ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2013

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 3-14.

SOME PROPERTIES OF CERTAIN CLASSES OF p-VALENT FUNCTIONS DEFINED BY THE HADAMARD PRODUCT

M. K. AOUF AND T. M. SEOUDY

Mansoura University, Fayoum University, Egypt

E-mails: *mkaoufl27@yahoo.com; tms00@fayoum.edu.eg*

Abstract. In this paper we obtain sandwich type theorems, inclusion relationships, convolution properties and coefficient estimates of certain classes of p-valent analytic functions defined by a convolution. Several other new results are also obtained.

MSC2010 numbers: 30C45.

Keywords: p-valent functions, subordination, superordination, linear operator, Hadamard product, convolution.

1. Introduction

Let H be the class of functions analytic in the open unit disk $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and let $H[a, n]$ be the subclass of H consisting of function of the form:

$$f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots \ (z \in U).$$

Let $A(p)$ denote the class of all analytic functions of the form:

$$f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k} \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\};\ z \in U). \tag{1.1}$$

We set $A(1) = A$. If $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in U functions, we say that $f(z)$ is subordinate to $g(z)$, or equivalently, $g(z)$ is superordinate to $f(z)$, and write $f(z) \prec g(z)$ $(z \in U)$, if there exists a Schwarz function $\omega(z)$, which is analytic in U with $\omega(0) = 0$ and $|\omega(z)| < 1$ such that $f(z) = g(\omega(z))$ $(z \in U)$. It is known that

$$f(z) \prec g(z) \implies f(0) = g(0) \quad \text{and} \quad f(U) \subset g(U).$$

Furthermore, if the function $g(z)$ is univalent in U, then we have the following equivalence (see [5], [18] and [19]): $f(z) \prec g(z) \Longleftrightarrow f(0) = g(0)$ and $f(U) \subset g(U)$. For functions $f(z)$ given by (1.1) and

$$g(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} b_{p+k} z^{p+k} \quad (p \in \mathbb{N}; z \in U), \tag{1.2}$$

the Hadamard product or convolution of $f(z)$ and $g(z)$ is defined by

$$(f * g)(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} b_{p+k} z^{p+k} = (g * f)(z).$$

For functions $f, g \in A(p)$, we define the linear operator $D^n_{\lambda,p} : A(p) \to A(p)$ $(\lambda \geq 0, p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ by: $D^0_{\lambda,p}(f * g)(z) = (f * g)(z)$, and

$$D^1_{\lambda,p}(f * g)(z) = D_{\lambda,p}(f * g)(z) = (1-\lambda)(f * g)(z) + \frac{\lambda z}{p}\left((f * g)(z)\right)',$$

and (in general)

$$\begin{aligned} D^n_{\lambda,p}(f * g)(z) &= D_{\lambda,p}(D^{n-1}_{\lambda,p}(f * g)(z)) \\ &= z^p + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}z^{k+p} \quad (\lambda \geq 0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

From (1.3), we can easily deduce that

$$\frac{\lambda}{p} z\left(D^n_{\lambda,p}(f * g)(z)\right)' = D^{n+1}_{\lambda,p}(f * g)(z) - (1-\lambda)D^n_{\lambda,p}(f * g)(z) \; (\lambda > 0). \tag{1.4}$$

The linear operator $D^n_{\lambda,1}(f*g)(z) = D^n_{\lambda}(f*g)(z)$ was introduced by Aouf and Seoudy in [3]. Observe that the operator $D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)$ reduces to known operators for specific choices of g, n and λ. Some of them follows.

(*i*) For $\lambda = 1$ and $g(z) = \dfrac{z^p}{1-z}$ we have $D^n_{p,1}(f * g)(z) = D^n_p f(z)$, where D^n_p is the $p-$valent Salagean operator introduced and studied by Kamali and Orhan.

(*ii*) For $n = 0$ and $g(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p+l+\lambda k}{p+l}\right]^s z^k$ $(\lambda > 0; p \in; l, s \in \mathbb{N}_0)$, we get

$$D^0_{\lambda,p}(f * g)(z) = (f * g)(z) = I^s_p(\lambda, l)f(z),$$

where $I^s_p(\lambda, l)$ is the generalized multiplier transformation, which was introduced by Cătas [7]. Notice that the operator $I^s_p(\lambda, l)$ contains, as special cases, the multiplier transformation (see [8]), the generalized Salăgeăn operator introduced and studied by Al-Oboudi [1], which in turn, contains as special case the Salăgeăn operator ([24]).

(*iii*) For $n = 0$ and

$$g(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_l)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_s)_k (1)_k} z^{k+p},$$

where $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $(i = 1, 2, \dots l)$, $(j = 1, 2, \dots s)$, $l \leq s+1, l, s \in \mathbb{N}_0$, we obtain

$$D^0_{\lambda,p}(f * g)(z) = (f * g)(z) = H_{p,l,s}(\alpha_1)f(z),$$

where $H_{p,l,s}(\alpha_1)$ is the Dziok-Srivastava operator introduced and studied in [9] (see also [10] and [11]). The operator $H_{p,l,s}(\alpha_1)$, in turn contains a number of other interesting operators such as, the Hohlov linear operator (see [12]), the Carlson-Shaffer linear operator (see [6] and [23]), the Ruscheweyh derivative operator (see [22]), the Bernardi-Libera-Livingston operator (see [4], [14] and [15]), and the Owa-Srivastava fractional derivative operator (see [20]).

Using the linear operator $D^n_{\lambda,p}(f * g)$, we define a new subclass $\mathcal{C}^n_{\lambda,p}(f, g; \alpha, A, B)$ of the class $A(p)$ as follows:

Definition 1.1. Let $g \in A(p)$ be defined by (1.3). A function $f \in A(p)$ is said to be in the class $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ if it satisfies the following subordination condition:

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$$

$$(p\in\mathbb{N};n\in\mathbb{N}_0;\lambda>0;\alpha\in\mathbb{C};-1\le B<A\le 1;z\in U).$$

Let $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;0,A,B)=\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;A,B)$, and $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,1-2\beta,-1)=\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,\beta)$, where $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,\beta)$ denotes the class of functions from $A(p)$ satisfying

$$\Re\left\{(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\right\}>\beta,$$

$p\in\mathbb{N};n\in\mathbb{N}_0;\lambda>0;\alpha\in\mathbb{C};0\le\beta<1;z\in U$. We set $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;0,\beta)=\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\beta)$.

In the present paper we establish subordination and superordination properties, convolution properties, inclusion relationships and embedding properties for the class $\mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$. Several other new results are also obtained.

2. Preliminary results

In order to state and prove our main results, we need the following definition and a number of known lemmas.

Definition 2.1. [18]. *Define Q as the set of all functions $f(z)$ that are analytic and injective on $\bar{U}\backslash E(f)$, where*

$$E(f)=\left\{\zeta\in\partial U:\lim_{z\to\zeta}f(z)=\infty\right\},$$

and satisfy $f'(\zeta)\neq 0$ for $\zeta\in\bar{U}\backslash E(f)$.

Lemma 2.1. [19]. *Let $h(z)$ be an analytic and convex (univalent) function in U with $h(0)=1$. Suppose also that the function $\phi(z)$ given by*

(2.1) $$\phi(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$$

is analytic in U. If $\phi(z)+\frac{z\phi'(z)}{\gamma}\prec h(z)$ $(\Re(\gamma)>0;\gamma\neq 0)$, then

$$\phi(z)\prec\psi(z)=\gamma z^{-\gamma}\int_0^z h(t)t^{\gamma-1}\,dt\prec h(z),$$

and $\psi(z)$ is the best dominant.

Lemma 2.2. [25]. *Let $q(z)$ be a convex univalent function in U and let $\sigma\in\mathbb{C},\eta\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ with*

$$\Re\left(1+\frac{zq''(z)}{q'(z)}\right)>\max\left\{0,-\Re\left(\frac{\sigma}{\eta}\right)\right\}.$$

If the function $\phi(z)$ is analytic in U and $\sigma\phi(z)+\eta z\phi'(z)\prec\sigma q(z)+\eta zq'(z)$, then $\phi(z)\prec q(z)$ and $q(z)$ is the best dominant.

Lemma 2.3. [18]. *Let $q(z)$ be a convex univalent function in U and $\kappa \in \mathbb{C}$. Further assume that $\Re(\bar{\kappa}) > 0$. If $\phi(z) \in H[q(0),1] \cap Q$, and $\phi(z) + \kappa z\phi'(z)$ is univalent in U, then $q(z) + \kappa zq'(z) \prec \phi(z) + \kappa z\phi'(z)$ implies $q(z) \prec \phi(z)$ and $q(z)$ is the best subdominant.*

Lemma 2.4. [16]. *Let $\mathcal{F}$ be an analytic and convex function in U. If $f, g \in A$ and $f, g \prec \mathcal{F}$ then $\lambda f + (1-\lambda) g \prec \mathcal{F}$ $(0 \leq \lambda < 1)$.*

Lemma 2.5. [21]. *Let $f(z) = 1 + \sum_{k=1} a_k z^k$ be analytic in U and $g(z) = 1 + \sum_{k=1} b_k z^k$ be analytic and convex in U. If $f \prec g$, then $|a_k| \leq |b_1|$ $(k \in \mathbb{N})$.*

The next lemma contains three well-known identities for the Gauss hypergeometric function ${}_2F_1$ defined by

$$(2.2)\quad {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} z^k \quad \left(a,b,c \in \mathbb{C}; c \notin Z_0^- = \{0,-1,-2,\ldots\}; z \in U\right).$$

Notice that the series in (2.2) converges absolutely for $z \in U$, and hence ${}_2F_1$ represents an analytic function in U (for details we refer [26, Chapter 14]).

Lemma 2.6. [26]. For real or complex parameters a, b, and c $(c \notin Z_0^-)$, the following identities hold $(\Re(c) > \Re(b) > 0)$:

$$(2.3)\qquad \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\ {}_2F_1(a,b;c;z);$$

$$(2.4)\qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right);$$

$$(2.5)\qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z)\ .$$

3. Main results

In what follows, unless otherwise stated, we assume that $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $-1 \leq B < A \leq 1$, $\lambda > 0$ and $g(z)$ is the function given by (1.2).

Our first result concerns subordination property.

Theorem 3.1. *Let $f \in \mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ with $\Re\{\alpha\} > 0$. Then*

$$(3.1)\qquad \frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \psi(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz},$$

where the function $\psi(z)$ given by

$$(3.2)\quad \psi(z) = \begin{cases} \frac{A}{B} + \left(1-\frac{A}{B}\right)(1+Bz)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\frac{p}{\alpha\lambda}+1;\frac{Bz}{Bz+1}\right), & if\ B \neq 0, \\ 1 + \frac{p}{\alpha\lambda+p}Az, & if\ B = 0. \end{cases}$$

is the best dominant of (3.1). Furthermore,

$$\Re\left\{\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\right\} > \eta \quad (z \in U), \tag{3.3}$$

where $\eta = \begin{cases} \frac{A}{B} + \left(1-\frac{A}{B}\right)(1-B)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\frac{p}{\alpha\lambda}+1;\frac{B}{B-1}\right), & if\ B \neq 0, \\ 1 - \frac{p}{\alpha\lambda+p}A, & if\ B = 0. \end{cases}$

The estimate (3.3) *is the best possible.*

Proof. Consider the function

$$\phi(z) = \frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \quad (z \in U), \tag{3.4}$$

and observe that $\phi(z)$ is of the form (2.1) and is analytic in U. Differentiating (3.5) with respect to z and using the identity (1.5), we get

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} + \alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} = \phi(z) + \frac{\alpha\lambda}{p} z\phi'(z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \quad (z \in U).$$

Now, using Lemma 2.1 for $\gamma = \frac{\alpha\lambda}{p}$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} &\prec \psi(z) = \frac{p}{\alpha\lambda} z^{-\frac{p}{\alpha\lambda}} \int_0^z \frac{1+At}{1+Bt} t^{\frac{p}{\alpha\lambda}-1} dt \\ &= \begin{cases} \frac{A}{B} + \left(1-\frac{A}{B}\right)(1+Bz)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\frac{p}{\alpha\lambda}+1;\frac{Bz}{Bz+1}\right), & if B \neq 0, \\ 1 + \frac{p}{\alpha\lambda+p}Az, & if B = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

where we have made a change of variable followed by the use of identities (2.3) - (2.5) with $a = 1$, $b = \frac{p}{\alpha\lambda}$ and $c = b+1$. This proves the assertion (3.1).

Next, in order to prove (3.3), it is enough to show that $\inf_{|z|<1}\{\Re(\psi(z))\} = \psi(-1)$. Indeed, we have for $|z| \leq r < 1$,

$$\Re\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right) \geq \frac{1-Ar}{1-Br}.$$

Setting $G(z,s) = \frac{1+Asz}{1+Bsz}$ and $dv(s) = \frac{p}{\alpha\lambda} s^{-\frac{p}{\alpha\lambda}} ds$ $(0 \leq s \leq 1)$, which is a positive measure on $[0,1]$,we get $\psi(z) = \int\limits_0^1 G(z,s)\,dv(s)$, so that

$$\Re\{\psi(z)\} \geq \int\limits_0^1 \frac{1-Asr}{1-Bsr} dv(s) = \psi(-r) \quad (|z| \leq r < 1).$$

Letting $r \to 1^-$ in the last inequality, we obtain the assertion (3.3).

Finally, the estimate (3.3) is the best possible because $\psi(z)$ is the best dominant of (3.1). Theorem 3.1 is proved.

Taking $\alpha = 1$ in Theorem 3.1, we obtain the following result.

Corollary 3.1. The following inclusion property holds true for the class $C^n_{\lambda,p}(f,g;A,B)$:

$$\mathfrak{C}^{n+1}_{\lambda,p}(f,g,A,B) \subset C^n_{\lambda,p}(f,g;\sigma) \subset \mathfrak{C}^n_{\lambda,p}(f,g;A,B),$$

$$\text{where}\ \sigma=\begin{cases}\frac{A}{B}+\left(1-\frac{A}{B}\right)(1-B)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\frac{p}{\lambda}+1;\frac{B}{B-1}\right), & if\ B\neq 0,\\ 1-\frac{p}{\lambda+p}A, & if\ B=0.\end{cases}$$

The result is best possible.

Taking $A=1-2\beta\,(0\leq\beta<1)$ and $B=-1$ in Corollary 3.1, we obtain the following

Corollary 3.2. The following inclusion holds: $C^{n+1}_{\lambda,p}(f,g;\beta)\subset C^{n}_{\lambda,p}(f,g;\sigma)\subset C^{n}_{\lambda,p}(f,g;\beta)$, where $\sigma=\beta+(1-\beta)\left\{{}_2F_1\left(1,1;\frac{p}{\lambda}+1;\frac{1}{2}\right)-1\right\}$. The result is best possible.

Theorem 3.2. *For $f\in C^{n}_{\lambda,p}(f,g;A,B)$ the function $F_{\delta,p}(f)$* defined by (see [15])

$$F_{\delta,p}(f)(z)=\frac{\delta+p}{z^{\delta}}\int_0^z t^{\delta-1}f(t)\,dt\quad(\delta>-p)\tag{3.5}$$

belongs to the class $C^{n}_{\lambda,p}(f,g;A,B)$ and satisfies

$$\frac{D^{n}_{\lambda,p}(F_{\delta,p}(f)*g)(z)}{z^p}\prec k(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz},$$

where the function $k(z)$ given by

$$k(z)=\begin{cases}\frac{A}{B}+\left(1-\frac{A}{B}\right)(1+Bz)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\delta+p+1;\frac{Bz}{Bz+1}\right), & if B\neq 0,\\ 1+\frac{\delta+p}{\delta+p+1}Az, & if B=0,\end{cases}\tag{3.6}$$

is the best dominant of (3.7). Furthermore,

$$\Re\left\{\frac{D^{n}_{\lambda,p}(F_{\delta,p}(f)*g)(z)}{z^p}\right\}>\chi\quad(z\in U),\tag{3.7}$$

where

$$\chi=\begin{cases}\frac{A}{B}+\left(1-\frac{A}{B}\right)(1-B)^{-1}\ {}_2F_1\left(1,1;\delta+p+1;\frac{B}{B-1}\right), & if\ B\neq 0,\\ 1-\frac{\delta+p}{\delta+p+1}A & if\ B=0.\end{cases}\tag{3.8}$$

The estimate (3.7) is the best possible.

Proof. From (3.5) we have

$$z\left(D^{n}_{\lambda,p}(F_{\delta,p}(f)*g)(z)\right)'=(\delta+p)D^{n}_{\lambda,p}(f*g)(z)-\delta D^{n}_{\lambda,p}(F_{\delta,p}(f)*g)(z).\tag{3.9}$$

We define

$$\phi(z)=\frac{D^{n}_{\lambda,p}(F_{\delta,p}(f)*g)(z)}{z^p}\quad(z\in U),\tag{3.10}$$

and observe that the function $\phi(z)$ is of the form (2.1) and is analytic in U. Differentiating (3.9) with respect to z and using the identity (3.8), we get

$$\frac{D^{n}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}=\phi(z)+\frac{z\phi'(z)}{\delta+p}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}.$$

The rest of the proof is similar to that of Theorem 3.1. Theorem 3.2 is proved.

Theorem 3.3. *If $f\in C^{n}_{\lambda,p}(f,g;\beta)$ $(0\leq\beta<1)$, then $f\in C^{n}_{\lambda,p}(f,g;\alpha,\beta)$* $(0\leq\beta<1,\alpha>0)$ *for $|z|<R$, where*

$$(3.11)\qquad R=\sqrt{1+\left(\frac{\alpha\lambda}{p}\right)^2}-\frac{\alpha\lambda}{p}.$$

The bound R is the best possible.

Proof. Since $f\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\beta)$, we can write $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}=\beta+(1-\beta)\,u(z)\ (z\in U)$. It is easy to see that the function $u(z)$ is of the form (2.1), is analytic and has a positive real part in U. Differentiating (3.7) with respect to z and using (1.4), we obtain

$$(3.12)\quad \frac{1}{1-\beta}\left\{(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}-\beta\right\}=u(z)+\frac{\lambda\alpha}{p}zu'(z).$$

Using the following well-known estimate (see, e.g., [17]):

$$\frac{|zu'(z)|}{\Re\{u(z)\}}\le\frac{2r}{1-r^2}\qquad(|z|=r<1)$$

in view of (3.11) we obtain

$$\Re\left(\frac{1}{1-\beta}\left\{(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}-\beta\right\}\right)$$

$$(3.13)\qquad \ge\ \Re\{u(z)\}\left(1-\frac{2\lambda\alpha r}{p(1-r^2)}\right).$$

It is easy to see that the right-hand side of (3.12) is positive, provided that $r<R$, where R is given by (3.10). In order to show that the bound R is the best possible, we consider the function $f\in A(p)$ defined by

$$\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}=\beta+(1-\beta)\frac{1+z}{1-z}\quad(z\in U).$$

By noting that

$$\frac{1}{1-\beta}\left\{(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}-\beta\right\}=\frac{1+z}{1-z}+\frac{2\lambda\alpha z}{p(1-z)^2}=0$$

for $|z|=R$, we conclude that the bound R is the best possible. Theorem 3.3 is proved.

Theorem 3.4. *Let $q(z)$ be a univalent function in U and $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Suppose also that $q(z)$ satisfies*

$$\Re\left\{1+\frac{zq''(z)}{q'(z)}\right\}>\max\left\{0,-\frac{p}{\lambda}\Re\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\}.$$

If $f\in A(p)$ satisfies the following subordination condition

$$(3.14)\qquad (1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec q(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq'(z),$$

then $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec q(z)$, and $q(z)$ is the best dominant.

Proof. Let the function $\phi(z)$ be defined by (3.5). From (3.13) we find that

$$\phi(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}z\phi'(z)\prec q(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq'(z). \tag{3.15}$$

By using Lemma 2.2 and (3.14), we easily get the assertion of Theorem 3.4.

Taking $q(z)=\frac{1+Az}{1+Bz}$ $(-1\le B<A\le 1)$ in Theorem 3.4, we get the following result.

Corollary 3.3. *Let $\alpha\in\mathbb{C}^*$ and $-1\le B\le A<1$. Suppose also that*

$$\Re\left(\frac{1-Bz}{1+Bz}\right)>\max\left\{0,-\frac{p}{\lambda}\Re\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\}.$$

If $f\in A(p)$ satisfies the following subordination condition:

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}+\frac{\alpha\lambda}{p}\frac{(A-B)z}{(1+Bz)^2},$$

then $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$, and the function $\frac{1+Az}{1+Bz}$ is the best dominant.

Theorem 3.5. *Let $q(z)$ be a convex univalent function in U and $\alpha\in\mathbb{C}$ with $\Re(\alpha)>0$. Also let $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\in H[q(0),1]\cap Q$ and $(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$ be univalent in U. If*

$$q(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq'(z)\prec(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p},$$

then $q(z)\prec\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$, and the function $q(z)$ is the best subdominant.

Proof. Let the function $\phi(z)$ be defined by (3.2). Then

$$q(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq'(z)\prec(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}=\phi(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}z\phi'(z).$$

An application of Lemma 3.3 yields the assertion. Theorem 3.5 is proved.

Taking $q(z)=\frac{1+Az}{1+Bz}$ in Theorem 5, we get the following result.

Corollary 3.4. *Let $q(z)$ be a convex univalent function in U and $-1\le B<A\le 1$, $\alpha\in\mathbb{C}$ with $\Re(\alpha)>0$. Also let $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\in H[q(0),1]\cap Q$, and*

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$$

be univalent in U. If

$$\frac{1+Az}{1+Bz}+\frac{\alpha\lambda}{p}\frac{(A-B)z}{(1+Bz)^2}\prec(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p},$$

then $\frac{1+Az}{1+Bz}\prec\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$, and the function $\frac{1+Az}{1+Bz}$ is the best subdominant.

Combining the above results of subordination and superordination, we easily get the following "sandwich-type" result.

Corollary 3.5. *Let $q_1(z)$ be a convex univalent and $q_2(z)$ be a univalent functions in U, and $\alpha \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha) > 0$. Assume also that $q_2(z)$ satisfies (3.5). If*

$$\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \in H[q(0),1] \cap Q,$$

and $(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} + \alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$ is univalent in U, and also

$$q_1(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq_1'(z) \prec (1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec q_2(z)+\frac{\alpha\lambda}{p}zq_2'(z),$$

then $q_1(z) \prec \frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec q_2(z)$, and $q_1(z)$ and $q_2(z)$ are the best subordinant and the best dominant, respectively.

Taking $q_1(z) = \frac{1+A_1z}{1+B_1z}$ and $q_2(z) = \frac{1+A_2z}{1+B_2z}$ $(-1 \le B_2 \le B_1 < A_1 \le A_2 \le 1)$ in Corollary 3.5, we get the following result.

Corollary 3.6. *Let $\alpha \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha) > 0$, and let $\Re\left(\frac{1-B_2z}{1+B_2z}\right) > \max\left\{0, -\Re\left(\frac{p}{\alpha\lambda}\right)\right\}$. If $\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \in H[q(0),1] \cap Q$, and $(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} + \alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$ is univalent in U, and also*

$$\begin{aligned}\frac{1+A_1z}{1+B_1z}+\frac{\alpha\lambda}{p}\frac{(A_1-B_1)z}{(1+B_1z)^2} &\prec (1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\\ &\prec \frac{1+A_2z}{1+B_2z}+\frac{\alpha\lambda}{p}\frac{(A_2-B_2)z}{(1+B_2z)^2},\end{aligned}$$

then $\frac{1+A_1z}{1+B_1z} \prec \frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \frac{1+A_2z}{1+B_2z}$, and the functions $\frac{1+A_1z}{1+B_1z}$ and $\frac{1+A_2z}{1+B_2z}$ are the best subordinant and best dominant, respectively.

Theorem 3.6. *Let $\alpha_2 \ge \alpha_1 \ge 0$ and $-1 \le B_1 \le B_2 < A_2 \le A_1 \le 1$. Then*

$$C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha_2,A_2,B_2) \subset C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha_1,A_1,B_1). \tag{3.16}$$

Proof. Assuming that $f \in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha_2,A_2,B_2)$, we get

$$(1-\alpha_2)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha_2\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \frac{1+A_2z}{1+B_2z}.$$

Since $-1 \le B_1 \le B_2 < A_2 \le A_1 \le 1$, we easily find that

$$(1-\alpha_2)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha_2\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \frac{1+A_2z}{1+B_2z} \prec \frac{1+A_1z}{1+B_1z}, \tag{3.17}$$

implying $f \in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha_2,A_1,B_1)$. Thus Theorem 3.6 holds for $\alpha_2 = \alpha_1 \ge 0$. If $\alpha_2 > \alpha_1 \ge 0$, then by Theorem 3.1 and (3.21), we infer $f \in C^n_{\lambda,p}(f,g;A_1,B_1)$, implying

$$\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \frac{1+A_1z}{1+B_1z}. \tag{3.18}$$

At the same time, we have

$$(1-\alpha_1)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha_1\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}=\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}$$

$$+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\alpha_2)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha_2\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\right]. \tag{3.19}$$

Moreover, since $0\leq\frac{\alpha_1}{\alpha_2}<1$, and the function $\frac{1+A_1z}{1+B_1z}$ $(-1\leq B_1<A_1\leq 1; z\in U)$ is analytic and convex in U, by (3.16) - (3.18) and Lemma 2.5, we find

$$(1-\alpha_1)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha_1\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\prec\frac{1+A_1z}{1+B_1z},$$

that is, $f\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha_1,A_1,B_1)$, which implies (3.15). Theorem 3.6 is proved.

Theorem 3.7. A necessary and sufficient condition for $f\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ is that

$$\sum_{k=1}\frac{p+\lambda\alpha k}{p(A-B)}\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}\neq e^{i\theta}\quad(0<\theta<2\pi). \tag{3.20}$$

Proof. Observe that a function $f(z)\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ if and only if

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}\neq\frac{1+Ae^{i\theta}}{1+Be^{i\theta}}\quad(z\in U;\ 0<\theta<2\pi),$$

which is equivalent to the following

$$\frac{1}{z^p}\left[\left(1+Be^{i\theta}\right)\left\{(1-\alpha)D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)+\alpha D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)\right\}-\left(1+Ae^{i\theta}\right)\right]$$

$$=\left(1+Be^{i\theta}\right)\left(1+\sum_{k=1}\frac{p+\lambda\alpha k}{p(A-B)}\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}z^k\right)-\left(1+Ae^{i\theta}\right)\neq 0,$$

which easily implies the convolution property (3.19). Theorem 3.7 is proved.

Theorem 3.8. A function $f(z)$ belongs to the class $C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ $(\alpha>0)$ if its coefficients satisfy the condition:

$$\sum_{k=1}(p+\lambda\alpha k)\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n\left|a_{k+p}b_{k+p}\right|<p(A-B).$$

Proof. By Theorem 3.7, $f(z)\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B)$ if and only if

$$\sum_{k=1}\frac{p+\lambda\alpha k}{p(A-B)}\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}\neq e^{i\theta}\quad(0<\theta<2\pi).$$

Thus $\left|\sum_{k=1}\frac{p+\lambda\alpha k}{p(A-B)}\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}\right|<\left|e^{i\theta}\right|=1$, and the result follows.

Theorem 3.9. *Let*

$$f(z)=z^p+\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k}z^{p+k}\in C^n_{\lambda,p}(f,g;\alpha,A,B). \tag{3.21}$$

Then

$$|a_{k+p}b_{k+p}| \le \frac{p(A-B)}{p+\lambda\alpha k}\left(\frac{p}{p+\lambda k}\right)^n. \tag{3.22}$$

The inequality (3.21) is sharp, with the extremal function given by

$$D^n_{\lambda,p}(f*g)(z) = \frac{p}{\alpha\lambda}z^p\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha\lambda}-1}\frac{1+Azu}{1+Bzu}du. \tag{3.23}$$

Proof. Combining (1.3) and (3.20), we obtain

$$(1-\alpha)\frac{D^n_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p}+\alpha\frac{D^{n+1}_{\lambda,p}(f*g)(z)}{z^p} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} = 1+(A-B)z+\ldots. \tag{3.24}$$

An application of Lemma 2.5 to (3.22) yields

$$\left|\left(\frac{p+\lambda\alpha k}{p}\right)\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^n a_{k+p}b_{k+p}\right| \le A-B. \tag{3.25}$$

This and (3.23) imply (3.21). Theorem 3.9 is proved.

Acknowledgement: The authors are grateful to the referees for their valuable suggestions.

REFERENCES

[1] F. M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator, Internat. J. Math. Math. Sci., 27 (2004), 1429-1436.

[2] M. K. Aouf and A. O. Mostafa, On a subclass of n-p-valent prestarlike functions, Comput. Math. Appl., 55 (2008), no.4, 851-861.

[3] M. K. Aouf and T. M. Seoudy, On differential sandwich theorems of analytic functions defined by certain linear operator, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 64(2010), no 2, 1-14.

[4] S.D. Bernardi, Convex and univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 135 (1996), 429-446.

[5] T. Bulboaca, Differential Subordinations and Superordinations, Recent Results, House of Scientific Book Publ., Cluj-Napoca, 2005.

[6] B. C. Carlson and D. B. Shaffer, Starlike and prestarlike hypergeometric functions, SIAM J. Math. Anal., 15 (1984), 737-745.

[7] A. Cătas, On certain classes of p-valent functions defined by multiplier transformations, in Proc. Book of the Internat. Symposium on Geomtric Function Theory and Appls., Istanbul, Turkey, (August 2007), 241-250.

[8] N. E. Cho and T. G. Kim, Multiplier transformations and strongly close-to-convex functions, Bull. Korean Math. Soc., 40 (2003), no. 3, 399-410.

[9] J. Dziok and H. M. Srivastava, Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function, Appl. Math. Com. 103 (1999), 1-13.

[10] J. Dziok and H. M. Srivastava, Some subclasses of analytic functions with fixed argument of coefficients associated with the generalized hypergeometric function, Adv. Stud. Contemp. Math., 5 (2002), 115-125.

[11] J. Dziok and H. M. Srivastava, Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function, Integral Transform. Spec. Funct., 14 (2003), 7-18.

[12] Yu. E. Hohlov, Operators and operations in the univalent functions, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat., 10 (1978), 83-89 (in Russian).

[13] M. Kamali and H. Orhan, On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients, Bull. Korean Math. Soc., 41 (2004), no. 1, 53-71.

[14] R. J. Libera, Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 755-658.

[15] A. E. Livingston, On the radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 352-357.

[16] M.-S. Liu, On certain subclass of analytic functions, J. South China Normal Univ., 4(2002),15-20 (in Chinese).

[17] T.H. Macgregor, The radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963), 514-520.

[18] S.S. Miller and P.T. Mocanu, Subordinats of differential superordinations, Complex Var., 48(2003),815-826.

[19] S. S. Miller and P. T. Mocanu, Differential Subordination : Theory and Applications, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 225, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 2000.

[20] S. Owa and H. M. Srivastava, Univalent and starlike generalized hypergeometric functions, Canad. J. Math. 39 (1987), 1057-1077.

[21] W. Rogosinski, On the coefficients of subordinate functions, Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), 48(1943), 48-82.

[22] St. Ruscheweyh, New criteria for univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 109-115.

[23] H. Saitoh, A linear operator ana its applications of fiest order differential subordinations, Math. Japon. 44 (1996), 31-38.

[24] G. S. Sălăgean, Subclasses of univalent functions, Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag) 1013, (1983), 362 - 372 .

[25] T. N. Shanmugam, V. Ravichandran and S. Sivasubramanian, Differential Sandwich theorems for subclasses of analytic functions, Australian J. Math. Anal. Appl., 3(2006), Art. 8, 1-11.

[26] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; With an Account of the Principal Transcendental Functions, Fourth Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

Поступила 5 сентября 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 15-26.

MEROMORPHIC FUNCTIONS WITH DEFICIENCIES GENERATING UNIQUE RANGE SETS

ABHIJIT BANERJEE AND SUJOY MAJUMDER

Department of Mathematics, University of Kalyani, West Bengal, India.[1]
Department of Mathematics, Katwa College, Burdwan, India.

E-mails: *abanerjee_kal@yahoo.co.in; sujoy.katwa@gmail.com*

Abstract. With the help of weighted sharing of sets we deal with the problem of unique range set for meromorphic functions with deficient values and obtain a result which improves, generalizes and extends some previous results. We provide two examples to show that the condition in one of our results is the best possible.

MSC2010 numbers: 30D35.

Keywords: Meromorphic functions, unique range set, weighted sharing, shared set.

1. Introduction: Definitions and Results

Throughout the paper by meromorphic functions we always mean meromorphic functions in the complex plane $\mathbb{C}$, and the letter E will denote any set of positive real numbers of finite linear measure, not necessarily the same at each occurrence. For any non-constant meromorphic function $h(z)$ we denote by $S(r,h)$ any quantity satisfying $S(r,h)=o(T(r,h))$, $(r \longrightarrow \infty,\ r \notin E)$.

We denote by $T(r)$ the maximum of $T(r,f)$ and $T(r,g)$, and by $S(r)$ any quantity satisfying $S(r)=o(T(r))$ as $r \longrightarrow \infty$, $r \notin E$.

Also, we adopt the standard notation of the Nevanlinna theory of meromorphic functions as explained in [6]. For $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ we define

$$\Theta(a;f)=1-\limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\overline{N}(r,a;f)}{T(r,f)}.$$

Let f and g be two non-constant meromorphic functions and let a be a finite complex number. We say that f and g share a CM, if $f-a$ and $g-a$ have the same zeros with the same multiplicities. Similarly, we say that f and g share a IM, if $f-a$ and $g-a$ have the same zeros ignoring multiplicities. In addition, we say that f and g share ∞ CM, if $1/f$ and $1/g$ share 0 CM, and f and g share ∞ IM, if $1/f$ and $1/g$ share 0 IM.

Let S be a set of distinct elements of $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and $E_f(S)=\bigcup_{a\in S}\{z : f(z)=a\}$, where each point is counted according to its multiplicity. If we do not count the

[1]The first author is thankful to DST-PURSE programme for financial support.

multiplicity the set $\bigcup_{a\in S}\{z : f(z) = a\}$ is denoted by $\overline{E}_f(S)$. If $E_f(S) = E_g(S)$ we say that f and g share the set S CM. On the other hand, if $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$ we say that f and g share the set S IM. Evidently, these definitions coincide with the usual definitions of CM (resp., IM) shared values, provided that the set S contains only one element.

Let S ($S \subset \mathbf{C}$) be a set, and let f and g be two non-constant meromorphic (resp., entire) functions. If $E_f(S) = E_g(S)$ implies $f \equiv g$, then S is called a unique range set for meromorphic (resp., entire) functions or in brief URSM (resp., URSE).

In 1926, R. Nevanlinna showed that a meromorphic function on the complex plane $\mathbf{C}$ is uniquely determined by the images (ignoring multiplicities) of 5 distinct values. A few years later he showed that when multiplicities are counted, then 4 points are sufficient (with one exceptional situation). In [4] Gross raised the problem of finding out a finite set S so that an entire function is determined by the single pre-image (counting multiplicities) of S.

In 1982 F. Gross and C. C. Yang [5] proved the following theorem:

Theorem A. *Let $S = \{z \in \mathbf{C} : e^z + z = 0\}$, and let f, g be two entire functions satisfying $E_f(S) = E_g(S)$. Then $f \equiv g$.*

Since in Theorem A, S is an infinite set, it does not provide a solution to the Gross' problem. In 1994 H.X. Yi [16] established a URSE with 15 elements, and in 1995 P. Li and C.C. Yang [14] established a URSM with 15 elements and a URSE with 7 elements. Since then to find a URSM with minimum cardinality becomes an increasing interest among the researchers.

In 1998 G. Frank and M. Reinders [2] obtained a URSM with 11 element, which is the smallest available URSM to the knowledge of the authors.

A polynomial P in $\mathbf{C}$ is called a strong uniqueness polynomial for meromorphic (resp., entire) functions if for any non-constant meromorphic (resp., entire) functions f and g, $P(f) \equiv cP(g)$ implies $f \equiv g$, where c is a suitable nonzero constant. We say P is SUPM (resp., SUPE) in brief. On the other hand, for a polynomial P in $\mathbf{C}$ if the condition $P(f) \equiv P(g)$ implies $f \equiv g$ for any non-constant meromorphic (resp., entire) function f and g, then P is called a uniqueness polynomial for meromorphic (resp., entire) functions. We say P is a UPM (resp., UPE) in brief.

