to 0. \tag{3.2}$$

Since $\partial J(u_n) \subset X^*$ is a weak* compact set and the norm function in a Banach space is weakly semi-continuous, by the Weierstrass theorem we can find $u_n^* \in \partial J(u_n)$ to satisfy

$$\rho(u_n) = \|u_n^*\|_{X^*} \quad \text{and} \quad u_n^* = Au_n - v_n \quad \text{for every } n \geq 1, \tag{3.3}$$

with $v_n \in L^{q'}([0,T],\mathbb{R})$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, and $v_n \in \partial F(x,u_n(x))$ for all $x \in [0,T]$. Here $A : X \to X^*$ is an operator defined by

$$\langle Au_n, v\rangle = \int_0^T [\Phi_p(u_n'(x))v'(x) + M\Phi_p(u_n(x))v(x)]dx - \sum_{i=1}^m I_i(u_n(x_i))v(x_i), \quad \forall\, v \in X.$$

By the condition (I1), when $u(x_j) < 0$, we get

$$a_j u(x_j) + \frac{b_j(-1)^{\gamma_j}}{\gamma_j+1}u^{\gamma_j+1}(x_j) \leq \int_{u(x_j)}^0 I_j(s)ds \leq -a_j u(x_j) - \frac{b_j(-1)^{\gamma_j}}{\gamma_j+1}u^{\gamma_j+1}(x_j),$$
$$I_j(u(x_j))u(x_j) \geq (a_j + b_j|u(x_j)|^{\gamma_j})u(x_j) = -a_j(-u(x_j)) - b_j(-u(x_j))^{\gamma_j+1}.$$

When $u_j(t) \geq 0$, we obtain

$$-a_j u(x_j) - \frac{b_j}{\gamma_j+1}u^{\gamma_j+1}(x_j) \leq \int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds \leq a_j u(x_j) + \frac{b_j}{\gamma_j+1}u^{\gamma_j+1}(x_j),$$
$$I_j(u(x_j))u(x_j) \geq (-a_j - b_j|u(x_j)|^{\gamma_j})u(x_j) = -a_j u(x_j) - b_j(u(x_j))^{\gamma_j+1}.$$

Thus, we have

$$\left|\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds\right| \leq a_j|u(x_j)| + \frac{b_j}{\gamma_j+1}|u(x_j)|^{\gamma_j+1}, \tag{3.4}$$
$$I_j(u(x_j))u(x_j) \geq -a_j|u(x_j)| - b_j|u(x_j)|^{\gamma_j+1}.$$

Therefore, by Lemma 2.2 we get

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds\right| \le \sum_{j=1}^{m}\left(a_j\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u\|_X + \frac{b_j}{\gamma_j+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_j+1}\|u\|_X^{\gamma_j+1}\right), \tag{3.5}$$

$$I_j(u(x_j))u(x_j) \ge -a_j\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u\|_X - b_j\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_j+1}\|u\|_X^{\gamma_j+1}. \tag{3.6}$$

Thus, in view of condition (H4) and the formulas (3.1), (3.2), (3.5) and (3.6), we can write

$$\begin{aligned}
C+\ & \mu\|u_n\|_X \ge J(u_n) - \mu\langle u_n^*, u_n\rangle \\
= \ & \left(\frac{1}{p}-\mu\right)\|u\|_X - \int_0^T F(x,u_n(x))dx - \mu\langle v_n, -u_n\rangle \\
& -\sum_{i=1}^{m}\int_0^{u_n(x_i)} I_i(s)ds + \mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u_n(x_i))u_n(x_i) \\
\ge \ & \left(\frac{1}{p}-\mu\right)\|u\|_X - \int_{\{|u_n|\le M\}} (F(x,u_n(x)) + \mu F^{\circ}(x,u_n(x);-u_n(x)))dx \\
& - \int_{\{|u_n|\ge M\}} (F(x,u_n(x)) + \mu F^{\circ}(x,u_n(x);-u_n(x)))dx \\
& -\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) \\
& -\mu\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + b_i\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) \\
= \ & \left(\frac{1}{p}-\mu\right)\|u\|_X - C_1 - \sum_{i=1}^{m}\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) \\
& -\mu\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + b_i\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right),
\end{aligned}$$

where C_1 is a constant.

Thus, the sequence $\{u_n\}$ in X is bounded, and hence by passing to a subsequence if necessary and using Sobolev's embedding theorem, we can assume that

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{weakly in } X, \\ u_n \to u & \text{a.e. in } C^1([0,T]), \\ u_n \to u & \text{a.e. in } L^p([0,T]). \end{cases} \tag{3.7}$$

Now, we prove the following fact

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0.$$

To this end, first observe that by (3.2) and (3.3), we have with $\epsilon_n \downarrow 0$

$$\epsilon_n \|u_n - u\| \geq \langle u_n^*, u_n - u\rangle = \langle Au_n, u_n - u\rangle - \int_0^T v_n(x)(u_n(x) - u(x))dx$$

Next, by (3.7) and the Hölder inequality we get

$$\int_0^T v_n(x)(u_n(x) - u(x))dx \to 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

So, $\limsup_{n\to+\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$, and thus (3.8) is fulfilled. Since A is of type $(S)_+$ (see [13], Lemma 4.2), we obtain $u_n \to u$ in X.

Further, by conditions (H2), (H3), (H5) and the Lebourg's mean value theorem, for all $x \in [0,T]$ and $u \in \mathbf{R}$, we obtain

$$|F(x,u)| \leq \epsilon|u|^p + a_2(x)|u|^\xi, \tag{3.8}$$

where $\xi > p$, $\epsilon > 0$ is an arbitrary real number and $a_2 \in L^1([0,T], \mathbf{R}^+)$.

Therefore, by Lemma 2.2 and formulas (3.5), (3.8), we can write

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \sum_{i=1}^m \int_0^{u(x_i)} I_i(s)ds - \int_0^T F(x,u(x))dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \sum_{i=1}^m \int_0^{u(x_i)} I_i(s)ds - \epsilon\int_0^T |u(x)|^p dx + \int_0^T a_2(x)|u(x)|^\xi dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \sum_{i=1}^m \int_0^{u(x_i)} I_i(s)ds - \epsilon\|u\|_\infty^p + \|u\|_\infty^\xi \int_0^T a_2(x)dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_X^p - \sum_{i=1}^m \int_0^{u(x_i)} I_i(s)ds - \epsilon\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^p\|u\|_X^p + \left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^\xi \int_0^T a_2(x)dx\|u\|_X^\xi \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)\|u\|_X^p
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^m\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) + \left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^\xi\int_0^T a_2(x)dx\|u\|_X^\xi.$$

Hence, we can find $R > 0$ and $\delta > 0$ such that

$$J(u) \geq \delta \quad \text{for all } u \in X \text{ with } \|u\|_X = R. \tag{3.9}$$

Now we claim that

$$J(tu) \to -\infty \quad \text{as} \quad t \to +\infty. \tag{3.10}$$

To prove this, let $\mathcal{N}$ be a Lebesgue-null set outside of which the hypotheses (H3) and (H4) hold, and let $x \in [0,T]\backslash\mathcal{N}$, $u \in \mathbf{R}$ with $|u| \geq M$. We set $\mathfrak{J}(x.\lambda) = F(x,\lambda u)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, and observe that $\mathfrak{J}(x,\cdot)$ is locally Lipschitz. By Rademacher's theorem, we find that for every $x \in [0,T]$ the function $\lambda \to \mathfrak{J}(x,\lambda)$ is differentiable a.e. on $\mathbf{R}$, and at a point of differentiability $\lambda \in \mathbf{R}$ we have $\frac{d}{d\lambda}\mathfrak{J}(x,\lambda) \in \partial\mathfrak{J}(x,\lambda)$. Moreover, by the chain rule we have $\partial\mathfrak{J}(x,\lambda) \subset (\partial_u F(x,\lambda u), u)_{\mathbb{R}}$, implying $\partial\mathfrak{J}(x,\lambda) \subset (\partial_u F(x,\lambda u), \lambda u)_{\mathbb{R}}$. Next, from (H4) we infer

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\mathfrak{J}(x,\lambda) \geq \frac{1}{\mu}\mathfrak{J}(x,\lambda) \Longrightarrow \frac{\frac{d}{d\lambda}\mathfrak{J}(x,\lambda)}{\mathfrak{J}(x,\lambda)} \geq \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Integrating the above inequality from 1 to λ_0 we get $\ln\frac{\mathfrak{J}(x,\lambda_0)}{\mathfrak{J}(x,1)} \geq \ln\lambda_0^{\frac{1}{\mu}}$. So, we have proved that $\lambda_0^{-\frac{1}{\mu}}F(x,\lambda u) \geq \lambda_0^{\frac{1}{\mu}}F(x,u)$ for $x \in [0,T]\backslash\mathcal{N}$, $|u| \geq M$ and $\lambda \geq 1$.

Let $z(x) = \min\{F(x,u) : |u| = M\}$. Clearly we have $z \in L^p([0,T],\mathbb{R}^+)$ and $z(x) \geq c_0$ for every $x \in [0,T]$. Therefore, for every $x \in [0,T]\backslash\mathcal{N}$ and $|u| \geq M$ we have

$$F(x,u) = F(x,|u|M^{-1}Mu|u|^{-1}) \geq \left(\frac{|u|}{M}\right)^{\frac{1}{\mu}}F\left(x,\frac{u}{|u|}M\right) \geq z(x)\left(\frac{|u|}{M}\right)^{\frac{1}{\mu}}. \tag{3.11}$$

On the other hand, in view of the equivalence between two norms in the finite-dimensional spaces, for any finite-dimensional subspace $U \subset X$ and any $u \in U$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|u\|_\delta = \left(\int_a^b |u(x)|^\delta dx\right)^{\frac{1}{\delta}} \geq C\|u\|_X, \quad \delta \geq 1.$$

Then, by (3.5) and (3.11), there exists a positive constant C_1 such that

$$\begin{aligned}
J(u) &\leq \frac{1}{p}\|u\|_X^p + \sum_{i=1}^m\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u\|_X^{\gamma_i+1}\right) - \int_0^T z(x)\left(\frac{|u(x)|}{M}\right)^{\frac{1}{\mu}}dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|_X^p + \sum_{i=1}^m\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u\|_X^{\gamma_i+1}\right) - c_0\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{\mu}}\|u\|_{\frac{1}{\mu}}^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|_X^p + \sum_{i=1}^m\left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u\|_X^{\gamma_i+1}\right) - c_0C_1\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{\mu}}\|u\|_X^{\frac{1}{\mu}}.
\end{aligned}$$

Since $\mu < \frac{1}{p}$ and $\gamma_j < p-1$, for any $u \in X\backslash\{0\}$ we have $J(tu) \to -\infty$ as $t \to +\infty$, implying the desired claim (3.10).