Suppose that P is a polynomial of degree n in $\mathbf{C}$ having only simple zeros and S be the set of all zeros of P. If S is a URSM (resp., URSE), then from the definition it follows that P is UPM (resp., UPE). However the converse is not true, in general. For instance, $P(z) = az + b$ ($a \neq 0$) is clearly a UPM, but for $f = -\dfrac{b}{a}e^z$ and $g = -\dfrac{b}{a}e^{-z}$ we see that $E_f(S) = E_g(S)$, where $S = \{-\frac{b}{a}\}$ is the set of zeros of $P(z) = az + b$.

To find conditions under which the converse is true, H. Fujimoto [3] first invented a special property of polynomials, which he called the property (H). Fujimoto's property

(H) may be stated as follows: A polynomial P is said to satisfy the property (H) if $P(\alpha) \neq P(\beta)$ for any two distinct zeros α and β of the derivative P'. Fujimoto found a sufficient condition for a set of zeros S of a SUPM (resp., SUPE) P to be a URSM (resp., URSE). Specifically, in [3] H. Fujimoto proved the following result.

Theorem B. [3] *Let P be a polynomial of degree n in $\mathbb{C}$ having only simple zeros and satisfying the condition (H). Let P' have k distinct zeros and either $k \geq 3$ or $k = 2$ and P' has no a simple zero. Further suppose that P is a* SUPM (resp., SUPE). *If S is the set of zeros of P and $n \geq 2k+7$ (resp., $n \geq 2k+3$), then S is a* URSM (resp., URSE).

To deal with the the Gross' problem and its counterpart for meromorphic functions on $\mathbb{C}$, Yi [17] and Li and Yang [14]-[15] have investigated the zero sets of polynomials of the form $P(z) = z^n + az^{n-m} + b$, where $n > m \geq 1$ and a and b are chosen so that P has n distinct roots. Clearly $P(z)$ satisfies the property (H). In [18] it has been shown that when $m \geq 2$ the zero set S of $P(z)$ is a URSM and hence $P(z)$ is a UPM. But when $m = 1$, the situation is completely different. So, a natural question would be whether for $m = 1$, the zero set S of $P(z)$ can be a URSM or even a URSE.

In this direction, independently Yi [17] and Li-Yang [14] had already made some contributions for entire functions. In paricular, they proved the following result.

Theorem C. *Let $S = \{z : z^7 - z^6 - 1 = 0\}$. If f and g are two non-constant entire functions satisfying $E_f(S) = E_g(S)$ then $f \equiv g$.*

Clearly $z^7 - z^6 - 1$ is an UPE. To obtain a counterpart of Theorem C for meromorphic functions and for more general polynomials, in 1996 Yi proved the following result.

Theorem D. [18] *Let $S = \{z : z^n + az^{n-m} + b = 0\}$, where m, n are two positive integers such that m and n have no common factors, $n > 2m + 8$ ($m \geq 2$), and a, b are nonzero constants such that the algebraic equation $z^n + az^{n-m} + b = 0$ has no multiple roots. Then $E_f(S) = E_g(S)$ implies $f \equiv g$.*

>From Theorem D we infer that a URS of meromorphic functions of the form as given in Theorem B consists of 13 elements. In [18] Yi also explored the case $m = 1$, and obtained the following version of Theorem D in this case.

Theorem E. [18] *Let $S = \{z : z^n + az^{n-1} + b = 0\}$, where n (≥ 11) is an integer, a and b are two nonzero constants such that the algebraic equation $z^n + az^{n-1} + b = 0$ has no multiple roots. If f and g are non-constant meromorphic functions satisfying $E_f(S) = E_g(S)$ then either $f \equiv g$ or $f = -\frac{ah(h^{n-1}-1)}{h^n-1}$, $g = -\frac{a(h^{n-1}-1)}{h^n-1}$, where $h = \frac{f}{g}$.*

Clearly under the assumptions of Theorem E, S can not be a URSM.

In 1998 Fang and Hua [1] have extended Theorem C to the case of meromorphic functions with some additional conditions on the ramification indices of f and g. Specifically, in [1] was proved the followin result.

Theorem F. [1] *Let S be as in* Theorem C. *If two meromorphic functions f and g are such that $\Theta(\infty; f) > \frac{11}{12}$, $\Theta(\infty; g) > \frac{11}{12}$ and $E_f(S) = E_g(S)$ then $f \equiv g$.*
We need the following definition, known as weighted sharing of sets and values, which renders a useful tool for the purpose of relaxation of the nature of sharing the sets.

Definition 1.1. [8, 9] *Let k be a nonnegative integer or infinity. For $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ we denote by $E_k(a; f)$ the set of all a-points of f, where an a-point of multiplicity m is counted m times if $m \leq k$ and $k+1$ times if $m > k$. If $E_k(a; f) = E_k(a; g)$, we say that f, g share the value a with weight k.*

We write f, g share (a, k) to mean that f, g share the value a with weight k. Clearly if f, g share (a, k) then f, g share (a, p) for any integer p, $0 \leq p < k$. Also we note that f, g share a value a IM or CM if and only if f, g share $(a, 0)$ or (a, ∞) respectively.

Definition 1.2. [8] *Let S be a set of distinct elements of $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and k be a nonnegative integer or ∞. We denote by $E_f(S, k)$ the set $E_f(S) = \bigcup_{a\in S}\{z : f(z)-a = 0\}$. Clearly $E_f(S) = E_f(S, \infty)$ and $\overline{E}_f(S) = E_f(S, 0)$.*

Definition 1.3. [7] *For $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ we denote by $N(r, a; f \mid= 1)$ the counting function of simple a-points of f. For a positive integer m we denote by $N(r, a; f| \leq m)$ (resp., $N(r, a; f| \geq m)$ the counting function of those a-points of f whose multiplicities are not greater(resp., less) than m, where each a-point is counted according to its multiplicity. The functions $\overline{N}(r, a; f \mid\leq m)$ and $\overline{N}(r, a; f \mid\geq m)$ are defined similarly, where in counting the a-points of f we ignore the multiplicities. Also, the functions $N(r, a; f \mid< m), N(r, a; f \mid> m), \overline{N}(r, a; f \mid< m)$ and $\overline{N}(r, a; f \mid> m)$ are defined analogously.*

We define $\delta_2(a; f)=1-\limsup\limits_{r\longrightarrow\infty} \frac{N_2(r,a;f)}{T(r,f)}$, where $N_2(r, a; f)=\overline{N}(r, a; f)+\overline{N}(r, a; f \mid\geq 2)$.
Lahiri [10] improved Theorem F in the following direction.

Theorem G. [10] *Let S be as in Theorem C. If for two non-constant meromorphic functions f and g, $\Theta(\infty; f) + \Theta(\infty; g) > \frac{3}{2}$ and $E_f(S, 2) = E_g(S, 2)$ then $f \equiv g$.*

In 2004 Lahiri and Banerjee [11] further improved Theorem C in a more compact and convenient way, and obtained the following result.

Theorem H. [11] *Let $S = \{z : z^n + az^{n-1} + b = 0\}$, where n (≥ 9) is an integer, and a, b are two nonzero constants such that $z^n + az^{n-1} + b = 0$ has no multiple roots. If $E_f(S, 2) = E_g(S, 2)$ and $\Theta(\infty; f) + \Theta(\infty; g) > \frac{4}{n-1}$, then $f \equiv g$.*

The following example shows that the set S in Theorems G-H cannot be replaced by an arbitrary set containing six distinct elements.

Example 1.1. *Let $f(z) = \sqrt{\alpha\beta\gamma}e^{z}$ and $g(z) = \sqrt{\alpha\beta\gamma}e^{-z}$, and let $S = \{\alpha\sqrt{\beta}, \alpha\sqrt{\gamma}, \beta\sqrt{\alpha}, \beta\sqrt{\gamma}, \gamma\sqrt{\alpha}, \gamma\sqrt{\beta}\}$, where α, β and γ are nonzero distinct complex numbers. Then it is easy to see that $E_f(S, \infty) = E_g(S, \infty)$ but $f \not\equiv g$.*

So we observe that deficiencies of poles play a vital role in order to find sufficient conditions for which the conclusions of Theorems F, and G-H holds true.

We naturally raise the following questions.

Question 1: Is there any significant contribution of the deficiencies of the other values in Theorems G and H?

Question 2: What happens if we reduce the degree of the equation defining S in Theorem H?

In this paper we give some affirmative answers to the above questions, which in turn will further improve, generalize and extend Theorems G and H.

The following theorem is the main result of the paper.

Theorem 1.1. *Let $S = \{z : z^n + az^{n-1} + b = 0\}$, where n (≥ 6) is an integer, and a, b are two nonzero constants such that $z^n + az^{n-1} + b = 0$ has no multiple roots. Suppose that f and g are two non-constant meromorphic functions satisfying $E_f(S,m) = E_g(S,m)$. If one of the following conditions is satisfied:*

(i) $m \geq 2$ *and* $\Theta_f + \Theta_g > \max\{\frac{10-n}{2}, \frac{n+1}{n-1}\}$

(ii) $m = 1$ *and* $\Theta_f + \Theta_g > \max\{\frac{11-n}{2}, \frac{n+1}{n-1}\}$

(iii) $m = 0$ *and* $\Theta_f + \Theta_g > \max\{\frac{16-n}{3}, \frac{n+1}{n-1}\}$,

then $f \equiv g$, where $\Theta_f = \Theta(0; f) + \Theta(-a\frac{n-1}{n}; f) + \Theta(\infty; f) + \frac{1}{2}\delta_2(-a; f)$ and Θ_g can be defined similarly.

The examples that follow show that the condition $\Theta_f + \Theta_g > \frac{n+1}{n-1}$ in Theorem 1.1 is sharp, when $n \geq 8$ and $m \geq 2$.

Example 1.2. (Example 2, [11]). Let $f = -a\frac{1-h^{n-1}}{1-h^n}$ and $g = -ah\frac{1-h^{n-1}}{1-h^n}$, where $h = \frac{\alpha^2(e^z-1)}{e^z-\alpha}$, $\alpha = exp(\frac{2\pi i}{n})$ and $n(\geq 3)$ is an integer.

Then we have $T(r, f) = (n-1)T(r, h) + O(1)$; $T(r, g) = (n-1)T(r, h) + O(1)$ and $T(r, h) = T(r, e^z) + O(1)$. Next, we see that $h \neq \alpha, \alpha^2$, and so for any complex number $\gamma \neq \alpha, \alpha^2$ we have $\overline{N}(r, \gamma; h) \sim T(r, h)$. Also, we note that a root of $h = 1$ is not a pole and zero of f and g. Hence $\Theta(\infty; f) = \Theta(\infty; g) = \frac{2}{n-1}$. On the other hand, we have

$$\Theta(0; f) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \overline{N}(r, \beta^k; h) + \overline{N}(r, \infty; h)}{(n-1)T(r, h) + O(1)} = 0$$

and

$$\Theta(0; g) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \overline{N}(r, \beta^k; h) + \overline{N}(r, 0; h)}{(n-1)T(r, h) + O(1)} = 0,$$

where $\beta = exp\,(\frac{2\pi i}{n-1})$. Also, we have

$$\delta_2(-a; f) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{2\overline{N}(r, 0; h)}{(n-1)T(r, h) + O(1)} = \frac{n-3}{n-1}$$

and

$$\delta_2(-a; g) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{2\overline{N}(r, \infty; h)}{(n-1)T(r, h) + O(1)} = \frac{n-3}{n-1}.$$

Observe that the polynomial $(n-1)z^n - nz^{n-1} + 1$ has double zero at the point $z = 1$. Consequently it has $n-1$ distinct zeros, which we denote by u_k, $k = 1, \ldots, n-1$. So, we have

$$\Theta(-a\frac{n-1}{n};f) = 1 - \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\overline{N}(r,u_k;e^z)}{(n-1)T(r,e^z)+O(1)} = 0$$

and

$$\Theta(-a\frac{n-1}{n};g) = 1 - \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1}\overline{N}(r,v_j;e^z)}{(n-1)T(r,e^z)+O(1)} = 0,$$

where $v_j = \frac{1}{u_j}, j = 1,\ldots,n-1$. Therefore $\Theta_f + \Theta_g = \frac{n+1}{n-1}$. Clearly $E_f(S,\infty) = E_g(S,\infty)$ because $f^{n-1}(f+a) \equiv g^{n-1}(g+a)$ but $f \not\equiv g$.

Example 1.3. Let f and g be as in Example 1.2, where $h = \frac{\alpha(\alpha e^z - 1)}{e^z - 1}$, $\alpha = exp(\frac{2\pi i}{n})$ and $n(\geq 3)$ is an integer.

Now we give some definitions and notation which are used in the rest of the paper

Definition 1.4. [19] *Let f and g be two non-constant meromorphic functions such that f and g share $(a,0)$. Let z_0 be an a-point of f with multiplicity p, an a-point of g with multiplicity q. We denote by $\overline{N}_L(r,a;f)$ the reduced counting function of those a-points of f and g where $p > q$, by $N_E^{1)}(r,a;f)$ the counting function of those a-points of f and g where $p = q = 1$, and by $\overline{N}_E^{(2}(r,a;f)$ the reduced counting function of those a-points of f and g where $p = q \geq 2$. In the same way we can define the functions $\overline{N}_L(r,a;g)$, $N_E^{1)}(r,a;g)$, $\overline{N}_E^{(2}(r,a;g)$; and the functions $\overline{N}_L(r,a;f)$ and $\overline{N}_L(r,a;g)$ for $a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$.*

Observe that when f and g share (a,m), $m \geq 1$, then $N_E^{1)}(r,a;f) = N(r,a;f \mid= 1)$.

Definition 1.5. *We denote by $\overline{N}(r,a;f \mid= k)$ the reduced counting function of those a-points of f whose multiplicities is exactly k, where $k \geq 2$ is an integer.*

Definition 1.6. [8, 9] *Let f, g share a value a IM. We denote by $\overline{N}_*(r,a;f,g)$ the reduced counting function of those a-points of f whose multiplicities differ from the multiplicities of the corresponding a-points of g.*

2. Lemmas

In this section we present some lemmas which will be needed in the sequel. Let F and G be two non-constant meromorphic functions defined as follows.

$$F = \frac{f^{n-1}(f+a)}{-b}, \quad G = \frac{g^{n-1}(g+a)}{-b}. \tag{2.1}$$

Also, we will use the function H defined as follows:

$$H = \left(\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1}\right) - \left(\frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}\right). \tag{2.2}$$

Lemma 2.1. [13] *Let f be a non-constant meromorphic function and let*

$$R(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j f^j\right)^{-1}$$

be an irreducible rational function in f with constant coefficients $\{a_k\}$ and $\{b_j\}$, where $a_n \neq 0$ and $b_m \neq 0$. Then $T(r,R(f)) = dT(r,f) + S(r,f)$, where $d = \max\{n,m\}$.

Lemma 2.2. [19] *Let F, G be two non-constant meromorphic functions such that they share $(1,0)$ and $H \not\equiv 0$, where H is defined by (2.2). Then*

$$N_E^{1)}(r,1;F\mid=1) = N_E^{1)}(r,1;G\mid=1) \leq N(r,H) + S(r,F) + S(r,G).$$

Lemma 2.3. *Let $S = \{z : z^n + az^{n-1} + b = 0\}$, where a, b are nonzero constants such that $z^n + az^{n-1} + b = 0$ has no multiple roots, n (≥ 3) is an integer, and let F, G be given by (2.1). If for two non-constant meromorphic functions f and g, $E_f(S,0) = E_g(S,0)$ and $H \not\equiv 0$, then*

$$\begin{aligned} N(r,H) \leq\ & \overline{N}(r,0,f) + \overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,-a;f\mid\geq 2) \\ & + \overline{N}(r,-a;g\mid\geq 2) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g) + \overline{N}_*(r,1;F,G) \\ & + \overline{N}_0(r,0;f') + \overline{N}_0(r,0;g'), \end{aligned}$$

where $\overline{N}_0(r,0;f')$ is the reduced counting function of those zeros of f', which are not the zeros of $f(f+a)(f+a\frac{n-1}{n})(F-1)$ and $\overline{N}_0(r,0;g')$ is defined similarly.

Proof. Since $E_f(S,0) = E_g(S,0)$ it follows that F and G share $(1,0)$. From (2.1) we have $F' = [nf+(n-1)a]f^{n-2}f'/(-b)$ and $G' = [ng+(n-1)a]g^{n-2}g'/(-b)$. It can easily be verified that the possible poles of H occur at: (i) zeros of f and g, (ii) multiple zeros of $f+a$ and $g+a$, (iii) zeros of $nf+a(n-1)$ and $ng+a(n-1)$, (iv) poles of f and g, (v) those 1-points of F and G with different multiplicities, (vi) zeros of f', which are not the zeros of $f(f+a)\left(f+a\frac{n-1}{n}\right)(F-1)$, (vii) zeros of g', which are not zeros of $g(g+a)\left(g+a\frac{n-1}{n}\right)(G-1)$. Since H has only simple poles, the result follows from above. Lemma 2.3 is proved.

Lemma 2.4. [11]. *Let f, g be two non-constant meromorphic functions. Then $f^{n-1}(f+a)g^{n-1}(g+a) \not\equiv b$, where a, b are nonzero finite constants and n (≥ 5) is an integer.*

Lemma 2.5. *Let f, g be two non-constant meromorphic functions such that $\Theta_f + \Theta_g > \frac{n+1}{n-1}$, where Θ_f and Θ_g are as in in the Theorem 1.1. Then $f^{n-1}(f+a) \equiv g^{n-1}(g+a)$ implies $f \equiv g$, where n (≥ 2) is an integer and a is a nonzero finite constant.*

Proof. Let

$$f^{n-1}(f+a) \equiv g^{n-1}(g+a) \tag{2.3}$$

and suppose $f \not\equiv g$. We consider two cases:

Case I Let $y = \frac{g}{f}$ be a constant. Then it follows from (2.3) that $y \neq 1$, $y^{n-1} \neq 1$, $y^n \neq 1$ and $f \equiv -a\frac{1-y^{n-1}}{1-y^n}$ is a constant, which is impossible.

Case II Let $y = \frac{g}{f}$ be non-constant. Then

$$f \equiv -a\frac{1-y^{n-1}}{1-y^n} \equiv a\left(\frac{y^{n-1}}{1+y+y^2+\ldots+y^{n-1}} - 1\right). \tag{2.4}$$

and

$$f + a\frac{(n-1)}{n} \equiv -a\frac{1-y^{n-1}}{1-y^n} + a\frac{(n-1)}{n} \equiv -a\frac{(n-1)y^n - ny^{n-1} + 1}{n(1-y^n)}. \tag{2.5}$$

Assuming $p(z) = (n-1)z^n - nz^{n-1} + 1$, we have $p(0) \neq 0$ and $p(1) = p'(1) = 0$. So from (2.5) we obtain $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \overline{N}(r, u_j; y) \leq \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f)$, where u_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, have the same meaning as in Example *1.2*.

>From (2.4) and Lemma 2.1 we obtain $T(r, f) = (n-1)T(r, y) + S(r, y)$. We first note that the zeros of $1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-2}$ contributes to the zeros of both f and g. In addition, the poles of y contributes to the zeros of f and since $g = fy$ the zeros of y contributes to the zeros of g. So from (2.4) we find

$$\sum_{j=1}^{n-2} \overline{N}(r, v_j; y) + \overline{N}(r, \infty; y) \leq \overline{N}(r, 0; f), \sum_{k=1}^{n-1} \overline{N}(r, w_k; y) \leq \overline{N}(r, \infty; f),$$

where $w_k = exp\,(\frac{2k\pi i}{n})$ for $k = 1, 2, \ldots, n-1$ and $v_j = exp\,(\frac{2j\pi i}{n-1})$ for $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Also, from (2.4) we have $\overline{N}(r, 0; y) \leq \frac{1}{2} N_2(r, -a; f)$.

Hence by the second fundamental theorem we can write

$$\begin{aligned}
(3n-4)\, T(r, y) \;&\leq\; \overline{N}(r, \infty; y) + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{N}(r, u_i; y) + \sum_{j=1}^{n-2} \overline{N}(r, v_j; y) + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{N}(r, w_k; y) \\
&\quad + \overline{N}(r, 0; y) + S(r, y) \\
&\leq\; \overline{N}(r, 0; f) + \overline{N}(r, -a\frac{n-1}{n}; f) + \overline{N}(r, \infty; f) + \frac{1}{2} N_2(r, -a; f) + S(r, y) \\
&\leq\; \left(\frac{7}{2} - \Theta(0; f) - \Theta(-a\frac{n-1}{n}; f) - \Theta(\infty; f) - \frac{1}{2}\delta_2(-a; f) + \varepsilon\right) T(r, f) \\
&\quad + S(r, y) \\
&=\; (n-1) \left(\frac{7}{2} - \Theta_f + \varepsilon\right) T(r, y) + S(r, y),
\end{aligned}$$

implying

$$\frac{3n-4}{n-1}\, T(r, y) \leq \left(\frac{7}{2} - \Theta_f + \varepsilon\right) T(r, y) + S(r, y), \tag{2.6}$$

where $0 < 2\varepsilon < \Theta_f + \Theta_g$. Again putting $y_1 = \frac{1}{y}$ and noting that $T(r, y) = T(r, y_1) + O(1)$, we can use the above arguments to obtain

$$\frac{3n-4}{n-1}\, T(r, y) \leq \left(\frac{7}{2} - \Theta_g + \varepsilon\right) T(r, y) + S(r, y). \tag{2.7}$$

Adding (2.6) and (2.7) we get $\left(\frac{6n-8}{n-1} - 7 + \Theta_f + \Theta_g - 2\varepsilon\right) T(r, y) \leq S(r, y)$, which is a contradiction. Hence $f \equiv g$, and the result follows. Lemma 2.5 is proved.

Lemma 2.6. *Let f be a non-constant meromorphic function and let a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, be finite distinct complex numbers, where $n \geq 2$. Then*

$$N(r, 0; f') \;\leq\; T(r, f) + \overline{N}(r, \infty; f) - \sum_{i=1}^{n} m(r, a_i; f) + S(r, f)$$

Proof. Let $F = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{f - a_i}$, then $\sum\limits_{i}^{n} m(r, a_i; f) = m(r, F) + O(1)$. Note that

$$m(r, F) \leq m(r, 0; f') + m(r, \sum_{i=1}^{n} \frac{f'}{f - a_i}) = T(r, f') - N(r, 0; f') + S(r, f).$$

Also, observe that $T(r, f') = m(r, f') + N(r, f') \leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f)$ and the result follows. Lemma 2.6 is proved.

3. Proof of Theorem 1.1

We know from the assumption that the zeros of $z^n+az^{n-1}+b$ are simple; we denote them by ω_j, $j=1,2,\ldots n$. Let F, G be given by (2.1). Since $E_f(S,m)=E_g(S,m)$ it follows that F, G share $(1,m)$.

Case 1. We first consider the case $H\not\equiv 0$, where H is given by (2.2).

Subcase 1.1. $m\geq 1$. Assuming first that $m\geq 2$ and using Lemma 2.6 with $n=3$, $a_1=0$, $a_2=-a$ and $a_3=-a\frac{n-1}{n}$, we can write

(3.1) $$\overline{N}_0(r,0;g')+\overline{N}(r,1;G\mid\geq 2)+\overline{N}_*(r,1;F,G)\leq\overline{N}_0(r,0;g')$$

$$+\ \overline{N}(r,1;G\mid\geq 2)+\overline{N}(r,1;G\mid\geq 3)\leq\overline{N}_0(r,0;g')$$

$$+\ \sum_{j=1}^{n}\{\overline{N}(r,\omega_j;g\mid=2)+2\overline{N}(r,\omega_j;g\mid\geq 3)\}\leq N(r,0;g'\mid g\neq 0,-a,-a\frac{n-1}{n})$$

$$\leq\ N(r,0;g')-N(r,0;g)+\overline{N}(r,0;g)-N(r,-a;g)+\overline{N}(r,-a;g)$$

$$-N(r,-a\frac{n-1}{n};g)-\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g)$$

$$=\ \overline{N}(r,0;g)+\overline{N}(r,\infty;g)+\overline{N}(r,-a;g)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g)-2T(r,g)+S(r,g).$$

Hence using (3.1) and Lemmas 2.1 – 2.3, from second fundamental theorem we have for any $\varepsilon>0$

(3.2) $$(n+2)\,T(r,f)\leq\overline{N}(r,0;f)+\overline{N}(r,-a;f)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f)$$

$$+\overline{N}(r,\infty;f)+N(r,1;F\mid=1)+\overline{N}(r,1;F\mid\geq 2)-N_0(r,0;f')+S(r,f)$$

$$\leq\ \left(7-2\Theta(0,f)-2\Theta(\infty,f)-2\Theta(-a\frac{n-1}{n};f)-\delta_2(-a;f)+\frac{1}{2}\varepsilon\right)T(r,f)$$

$$+\left(5-2\Theta(0,g)-2\Theta(\infty,g)-2\Theta(-a\frac{n-1}{n};g)-\delta_2(-a;g)+\frac{1}{2}\varepsilon\right)T(r,g)$$

$$+S(r,f)+S(r,g)\leq(12-2\Theta_f-2\Theta_g+\varepsilon)T(r)+S(r).$$

In a similar way we can obtain

(3.3) $$(n+2)\,T(r,g)\leq(11-2\Theta_f-2\Theta_g+\varepsilon)T(r)+S(r).$$

Combining (3.2) and (3.3) we conclude that

(3.4) $$(n-10+2\Theta_f+2\Theta_g-\varepsilon)\,T(r)\leq S(r).$$

Since $\varepsilon>0$, (3.4) leads to a contradiction. As for the case $m=1$, we use Lemma 2.6 to get the following counterpart of formula (3.1):

(3.5) $$\overline{N}_0(r,0;g')+\overline{N}(r,1;G\mid\geq 2)+\overline{N}_*(r,1;F,G)$$

$$\leq\ \overline{N}_0(r,0;g')+\overline{N}(r,1;G\mid\geq 2)+\overline{N}_L(r,1;G)+\overline{N}_L(r,1;F)$$

$$\leq\ N(r,0;g'\mid g\neq 0,-a,-a\frac{n-1}{n})+\frac{1}{2}N(r,0;f'\mid f\neq 0,-a,-a\frac{n-1}{n})$$

$$\leq\ \overline{N}(r,0;g)+\overline{N}(r,-a;g)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g)+\overline{N}(r,\infty;g)-2T(r,g)+\frac{1}{2}\left\{\overline{N}(r,0;f)\right.$$

$$\left.+\overline{N}(r,-a;f)+\overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f)+\overline{N}(r,\infty;f)\right\}-T(r,f)+S(r,f)+S(r,g).$$

So using (3.5), Lemmas 2.2 and 2.3, and proceeding as in (3.2), from second fundamental theorem we have for any $\varepsilon > 0$

$$(3.6) \qquad (n+2)\,T(r,f) \leq 2\left\{\overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f) + \overline{N}(r,\infty;f)\right\}$$

$$+N_2(r,-a;f)2\left\{\overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g) + \overline{N}(r,\infty;g)\right\} + N_2(r,-a;g)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,-a;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f) + \overline{N}(r,\infty;f)\right\} - 2T(r,g) - T(r,f)$$

$$+S(r,f) + S(r,g) \leq (11 - 2\Theta_f - 2\Theta_g + \varepsilon)\,T(r) + 2T(r) + S(r).$$

Similarly we can obtain

$$(3.7) \qquad (n+2)\,T(r,g) \leq (11 - 2\Theta_f - 2\Theta_g + \varepsilon)\,T(r) + 2T(r) + S(r).$$

Combining (3.6) and (3.7) we conclude that

$$(3.8) \qquad (n - 11 + 2\Theta_f + 2\Theta_g - \varepsilon)\,T(r) \leq S(r).$$

Since $\varepsilon > 0$, (3.8) leads to a contradiction.

Subcase 1.2. $m = 0$. Using Lemma 2.6 we observe that

$$\begin{aligned}
(3.9) \qquad & \overline{N}_0(r,0;g') + \overline{N}_E^{(2}(r,1;F) + 2\overline{N}_L(r,1;G) + 2\overline{N}_L(r,1;F) \\
\leq\ & \overline{N}_0(r,0;g') + \overline{N}_E^{(2}(r,1;G) + \overline{N}_L(r,1;G) + \overline{N}_L(r,1;G) + 2\overline{N}_L(r,1;F) \\
\leq\ & \overline{N}_0(r,0;g') + \overline{N}(r,1;G \mid\geq 2) + \overline{N}_L(r,1;G) + 2\overline{N}_L(r,1;F) \\
\leq\ & N(r,0;g' \mid g \neq 0,-a,-a\frac{n-1}{n}) + \overline{N}(r,1;G \mid\geq 2) + 2\overline{N}(r,1;F \mid\geq 2) \\
\leq\ & 2\left\{\overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,-a;g) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g)\right. \\
& \left. + \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,-a;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f)\right\} \\
& -4T(r,f) - 4T(r,g) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned}$$

Hence using (3.9) and Lemmas 2.2 and 2.3, from second fundamental theorem we have for any $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
(3.10) \qquad & (n+2)\,T(r,f) \\
\leq\ & \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,-a;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f) + \overline{N}(r,\infty;f) + N_E^{1)}(r,1;F) \\
& + \overline{N}_L(r,1;F) + \overline{N}_L(r,1;G) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;F) - N_0(r,0;f') + S(r,f) \\
\leq\ & 2\left\{\overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};f)\right\} + N_2(r,-a;f) \\
& + \overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,-a\frac{n-1}{n};g) + \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,-a;g \mid\geq 2) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;F) \\
& + 2\overline{N}_L(r,1;G) + 2\overline{N}_L(r,1;F) + \overline{N}_0(r,0;g') + S(r,f) + S(r,g) \\
\leq\ & (16 - 3\Theta_f - 3\Theta_g + \varepsilon)\,T(r) + 2T(r) + S(r).
\end{aligned}$$

In a similar manner we can obtain

$$(n+2)\,T(r,g) \le (16 - 3\Theta_f - 3\Theta_g + \varepsilon)\,T(r) + 2T(r) + S(r). \tag{3.11}$$

Combining (3.10) and (3.11) we conclude that

$$(n - 16 + 3\Theta_f + 3\Theta_g - \varepsilon)\,T(r) \le S(r). \tag{3.12}$$

Since $\varepsilon > 0$, (3.12) leads to a contradiction.

Case 2. $H \equiv 0$. By integration we get from (2.2)

$$\frac{1}{F-1} \equiv \frac{A}{G-1} + B, \tag{3.13}$$

where A and B are constants and $A \neq 0$. >From (3.13) we obtain

$$F \equiv \frac{(B+1)G + A - B - 1}{BG + A - B}. \tag{3.14}$$

Clearly (3.14) together with Lemma 2.1 yields

$$T(r,f) = T(r,g) + O(1). \tag{3.15}$$

Subcase 2.1. Assume that $B \neq 0, -1$.
If $A - B - 1 \neq 0$, then from (3.14) we obtain $\overline{N}(r, \frac{B+1-A}{B+1}; G) = \overline{N}(r, 0; F)$. Hence using Lemma 2.1 and the second fundamental theorem we obtain

$$\begin{aligned} nT(r,g) &< \overline{N}(r,\infty;G) + \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r, \frac{B+1-A}{B+1}; G) + S(r,g) \\ &\le \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,0;g+a) + \overline{N}(r,0;f) + \overline{N}(r,0;f+a) + S(r,g) \\ &\le 2T(r,f) + 3T(r,g) + S(r,g), \end{aligned}$$

which, in view of (3.15), leads to a contradiction because $n \ge 6$. Thus $A - B - 1 = 0$, and hence (3.14) reduces to $F \equiv \frac{(B+1)G}{BG+1}$, implying $\overline{N}(r, \frac{-1}{B}; G) = \overline{N}(r,\infty; f)$. Again by Lemma 2.1 and the second fundamental theorem we have

$$\begin{aligned} nT(r,g) &< \overline{N}(r,\infty;G) + \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r, \frac{-1}{B}; G) + S(r,g) \\ &\le \overline{N}(r,\infty;g) + \overline{N}(r,0;g) + \overline{N}(r,0;g+a) + \overline{N}(r,\infty;f) + S(r,g) \\ &\le T(r,f) + 3T(r,g) + S(r,g), \end{aligned}$$

which, in view of (3.15), leads to a contradiction because $n \ge 6$.

Subcase 2.2. Assume that $B = -1$. From (3.14) we have

$$F \equiv \frac{A}{-G + A + 1}. \tag{3.16}$$

If $A+1 \neq 0$, then from (3.17) we obtain $\overline{N}(r, A+1; G) = \overline{N}(r,\infty; f)$. So repeating the arguments used in the Subcase 2.1, we again get a contradiction. Hence $A + 1 = 0$, and from (3.17) we infer $FG \equiv 1$, implying $f^{n-1}(f+a)g^{n-1}(g+a) \equiv b^2$, which is impossible by Lemma 2.4.

Subcase 2.3. Assome that $B = 0$. From (3.14) we obtain

$$F \equiv \frac{G + A - 1}{A}. \tag{3.17}$$

If $A - 1 \neq 0$, then from (3.17) we obtain $\overline{N}(r, 1 - A; G) = \overline{N}(r, 0; F)$. So in the same manner as above we again get a contradiction. So $A = 1$ and hence $F \equiv G$, that is, $f^{n-1}(f + a) \equiv g^{n-1}(g + a)$. Now the assertion of the theorem follows from Lemma 2.5. This completes the proof of Theorem 1.1.

REFERENCES

[1] M. Fang and X. Hua, Meromorphic functions that share one finite set CM,J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly, 15(1)(1998), 15-22.

[2] G. Frank and M. Reinders, A unique range set for meromorphic functions with 11 elements. Complex Var. Theory Appl. 37 (1)(1998), 185-193.

[3] H. Fujimoto, On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, Amer. J. Math., 122 (2000), 1175-1203.

[4] F.Gross, Factorization of meromorphic functions and some open problems, Proc. Conf. Univ. Kentucky, Leixngton, Kentucky(1976); Lecture Notes in Math., 599(1977), 51-69, Springer(Berlin).

[5] F.Gross and C.C.Yang, On preimage and range sets of meromorphic functions, Proc. Japan Acad., 58 (1982), 17-20.

[6] W.K.Hayman, Meromorphic Functions, The Clarendon Press, Oxford (1964).

[7] I.Lahiri, Value distribution of certain differential polynomials. Int. J. Math. Math. Sci., 28(2)(2001), 83-91.

[8] I.Lahiri, Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions, Nagoya Math. J., 161(2001), 193-206.

[9] I.Lahiri, Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions, Complex Variables, 46(2001), 241-253.

[10] I.Lahiri, A question of gross and weighted sharing of a finite set by meromorphic functions, Applied Math. E-Notes, 2(2002), 16-21

[11] I.Lahiri, and A.Banerjee, Uniqueness of meromorphic functions with deficient poles, Kyungpook Math. J., 44(2004), 575-584.

[12] I.Lahiri, and S.Dewan, Value distribution of the product of a meromorphic function and its derivative, Kodai Math. J., 26 (2003), 95-100.

[13] A.Z.Mohon'ko, On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions, Theory of Functions. Funct. Anal. Appl., 14 (1971), 83-87.

[14] P.Li and C.C.Yang, Some further results on the unique range sets of meromorphic functions, Kodai Math. J., 13(1995), 437-450.

[15] P.Li and C.C.Yang, On the unique range sets for meromorphic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 177-185.

[16] H.X.Yi, On a problem of Gross, Sci. China, Ser.A, 24 (1994), 1137-1144.

[17] H.X.Yi, A question of Gross and the uniqueness of entire functions, Nagoya Math. J., 138(1995), 169-177.

[18] H.X.Yi, Unicity theorems for meromorphic or entire functions III, Bull. Austral. Math. Soc., 53(1996), 71-82.

[19] H.X.Yi, Meromorphic functions that share one or two values II, Kodai Math. J., 22 (1999), 264-272.

Поступила 7 ноября 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 27-34.

О ПОТЕНЦИАЛАХ ГРИНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ

А. ДЖРБАШЯН, Э. ДИАЗ

Институт математики НАН Армении
Университет Антиохии, Меделлин, Колумбия
E-mail: *armen_jerbashian@yahoo.com*

Аннотация. Статья посвящена исследованию класса потенциалов Грина в единичном круге комплексной плоскости, обладающих ограниченными квадратичными интегральными средними.

MSC2010 number: 31A99, 31C05

Ключевые слова: потенциал Грина; борелевская мера; полнота.

1. Введение

Статья посвящена исследованию класса потенциалов Грина в единичном круге комплексной плоскости, обладающих ограниченными квадратичными интегральными средними, что является близкой к классической задачей, тесно связанной с работой [2].

Хорошо известен классический результат о том, что *если* $\nu(\zeta) \geq 0$ *борелевская мера в* $|\zeta| < 1$, *то потенциал Грина*

$$P(z) = -\iint_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta) \tag{1.1}$$

сходится в $|z| < 1$ *и*

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} P(re^{i\vartheta})d\vartheta < +\infty \tag{1.2}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие Бляшке

$$\iint_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|)\, d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.3}$$

Следующая теорема отвечает на вопрос: *Какое более сильное чем* (1.3) *условие на генерирующую меру равносильно* (1.2) *с квадратом потенциала Грина?*

Теорема 1.1. *Потенциал Грина (1.1), генерированный борелевской мерой $\nu \geq 0$ удовлетворяет условию*

$$\Phi(P) \equiv \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta < +\infty \tag{1.4}$$

тогда и только тогда, когда

$$\Psi(P) \equiv \iint_{|\zeta_1|<1} \iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|) d\nu(\zeta_1) d\nu(\zeta_2) < +\infty, \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{K}(a,b) = \int_0^{1-a^2} dx \int_0^{1-b^2} \frac{dy}{x+y}, \quad 0 < a, b < 1,$$

и это обеспечивается следующими неравенствами:

$$C_1 \Psi(P) \leq \Phi(P) \leq C_2 \Psi(P), \tag{1.6}$$

где C_1 и C_2 - положительные постоянные, зависящие только от меры ν.

Замечание 1.1. *С применением неравенства $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ к (1.5) получаем*

$$\Psi(P) \leq 2 \left\{ \iint_{|\zeta|<1} \sqrt{1 - |\zeta|^2}\, d\nu(\zeta) \right\}^2 . \tag{1.7}$$

Следующая теорема относится к полноте рассматриваемого в теореме 1.1 множества потенциалов.

Теорема 1.2. *Множество $\mathcal{P}_0$ потенциалов Грина (1.1) удовлетворяющих условию (1.4) полно в метрике*

$$\rho(P_1, P_2) = \left\{ \iint_{|\zeta_1|<1} \iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|) d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta_1)| d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta_2)| \right\}^{1/2},$$

где потенциалы P_1 и P_2 генерированы борелевскими мерами $\nu_1 \geq 0$ и $\nu_2 \geq 0$, а $|\nu_1 - \nu_2|$ означает полную вариацию заряда $\nu_1 - \nu_2$, т.е. сумму его положительной и отрицательной вариаций.

Замечание 1.2. *Из приведенного в следующем разделе статьи доказательства теоремы 1.2 следует, что также множество $\mathcal{P}_1$ ($\subset \mathcal{P}_0$) потенциалов Грина в $|z| < 1$, определенное условием ограниченности правосторонней величины в (1.7), полно в метрике*

$$\overline{\rho}(P_1, P_2) = \iint_{|\zeta|<1} \sqrt{1 - |\zeta|}\, d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta)|.$$

Замечание 1.3. *Ввиду теоремы 1.2 легко доказать, что множества генерированных зарядами потенциалов Грина, удовлетворяющих условиям $\|P\|_0 = \rho(P, 0) < +\infty$, или $\|P\|_1 = \overline{\rho}(P, 0) < +\infty$ - Банаховы пространства.*

2. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Доказательство теоремы 1.1. Если $d_0 \in (0,1)$ - фиксированное число и

$$P_0(z) = -\iint_{|\zeta|<d_0} \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta),$$

то $P_0(z)$ очевидно удовлетворяет условию (1.4). Тем самым, далее будем считать, что борелевская мера $\nu(\zeta)$ такова, что $\inf\{|\zeta| : \zeta \in \operatorname{supp}\nu\} \geq d_0$. Это предположение не умаляет общности применяемого рассуждения, нацеленного на доказательство неравенств (1.6).

Для доказательства правого неравенства (1.6) следует оценить интеграл (1.4), что достижимо оценкой величины

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|b_0(re^{i\vartheta},\rho_1 e^{i\varphi_1})\right| \log\left|b_0(re^{i\vartheta},\rho_2 e^{i\varphi_2})\right| d\vartheta$$

$(0 < r, \rho_1, \rho_2 < 1,\ \varphi_{1,2} \in [0,2\pi])$, где

$$\log|b_0(z,\zeta)| = -\mathrm{Re}\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{dt}{(1-\frac{z}{\zeta}t)t} = \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\right| - \log\frac{1}{|\zeta|} < 0 \tag{2.1}$$

частный вид фактора типа Бляшке из [1]. Отметив, что $I(r,\zeta_1,\zeta_2)$ очевидно является непрерывной функцией от r, ρ_1, ρ_2 и φ_1, φ_2, рассмотрим два отдельных случая. Однако, предварительно заметим, что если $z = re^{i\vartheta}$ и $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ - точки единичного круга и $r/\rho < 1$, то

$$\frac{z}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}t} = \frac{z}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}t\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k+1} t^k,$$

и, тем самым,

$$\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\rho e^{i\varphi})\right| = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho^2}^1 t^k dt - \log\frac{1}{\rho^2}. \tag{2.2}$$

Отметим также, что при любых целых числах $k, n \geq 0$ и любом $\varphi_{1,2} \in [0,2\pi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi_1)\right]\cos\left[(n+1)(\vartheta-\varphi_2)\right]d\vartheta \tag{2.3}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq n, \\ \frac{1}{2}\cos\left[(k+1)(\varphi_1-\varphi_2)\right] & \text{при} \quad k = n. \end{cases}$$

(a) Пусть $\zeta_{1,2} = \rho_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}$, $0 < d_0 \leq \rho_1, \rho_2 < 1$ и $0 < r < \rho_1, \rho_2$. Тогда $r/\rho_{1,2} < 1$ и, ввиду (2.2), (2.3) нетрудно вычислить

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{2}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_2}{t_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\varphi_1-\varphi_2)\right] + \log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2}.$$

Здесь $0 < \frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2} < t_1t_2 < 1$, и поэтому вычислением последней суммы получаем

$$(2.4)\qquad I(r,\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1^3}\log\frac{1}{\rho_2^2},$$

где

$$P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)=\frac{1-\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2+4\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}$$

- ядро Пуассона, и, тем самым,

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2)\le\frac{1}{2d_0^2}\int_{\rho_1^2}^1 dt_1\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_2}{1-t_1t_2}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}$$
$$=\frac{1}{2d_0^2}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{1-(1-x)(1-y)}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}.$$

Здесь же $x\le 1-d_0^2<(1-d_0^2)(\frac{x}{y}+1)$, и тем самым $1-(1-x)(1-y)=x+y-xy>d_0^2(x+y)$. Следовательно

$$(2.5)\qquad I(r,\zeta_1,\zeta_2)\le\frac{1}{2d_0^4}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}$$

при $0<d_0\le\rho_{1,2}<1$ и $0<r<\rho_{1,2}$.

(б) Пусть $0<d_0\le\rho_{1,2}<r<1$. Тогда для аналогичного вычисления заметим, что если $|\zeta|<|z|<1$ (т.е. $\rho<r<1$), то ввиду (2.1)

$$\log|b_0(z,\zeta)|=-\mathrm{Re}\frac{z}{\zeta}\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta/z|}\frac{dt}{1-\frac{z}{\zeta}t}-\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta/z|}\frac{dt}{t}+\mathrm{Re}\frac{\zeta}{z}\int_{|\zeta/z|}^1\frac{dt}{\left(1-\frac{\zeta}{zt}\right)t^2}$$
$$=-\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho^2}^{\rho/r}t^k dt-\log\frac{1}{r\rho}$$
$$+\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho/r}^1 t^{-k-2}dt.$$

Поэтому, пользуясь (2.3) получаем

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2)=\log\frac{1}{r\rho_1}\log\frac{1}{r\rho_2}-\frac{1}{4}\log^2\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^{\rho_1/r}\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^{\rho_2/r}P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}$$
$$+\frac{1}{4}\int_{\rho_1/r}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2/r}^1 P\left(\frac{\rho_1\rho_2}{r^2t_1t_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}$$
$$-\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^{\rho_1/r}\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2/r}^1 P\left(\frac{\rho_2t_1}{\rho_1t_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}$$
$$-\frac{1}{4}\int_{\rho_1/r}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^{\rho_2/r}P\left(\frac{\rho_1t_2}{\rho_2t_1},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}.$$

Выбросив последние два отрицательных члена и рассуждая как в предыдущем случае (a) получим, что при $0 < d_0 \le \rho_1, \rho_2 < r < 1$

$$(2.6)\qquad I(r,\zeta_1,\zeta_2) \le \frac{1}{2d_0^4}\left(1+\frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y} + \log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2}.$$

Перейдя к интегралу от квадрата потенциала Грина, заметим, что

$$(2.7)\qquad J(r) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{|\zeta|<1}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{|\zeta|\le r}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{r<|\zeta|<1}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta$$
$$= 2\left(\iint_{|\zeta_1|\le r}\iint_{|\zeta_2|\le r} + \iint_{r<|\zeta_1|<1}\iint_{r<|\zeta_1|<1}\right) I(r,\zeta_1,\zeta_2)\,d\nu(\zeta_1)\,d\nu(\zeta_2),$$

а отсюда, ввиду (2.5) и (2.6), получаем

$$J(r) \le 2\left(\iint_{|\zeta|<1}\log\frac{1}{|\zeta|^2}d\nu(\zeta)\right)^2 + \frac{1}{2d_0^4}\left(2+\frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}.$$

Далее, при любых числах $\rho_{1,2} \in [d_0, 1)$

$$\log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2} \le \frac{1}{d_0^4}(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2) \le \frac{2}{d_0^4}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y},$$

и поэтому

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta = \sup_{0<r<1}J(r) \le \frac{1}{d_0^4}\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y},$$

т.е. доказано правое неравенство в (1.6).

Для доказательства левого неравенства в (1.6) сначала отметим, что если замыкание множества $\operatorname{supp}\nu(\zeta)$ содержится в некотором круге $|\zeta| < d_0 < 1$, то функция $\mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$ $(\zeta_{1,2} \in \operatorname{supp}\nu(\zeta))$ ограничена, и поэтому

$$+\infty > \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta > C_{d_0}\iint_{|\zeta_1|<\delta}\iint_{|\zeta_2|<\delta}\mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)\,d\nu(\zeta_1)\,d\nu(\zeta_2)$$

с некоторой постоянной $C_{d_0} > 0$ зависящей только от d_0. Для случая же, когда $\operatorname{supp}\nu(\zeta)$ имеет предельные точки на окружности $|\zeta| = 1$, заметим, что для величины $J(r)$ из (2.7)

$$\sup_{0<r<1} J(r) \geq J(1/3) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta|<1} \log\left|b_0(e^{i\vartheta}/3,\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta$$
$$= \iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_1|<1}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_2|<1} I(1/3,\zeta_1,\zeta_2)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2),$$

где, ввиду (2.4),

$$I(1/3,\zeta_1,\zeta_2) > \frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 \frac{1-\left(\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2+4\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}}\frac{dt_2}{t_2}$$
$$\geq \frac{1}{8}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 \frac{1-\left(\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}\frac{dt_2}{t_2} = \frac{1}{8}\int_{\rho_1/3}^1\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{\rho_2/3}^1\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}$$
$$> \frac{1}{8}\int_0^{1-\rho_1/3}dx\int_0^{1-\rho_2/3}\frac{dy}{x+y}dy > \frac{1}{8}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}dy.$$

Таким образом

$$\sup_{0<r<1} J(r) \geq \frac{1}{8}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_1|<1}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2),$$

левое неравенство (1.6) справедливо в любом случае, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\{P_n\}_1^\infty \subset \mathcal{P}_0$ - фундаментальная последовательность потенциалов, удовлетворяющих условию (1.4). Ввиду теоремы 1.1, это означает, что неотрицательные борелевские меры $\{\nu_n\}_1^\infty$, генерирующие $\{P_n\}_1^\infty$, удовлетворяют условию (1.5), и для любого $\varepsilon > 0$

$$\rho^2(P_{n+m},P_n) = \iint_{|\zeta_1|<1}\iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_1)|d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_2)| < \varepsilon$$

при достаточно большом $N_\varepsilon \geq 1$ и любых $n \geq N_\varepsilon$ и $m \geq 1$. Для доказательства существования потенциала $P(z) \in \mathcal{P}_0$, такого что $\rho(P_n, P) \to 0$ при $n \to \infty$, будем пользоваться некоторыми хорошо известными результатами из [3].

Зафиксировав произвольное число $\delta \in (0,1)$, заметим, что

$$\left(\iint_{|\zeta|\leq\delta} d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta)|\right)^2$$
$$\leq \frac{2}{(1-\delta^2)^2}\iint_{|\zeta_1|\leq\delta}\iint_{|\zeta_2|\leq\delta}\mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_1)|d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_2)|$$
$$\leq \frac{2}{(1-\delta^2)^2}\rho^2(P_{n+m},P_n) < \frac{2\varepsilon}{(1-\delta^2)^2}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $N'_\varepsilon \geq 1$ такое, что

$$\iint_{|\zeta|\leq\delta} d|(\nu_{n+m} - \nu_n)(\zeta)| < \varepsilon, \quad n \geq N'_\varepsilon, \ m \geq 1.$$

Отсюда следует, что последовательность чисел $\{\nu_n(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\}_1^\infty$ фундаментальна, и поэтому $0 \leq \nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta) \leq A_\delta < +\infty$, $n \geq 1$. Кроме того, последовательность борелевских мер $\{\nu_n\}_1^\infty$ фундаментальна на линейном многообразии Φ_δ вещественных, непрерывных функций в круге $\overline{\mathbb{D}}_\delta = \{\zeta : |\zeta| \leq \delta\}$, и поэтому, ввиду теоремы 0.4′ из [3], существует Борелевская мера $\nu_* \geq 0$ на $\overline{\mathbb{D}}_\delta$ такая, что в Φ_δ справедлива слабая сходимость $\nu_n \Rightarrow \nu_*$, $n \to \infty$, т.е. при любой функции $g(\zeta) \in \Phi_\delta$

$$\iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)d\nu_n(\zeta) \to \iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)d\nu_*(\zeta) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Далее, ввиду очевидного неравенства $\left|\rho(P_{n+m}, 0) - \rho(P_n, 0)\right| \leq \rho(P_{n+m}, P_n)$ также последовательность чисел $\{\rho(P_n, 0)\}_1^\infty$ фундаментальна, и поэтому

$$\rho(P_n, 0) \to b < +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \rho(P_n, 0) \leq B < +\infty, \quad n \geq 1. \tag{2.8}$$

В силу теоремы 0.6 из [3] существует последовательность $n_k \uparrow +\infty$ такая, что при $k \to \infty$ в Φ_δ имеем $\nu_{n_k} \Rightarrow \nu^\delta$, где $\nu^\delta \geq 0$ - борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}_\delta$. Теперь, полагая, что рассмотренное $\delta \in (0,1)$ - первый член некоторой последовательности $\delta_m \uparrow 1$, для δ_2 как выше выберем подпоследовательность из $\{n_k\}_1^\infty$, из чего - подпоследовательность для δ_3, и т.д. Затем, перейдя к диагональной последовательности $\{n_m\}_1^\infty$ заметим, что $\nu_{n_m} \Rightarrow \nu$ при $m \to \infty$ в Φ_δ с любым $\delta \in (0,1)$, где $\nu \geq 0$ - борелевская мера уже на всем круге $\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Далее, заметим, что ввиду фундаментальности последовательности чисел $\{\nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\}_1^\infty$ при любом $\delta \in (0,1)$, при любом $\delta \in (0,1)$

$$\left|(\nu_n - \nu)(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| \leq \left|(\nu_n - \nu_{n_m})(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| + \left|(\nu_{n_m} - \nu)(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| < \varepsilon$$

для достаточно большого $m \geq 1$ и любого $n > n_m$. Отсюда следует, что $\nu_n(\overline{\mathbb{D}}_\delta) \to \nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta)$ при $n \to \infty$, и очевидно $\nu_n \Rightarrow \nu$ при $n \to \infty$ в Φ_δ с любым $\delta \in (0,1)$. Далее, полагая что $\{r_k\}_0^\infty \subset (0,1)$ - возрастающая последовательность, ввиду (2.8) получим

$$\begin{aligned} B &\geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \iint_{r_{k-1}<|\zeta_1|\leq r_k} \iint_{r_{m-1}<|\zeta_2|\leq r_m} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|)d\nu_n(\zeta_1)d\nu_n(\zeta_2) \\ &\geq \iint_{r_{k-1}<|\zeta_1|\leq r_k} \iint_{r_{m-1}<|\zeta_2|\leq r_m} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2) = \rho^2(P, 0), \end{aligned}$$

где $P(z)$ - потенциал Грина, генерированный мерой ν. Итак $\rho(P,0) < +\infty$. Теперь, введя в рассмотрение следующие функции от $r \in (0,1)$:

$$\varphi_n(r) = \iint_{|\zeta_1|<r} \iint_{|\zeta_2|<r} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|) d\nu(\zeta_1) d\nu(\zeta_2), \quad n \geq 1,$$

заметим, что $\varphi_n(r) \nearrow \rho(P_n, 0)$ при любом $n \geq 1$. Положив $\varphi_n(1) = \rho(P_n, 0)$ $(n \geq 1)$ получим фундаментальную на всем отрезке $[0,1]$ последовательность функций, непрерывных в точке $r = 1$. Предельная функция $\varphi(r) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(r)$ неубывающая и непрерывная в $r = 1$, и $\varphi(1) = \rho(P,0)$, поскольку $\rho(P_r, 0) \to \rho(P,0)$ при $r \to 1-0$ для потенциалов $P_r(z)$, генерированных мерами $\chi_{\mathbb{D}_r}(\zeta)\nu(\zeta)$, где $\chi_{\mathbb{D}_r}(\zeta)$ - характеристическая функция круга $\mathbb{D}_r$. С другой стороны $\lim_{n\to\infty} [\varphi_n(1) - \varphi_n(r)] = \varphi(1) - \varphi(r) < \varepsilon$ когда r достаточно близко к 1. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $r_\varepsilon \in (0,1)$ и $N_\varepsilon \geq 1$ такие, что $0 \leq \varphi_n(1) - \varphi_n(r) < \varepsilon$ при $r_\varepsilon < r < 1$ и $n \geq N_\varepsilon$. Теперь заметим, что при любых $r \in (0,1)$ и $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\rho(P,P_n) \leq & \iint_{|\zeta_1|<r} \iint_{|\zeta_2|<r} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|) d|(\nu-\nu_n)(\zeta_1)| d|(\nu-\nu_n)(\zeta_2)| \\ & + \iint\iint_{(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\setminus(\mathbb{D}_r\times\mathbb{D}_r)} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|) d\nu(\zeta_1) d\nu(\zeta_2) \\ & + \iint\iint_{(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\setminus(\mathbb{D}_r\times\mathbb{D}_r)} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|) d\nu_n(\zeta_1) d\nu_n(\zeta_2) \equiv I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

где $I_2 = \varphi(1) - \varphi(r)$ и $I_3 = \varphi_n(1) - \varphi_n(r)$. Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 \in (0,1)$ такое, что $0 \leq I_{2,3} < \varepsilon$ при $n > N_{\varepsilon,r_0}$, а $0 \leq I_1 < \varepsilon$ при $n > N'_{\varepsilon,r_0}$, поскольку $\nu_n \Rightarrow \nu$ при $n \to \infty$ в Φ_{r_0}. Таким образом $\rho(P,P_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и доказательство завершено.

Abstract. The paper is devoted to investigation of the class of Green potentials in the unit disc of the complex plane, which possess bounded square integral means.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, 2, 3-40 (1948).

[2] A. M. Jerbashian, "Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc", in: Operator Theory: Advances and Applications, 190, The Mark Kreiu Centenary Conference, 1: Operator Theory and Related Topics, 335-340 (Birkhäuser, 2009).

[3] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала* (Наука, Москва, 1966).

Поступила 25 марта 2013

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 35-51.

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет
Ереванский государственный университет
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Для одного класса невырожденных (регулярных) почти гипоэллиптических уравнений, одновременно являющихся частично гипоэллиптическими по определенным переменным, выделяются бесконечно дифференцируемые в определенной полосе решения.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: гипоэллиптический; (почти гипоэллиптический; частично гипоэллиптический; невырожденный) оператор; мультианизотропные пространства Соболева.

1. Введение

После основополагающих работ Л. Хермандера (см. например, [1] - [3]), посвященных линейным гипоэллиптическим дифференциальным уравнениям, все решения из класса распределений (см. [4] или [5]) которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями, естественным образом возник вопрос о нахождении априорных условий на решение негипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$, при которых это решение является бесконечно дифференцируемой функцией, или, что то же, вопрос о выделении бесконечно дифференцируемых решений негипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$ из множества решений этого уравнения из определенного класса (например, из класса распределений).

Первые результаты в этом направлении принадлежат Л. Гордингу, Б. Мальгранжу, Л. Еренпрайсу, Дж. Питре и другим. В работе [6] Л. Гординга и Б. Мальгранжа введено понятие частично гипоэллиптического оператора $P(D)$. Это такие операторы, для которых все решения из класса распределений, отвечающих им дифференциального уравнения $P(D)u = f$ с бесконечно дифференцируемой правой частью, являются бесконечно дифференцируемыми, если априори предполагать, что эти решения бесконечно дифференцируемы по определенным переменным.

Введем ряд обозначений и определений, необходимых для дальнейшего: пусть N множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$ множество $n-$ мерных мультииндексов, E^n и R^n $n-$мерные евклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Для $\xi \in R^n, x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, ..., n)$.

Пусть $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его характеристический многочлен (полный символ), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n; \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Пусть Ω область из E^n. Через $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество финитных в Ω функций из $C^\infty(\Omega)$, а через $D'(\Omega)$ множество распределений (обобщенных функций) на $D(\Omega)$ (см. [4] или [5]).

Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется **гипоэллиптическим** (см. [3], определение 11.1.2 и теорему 11.1.1), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) если $u \in D'(\Omega)$ решение уравнения $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$, 2) если $|\xi| \to \infty$, и $0 \neq \alpha \in N_0^n$, то $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$.

Пусть $n \geq 2, 1 \leq k < n$. Представим точки $x \in E^n$ в виде $x = (x', x'')$, где $x' = (x_1, ..., x_k), x'' = (x_{k+1}, ..., x_n)$ (соответственно для точек $\xi \in R^n$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in N_0^n$).

Оператор $P(D)$ называется **частично гипоэллиптическим** относительно гиперплоскости $x'' = 0$ (многочлен $P(\xi)$ называется частично гипоэллиптическим по ξ''), если для всех $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0$, когда $|\xi''| \to \infty$, а $|\xi'|$ остается ограниченным (см. [6] или [3], определение 11.2.4).

В [6] было доказано, что если решение $u \in D'(\Omega)$ частично гипоэллиптического относительно гиперплоскости $x'' = 0$ уравнения $P(D)u = 0$, является гладкой по переменным x', то $u \in C^\infty(\Omega)$. Далее многими авторами в разных направлениях было обобщено понятие гипоэллиптичности или частичной гипоэллиптичности (см., например Л. Еренпрайс [7], Ж. Питре [8], Е. А. Горин [9], Ю. В. Егоров [10], Дж. Фриберг [11], Р. Дж. Елиот [12], [13] и другие).

В частности, в работе [14] Я. С. Бугров построил пример негипоэллиптического уравнения, все решения которого являются бесконечно дифференцируемыми в полупространстве функциями, если они вместе с некоторыми их производными интегрируемы с квадратом.

В работах [15], [16] В. И. Буренков изучил уравнение $P(D)u = f$ в цилиндре $\Omega = \Omega_l \times E^{n-l}$, где $0 \leq l < n$ и Ω_l область из E^l, а f и все её производные $l-$ локально квадратично интегрируемы. Им получены необходимые и достаточные условия при которых любое локально квадратично интегрируемое в Ω вместе со своими некоторыми производными решение уравнение $P(D)u = f$ является бесконечно дифференцируемой в Ω функцией.

В [17] мы ввели понятие почти гипоэллиптического многочлена (оператора), а в работах [18] и [19] (совместно с В. Н. Маргаряном) доказали, что при $f \in C^\infty(E^n)$ и $\delta > 0$ все решения дифференциального уравнения $P(D)u = f$, которые интегрируемы с экспоненциальным весом $e^{-\delta|x|}$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями в E^n тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ почти гипоэллиптичен. При этом (см. [17]) оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется **почти гипоэллиптическим**, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$|P^{(\alpha)}(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \leq C \;\; \forall \xi \in R^n, \;\; \forall \alpha \in N_0^n.$$

Пусть $A = \{\alpha^j = (\alpha_1^j, ..., \alpha_n^j)\}_1^M$ конечный набор мультииндексов из N_0^n. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки A назовем **многогранником Ньютона** множества A.

Многогранник $\Re = \Re(P)$, построенный на наборе $(P) \cup \{0\}$ оператора $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$ назовем многогранником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) (см. [20] или [21]).

Определение 1.1. *(см. [20] - [22]) Пусть $R_+^n = \{x \in R^n : x_j \geq 0; \; j = 1, ..., n\}$. Многогранник $\Re \subset R_+^n$ с вершинами из N_0^n назовем* ***полным****, если $\Re$ имеет вершины на каждой координатной оси и в начале координат N_0^n. Полный многогранник $\Re$ назовем* ***правильным (вполне правильным)****, если все координаты внешних нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re$ неотрицательны (положительны).*

Оказывается, что многогранник Ньютона гипоэллиптического оператора является вполне правильным, а многогранник Ньютона почти гипоэллиптического оператора - правильным (см. [22], Лемма 2.1).

Всюду далее четные числа $m, m_2, m_3, ..., m_n$ $(m > m_j; j = 2, 3, ..., n)$ фиксированы, при этом через $\Re = \Re(m, m_2, ..., m_n) \subset R_+^n$ мы обозначим многогранник с вершинами $(0, ..., 0)$, $(m, 0, ..., 0)$, $(0, m, ..., 0)$, ..., $(0, 0, ..., m)$ и $(m, m_2, 0, ..., 0)$, $(m, 0, m_3, 0, ..., 0)$, ..., $(m, 0, ..., 0, m_n)$.

Легко убедиться, что это правильный многогранник. Однако многогранник $\Re$ не является вполне правильным, так как (единичная) внешняя нормаль $(n-1)$−мерной грани с вершинами $(m, 0, ..., 0), (m, m_2, 0, ..., 0), ..., (m, 0, ..., 0, m_n)$ является вектор $(1, 0, ..., 0)$. Геометрически это означает, что эта грань перпендикулярна координатной оси $0\alpha_1$.

В настоящей работе мы рассматриваем линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, D_2, ..., D_n)$ с вещественными коэффициентами и с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3, ..., m_n)$. При этом будем считать, что характеристический многочлен $P(\xi)$, отвечающий этому оператору является невырожденным (регулярным) в том смысле, что с некоторой положительной постоянной μ_1 справедливо неравенство

$$1 + |P(\xi)| \geq \mu_1 \sum_{\alpha \in \Re} |\xi^\alpha|, \quad \forall \xi \in R^n. \tag{1.1}$$

Простые вычисления показывают (см., например, [20] или [22]), что для любого многочлена $P(\xi)$ с правильным многогранником Ньютона существует число $\mu_2 > 0$ такое, что для всех $l = 0, 1, ...$

$$|D_1^l P(\xi)| \leq \mu_2 \left[1 + \sum_{(\alpha_1 + l, \alpha'') \in \Re} |\xi^\alpha|\right], \quad \forall \xi \in R^n. \tag{1.2}$$

Также легко убедиться в том, что многочлен $P(\xi)$, с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3, ..., m_n)$, удовлетворяющий условиям (1.1), (1.2) является почти гипоэллиптическим (см. [22]) и частично гипоэллиптическим относительно $\xi'' = (\xi_2, ..., \xi_n)$ (см. [3], теорема 11.2.3). Отметим,что в связи с изучением единственности решения задачи Дирихле, общие невырожденные уравнения с полными многогранниками Ньютона впервые рассмотрены С. М. Никольским (см. [23]). В. П. Михайловым в [20] найдены необходимые и достаточные условия, при которых многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона является невырожденным. В частности, там доказано, что вершины многогранника Ньютона невырожденного многочлена с вещественными коэффициентами имеют чётные координаты. Этим и мотивируется наше предположение о четности чисел $m, m_2, ..., m_n$.

Для $\kappa > 0$ обозначим $\Omega_\kappa = \{x \in E^n : |x_1| < \kappa\}$. Целью настоящей работы является доказательство существования числа $\kappa_0 > 0$ такого, что при $\kappa \geq \kappa_0$ все решения $u \in D'(\Omega_\kappa)$ уравнения $P(D)u = 0$, которые удовлетворяют условиям $D^{(0, \alpha_2, ..., \alpha_n)} u \in L_2(\Omega_\kappa)$ для $\alpha \in N_0^n$; $\alpha_2 + ... + \alpha_n \leq m$, принадлежат $C^\infty(\Omega_\kappa)$. Эти условия намного слабее, чем соответственные условия в [14], [15] или [6].

Пусть $\Re \subset R_+^n$ произвольный полный многогранник, $\alpha'' = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha'') \in N_0^n$. Обозначим через $\Re'$ множество мультииндексов $\alpha \in \Re$ таких,что $(\alpha_1 + 1, \alpha'') \notin \Re$. Для выделения гладких решений исследуемого уравнения, нам необходимо построить на множестве N_0^n функцию $d(\alpha)$, принимающую целочисленные значения и такую, что

1) $d(\alpha_1 \pm l, \alpha'') = d(\alpha) \pm l$ для всех $l \in N, \alpha_1 - l \in N_0$,
2) $d(\alpha) < m$ для $\alpha \in \Re \setminus \Re'$
3) $d(\alpha) = m$ для $\alpha \in \Re'$.

Так как при построении такой функции мы часто будем пользоваться геометрическими соображениями, то далее ограничимся трёхмерным случаем.

2. Построение функции $d(\alpha)$

Итак, всюду далее $n = 3$, четные числа m, m_2, m_3, $(m > m_j; j = 2, 3)$ фиксированы, при этом через $\Re = \Re(m, m_2, m_3) \subset R^3_+$ мы обозначим многогранник с вершинами $(0,0,0)$, $(m,0,0), (0,m,0), (0,0,m)$ и $(m,m_2,0), (m,0,m_3)$. Легко убедиться, что это правильный (но не вполне правильный) многогранник, ограниченный координатными плоскостями $\xi_j = 0$ $(j = 1,2,3)$ и плоскостями

$$P_1 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_1(\xi) \equiv \frac{1}{m}\xi_1 = 1\},$$

$$P_2 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_2(\xi) \equiv \frac{m-m_2}{m^2}\xi_1 + \frac{1}{m}(\xi_2 + \xi_3) = 1\},$$

$$P_3 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_2(\xi) \equiv \frac{m-m_3}{m^2}\xi_1 + \frac{m_3}{m_2}\frac{1}{m}\xi_3 + \frac{1}{m}\xi_3 = 1\}.$$

Для построения функции $d(\alpha)$, удовлетворяющей условиям 1) - 3), обозначим

$$A(\alpha) = \frac{m[|\alpha''| - m_2]}{m - m_2};\ B(\alpha) = \frac{m[\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3]}{m - m_3}$$

и для любого $\alpha \in \Re \cap N_0^3$ положим

$$d(\alpha) = [\max\{\alpha_1, \alpha_1 + A(\alpha), \alpha_1 + B(\alpha)\}]', \tag{2.1}$$

где $[a]' = [a] = a$, если a целое число и $[a]' = [a] + 1$, в противном случае.

Нам будет удобно видоизменить формулу (2.1). Для этого проведем в R^3 плоскость P_4, проходящую через точки (вершины многогранника $\Re$) $(0, m_2, 0), (0,0,m)$ и $(m, m_2, 0)$. Уравнение этой плоскости будет

$$P_4 = \{\xi \in R^3; \Delta_4(\xi) \equiv \frac{\xi_2}{m_2} + \frac{\xi_3}{m} = 1\}.$$

Далее запись $\alpha \in \Re$ будет означать, что $\alpha \in \Re \cap N_0^3$, а запись $\alpha \in P_j$ что $\alpha \in P_j \cap \Re$ $(j = 1, ..., 5)$ (определение P_5 см. ниже). Плоскость P_4 делит множество $\Re \bigcap N_0^n$ на два подмножества: $\Im_1 = \{\alpha \in \Re; \Delta_4(\alpha) \le 1\}$ и $\Im_2 = \Re \setminus \Im_1$, при этом имеет место

Лемма 2.1. *Выполнены следующие утверждения:*

1) для точек $\alpha \in P_4$ числа $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ целые, при этом $A(\alpha) = B(\alpha) = \alpha_3$;

2) при $m_3 = m_2$ $A(\alpha) = B(\alpha)$ для всех $\alpha \in \Re$;

3) если $m_3 < m_2$, то $A(\alpha) \le B(\alpha)$ при $\alpha \in \Im_1$ и $A(\alpha) > B(\alpha)$ при $\alpha \in \Im_2$, а в случае $m_3 > m_2$, наоборот.

Доказательство. Так как пункты 2) и 3) получаются простыми вычислениями, то докажем только первый пункт. Для точек $\alpha \in P_3$ имеем $\frac{\alpha_2}{m_2}+\frac{\alpha_1}{m} = 1$. Умножая обе части этого соотношения на $m(m_2 - m_3)$, получим

$$\frac{m}{m_2}(m_2 - m_3)\alpha_2 + (m_2 - m_3)\alpha_3 = m(m_2 - m_3).$$

Представим полученное равенство в виде

$$(m - m_3)\alpha_2 + (m - m_3)\alpha_3 - m_2(m - m_3) =$$

$$= \frac{m_3}{m_2}(m - m_2)\alpha_2 + (m - m_2)\alpha_3 - (m - m_2)m_3.$$

Деля обе части полученного равенства на $\frac{(m-m_2)(m-m_3)}{m}$, получим

$$A(\alpha) = m\frac{|\alpha''| - m_2}{m - m_2} = m\frac{\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3}{m - m_3} = B(\alpha) = \alpha_3.$$

Лемма 2.1 доказана. $\square$

За счет перенумерации координатных осей N_0^3 можно считать, что $m_3 \le m_2$. Поэтому всюду далее будем считать, что $m_3 \le m_2$ и свойства 1) - 3) функции $d(\alpha)$ мы докажем только в этом случае. Исходя из леммы 2.1, формулу (2.1) можно преобразовать так

$$d(\alpha) = \max\{\alpha_1, \alpha_1 + [B(\alpha)]'; \ \ \alpha \in \Im_1\}, \tag{2.2}$$

$$d(\alpha) = max\{\alpha_1, \alpha_1 + [A(\alpha)]'; \ \ \alpha \in \Im_2\}, \tag{2.3}$$

К доказательству свойств 1)-3) функции $d(\alpha)$ предпошлем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Для точек $\alpha \in (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ числа $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ целые, при этом $d(\alpha) = m$.*

Доказательство. Точки $(0, m_2, 0)$, $(0, 0, m_3)$, $(m, 0, m_3)$ и $(m, m_2, 0)$, лежат на плоскости $P_5 := \{\xi \in R^3, \ \Delta_5(\xi) \equiv \frac{\xi_2}{m_2} + \frac{\xi_3}{m_3} = 1\}$, поэтому для точек $\alpha \in P_5$ справедливо соотношение $\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3 = m_3(\frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_3} - 1) = 0$. Это значит, что $B(\alpha) = 0$ для точек $\alpha \in P_5$ и поэтому $B(\alpha) = 0$ для точек $\alpha \in \Gamma_0$ одномерной грани $\Gamma_0 := \{(m, 0, m_3) - (m, m_2, 0))\} \subset P_5$ многогранника $\Re$. Так как $\alpha_1 = m$ для точек $\alpha \in \Gamma_0 \subset P_1$ и точки $\alpha \in P_5$ лежат в $\Im_1$, то функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.2), поэтому $d(\alpha) = \alpha_1 = m$ для точек $\alpha \in \Gamma_0$. Точки $\alpha \in P_1 \setminus \Gamma_0$ лежат под плоскостью P_5, поэтому для них $B(\alpha) < 0$ и опять $d(\alpha) = \alpha_1 = m$.

Пусть $\alpha \in P_3 \subset \Im_1$, т.е. функция $d(\alpha)$ опять определяется формулой (2.2). Для таких точек $\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 = m - \frac{m-m_3}{m}\alpha_1$. Поэтому

$$\alpha_1 + B(\alpha) = \alpha_1 + [m\frac{m - \frac{m-m_3}{m}\alpha_1 - m_3}{m - m_3}]' = \alpha_1 + [m(1 - \frac{\alpha_1}{m})]' = m.$$

Таким образом доказано, что для $\alpha \in P_3$ число $B(\alpha)$ целое и, так как $\alpha_1 \le m$ для всех точек $\alpha \in \Re$, то $d(\alpha) = \max\{\alpha_1, m\} = m$.