Finally, for large $t_0 > 0$ we have $J(t_0u) < 0$ with fixed $u \in X\backslash\{0\}$. Hence, observing that $J(0) = 0$, in view of formula (3.9) and the non-smooth mountain pass theorem (see [16, 17]), we obtain $u \in X$, $u \neq 0$ such that $0 \in \partial J(u)$. An application of Proposition 2.1 completes the proof. Theorem 1 is proved.

In the following result we replace the condition (H4) by conditions (H6)-(H8).

Theorem 3.2. *Assume that the conditions (H1)-(H3) and (I1) are fulfilled, and there exist two positive constants β, γ with $\gamma > p$ and $\beta > \gamma - p$, such that $F(x,u)$ and I_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ satisfy the following conditions:*

(H6) $\lim_{|u|\to+\infty}\frac{F(x,u}{|u|^p} = +\infty$ *uniformly for all $x \in [0,T]$.*

(H7) $\limsup_{|u|\to+\infty}\frac{F(x,u)}{|u|^\gamma} \leq M < +\infty$ *uniformly for some $M > 0$ and all $x \in [0,T]$.*

(H8) $\liminf_{|u|\to+\infty} \frac{pF(x,u+F^\circ(x,u;-u)}{|u|^\beta} > 0$ *uniformly for all* $x \in [0,T]$.

(I2) I_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *are odd and nondecreasing.*

Then, the problem (1.1) has at least one nonzero solution on X.

Proof. We first prove that J satisfies the non-smooth (C)-condition (see Definition 2.3). Let $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ be such that $\{J(u_n)\}_{n\geq 1}$ is bounded and $(1+||u_n||_X)\rho(u_n) \to 0$ as $n \to +\infty$. Then, there exists $C > 0$ to satisfy

$$|J(u_n)| \leq C \quad \text{and} \quad (1 + ||u_n||_X)\rho(u_n) \leq C \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

By condition (H7), there exist $\varrho_1 > 0$ and $\delta_1 > 0$ such that $F(x,u) \leq \varrho_1|u|^\gamma$ for all $|u| \geq \delta_1$ and $x \in [0,T]$. It follows from the above inequality, the conditions (H1), (H2), and the Lebourg's mean value theorem that $|F(x,u)| \leq \overline{a}_2(x)$ for all $|u| \leq \delta_1$ and $x \in [0,T]$, where $\overline{a}_2(x) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$. Therefore

$$|F(x,u)| \leq \varrho_1|u|^\gamma + \overline{a}_2(x) \quad \text{for all } u \in \mathbb{R},\ x \in [0,T]. \tag{3.13}$$

Also, by condition (H8) there exist $\varrho_2 > 0$ and $\delta_2 > 0$ such that $pF(x,u)+F^\circ(x,u;-u) \geq \varrho_2|u|^\beta$ for all $|u| \geq \delta_2$ and $x \in [0,T]$. By arguments similar to those used in the derivation of (3.1), we obtain $|pF(x,u) + F^\circ(x,u;-u)| \geq \overline{a}_3(x)$ for all $|u| \leq \delta_2$ and $x \in [0,T]$. Thus, for all $u \in \mathbb{R}$ and $x \in [0,T]$ we can write

$$pF(x,u) + F^\circ(x,u;-u) \geq \varrho_2|u|^\beta - \varrho_1\delta_2^\beta - \overline{a}_3(x), \tag{3.14}$$

where $\overline{a}_3(x) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$, Therefore, by (3.4), (3.12) and (3.13) we get

$$\begin{aligned} C \geq |J(u_n)| \ &\geq\ \frac{1}{p}||u_n||_X^p - \sum_{i=1}^m \left(a_i||u_n||_\infty + \frac{b_j}{\gamma_i+1}||u_n||_\infty^{\gamma_i+1}\right) \\ &\quad -\varrho_1\int_0^T |u_n(x)|^\gamma dx - \int_0^T \overline{a}_2(x)dx. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}||u_n||_X^p \ &\leq\ \sum_{i=1}^m \left(a_i||u_n||_\infty + \frac{b_j}{\gamma_i+1}||u_n||_\infty^{\gamma_i+1}\right) \\ &\quad +\varrho_1\int_0^T |u_n(x)|^\gamma dx + \int_0^T \overline{a}_2(x)dx + C. \end{aligned} \tag{3.15}$$

From (3.12) and (3.14) we obtain

$$
\begin{aligned}
(p+1)C &\geq pJ(u_n) - \langle u_n^*, u_n \rangle \\
&\geq \varrho_2 \int_0^T |u_n(x)|^\beta dx - \int_0^T \overline{a}_3(x)dx - \varrho_1 \delta_2^\beta \\
&\quad -p\sum_{i=1}^m \int_0^{u_n(x_i)} I_i(s)ds + \sum_{i=1}^m I_i(u_n(x_i))u_n(x_i) \\
&\geq \varrho_2 \int_0^T |u_n(x)|^\beta dx - \int_0^T \overline{a}_3(x)dx - \varrho_1 \delta_2^\beta \\
&\quad -p\sum_{i=1}^m \left(a_i \|u_n\|_\infty + \frac{b_j}{\gamma_i + 1} \|u_n\|_\infty^{\gamma_i+1} \right) \\
&\quad -\sum_{i=1}^m \left(a_i \|u_n\|_\infty + b_i \|u_n\|_\infty^{\gamma_i+1} \right),
\end{aligned}
$$

where $u_n^* \in \partial J(u_n)$ and $v_n \in \partial F(x, u_n)$. Therefore the sequence $\{u_n\}$ is bounded both in $L^\beta([0,T], \mathbf{R})$ and $L^\infty([0,T], \mathbf{R})$.

Since $\gamma > p$ and $\beta > \gamma - p$, then assuming $\gamma \leq \beta$ and using Hölder's inequality we have $\int_0^T |u_n(x)|^\gamma dx \leq \left(\int_0^T |u_n(x)|^\beta dx \right)^{\frac{\gamma}{\beta}}$, which together with (3.15) implies that $\{u_n\}$ is bounded in X. If $\beta < \gamma$, then by Lemma 2.2 we get

$$
\int_0^T |u_n(x)|^\gamma dx \leq \|u_n\|_\infty^{\gamma-\beta} \int_0^T |u_n(x)|^\beta dx \leq \left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma-\beta} \|u_n\|_X^{\gamma-\beta} \int_0^T |u_n(x)|^\beta dx.
$$

Hence, taking into account (3.15), we conclude that $\{u_n\}$ is bounded in X. By arguments similar to those used in the proof of Theorem 3.1 we infer that $\{u_n\}$ strongly converges in X.

Also, by conditions (H3) and (H5) we can find $R > 0$ and $\delta > 0$ to satisfy

$$
J(u) \geq \delta \quad \text{for all } u \in X \text{ with } \|u\| = R. \tag{3.16}
$$

Next, we prove that there exists $u_0 \in X$ such that $J(u_0) < 0$. To this end, observe first that by condition (H6), for

$$
\varrho_3 = \frac{p+1}{p} \cdot \frac{T + \frac{2M}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}}{\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}} > 0
$$

there exists $\delta_3 > 0$ such that

$$
F(x,u) \geq \varrho_3 |u|^p \quad \text{for all } |u| \geq \delta_3,\ x \in [0,T].
$$

It follows from (H2), (H3) and the Lebourg's mean value theorem that

$$
F(x,u) \geq \varrho_3 |u|^p - \varrho_3 \delta_3^p - \overline{a}_4(x), \qquad \text{for all } u \in \mathbf{R},\ x \in [0,T], \tag{3.17}
$$

where $\overline{a}_4(x) \in L^1([0,T], \mathbf{R}^+)$. Therefore, by (3.17), (H3) and Lemma 2.2, we choose $u_0(x) = \frac{T}{2} - x$ and observe that $u_0 \in X$.

Since by (I2) the functions I_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ are odd and nondecreasing, the functions $\int_0^\zeta I_i(s)ds$ are even and satisfy $\int_0^\zeta I_i(s)ds \geq 0$ for any $\zeta \geq 0$. Hence

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^{u_0(x_i)} I_i(s)ds \geq 0.$$

So, in view of (3.17) we can write

$$\begin{aligned} J(su_0) &= \frac{s^p}{p} \int_0^T \left(1 + M\left|\frac{T}{2} - x\right|^p\right) dx - \sum_{i=1}^{m} \int_0^{u_0(x_i)} I_i(s)ds - \int_0^T F(x, su_0(x))dx \\ &\leq \frac{s^p}{p} \int_0^T \left(1 + M\left|\frac{T}{2} - x\right|^p\right) dx - \int_0^T F(x, su_0(x))dx \\ &\leq \frac{s^p}{p} \left(T + \frac{2M}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}\right) - s^p \varrho_3 \int_0^T |u_0(x)|^p dx + C_1 \\ &\leq s^p \left[\frac{1}{p}\left(T + \frac{2M}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}\right) - \varrho_3 \frac{2}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}\right], \end{aligned}$$

where $C_1 := \varrho_3 \delta_3^p T + \int_0^T \overline{a}_4(x)dx$ is a positive constant. Taking into account that

$$\frac{1}{p}\left(T + \frac{2M}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}\right) - \varrho_3 \frac{2}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1} = -\frac{1}{p}\left(T + \frac{2M}{p+1}\left(\frac{T}{2}\right)^{p+1}\right) < 0,$$

we conclude that there exists a large enough $s_0 > 0$ such that $J(s_0 u_0) < 0$.