Пусть $\alpha \in P_2 \subset \Im_2$, т.е. функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3). Тогда $\alpha_2 + \alpha_3 = m - \frac{m-m_2}{m}\alpha_1$, поэтому

$$A(\alpha) = \alpha_1 + [m\frac{m - \frac{m-m_2}{m}\alpha_1 - m_2}{m-m_2}]' = \alpha_1 + [m(1 - \frac{\alpha_1}{m})]' = m,$$

т.е. $A(\alpha)$ целое для точек $\alpha \in P_2$ и $d(\alpha) = m$. Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Функция $d(\alpha)$, определенная формулами (2.2), (2.3) удовлетворяет условиям 1) - 3).*

Доказательство. Первое свойство очевидно. Сначала докажем свойство 3). Точки $\alpha \in (P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cap \Re$ принадлежат $\Re'$. Для таких точек свойство 3) следует из леммы 2.2. Пусть поэтому $\alpha \in \Re' \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$. Тогда $\alpha_1 < m$, $\Delta_2(\alpha) < 1$, $\Delta_3(\alpha) < 1$ и $(\alpha_1 + 1, \alpha'') = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3) \notin \Re$.

Докажем свойство 3) для точек $\alpha \in \Im_1$, т.е. при $\Delta_4(\alpha) \leq 1$, $\Delta_3(\alpha) < 1$, при этом, так как $(\alpha_1 + 1, \alpha'') \notin \Re$, то либо $\alpha_1 + 1 > m$ (т.е. точка $(\alpha_1 + 1, \alpha'')$ покидает $\Re$, пересекая плоскость P_1), либо $\Delta_3(\alpha_1 + 1, \alpha'') > 1$ (т.е. точка $(\alpha_1 + 1, \alpha'')$ покидает $\Re$, пересекая плоскость P_3.)

Так как мы рассматриваем точки $\alpha \in \Re' \setminus P_1$, то первый случай исключается. Во втором случае имеем

$$1 < \Delta_3(\alpha_1 + 1, \alpha'') = \Delta_3(\alpha) + \frac{m - m_3}{m^2} < 1 + \frac{m - m_3}{m^2},$$

$$m < \frac{m - m_3}{m}\alpha_1 + \frac{m_3}{m_2} + \alpha_3 + \frac{m - m_3}{m} < m + \frac{m - m_3}{m},$$

$$m - m_3 - \frac{m - m_3}{m}(\alpha_1 + 1) < \frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3 < (m - m_3) - \frac{m - m_3}{m}\alpha_1.$$

Так как $m_3 < m$, то отсюда имеем

$$1 - \frac{1}{m}(\alpha_1 + 1) < \frac{\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3}{m - m_3} < 1 - \frac{\alpha_1}{m},$$

что эквивалентно неравенству $m - 1 < \alpha_1 + B(\alpha) < m$.

Для точек $\alpha \in \Re' \setminus P_1$ $\alpha_1 \leq m - 1$, поэтому отсюда следует во первых, что $[B(\alpha)]' \geq B(\alpha) > 0$ и во вторых, что $B(\alpha)-$ число нецелое. Поэтому $d(\alpha) = max\{\alpha_1, \alpha_1 + [B(\alpha)]'\} = \alpha_1 + [B(\alpha)]'$ и $m - 1 \leq \alpha_1 + [B(\alpha)] < m$. Отсюда, и из свойства $[a]' = [a] + 1$ для нецелых a, получаем

$$m \leq \alpha_1 + [B(\alpha)] + 1 = \alpha_1 + [B(\alpha)]' < m + 1,$$

т.е. $m \leq d(\alpha) < m + 1$. Так как $d(\alpha)$ целое, то отсюда следует, что $d(\alpha) = m$. Свойство 3) функции $d(\alpha)$ для точек $\alpha \in \Im_1$ доказано.

Докажем это свойство для точек $\alpha \in \Im_2$, т.е. для точек, лежащих строго между плоскостями P_2 и P_4. Для таких точек $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3), при этом $\Delta_2(\alpha) < 1$, $(\alpha_1 + 1, \alpha'') \notin \Re$. Как выше получим, что либо

$\alpha_1+1>m$, либо $\Delta_2(\alpha_1+1,\alpha'')>1$. В первом случае имеем $m-1<\alpha_1\le m$, тогда $\alpha_1=m$, т.е. $\alpha\in P_1\cap\Re$. Для таких точек 3) доказано. Во втором случае

$$1<\Delta_2\left(\alpha_1+1,\alpha''\right)=\Delta_2(\alpha)+\frac{m-m_2}{m^2}<1+\frac{m-m_2}{m^2},$$

откуда следует, что

$$m<\frac{m-m_2}{m}\alpha_1+|\alpha''|+\frac{m-m_2}{m}<m+\frac{m-m_2}{m},$$

$$(m-m_2)-\frac{m-m_2}{m}(\alpha_1+1)<|\alpha''|-m_2<(m-m_2)-\frac{m-m_2}{m}\alpha_1.$$

Так как $m_2<m$, то отсюда имеем

$$1-\frac{1}{m}(\alpha_1+1)<\frac{|\alpha''|-m_2}{m-m_2}<1-\frac{\alpha_1}{m},$$

откуда в свою очередь следует, что $m-1<\alpha_1+A(\alpha)<m$. Это значит, что число $A(\alpha)$ не может быть целым. Тогда $m-1\le\alpha_1+[A(\alpha)]<m$, поэтому

$$m\le\alpha_1+[A(\alpha)]+1=\alpha_1+[A(\alpha)]'<m+1. \tag{2.4}$$

Так как для точек $\alpha\in\Im_2$ $\Delta_4(\alpha)>1$ и $m_2<m$, то $|\alpha''|-m_2>0$, поэтому $A(\alpha)>0$ и $d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[A(\alpha)]'\}=\alpha_1+[A(\alpha)]'$. Следовательно из (2.4) имеем $m\le d(\alpha)<m+1$. Так как $d(\alpha)$ целое, то отсюда следует, что $d(\alpha)=m$.

Таким образом свойство 3) для функции $d(\alpha)$ полностью доказано.

Докажем свойство 2) функции $d(\alpha)$ для точек $\alpha\in\Im_1$. Сначала заметим, что $\Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'')\le 1$ для точек $\alpha\in\Im_1\setminus\Re'$, поэтому

$$\frac{m-m_3}{m}(\alpha_1+1)+\left(\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3\right)\le m,$$

$$\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3\le(m-m_3)-\frac{m-m_3}{m}(\alpha_1+1),$$

откуда следует, что $B(\alpha)\le m-(\alpha_1+1)$. Если $\alpha\in P_4\setminus\Re'\subset\Im_1$, то по первому пункту леммы 2.1 $B(\alpha)=\alpha_3\ge 0$ и для таких точек

$$d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[B(\alpha)]'\}=max\{\alpha_1,\alpha_1+B(\alpha)\}=\alpha_1+B(\alpha)\le m-1,$$

что доказывает свойство 2) для точек $\alpha\in(P_4\cap\Re)\setminus\Re'\subset\Im_1$. Поэтому далее можем считать, что $\alpha\in\Im_1\setminus(P_1\cap\Re')$. Для таких точек $\Delta_4(\alpha)<1,\Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'')\le 1$ и $\alpha_1<m$. Если $B(\alpha)$ целое, то как выше, $d(\alpha)\le m-1$. Пусть $B(\alpha)$ нецелое, тогда $[B(\alpha)]'=[B(\alpha)]+1$, при этом $[B(\alpha)]<B(\alpha)\le m-(\alpha_1+1)$, т.е.

$$\alpha_1+[B(\alpha)]'=\alpha_1+[B(\alpha)]+1<\alpha_1+B(\alpha)+1\le m.$$

Так как $\alpha_1<m$, то отсюда следует $d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[B(\alpha)]'\}<m$, что доказывает свойство 2) для всех точек $\alpha\in\Im_1$.

Докажем свойство 2) для точек $\alpha \in \Im_2$. В этом случае функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3). Поступая как выше, для точек α : $\Delta_2(\alpha_1+1,\alpha'') \le 1$, $\Delta_4(\alpha) > 1$ получим $A(\alpha) \le m-(\alpha_1+1)$, при этом $A(\alpha) > 0$, так как

$$|\alpha''| - m_2 = m_2(\frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_2} - 1) > m_2(\frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m} - 1) > 0.$$

Если $A(\alpha)$ целое, то $d(\alpha) = max\{\alpha_1, \alpha_1 + A(\alpha)\} = \alpha_1 + A(\alpha) \le m-1$, если $A(\alpha)$ нецелое, то $d(\alpha) = \max\{\alpha_1, \alpha_1 + [A(\alpha)] + 1\} < \alpha_1 + A(\alpha) + 1 \le m$.

Так как $d(\alpha)$ целое , то в обоих случаях получаем, что $d(\alpha) \le m-1$ и свойство 2) для функции $d(\alpha)$ доказано для всех $\alpha \in \Re$. Лемма 2.3 доказана. □

3. Априорные весовые оценки

Введем весовую функцию $g(t)$ одной переменной $t \in R^1$ так, чтобы 1) $0 \le g(t) \le 1$, $g(-t) = g(t)$ для всех $t \in R^1$, и 2) $g(t) = 0$ для $|t| \ge 1$.

Пусть $\kappa > 0$ и $g_\kappa(t) = g(t/\kappa)$. Тогда очевидно, что 3) $g_\kappa^{(l)}(t) \equiv D^l[g_\kappa(t)] = \kappa^{-l}(D^l g)_\kappa(t)$ для $t \in (-\kappa,\kappa)$ и для всех $l = 0,1,\dots$

В качестве такой функции мы будем рассматривать, например, функцию $g(t) = [1/(2k)!](1-t^{2k})$ для $t \in (-1,1)$ и $g(t) = 0$ для $|t| \ge 1$ для любого $k \in N$.

Пусть многогранник $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$, множество $\Re'$ и функция $d(\alpha)$ определены как выше, $\kappa > 0$ и $\Omega_\kappa = \{x \in E^3, |x_1| < \kappa\}$. Ниже нам понадобится следующее предложение, доказанное в [24, следствия 2.1 и 2.2]

Лемма 3.1. *Существуют положительные числа C_1 и κ_1 такие, что для всех $\kappa \ge \kappa_1$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ справедливы следующие оценки*

$$\sum_{\alpha\in\Re} \|D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C_1[\sum_{\alpha\in\Re'} \|D^\alpha\varphi\ g_\kappa^m\|_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha''|\le m} \|D^{\alpha''}\varphi\ g_\kappa^{d(0,\alpha'')}\|_{L_2(\Omega_\kappa)}]. \tag{3.1}$$

$$\sum_{\alpha\in\Re} \|D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C_1[\sum_{\alpha\in\Re'} \|D^\alpha(\varphi\, g_\kappa^m)\|_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha''|\le m} \|D^{\alpha''}\varphi\ g_\kappa^{d(0,\alpha'')}\|_{L_2(\Omega_\kappa)}]. \tag{3.2}$$

В следующей лемме доказываются оценки, связанные с изучаемым оператором.

Лемма 3.2. *Пусть символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Тогда существуют положительные числа C и κ_0 такие, что для всех $\kappa \ge \kappa_0$*

$$\sum_{\alpha\in\Re} \|D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C[\|P(D)\varphi\ g_\kappa^m\|_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$(3.3) \qquad + \sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''}\varphi\, g_\kappa^{d(0,\alpha'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}] \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega\kappa).$$

Доказательство. Ниже, в доказательствах лемм 3.2 и 3.3 $||\cdot|| = ||\cdot||_{L_2(\Omega_\kappa)}$. Пусть $\kappa_2 \ge max\{m,\kappa_1\}$, где число κ_1 выбрано так, что выполняются неравенства (3.1) и (3.2). Применяя преобразование Фурье и ее обратное, а также равенство Парсеваля, для любого $\kappa>0$ и для всех $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ получаем

$$\sum_{\alpha\in\Re'} ||D^\alpha(\varphi\, g_\kappa^m)|| \le \mu^{-1}[\,||P(D)(\varphi\, g_\kappa^m)|| + ||\varphi\, g_\kappa^m||].$$

Отсюда и из (3.2) получаем, что для любого $\kappa\ge\kappa_2$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha\varphi\, g_\kappa^{d(\alpha)}|| \le C_1\mu^{-1}[\,||P(D)(\varphi\, g_\kappa^m)|| + ||\varphi\, g_\kappa^m|| +$$

$$(3.4) \qquad + C\sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''}\varphi\, g_\kappa^{d(0,\alpha'')}||\,] \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega\kappa).$$

Здесь следует отметить, что из определения функции g следует, что $\varphi g_\kappa^m \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ при $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$.

Оценим первое слагаемое правой части (3.4). Для этого применим обобщенную формулу Лейбница (см., например, [3] теорема 11.1.7), свойства 1) - 3) функции $d(\alpha)$ (Лемма 2.3), неравенство (1.2), равенство Парсеваля и свойство 3) функции g_κ. Получим, что для любого $\kappa\ge\kappa_2$ и для всех $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$

$$||P(D)(\varphi\, g_\kappa^m)|| \le ||(P(D)\varphi)\, g_\kappa^m)|| + \sum_{j\ge1}\frac{1}{j!}\,||\,[P^{(j,0'')}(D)\varphi]\;(D^j g_\kappa^m)|| \le$$

$$\le ||\,[P(D)\varphi]\, g_\kappa^m|| + C_2\,\mu_2 \sum_{\beta\in(P);\beta_1\ge1}\;\sum_{j=1}^{\beta_1}(\frac{2}{\kappa})^j\,||D^{(\beta_1-j,\;\beta'')}\varphi\, g_\kappa^{m-j}|| \le$$

$$\le ||(P(D)\varphi)\, g_\kappa^m)|| + \frac{2}{\kappa}\,C_2\, m\,\mu_2 \sum_{\beta\in(P)} ||D^\beta\varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}||,$$

где $P^{(j,0'')}(D)$ оператор, отвечающий многочлену $D_1^jP(\xi)$ $j=0,1,\ldots$ Здесь мы воспользовались тем, что для $\kappa\ge m\ge2$ имеет место неравенство $(2/\kappa)^j\le 2/\kappa$ для всех $j=1,2,\ldots$ Выберем число $\kappa_0 > max\{m, 2\,C_2\,\mu_2\, m\}$. Так как $(P)\subset\Re$, то переведя последний член последнего неравенства справа налево, деля обе части полученного неравенства на возникший положительный коэффициент и применяя неравенство (3.4), получим (3.3) для всех $\kappa\ge\kappa_0$. Лемма 3.2 доказана.

Далее для любого $k\in N_0$ через $\Re_k$ обозначим многогранник Ньютона набора мультииндексов $\{\alpha\in N_0^n; (\alpha_1-k,\alpha'')\in\Re'\}$. В следующем предложении число κ_0 выбрано так, что для всех $\kappa\ge\kappa_0$ выполняются неравенства (3.1) - (3.3).

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия леммы 3.2. Тогда для каждого* $k \in N_0$ *существуют числа* a_j $(j = 0, 1, ..., k+1)$ *такие, что для любого* $\kappa \geq \kappa_0$

$$\sum_{\beta \in \Re_k} \|D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq \sum_{j=0}^{k} a_j \|D_1^j (P(D)\varphi)\, g_\kappa^{m+j}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+a_{k+1} \sum_{|\alpha''| \leq m} \|D^{\alpha''} \varphi\, g_\kappa^{d(0,\alpha'')}\|_{L_2(\Omega_\kappa)}] \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega\kappa). \tag{3.5}$$

Доказательство. Применим индукцию по k. Так как $\Re_0 = \Re$, то при $k = 0$ неравенство (3.5) следует из неравенства (3.3). Предположим, что $r \in N_0$ и что неравенства (3.5) справедливы для всех $k \leq r$, докажем их для $k = r + 1$.

Применяя формулу Лейбница, получим $(d(\alpha_1 + r + 1, \alpha'') = d(\alpha) + r + 1)$

$$\sum_{\beta \in \Re_{r+1}} \|D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}\| = (\sum_{\beta \in \Re_{r+1} \setminus \Re_r} + \sum_{\beta \in \Re_r})\|D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}\| =$$

$$= \sum_{\alpha \in \Re} \|D^{(\alpha_1+r+1,\alpha'')} \varphi\, g_\kappa^{d(\alpha_1+r+1,\alpha'')}\| + \sum_{\beta \in \Re_r} \|D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}\|, \tag{3.6}$$

По предположению индукции неравенство (3.5) справедливо для $k = r$, поэтому вторая сумма в правой части (3.6) оценивается через правую часть (3.5) при $k = r$ и, следовательно, через правую часть (3.5) при $k = r+1$. Таким образом, остается оценить только первую сумму правой части (3.6). С этой целью применим еще раз формулу Лейбница, получим ($C_{\alpha_1}^j$ – биномиальные коэффициенты)

$$\sum_{\alpha \in \Re} \|D^{(\alpha_1+r+1,\alpha'')} \varphi\; g_\kappa^{d(\alpha_1+r+1,\alpha'')}\| =$$

$$= \sum_{\alpha_1=0} \|D^{\alpha''} [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)}\| + \sum_{\alpha_1 \geq 1} \|D^\alpha [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^j [D^{(\alpha_1-j+r+1,\alpha'')} \varphi]\; (D_1^j g_\kappa^{r+1})\; g_\kappa^{d(\alpha)}\| \leq \sum_{\alpha \in \Re} \|D^\alpha [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)}\| +$$

$$+ \sum_{\alpha \in \Re;\, \alpha_1 \geq 1} \sum_{j=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^j \|[D^{(\alpha_1-j+r+1,\alpha'')} \varphi]\; (D_1^j g_\kappa^{r+1})\; g_\kappa^{d(\alpha)}\|. \tag{3.7}$$

Пусть $\alpha \in \Re$, положим $l_j = l_j(\alpha_1) = max\{r + 1 - j, 0\}$, тогда a) $d(\alpha) + l_j(\alpha) \geq d(\alpha_1 - j + r + 1,\ \alpha'')$; b) так как для точек $x \in \Omega_\kappa$ $|g_\kappa(x_1)| \leq 1$ и $|x_1|/\kappa \leq 1$, то с некоторыми постоянными $b_j > 0$ имеем (здесь $\beta^j \equiv (\alpha_1 - j + r + 1, \alpha'') \in \Re_r$)

$$|D^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)| \equiv |D_1^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)| \leq b_j\, g_\kappa^{l_j}(x_1); \quad |x_1| \leq \kappa, \quad (j = 1, \cdots, \alpha_1)$$

$$|\, D^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)\, g_\kappa^{d(\alpha)}| \leq b_j\, g_\kappa^{d(\alpha)+l_j}(x_1) \leq b_j\, g_\kappa^{d(\alpha_1-j+r+1,\alpha'')}(x_1),$$

Таким образом вторая сумма в правой части (3.7) оценивается через левую часть (3.5) для $k = r$, что по предположению индукции оценивается через правую часть (3.5) для $k = r + 1$. Так как $D_1^{r+1}\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$, то из леммы 3.2 следует, что

$$\sum_{\alpha \in \Re} \|D^{\alpha}[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}]\; g_{\kappa}^{d(\alpha)}\| \leq C_1 \|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}]\; g_{\kappa}^{m}\| +$$

$$+ \sum_{|\alpha''| \leq m} \|D^{\alpha''}[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}]\; g_{\kappa}^{d(0,\alpha'')}\|. \tag{3.8}$$

Применяя обобщенную формулу Лейбница, для первого слагаемого получаем

$$P(D)[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}] = P(D)[D_1^{r+1}\varphi]\; g_{\kappa}^{r+1} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l!} P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\; D^l g_{\kappa}^{r+1}.$$

Отсюда имеем с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}]| \leq |P(D)[D_1^{r+1}\varphi]\; g_{\kappa}^{r+1}| + C_2 \sum_{l=1}^{m} (\frac{2}{\kappa})^l |P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi] D^l g_{\kappa}^{r+1}|.$$

Откуда в свою очередь следует, что для любого $\kappa \geq 2$

$$\|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\; g_{\kappa}^{r+1}]\; g_{\kappa}^{m}\| \leq \|P(D)[D_1^{r+1}\varphi] g_{\kappa}^{r+1+m}\| +$$

$$+ C_2\; \frac{2}{\kappa} \sum_{l=1}^{m} \|P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\; g_{\kappa}^{r+1+m}\|. \tag{3.9}$$

Пусть $P^{(l,0'')}(D) = \sum_{\nu \in (P);\, \nu_1 \geq l} \gamma_{\nu}^{l}\, D^{(\nu_1 - l,\, \nu'')}$ $(l = 1, \cdots, m)$. Тогда

$$P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\, g_{\kappa}^{r+1+m-l} = [\sum_{\nu \in (P)} \gamma_{\nu}^{l}\, D^{(\nu_1 + r + 1 - l,\, \nu'')}\varphi]\, g_{\kappa}^{r+1+m-l}.$$

Так как $r+1+m-l \leq r+1+m-1$ $(l = 1, ..., m)$ и $(r+m, \nu'') \in \Re_r$ для $\nu \in \Re$, то $(r+1+m-l, \nu'') \in \Re_r$ для всех $\nu \in \Re$ и $l = 1, ..., m$. С другой стороны, так как $0 \leq g_{\kappa}(x_1) \leq 1$ для $x \in \Omega_{\kappa}$ и $\nu_1 \leq m$ для $\nu \in \Re$, то $g_{\kappa}^{r+1+m-l} \leq g_{\kappa}^{r+1+\nu_1-l}$ для $x \in \Omega_{\kappa}$ и $\nu \in \Re$. Поэтому отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\sum_{l=1}^{m} \|P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\, g_{\kappa}^{r+1+m-l}\| \leq C_3 \sum_{\beta \in \Re_r} \|D^{\beta}\varphi\, g_{\kappa}^{d(\beta)}\|.$$

Для второй суммы в (3.8) имеем

$$\sum_{|\alpha''| \leq m} \|D^{\alpha''}[D_1^{r+1}\varphi\, g_{\kappa}^{r+1}]\, g_{\kappa}^{d(0,\alpha'')}\| \leq \sum_{|\alpha''| \leq m} \|D^{(r+1,\alpha'')}\varphi\, g_{\kappa}^{d(0,\alpha'')+r+1}\|.$$

Так как $m \geq 2$ и $d(0,\alpha'') + r + 1 = d(r+1, \alpha'')$, то $(r+1, \alpha'') \in \Re_r$ для всех $\alpha'' \in N_0^2 : |\alpha''| \leq m$ и отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\sum_{|\alpha''| \leq m} \|D^{(r+1,\alpha'')}\varphi\, g_{\kappa}^{d(0,\alpha'')+r+1}\| \leq C_3 \sum_{\beta \in \Re_r} \|D^{\beta}\varphi\, g_{\kappa}^{d(\beta)}\|.$$

По предположению индукции правая часть этого неравенства оценивается через правую часть (3.5) для $k = r$, а из последних двух неравенств следует, что вторая сумма правой части (3.8) оценивается через правую часть (3.5) для $k = r + 1$, что завершает доказательство леммы. Лемма 3.3 доказана. □

4. Весовые анизотропные пространства Соболева. Основной результат.

Пусть функция $g(t), d(\alpha)$, область Ω_κ и многогранник $\Re_l$ для любого $l \in N_0$ определены как выше и $H_l = H_l(\Re_l, g, d, \Omega_\kappa)$ множество функций u, локально интегрируемых в Ω_κ, с ограниченной нормой

$$(4.1) \qquad ||u||_{H_l} \equiv \sum_{\alpha \in \Re_l} ||D^\alpha u\, g_\kappa^{d(\alpha)}||_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Легко проверить, что для любого $l \in N_0$ и для произвольных функций $d(\alpha)$ и $g(t)$, удовлетворяющих приведенным выше условиям, множество H_l с нормой (4.1) является полным нормированным пространством, совпадающим с $W^m_{2,g}(\Omega_\kappa)$ Соболева при $m_2 = m_3 = 0$. При $m_2^2 + m_3^2 \neq 0$ пространства типа H_l часто называют мультианизотропными весовыми пространствами Соболева.

Для полноты изложения, приведем, еще одно предложение, которым будем пользоваться. Сначала напомним, что положительная функция k, заданная в R^n называется **умеренно растущей весовой функцией**, (см. [3], Определение 10.1.1) если существуют положительные числа C и M, такие что

$$k(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^M; \ \ \forall \xi, \eta \in R^n.$$

Следуя Л. Хермандеру, множество всех таких функций обозначим через K. Для $k \in K$ через B_k обозначим множество $u \in S'$ (где $S' = S'(R^n)$ множество умеренно растущих распределений Л. Шварца, (см., например [4])) таких что преобразование Фурье $F(u)$– функция и $||u||_k^2 \equiv ||u||_{B_k}^2 = \int |k(\xi) F(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty$. Легко показать, что если $k_0 \in K$ и $k_j(\xi) = k_0(\xi)(1 + |\xi_1|^j)$, то $k_j \in K$ $(j = 1, 2, \cdots)$.

Теорема Гординга - Мальгранжа (см. [3], Теорема 11.2.5). *Пусть $P(D)$ частично гипоэллиптический оператор относительно гиперплоскости $x'' = (x_2, ..., x_n) = 0$, $B_k^{loc}(G) = \{u \in B_k(G')\ \forall G' \subset G\}$ и $k_0 \in K$. Если $u \in B_{k_j}^{loc}(\Omega_\kappa)$ $(j = 0, 1, ...)$ является решением уравнения $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega_\kappa)$.*

Пусть, как выше, $P(D)$ частично гипоэллиптический (относительно плоскости $x'' = (x_2, x_3) = 0$ пространства E^3) оператор с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет (1.1) - (1.2) и $\kappa > 0$. Примером такого оператора является следующий оператор

$$P(D) = (-1)^{\frac{m}{2}} (D_1^m + D_2^m + D_3^m) + (-1)^{\frac{m+m_2}{2}} D_1^m D_2^{m_2} + (-1)^{\frac{m+m_3}{2}} D_1^m D_3^{m_3}.$$

Легко проверяется, что это частично гипоэллиптический (относительно плоскости $x'' = 0$) оператор, символ $P(\xi)$ которого является невырожденный, частично гипоэллиптический по $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$ и почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^m + \xi_2^m + \xi_3^m + \xi_1^m \xi_2^{m_2} + \xi_1^m \xi_3^{m_3}$. Положим

$$N(P, \kappa) = \{u; D^{(0, \alpha'')} u \in L_2(\Omega_\kappa), |\alpha''| \leq m, \ \ P(D)u = 0 \ \ x \in \Omega_\kappa\}.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, $\psi \geq 0$, $\int \psi(t)dt = 1$, $h > 0$ и $\psi_h(t) = h^{-1}\,\psi(t/h)$. Обозначим

$$u_h(x) = u * \psi_h = \frac{1}{h}\int\limits_{E^1} u(x_1 - t, x'')\psi_h(t)dt.$$

Легко убедиться в том, что $D^\alpha u_h \in L_2$ для $\alpha \in \Re_l$ $(l = 0,1,\cdots)$ и $D^{\alpha''} u_h = (D^{\alpha''} u)_h$ для $|\alpha''| \leq m$.

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in N(P,\kappa)$. *Тогда для любого* $l = 0,1,\cdots$

(4.3)
$$\|(D_1^l P(D)u_h)g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \to 0 \quad \textit{при } h \to +0.$$

Доказательство. Так как $P(D)u = 0$ для $u \in N(P,\kappa)$, то $D_1^l[P(D)u] = 0$ $(l = 0,1,\cdots)$. Поэтому $D_1^l P(D)u_h(x) = [D_1^l P(D)u]_h(x) = 0$ $(l = 0,1,\cdots)$ для точек $x \in \Omega_{\kappa-h}$ (см. [25] , 6.2.(2)). Следовательно, для доказательства (4.3) достаточно доказать, что при $h \to +0$

(4.4)
$$\|(D_1^l P(D)u_h)\cdot g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})} \to 0; \quad l = 0,1,\cdots.$$

Пусть $D_1^l P(D) = \sum\limits_{\alpha\in(D_1^l P)} \gamma_\alpha^k D^\alpha$ и $\gamma = max\{|\gamma_\alpha^l|,\ \alpha \in (D_1^l P)\}$. Так как $g_\kappa(x_1) \leq 2h/\kappa$ для $x \in \Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h}$, то, применяя неравенство Юнга, получим с некоторой постоянной $C_l = C_l(\kappa) > 0$

$$\|(D_1^l P(D)u_h)\, g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})} \leq \left(\frac{2h}{\kappa}\right)^{m+l} \|D_1^l P(D)u_h\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})} \leq$$

$$\leq \gamma\left(\frac{2h}{\kappa}\right)^{m+l} \sum_{\alpha\in(\Re)} \left\| \int (D^{\alpha''}u)(x_1 - y_1, x'')\, D_1^{\alpha_1+l}\psi_h(y_1)dy_1 \right\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})} \leq$$

$$\leq \gamma\left(\frac{2h}{\kappa}\right)^{m+l} \sum_{\alpha\in\Re} \|D_1^{\alpha_1+l}\psi_h\|_{L_1} \sup_{|y_1|<h} \|(D^{\alpha''}u)(x_1 - y_1, x'')\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})} \leq$$

(4.5)
$$\leq C_l\left(\frac{1}{h}\right)^{m+l}\left(\frac{2h}{\kappa}\right)^{m+l} \sum_{|\alpha''|\leq m} \sup_{|y_1|<h} \|(D^{\alpha''}u)(x_1 - y_1, x'')\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa-h})}.$$

По определению множества $N(P,\kappa)$ имеем $D^{\alpha''}u \in L_2(E^n)$ для $|\alpha''| \leq m$. Поэтому применение теоремы Фубини даёт

$$\omega_{\alpha''}(x_1) \equiv \int_{E^{n-1}} (D^{\alpha''}u)^2(x)dx'' \in L_1(E^1); \quad \omega_{\alpha''}(x_1) = 0,\ |x_1| > \kappa.$$

Отсюда имеем при $h \to +0$, и $|\alpha''| \leq m$

$$\sup_{|y_1|<h} \|(D^{\alpha''}u)(x_1 - y_1, x'')\| = \sup_{|y_1|<h} \|\omega_{\alpha''}(x_1 - y_1)\|^{1/2}_{L_1(\kappa-h<|x_1|<\kappa)} \to 0.$$

Это вместе с (4.5) доказывает (4.4). Лемма 4.1 доказана.

Докажем наконец основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Пусть $\Re = \Re(m_1, m_2, m_3)$ многогранник Ньютона оператора $P(D)$, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет условиям (1.1) - (1.2) и число $\kappa_0 > 0$ выбрано как в лемме 3.2. Тогда для $\kappa \geq \kappa_0$*

a) $N(P, \kappa) \subset H(\Re_l, g, \Omega_\kappa)$ для всех $l = 0, 1, \ldots$

b) $N(P, \kappa) \subset C^\infty(\Omega_\kappa)$.

Доказательство первой части. Пусть $l \in N_0, \kappa \geq \kappa_0, u \in N(P, \kappa)$. Мы должны доказать, что $u \in H(\Re_l, g, \Omega_\kappa)$. При этом будем считать, что функции $u \in N(P, \kappa)$ продолжены нулем вне Ω_κ. Пусть $h > 0$ и по функции $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ функция $u_h(x)$ построена как выше. Очевидно, для любых $h > 0$ и $l \in N_0$ $u_h \in H_l$. Поэтому, применяя лемму 3.3, получим для любого $\kappa \geq \kappa_0$.

$$||u_h||_{H_l} = \sum_{\beta \in \Re_l} ||(D^\beta u_h) g_\kappa^{d(\beta)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq \sum_{j=0}^{l} a_j \, ||D_1^j (P(D) u_h) g_\kappa^{m+j}||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ a_{l+1} \sum_{|\beta''| \leq m} ||D^{\beta''} u_h \, g_\kappa^{d(0, \beta'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}. \tag{4.6}$$

Пусть $\{h_k\}$ произвольная бесконечно убывающая последовательность. Покажем, что последовательность $\{u_{h_k}\}$ сходится в H_l. Так как H_l полное пространство, для этого достаточно доказать, что последовательность $\{u_{h_k}\}$ фундаментальна в H_l. Так как $u_{h_p} - u_{h_s} \in H_l$, то из неравенства (4.6) получим

$$||u_{h_p} - u_{h_s}||_{H_l} \leq \sum_{j=0}^{l} a_j \, ||D_1^j (P(D)[u_{h_p} - u_{h_s}]) g_\kappa^{m+j}||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ a_{l+1} \sum_{|\beta''| \leq m} ||D^{\beta''} [u_{h_p} - u_{h_s}] \, g_\kappa^{d(0, \beta'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Пусть $p, s \to \infty$, тогда первая сумма правой части этого неравенства стремится к нулю по лемме 4.1, а вторая сумма стремится к нулю так как по определению множества $N(P, \kappa)$ $D^{\beta''} u \in L_2(\Omega_\kappa)$ при $|\beta''| \leq m$, следовательно (если еще иметь в виду, что $|g_\kappa^{d(0, \beta'')}| \leq 1$) $D^{\beta''} u_h \, g_\kappa^{d(0, \beta'')} \in L_2(\Omega_\kappa)$ при $|\beta''| \leq m$ для любого $h > 0$.

Итак, u_{h_k} – последовательность Коши в пространстве H_l для каждого $l \in N_0$, следовательно u_{h_k} – сходится. Очевидно, в $L_2(\Omega_\kappa)$ последовательность u_{h_k} сходится к исходной функции u. Так как оператор обобщенного дифференцирования является замкнутым оператором (см. [25], лемма 6.2), то $u_{h_k} \to u$ при $k \to \infty$ также в H_l, при этом $u \in H_l$, что доказывает пункт a) теоремы.

Для доказательства второй части теоремы, сначала покажем, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ и каждого $j \in N_0$ существует число $C = C(j, \varphi, g, \kappa) > 0$, не зависящее от u такое, что

$$\sum_{\alpha \in \Re_j} ||D^\alpha (u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq C ||u||_{H_j} \quad \forall u \in H_j. \tag{4.7}$$

Пусть $\alpha \in \Re_j$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ и $j \in N_0$ фиксированы. Применяя формулу Лейбница, имеем для произвольной функции $u \in H_j$

$$D^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta}\varphi = \sum_{\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}\{[D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}]\,[D^{\alpha-\beta}\varphi/g_\kappa^{d(\beta)}]\}, \tag{4.8}$$

где $C_{\alpha,\beta}-$ биномиальные коэффициенты.

Очевидно, что для любых $\alpha, \beta \in \Re_j$ функция $\phi_{\alpha,\beta}(x) = D^\alpha\varphi(x)/g_\kappa^{d(\beta)}(x_1)$ при $x \in supp\,\varphi$ и $\phi_{\alpha,\beta}(x) = 0$ при $x \notin supp\,\varphi$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega_\kappa)$. Положим $C_j^{'} = \max_{\alpha,\beta\in\Re_j}\{C_{\alpha,\beta}\}$, $c_j^{'} = \max_{\alpha,\beta\in\Re_j}\{|\phi_{\alpha,\beta}(x)|\}$, $c_j = c_j^{'} C_j^{'}$.

Так как многогранник $\Re_j$ правильный и $\alpha \in \Re_j$, то $\beta \in \Re_j$ и $(\alpha - \beta) \in \Re_j$ для любого мультииндекса $\beta \leq \alpha$. Поэтому из (4.8) имеем

$$|D^\alpha(u\varphi)| \leq c_j \sum_{\beta\leq\alpha} |D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}| \leq \sum_{\beta\in\Re_j} |D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}|.$$

Отсюда имеем с некоторой постоянной $C_j = C_j(\varphi, g) > 0$

$$||D^\alpha(u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq C_j \sum_{\beta\in\Re_j} ||D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} = C_j||u||_{H_j}.$$

Так как мультииндекс $\alpha \in \Re_j$ произвольный, то это доказывает неравенство (4.7) с постоянной $C = C_j\, C(\Re_j) > 0$, где $C(\Re_j)$ число мультииндексов $\alpha \in \Re_j$.

Пусть $k_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $k_j(\xi) = k_0(\xi).(1 + |\xi_1|)^j$ $(j = 1, 2, ...)$. Так как оператор $P(D)$ удовлетворяет условиям (1.1)-(1.2), то легко убедится в том, что $k_j(\xi)$ $(j = 0, 1, \cdots)$ являются медленно растущими весовыми функциями. С другой стороны, так как оператор $P(D)$ частично гипоэллиптичен относительно плоскости $x^{''} = (x_2, x_3) = 0$, то имея в виду теорему Гординга - Мальгранжа, получим, что для доказательства второй части теоремы, достаточно показать, что $N(P, \kappa) \subset B^{loc}_{2,\,k_j}(\Omega_\kappa)$, $\kappa \geq \kappa_0$, $j = 0, 1, \cdots$, т.е. достаточно показать, что для произвольных $u \in N(P, \kappa)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ $u\varphi \in B_{2,\,k_j}$ $j = 0, 1, \cdots$.

Легко показать, что для многочлена $P(\xi)$ с многогранником $\Re$ и для каждого $j \in N_0$ существует постоянная $\delta_j > 0$ такая, что

$$(1 + |P(\xi)|)(1 + |\,\xi_1|)^j \leq \delta_j \sum_{\alpha\in\Re_j} |\,\xi^\alpha| \;\; \forall\xi \in R^3. \tag{4.9}$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$. Применяя неравенство (4.9), уже доказанный пункт а) настоящей теоремы и равенство Парсеваля, получим с некоторыми положительными постоянными $C_1 = C_1(\Re_j)$, $C_2 = C_2(\Re, \varphi)$

$$||u\,\varphi||_{B_{2,\,k_j}}(\Omega_\kappa) = ||(1 + |P(\xi)|)(1 + |\xi_1|)^j F(u\,\varphi)(\xi)||_{L_2(E^3)} \leq$$

$$\leq \delta_j\,||\sum_{\alpha\in\Re_j} |\xi^\alpha| F(u\,\varphi)(\xi)||_{L_2(E^3)} = \delta_j \sum_{\alpha\in\Re_j} ||D^\alpha(u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Применяя здесь оценку (4.7), получим $||u\,\varphi||_{B_{2,\,k_j}}(\Omega_\kappa) \leq C\,\delta_j\,||u||_{H_j}$, где число δ_j, не зависящее от $u \in N(P, \kappa)$, взято из (4.7). Теорема 4.1 доказана.

Abstract. For a class of non-degenerate (regular) almost hypoelliptic equations, which are partially hypoelliptic with respect to certain variables, infinitely differentiable in a specific strip solutions are extracted.

Список литературы

[1] L. Hörmander, On the Theory of General Partial Differential Operators, Acta Math. 94 (1955).

[2] L. Hörmander, "Hypoelliptic differential operators", Ann. Inst. Fourier11, 477 – 492 (1961).

[3] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1983).

[4] L. Schwartz, Theorie des Distributions 1, Hermann, Paris (1950).

[5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные Функции, Вып. 1, Москва, Физматгиз (1959).

[6] L. Gårding, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partillement hypoelliptiques", Math. Scand. 9, 5 – 21, (1961).

[7] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division. 4", Amer. J. Math. 82, 522 – 588 (1960).

[8] J. Peetre, Theoremes de Regularite Pour Quelques Classes D'operateurs Differentiels, Thesis - Lund (1959).

[9] Е. А. Горин, "Частично гипоэллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами", Сиб. Мат. Журнал, 3, но. 4, 500 – 526 (1962).

[10] Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, 30, но. 2, 57 – 114 (1975).

[11] J. Friberg, Estimates for Partially Hypoelliptic Differential Operators, Medd.Lunds Univ.Mat. Sem., 17 (1963).

[12] Robert J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators", Proceedings of the London Mathematical Society, 19, Issue 3, 537 – 552 (1969).

[13] Robert J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators with variable coefficients", Mathematical Procedings of the Cambrige Philosophical Soceity, 67, 287 – 293 (1970).

[14] Я. С. Вугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", Труды МИАН СССР, 77, стр. 45 – 64 (1965).

[15] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций стремящихся к нулю на бесконечности", Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).

[16] V. I. Burenkov, "Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p−spaces with an exponential weight", Proc.of the Summer School "Function spaces, differential operators, nonlinear analysis" held in Fridrichroda in 1993. B. G. Teubner, Stuttgart - Leipzig. Teubner - Texte zur Mathematik, 133, 256 – 265 (1993).

[17] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Dolady Ross. Acad. Nauk, Math. 398, no. 6, 701 – 703 (2004).

[18] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Известия НАН Армении, Математика, 41, но. 6, 39 – 56 (2006).

[19] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations", Eurasian Math. Journal, 1, no. 1, 54 – 72 (2010).

[20] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, 91, 59 – 81 (1967).

[21] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).

[22] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Известия НАН Армении, Математика, 46, но. 6, 11 – 30, (2011).

[23] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, 146, но. 4, 2083 – 2085 (1962).

[24] H. G. Ghazaryan, "On selection of infinite differentiable solutions of a class of partially hypoelliptic equations", Eurasian Math. Journal, 8, no 3, 58 – 70 (2012).

[25] О. В. Весов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Москва, Наука, Физматгиз (1996).

Поступила 14 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 52-58.

ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫЕ АЛГЕБРЫ СО СВЕРХТОЖДЕСТВАМИ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ДЕ МОРГАНА

Ю. М. МОВСИСЯН, В. А. АСЛАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *yurimovsisyan@yahoo.com*; *vahagn.aslanyan@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс подпрямо неразложимых алгебр, в которых выполняются сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Такие алгебры называются подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана. Соответствующая характеризация оказывается близкой к классической характеризации подпрямо неразложимых Де Моргановых алгебр.

MSC2010 number: 06D30, 08A05, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: сверхтождество; алгебра Де Моргана; квазирешетка Де Моргана; подпрямо неразложимая алгебра.

1. Введение

О понятиях сверхтождества, категории T-алгебр и других предварительных понятиях и результатах см. в [1] – [4]. Множество всех сверхтождеств класса алгебр V назовем сверхэквациональной (или гиперэквациональной) теорией этого класса и обозначим через $Heq(V)$.

Алгебра $Q(+,\cdot,')$ с двумя бинарными и одной унарной операциями называется алгеброй (или решеткой) Де Моргана, если $Q(+,\cdot)$ - дистрибутивная решетка и $Q(+,\cdot,')$ удовлетворяет тождествам $(x+y)'=x'\cdot y'$ и $x''=x$, где $x''=(x')'$ ([5], p.3, [6]–[10]). Очевидно, что здесь выполняется и тождество: $(x\cdot y)'=x'+y'$. Сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана характеризуются в работе [11]. В настоящей работе с точностью до изоморфизма характеризуются подпрямо неразложимые алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана.

Определение 1.1. *T-алгебра $\mathfrak{A}=(Q,\Sigma)$, где $T=\{1,2\}$, называется квазирешеткой Де Моргана (или Де Моргановой квазирешеткой), если она удовлетворяет всем сверхтождествам многообразия алгебр Де Моргана.*

В работе [12] вводится понятие Де Моргановой суммы и дается общая характеризация Де Моргановых квазирешеток с двумя бинарными операциями:

Теорема 1.1. *Алгебра $\mathfrak{A} = (Q, \{+, \cdot, ^{-}\})$ с двумя бинарными операциями $+, \cdot$ и одной унарной операцией $^{-}$ является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она является алгеброй Де Моргана или Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана.*

Некоторые детали доказательства этой теоремы мы используем при доказательстве основного результата настоящей работы. Обозначим класс всех Де Моргановых квазирешеток через $\mathfrak{Q}\mathfrak{D}$. Из сверхтождества

$$X(x) = Y(x)(= \overline{x}) \tag{1.1}$$

вытекает, что унарная операция в любой квазирешетке Де Моргана –единственна. Будем обозначать ее через $^{-}$. Следующий результат также доказан в работе [12].

Предложение 1.1. *Если квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma)$ подпрямо неразложима, то количество бинарных операций в множестве Σ не больше* **2**.

Поэтому требуется найти подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с одной или двумя бинарными операциями.

Введем обозначения для следующих Де Моргановых алгебр: $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \{+, \cdot, ^{-}\})$, $\mathbf{3} = (\{0, a, 1\}, \{+, \cdot, ^{-}\})$, где $\overline{a} = a$, и $\mathbf{4} = (\{0, a, b, 1\}, \{+, \cdot, ^{-}\})$, где $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $a + b = 1$, $a \cdot b = 0$. Обозначим далее следующие редукты этих алгебр: $\mathbf{2}^{+} = (\{0,1\}, \{+, ^{-}\}), \mathbf{3}^{+} = (\{0, a, 1\}, \{+, ^{-}\}), \mathbf{4}^{+} = (\{0, a, b, 1\}, \{+, ^{-}\})$.

Сформулируем следующий известный результат.

Теорема 1.2. ([13]) *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми Де Моргановыми алгебрами являются алгебры* **2, 3, 4**.

Подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с одной бинарной операцией

Пусть $\mathfrak{A} = Q(+, ^{-})$ является нетривиальной Де Моргановой квазирешеткой с одной бинарной операцией. Определим новую бинарную операцию $\cdot$ на множестве Q следующим образом: $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$. Тогда, алгебра $\mathfrak{D} = Q(+, \cdot, ^{-})$ является алгеброй Де Моргана. Действительно, так как $Q(+, ^{-})$ является квазирешеткой Де Моргана, то в ней выполнены следующие тождества:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + x = x, \ x + y = y + x, \ x + (y + z) = (x + y) + z, \ \overline{\overline{x}} = x, \\ \qquad \overline{\overline{x + y} + \overline{x}} = x, \ \overline{\overline{x + y} + z} = \overline{\overline{x} + z} + \overline{\overline{y} + z}. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

(Это следует из соответствующих сверхтождеств с одной бинарной функциональной переменной). Поэтому в $Q(+, \cdot, ^{-})$ справедливы следующие тождества:

$$x \cdot x = \overline{\overline{x} + \overline{x}} = \overline{\overline{x}} = x;$$

$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{y} + \overline{x}} = y \cdot x;$$

$$x\cdot(y\cdot z)=\overline{\overline{x}+\overline{y\cdot z}}=\overline{\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})}=\overline{(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}}=(x\cdot y)\cdot z;$$
$$(x+y)\cdot x=\overline{\overline{x+y}+\overline{x}}=x;$$
$$(x+y)\cdot z=\overline{\overline{x+y}+\overline{z}}=\overline{\overline{x}+\overline{z}}+\overline{\overline{y}+\overline{z}}=(x\cdot z)+(y\cdot z).$$

Эти тождества вместе с тождествами (2.1) показывают, что алгебра $Q(+,\cdot,^-)$ является алгеброй Де Моргана.

Очевидно, что если отношение эквивалентности θ на множестве Q является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$, то оно является и конгруэнцией алгебры $\mathfrak{D}$. Следовательно, если $\mathfrak{A}$ – нетривиальная подпрямо неразложимая алгебра, то соответствующая алгебра $\mathfrak{D}$ будет подпрямо неразложимой алгеброй Де Моргана и согласно теореме 1.2, она изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}$. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2}^+,\mathbf{3}^+,\mathbf{4}^+$. Этим доказан следующий результат.

Предложение 2.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми Де Моргановыми квазирешетками с одной бинарной операцией являются алгебры* $\mathbf{2}^+,\mathbf{3}^+,\mathbf{4}^+$.

3. Некоторые предварительные результаты

В этом параграфе всюду $\mathfrak{A}=Q(+,\cdot,^-)$ есть квазирешетка Де Моргана с двумя бинарными операциями.

Лемма 3.1. *Для любого элемента $p\in Q$ можно определить конгруэнцию θ_p алгебры $\mathfrak{A}$ следующим образом:*

$$x\theta_p y \Leftrightarrow x\cdot p=y\cdot p,\ \ \overline{x}\cdot p=\overline{y}\cdot p.$$

Доказательство. Очевидно, что θ_p является отношением эквивалентности. Докажем конгруэнтность. Пусть $x\theta_p y,\ z\theta_p t$. Мы должны доказать, что $x+z\theta_p y+t,\ x\cdot z\theta_p y\cdot t$ и $\overline{x}\theta_p\overline{y}$. Воспользуемся сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана:

$$F(G(x,y),z)=G(F(x,z),F(y,z)),\qquad F(\overline{G}(x,y),z)=\overline{G}(\overline{F}(\overline{x},z),\overline{F}(\overline{y},z)),$$

где $\overline{G}(x,y)$ означает $\overline{G(x,y)}$. Полагая $F=\cdot$, $G=+$ и учитывая равенства $x\cdot p=y\cdot p$, $\overline{x}\cdot p=\overline{y}\cdot p$ и $z\cdot p=t\cdot p$, $\overline{z}\cdot p=\overline{t}\cdot p$, получим:

$$(x+y)\cdot p=x\cdot p+y\cdot p=z\cdot p+t\cdot p=(z+t)\cdot p,$$

$$\overline{x+y}\cdot p=\overline{\overline{\overline{x}\cdot p}+\overline{\overline{y}\cdot p}}=\overline{\overline{\overline{z}\cdot p}+\overline{\overline{t}\cdot p}}=\overline{z+t}\cdot p.$$

А это значит, что $x+y\theta_p z+t$. Точно так же, полагая $F=\cdot$, $G=\cdot$, получим $x\cdot y\theta_p z\cdot t$. Соотношение $\overline{x}\theta_p\overline{y}$ очевидно. □

Лемма 3.2. *Для любых элементов $p,q\in Q$ имеем $\theta_p\cap\theta_q=\theta_{\overline{\overline{p}\cdot\overline{q}}}$.*

Доказательство. Пусть $x\theta_p y$ и $x\theta_q y$. Тогда $x \cdot p = y \cdot p$, $\overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p$ и $x \cdot q = y \cdot q$, $\overline{x} \cdot q = \overline{y} \cdot q$. Следовательно, воспользуясь сверхтождеством

$$F(x, \overline{F}(\overline{y}, \overline{z})) = \overline{F}(\overline{F}(x, y), \overline{F}(x, z)), \tag{3.1}$$

получим: $x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{\overline{x \cdot p} \cdot \overline{x \cdot q}} = \overline{\overline{y \cdot p} \cdot \overline{y \cdot q}} = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Аналогично, $\overline{x} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{y} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Этим мы доказали, что $x\ \theta_{\overline{\overline{p}\cdot\overline{q}}}\ y$.

Пусть теперь $x\ \theta_{\overline{\overline{p}\cdot\overline{q}}}\ y$, т.е. $x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$ и $\overline{x} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{y} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Используя сверхтождество

$$F(x, \overline{F}(\overline{x}, \overline{y})) = x, \tag{3.2}$$

будем иметь: $x \cdot p = x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} \cdot p = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} \cdot p = y \cdot p$. Подобным путем доказываются равенства: $x \cdot q = y \cdot q$, $\overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p$, $\overline{x} \cdot q = \overline{y} \cdot q$. Отсюда имеем: $x\theta_p y$ и $x\theta_q y$. □

Лемма 3.3. *Для любого элемента $p \in Q$ имеем $\theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = 0$, где 0 –нулевое отношение эквивалентности.*

Доказательство. Если $x\ \theta_p\ y$ и $x\ \theta_{\overline{p}}\ y$, то

$$x \cdot p = y \cdot p,\ \overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p, \qquad x \cdot \overline{p} = y \cdot \overline{p},\ \overline{x} \cdot \overline{p} = \overline{y} \cdot \overline{p}.$$

Поэтому:

$$x \overset{(3.2)}{=} x \cdot \overline{\overline{x} \cdot \overline{p}} = x \cdot \overline{\overline{y} \cdot \overline{p}} \overset{(3.1)}{=} \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{x \cdot p}} = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot p}} = y \cdot \overline{\overline{x} \cdot \overline{p}} = y \cdot \overline{\overline{y} \cdot \overline{p}} = y.$$

Следовательно, $\theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = 0$. □

Введем отношение $\leq_\bullet$ на множестве Q следующим образом:

$$x \leq_\bullet y \Leftrightarrow x \cdot y = x,\ x, y \in Q.$$

Ясно, что $\leq_\bullet$ является отношением порядка.

Лемма 3.4. *Для любого элемента $p \in Q$ имеем $\theta_p = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{p} \leq_\bullet p$.*

Доказательство. Если $\overline{p} \leq_\bullet p$, то $\overline{p} = \overline{p} \cdot p$ и $0 = \theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = \theta_{\overline{\overline{p}\cdot p}} = \theta_p$ согласно леммам 3.2 и 3.3. И наоборот, пусть $\theta_p = 0$. Согласно сверхтождеству (3.2) имеем: $p\theta_p\overline{p \cdot \overline{p}}$. Следовательно, $p = \overline{p \cdot \overline{p}}$. Отсюда $\overline{p} = p \cdot \overline{p}$, т.е. $\overline{p} \leq_\bullet p$. □

Лемма 3.5. *Пусть квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ подпрямо неразложима. Тогда для любого элемента $x \in Q$ имеем $x \leq_\bullet \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_\bullet x$.*

Доказательство Алгебра $\mathfrak{A}$ подпрямо неразложима и $\theta_x \cap \theta_{\overline{x}} = 0$ согласно лемме 3.3. Следовательно, $\theta_x = 0$ или $\theta_{\overline{x}} = 0$. Теперь требуемый результат следует из леммы 3.4.

Аналогично можно определить отношение порядка $\leq_+$ на множестве Q:

$$x \leq_+ y \Leftrightarrow x + y = x,\ x, y \in Q.$$

Ясно, что лемма 3.5 справедлива и для этого отношения порядка, т.е. элементы $x, \overline{x}$ сравнимы относительно порядка $\leq_+$ для любого элемента $x \in Q$ в подпрямо неразложимой квазирешетке Де Моргана $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$.

4. Подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями

Пусть алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ является Де Моргановой квазирешеткой с двумя бинарными операциями. Определим отношение $\sim$ на множестве Q следующим образом:

$$x \sim y \Leftrightarrow x + (xy) = x, \; y + (yx) = y.$$

В работе [12] доказано, что $\sim$ является отношением конгруэнтности для алгебры $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$. Пусть $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ – соответствующее разбиение множества Q. Определим новую унарную операцию $'$ на множестве Q следующим образом:

$$x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})}.$$

Известно (см. [12]), что множества Q_i, $i \in I$ замкнуты относительно операций $+, \cdot, '$ и алгебры $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$ – суть алгебры Де Моргана. Более того алгебры Q_i и Q_j изоморфны для любых $i, j \in I$. Далее $(x+y)' = x' \cdot y'$ для любых $x, y \in Q$. Напомним, что унарная операция x' и конгруэнция $\sim$ используются в работе [12] для доказательства структурной теоремы для Де Моргановых квазирешеток. Теперь мы можем доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана с двумя бинарными операциями являются алгебры* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ – такая алгебра. Сначала заметим, что если $x \sim y$ и $x \leq_\bullet y$, то $x + y = xy + y = y$, т.е. $y \leq_+ x$. И наоборот, если $x \leq_\bullet y$ и $y \leq_+ x$, то $x \sim y$. Действительно, по определению порядков $\leq_\bullet$ и $\leq_+$ имеем: $x + xy = x + x = x$, $y + yx = y + x = y$. Далее, как следует из леммы 3.5, для любого $x \in Q$ имеем: $x \leq_\bullet \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $x \leq_+ \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_+ x$.

Если $x \leq_\bullet \overline{x}$ и $x \leq_+ \overline{x}$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot \overline{x} + \overline{\overline{x} \cdot x} = x + \overline{x} = x$,

Если $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $\overline{x} \leq_+ x$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot x + \overline{x \cdot \overline{x}} = x + x = x$,

Если $x \leq_\bullet \overline{x}$ и $\overline{x} \leq_+ x$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot x + \overline{x \cdot \overline{x}} = x + \overline{x} = \overline{x}$,

Если $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $x \leq_+ \overline{x}$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot \overline{x} + \overline{\overline{x} \cdot x} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$.

Итак:

$$x' = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq_\bullet \overline{x},\ x \leq_+ \overline{x} \text{ или } \overline{x} \leq_\bullet x,\ \overline{x} \leq_+ x, \\ \overline{x}, & \text{если } x \leq_\bullet \overline{x},\ \overline{x} \leq_+ x \text{ или } \overline{x} \leq_\bullet x,\ x \leq_+ \overline{x}. \end{cases}$$

Из этого следует, что $x \sim \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $x' = \overline{x}$. Докажем, что либо $x' = x$ для всех $x \in Q$, либо $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$. Пусть $a' \neq \overline{a}$ для некоторого $a \in Q$. Тогда $a' = a$. Докажем, что в этом случае $x' = x$ для любого $x \in Q$. Предположим, что $a \in Q_k$, где $k \in I$. Пусть сначала $x \in Q_k$ и $x' \neq x$. Тогда $x' = \overline{x}$ и $x \sim \overline{x}$, $x \sim a$, следовательно $\overline{a} \sim \overline{x} \sim x \sim a$ (так как $\sim$ является отношением конгруэнтности), откуда $a' = \overline{a}$. Пришли к противоречию. Значит $x' = x$ для всех $x \in Q_k$. Теперь допустим $x \notin Q_k$, т.е. $x \in Q_p$, $p \neq k$. Так как $Q_p(+,\cdot,')$ и $Q_k(+,\cdot,')$ изоморфны, то существует изоморфизм $\phi : Q_p \to Q_k$. Тогда $\phi(x) \in Q_k$, поэтому $\phi(x') = (\phi(x))' = \phi(x)$. Из инъективности отображения ϕ вытекает $x' = x$, что и требовалось доказать. Итак, либо $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$, либо $x' = x$ для всех $x \in Q$.

Если $x' = x$ для всех $x \in Q$, то $xy = x'y' = (x+y)' = x+y$ для всех $x, y \in Q$, т.е. операции $+$ и $\cdot$ совпадают. Этот случай мы уже исследовали во втором параграфе. Рассмотрим тот случай, когда $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$. В этом случае $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ для любых $x, y \in Q$ и следовательно алгебра $\mathfrak{A} = Q(+,\cdot,^{-})$ является алгеброй Де Моргана, которая подпрямо неразложима. Поэтому $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, согласно теореме 1.2. $\square$

5. Следствия

Из предложений 1.1, 2.1 и теоремы 4.1 легко выводятся следующие результаты.

Теорема 5.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана являются алгебры* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$.

Следствие 5.1. *В категории T-алгебр, где $T = \{1, 2\}$, любая квазирешетка Де Моргана представляестя как подпрямое произведение алгебр* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$.

Так как алгебры $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$ являются подалгебрами (в смысле [1]) алгебры $\mathbf{4}$, то получаем и следующий результат.

Следствие 5.2. *Де Моргановыми квазирешетками (с точностью до изоморфизма) являются в точности подалгебры прямых степеней* $\mathbf{4}$ *в категории T-алгебр, где $T = \{1, 2\}$.*

Следствие 5.3. $Heq\ \mathfrak{QD} = Heq\ \mathbf{4}$.

Доказательство. Очевидно, что $Heq\ \mathfrak{QD} \subseteq Heq\ \mathbf{4}$. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{QD}$, т.е. $\mathfrak{A}$ – произвольная квазирешетка Де Моргана. Тогда $\mathfrak{A}$ является подалгеброй прямой степени алгебры $\mathbf{4}$. Но любое сверхтождество алгебры $\mathbf{4}$ истинно и в прямой степени этой алгебры. Следовательно, оно верно и в алгебре $\mathfrak{A}$. Поэтому $Heq\ \mathfrak{QD} \supseteq Heq\ \mathbf{4}$. $\square$

Следствие 5.4. ([11]) *Сверхэквациональная теория многообразия алгебр Де Моргана разрешима.*

Следствие 5.5. ([14]) *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми T-алгебрами, где $T = \{1, 2\}$, удовлетворяющими сверхтождествам многообразия булевых алгебр есть алгебры* $\mathbf{2}$ *и* $\mathbf{2}^+$.

Доказательство. Алгебры $\mathbf{3}, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+, \mathbf{4}$ не удовлетворяют всем сверхтождествам многообразия булевых алгебр. Например, в этих алгебрах не выполняется следующее сверхтождество: $X(x, \overline{x}) = X(y, \overline{y})$, ибо $a + \overline{a} \neq 0 + \overline{0}$. □

Abstract. The paper characterizes the class of subdirectly non-factorable algebras with hyperidentities of the variety of De Morgan algebras. Such algebras are called subdirectly non-factorable De Morgan quasilattices. The suggested characterization is too close to that of the classical case of subdirectly non-factorable De Morgan algebras.

Список литературы

[1] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
[2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
[3] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат., 60, no. 6, 127 – 168 (1996).
[4] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Мат. Наук, 53 (1(319)), 61 – 114 (1998).
[5] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Third edition (1979).
[6] A. Bialynicki-Birula, H.Rasiowa, "On the representation of quasi-Boolean algebras", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys., 5, 259 – 261 (1957).
[7] G. C. Moisil, "Recherches sur l'algebre de la logique", Annales scientifiques de l'universite de Jassy, 22, 1 – 117 (1935).
[8] H. P. Sankappanavar, "A characterization of principal congruences of DeMorgan algebras and its applications", Math. Logic in Latin America, Proc. IV Latin Amer. Symp. Math. Logic, Santiago, 341 – 349 (1978). Nort-Holland Pub. Co., Amsterdam (1980).
[9] J. A. Brzozowski, "A characterization of De Morgan algebras", International Journal of Algebra and Computation, 11, 525 – 527 (2001).
[10] Yu. M. Movsisyan, "Binary representations of algebras with at most two binary operations. A Cayley theorem for distributive lattices", International Journal of Algebra and Computation, 19, 97 – 106 (2009).
[11] Yu. M. Movsisyan, V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", Logic Journal of the IGPL. 20, 1153 – 1174 (doi:10.1093/jigpal/jzr053) (2012).
[12] Ю. М. Мовсисян, В. А. Асланян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана", Известия НАН, сер. Математика, 48, no. 5, 49 – 62 (2013).
[13] J. A. Kalman, "Lattices with involution", Trans. Amer. Math. Soc. 87, 485 – 491 (1958).
[14] Ю. М. Мовсисян, А. Г. Бархударян, "О сверхмногообразии QB-алгебр", Ученые Записки ЕГУ, 2, 16 – 24 (1996).

Поступила 19 января 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 59-70.

CHEEGER-GROMOLL TYPE METRICS ON THE (1,1)–TENSOR BUNDLES

E. PEYGHAN, A. TAYEBI AND L. NOURMOHAMMADIFAR

Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, Arak, Iran
Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Qom, Qom, Iran
E-mails: *epeyghan@gmail.com; akbar.tayebi@gmail.com*

Abstract. Using a Riemannian metric on a differentiable manifold, a Cheeger-Gromoll type metric is introduced on the (1,1)–tensor bundle of the manifold. Then the Levi-Civita connection, Riemannian curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature and sectional curvature of this metric are calculated. Also, a para-Nordenian structure on the the (1,1)–tensor bundle with this metric is constructed and the geometric properties of this structure are studied.

MSC2010 numbers: 53A45
Keywords: Cheeger-Gromoll type metric, para-Nordenian structure, sectional curvature, tensor bundle.

1. Introduction

Geometry of the tangent bundle TM of an n-dimensional Riemannian manifold (M,g) with Sasaki metric has been extensively studied since the 60's. Nevertheless, the rigidity of this metric has incited some geometers to tackle the problem of construction and study of other metrics on TM (see [1, 21]). The Cheeger-Gromoll metric has appeared as a nicely fitted one to overcome this rigidity (see [6]). Then using the concept of naturality, O. Kowalski and M. Sekizawa [17] have given a complete classification of metrics which are naturally constructed from a metric g on the base M, assuming that M is oriented. Other presentations of the basic results from [17] (involving also the non-oriented case and something more) can be found in [16]. These metrics, called in [2] g-natural metrics on TM, had been extensively studied during last years. It has been proved that some subclasses of g-natural metrics such as natural diagonal lift type metrics offer very interesting geometrical features and research horizons (see [11, 12]).

Fiber bundles have important applications in geometry and modern theoretical physics. They are used in a number of physical fields, such as gauge theory, which was invented by Weyl [7]. Tensor bundles T^p_qM of type (p,q) over a differentiable manifold M are particular examples of fiber bundles, which were studied by a number of mathematicians such as Ledger, Yano, Cengiz, Gezer and Salimov (see [3] — [5], [14, 18, 19]). The tangent bundle TM and cotangent bundle T^*M are the special cases of tensor bundles (see, e.g., [8] — [13], which deal with g-natural structures on TM and T^*M).

In [20], Salimov and Gezer have introduced the Sasaki metric ${}^Sg$ on the (1,1)–tensor bundle T_1^1M of a Riemannian manifold M and have calculated the Levi-Civita connection of this metric and its Riemannian curvature tensor.

In this paper, using a similar method, applied to a tangent bundle, we define the Cheeger-Gromoll type metric ${}^{CG}g$ on T_1^1M, which is an extension of Sasaki metric. Then we calculate the Levi-Civita connection, Riemannian curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature and sectional curvature of this metric and establish some relationships between the geometric properties of the base manifold (M, g) and $(T_1^1M, {}^{CG}g)$. Finally, we introduce a para-Nordenian structure on $(T_1^1M, {}^{CG}g)$ and find equivalence conditions for para-Kählerian properties of this structure.

2. Preliminaries

Let M be an C^∞ manifold of finite dimension n. Then the set $T_1^1M = \coprod_{p\in M} T_1^1(p)$ is defined to be the tensor bundle of type $(1,1)$ over M, where $\coprod$ denotes the disjoint union of the tensor spaces $T_1^1(p)$ for all $p \in M$. For any point $\tilde{p} \in T_1^1M$ the surjective correspondence $\tilde{p} \to p$ determines the natural projection $\pi : T_1^1M \to M$. The projection π defines the natural differentiable manifold structure of T_1^1M, that is, T_1^1M is a C^∞-manifold of dimension $n + n^2$. A local coordinate neighborhood $\{(U; x^j, j = 1, \ldots, n)\}$ in M induces on T_1^1M a local coordinate neighborhood

$$\{\pi^{-1}(U); x^j, x^{\bar{j}} = t_j^i, j = 1, \ldots, n, \bar{j} = n + j(\bar{j} = n + 1, \ldots, n + n^2)\},$$

where $x^{\bar{j}} = t_j^i$ are the components of the $(1,1)$–tensor field t in each $(1,1)$–tensor space $T_1^1(p)$ $(p \in U)$ with respect to the natural base.

We denote by $\Im_1^1(M)$ the module over $F(M)$ of all C^∞ tensor fields of type $(1,1)$ on M, where $F(M)$ is the ring of real-valued C^∞ functions on M. If $\alpha \in \Im_1^1(M)$, then by contraction it is regarded as a function on T_1^1M, which we denote by $\imath\alpha$. If α has the local expression $\alpha = \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$ in a coordinate neighborhood $U(x^j) \subset M$, then $\imath(\alpha) = \alpha(t)$ has the local expression $\imath\alpha = \alpha_i^j t_j^i$ with respect to the coordinates $(x^j, x^{\bar{j}})$ in $\pi^{-1}(U)$. Suppose that $A \in \Im_1^1(M)$. Then there is a unique vector field ${}^VA \in \Im_0^1(T_1^1M)$ such that for $\alpha \in \Im_1^1(M)$

$$ {}^VA(\imath\alpha) = \alpha(A) \circ \pi = {}^V(\alpha(A)), \tag{2.1}$$

where ${}^V(\alpha(A))$ is the vertical lift of the function $\alpha(A) \in F(M)$ (see [18]. We note that the vertical lift ${}^Vf = f \circ \pi$ of an arbitrary function $f \in F(M)$ is constant along each fibre $\pi^{-1}(p)$. Put ${}^VA = {}^VA^k\partial_k + {}^VA^{\bar{k}}\partial_{\bar{k}}$, where

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \partial_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}} = \frac{\partial}{\partial t_k^h}, \quad {}^VA^{\bar{k}} := {}^VA_k^h.$$

Then by (2.1), we obtain ${}^VA^k = 0$ and ${}^VA^{\bar{k}} = A_k^h$. Thus the vertical lift ${}^VA$ of A has the components

$$ {}^{V}A = \begin{pmatrix} {}^{V}A^{j} \\ {}^{V}A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{i}_{j} \end{pmatrix}, \tag{2.2} $$

with respect to the coordinates $(x^j, x^{\bar{j}})$ in T^1_1M (see [3]). Let $\pounds_V$ be the Lie derivation with respect to $V \in \Im^1_0(M)$. The complete lift ${}^CV$ of V to T^1_1M is defined by

$$ {}^{C}V(\imath\alpha) = \imath(\pounds_V \alpha), \tag{2.3} $$

for $\alpha \in \Im^1_1(M)$ (see [18]). If ${}^CV = {}^CV^k\partial_k + {}^CV^{\bar{k}}\partial_{\bar{k}}$, then by (2.3), it follows that the complete lift ${}^CV$ has the following components

$$ {}^{C}V = \begin{pmatrix} {}^{C}V^{j} \\ {}^{C}V^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{j} \\ t^{m}_{j}(\partial_m V^{i}) - t^{i}_{m}(\partial_j V^{m}) \end{pmatrix}, \tag{2.4} $$

with respect to the coordinates $(x^j, x^{\bar{j}})$ in T^1_1M (see [3]).

The horizontal lift ${}^HV \in \Im^1_0(T^1_1M)$ of $V \in \Im^1_0(M)$ to T^1_1M is defined by (see [18]): ${}^HV(\imath\alpha) = \imath(\nabla_V\alpha)$, $\alpha \in \Im^1_1(M)$, where ∇ is a symmetric affine connection on M. It is easy to see that ${}^HV$ has the components

$$ {}^{H}V = \begin{pmatrix} {}^{H}V^{j} \\ {}^{H}V^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{j} \\ V^{s}(\Gamma^{m}_{sj}t^{i}_{m} - \Gamma^{i}_{sm}t^{m}_{j}) \end{pmatrix}, \tag{2.5} $$

with respect to the coordinates $(x^j, x^{\bar{j}})$ in T^1_1M, where Γ^k_{ij} are the local components of ∇ on M. Let $U(x^h)$ be a local chart in M. Using (2.2) and (2.5) we obtain

$$ e_j := {}^{H}\partial_j = {}^{H}(\delta^h_j\partial_h) = \delta^h_j\partial_h + (\Gamma^s_{jh}t^k_s - \Gamma^k_{js}t^s_h)\partial_{\bar{h}}, \tag{2.6} $$

$$ e_{\bar{j}} := {}^{V}(\partial_i \otimes dx^j) = {}^{V}(\delta^k_i\delta^j_h\partial_k \otimes dx^h) = \delta^k_i\delta^j_h\partial_{\bar{h}}, \tag{2.7} $$

where δ^h_j is the Kronecker symbol and $\bar{j} = n+1, \dots, n+n^2$. These $n+n^2$ vector fields are linearly independent and generate the horizontal distribution of ∇ and the vertical distribution of T^1_1M, respectively. Indeed, we have ${}^HX = X^je_j$ and ${}^VA = A^i_je_{\bar{j}}$ (see [20]). The set $\{e_\beta\} = \{e_j, e_{\bar{j}}\}$ is called the frame adapted to the affine connection ∇ on $\pi^{-1}(U) \subset T^1_1M$.

3. A Cheeger-Gromoll type metric on T^1_1M

For each $p \in M$ the extension of a scalar product g, denoted by G, is defined on the tensor space $\pi^{-1}(p) = T^1_1(p)$ by $G(A,B) = g_{it}g^{jl}A^i_jB^t_l$, $\quad A, B \in \Im^1_1(p)$, where g_{ij} and g^{ij} are the local covariant and contravariant tensors, respectively, associated with the metric g on M.

We consider a Riemannian metric ${}^{CG}g$ of Cheeger-Gromoll type defined on T^1_1M as follows:

$$ {}^{CG}g({}^VA, {}^VB) = {}^V(aG(A,B) + bG(t,A)G(t,B)), \tag{3.1} $$

$$ {}^{CG}g({}^VA, {}^HY) = 0, \tag{3.2} $$

$$ {}^{CG}g({}^HX, {}^HY) = {}^V(g(X,Y)), \tag{3.3} $$

for all $X, Y \in \Im_0^1(M)$ and $A, B \in \Im_1^1(M)$, where a and b are smooth functions of $\tau = \|t\|^2 = t_j^i t_l^t g_{it}(x) g^{jl}(x)$ defined on $T_1^1 M$ and satisfying the conditions $a > 0$ and $a + b\tau > 0$. The symmetric $(2n \times 2n)$-type matrix

$$\begin{pmatrix} g_{jl} & 0 \\ 0 & a g^{jl} g_{it} + b \bar{t}_i^j \bar{t}_t^l \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

associated with the metric ${}^{CG}g$ in the adapted frame $\{e_\beta\}$, has the inverse

$$\begin{pmatrix} g^{jl} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} g_{jl} g^{it} - \frac{b}{a(a+b\tau)} t_j^i t_l^t \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad \bar{t}_i^j = g^{jh} g_{ik} t_h^k. \tag{3.5}$$

Notice that in the special case where $a = 1$ and $b = 0$, we have the Sasaki metric ${}^S g$ (see [20]). Let $\varphi = \varphi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ be a tensor field defined on M. Then $\gamma\varphi = (t_j^m \varphi_m^i) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$ and $\widetilde{\gamma}\varphi = (t_m^i \varphi_j^m) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$ are vector fields defined on $T_1^1 M$, and the bracket operation of vertical and horizontal vector fields is given by the formulas:

$$[{}^V A, {}^V B] = 0, \quad [{}^H X, {}^V A] = {}^V (\nabla_X A), \tag{3.6}$$

$$[{}^H X, {}^H Y] = {}^H [X, Y] + (\widetilde{\gamma} - \gamma) R(X, Y), \tag{3.7}$$

where R denotes the curvature tensor field of the connection ∇ and $\widetilde{\gamma} - \gamma : \varphi \to \Im_0^1(T_1^1 M)$ is an operator defined by $(\widetilde{\gamma} - \gamma)\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ t_m^i \varphi_j^m - t_j^m \varphi_m^i \end{pmatrix}$ for $\varphi \in \Im_1^1(M)$.