Finally, observing that $J(0) = 0$, we use the formula (3.16), the non-smooth mountain pass theorem (under the non-smooth (C)-condition (see [17])) and Proposition 2.1, to complete the proof. Theorem 2 is proved. □

Theorem 3.3. *Assume that the conditions (H1)-(H5), (I1) and (I2) are fulfilled, and the potential $F(x, u)$ satisfies the following condition:*
(H9) $F(x, u) = F(x, -u)$ for all $x \in [0, T]$, $u \in \mathbf{R}$.
Then the problem (1.1) has an unbounded sequence of solutions $\{u_n\} \subset X$ such that $\|u_n\|_\infty \to \infty$ as $n \to \infty$.

Proof. It follows from the conditions (I2) and (H9) that J is even. Hence using the arguments of the proof of Theorem 3.1 and the non-smooth symmetric mountain pass theorem [16], we conclude that J possesses an unbounded sequence of critical values $\{c_n\}$ satisfying $J(u_n) = c_n$, where $0 \in \partial J(u_n)$ for $n = 1, 2, \ldots$.

Since $0 \in \partial J(u_n)$, by (3.3) we get

$$\|u_n\|_X^p - \sum_{i=1}^{m} I_i(u_n(x_i))u_n(x_i) - \int_0^T (v_n(x), u_n(x))dx = 0, \tag{3.18}$$

where $v_n \in \partial F(x, u_n)$.

Next, in view of (3.5), (3.6), (3.11), (3.18), (H5) and (H9), we can write

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_X^p = \frac{p+1}{p}\|u_n\|_X^p - \sum_{i=1}^{m} I_i(u_n(x_i))u_n(x_i) - \int_0^T (v_n(x), u_n(x))dx \geq$$

$$\geq (p+1)c_n + \int_0^T ((p+1)F(x,u_n(x)) - F^\circ(x,u_n(x);u_n(x)))dx +$$

$$+(p+1)\sum_{i=1}^m \int_0^{u_n(x_i)} I_i(s)ds - \sum_{i=1}^m I_i(u_n(x_i))u_n(x_i) \geq$$

$$\geq (p+1)c_n + \left((p+1)+\frac{1}{\mu}\right)\int_0^1 (F(x,u_n(x)) + F(x,-u_n(x))dx -$$

$$-(p+1)\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + b_i\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right) \geq$$

$$\geq (p+1)c_n + \left((p+1)+\frac{1}{\mu}\right)\int_{\{|u_n(x)|\leq M\}} F(x,u_n(x)dx$$

$$-(p+1)\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right)$$

$$-\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + b_i\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right).$$

Thus, we have

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_X^p + (p+1)\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^m \left(a_i\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\|u_n\|_X + b_i\left(\frac{1}{2}T^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma_i+1}\|u_n\|_X^{\gamma_i+1}\right)$$

$$\geq (p+1)c_n + \left((p+1)+\frac{1}{\mu}\right)\int_{\{|u_n(x)|\leq M\}} F(x,u_n(x)dx.$$

Since $c_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$, it follows from the above inequality that $\|u_n\|_X \to +\infty$ as $n \to +\infty$. Also, with some constant C'', we have

$$(p+1)c_n \leq \frac{1}{p}\|u_n\|_X^p + C''. \tag{3.19}$$

Hence, by the condition (H3) and formulas (3.4), (3.19), we can write

$$pc_n \leq \frac{1}{p}\|u_n\|_X^p - c_n + C'' = \sum_{i=1}^m \int_0^{u_n(x_i)} I_i(s)ds + \int_0^T F(x,u_n(x)\,dx + C''$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_0^{u_n(x_i)} I_i(s)ds + \int_0^T (u_n^*(x), u_n(x)dx + C''$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left(a_i\|u_n\|_\infty + \frac{b_j}{\gamma_i+1}\|u_n\|_\infty^{\gamma_i+1}\right) + \|u_n\|_\infty \int_0^1 a(x)dx + \|u_n\|_\infty^q \int_0^T b(x)dx + C'',$$

where $u_n^* \in \partial F(x, su_n)$ with $s \in (0,1)$. Thus, we have $||u_n||_\infty \to +\infty$ as $n \to +\infty$, and the result follows. Theorem 3 is proved.

Acknowledgments. The author would like to thank the anonymous referees for valuable suggestions and comments.

REFERENCES

[1] F. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, John Wiley and Sons, New York (1983).
[2] R. P. Agarwal, D. Franco, D. O'Regan, Singular Boundary Value Problems for First and Second Order Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore (1989).
[3] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, Aequationes Math., 69, 83 – 96 (2005).
[4] J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, "Boundary value problems for a class of impulsive functional equations", Comput. Math. Appl., 55, 2715 – 2731 (2008).
[5] J. Li, J.J. Nieto, J. Shen, "Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations", J. Math. Anal. Appl., 325, 226 – 299 (2007).
[6] J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, "New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications", J. Math. Anal. Appl., 328, 1343 – 1368 (2007).
[7] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore (1995).
[8] H. Zhang, L. Chen, J. J. Nieto, "A delayed epidemic model with stage structure and pulses for management strategy", Nonlinear Anal. RWA, 9, 1714 – 1726 (2008).
[9] N. Zhang, B. Dai, X. Qian, "Periodic solutions for a class of higher-dimension functional differential equations with impulses", Nonlinear Anal. TMA 68, 629 -Џ 638 (2008).
[10] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, Impulsive Differential Equations and Inclusions, vol. 2, Hindawi Publishing Corporation, New York (2006).
[11] G. Zeng, F. Wang, J.J. Nieto, "Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response", Adv. Complex Syst., 11, 77 – 97 (2008).
[12] X. Meng, Z. Li, J.J. Nieto, "Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment", J. Math. Chem., 47, 123 – 144 (2009).
[13] Y. Tian, J. Henderson, "Three anti-periodic solutions for second-order impulsive differential inclusions via nonsmooth critical point theory", Nonlinear Anal., 75, 6496 – 6505 (2012).
[14] B. Ricceri, "Existence of three solutions for a class of elliptic eigenvalue problems", Math. Comput. Modelling, 32, 1485 – 1494 (2000).
[15] D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos, Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
[16] K. C. Chang, "Variational methods for non-differential functions and their applications to partial differential equations", J. Math. Anal. Appl., 80, 102 – 129 (1981).
[17] L. Gasinki, N. Papageorgiou, Nonsmooth Critical Point Theory and Nonlinear Boundary Value Problems, Chapman Hall/CRC, Boca Raton (2005).

Поступила 12 апреля 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 60-72.

ON THE PARTIAL SUMS OF VILENKIN-FOURIER SERIES

GEORGE TEPHNADZE

Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia[1]
Luleå University of Technology, Luleå, Sweden.

E-mail: *giorgitephnadze@gmail.com*

Abstract. The main aim of this paper is to investigate weighted maximal operators of partial sums of Vilenkin-Fourier series. Also, the obtained results we use to prove approximation and strong convergence theorems on the martingale Hardy spaces H_p, when $0 < p \leq 1$.

MSC2010 number: 42C10

Keywords: Vilenkin system, partial sums, martingale Hardy space, modulus of continuity, convergence.

1. Introduction

It is well-known that the Vilenkin system does not form a basis in the space $L_1(G_m)$. Moreover, there is a function f in the martingale Hardy space $H_1(G_m)$, such that the partial sums of f are not bounded in $L_1(G_m)$-norm, but the partial sums S_n of the Vilenkin-Fourier series of any function $f \in L_1(G_m)$ convergence in measure (see [12]).

Uniform convergence and some approximation properties of the partial sums in $L_1(G_m)$ norms were studied by Goginava [8] (see also [9]). Fine [3] has obtained sufficient conditions for the uniform convergence, which are in complete analogy with the Dini-Lipschits conditions. Guliev [13] has estimated the rate of uniform convergence of a Walsh-Fourier series using Lebesgue constants and modulus of continuity. Uniform convergence of subsequences of partial sums was studied also in [7]. The same problem for Vilenkin group G_m has been considered by Fridli [4], Blahota [2] and Gát [6].

It is also known that a subsequence S_{n_k} is bounded from $L_1(G_m)$ to $L_1(G_m)$ if and only if n_k has uniformly bounded variation and the subsequence of partial sums S_{M_n} is bounded from the martingale Hardy space $H_p(G_m)$ to the Lebesgue space $L_p(G_m)$ for all $p > 0$.

[1]The research was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation grant no.13/06 (Geometry of function spaces, interpolation and embedding theorems

In this paper we prove the following rather surprising fact: there exists a martingale $f \in H_p(G_m)$ $(0 < p < 1)$, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_{M_n+1}f\|_{L_{p,\infty}} = \infty.$$

The reason of divergence of $S_{M_n+1}f$ is that for $0 < p < 1$ the Fourier coefficients of $f \in H_p(G_m)$ are not bounded (see [17]).