Proposition 3.1. *The Levi-Civita connection ${}^{CG}\nabla$ associated with the Riemannian metric ${}^{CG}g$ on the tensor bundle $T_1^1 M$ has the following form:*

$$\begin{aligned}
{}^{CG}\nabla_{{}^H X} {}^H Y &= {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma} - \gamma) R(X, Y), \\
{}^{CG}\nabla_{{}^V A} {}^H Y &= \frac{a}{2} {}^H \Big(g^{bl} R(t_b, A_l) Y + g_{at} (t^a (g^{-1} \circ R(., Y) \widetilde{A}^t)) \Big), \\
{}^{CG}\nabla_{{}^H X} {}^V B &= {}^V (\nabla_X B) + \frac{a}{2} {}^H \Big(g^{bj} R(t_b, B_j) X + g_{at} (t^a (g^{-1} \circ R(., X) \widetilde{B}^t)) \Big), \\
{}^{CG}\nabla_{{}^V A} {}^V B &= L(G(t, A) {}^V B + G(t, B) {}^V A) + M G(A, B) {}^V t + N G(t, A) G(t, B) {}^V t,
\end{aligned}$$

where $L := \frac{a'}{a}$, $M := \frac{-a' + 2b}{a + b\tau}$ and $N := \frac{b'a - 2a'b}{a(a + b\tau)}$.

Proof. By straightforward computation we obtain

$${}^H X(\tau) = 0, \quad {}^V A(\tau) = 2 g_{ir} g^{jl} t_j^i A_l^r = 2G(t, A). \tag{3.8}$$

Next, using (3.6) - (3.8) and the Koszul formula:

$$\begin{aligned}
2\,{}^{CG}g({}^{CG}\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= \widetilde{X}\,{}^{CG}g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) + \widetilde{Y}\,{}^{CG}g(\widetilde{Z}, \widetilde{X}) - \widetilde{Z}\,{}^{CG}g(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\
&\quad + {}^{CG}g([\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \widetilde{Z}) - {}^{CG}g([\widetilde{Y}, \widetilde{Z}], \widetilde{X}) + {}^{CG}g([\widetilde{Z}, \widetilde{X}], \widetilde{Y}),
\end{aligned}$$

where $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \Im_0^1(T_1^1 M)$, we obtain the components of ${}^{CG}\nabla$.

Putting ${}^{CG}\nabla_{e_\alpha} e_\beta = {}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$, and using Proposition 1, we obtain:

$${}^{CG}\Gamma_{lj}^r = \Gamma_{lj}^r, \quad {}^{CG}\Gamma_{lj}^{\bar{r}} = \frac{1}{2}(R_{ljr}{}^s t_s^v - R_{ljs}{}^v t_r^s), \quad {}^{CG}\Gamma_{\bar{l}\bar{j}}^{r} = 0, \quad {}^{CG}\Gamma_{\bar{l}j}^{\bar{r}} = 0,$$

$$ {}^{CG}\Gamma^{r}_{\bar{l}j} = \frac{a}{2}(g_{ta}R^{sl}{}_{j}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{lb}R_{tsj}{}^{r}t^{s}_{b}), \quad {}^{CG}\Gamma^{r}_{l\bar{j}} = \frac{a}{2}(g_{ia}R^{sj}{}_{l}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{jb}R_{isl}{}^{r}t^{s}_{b}), $$

$$ {}^{CG}\Gamma^{\bar{r}}_{l\bar{j}} = (\Gamma^{v}_{li}\delta^{j}_{r} - \Gamma^{j}_{lr}\delta^{v}_{i}), \qquad {}^{CG}\Gamma^{\bar{r}}_{\bar{l}\bar{j}} = L(\vec{t}^{l}_{t}\delta^{j}_{r}\delta^{v}_{i} + \vec{t}^{j}_{i}\delta^{l}_{r}\delta^{v}_{t}) + Mg^{lj}g_{ti}t^{v}_{r} + N\vec{t}^{l}_{t}\vec{t}^{j}_{i}t^{v}_{r}. $$

4. The Curvature Tensor of ${}^{CG}\nabla$

It is known that the curvature tensor ${}^{CG}R$ of ${}^{CG}\nabla$ is obtained from the formula

$$ {}^{CG}R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = {}^{CG}\nabla^{CG}_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - {}^{CG}\nabla^{CG}_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - {}^{CG}\nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z}, \tag{4.1} $$

where $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z} \in \Im^{1}_{0}(T^{1}_{1}M)$. Putting ${}^{CG}R(e_{\alpha},e_{\beta})e_{\gamma} = {}^{CG}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}e_{\lambda}$, we get

$$ {}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}\bar{j}}{}^{r} = 0, \tag{4.2} $$

$$ {}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}j}{}^{\bar{r}} = 0, \tag{4.3} $$

$$ {}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}\bar{j}}{}^{\bar{r}} = 0, \tag{4.4} $$

$$ {}^{CG}R_{mlj}{}^{\bar{r}} = \frac{1}{2}\{\nabla_{m}R_{ljr}{}^{s}t^{v}_{s} - \nabla_{l}R_{mjr}{}^{s}t^{v}_{s} + \nabla_{l}R_{mjs}{}^{v}t^{s}_{r} - \nabla_{m}R_{ljs}{}^{v}t^{s}_{r}\}, \tag{4.5} $$

$$ {}^{CG}R_{m\bar{l}j}{}^{r} = \frac{a}{2}\{g_{ta}\nabla_{m}R^{sl}{}_{j}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{lb}\nabla_{m}R_{tsj}{}^{r}t^{s}_{b}\}, \tag{4.6} $$

$$ {}^{CG}R_{ml\bar{j}}{}^{r} = \frac{a}{2}\{g_{ia}\nabla_{m}R^{sj}{}_{l}{}^{r}t^{a}_{s} - \nabla_{l}R^{sj}{}_{m}{}^{r}t^{a}_{s} + g^{jb}\nabla_{l}R_{ism}{}^{r}t^{s}_{b} - \nabla_{m}R_{isl}{}^{r}t^{s}_{b}\}, \tag{4.7} $$

$$ \begin{aligned} {}^{CG}R_{mlj}{}^{r} = R_{mlj}{}^{r} + \frac{a}{4}\{ & g_{ka}(R^{sh}{}_{m}{}^{r}R_{ljh}{}^{p} - R^{sh}{}_{l}{}^{r}R_{mjh}{}^{p} - 2R^{sh}{}_{j}{}^{r}R_{mlh}{}^{p})t^{a}_{s}t^{k}_{p} \\ & + g_{ka}(R^{sh}{}_{l}{}^{r}R_{mjp}{}^{k} - R^{sh}{}_{m}{}^{r}R_{ljp}{}^{k} + 2R^{sh}{}_{j}{}^{r}R_{mlp}{}^{k})t^{a}_{s}t^{p}_{h} \\ & + g^{hb}(R_{kpl}{}^{r}R_{mjh}{}^{s} - R_{kpm}{}^{r}R_{ljh}{}^{s} + 2R_{kpj}{}^{r}R_{mlh}{}^{s})t^{p}_{b}t^{k}_{s} \\ & + g^{hb}(R_{ksm}{}^{r}R_{ljp}{}^{k} - R_{ksl}{}^{r}R_{mjp}{}^{k} - 2R_{ksj}{}^{r}R_{mlp}{}^{k})t^{s}_{b}t^{p}_{h}\}, \end{aligned} \tag{4.8} $$

$$ \begin{aligned} {}^{CG}R_{ml\bar{j}}{}^{\bar{r}} = {} & R_{mli}{}^{v}\delta^{j}_{r} - R_{mlr}{}^{j}\delta^{v}_{i} + \frac{a}{4}\{g_{ia}(R_{mhr}{}^{s}R^{pj}{}_{l}{}^{h} - R_{lhr}{}^{s}R^{pj}{}_{m}{}^{h})t^{v}_{s}t^{a}_{p} \\ & + g_{ia}(R_{lhp}{}^{v}R^{sj}{}_{m}{}^{h} - R_{mhp}{}^{v}R^{sj}{}_{l}{}^{h})t^{a}_{s}t^{p}_{r} + g^{jb}(R_{lhr}{}^{s}R_{ipm}{}^{h} \\ & - R_{mhr}{}^{s}R_{ipl}{}^{h})t^{p}_{b}t^{v}_{s} + g^{jb}(R_{mhs}{}^{v}R_{ipl}{}^{h} - R_{lhs}{}^{v}R_{ipm}{}^{h})t^{s}_{r}t^{p}_{b}\} \\ & + M(g_{ki}R^{sj}{}_{ml}t^{k}_{s} - g^{hj}R_{mlis}t^{s}_{h})t^{v}_{r} \\ & + L(R_{mls}{}^{v}t^{s}_{r} - R_{mlr}{}^{s}t^{v}_{s})\vec{t}^{j}_{i}, \end{aligned} \tag{4.9} $$

$$ \begin{aligned} {}^{CG}R_{m\bar{l}\bar{j}}{}^{r} = {} & -a'\vec{t}^{l}_{t}(g_{ia}R^{sj}{}_{m}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{jb}R_{ism}{}^{r}t^{s}_{b}) + \frac{a^{2}}{4}\{g_{ta}R^{sl}{}_{h}{}^{r}g^{jb}R_{ipm}{}^{h}t^{a}_{s}t^{p}_{b} \\ & - g_{ta}R^{sl}{}_{h}{}^{r}g_{ib}R^{pj}{}_{m}{}^{h}t^{a}_{s}t^{b}_{p} + g^{lb}R_{tph}{}^{r}g_{ia}R^{sj}{}_{m}{}^{h}t^{p}_{b}t^{a}_{s} \\ & - g^{la}R_{tsh}{}^{r}g^{jb}R_{ipm}{}^{h}t^{s}_{a}t^{p}_{b}\} + \frac{a}{2}\{g^{jl}R_{itm}{}^{r} - g_{it}R^{lj}{}_{m}{}^{r} \\ & + L(g_{ia}R^{sj}{}_{m}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{jb}R_{ism}{}^{r}t^{s}_{b})\vec{t}^{l}_{t} + L(g_{ta}R^{sl}{}_{m}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{lb}R_{tsm}{}^{r}t^{s}_{b})\vec{t}^{j}_{i} \\ & + (Mg^{lj}g_{ti} + N\vec{t}^{l}_{t}\vec{t}^{j}_{i})t^{k}_{h}(g_{ka}R^{sh}{}_{m}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{hb}R_{ksm}{}^{r}t^{s}_{b})\}, \end{aligned} \tag{4.10} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{m\bar{l}j}{}^{\bar{r}} = &-\frac{1}{2}\{R_{mjr}{}^{l}\delta_t^v - R_{mjt}{}^{v}\delta_r^l + L(R_{mjr}{}^{s}t_s^v - R_{mjs}{}^{v}t_r^s)\bar{t}_t^l \\
&+M(g_{tk}R_{mj}{}^{ls}t_s^k - g^{lh}R_{mjst}t_h^s)t_r^v\} \\
&+\frac{a}{4}\{g_{ta}R^{pl}{}_j{}^h R_{mhr}{}^{s}t_s^v t_p^a - g^{lb}R_{tpj}{}^{h}R_{mhr}{}^{s}t_s^v t_b^p \\
&-g_{ta}R^{sl}{}_j{}^h R_{mhp}{}^{v}t_r^p t_s^a + g^{lb}R_{tpj}{}^{h}R_{mhs}{}^{v}t_r^s t_b^p\},
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}j}{}^{r} = &\; a\bar{t}_n^m(g_{ta}R^{sl}{}_j{}^r t_s^a - g^{lb}R_{tsj}{}^{r}t_b^s) - a\bar{t}_t^l(g_{na}R^{sm}{}_j{}^r t_s^a - g^{mb}R_{nsj}{}^{r}t_b^s) \\
&+a(g_{tn}R^{ml}{}_j{}^r - g^{lm}R_{tnj}{}^{r}) + \frac{a^2}{4}\{g_{na}R^{sm}{}_h{}^r g_{tb}R^{pl}{}_j{}^h t_s^a t_p^b \\
&-g_{ta}R^{sl}{}_h{}^r g_{nb}R^{pm}{}_j{}^h t_s^a t_p^b + g_{ta}R^{sl}{}_h{}^r g^{mb}R_{npj}{}^{h}t_s^a t_b^p \\
&-g_{na}R^{sm}{}_h{}^r g^{lb}R_{tpj}{}^{h}t_s^a t_b^p + g^{lb}R_{tph}{}^{r}g_{na}R^{sm}{}_j{}^h t_b^p t_s^a \\
&-g^{mb}R_{nph}{}^{r}g_{ta}R^{sl}{}_j{}^h t_b^p t_s^a + g^{ma}R_{nsh}{}^{r}g^{lb}R_{tsj}{}^{h}t_b^p t_a^s \\
&-g^{la}R_{tsh}{}^{r}g^{mb}R_{npj}{}^{h}t_b^p t_a^s\},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}\bar{j}}{}^{\bar{r}} = &\; F_1(\bar{t}_n^m\bar{t}_i^j\delta_r^l\delta_t^v - \bar{t}_t^l\bar{t}_i^j\delta_r^m\delta_n^v) + F_2(g^{mj}g_{ni}\delta_r^l\delta_t^v - g^{lj}g_{ti}\delta_r^m\delta_n^v) \\
&+F_3(g^{lj}g_{ti}\bar{t}_n^m t_r^v - g^{mj}g_{ni}\bar{t}_t^l t_r^v),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

where $F_1 := 2L' - L^2 - N(1 - L\tau)$, $F_2 := L - M(1 + \tau L)$ and $F_3 := 2M' + M^2 - N(1 - \tau M)$.

Theorem 4.1. *Let (M, g) be a Riemannian manifold and T_1^1M be its $(1,1)$–tensor bundle with the metric ${}^{CG}g$. If T_1^1M is flat, then M is a flat manifold.*

Proof. Let T_1^1M be a flat manifold. Then we have ${}^{CG}R = 0$, or eqivalently, ${}^{CG}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda} = 0$. Hence from (4.8) at the point $(x^i, t_i^j) = (x^i, 0) \in T_1^1M$ we get $0 = ({}^{CG}R_{mlj}{}^{r})_{(x^i,0)} = R_{mlj}{}^{r}(x^i)$. Thus we have $R = 0$, implying that (M, g) is a flat manifold.

Next, let M be a flat manifold. Then in view of (4.2) - (4.13) we conclude that all the components of ${}^{CG}R$ are zero except ${}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}\bar{j}}{}^{\bar{r}}$. But ${}^{CG}R_{\bar{m}\bar{l}\bar{j}}{}^{\bar{r}} = 0$ if and only if $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Thus we have the following result.

Theorem 4.2. *Let (M, g) be a flat Riemannian manifold and T_1^1M be its $(1,1)$–tensor bundle with the metric ${}^{CG}g$. Then T_1^1M is flat if and only if $F_1 = F_2 = F_3 = 0$.*

Taking into account that for Sasaki metric ${}^{S}g$ we have $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, from Theorems 4.1 and 4.2 we infer the following result.

Corollary 4.1. Let (M, g) be a Riemannian manifold and T_1^1M be its $(1,1)$–tensor bundle with the Sasaki metric ${}^{S}g$. Then M is flat if and only if T_1^1M is flat.

The Ricci tensor and the scalar curvature of the metric ${}^{CG}g$ are defined by ${}^{CG}R_{\alpha\beta} = {}^{CG}R_{\sigma\alpha\beta}{}^{\sigma}$ and ${}^{CG}S = {}^{CG}g^{\alpha\beta}\,{}^{CG}R_{\alpha\beta}$, respectively. Using (4.2) - (4.13), we can write

$$\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{l}\bar{j}} &= ((1-n^2)F_1 - F_3)\tilde{t}^{j}_{i}\tilde{t}^{l}_{t} + ((1-n^2)F_2 + \tau F_3)g_{ti}g^{lj} \\
&\quad + \frac{a^2}{4}\{g^{lb}R_{tph}{}^{r}g_{ia}R^{sj}{}_{r}{}^{h}t^{p}_{b}t^{a}_{s} - g_{ta}R^{sl}{}_{h}{}^{r}g_{ib}R^{pj}{}_{r}{}^{h}t^{a}_{s}t^{b}_{p} \\
&\quad - g^{la}R_{tsh}{}^{r}g^{jb}R_{ipr}{}^{h}t^{s}_{a}t^{p}_{b} + g_{ta}R^{sl}{}_{h}{}^{r}g^{jb}R_{ipr}{}^{h}t^{a}_{s}t^{p}_{b}\}, \\
{}^{CG}R_{\bar{l}j} &= \frac{a}{2}\{g_{ta}\nabla_r R^{sl}{}_{j}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{lb}\nabla_r R_{tsj}{}^{r}t^{s}_{b}\}, \\
{}^{CG}R_{l\bar{j}} &= \frac{a}{2}\{g_{ia}\nabla_r R^{sj}{}_{l}{}^{r}t^{a}_{s} - g^{jb}\nabla_r R_{isl}{}^{r}t^{s}_{b}\}, \\
{}^{CG}R_{lj} &= R_{lj} + \frac{a}{2}\{g^{hb}R_{kpj}{}^{r}R_{rlh}{}^{s}t^{p}_{b}t^{k}_{s} - g_{ka}R^{sh}{}_{j}{}^{r}R_{rlh}{}^{p}t^{a}_{s}t^{k}_{p} \\
&\quad - g^{hb}R_{ksj}{}^{r}R_{rlp}{}^{k}t^{s}_{b}t^{p}_{h} + g_{ka}R^{sh}{}_{j}{}^{r}R_{rlp}{}^{k}t^{a}_{s}t^{p}_{h}\} \\
&\quad - \frac{a}{4}\{g_{ka}R^{sh}{}_{l}{}^{r}R_{rjh}{}^{p}t^{a}_{s}t^{k}_{p} + g_{va}R^{pr}{}_{j}{}^{h}R_{lhr}{}^{s}t^{v}_{s}t^{a}_{p} \\
&\quad + g^{hb}R_{ksl}{}^{r}R_{rjp}{}^{k}t^{s}_{b}t^{p}_{h} + g^{rb}R_{vpj}{}^{h}R_{lhs}{}^{v}t^{s}_{r}t^{p}_{b}\},
\end{aligned}$$

with respect to the frame $\{e_\beta\}$. Also, the scalar curvature of metric ${}^{CG}g$ is given by

$$\begin{aligned}
{}^{CG}S &= S + (\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)^2}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_1 - F_3) \\
&\quad + (\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_2 + \tau F_3) \\
&\quad - \frac{a}{4}g^{ab}g^{hk}g^{lj}g^{vr}R_{slhv}R_{pjkr}t^{s}_{a}t^{p}_{b} \\
&\quad - \frac{a}{4}g_{cd}g^{lj}g^{hk}g^{rv}R_{rlh}{}^{s}R_{vjk}{}^{p}t^{c}_{s}t^{d}_{p} + \frac{a}{2}R_{cpr}{}^{h}R_{h}{}^{rbs}t^{c}_{s}t^{p}_{b}.
\end{aligned}$$

Thus we have the following result.

Theorem 4.3. *Let M be a Riemannian manifold with the metric g, and T^1_1M be its $(1,1)$–tensor bundle equipped with the metric ${}^{CG}g$. Let S be the scalar curvature of g, and ${}^{CG}S$ be the scalar curvature of ${}^{CG}g$. Then the following equation holds:*

$$\begin{aligned}
{}^{CG}S &= S + (\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)^2}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_1 - F_3) + (\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_2 + \tau F_3) \\
&\quad - \frac{a}{4}g^{ab}g^{hk}g^{lj}g^{vr}(tR)_{alhv}(tR)_{bjkr} - \frac{a}{4}g_{cd}g^{lj}g^{hk}g^{rv}(R_t)^{c}_{rlh}(R_t)^{d}_{vjk} + \frac{a}{2}T,
\end{aligned}$$

where $(tR)_{alhv} = R_{slhv}t^{s}_{a}$, $(R_t)^{c}_{rlh} = R_{rlh}{}^{s}t^{c}_{s}$ and $T = R_{cpr}{}^{h}R_{h}{}^{rbs}t^{c}_{s}t^{p}_{b}$.

Let (M, g) be a Riemannian manifold of dimension $n > 2$ and constant curvature κ:

$$R_{kmj}{}^{s} = \kappa(\delta^{s}_{k}g_{mj} - \delta^{s}_{m}g_{kj}). \tag{4.14}$$

Then $S = n(n-1)\kappa$ and we have the following theorem.

Theorem 4.4. *Let (M, g) be a Riemannian manifold of dimension $n > 2$ and constant curvature κ. Then the scalar curvature ${}^{CG}S$ of $(T_1^1M, {}^{CG}g)$ is given by*

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}S = (1-n)[(\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)^2}{a(a+b\tau)})((1+n)F_1 - F_3) + (\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)})((1+n)F_2 \\
+\tau F_3) - \kappa(n - a||t||^2\kappa)] + a\kappa^2((trt)^2 - trt^2). \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Proof. Direct calculations yield:

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}S &= S + (\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)^2}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_1 - F_3) \\
&+(\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_2 + \tau F_3) - \frac{a}{4} g^{ab} g^{hk} g^{lj} g^{vr} R_{slhv} R_{pjkr} t_a^s t_b^p \\
&-\frac{a}{4} g_{cd} g^{lj} g^{hk} g^{rv} R_{rlh}{}^{s} R_{vjk}{}^{p} t_s^c t_p^d + \frac{a}{2} g^{re} g^{bz} R_{cpr}{}^{h} R_{hez}{}^{s} t_s^c t_b^p. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Next, it follows from (4.14) that

$$
g_{cd} g^{lj} g^{hk} g^{rv} R_{rlh}{}^{s} R_{vjk}{}^{p} t_s^c t_p^d = g^{ab} g^{hk} g^{lj} g^{vr} R_{slhv} R_{pjkr} t_a^s t_b^p = 2\kappa^2 ||t||^2 (n-1), \qquad (4.17)
$$

$$
g^{re} g^{bz} R_{cpr}{}^{h} R_{hez}{}^{s} t_s^c t_b^p = 2\kappa^2 (t_c^c t_p^p - t_p^c t_c^p). \qquad (4.18)
$$

>From formulas (4.16) - (4.18) and the equality $S = n(n-1)\kappa$, we obtain

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}S &= n(n-1)\kappa + (\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)^2}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_1 - F_3) \\
&+ (\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)})((1-n^2)F_2 + \tau F_3) - a\kappa^2 ||t||^2 (n-1) + a\kappa^2 (t_c^c t_p^p - t_p^c t_c^p).
\end{aligned}
$$

Finally, using the equality $t_c^c t_p^p - t_p^c t_c^p = (trt)^2 - trt^2$, from the last equation we infer the relation (4.15), and the result follows. It is known that for a local frame a sectional curvature on $(T_1^1M, {}^{CG}g)$ is given by

$$
{}^{CG}K(\Delta) = -\frac{R_{kmij} U^k V^m U^i V^j}{{}^{CG}g(U,U)\, {}^{CG}g(V,V) - ({}^{CG}g(U,V))^2}, \qquad (4.19)
$$

where $\Delta = (U, V)$ denotes the plane spanned by (U, V).

Let $\{X_i\}_{i=1}^n$ be a local orthonormal frame, $||A^{\bar{i}}||_G^2 = G(A^{\bar{i}}, A^{\bar{i}}) = 1$, and $G(A^{\bar{i}}, A^{\bar{j}}) = 0$ for $\bar{i} \neq \bar{j}$ and $A^{\bar{i}} \in \Im_1^1(M)$, $\bar{i} = n+1, \ldots, n^2$. Then from the definition of ${}^{CG}g$, it is easy to see that $\{{}^HX_1, \ldots, {}^HX_n, {}^VA_1, \ldots, {}^VA^{n^2}\}$ is a local frame on T_1^1M. In view of (4.2) - (4.13) and (4.19), we obtain

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}K({}^VA, {}^VB) &= \frac{1}{A}\{F_1(g^{km} g_{hn} \bar{t}_t^l - g^{kl} g_{ht} \bar{t}_n^m)\bar{t}_i^j \\
&+F_2(g^{lj} g_{ti} g^{km} g_{hn} - g^{mj} g_{nt} g^{kl} g_{ht}) + F_3(g^{mj} g_{ni} \bar{t}_t^l - g^{lj} g_{ti} \bar{t}_n^m)\bar{t}_h^k\} A_m^n B_l^t A_j^i B_k^h, \\
{}^{CG}K({}^HX, {}^VB) &= \frac{a}{4B}\{g_{vh} g_{ta} g^{ez} g^{ld} g^{kr} R_{emr}{}^{s} R_{zjd}{}^{p} t_s^v t_p^a \\
&+g_{hv} g^{kr}(g^{lb} R_{mer}{}^{s} R_{tpj}{}^{e} t_s^v t_b^p + g_{ta} R_{mep}{}^{v} R^{sl}{}_{j}{}^{e} t_r^p t_s^a) \\
&+g_{ve} g^{kb} g^{rl} R_{tsm}{}^{v} R_{hpj}{}^{e} t_r^s t_b^p\} X^m B_l^t X^j B_k^h, \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}K({}^HX, {}^HY) = -\{R_{mljk} &+ \frac{3a}{4}(g^{zh} R_{mkz}{}^{s} R_{ljh}{}^{p} g_{ab} t_s^a t_p^b + g_{ve} R_{mks}{}^{v} R_{jlp}{}^{e} g^{ab} t_a^s t_b^p \\
&+ g_{ae} g^{zh} R_{mkz}{}^{s} R_{ljp}{}^{e} t_s^a t_h^p + g_{az} g^{hb} R_{mkp}{}^{z} R_{ljh}{}^{s} t_s^a t_b^p)\} X^m Y^l X^j Y^k,
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

where $\mathcal{A} = {}^V(a + bG^2(t,A))\,{}^V(a + bG^2(t,B)) - b\,{}^VG(t,A)\,{}^VG(t,B)$, $\mathcal{B} = {}^V(a + bG^2(t,B))$, ${}^{CG}K({}^HX, {}^HY)$, ${}^{CG}K({}^HX, {}^VB)$ denote the sectional curvature of the plane spanned by $({}^HX, {}^HY)$, $({}^HX, {}^VA)$ and $({}^VA, {}^VB)$ on $(T_1^1M, {}^{CG}g)$. Hence we can state the following result.

Theorem 4.5. *Let (M, g) be a Riemannian manifold and T_1^1M be its $(1,1)$–tensor bundle with metric ${}^{CG}g$. Suppose that $(T_1^1M, {}^{CG}g)$ is a Riemannian manifold of constant sectional curvature ${}^{CG}K = \kappa$. Then the sectional curvature of (M, g) is equal to κ. Moreover, (M, g) cannot have a non-zero constant sectional curvature.*

Proof. Let $(T_1^1M, {}^{CG}g)$ be a Riemannian manifold of constant sectional curvature ${}^{CG}K = \kappa$. Then we have $K({}^HX, {}^HY) = \kappa$. Writing (4.21) at $(x^i, 0)$, we obtain

$$\kappa = {}^{CG}K({}^HX, {}^HY) = -R_{mljk} X^m Y^l X^j Y^k = K(X, Y),$$

where $K(X, Y)$ is the sectional curvature of (M, g). This implies that (M, g) has a constant sectional curvature equal to κ. Also, from the equation (4.20) written at $(x^i, 0)$, we infer $\kappa = {}^{CG}K({}^HX, {}^VB) = 0$.

5. Para-Kähler Structures on $(T_1^1M, {}^{CG}g)$

An *almost product structure* F on a differentiable manifold M is a $(1,1)$–tensor field F on M such that $F^2 = 1$. The pair (M, F) is called an almost product manifold. An *almost paracomplex manifold* (or almost B–manifold) is an almost product manifold (M, F) such that the two eigenbundles T^+M and T^-M associated with the two eigenvalues +1 and -1 of F, respectively, have the same rank.. An almost paracomplex structure on a 2n-dimensional manifold M may alternatively be defined as a G–structure on M with structural group $GL(n, R) \times GL(n, R)$. A *paracomplex manifold* (or B–manifold) is an almost paracomplex manifold (M, F) such that the G–structure defined by the tensor field F is integrable (see [15]). If an almost paracomplex manifold (M, F) admits a Riemannian metric g such that

$$g(FX, FY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Im_0^1(M),$$

then (M, g, F) is called an *almost para-Nordenian manifold.* It is well known that, an almost para-Nordenian manifold is a para-Kähler manifold if and only if $\nabla F = 0$, where ∇ is the Levi-Civita connection of g (see [20]). Let now $E \in \Im_0^1(M)$ be a nowhere zero vector field on M. For any $X \in \Im_0^1(M)$ and $\widetilde{E} = g \circ E \in \Im_1^0(M)$, we define the vertical lift ${}^V(X \otimes \widetilde{E})$ of X with respect to E. The map $X \to {}^V(X \otimes \widetilde{E})$ is a monomorphism of $\Im_0^1(M) \to \Im_0^1(T_1^1M)$. Hence an n-dimensional C^∞ vertical distribution V^E is defined on T_1^1M. Let $V^\perp$ be the distribution on T_1^1M which is orthogonal to H and V^E. Then H, V^E and $V^\perp$ are mutually orthogonal distributions with respect to the metric ${}^{CG}g$. We define a tensor field F of type $(1,1)$ on T_1^1M by

$$\begin{cases} F({}^{H}X) = \alpha^{V}(X \otimes \widetilde{E}) + \beta g(X,E)^{V}(E \otimes \widetilde{E}), \\ F({}^{V}(X \otimes \widetilde{E})) = \delta^{H}X + \rho g(X,E)^{H}E, \\ F({}^{V}A) = {}^{V}A, \end{cases}$$

for any $X \in \Im_0^1(M)$ and $A \in \Im_1^1(M)$, where $\alpha, \beta, \delta, \rho$ are functions on T_1^1M to be determined. The condition $F^2 = I$ leads to the equations

$$\alpha\delta = 1, \quad \alpha\rho + \beta\delta + \beta\rho||E||^2 = 0. \tag{5.1}$$

Thus we have the following result.

Proposition 5.1. *Let (M, g) be a Riemannian manifold and T_1^1M be its (1,1)- tensor bundle. Then (T_1^1M, F) is an almost paracomplex manifold if and only if (5.1) holds.*

The condition ${}^{CG}g(F(\widetilde{X}), F(\widetilde{Y})) = {}^{CG}g(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ for all $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Im_0^1(T_1^1M)$ implies

$$a\alpha^2||E||^2 = 1, \quad \delta^2 = a||E||^2, \quad 2\delta\rho + \rho^2||E||^2 = 0, \quad 2\alpha\beta + \beta^2||E||^2 = 0. \tag{5.2}$$

The solution of the system of equations (5.1) and (5.2) is

$$\alpha = \frac{1}{||E||\sqrt{a}}, \quad \beta = \frac{-2}{\sqrt{a}||E||^3}, \quad \delta = ||E||\sqrt{a}, \quad \rho = -\frac{2\sqrt{a}}{||E||}. \tag{5.3}$$

Thus we have the following result.

Theorem 5.1. *Let (M, g) be a Riemannian manifold and T_1^1M be its (1, 1)-tensor bundle equipped with metric ${}^{CG}g$. Then the triple $(T_1^1M, {}^{CG}g, F)$ is an almost para-Nordenian manifold if and only if (5.3) holds.*

Now, we obtain the covariant derivative of F as follows:

$$\begin{aligned} &({}^{CG}\nabla_{{}^{H}X}F)({}^{H}Y) \\ &= \alpha^{V}(Y \otimes [g \circ \nabla_X E]) - \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma} - \gamma)R(X,Y) + \beta^{V}(E \otimes \widetilde{E})g(Y, \nabla_X E) \\ &+ \frac{a\alpha}{2}{}^{H}\Big(g^{bj}R(t_b, (Y \otimes \widetilde{E})_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1} \circ R(.,X)\widetilde{(Y \otimes \widetilde{E})}^{i}))\Big) \\ &+ \beta g(Y,E)[{}^{V}(\nabla_X E \otimes \widetilde{E} + E \otimes g \circ \nabla_X E) \\ &+ \frac{a}{2}{}^{H}\Big(g^{bj}R(t_b, (E \otimes \widetilde{E})_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1} \circ R(.,X)\widetilde{(E \otimes \widetilde{E})}^{i}))\Big)], \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &({}^{CG}\nabla_{{}^{H}X}F)({}^{V}B) \\ &= \frac{a}{2}{}^{H}\Big(g^{bj}R(t_b, B_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1} \circ R(.,X)\widetilde{B}^{i}))\Big) \\ &- \frac{a\alpha}{2}{}^{V}\Big([g^{bj}R(t_b, B_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1} \circ R(.,X)\widetilde{B}^{i}))] \otimes \widetilde{E}\Big) \\ &- \frac{a\beta}{2}g\Big(g^{bj}R(t_b, B_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1} \circ R(.,X)\widetilde{B}^{i})), E\Big)^{V}(E \otimes \widetilde{E}), \end{aligned}$$

$$({}^{CG}\nabla_{{}^H X}F)^V(Y\otimes\widetilde{E})$$
$$= -{}^V(Y\otimes(g\circ\nabla_X E)) + \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma}-\gamma)[\delta R(X,Y)+\rho g(Y,E)R(X,E)]$$
$$-\frac{a\alpha}{2}{}^V\Big(g^{bj}R(t_b,(Y\otimes\widetilde{E})_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1}\circ R(.,X)\widetilde{(Y\otimes\widetilde{E})}^i))\otimes\widetilde{E}\Big)$$
$$-\frac{a\beta}{2}g\Big(g^{bj}R(t_b,(Y\otimes\widetilde{E})_j)X + g_{ai}(t^a(g^{-1}\circ R(.,X)\widetilde{(Y\otimes\widetilde{E})}^i)),E\Big)^V(E\otimes\widetilde{E})$$
$$+\rho^H E g(Y,\nabla_X E) + \rho g(Y,E)^H(\nabla_X E),$$
$$({}^{CG}\nabla_{{}^V A}F)({}^V B) = 0,$$

$$({}^{CG}\nabla_{{}^V(X\otimes\widetilde{E})}F)^V(Y\otimes\widetilde{E})$$
$$= -MG(X\otimes\widetilde{E},Y\otimes\widetilde{E})^V t + \frac{a\rho}{2}g(Y,E)^H\Big(g^{bl}R(t_b,{}^V(X\otimes\widetilde{E})_l)E$$
$$+g_{at}(t^a(g^{-1}\circ R(.,E)^V\widetilde{(X\otimes\widetilde{E})}^t))\Big) + \frac{a\delta}{2}{}^H\Big(g^{bl}R(t_b,{}^V(X\otimes\widetilde{E})_l)Y$$
$$+g_{at}(t^a(g^{-1}\circ R(.,Y)^V\widetilde{(X\otimes\widetilde{E})}^t))\Big), \tag{5.5}$$

$$({}^{CG}\nabla_{{}^V(X\otimes\widetilde{E})}F)({}^H Y)$$
$$= -\frac{a\alpha}{2}{}^V\Big([g^{bl}R(t_b,(X\otimes\widetilde{E})_l)Y + g_{at}(t^a(g^{-1}\circ R(.,Y)\widetilde{(X\otimes\widetilde{E})}^t))]\otimes\widetilde{E}\Big)$$
$$-\frac{a\beta}{2}g\Big(g^{bl}R(t_b,(X\otimes\widetilde{E})_l)Y + g_{at}(t^a(g^{-1}\circ R(.,Y)\widetilde{(X\otimes\widetilde{E})}^t)),E\Big)^V(E\otimes\widetilde{E})$$
$$+\alpha MG(X\otimes\widetilde{E},Y\otimes\widetilde{E})^V t,$$

$$({}^{CG}\nabla_{{}^V(X\otimes\widetilde{E})}F)({}^V B)$$
$$= LG(B,t)^V(X\otimes\widetilde{E}) - LG(B,t)\Big(\delta^H X + \rho g(X,E)^H E\Big). \tag{5.6}$$

Hence we have the following theorem.