In [5], Gát has obtained the following strong convergence result: for all $f \in H_1(G_m)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f - f\|_1}{k} = 0,$$

where $S_k f$ denotes the k-th partial sum of the Vilenkin-Fourier series of f.
For the trigonometric analogue of this result we refer to Smith [16], for the Walsh system see Simon [14]. For the Vilenkin system Simon [15] has proved that there is an absolute constant c_p, depending only on p, such that for all $f \in H_p(G_m)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|S_k f\|_p^p}{k^{2-p}} \le c_p \|f\|_{H_p}^p, \quad 0 < p < 1. \tag{1.1}$$

In [18] the author proved that for any nondecreasing function $\Phi : \mathbf{N} \to [1, \infty)$ satisfying the condition $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = +\infty$, there exists a martingale $f \in H_p(G_m)$, such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|S_k f\|_{L_{p,\infty}}^p \Phi(k)}{k^{2-p}} = \infty \text{ for } 0 < p < 1. \tag{1.2}$$

Strong convergence theorems for two-dimensional partial sums were proved by Weisz [23], Goginava [10], Gogoladze [11] and Tephnadze [19].

The main aim of this paper is to investigate weighted maximal operators of partial sums of Vilenkin-Fourier series. Also, the obtained results we use to prove approximation and strong convergence theorems on the martingale Hardy spaces H_p, when $0 < p \le 1$.

2. Definitions and notation

Let $\mathbf{N}_+$ denote the set of positive integers, and let $\mathbf{N} := \mathbf{N}_+ \cup \{0\}$. By $m := (m_0, m_1, \ldots)$ we denote a sequence of positive integers m_k with $m_k \ge 2$. Denote by $Z_{m_k} := \{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$ the additive group of integers modulo m_k, and define the group G_m as the complete direct product of the group Z_{m_j} with the product of the discrete topologies of Z_{m_j}'s. The direct product μ of the measures

$$\mu_k(\{j\}) := 1/m_k, \quad j \in Z_{m_k}$$

is the Haar measure on G_m with $\mu(G_m) = 1$.

If the sequence $m := (m_0, m_1, ...)$ is bounded, then G_m is called a bounded Vilenkin group, otherwise – unbounded.

The elements of G_m can be represented by sequences

$$x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...), \quad x_k \in Z_{m_k}.$$

Observe that the sequence $\{I_n(x), n \in \mathbf{N}\}$, where $I_0(x) := G_m$ and

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\} \ (x \in G_m, \ n \in \mathbf{N}).$$

forms a base for the neighborhood of G_m.

Denoting $I_n := I_n(0)$ for $n \in \mathbf{N}$ and $\overline{I_n} := G_m \setminus I_n$, we clearly have

$$\overline{I_N} = \bigcup_{s=0}^{N-1} I_s \backslash I_{s+1}. \tag{2.1}$$

If we define the so-called generalized number system based on m as follows

$$M_0 := 1, \quad M_{k+1} := m_k M_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

then every $n \in \mathbf{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_j M_j$, where $n_j \in Z_{m_j}$ $(j \in \mathbf{N})$, and only a finite number of n_j's differ from zero.

Also, we denote $|n| := \max\{j \in \mathbf{N}, n_j \neq 0\}$, and $L_1(G_m)$ will stand for the usual (one dimensional) Lebesgue space.

Next, on G_m we introduce an orthonormal system, called the Vilenkin system as follows.

We first define the complex valued functions $r_k(x) : G_m \to \mathbf{C}$ to be the generalized Rademacher functions:

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \quad \left(\iota^2 = -1, \ x \in G_m, \ k \in \mathbf{N}\right).$$

The Vilenkin system $\psi := (\psi_n : n \in \mathbf{N})$ on G_m is then defined as follows:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad n \in \mathbf{N}.$$

In the special case where $m \equiv 2$, the Vilenkin system will be referred as a Walsh-Paley system. It is known that the Vilenkin system is orthonormal and complete in $L_2(G_m)$ (see, e.g., [1, 20]).

Similar to the classical Fourier analysis case, for $f \in L_1(G_m)$ we can define the Fourier coefficients, the partial sums of the Fourier series and the Dirichlet kernel with respect to the Vilenkin system ψ as follows:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &:= \int_{G_m} f\overline{\psi}_k d\mu, \quad k \in \mathbf{N}, \\ S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\psi_k, \quad n \in \mathbf{N}_+, \ S_0 f := 0, \\ D_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k, \quad n \in \mathbf{N}_+. \end{aligned}$$

Recall that (see [1])

$$D_{M_n}(x) = \begin{cases} M_n, & \text{if } x \in I_n \\ 0, & \text{if } x \notin I_n \end{cases} \tag{2.2}$$

and

$$D_n(x) = \psi_n(x) \left(\sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j}(x) \sum_{u=m_j-n_j}^{m_j-1} r_j^u(x) \right). \tag{2.3}$$

The norm (or quasinorm) in the space $L_p(G_m)$ is defined by

$$\|f\|_p := \left(\int_{G_m} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty).$$

Notice that the space $L_{p,\infty}(G_m)$ consists of all measurable functions f for which

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} := \sup_{\lambda>0} \lambda \mu (f > \lambda)^{1/p} < +\infty.$$

The σ-algebra generated by the intervals $\{I_n(x) : x \in G_m\}$ will be denoted by F_n $(n \in \mathbf{N})$. Denote by $f = (f_n, n \in \mathbf{N})$ a martingale with respect to F_n, $n \in \mathbf{N}$ (for details we refer to [21]). The maximal function of a martingale f is defend by

$$f^* = \sup_{n\in\mathbf{N}} \left| f^{(n)} \right|.$$

In the case where $f \in L_1(G_m)$ the maximal function can also be defined by

$$f^*(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{|I_n(x)|} \left| \int_{I_n(x)} f(u) \, d\mu(u) \right|$$

For $0 < p < \infty$ the Hardy martingale space $H_p(G_m)$ consists of all martingales f satisfying

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

For $0 < p \leq 1$ the dyadic Hardy martingale spaces $H_p(G_m)$ possess an atomic characterization. Namely, the following theorem is true (see [24]).

Theorem W. *A martingale $f = (f_n, n \in \mathbf{N})$ is in $H_p(G_m)$ $(0 < p \leq 1)$ if and only if there exist a sequence of p-atoms $(a_k,\ k \in \mathbf{N})$ and a sequence of real numbers $(\mu_k,\ k \in \mathbf{N})$ such that for every $n \in \mathbf{N}$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{M_n} a_k = f_n \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty. \tag{2.4}$$

Moreover, $\|f\|_{H_p} \backsim \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p\right)^{1/p}$, where the infimum is taken over all decompositions of f of the form (2.4).

Recall, that a bounded measurable function a is a p-atom, if there exist a dyadic interval I, such that

$$\int_I a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1/p}, \quad \operatorname{supp}(a) \subset I.$$

Let $X = X(G_m)$ denote either the space $L_1(G_m)$ or the space of continuous functions $C(G_m)$. The corresponding norm is denoted by $\|\cdot\|_X$, and the corresponding moduli of continuity are defined by

$$\omega(1/M_n, f)_X = \sup_{h \in I_n} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_X .$$

The modulus of continuity in $H_p(G_m)$ $(0 < p \leq 1)$ can be defined as follows:

$$\omega(1/M_n, f)_{H_p(G_m)} := \|f - S_{M_n} f\|_{H_p(G_m)} .$$

It is easy to show that for $f \in L_1(G_m)$ the sequence $(S_{M_n}(f) : n \in \mathbf{N})$ is a martingale.

If $f = (f_n, n \in \mathbf{N})$ is a martingale, then the Vilenkin-Fourier coefficients must be defined in a slightly different manner, namely:

$$\widehat{f}(i) := \lim_{k \to \infty} \int_{G_m} f_k(x) \overline{\Psi}_i(x) d\mu(x) .$$

The Vilenkin-Fourier coefficients of a function $f \in L_1(G_m)$ are the same as the martingale $(S_{M_n}(f) : n \in \mathbf{N})$ obtained from f.

For a martingale f we consider the maximal operators:

$$S^* f \ := \sup_{n \in \mathbf{N}} |S_n f|,$$

$$\widetilde{S}_p^* f \ := \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(n+1)}, \quad 0 < p \leq 1,$$

where $[p]$ denotes the integer part of p.

3. Main results

In this section we state the main results of this paper.

Theorem 3.1. *The following assertions hold:*

a) *Let $0 < p \leq 1$. Then the maximal operator $\widetilde{S}_p^*$ is bounded from the Hardy space $H_p(G_m)$ to the space $L_p(G_m)$.*

b) *Let $0 < p \leq 1$ and $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ be a nondecreasing function satisfying the condition*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(n+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(n+1)}{\varphi(n)} = +\infty. \tag{3.1}$$

Then

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_n f}{\varphi(n)} \right\|_{L_{p,\infty}(G_m)} = \infty \quad \text{for} \quad 0<p<1$$

and

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_n f}{\varphi(n)} \right\|_1 = \infty.$$

We easily infer the following result, which first was established by P. Simon [15].

Corollary 3.1. *Let $0 < p < 1$ and $f \in H_p(G_m)$. Then there is a constant c_p, depending only on p, such that*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|S_k f\|_p^p}{k^{2-p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p .$$

Theorem 3.2. *Let $0 < p \leq 1$, $f \in H_p(G_m)$ and $M_k < n \leq M_{k+1}$. Then there is a constant c_p, depending only on p, such that*

$$\|S_n(f) - f\|_{H_p(G_m)} \leq c_p n^{1/p-1} \lg^{[p]} n \omega \left(\frac{1}{M_k}, f \right)_{H_p(G_m)} .$$

Theorem 3.3. *The following assertions hold:*

a) *Let $0 < p < 1$, $f \in H_p(G_m)$ and*

$$\omega \left(\frac{1}{M_n}, f \right)_{H_p(G_m)} = o\left(\frac{1}{M_n^{1/p-1}} \right) \quad \text{as } n \to \infty.$$

Then

$$\|S_k(f) - f\|_{L_{p,\infty}(G_m)} \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

b) *For every $p \in (0,1)$ there exists a martingale $f \in H_p(G_m)$ for which*

$$\omega \left(\frac{1}{M_{2n}}, f \right)_{H_p(G_m)} = O\left(\frac{1}{M_{2n}^{1/p-1}} \right) \quad \text{as } n \to \infty$$

and

$$\|S_k(f) - f\|_{L_{p,\infty}(G_m)} \nrightarrow 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

Theorem 3.4. *The following assertions hold:*

a) *Let $f \in H_1(G_m)$ and*

$$\omega\left(\frac{1}{M_n}, f\right)_{H_1(G_m)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad as\ n \to \infty.$$

Then

$$\|S_k(f) - f\|_1 \to 0 \quad as\ k \to \infty.$$

b) *There exists a martingale $f \in H_1(G_m)$ for which*

$$\omega\left(\frac{1}{M_{2M_n}}, f\right)_{H_1(G_m)} = O\left(\frac{1}{M_n}\right) \quad as\ n \to \infty$$

and

$$\|S_k(f) - f\|_1 \nrightarrow 0 \quad as\ \ k \to \infty.$$

4. Auxiliary propositions

In this section we state two known lemmas that will be used in the proofs of our main results.