Theorem 5.2. *Let (M,g) be a Riemannian manifold, $T_1^1 M$ be its tensor bundle with the Riemannian metric ${}^{CG}g$ and the almost paracomplex structure F. Then the triple $(T_1^1 M, {}^{CG}g, F)$ is a para-Kähler-Norden manifold if and only if $a = constant$, $b = 0$, $R = 0$ and $\nabla E = 0$.*

Proof. Obviously, if $a = constant$, $b = 0$, $R = 0$ and $\nabla E = 0$, then ${}^{CG}\nabla F = 0$, that is, $(T_1^1 M, {}^{CG}g, F)$ is a para-Kähler-Norden manifold. Conversely, let ${}^{CG}\nabla F = 0$. Then by (5.6) we get $L = 0$, implying that $a = constant$. Moreover, from (5.5) we have $M = 0$, implying $b = 0$. Finally, (5.4) gives us $R = 0$ and $\nabla E = 0$.

As an immediate consequence of Theorem 7, we can state the following result for Sasaki metric ${}^S g$.

Corollary 5.1. *Let* (M,g) *be a Riemannian manifold,* T_1^1M *be its tensor bundle with the Sasaki metric* ${}^Sg$ *and the paracomplex structure* F. *Then the triple* $(T_1^1M, {}^Sg, F)$ *is a para-Kähler-Norden manifold if and only if* $R=0$ *and* $\nabla E=0$.

REFERENCES

[1] M. T. K. Abbassi and M. Sarih , *Killing vector fields on tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric*, Tsukuba J. Math. 27 (2) (2003), 295-306.

[2] M.T.K. Abbassi and M. Sarih, *On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds*, Arch. Math.(Brno), 41 (2005), 71-92.

[3] N. Cengiz and A. A. Salimov, *Complete lifts of derivations to tensor bundles*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 8(3)(2002), 75-82.

[4] N. Cengiz and A. A. Salimov, *Geodesics in the tensor bundle of diagonal lifts*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 31 (2002), 1-11.

[5] N. Cengiz, A.A. Salimov, *Diagonal lift in the tensor bundle and its applications*, Applied Mathematics and Computation 142 (2003), 309-319.

[6] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. 96(2)(1972), 413-443.

[7] A. Collinucci and A. Wijns, *Topology of Fibre bundles and Global Aspects of Gauge Theories*, arXiv:hep-th/0611201v1, (2006), 1-43.

[8] S. L. Druţă, *Riemannian almost product and para-Hermitian cotangent bundles of general natural lift type*, Acta Math. Hung, 17 pp., Online 15.10.2012, DOI: 10.1007/s10474-012-0271-y.

[9] S. L. Druţă, *General natural Riemannian almost product and para-Hermitian structures on tangent bundles*, Taiwan J. Math., 16(2) (2012), 497-510.

[10] S. L. Druţă, *Para-Kahler tangent bundles of constant para-holomorphic sectional curvature*, Bull. Iran. Math. Soc., 18 pp, Online 21.06.2011.

[11] S. L. Druţă, *Kaehler-Einstein structures of general natural lifted type on the cotangent bundles*, Balkan J. Geom. Appl., 14(1) (2009), 30-39.

[12] S. L. Druţă and V. Oproiu, *Tangent sphere bundles of natural diagonal lift type*, Balkan J. Geom. Appl., 15 (2010), 53-67.

[13] S. L. Druţă and V. Oproiu, *Some natural diagonal structures on the tangent bundles and on the tangent sphere bundles*, ROMAI J., 6 (2010), 121-130.

[14] A. Gezer and A. A. Salomov, *Almost comlex structures on the tensor bundles*, The Arabian Journal for Science and Engineering, 33(2008), 283-296.

[15] S. Kaneyuki and M. Kozai, *Paracomplex structures and affine symmetric spaces*, Tokyo J. Math, 8(1985), 81Ц98.

[16] I. Kolar, P. W. Michor and J. Slovak, Natural operations in differential geometry, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[17] O. Kowalski and M. Sekizawa, *Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles -a classification-*, Bull. Tokyo Gakugei Univ. 40 (4)(1988), 1-29.

[18] A. J. Ledger and K. Yano, *Almost complex structures on the tensor bundles*, J. Diff. Geom, 1(1967), 355-368.

[19] A. A. Salimov and N. Cengiz, *Lifting of Riemannian metrics to tensor bundles*, Russian Math. (IZ. VUZ.), 47(11), 2003, 47-55.

[20] A. Salimov and A. Gezer, *On the geometry of the* $(1,1)$*-tensor bundle with Sasaki type metric*, Chin. Ann. Math, 32(B3)(2011), 1-18.

[21] M. Sekizawa, *Curvatures of tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric*, Tokyo J. Math, 14(2) (1991), 407-417.

Поступила 2 октября 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 71-81.

ОЦЕНКИ МЕР ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АССОЦИИРОВАННЫХ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. В работе получены оценки типа $\Sigma\delta^{\alpha}$, для мер исключительности исключительных значений ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций.

MSC2010 number: 30D30, 30D35, 30C15.
Ключевые слова: теория Неванлинны; теория Альфорса; свойство близости а-точек.

1. Введение

Предполагаем известными основные положения теории распределений значений мероморфных функций, теории поверхностей наложения Л.Альфорса, пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

В теории распределения значений мероморфных функций в качестве меры близости мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ рассматривается обычно неванлинновская функция приближения (см.[1])

$$m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|w(re^{i\varphi}) - a\right|^{-1} d\varphi.$$

С конца шестидесятых годов двадцатого столетия активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a, величина (см. [2]-[7])

$$L(r,a) = \max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1}.$$

Установлены многочисленные аналогии в поведении функций $L(r,a)$ и $m(r,a)$, составляющие предмет теории роста В. Петренко (см.[2]). В теории распределений значений мероморфных функций получение окончательных результатов зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые рассматривались как вспомогательные, технические средства (см. [1], [2] и [8]-[10]). Между тем в работах [11] и [12] было установлено, что величины

$$P_k(r,a) = r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left|\ln^{(k)}(w(z)-a)\right|^{1/k} d\varphi, \ k \in N, \quad (z = re^{i\varphi})$$

где $\Delta(r,a) = \Delta(r,a,w) = \{z : |z| = r, |w(z)-a| \leqslant 1\}$, обнаруживают свойство, аналогичное свойствам функций $m(r,a)$, т.е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р.Неванлинны, и соответственно, аналог соотношения дефектов. Доказано, что для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка λ множество значений a, в которых $D_k(a) = D_k(a,w) = \varliminf\limits_{r\to\infty} (P_k(r,a)/T(r)) > 0$, не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_{(a)} D_k(a) \leqslant K(k,\lambda), \tag{1.1}$$

где $T(r)$- неванлинновская характеристика, $K(k,\lambda)$ - постоянная зависящая от k и λ. Для величин $P_k(r,a)$ устанавливаются аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [13]-[15])

$$\int\limits_0^{2\pi} P_k(r,e^{i\theta})d\theta = o\left[T(r)\right], r \to \infty. \tag{1.2}$$

Тем самым, указанные интегралы становятся объектом самостоятельного изучения. На актуальность изучения таких объектов указывает, кроме всего, следующее простое предложение: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных в смысле В. Петренко значения, то есть существуют значения a_1 и a_2 для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a,w) = \varliminf_{r\to\infty} (L(r,a)/T(r)),$$

то для любых $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$m(r,a) \leqslant L(r,a) \leqslant P(r,a) + O(1), r \to \infty, \text{где} \, P(r,a) = P_1(r,a). \tag{1.3}$$

Так что, если E_1- множество дефектных в смысле Р. Неванлинны значений, E_2-множество исключительных значений в смысле В. Петренко, E_3- множество "исключительных" значений a, для которых $D(a) = D_1(a) > 0$, то из неравенства (1.3) следует, что имеют место включения $E_1 \subset E_2 \subset E_3$, если число элементов E_1 больше единицы. Из соотношений (1.2) и (1.3) следует соотношение типа тождества Картана в теории роста мероморфных функций:

$$\int\limits_0^{2\pi} L(r,e^{i\theta})d\theta = o\left[T(r)\right], r \to \infty.$$

Отметим, что этот результат отсутствовал в этой теории.

В работе [16] рассматривается вопрос: что можно сказать о мерах исключительности $D(a)$ исключительных значений a, кроме того, что должно выполняться (1.1): получены неравенства типа $\sum\limits_{(a)}\left[\delta(a)/\ln\frac{e}{\delta(a)}\right]^{\alpha}$, для мер исключительности $D(a)$. В данной работе устанавливаются следующие результаты:

Теорема 1.1. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ; $a_\nu \in \mathbb{C}, \nu = 1,2,\ldots,n, a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Тогда существует такая постоянная $K(\lambda) < \infty$, зависящая от λ, что для некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(r), \tag{1.4}$$

где $T(r)$- неванлинновская характеристика, $|\Delta(r,a_\nu)|$- угловая мера множества $\Delta(r,a_\nu)$, $\varepsilon \in (0,1)$ - фиксированное число.

Теорема 1.2. *При условиях теоремы 1.1 выполняется следующее соотношение*

$$\sum_{\nu=1}^{n} D^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}(a_\nu) \leqslant K(\lambda), \tag{1.5}$$

где $K(\lambda)$- постоянная зависящая от λ, $\varepsilon_1 = 1/(6-4\varepsilon)$.

Следствие 1.1. *При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\frac{1}{3}+\varepsilon_2}(a_\nu) \leqslant K(\lambda), \tag{1.6}$$

где $\delta(a) = \varliminf\limits_{z\to\infty}(m(r,a)/T(r))$-дефект значения a, $\varepsilon_2 = 1/(15-9\varepsilon)$.

Следствие 1.2. *При условиях теоремы 1.1 выполняется*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}(a_\nu) \leqslant K(\lambda). \tag{1.7}$$

2. Вспомогательные результаты

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$- фиксированные числа. Обозначим

$$E_\alpha(R) = E_{\alpha_1}^{\alpha_2}(R) = \{r : \alpha_1 R < r < \alpha_2 R\}\,; \Delta_1(r,a) = \Delta(r,a) \cap \Delta(r,0,w'),$$

$$\Delta_2(r,a) = \Delta(r,a)\backslash\Delta(r,0,w'), \quad I(r,b) = r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right|d\varphi, \quad b \in \mathbb{C},\ z = re^{i\varphi}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $w(z)$- мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$ такие, что $|a-b| > 2$. Тогда выполняется следующее соотношение*

$$\int\limits_{E_\alpha(R)}\frac{I(r,b)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o[A(R)]R, \quad R \to \infty, \tag{2.1}$$

где $A(r)$- сферическая характеристика Альфорса, $|\Delta(r,a_\nu)|$- угловая мера множества $\Delta(r,a_\nu)$, $\varepsilon \in (0,1)$- фиксированное число.

Доказательство. Поскольку при $z \in \Delta(r,a)$, $|w(z)-b|>1$, то имеем

$$I(r,b) \leqslant r \int\limits_{\Delta(r,a)} |w'(z)|\, d\varphi.$$

Используя неравенство Гельдера при $p = 2-\varepsilon$, $q=(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$, получим

$$I(r,b) \leqslant r \left(\int\limits_{\Delta(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} |\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда, учитывая следующее неравенство

$$\left(\sum_\nu c_\nu\right)^\beta \leqslant \sum_\nu c_\nu^\beta, \quad c_\nu \geqslant 0, \quad 0<\beta<1, \tag{2.2}$$

и что $|w'(z)|>1$ при $z \in \Delta_2(r,a)$ имеем

$$\frac{I(r,b)}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + r \left(\int\limits_{\Delta_2(r,a)} |w'(z)|^{2}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \tag{2.3}$$

Применяя неравенство Гельдера при $p=2/(2-\varepsilon)$, $q=2/\varepsilon$, для первого интеграла в правой части получаем

$$r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leqslant K(\varepsilon) r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Так как при $z \in \Delta(r,a)$, $|w(z)|<1+|a|$, то из неравенств (2.3) и (2.4) имеем

$$\frac{I(r,b)}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\varepsilon,a) r \left(\int\limits_{\Delta(r,a)} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}},$$

где $K(\varepsilon,a)$ - постоянная зависящая от ε и a. Отсюда используя неравенство Гельдера при $p=2-\varepsilon$, $q=(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ получим

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I(r,b)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o\left[A(R)\right] R, \quad R \to \infty.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Обозначим через $n(r,a)$ и $n(r,b)$ количества a - точек и b - точек функции $w(z)$ в круге $|z|<r$, а через $n(r,a,b)$ - количество тех a - точек $z_k(a) \in \bar{E}_k(r) \subset$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\tilde{\Phi}(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых найдется b - точка $z_k(b)$ из области $\tilde{\bar{E}}_k(r) \subset \{|z| < r\}$, $k = 1, 2, ..., \tilde{\bar{\Phi}}(r)$ ($\tilde{\bar{E}}_k(r)$ и $\tilde{\bar{\Phi}}(r)$ определены в [17]).

В работе [18] доказана следующая лемма:

Лемма 2.2. *Пусть $w(z)$- мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, ..., n$, такие что $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Если $1 < c = const < \infty$, то*

$$(2.5) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} [n(r, a_\nu) + n(r, b_\nu) - 2n(r, a_\nu, b_\nu)] \leqslant K_0 \frac{c}{c-1} T(cr), \quad r \notin E,\ r > r^*,$$

где $\int\limits_E d\ln t < \infty$, K_0 - абсолютная постоянная[1].

Лемма 2.3. *Пусть $w(z)$ - мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$, такие что $|a - b| > 2$. Тогда при $R > R_0$ выполняется следующее неравенство ($R' = \alpha_3 R$)*

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{P(r,a)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1 \{m(R', a) + m(R', b)\} R + K_2 \{(n(R', a) + n(R', b)$$

$$(2.6) \qquad -2n(R', a, b))\} R + K_3 \left\{ A^{\frac{1}{2}}(R') L(R') + o[A(R')] \right\} R \ln R,$$

где $L(r), A(r)$ - сферические характеристики Альфорса.

Доказательство. Индексом i будем отмечать те a-точки $z_i(a)$ и b- точки $z_i(b)$, которые фигурируют в определении $n(R', a, b)$; остальные a-точки (b- точки) из круга $|z| < R'$ будем отмечать индексом $l(j) - z_l(a)(z_j(b))$. При доказательстве этой леммы используем неравенство Гельдера при $p = 2 - \varepsilon$,
$q = (2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$. Используя формулу Неванлинны получим

$$P(r, a) \leqslant r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \ln \left| \frac{w(R'e^{i\theta}) - a}{w(R'e^{i\theta}) - b} \right| \right| \frac{R' d\theta}{|R'e^{i\theta} - z|^2} \right\} d\varphi$$

$$+ \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z_i(b) - z} - \frac{1}{z_i(a) - z} \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z - z_j(b)} \right| d\varphi$$

$$+ \sum_{l=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z - z_l(a)} \right| d\varphi + \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{\bar{z}_i(a)}{R'^2 - \bar{z}_i(a) z} - \frac{\bar{z}_i(b)}{R_n'^2 - \bar{z}_i(b) z} \right| d\varphi$$

---

[1] В дальнейшем обозначим через K_i, $i = 0, 1, 2, ...$ постоянные, не обязательно одинаковые, даже на протяжении одной цепочки неравенств.

$$+\sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{|z_j(b)|}{R'^2-\bar{z}_j(a)z}\right|d\varphi+\sum_{l=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{|z_l(b)|}{R'^2-\bar{z}_l(a)z}\right|d\varphi+$$

$$+r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right|d\varphi=I_1(r)+\cdots+I_8(r) \tag{2.7}$$

Используя неравенство Гельдера нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{E_a(R)}\frac{I_1(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\leqslant K_1\left\{m(R',a)+m(R',b)\right\}R. \tag{2.8}$$

Обозначим через $\rho_i=|z_i(a)-z_i(b)|$, $i=1,2,\cdots,n(R',a,b)$ и применяя неравенство Гельдера для следующего интеграла, получим

$$I_i^{(2)}(r)=r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{1}{z_i(b)-z}-\frac{1}{z_i(a)-z}\right|d\varphi\leqslant$$

$$\leq r\rho_i\left(\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда вытекает

$$\int\limits_{E_a(R)}\frac{I_i^{(2)}(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\leqslant K\rho_i R^{\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}A_i(R), \tag{2.9}$$

где

$$A_i(R)=\left(\int\limits_{E_a(R)}\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{rdrd\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}$$

Оценим этот интеграл. Для этого обозначим $D_a(r)=\{z:|z-a|\leqslant r\}$, $D_a^b(r)=\left\{z:\left|z-\frac{a+b}{2}\right|\leqslant r\right\}$, $\bar{D}_a^b(r)=D_a^b(r)\backslash\{D_a(r/2)\cup D_b(r/2)\}$. Используя неравенство (1.2) имеем

$$A_i(R)\leqslant\left(\iint\limits_{D_{z_i(a)}(\rho_i/2)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+\left(\iint\limits_{D_{z_i(b)}(\rho_i/2)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+\left(\iint\limits_{\bar{D}_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+$$

$$+\left(\iint\limits_{D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(2R)\backslash D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)}\frac{rdrd\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}=I_{i,1}(R)+\cdots+I_{i,4}(R).$$

Так как при $z\in D_{z_i(a)}(\rho_i/2)$, $|z-z_i(b)|\geqslant\rho_i/2$, то получим, что $I_{i,1}(R)\leqslant K_1\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Точно так же $I_{i,2}(R)\leqslant K_2\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Учитывая, что когда $z\in\bar{D}_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)$

или когда $z \in D^{z_i(b)}_{z_i(a)}(2R)\backslash D^{z_i(b)}_{z_i(a)}(\rho_i)$, то $|z - z_i(a)| > \rho_i/2$, $|z - z_i(b)| > \rho_i/2$; и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что $I_{i,3}(R) \leqslant K_3\rho_i^{-\frac{2-2\epsilon}{2-\epsilon}}$, $I_{i,4}(R) \leqslant K_4\rho_i^{-\frac{2-2\epsilon}{2-\epsilon}}\{\ln R - \ln\rho_i\}$. Окончательно из этих неравенств имеем $A_i(R) \leqslant K\rho_i^{-\frac{2-2\epsilon}{2-\epsilon}}\{\ln R - \ln\rho_i\}$, $i = 1, 2, ..., n(R', a, b)$. Отсюда и из неравенства (2.9) получим

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I_i^{(2)}(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}} \leqslant KR^{\frac{2-2\epsilon}{2-\epsilon}}\ln R\sum_{i=1}^{n(R',a,b)}\rho_i^{\frac{\epsilon}{2-\epsilon}}. \tag{2.10}$$

В работе [17] для ρ_i устанавливается следующая оценка

$$\rho_i < d(\bar{E}_i(R')) < KR\varphi^8(R')A^{-\frac{1}{2}}(R'),\ i = 1, 2, ..., n(R', a, b), \tag{2.11}$$

где $d(x)$- диаметр множества x; $\varphi(r)$- произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to +\infty$. Из неравенств (2.10) и (2.11) имеем

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I_2(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}} \leqslant KR\ln R\,[\varphi(R')]^{\frac{8\epsilon}{2-\epsilon}}\,[A(R')]^{-\frac{\epsilon}{2(2-\epsilon)}}n(R', a, b). \tag{2.12}$$

В работе [17] для $\bar{\bar{\Phi}}(r)$ получено следующее неравенство

$$\bar{\bar{\Phi}}(R') \leqslant A(R') + \frac{8A(R')}{\varphi(R')} + h\varphi^2(R')L(R').$$

Поскольку $\varphi(r)$- произвольная функция, то, выбирая $\varphi^{24}(r) < A(r)$, и учитывая, что $n(R', a, b) < \Phi(R')$, из неравенства (2.12) получаем

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I_2(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}} \leqslant K_2\left\{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\}R\ln R. \tag{2.13}$$

Используя неравенство Гельдера и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I_3(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}} \leqslant K_3\{n(R', b) - n(R', a, b)\}R, \tag{2.14}$$

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I_4(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}}} \leqslant K_4\{n(R', a) - n(R', a, b)\}R. \tag{2.15}$$

Оценим интеграл I_5. Для этого обозначим через

$$I_5^i(r) = r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{\bar{z}_i(a)}{R'^2 - \bar{z}_i(a)z} - \frac{\bar{z}_i(b)}{R'^2 - \bar{z}_i(b)z}\right|d\varphi,\ i = 1, 2, ..., n(R', a, b).$$

Применяя неравенство Гельдера легко видеть, что $I_5^1(r) \leqslant K_5\rho_i R^{-2} r\,|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Используя неравенство (2.11) получим

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_5(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_5 R\varphi^8(R')A^{-\frac{1}{2}}(R')n(R',a,b).$$

Отсюда, как и при выводе неравенства (2.13) имеем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_5(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_5 \left\{A^{\frac{1}{2}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\} R. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_6(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_6 \left\{n(R',b) - n(R',a,b)\right\} R, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_7(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_7 \left\{n(R',a) - n(R',a,b)\right\} R. \tag{2.18}$$

Учитывая лемму 1.1 и неравенства (2.7), (2.8) и (2.13)-(2.18), получим

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{P(r,a)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1 \left\{m(R',a) + m(R',b)\right\} R +$$

$$+K_2 \left\{n(R',a) + n(R',b) - 2n(R',a,b)\right\} R + K_3 \left\{A^{\frac{1}{2}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\} R \ln R.$$

Лемма 2.3 доказана. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1 Пусть $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $|a_\nu - b_\nu| > 2$, $\nu = 1,2,...,n$. Записав для каждого a_ν неравенство (2.6) леммы 2.3 и просуммировав, имеем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right\} dr \leqslant K_1 R \sum_{\nu=1}^{q} [m(R',a_\nu) + m(R',b_\nu)] +$$

$$+K_2 R \sum_{\nu=1}^{n} [n(R',a_\nu) + n(R',b_\nu) - 2n(R',a_\nu,b_\nu)] +$$

$$+K_3 \left\{A^{\frac{1}{2}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\} R \ln R. \tag{3.1}$$

По второй основной теореме Р.Неванлинны (с учетом леммы о логарифмической производной) при $R > R_0^*$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} [m(R',a_\nu) + m(R',b_\nu)] \leqslant 3T(R'). \tag{3.2}$$

Положим теперь $\alpha_1 = 1/(\lambda+2)$, $\alpha_2 = 1/(\lambda+1)$. Из оценки $L(r) < [A(r)]^{2/3}$, $r \notin E$ (см. [1], п.326) вытекает, что при $R > R_1^*$ в каждом интервале $\left(\frac{1+\alpha_2}{2}R, \frac{3+\alpha_1}{4}R\right)$ найдется такая точка $R' = \alpha_3(R)R = \alpha_3 \cdot R$, для которой $L(R') = L(\alpha_3 R) \leqslant [A(\alpha_3 R)]^{\frac{2}{3}}$ (здесь мы учли, что E имеет конечную логарифмическую меру). Отсюда учитывая очевидное неравенство $A(r) << T(\beta r)/\ln\beta$, $(\beta > 1)$, имеем

$$L(R') \leqslant \left[\left(\ln\frac{1}{\alpha_3}\right)^{-1} T(R)\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{3.3}$$

Далее положим $c = (\lambda+2)/(\lambda+1)$ и используя лемму 2.2, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}[n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq K(\lambda)T(cR). \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.1)-(3.4) следует, что

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right\}dr \leqslant K(\lambda)T(cR)R.$$

Используя теорему о среднем значении, в некоторой точке $R^* \in E_\alpha(R)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(R^*, a_\nu)}{|\Delta(R^*, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(cR), \quad R > R_0. \tag{3.5}$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha_1, c)$ значений R, зависящих только от α_1 и c, для которых выполняется неравенство

$$T(cR_n) = T\left(\frac{c}{\alpha_1}\cdot\alpha_1 R_n\right) \leqslant \left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^{\lambda+1} T(\alpha_1 R_n). \tag{3.6}$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1 из работы [2]. Ясно что для таких R_n существуют множества $R_n^* = R_n^*(\alpha_1, c)$ значений R^*, что выполняется неравенство (3.5). Из неравенств (3.5) и (3.6) получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(R_n^*, a_\nu)}{|\Delta(R_n^*, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(R_n^*).$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2 Пусть $K > 1$ - фиксированное число. Учитывая, что при $z \in \Delta(r, a, w)\backslash\Delta(r, Ka, Kw)$, $1/K < |w(z) - a| < 1$, имеем

$$P(r, a, w) = P(r, Ka, Kw) + O(L(z)), \quad r \to \infty. \tag{3.7}$$

Из неравенств (3.3) и (3.6) следует, что существует последовательность $r = r_n \to \infty$, $n \to \infty$, такое, что $L(r) = o[T(r)]$. Отсюда, используя соотношение (3.7) получим $P(r, a, w) = P(r, Ka, Kw) + [T(r)]$, $r \to \infty$, следовательно

$$D(a, w) = D(Ka, Kw). \tag{3.8}$$

Предположим теперь, что $\{a_\nu\}$ является конечным множеством комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$|a_i - a_j| > 2, \ (1 \leqslant i < j \leqslant n.) \tag{3.9}$$

Если a_n различны и не удовлетворяют условию (3.9), то при достаточно большой постоянной $K > 0$ $K\,|a_i - a_j| > 2 \quad (i \neq j)$. Следовательно из соотношения (3.8) следует, что теорему достаточно доказать при условии (3.9). Пусть теперь $p = (3-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)$, $q = (3-2\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ и $l = (1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)$. Ясно, что $l \cdot q/p = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} P^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{l}{p}}} \cdot |\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{l}{p}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{l}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta(r,a_\nu)|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Из условия (3.9) следует, что $\Delta(r,a_i) \cap \Delta(r,a_j) = \Phi$, при $i \neq j$, следовательно $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\Delta(r,a_\nu)| \leqslant 2\pi$. Учитывая это и теорему 1.1, получим, что для некоторой последовательности $r = r_n \to \infty$, $n \to \infty$ выполняется неравенство $\sum\limits_{\nu=1}^{n} P^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu) \leqslant K(\lambda)T^{\frac{1}{p}}$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} D^{\frac{1}{p}}(a_\nu) \leqslant K(\lambda).$$

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Нетрудно видеть, что

$$\frac{m(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|} \leqslant P(r,a_\nu) + O(1), \ r \to \infty. \tag{3.10}$$

Положим теперь $p = (5-3\varepsilon)/(2-\varepsilon)$, $q = (5-3\varepsilon)/(3-2\varepsilon)$ и $\gamma = (3-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)$. Тогда ясно, что $q\gamma/p = 1$. Используя неравенство Гельдера получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{\gamma}{p}}} \cdot |\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{\gamma}{p}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta(r,a_\nu)|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда, учитывая (3.10) и что $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\Delta(r,a_\nu)| \leqslant 2\pi$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu) \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Используя теорему 1.1 получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r,a_\nu) \leqslant K(\lambda)T^{\frac{1}{p}}(r), \ r = r_n \to \infty,$$

следовательно $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \delta^{\frac{1}{p}}(a_\nu) \leqslant K(\lambda)$. Следствие 1.1 доказано. Доказательство следствия 1.2 очевидно, так как $\beta(a) \leqslant D(a)$.

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. In this paper certain estimates of type $\Sigma\delta^{\alpha}$ for the measures of exceptions of the exceptional values associated with logarithmic derivatives of meromorphic functions are obtained.

Список литературы

[1] Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).

[2] В. П. Петренко, Рост Мероморфных Функций, Харьков: Выш. Школа (1978).

[3] Н. В. Говоров, "О проблеме Пейли", Функц. анализ и его приложения, 3, вып. 2, 38 – 43 (1969).

[4] А. А. Гольдберг, "К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 29, 31 – 35 (1978).

[5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, "Некоторые теоремы о росте мероморфных функций", Зап. мат. отд. Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва, Серия 4, 27, 3 – 37 (1961).

[6] А. Э. Еременко, "Об отклонениях мероморфных функций конечного нижнего порядка", Теория функций, функ. анализ и их прилож., вып. 40, 56 – 64 (1983).

[7] Г. А. Барсегян, Докторская диссертация, Тбилиси (1984).

[8] W. H. J. Fuchs, "A theorem on the Nevanlinna deficiences of meromorphic functions of finite order", Ann.Math., 68, no. 2, 203 – 209 (1958).

[9] W. H. J. Fuchs, "Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series", Ill J.Math., 7, no. 4, 661 – 667 (1963).

[10] E. Muess, "Über eine Vermutung von Hayman", Math. Z., 119, no. 1, 11 – 20 (1971).

[11] Г. А. Барсегян, "Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 16, по. 5, 408 – 423 (1981).

[12] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, "Исключительные значения, определяемые посредством высших производных мероморфных функций", Изв. АН. Арм. ССР, сер. матем., 28, по. 3 (1993).

[13] В. К. Хейман, Мероморфные Функции, М., Мир (1966).

[14] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, "Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 25, по. 5, 474 – 488 (1990).

[15] В. Г. Петросян, "Соотношения типа тождества Картана", ДАН Арм. ССР, 93, по. 5, 200 – 205 (1992).

[16] В. Г. Петросян, "Некоторые оценки мер исключительности исключительных значений мероморфных функций конечного нижнего порядка", Арм. НИИНТИ, N73 АР-89, деп., 20с.

[17] Г. А. Барсегян, "Свойство близости a- точек мероморфных функций", Матем. сб., 120 (162), по. 1, 42 – 67 (1983).

[18] В. Г. Петросян, Кандидатская диссертация, Ереван (1990).

Поступила 17 мая 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 82-91.

О СХОДИМОСТИ РАЦИОНАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ РЕАЛИЗОВАННЫХ ПО КОРНЯМ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА

А. ПОГОСЯН

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении
E-mail: *arnak@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассматривается задача приближения функции посредством конечного числа ее коэффициентов Фурье. Ускорение сходимости урезанного ряда Фурье достигается последовательным применением полиномиальной и рациональной коррекций ошибки. Рациональные коррекции включают неизвестные параметры, определение которых является ключевой проблемой. Рассматривается подход связанный с корнями полиномов Лагерра и изучается сходимость таких аппроксимаций.

MSC2010 number: 41A20, 65T40, 41A21, 41A25, 65B99.

Ключевые слова: ряд Фурье; ускорение сходимости; аппроксимация Крылова-Ланцоша; рациональная аппроксимация; полиномы Лагерра.

1. Введение

Рассматривается проблема аппроксимации функции посредством конечного числа ее коэффициентов Фурье

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\pi nx}dx, \ |n| \le N.$$

Естественным является аппроксимация посредством урезанного ряда Фурье

$$S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{i\pi nx}.$$

Различные методы ускорения сходимости $S_N(f,x)$ были предложены в литературе в последние несколько десятилетий (см. [1], [5], [6] и ссылки в них). Подход, в котором участвуют полиномы представляющие разрывы (скачки) функции и ее производных, был предложен Крыловым в 1906 году [10], и позднее, более формально, Ланцошем [11] (см также [3], [9], [13], [17] и [19]). Мы называем этот подход, как аппроксимация Крылова-Ланцоша (КЛ-).

В этой статье мы рассмотрим КЛ-аппроксимацию с дополнительным ускорением сходимости посредством рациональных (в терминах $e^{i\pi x}$) коррекциях ошибки, согласно идее аппроксимаций Фурье-Паде ([2]). В общем виде, представление Фурье-Паде было предложено в [7]. Класс подобных приближений введены и изучены также в [8].

Рациональные исправления ошибки содержат неизвестные параметры и различные подходы известны для их определения (см [12], [14], и [15]). Мы рассмотрим подход, связанный с корнями полиномов Лагерра и представим подробный анализ свойств сходимости таких аппроксимаций.

2. Аппроксимация Крылова-Ланцоша

Пусть $f \in C^q[-1,1]$. Через $A_k(f)$ обозначим точные значения скачков функции и ее производных на отрезке $[-1,1]$

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \ldots, q.$$

Мы ограничимся рассмотрением функций, гладких на $[-1,1]$. Мы предполагаем, что точные значения скачков известны.

Обозначим через $AC[-1,1]$ множество абсолютно непрерывных функций на $[-1,1]$. Пусть $f^{(q-1)} \in AC[-1,1]$ для некоторого $q \geq 1$. Следующее разложение коэффициентов Фурье имеет важное значение для реализации подхода Крылова-Ланцоша

$$\hat{f}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^{1} f^{(q)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \ n \neq 0, \tag{2.1}$$

что приводит к представлению функции, известное как представление Ланцоша ([9])

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x) + F(x).$$

Здесь, B_k - 2-периодические полиномы Бернулли

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \ B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \ \int_{-1}^{1} B_k(x) dx = 0, \ x \in [-1,1]$$

с коэффициентами Фурье

$$\hat{B}_{k,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, \ n \neq 0, \ \hat{B}_{k,0} = 0,$$

и F - 2-периодическая и гладкая функция на прямой ($F \in C^{q-1}(\mathbb{R})$) с коэффициентами Фурье

$$\hat{F}_n = \hat{f}_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) \hat{B}_{k,n}.$$

Аппроксимация F посредством отрезка ряда Фурье приводит к аппроксимации Крылова-Ланцоша (КЛ)

$$S_{N,q}(f,x)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{F}_n e^{i\pi nx}+\sum_{k=0}^{q-1}A_k(f)B_k(x)$$

с ошибкой

$$R_{N,q}(f,x)=f(x)-S_{N,q}(f,x).$$

Следующая теорема описывает асимптотику $R_{N,q}(f,x)$ в интервале $(-1,1)$.

Теорема 2.1 ([13]). *Пусть $f^{(q+1)}\in AC[-1,1]$ для некоторого $q\geq 0$. Тогда имеет место оценка для $|x|<1$*

$$R_{N,q}(f,x)=A_q(f)\frac{(-1)^N}{2\pi^{q+1}N^{q+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N+1)-q)}{\cos\frac{\pi x}{2}}+o(N^{-q-1}),\ N\to\infty.$$

3. Аппроксимация рациональными функциями

Дополнительное ускорение сходимости для КЛ-аппроксимации может быть достигнуто путем применения рациональных функций (в терминах $e^{i\pi x}$) как исправление ошибки. Рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\theta=\{\theta_k\}_{|k|=1}^{p}$, $p\geq 1$. Обозначим $\hat{F}=\{\hat{F}_n\}$. Далее, через $\Delta_n^k(\theta,\hat{F})$ обозначим обобщенные конечные разности

$$\Delta_n^0(\theta,\hat{F})=\hat{F}_n,\ \Delta_n^k(\theta,\hat{F})=\Delta_n^{k-1}(\theta,\hat{F})+\theta_{k\,sgn(n)}\Delta_{(|n|-1)sgn(n)}^{k-1}(\theta,\hat{F}),\ k\geq 1,$$

где $sgn(n)=1$ если $n\geq 0$ и $sgn(n)=-1$ если $n<0$. Через $\Delta_n^k(\hat{F})$ обозначим классические разности, соответствующие $\Delta_n^k(\theta,\hat{F})$ для выбора $\theta\equiv 1$. Имеем

$$R_{N,q}(f,x)=R_N^+(F,x)+R_N^-(F,x),$$

где

$$R_N^+(F,x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\hat{F}_n e^{i\pi nx},\quad R_N^-(F,x)=\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\hat{F}_n e^{i\pi nx}.$$

Преобразование Абеля приводит к представлению

$$R_N^+(F,x)=-\frac{\theta_1\hat{F}_N\,e^{i\pi(N+1)x}}{1+\theta_1 e^{i\pi x}}+\frac{1}{1+\theta_1 e^{i\pi x}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\Delta_n^1(\theta,\hat{F})e^{i\pi nx}.$$

Повторение его до p раз, приводит к следующему разложению

$$R_N^+(F,x)=-e^{i\pi(N+1)x}\sum_{k=1}^{p}\frac{\theta_k\Delta_N^{k-1}(\theta,\hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})}+\frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_k e^{i\pi x})}\sum_{n=N+1}^{\infty}\Delta_n^p(\theta,\hat{F})e^{i\pi nx},$$

где первое слагаемое рассматриваем как коррекцию ошибки, а второе слагаемое есть фактическая ошибка. Такое же разложение для $R_N^-(F,x)$ приводит к следующему рационально-тригонометрическо-полиномиальному (РТП) приближению

$$
\begin{aligned}
S_{N,q,p}(f,x) &= \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f)B_k(x) + \sum_{n=-N}^{N} \hat{F}_n e^{i\pi nx} \\
&- e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta,\hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} - e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_{-k}\Delta_{-N}^{k-1}(\theta,\hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_{-s}e^{-i\pi x})}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

с ошибкой

$$
R_{N,q,p}(f,x) = f(x) - S_{N,q,p}(f,x) = R^+_{N,q,p}(f,x) + R^-_{N,q,p}(f,x),
$$

где

$$
R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta^p_{\pm n}(\theta,\hat{F})e^{\pm i\pi nx}. \tag{3.2}
$$

Аппроксимация (3.1) неопределена, пока параметры θ_k неизвестны. Различные медоты известны для их определения (см. [12], [14]-[16]). Здесь, мы сосредоточим наше внимание на подходе, описанный в [12], [15] и [16], где

$$
\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N},\ k = 1,\dots,p. \tag{3.3}
$$

Через $\gamma_k(\tau)$ обозначим коэффициенты полинома

$$
\prod_{k=1}^{p}(1+\tau_k x) = \sum_{k=0}^{p}\gamma_k(\tau)x^k. \tag{3.4}
$$

Следующая теорема описывает поведение $R_{N,q,p}(f,x)$, когда θ выбран как в (3.3).