Lemma 4.1. *([22]) Let T be a sublinear operator such that for some $0 < p \leq 1$ and for every p-atom a*

$$\int_I |Ta|^p \, d\mu \leq c_p < \infty,$$

where I denotes the support of the atom. If T is bounded from L_∞ to L_∞, then

$$\|Tf\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p(G_m)}.$$

Lemma 4.2. [17] *Let $n \in \mathbf{N}$ and $x \in I_s \backslash I_{s+1}$ for $0 \leq s \leq N-1$. Then*

$$\int_{I_N} |D_n(x-t)| \, d\mu(t) \leq \frac{cM_s}{M_N}.$$

5. Proof of the theorems

Proof of Theorem 3.1. We first prove assertion a). To this end, observe that since $\widetilde{S}_p^*$ is bounded from $L_\infty(G_m)$ to $L_\infty(G_m)$, in view of Lemma 1, it is enough to show that for every p-atom a

$$\int_{\overline{I_N}} \left|\widetilde{S}_p^* a(x)\right|^p d\mu(x) \leq c < \infty \quad \text{for} \quad 0 < p \leq 1,$$

where I denotes the support of the atom.

Let a be an arbitrary p-atom with support$I$ and $\mu(I) = M_N$. We may assume that $I = I_N$. It is easy to see that $S_n(a) = 0$ when $n \leq M_N$. Therefore we can assume that $n > M_N$.

Since $\|a\|_\infty \leq M_N^{1/p}$ we can write

$$|S_n(a)| \leq \int_{I_N} |a(t)| \, |D_n(x-t)| \, d\mu(t)$$
$$\leq \|a\|_\infty \int_{I_N} |D_n(x-t)| \, d\mu(t) \leq M_N^{1/p} \int_{I_N} |D_n(x-t)| \, d\mu(t).$$

For $0<p<1$ and $x \in I_s \backslash I_{s+1}$, from Lemma 2 we get

$$\frac{|S_n a(x)|}{\log^{[p]}(n+1)(n+1)^{1/p-1}} \leq \frac{cM_N^{1/p-1}M_s}{\log^{[p]}(n+1)(n+1)^{1/p-1}}. \tag{5.1}$$

Combining (2.1) and (5.1) we obtain

$$\int_{\overline{I}_N} \left|\widetilde{S}_p^* a(x)\right|^p d\mu(x) = \sum_{s=0}^{N-1} \int_{I_s \backslash I_{s+1}} \left|\widetilde{S}_p^* a(x)\right|^p d\mu(x) \tag{5.2}$$
$$\leq \frac{cM_N^{1-p}}{\log^{[p]p}(n+1)(n+1)^{1-p}} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{M_s^p}{M_s} \leq \frac{cM_N^{1-p}N^{[p]}}{\log^{p[p]}(n+1)(n+1)^{1-p}} < c_p < \infty.$$

This completes the proof of assertion a).

To prove part b) of the theorem, we set

$$f_{n_k}(x) = D_{M_{2n_k+1}}(x) - D_{M_{2n_k}}(x)$$

and observe that

$$\widehat{f}_{n_k}(i) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = M_{2n_k}, \ldots, M_{2n_k+1}-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence we can write

$$S_i f_{n_k}(x) = \begin{cases} D_i(x) - D_{M_{2n_k}}(x), & \text{if } i = M_{2n_k}+1, \ldots, M_{2n_k+1}-1, \\ f_{n_k}(x), & \text{if } i \geq M_{2n_k+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.3}$$

From (2.2) we get

$$\|f_{n_k}\|_{H_p(G_m)} = \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} S_{M_n}(f_{n_k})\right\|_p = \left\|D_{M_{2n_k+1}} - D_{M_{2n_k}}\right\|_p \leq c_p M_{2n_k}^{1-1/p}. \tag{5.4}$$

Let $0<p<1$, then under the condition (3.1) there exist positive integers n_k such that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(M_{2n_k}+2)^{1/p-1}}{\varphi(M_{2n_k}+2)} = \infty, \quad 0<p<1.$$

Applying (2.2), (2.3) and (5.3) we can write

$$\frac{\left|S_{M_{2n_k}+1} f_{n_k}\right|}{\varphi(M_{2n_k}+2)} = \frac{\left|D_{M_{2n_k}+1} - D_{M_{2n_k}}\right|}{\varphi(M_{2n_k}+2)} = \frac{\left|w_{M_{2n_k}}\right|}{\varphi(M_{2n_k}+2)} = \frac{1}{\varphi(M_{2n_k}+2)}.$$

This implies

$$\mu\left\{x\in G_m:\frac{\left|S_{M_{2n_k}+1}f_{n_k}(x)\right|}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\geq\frac{1}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\right\}=1. \tag{5.5}$$

Combining (5.4) and (5.5) we obtain

$$\frac{\frac{1}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\left(\mu\left\{x\in G_m:\frac{\left|S_{M_{2n_k}+1}f_{n_k}(x)\right|}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\geq\frac{1}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\right\}\right)^{1/p}}{\|f_{n_k}(x)\|_{H_p}}$$

$$\geq\frac{1}{\varphi(M_{2n_k}+2)M_{2n_k}^{1-1/p}}=\frac{\left(M_{2n_k}+2\right)^{1/p-1}}{\varphi(M_{2n_k}+2)}\to\infty\quad\text{as}\quad k\to\infty.$$

Now consider the case $p=1$. Under the condition (3.1) there exists a sequence $\{n_k:k\geq1\}$, such that

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log q_{n_k}}{\varphi(q_{n_k})}=\infty.$$

Let $q_{n_k}=M_{2n_k}+M_{2n_k-2}+M_2+M_0$ and $x\in I_{2s}\backslash I_{2s+1}$, $s=0,...,n_k$. Combining (2.2) and (2.3) we obtain

$$\left|D_{q_{n_k}}(x)\right|\geq|D_{M_{2s}}(x)|-\left|\sum_{l=0}^{s-2}r_{2l}^{m_{2l}-1}(x)D_{M_{2l}}(x)\right|$$

$$\geq M_{2s}-\sum_{l=0}^{s-2}M_{2l}\geq M_{2s}-M_{2s-1}\geq\frac{M_{2s}}{2}.$$

Hence

$$\int_{G_m}\left|D_{q_{n_k}}(x)\right|d\mu(x)\geq\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n_k}\int_{I_{2s}\backslash I_{2s+1}}M_{2s}d\mu(x)\geq c\sum_{s=0}^{n_k}1\geq cn_k. \tag{5.6}$$

Finally, by (5.3), (5.4) and (5.6) we have

$$\frac{1}{\|f_{n_k}(x)\|_{H_1(G_m)}}\int_{G_m}\frac{\left|S_{q_{n_k}}f_{n_k}(x)\right|}{\varphi(q_{n_k})}d\mu(x)$$

$$\geq\frac{1}{\|f_{n_k}(x)\|_{H_1(G_m)}}\left(\int_{G_m}\frac{\left|D_{q_{n_k}}(x)\right|}{\varphi(q_{n_k})}d\mu(x)-\int_{G_m}\frac{\left|D_{M_{2n_k}}(x)\right|}{\varphi(q_{n_k})}d\mu(x)\right)$$

$$\geq\frac{c}{\varphi(q_{n_k})}(\log q_{n_k}-1)\geq\frac{c\log q_{n_k}}{\varphi(q_{n_k})}\to\infty\quad\text{as }k\to\infty,$$

and the result follows. This completes the proof of Theorem 3.1.

Proof of Corollary 3.1. Let $0 < p < 1$. Applying (5.1), (5.2) and Theorem W we have

$$\sum_{k=M_N}^{\infty} \frac{\|S_k a\|_p^p}{k^{2-p}} \leq \sum_{k=M_N}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\overline{I_N}} \left| \frac{S_k a(x)}{k^{1/p-1}} \right|^p d\mu(x)$$

$$+ \sum_{k=M_N}^{\infty} \frac{M_N}{k^{2-p}} \int_{I_N} \left(\int_{I_N} |D_k(x-t)| \, d\mu(t) \right)^p d\mu(x)$$

$$\leq \; c_p M_N^{1-p} \sum_{k=M_N}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}} + c_p M_N^{1-p} \sum_{k=M_N}^{\infty} \frac{\log^p k}{k^{2-p}} \leq c_p < \infty.$$

This completes the proof of Corollary 3.1.

Proof of Theorem 3.2. Let $0 < p \leq 1$ and $M_k < n \leq M_{k+1}$. Using Theorem 3.1 we get

$$\|S_n f\|_p \leq c_p n^{1/p-1} \log^{[p]} n \, \|f\|_{H_p(G_m)}.$$

Therefore

$$\|S_n f - f\|_p^p \leq \|S_n f - S_{M_k} f\|_p^p + \|S_{M_k} f - f\|_p^p = \|S_n (S_{M_k} f - f)\|_p^p$$

$$+ \|S_{M_k} f - f\|_p^p \leq c_p \left(n^{1-p} + 1\right) \log^{p[p]} n \omega^p \left(\frac{1}{M_k}, f\right)_{H_p(G_m)}$$

and

$$\|S_n f - f\|_p \leq c_p n^{1/p-1} \log^{[p]} n \omega \left(\frac{1}{M_k}, f\right)_{H_p(G_m)}. \tag{5.7}$$

Theorem 3.2 is proved.

Proof of Theorem 3.3. Let $0 < p < 1$, $f \in H_p(G_m)$ and

$$\omega \left(\frac{1}{M_{2n}}, f\right)_{H_p(G_m)} = o \left(\frac{1}{M_{2n}^{1/p-1}}\right) \text{ as } n \to \infty.$$

It follows from (5.7) that

$$\|S_n f - f\|_p \to \infty \text{ as } n \to \infty,$$

implying assertion a) of the theorem.

To prove part b), we set

$$a_k(x) = \frac{M_{2k}^{1/p-1}}{\lambda} \left(D_{M_{2k+1}}(x) - D_{M_{2k}}(x)\right),$$

where $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_n$, and

$$f_A(x) = \sum_{i=0}^{A} \frac{\lambda}{M_{2i}^{1/p-1}} a_i(x).$$

Taking into account that

$$S_{M_A} a_k(x) = \begin{cases} a_k(x), & 2k \leq A, \\ 0, & 2k > A, \end{cases}$$

and

$$\operatorname{supp}(a_k) = I_{2k}, \quad \int_{I_{2k}} a_k d\mu = 0, \quad \|a_k\|_\infty \le M_{2k}^{1/p-1} \cdot M_{2k} = M_{2k}^{1/p} = (\operatorname{supp} a_k)^{-1/p},$$

we can apply Theorem W to conclude that $f \in H_p$.

Next, it is easy to show that

$$\begin{aligned} (5.8) \qquad & f - S_{M_n} f \\ = \ & \left(f^{(1)} - S_{M_n} f^{(1)}, \dots, f^{(n)} - S_{M_n} f^{(n)}, \dots, f^{(n+k)} - S_{M_n} f^{(n+k)}\right) \\ = \ & \left(0, \dots, 0, f^{(n+1)} - f^{(n)}, \dots, f^{(n+k)} - f^{(n)}, \dots\right) \\ = \ & \left(0, \dots, 0, \sum_{i=n}^{k} \frac{a_i(x)}{M_i^{1/p-1}}, \dots\right), \quad k \in \mathbf{N}_+ \end{aligned}$$

is a martingale. Hence, using (5.8) we get

$$\omega(\frac{1}{M_n}, f)_{H_p} \le \sum_{i=[n/2]+1}^{\infty} \frac{1}{M_{2i}^{1/p-1}} = O\left(\frac{1}{M_n^{1/p-1}}\right),$$

where $[n/2]$ denotes the integer part of $n/2$.

Next, it is easy to show that

$$(5.9) \qquad \widehat{f}(j) = \begin{cases} 1, & \text{if } \ j \in \{M_{2i}, \dots, M_{2i+1} - 1\}, \ i = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{if } \ j \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} \{M_{2i}, \dots, M_{2i+1} - 1\}. \end{cases}$$

Hence, using (5.9) we can write

$$\begin{aligned} & \limsup_{k\to\infty} \|f - S_{M_{2k+1}-1}(f)\|_{L_{p,\infty}(G_m)} \\ \ge \ & \limsup_{k\to\infty} \left(\|w_{M_{2k+1}-1}\|_{L_{p,\infty}(G_m)} - \Big\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(D_{M_{2i+1}} - D_{M_{2i}}\right) \Big\|_{L_{p,\infty}(G_m)} \right) \\ \ge \ & \limsup_{k\to\infty} \left(1 - c/M_{2k}^{1/p-1}\right) c > 0. \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 3.3.

Proof of Theorem 3.4. The proof of assertion a) is similar to that of part a) of Theorem 3, and is omitted. So, we prove only part b). To this end we set

$$a_i(x) = D_{M_{2M_i+1}}(x) - D_{M_{2M_i}}(x)$$

and

$$f_A(x) = \sum_{i=1}^{A} \frac{a_i(x)}{M_i}.$$

Taking into account that

$$S_{M_A} a_k(x) = \begin{cases} a_k(x), & 2M_k \le A, \\ 0, & 2M_k > A, \end{cases}$$

and

$$\operatorname{supp}(a_k) = I_{2M_k}, \quad \int_{I_{2M_k}} a_k d\mu = 0, \quad \|a_k\|_\infty \le M_{2M_k} = \mu(\operatorname{supp} a_k),$$

we can apply Theorem W to conclude that $f \in H_1$.

Next, it is easy to show that

$$\omega(\frac{1}{M_n}, f)_{H_1(G_m)} \le \sum_{i=[\lg n/2]}^{\infty} \frac{1}{M_i} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

where $[\lg n/2]$ denotes the integer part of $\lg n/2$. By simple calculation we get

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} \frac{1}{M_{2i}}, & \text{if } j \in \{M_{2M_i}, ..., M_{2M_i+1} - 1\}, \ i = 0, 1, ... \\ 0, & \text{if } j \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} \{M_{2M_i}, ..., M_{2M_i+1} - 1\}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Finally, combining (5.6) and (5.10) we obtain

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} \|f - S_{qM_k}(f)\|_1 \\ \ge\ &\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{M_{2k}} \|D_{qM_k}\|_1 - \frac{1}{M_{2k}} \|D_{M_{2M_k+1}}\|_1 - \| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{D_{M_{2M_i+1}} - D_{M_{2M_i}}}{M_{2i}} \|_1 \right) \\ \ge\ &\limsup_{k\to\infty} \left(c - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{M_{2i}} - \frac{1}{M_{2k}} \right) \ge c > 0, \end{aligned}$$

and the result follows. Theorem 3.4 is proved.

REFERENCES

[1] G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzafary and A. I. Rubinshtein, Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups [in Russian], Baku, Ehim (1981).

[2] I. Blahota, "Approximation by Vilenkin-Fourier sums in $L_p(G_m)$", Acta Acad. Paed. Nyiregyhaziensis, **13**, 35 – 39 (1992).

[3] N. I. Fine, "On Walsh function", Trans. Amer. Math. Soc., **65**, 372 – 414 (1949).

[4] S. Fridli, "Approximation by Vilenkin-Fourier series", Acta Math. Hungarica, 47(1-2), 33 – 44 (1986).

[5] G. Gát, "Inverstigations of certain operators with respect to the Vilenkin sistem", Acta Math. Hung., **61**, 131 – 149 (1993).

[6] G. Gát, "Best approximation by Vilenkin-Like systems", Acta Acad. Paed. Nyiregyhaziensis, **17**, 161 – 169 (2001).

[7] U. Goginava, G. Tkebuchava, "Convergence of subsequence of partial sums and logarithmic means of Walsh-Fourier series", Acta Sci. Math (Szeged), **72**, 159 – 177 (2006).

[8] U. Goginava, "On Uniform convergence of Walsh-Fourier series", Acta Math. Hungar., **93**, no. 1-2, 59 – 70 (2001).

[9] U. Goginava, "On approximation properties of partial sums of Walsh-Fourier series", Acta Sci. Math. (Szeged), **72**, 569 – 579 (2006).

[10] U. Goginava, L. D. Gogoladze, "Strong Convergence of Cubic Partial Sums of Two-Dimensional Walsh-Fourier series", Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010: In memory of Borislav Bojanov. Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 108 – 117 (2012).

[11] L. D. Gogoladze, "On the strong summability of Fourier series", Bull of Acad. Scie. Georgian SSR, **52**, no. 2, 287 – 292 (1968).

[12] B. I. Golubov, A. V. Efimov and V. A. Skvortsov, Walsh Series and Transforms [in Russian], Nauka, Moscow (1987), English transl, Mathematics and its Applications (Soviet Series), 64, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1991).
[13] N. V. Guliev, "Approximation to continuous functions by Walsh-Fourier series", Analisys Math. 6, 269 – 280 (1980).
[14] P. Simon, "Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series", Acta Math. Hung., 49, no. 1-2, 425 – 431 (1987).
[15] P. Simon, "Strong convergence Theorem for Vilenkin-Fourier Series", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 245, 52 – 68 (2000).
[16] B. Smith, "A strong convergence theorem for $H_1(T)$", in Lecture Notes in Math., 995, Springer, Berlin, 169 – 173 (1994).
[17] G. Tephnadze, "A note on the Vilenkin-Fourier coefficients", Georgian Mathematical Journal, (to appear).
[18] G. Tephnadze, "A note on the Fourier coefficients and partial sums of Vilenkin-Fourier series", Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis (AMAPN), (to appear).
[19] G. Tephnadze, "Strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series", Ukrainian Mathematical Journal (UMJ), (to appear).
[20] N. Ya. Vilenkin, "A class of complete ortonormal systems", Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat., 11, 363 – 400 (1947).
[21] F. Weisz, Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1994).
[22] F. Weisz, "Hardy spaces and Cesсro means of two-dimensional Fourier series", Bolyai Soc. math. Studies, 353 – 367 (1996).
[23] F. Weisz, "Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series" Stud. Math., 117, no. 2, 173 – 194 (1996).
[24] F. Weisz, "Hardy spaces and Cescro means of two-dimensional Fourier series", Bolyai Soc. math. Studies, 353 – 367 (1996).

Поступила 12 декабря 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 73-80.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕПРИВОДИМОСТИ АЛГЕБРЫ $C^*_\varphi(X)$

С. А. ГРИГОРЯН, А. Ю. КУЗНЕЦОВА, Е. В. ПАТРИН

Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия[1]
Казанский федеральный университет, институт Физики, Казань, Россия.
E-mails: *gsuren@inbox.ru*; *alla_kuznetsova@rambler.ru*; *evgeniipatrin@mail.ru*

Аннотация. В работе приводится критерий неприводимости C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$ на гильбертовом пространстве $l^2(X)$, порожденной отображением φ счетного множества X в себя. Данный критерий позволяет строить примеры C^*-алгебр, неприводимых на $l^2(X)$.

MSC2010 numbers: 46L05, 46L55.

Ключевые слова: C^*-алгебра, частичная изометрия, неприводимое представление.

1. Введение

Отображение вложения счетного множества X в себя может, с точностью до канонического изоморфизма, породить только две C^*-алгебры — алгебру Теплица и подалгебру алгебры всех непрерывных функций на единичной окружности. Алгебра Теплица, которая имеет различные приложения в современной математической физике, порождается отображением сдвига $\varphi(n) = n + 1$ на множестве натуральных чисел (или оператором правого сдвига на $l^2(\mathbb{N})$, теорема Кобурна [1, 2]). Существуют различные обобщения алгебры Теплица (см. [3] – [5]) и их приложения (см. [6]– [8]). Отметим, что алгебра Теплица порождается неприводимым представлением бициклической полугруппы (см. [9]).

В работе [14] было начато исследование C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$, порожденной отображением $\varphi : X \longrightarrow X$ счетного множества в себя, которое в общем случае не является вложением. В статьях [14]-[19] был описан ряд свойств этой алгебры, в частности показано, что $C^*_\varphi(X)$ относится к категории ядерных алгебр, обладает нетривиальной AF-подалгеброй, и при условии отсутствия циклических для φ элементов является $\mathbb{Z}$-градуированной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект No 12-01-97016).

В данной статье, продолжая эти исследования, мы приводим критерий неприводимости "естественного"представления $C^*_\varphi(X)$ на $l^2(X)$.

2. Необходимые сведения

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ отображение счетного множества X в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. Мы предполагаем, что в X нет *φ-циклических* элементов, т.е. $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbf{N}$ и $x \in X$. Также будем полагать, что граф (X, φ) с вершинами в точках множества X и ребрами $(x, \varphi(x))$ является связным.

На гильбертовом пространстве $l^2(X)$ с естественным базисом $\{e_x\}_{x\in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), отображение φ индуцирует оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Если $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$, но $\sup\limits_x \operatorname{card}\varphi^{-1}[x] = \infty$, то оператор T_φ допускает замыкание и является всюду плотно определенным ([17]). В этом случае он представим в виде счетной суммы операторов частичной изометрии,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m + \cdots ,$$

где либо $U_k e_x = 0$, либо $U_k e_x = \frac{1}{\sqrt{k}}(\sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} e_y)$ при $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] = k$. Заметим, что $U_i U_j^* = U_j^* U_i = 0$ если $i \neq j$.

Обозначим через $C^*_\varphi(X)$ равномерно замкнутую C^*-подалгебру алгебры $B(l^2(X))$, порожденную операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Порождающее семейство частичных изометрий удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \cdots + U_m^*U_m + \cdots = P, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \cdots + U_mU_m^* + \cdots = Q, \end{cases}$$

где операторы P и Q — проекторы, определенные заданным на множестве отображением (см.[15, 17, 18]).

Таким образом, $C^*_\varphi(X)$ можно в некотором смысле отнести к C^*-алгебрам, порожденным изометриями, удовлетворяющими определенным соотношениям. Исследование таких алгебр начались с работы Кунца [10] (см., также [11]- [13]).

3. Мономы

Операторы частичной изометрии из множеств $\{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ и $\{U_k^*\}_{k\in\mathbf{N}}$ будем называть *элементарными мономами*, конечное произведение элементарных мономов — *мономом*. По определению положим $\operatorname{ind} U_k = 1$ и $\operatorname{ind} U_k^* = -1$. Индексом ненулевого монома V ($\operatorname{ind} V$) будем называть число, равное сумме индексов элементарных мономов, произведение которых равно V. Индекс нулевого монома положим равным нулю. При отсутствии циклических элементов индекс монома не зависит от его представления в виде произведения элементарных мономов (см. [16, 18]). Моном V назовем *правым делителем* монома W, если $W = V'V$, где V' — некоторый моном. Моном W будем называть *положительно определенным* относительно данного представления (далее положительно определенным) если индекс любого его правого делителя неотрицателен. Если W положительно определен относительно $\prod_{k=1}^{m} U'_{j_k}$, где $U'_{j_k} \in \{U_{j_k} \cup U^*_{j_k}\}$, то $\operatorname{ind}\left(\prod_{k=l}^{m} U'_{j_k}\right) \geq 0$ для любого $l \geq 1$.

Лемма 3.1. *Пусть W положительно определенный моном нулевого индекса. Тогда W — положительный оператор с конечным спектром и множество $\{e_x\}_{x\in X}$ является подмножеством собственных векторов оператора W.*

Приведем набросок доказательства. Заметим, что отображение φ индуцирует на множестве X частичный порядок, а именно $x \prec y$, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$. Распространим этот порядок на базис $\{e_x\}_{x\in X}$, полагая $e_x \prec e_y$ если $\varphi^n(y) = x$.

Пусть $W = \prod_{k=1}^{m} U'_{j_k}$, $\operatorname{ind}\left(\prod_{k=1}^{m} U'_{j_k}\right) = 0$, и пусть $We_x \neq 0$. Рассмотрим его правые делители $V_l = \prod_{k=l}^{m} U'_{j_k}$. По условию индекс любого V_l неотрицателен, и $V_m = U_{j_m}$. Если $(U_{j_m} e_x, e_y) \neq 0$, то $e_x \prec e_y$. Далее рассмотрим $V_{m-1} = U'_{j_{m-1}} U_{j_m}$ и такой элемент e_z, что $(U'_{j_{m-1}} U_{j_m} e_x, e_z) \neq 0$. Индекс правого делителя V_{m-1} либо 0, либо 2. В первом случае получаем $e_z = e_x$, во втором $e_x \prec e_y \prec e_z$. Продолжая таким образом, приходим к выводу, что для любого правого делителя V_l, $l \leq m$, из условия $(V_l e_x, e_z) \neq 0$ следует, что $e_x \preceq e_z$, причем равенство выполняется для делителя индекса 0. Поскольку $W = V_1$ имеет нулевой индекс и $(We_x, e_x) \neq 0$, то $We_x = \lambda_x e_x$. Из построения операторов $\{U_k\}$ все $\lambda_x > 0$. В статье [18] (лемма 2.5) было доказано, что множество матричных коэффициентов $\{(We_x, e_y)\}_{x,y\in X}$ конечно. Отсюда $W = \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \alpha_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \alpha_n \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ — попарно ортогональные проекторы, для которых $\{e_x\}_{x\in X}$ являются собственными векторами с собственными значениями 0 или 1. □

Пусть $\operatorname{Mon}(X)$ — множество всех мономов. Если предположить, что нулевой моном W_0 ($W_0 e_x = 0$) принадлежит множеству $\operatorname{Mon}(X)$, то $\operatorname{Mon}(X)$ есть полугруппа относительно произведения. Пусть $\mathrm{Mon}^+(X)$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Mon}(X)$, состоящая из W_0 и всех положительно определенных мономов. Также введем $\mathrm{Mon}_0(X)$ — подполугруппу мономов нулевого индекса. Пусть $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Mon}^+(X)$, состоящая из W_0 и всех положительных мономов индекса ноль, а $\mathfrak{U}$ — подполугруппа $\mathrm{Mon}^+(X)$, состоящая из мономов, в представлении которых участвуют только элементарные мономы из $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Заметим, что $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ является коммутативной подполугруппой полугруппы мономов $\mathrm{Mon}(X)$.

Лемма 3.2. *Пусть e_x и e_y — такие элементы базиса $\{e_x\}_{x\in X}$, что для любого монома V из $\mathfrak{U}$ и любого W из $\mathrm{Mon}^+(X)$ выполняется равенство*

$$(WV^*e_x, V^*e_x) = (WV^*e_y, V^*e_y).$$

Тогда это же равенство выполняется и для любого V из $\mathfrak{U}$ и любого W из $\mathrm{Mon}(X)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по длине монома. Заметим, что $W \in \mathrm{Mon}_0^+(X)$, в противном случае тождество выполняется автоматически.

Проверим, что лемма верна для мономов нулевого индекса длины два. Таких не равных нулю мономов только два: $W_1 = U_j^*U_j$ и $W_2 = U_jU_j^*$. По условию леммы для $W_1 \in \mathrm{Mon}_\varphi^+(X)$ выполнено $(W_1V^*e_x, V^*e_x) = (W_1V^*e_y, V^*e_y)$. Отсюда

$$\begin{aligned}(W_2V^*e_x, V^*e_x) &= (U_jU_j^*V^*e_x, V^*e_x) = (U_jU_j^*U_jU_j^*V^*e_x, V^*e_x) = \\ &= (U_j^*U_jU_j^*V^*e_x, U_j^*V^*e_x) = (U_j^*U_jV'^*e_x, V'^*e_x) = \\ &= (U_j^*U_jV'^*e_y, V'^*e_y) = (W_2V^*e_y, V^*e_y).\end{aligned}$$

Предположим, что лемма верна для мономов индекса ноль длины $2n$. Последовательно перебирая все варианты, а именно: моном длины $2n+2$ имеет хотя бы один правый делитель положительного индекса (заканчивается на U_j); не является положительно определенным (заканчивается на U_j^*), при этом начинается на U_k; не является положительно определенным и начинается на U_k^*; можно показать, используя предыдущую лемму, что доказываемое утверждение верно и для мономов длины $2n+2$. Лемма доказана.

4. Основные результаты

Приведем основные результаты нашей работы. Согласно лемме 3.1, каждый моном W из $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ диагонализуется относительно базиса $\{e_x\}_{x\in X}$ и представляется в виде конечной комбинации проекторов:

$$W = \sum_{i=1}^{n(W)} \alpha_i P_i^{(W)}, \quad P_i^{(W)} P_j^{(W)} = P_j^{(W)} P_i^{(W)}.$$

Таким образом, полугруппа мономов $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ порождает семейство проекторов

$$\bigcup_{W\in \mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}.$$

Теорема 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*
1) $C^*_\varphi(X)$ *неприводима на* $l^2(X)$;
2) из равенства $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$ *для любого* $W \in \mathrm{Mon}(X)$ *следует* $e_x = e_y$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) — доказательство очевидно.
2) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем f из $l^2(X)$. Пусть $(f, e_{x_0}) \neq 0$. Сначала покажем, что $e_{x_0} \in \overline{C^*_\varphi(X)f}$. Для простоты положим, что $f = e_{x_0} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{x_i}$. Пусть $\Delta_+(x_0)$ — множество проекторов P из $\bigcup\limits_{W\in \mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}$, для которых

$$Pe_{x_0} = e_{x_0} \quad \text{и} \quad Pe_{x_i} = \begin{cases} 0; \\ e_{x_i}. \end{cases}$$

С помощью этого семейства проекторов получим новую функцию $f_0 = \Big(\prod\limits_{P\in\Delta_+(x_0)} P\Big) f$. Заметим, что $\prod\limits_{P\in\Delta_+(x_0)} P \in B(l^2(X))$ может и не принадлежать $C^*_\varphi(X)$, но

$$\Big(\prod_{P\in\Delta_+(x_0)} P\Big) f \in \overline{C^*_\varphi(X)f}.$$

Очевидно, что

$$f_0 = e_{x_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' e_{x_i}, \quad \text{где} \quad \alpha_i' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i. \end{cases}$$

Покажем, что семейства проекторов $\Delta_+(x_i)$ для всех e_{x_i}, участвующих в разложении f_0, совпадают. Действительно, допустим, что e_{x_1} участвует в разложении и $\Delta_+(x_1) \supset \Delta_+(x_0)$. Тогда найдется такой проектор $P \in \Delta_+(x_1)$, что $Pe_{x_1} = e_{x_1}$, а $Pe_{x_0} = 0$. Но тогда $(I - P) \in \Delta_+(x_0)$. С другой стороны $(I - P)e_{x_1} = 0$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, для оставшихся в разложении базисных векторов все $\Delta_+(x_i)$ совпадают.

Тот элемент из семейства $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которого $U_k^* e_y \neq 0$ обозначим через U_y^*. Спустимся на один "этаж". Рассмотрим функцию $g = U_{x_0}^* f_0$. Очевидно, что

$$g = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]}}\Big(e_{\varphi(x_0)} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i'' e_{\varphi(x_i)}\Big), \quad \text{где} \quad \alpha_i'' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i'. \end{cases}$$

После применения U_{x_0} получаем

$$U_{x_0} g = \frac{1}{\operatorname{card}\varphi^{-1}(\varphi(x_0))}\Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]} e_x + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i''' \sum_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(x_i)]} e_x\Big), \quad \text{где} \quad \alpha_i''' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i''. \end{cases}$$

К получившейся функции опять применим проектора из $\Delta_+(x_0)$. После умножения на общий множитель $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$ получаем функцию

$$f_1 = e_{x_0} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i''' e_{x_i}, \quad \text{где} \quad \alpha_i''' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i''. \end{cases}$$

В разложении f_1 по сравнению с f_0 остались такие базисные векторы e_{x_i}, у которых $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$.

Далее рассмотрим функции (спустимся на два "этажа")

$$g_1 = U_{\varphi(x_0)}^*\left(\prod_{P\in\Delta_+(\varphi(x_0))} P\right) U_{x_0}^* f_1$$

и (поднимемся на два "этажа" и умножим на $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]\,\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi^2(x_0)]$)

$$f_2 = \left(\prod_{P\in\Delta_+(x_0)} P\right) U_{x_0}\left(\prod_{P\in\Delta_+(\varphi(x_0))} P\right) U_{\varphi(x_0)} g_1.$$

В разложении f_2 по сравнению с f_0 остались те базисные векторы, у которых совпадают не только $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$, но и $\operatorname{card}\varphi^{-2}[\varphi^2(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-2}[\varphi^2(x_0)]$.

Продолжая эту процедуру, получим сходящуюся последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\overline{C_\varphi^*(X)f}$. Пусть $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Очевидно, что по построению $(f', e_{x_0}) = (f, e_{x_0})$. Предположим, что найдется такой e_x, что $(f', e_x) \neq 0$. Тогда, по построению, $(f', e_x) = (f, e_x)$. Это значит, что для любого проектора $P \in \bigcup\limits_{W\in\mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}$ выполняется

$$(PV^* e_{x_0}, V^* e_{x_0}) = (PV^* e_x, V^* e_x),$$

где V из $\mathfrak{U}$. Отсюда, согласно лемме 3.2, для любого монома W имеем $(We_{x_0}, e_{x_0}) = (We_x, e_x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f' = e_{x_0}$.

Для завершения доказательства заметим, что для любых двух точек $x, y \in X$ найдутся такие числа m и n, что $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$. Теорема 4.1 доказана.

Данный критерий позволяет строить примеры неприводимых алгебр $C^*_\varphi(X)$. Кроме того, он позволяет получить интересные примеры неприводимых представлений $C^*_\varphi(X)$.

С помощью сформулированного в теореме 4.1 условия на базисных векторах можно ввести отношение эквивалентности на базисных элементах. Базисные элементы e_x и e_y эквивалентны ($e_x \sim e_y$), если для любого $W \in \mathrm{Mon}(X)$ выполняется $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$. Очевидно, что неприводимость $C^*_\varphi(X)$ означает, что все базисные элементы эквивалентны только самим себе.

Приведем без доказательства один результат, касающийся приводимых $C^*_\varphi(X)$.

Теорема 4.2. *Пусть число классов эквивалентности базисных элементов конечно. Тогда*

$$C^*_\varphi(X) \simeq C(S^1, B) \oplus M,$$

где B — некоторая конечномерная алгебра, а M — прямая сумма конечного числа матричных алгебр, размерности которых не превышают число классов эквивалентности.

Следствие 4.1. *Пусть число классов эквивалентности базисных элементов конечно, причем для любых двух $e_x \sim e_y$ не существует такого элемента $z \in X$ и $k \in \mathbf{N}$, что соответствующие элементы x и y лежат в k-ом прообразе элемента z. Тогда $C^*_\varphi(X) \simeq C(S^1, B)$, где B — некоторая конечномерная алгебра.*

Abstract. The paper gives a criterion of irreducibility of C^*-algebra $C^*_\varphi(X)$ in the Hilbert space $l^2(X)$, generated by the map φ of a countable set X to itself. The criterion makes it possible to construct examples of C^*-algebras, irreducible on $l^2(X)$.

Список литературы

[1] L. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry I*, Bull. Am. Math. Soc. 73 722–726 (1967).

[2] L. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry II*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 211–217 (1969).

[3] M. A. Aukhadiev, V. H. Tepoyan, *Isometric representations of totally ordered semigroups* , Lobachevskii J. of Math. 33(3) 239–243 (2012).

[4] S. A. Grigoryan, V. H. Tepoyan, *On isometric representations of the perforated semigroup*, Lobachevskii J. of Math. 34(1) 85–88 (2013).

[5] В. А. Тепоян, *Об изометрических представлениях полугруппы* $\mathbb{Z}_+\backslash\{1\}$, Известия НАН Армении, серия Математика, 48(2) 51–57 (2013).

[6] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigoryan, E. V. Lipacheva, *A compact quantum semigroup generated by an isometry*, Russian Mathematics (Iz VUZ) 55 (10) 78–81 (2011).

[7] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, *Infinite-dimensional compact quantum semigroup*, Lobachevskii J. of Math. 32 (4) 304–316 (2011).

[8] X. Li, *Semigroups C^*-algebras and amenability of semigroups*, arXiv:1105.5539v2 [math.OA] 22 Feb 2012.

[9] В. А. Арзуманян, *$*$-представления инверсных полугрупп*, Известия Академии Наук Армянской ССР, серия Математика, 13(2) 107–113 (1978).

[10] J. Cuntz, *On the simple C^*-algebras generated by isometries*, Comn. Math. Phys. 57 173–185 (1977).

[11] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. 56(3) 251–268 (1980).

[12] A. Kumjian, *On certain Cuntz-Pimsner algebras*, arXiv:math.OA/0108194 v1 (2001).

[13] V. Deaconu, A. Kumjian, and P. Muhly, *Cohomology of topological graphs and Cuntz-Pimsner algebras*, arXiv:math/9901094v1[math.OA](1999).

[14] S. A. Grigoryan, A. Kuznetsova, *C^*-algebras generated by mappings*, Lobachevskii J. of Math. 29(1) 5–8 (2008).

[15] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, *C^*-алгебры, порожденные отображениями*, Мат. Заметки, 87(5) 694-703 (2010).

[16] S. A. Grigoryan, A. Yu. Kuznetsova, *AF-подалгебры C^*-алгебры, порожденной отображением* , Известия вузов, серия Математика, 54(3) 82–87 (2010).

[17] А. Ю. Кузнецова, *Об одном класе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий*, Известия НАН Армении, серия Математика, 45(6) 51-62 (2010).

[18] S. A. Grigoryan, A. Yu. Kuznetsova, *On a class of nuclear C^*-algebras*, An Operator Theory Summer, Proceedings of the 23rd intenational conference on operator theory (Timisoara, Romania) 39–50 (2010).

[19] А. Ю. Кузнецова, Е. В. Патрин, *Об одном классе C^*-алгебр, порожденных частичными изометриями и мультипликаторами*, Известия вузов, серия Математика, 56(6) 44–55 (2012).

Поступила 11 ноября 2013

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 49, номер 1, 2014

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 49, No. 1, 2014

Contents

Cover–to–cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 48, No. 6, 2013

CONTENTS