Теорема 3.1. [16] *Пусть $f^{(q+p+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $q \geq 0$ и $p \geq 1$. Пусть*

$$
\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N},\ k = 1,\dots,p.
$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|x| < 1$

$$
\begin{aligned}
R_{N,q,p}(f,x) &= A_q(f)\frac{(-1)^{N+p}}{2^{p+1}\pi^{q+1}N^{p+q+1}q!}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(p-k+q)!\gamma_k(\tau) \\
&+ o\left(N^{-q-p-1}\right),\ N\to\infty.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в Теореме 3.1 параметры τ_k все еще не определены. Это дает свободу для достижения дополнительных целей.

В данной работе рассматривается подход, при котором параметры τ_k являются корнями полиномов Лагерра $L_p^q(x)$ ([4]). Следующий раздел изучает теоретическую основу таких РТП-аппроксимаций.

4. РТП-АППРОКСИМАЦИИ С КОРНЯМИ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА

Пусть τ_k корни полинома Лагерра $L_p^q(x)$:

$$L_p^q(\tau_k) = 0, \ k = 1, \dots, p.$$

Хорошо известно, что корни различны и положительны. Полиномы Лагерра имеют известное представление

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(p+q)!}{k!(p-k)!(q+k)!} x^k.$$

Для наших целей условие $L_p^q(\tau_s) = 0$ перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{p} \left(-\frac{1}{\tau_s}\right)^k \frac{p!}{k!(p-k)!(q+p-k)!} = 0.$$

Сравнение с (3.4) показывает, что

$$\gamma_k(\tau) = \binom{p}{k} \frac{(q+p)!}{(q+p-k)!}. \tag{4.1}$$

Оценим точечную сходимость таких РТП-аппроксимаций внутри отрезка $[-1,1]$. Первый результат является непосредственным следствием Теоремы 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть $f^{(q+p+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $q \geq 0$ и $p \geq 1$. Пусть*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \ k = 1, \dots, p,$$

где τ_k корни полинома Лагерра: $L_p^q(\tau_k) = 0, \ k = 1, \dots, p$. Тогда,

$$R_{N,q,p}(f,x) = o\left(N^{-q-p-1}\right), \ N \to \infty, \quad |x| < 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ввиду (4.1), мы видим, что $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(p-k+q)!\gamma_k(\tau) = 0$ и оценка (4.2) следует из Теоремы 3.1. □

В следующей теореме получены более точные оценки для более гладких функций. Сначала докажем некоторые свойства обобщенных конечных разностей.

Лемма 4.1. *Пусть $f^{(q+p+r+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $q, r \geq 0$, $p \geq 1$, и*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \ k = 1, \dots, p.$$

Тогда, имеет место следующая оценка, при $N \to \infty$ и $|n| \geq N+1$

$$\begin{aligned} \Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=0}^{p} (sgn(n))^{p-k} \frac{\gamma_k(\tau)}{N^k} \sum_{t=w}^{r+1} \frac{1}{n^{t+p-k}} \sum_{s=w}^{t} (sgn(n))^s \\ \times \binom{t+p-k+q}{p-k+s} \frac{A_{t+q-s}(f)}{(i\pi)^{t-s}} \alpha_{k,s+p-k}(w) + \frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\alpha_{k,s}(w) = \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} (k+j)^s.$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\Delta_n^p(\theta,\hat F)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\Delta^{p-k}_{n-sgn(n)k}(\hat F),$$

где классические конечные разности имеют следующее представление

$$\Delta_n^k(\hat F)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\hat F_{n-sgn(n)j}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta_n^w(\Delta_n^{p-k}(\hat F))=\Delta_n^{w+p-k}(\hat F)$$

получим

$$\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta,\hat F))=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}\binom{w+p-k}{j}\hat F_{n-sgn(n)(k+j)}. \tag{4.4}$$

Ввиду (2.1), при $n\to\infty$ имеем

$$\hat F_{n-sgn(n)(k+j)}=\frac{(-1)^{n+k+j+1}}{2}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi(n-(\pm(k+j))))^{s+1}}+o(n^{-q-p+k-r-2}).$$

Теперь, из (4.4), получим

$$\begin{aligned}
\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta,\hat F)) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}(-1)^j\binom{w+p-k}{j}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}}\\
&\times\frac{1}{\left(1-\frac{\pm(k+j)}{n}\right)^{s+1}}+\frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}(-1)^j\binom{w+p-k}{j}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}}\\
&\times\sum_{t=s}^{\infty}(\pm1)^{t-s}\binom{t}{s}\frac{(k+j)^{t-s}}{n^{t-s}}+\frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{t=0}^{p-k+r+1}\frac{1}{n^t}\sum_{s=0}^{t}(\pm1)^s\binom{t+q}{s}\frac{A_{t+q-s}(f)}{(i\pi)^{t-s}}\alpha_{k,s}(w)\\
&+\frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Учитывая, что $\alpha_{k,s}(w)=0$ для $s<w+p-k$, и известное тождество (см. [18])

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^j=0,\ j=0,\dots,p-1, \tag{4.6}$$

в правой части (4.5) рассмотрим только $s\ge w+p-k$ и, соответственно, $t\ge w+p-k$, и после несложных преобразований получим требуемую оценку. □

Лемма 4.2. *Пусть* $f^{(q+p+r+1)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $q, r \geq 0$, $p \geq 1$, *и*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \quad k = 1, \dots, p,$$

где τ_k *корни полинома Лагерра:* $L_p^q(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, p$. *Тогда, при* $N \to \infty$

$$\Delta_{\pm N}^{w}(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=\frac{p+w}{2}}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} A_{t+q-s}(f) \frac{\beta_{p,q}(w,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-r-2}), \quad w \leq p \tag{4.7}$$

когда w *и* p *имеют одинаковую четность, и*

$$\Delta_{\pm N}^{w}(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=\frac{p+w+1}{2}}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} A_{t+q-s}(f) \frac{\beta_{p,q}(w,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-r-2}), \; w \leq p+1 \tag{4.8}$$

когда w *и* p *имеют противоположную четность, где*

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \sum_{k=0}^{p} \gamma_k(\tau) \binom{t+p-k+q}{p-k+s} \alpha_{k,s+p-k}(w)$$

и $\alpha_{k,s}$ *определены в Лемме 4.1.*

Доказательство. Положив $n = \pm N$ в (4.3), получим

$$\Delta_{\pm N}^{w}(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=w}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} \frac{A_{t+q-s}(f)}{(\pm i\pi)^{t-s}} \beta_{p,q}(w,s,t) + o(N^{-q-p-r-2}).$$

Как уже упоминалось выше, когда τ_k корни полинома Лагерра $L_p^q(x)$, то коэффициенты $\gamma_k(\tau)$ имеют явную форму (см. (4.1)) и, следовательно, $\beta_{p,q}(w,s,t)$ может быть переписано в виде

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \frac{(p+q)!}{(t+q-s)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(t+p-k+q)!}{(q+p-k)!(p-k+s)!} \times \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} (k+j)^{s+p-k}. \tag{4.9}$$

Для доказательства (4.7) и (4.8) достаточно показать, что

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = 0, \quad t \leq \frac{w+p-1}{2}, \tag{4.10}$$

Применяя формулу бинома Ньютона, мы перепишем (4.9) в форме

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \frac{(p+q)!}{(t+q-s)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!(p-k+s)!} \sum_{u=0}^{s+p-k} \binom{s+p-k}{u} k^u \times \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} j^{s+p-k-u}.$$

Учитывая, что последняя сумма равна нулю при $s+p-k-u < w+p-k$, мы получим

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = (-1)^{w+p}\frac{(p+q)!}{(t+q-s)!}\sum_{\alpha=0}^{s-w}\frac{1}{(s-w-\alpha)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^{s-\alpha-w}\binom{p}{k}$$
$$\times\frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!}\frac{(w+p-k)!}{(w+p-k+\alpha)!}S(p-k+\alpha+w,p-k+w),$$

где $S(n,k)$ числа Стирлинга второго рода ([18]).

Числа Стирлинга второго рода имеют представление ([18])

$$S(k+\alpha,k) = \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{k+\alpha}{j+\alpha}c_j(\alpha),\ \alpha\geq 0, \tag{4.11}$$

где $c_j(\alpha)$ присоединенные числа Стирлинга второго рода. Тогда

$$S(p-k+\alpha+w,p-k+w) = \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{p-k+w+\alpha}{j+\alpha}c_j(\alpha)$$

и для чисел $\beta_{p,q}(w,s,t)$ получим

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = (-1)^{w+p}\frac{(p+q)!}{(t+q-s)!}\sum_{\alpha=0}^{s-w}\frac{1}{(s-w-\alpha)!}\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{c_j(\alpha)}{(j+\alpha)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^{s-\alpha-w}\binom{p}{k}$$
$$\times\frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!}\frac{(w+p-k)!}{(w+p-k-j)!}. \tag{4.12}$$

Это доказывает оценку (4.10) ввиду тождества (4.6). □

Теорема 4.2. *Пусть p четное и $f^{(q+p+\frac{p}{2}+1)}\in AC[-1,1]$ для некоторых $q\geq 0$ и $p\geq 1$. Пусть $\theta_k=\theta_{-k}=1-\frac{\tau_k}{N}$, $k=1,\ldots,p$, где τ_k корни полинома Лагерра: $L_p^q(\tau_k)=0$, $k=1,\ldots,p$. Тогда при $|x|<1$*

$$R_{N,q,p}(f,x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{2^{p+1}\pi^{q+1}N^{q+p+\frac{p}{2}+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$$
$$+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),\quad N\to\infty,$$

где $\beta_{p,q}$ определены в Лемме 4.2.

Доказательство. Применение преобразования Абеля к $R^{+}_{N,q,p}(f,x)$ (см. (3.2)) приводит к разложению

$$\begin{aligned} R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) &= -\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\frac{\Delta^0_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F}))}{1+e^{\pm i\pi x}} \\ &- \frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\sum_{w=1}^{\frac{p}{2}+1}\frac{\Delta^w_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F}))}{(1+e^{\pm i\pi x})^{w+1}} \\ &+ \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\frac{1}{(1+e^{\pm i\pi x})^{\frac{p}{2}+2}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\Delta^{\frac{p}{2}+2}_{\pm n}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F}))e^{\pm i\pi n x}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Согласно Лемме 4.1, $\Delta_n^{\frac{p}{2}+2}(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) = \frac{o(N^{-p})}{n^{q+\frac{p}{2}+2}}$, $N\to\infty$, $|n|\geq N+1$ и, следовательно, последний член в правой части (4.13) имеет порядок $o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1})$. Оценки (4.7) и (4.8) Леммы 4.2 показывают, что второе слагаемое в (4.13) имеет порядок $O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2})$. Поэтому

$$(4.14)\quad R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) = -\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{(1+e^{\pm i\pi x})^{p+1}}\Delta^0_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F})) + o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),\ N\to\infty.$$

Оценка (4.7) приводит к разложению

$$\Delta^0_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^p}\sum_{t=\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}+1}\frac{1}{N^t}\sum_{s=0}^{t}A_{t+q-s}(f)\frac{\beta_{p,q}(0,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2})$$

$$(4.15)\qquad = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^{p+\frac{p}{2}}}\sum_{s=0}^{\frac{p}{2}}A_{\frac{p}{2}+q-s}(f)\frac{\beta_{p,q}\left(0,s,\frac{p}{2}\right)}{(\pm i\pi)^{\frac{p}{2}-s}} + O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2}).$$

Формула (4.12) показывает, что согласно тождеству (4.6) имеем, что $\beta_{p,q}\left(0,s,\frac{p}{2}\right) = 0$ для $s=0,\dots,\frac{p}{2}-1$ и, следовательно, в правой части уравнения (4.15), только члены $s=\frac{p}{2}$ ненулевые, что наконец, приводит к оценке

$$\Delta^0_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat{F})) = A_q(f)\frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^{p+\frac{p}{2}}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)+O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2}),\ N\to\infty.$$

Подставив это в (4.14), получим

$$R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) = A_q(f)\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{(1+e^{\pm i\pi x})^{p+1}}\frac{(-1)^N}{2(\pm i\pi)^{q+1}N^{p+q+\frac{p}{2}+1}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),$$

что приводит к следующему представлению ошибки

$$R_{N,q,p}(f,x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}N^{p+q+\frac{p}{2}+1}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)Re\left[\frac{e^{i\pi(N+1)x}}{(1+e^{i\pi x})^{p+1}i^{q+1}}\right]+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}).$$

Это завершает доказательство. □

Точно также можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть p нечетное и $f^{(q+p+\frac{p+1}{2}+1)}\in AC[-1,1]$ для некоторых $q\geq 0$ и $p\geq 1$. Пусть $\theta_k=\theta_{-k}=1-\frac{\tau_k}{N}$, $k=1,\dots,p$, где τ_k корни полинома Лагерра: $L^q_p(\tau_k)=0$, $k=1,\dots,p$. Тогда, при $|x|<1$*

$$R_{N,q,p}(f,x) = \frac{\varphi_{N,q,p}(x)}{N^{p+q+\frac{p+1}{2}+1}} + o(N^{-p-q-\frac{p+1}{2}-1}),\quad N\to\infty$$

где

$$\varphi_{N,q,p}(x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{2^{p+1}\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right)$$
$$- A_{q+1}(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+2}}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{2^{p+1}\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right)$$

$$+A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p)-q)}{2^{p+2}\cos^{p+2}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(1,\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right),$$

и $\beta_{p,q}$ *определены в Лемме 4.2.*

Abstract. The paper considers a problem of approximation of functions by means of their finite number of Fourier coefficients. Convergence acceleration of approximations by the truncated Fourier series is achieved by application of polynomial and rational correction functions. Rational corrections include unknown parameters whose determination is a crucial problem. We consider an approach connected with the roots of the Laguerre polynomials and study the rates of convergence of such approximations.

Список литературы

[1] B. Adcock, Modified Fourier expansions: theory, construction and applications. PHD thesis, Trinity Hall, University of Cambridge (2010).

[2] G.A. Baker, and P. Graves-Morris, Padé Approximants, Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 59, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1966).

[3] G. Baszenski, F.-J. Delvos, and M. Tasche. *A united approach to accelerating trigonometric expansions*, Comput. Math. Appl. 30(3-6), 33–49 (1995).

[4] H. Bateman, Higher Transcendental functions. Vol. II, McGraw-Hill Book Company (1953).

[5] D. Batenkov, and Y. Yomdin. *Algebraic Fourier reconstruction of piecewise smooth functions*, Mathematics of Computation, 81(277), 277–318 (2012).

[6] J. P. Boyd, *Acceleration of algebraically-converging Fourier series when the coefficients have series in powers of* $1/n$, J. Comp. Phys. 228(5), 1404–1411 (2009).

[7] E.W. Cheney, Introduction to Approximation Theory. McGraw-Hill, New York (1966).

[8] J. Geer, *Rational trigonometric approximations using Fourier series partial sums*, Journal of Scientific Computing, 10(3), 325-356 (1995).

[9] W. B. Jones and G. Hardy, *Accelerating Convergence of Trigonometric Approximations*, Math. Comp., 24, 47-60 (1970).

[10] А. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях. Лекции прочитанные в 1906 году. С. Петербург 1907, Типолитография Биркенфельда.

[11] C. Lanczos, Discourse on Fourier series. Oliver and Boyd, Edinburgh (1966).

[12] A. Nersessian, and A. Poghosyan, *On a rational linear approximation of Fourier series for smooth functions*, Journal of Scientific Computing, 26(1), 111–125 (2006).

[13] A. Poghosyan, *On an autocorrection phenomenon of the Krylov-Gottlieb-Eckhoff method*, IMA Journal of Numerical Analysis, 31(2), 512–527 (2011).

[14] A. Poghosyan, *Fast convergence of the Fourier-Pade approximation for smooth functions (abstract)*. International Conference Harmonic Analysis and Approximations V, 10-17 September, Tsaghkadzor, Armenia, (2011), http://math.sci.am/conference/sept2011/abstracts.html.

[15] A. Poghosyan, T. Barkhudaryan, and A. Nurbekyan, *Convergence accleration of Fourier series by the roots of the Laguerre polynomial*, Proceedings of the Third Russian-Armenian workshop on mathematical physics, complex analysis and related topics, October 4-8 (2010), Tsaghkadzor, Armenia, 137–141, http://math.sci.am/conference/oct2010/abstractsbook.html.

[16] A. Poghosyan, *On a convergence of the* L_2*-optimal rational approximation*, Доклады Национальной Академии Наук Армении, 112(4), 341–349 (2012).

[17] И. И. Привалов, Ряды Фурье. Гос. техн.-теор. изд-во, Москва-Ленинград (1931).

[18] J. Riordan, Combinatorial identities. New York:Wiley (1979).

[19] G. P. Tolstov, Fourier series (translated from the Russian (1950) by R. A. Silverman). Prentice-Hall, New Jersey (1962).

Поступила 24 февраля 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 92-100.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РЕКОРДОВ С ПОДТВЕРЖДЕНИЕМ

В. К. САГАТЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *v.saghatelyan@ysu.am*

Аннотация. Исследуются предельные распределения для математических рекордов с подтверждением.

MSC2010 number: 62E10, 62E17, 62E20.

Ключевые слова: рекордные величины; рекорды с подтверждением; предельные распределения; экспоненциальные рекорды.

1. Введение

В данной статье рассматриваются вопросы асимптотического поведения так называемых "рекордов с подтверждением". Эти величины были введены в более ранней работе автора [1], где были получены представления для случаев экспоненциального и равномерного распределений. В этом введении кратко процитируем результаты, которые будем использовать в основной части статьи.

Идея рекордов с подтверждением заключается в том, что для некоторого k о появлении нового рекорда мы объявляем лишь после того, как появятся k наблюдений, превосходящих предыдущее рекордное значение. Фактически исключается возможность принятия за рекорд случайно появившегося выброса. Рекорды с подтверждением мы будем рассматривать для произвольного фиксированного $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 1$ они совпадают с обычными рекордными величинами (см. [2]) и фактически являются их обобщением. Более того, рекорды с подтверждением в некотором смысле напоминают k-е рекорды (см. [3]).

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, имеющих общую непрерывную функцию распределения $F(x)$. Возьмем случайный вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и упорядочим его компоненты в порядке возрастания: $(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{k,k})$. Первым рекордным моментом с подтверждением считаем $L^{(k)}(1) = k$, а соответствующей рекордной величиной $X_{k,k}$. Вместе с этими величинами будем рассматривать также первый рекордный вектор $(X^{(1)}_{k(1)}, X^{(1)}_{k(2)}, \ldots, X^{(1)}_{k(k)})$, совпадающий с вектором $(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{k,k})$. Далее нужно получить k

случайных величин, превышающих $X_{k,k}$, упорядочив которые, получим второй рекордный вектор. Обозначим его $(X^{(2)}_{k(1)}, X^{(2)}_{k(2)}, ..., X^{(2)}_{k(k)})$.

Определение 1.1. *Рекордные моменты с подтверждением $L^{(k)}(n)$, соответствующие им рекордные величины с подтверждением $X^{(n)}_{k(k)}$ и рекордные векторы $(X^{(n)}_{k(1)}, X^{(n)}_{k(2)}, ..., X^{(n)}_{k(k)})$, построенные по последовательности $X_1, X_2, ...$, определяются следующим образом:*

$L^{(k)}(1) = k,$

$X^{(1)}_{k(k)} = X_{k,k},$

$L^{(k)}(n) = \min\{j : X_{j-k+1,j} > X^{(n-1)}_{k(k)}\},$

$X^{(n)}_{k(k)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_{L^{(k)}(n)}\} = X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)}, n = 2, 3, ...,$

$(X^{(n)}_{k(1)}, X^{(n)}_{k(2)}, ..., X^{(n)}_{k(k)}) = (X_{L^{(k)}(n)-k+1,L^{(k)}(n)}, ..., X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)}), n = 1, 2, \ldots.$

Имеет место следующая теорема (см. [1]), дающая представление для рекорда с подтверждением из экспоненциального распределения.

Теорема 1.1. *Пусть $Z^{(1)}_{k(k)}, Z^{(2)}_{k(k)}, ...$ – обозначают рекорды с подтверждением, построенные по последовательности $Z_1, Z_2, ...$ – независимых случайных величин, с общей функцией распределения $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$, а $(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)})$, $n = 1, 2, ...$ — соответствующие им рекордные векторы. Тогда, для любого $n = 1, 2, ...$ имеют место соотношения:*

$$(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-2}\eta_{ik+2} + ... + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{ik},\right.$$

$$\left.\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+2} + ... + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{ik}, ..., \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + ... + \sum_{i=1}^{n}\eta_{ik}\right), \tag{1.1}$$

$$(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)}) \stackrel{d}{=} (Z(n,k) + Z(n-1,k-1) + ... + Z(n-1,1), Z(n,k)+$$
$$+Z(n,k-1) + ... + Z(n-1,1), ..., Z(n,k) + Z(n,k-1) + ... + Z(n,1)),$$

где $\eta_1, \eta_2, ...$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное экспоненциальное распределение, а $Z(n,k)$, $n = 1, 2, ...$ k-е рекордные величины, построенные по той же последовательности $Z_1, Z_2, \ldots$.

Отметим, что упомянутые в теореме 1.1 k-е рекордные величины определяются (см. [3]), вместе с k-ми рекордными моментами $L(n,k)$, следующим образом:

$$L(1,k) = k, \quad L(n+1,k) = \min\{j > L(n,k) : Z_j > Z_{j-k,j-1}\}, \ n \geq 1,$$

$$Z(n,k) = Z_{L(n,k)-k+1,L(n,k)}, \ n \geq 1.$$

Далее, известно, что вероятностное преобразование $Y = F(X)$, случайной величины X, не меняет упорядоченности. Иными словами для любых $k \leq n$, имеет место $Y_{k,n} = F(X_{k,n})$. Хорошо известно, что для любой непрерывной функции распределения $F(x)$ случайная величина $Y = F(X)$ является равномерно распределенной на $[0,1]$. Это преобразование также называют преобразованием Смирнова (см. [4]).

Следующие два известных представления (см. [5] и [6]), на которые мы будем ссылаться в дальнейшем, делают экспоненциальные рекорды мощным инструментом исследования рекордов.

Предложение 1.1. *Пусть $Z_{1,n} \le Z_{2,n} \le \dots \le Z_{n,n}$, $n = 1,2,\dots$ — экспоненциальные порядковые статистики, построенные по последовательности независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \dots$ с общей функцией распределения $H(x) = \max(0, 1 - e^{-x})$. Тогда для любого $n = 1,2,\dots$ справедливо соотношение:*

$$(Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots Z_{n,n}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1}, \dots, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1} + \dots + \nu_n\right)$$

где $\nu_1, \nu_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с той же функцией распределения $H(x)$.

Предложение 1.2. *Пусть $X(1) \le X(2) \le \dots,$ — рекордные величины*[1]*, соответствующие непрерывной функции распределения $F(x)$, а $Z(1) < Z(2) < \dots$ — экспоненциальные рекордные величины, соответствующие стандартному экспоненциальному распределению. Тогда для произвольного $n = 1,2,\dots$ имеет место равенство по распределению*

$$(X(1), X(2), \dots, X(n)) \stackrel{d}{=} (R(Z(1)), R(Z(2)), \dots, R(Z(n))),$$

где $R(x) = G(1 - e^{-x})$, и $G(x)$ — обратная к функции распределения $F(x)$.

Вопрос асимптотического поведения наибольшего значения $X_{n,n}$ в выборке объема n из распределения $F(x)$ исследован довольно подробно многими авторами (см. например [7]– [9]). Однако, здесь мы приведем результат, касающийся класса всех предельных распределений для $X_{n,n}$. Отметим, что случайная величина $X_{n,n}$ из произвольного распределения, даже после соответствующей нормировки, вообще говоря, не всегда будет обладать предельным распределением. Однако, если $F(x)$ таково, что такое предельное распределение существует, то оно должно относиться к одному из трех типов:

1. $\Lambda_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \ \alpha > 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), \text{ если } x > 0, \end{cases}$
2. $\Lambda_2(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{\alpha}], \text{ если } x \le 0, \ \alpha > 0, \\ 1, \text{ если } x > 0, \end{cases}$
3. $\Lambda_3(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad -\infty < x < \infty.$

Сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы (см. [9]).

[1]Имеются ввиду обычные рекордные величины, (см. [2]).

Теорема 1.2. *Класс предельных распределений для $F^n(a_n x + b_n)$, где $a_n > 0$ и $b_n \in R$ — соответствующим образом выбранные постоянные, содержит только законы типов $\Lambda_k(x)$, $k = 1, 2, 3$.*

Аналог этого предельного распределения, полученный для рекордных величин, можно найти в работах [2] и [10].

Теорема 1.3. *Пусть $X(1) < X(2), \ldots$ рекордные величины из непрерывного распределения $F(x)$. Для того, чтобы при некотором выборе констант $A(n)$ и $B(n)$ существовала невырожденная предельная функция распределения*

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{X(n) - B(n) < xA(n)\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала предельная функция

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{T(xA(n) + B(n)) - n}{\sqrt{n}},$$

имеющая не менее двух точек роста, где $T(x) = -\ln(1 - F(x))$. При этом предельные функции $G(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением $G(x) = \Phi(g(x))$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Теорема 1.4. *Предельная функция $g(x)$ может принадлежать только одному из следующих трех типов:*

1. $g_1(x) = x$,

2. $g_2(x) = \gamma\ln(x)$, *если* $x > 0$, $\gamma > 0$ *и* $g_2(x) = -\infty$, *если* $x < 0$.

3.$g_3(x) = -\gamma\ln(-x)$, $\gamma > 0$, *если* $x < 0$, *и* $g_3(x) = \infty$, *если* $x > 0$.

2. Предельные соотношения для рекордов с подтверждением

Пусть $Z^{(n)}_{k(k)}$, экспоненциальные рекорды с подтверждением, построенные для некоторого фиксированного $k = 1, 2, \ldots$ по последовательности $Z_1, Z_2, \ldots$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$, $-\infty < x < \infty$.

Используя приведенную выше теорему 1.1, получим предельное распределение для $Z^{(n)}_{k(k)}$, при надлежащем выборе нормирующих и центрирующих постоянных. Из выражения (1.1) имеем:

$$Z^{(n)}_{k(k)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n}\eta_{ik},$$

далее, сумму в правой части приводим к виду:

$$\begin{aligned} Z^{(n)}_{k(k)} &\stackrel{d}{=} \frac{\eta_1}{k} + \frac{\eta_2}{k-1} + \cdots + \eta_k + + \frac{\eta_{k+1}}{k} + \frac{\eta_{k+2}}{k-1} \\ &+ \cdots + \eta_{2k} + \cdots + r + \frac{\eta_{(n-1)k+1}}{k} + \frac{\eta_{(n-1)k+2}}{k-1} + \cdots + \eta_{nk}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим $\xi_r = \frac{\eta_{(r-1)k+1}}{k} + \frac{\eta_{(r-1)k+2}}{k-1} + \cdots + \eta_{rk}$. Очевидно, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будут независимыми и одинаково распределенными. Более того, согласно предложению 1.1, они имеют то же распределение, что и максимальные порядковые статистики $Z_{k,k}$, то есть $F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi_1 < x\} = H^k(x)$.

Переписав равенство (2.1), получаем представление для экспоненциального рекорда с подтверждением $Z_{k(k)}^{(n)} \overset{d}{=} \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Найдем выражение для второго момента $E\xi_1^2$. Сперва рассмотрим математическое ожидание и дисперсию ξ_1. Имеем

$$E\xi_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{E\eta_{i+1}}{k-i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, \qquad D\xi_1 = \sum_{i=0}^{k-1} D\left(\frac{\eta_{i+1}}{k-i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2},$$

отсюда, для второго момента получаем

$$E\xi_1^2 = D\xi_1 + (E\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right)^2.$$

Поскольку k фиксировано, следовательно $E\xi_1^2 < \infty$, и таким образом, к $Z_{k(k)}^{(n)}$ можем применить центральную предельную теорему для независимых одинаково распределенных случайных величин. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого фиксированного* $k = 1, 2, \ldots$; $Z_{k(k)}^{(n)}$ *— обозначает рекорд с подтверждением, построенный по последовательности* $Z_1, Z_2, \ldots$ *независимых случайных величин, с общей функцией распределения* $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$. *Тогда, имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{Z_{k(k)}^{(n)} - n\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right)}{\sqrt{n\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} + \cdots + 1\right)}} < x \right\} = \Phi(x), \tag{2.2}$$

где $\Phi(x)$ *— функция распределения стандартного нормального закона.*

Далее рассмотрим наиболее общий случай рекордов с подтверждением из произвольного распределения. Рассмотрим рекорд с подтверждением $X_{k(k)}^{(n)}$, построенный по последовательности $X_1, X_2, \ldots$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$. Из определения рекордов с подтверждением следует, что $X_{k(k)}^{(n)} = M_{L^{(k)}(n)}$, где $\{M_i\}_{i=1,\ldots,n}$ последовательные максимумы построенные по исходной выборке. Это значит, что последовательность $X_{k(k)}^{(1)}, X_{k(k)}^{(2)}, \ldots$ содержится в $M_1, M_2, \ldots$ в качестве подпоследовательности. Следовательно множество предельных законов для случайных величин

$$\left(\frac{X_{k(k)}^{(n)} - b(L^{(k)}(n))}{a(L^{(k)}(n))}\right)$$

совпадает с множеством предельных законов для величин

$$\left(\frac{M_n - b(n)}{a(n)}\right),$$

которое, как известно (см. теорему 1.2), включает в себя только три вида распределений $\Lambda_k(x)$, $k = 1, 2, 3$.

В частности, для максимальных порядковых статистик из стандартного экспоненциального распределения, при $n \longrightarrow \infty$, имеет место

$$\mathbf{P}\left\{Z_{n,n} - \ln n < x\right\} \longrightarrow \Lambda_3(x) = \exp(-\exp(-x)),$$

следовательно, согласно сказанному выше, к тому же самому предельному распределению $\Lambda_3(x)$ будет стремиться распределение величины $\left(Z_{k(k)}^{(n)} - \ln L^{(k)}(n)\right)$.

С другой стороны, согласно теореме 1.3 при должном выборе центрирующих и нормирующих постоянных $B(n)$ и $A(n)$,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{Z_{k(k)}^{(n)} - B(n)}{A(n)} < x\right\} \longrightarrow \Phi(x).$$

Это значит, что предельные распределения рекордов с подтверждением при случайной и неслучайной нормировке не обязаны совпадать.

В связи с этим рассмотрим вопрос нахождения всех возможных предельных распределений случайных величин[2]

$$\frac{X_{k(k)}^{(n)} - B(n)}{A(n)}$$

при надлежащем выборе центрирующих ($B(n)$) и нормирующих ($A(n)$) констант.

Из преобразования Смирнова и предложения 1.2 следует равенство по распределению

$$\left(X_{k(k)}^{(1)}, X_{k(k)}^{(2)}, \ldots, X_{k(k)}^{(n)}\right) \stackrel{d}{=} \left(R(Z_{k(k)}^{(1)}), R(Z_{k(k)}^{(2)}), \ldots, R(Z_{k(k)}^{(n)})\right),$$

где $R(x) = G(1 - e^{-x})$, $G(x)$ — обратная функции распределения $F(x)$. Через $T(x)$ обозначим обратную функции $R(x)$. Очевидно, что $T(x) = -\ln(1 - F(x))$.

Рассмотрим

$$\mathbf{P}\left\{\frac{X_{k(k)}^{(n)} - B(n)}{A(n)} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{R(Z_{k(k)}^{(n)}) < A(n)x + B(n)\right\} = \tag{2.3}$$

$$= \mathbf{P}\left\{Z_{k(k)}^{(n)} < T(A(n)x + B(n))\right\}.$$

---

[2] При условии, что предельное распределение существует, так как вообще говоря, в зависимости от исходного распределения $F(x)$, предел может не существовать.

(2.3) эквивалентно равенству

$$\text{(2.4)}\quad \mathbf{P}\left\{\frac{X^{(n)}_{k(k)} - B(n)}{A(n)} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{Z^{(n)}_{k(k)} - na_k}{\sqrt{nb_k}} < \frac{T(A(n)x + B(n)) - na_k}{\sqrt{nb_k}}\right\},$$

где $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k-i}$, и $b_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(k-i)^2}$. Таким образом, мы доказали аналог теоремы 1.3 для рекордов с подтверждением. Из (2.2) и (2.4) вытекает следующий результат.

Теорема 2.2. . *Для того, чтобы при некотором выборе констант $A(n)$ и $B(n)$, при $n \longrightarrow \infty$ существовала невырожденная предельная функция распределения*

$$\text{(2.5)}\qquad Q(x) = \lim \mathbf{P}\left\{\frac{X^{(n)}_{k(k)} - B(n)}{A(n)} < x\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала предельная функция

$$\text{(2.6)}\qquad g(x) = \lim \frac{T(A(n)x + B(n)) - na_k}{\sqrt{nb_k}},$$

имеющая не менее двух точек роста. При этом пределы (2.5) и (2.6) связаны соотношением

$$Q(x) = \Phi(g(x)).$$

Оказывается, имеются лишь три (с точностью до линейных преобразований) возможности при выборе функции $g(x)$.

Теорема 2.3. *Предельная функция $g(x)$ имеет один из следующих трех видов:*

1. $g_1(x) = -\infty$, если $x \le 0$ и $g_1(x) = \frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}\alpha \ln x$, $\alpha > 0$, если $x > 0$.

2. $g_2(x) = -\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}\alpha \ln(-x)$, если $x \le 0$ и $g_2(x) = \infty$, если $x > 0$.

3. $g_3(x) = \frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}x$, $-\infty < x < \infty$, где $a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k-i}$, $b_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(k-i)^2}$.

Доказательство. В силу монотонности функции $g(x)$, достаточно рассматривать только те значения x, где эта функция конечна. Для таких x, при $n \longrightarrow \infty$ имеем $T(xA(n) + B(n)) \sim n$. Тогда

$$\lim \frac{T^{\frac{1}{2}}(xA(n) + B(n)) + \sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}} = \frac{1 + \sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{T(xA(n) + B(n)) - na_k}{\sqrt{nb_k}} = \frac{T^{\frac{1}{2}}(xA(n) + B(n)) + \sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}} \times$$
$$\times \left(T^{\frac{1}{2}}(xA(n) + B(n)) - \sqrt{na_k}\right),$$

получаем, что

$$\lim\left(T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))-\sqrt{na_k}\right)=\frac{\lim\frac{T(xA(n)+B(n))-na_k}{\sqrt{nb_k}}}{\lim\frac{T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))+\sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}}}= \tag{2.7}$$
$$=\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{F}(x)=1-\exp(-T^{\frac{1}{2}}(x))=1-\exp(-(-\ln(1-F(x)))^{\frac{1}{2}}).$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{F}(x)$ также является функцией распределения. Имеем

$$1-\bar{F}(xA(n)+B(n))=\exp(-T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))),$$

отсюда

$$T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))=-\ln(1-\bar{F}(xA(n)+B(n))). \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.8) в (2.7), получаем равенство

$$\lim\left(-\ln\left(-\bar{F}(xA(n)+B(n))+1\right)-\sqrt{na_k}\right)=\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}},$$

которое можно переписать в виде

$$\lim\exp(\sqrt{na_k})\left(1-\bar{F}(xA(n)+B(n))\right)=h(x), \tag{2.9}$$

где

$$h(x)=\exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right).$$

Возьмем, не умаляя общности, подпоследовательность $n=n(m)=\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]$, $m\to\infty$, где через $[x]$ обозначена целая часть числа x и обозначив

$$\bar{A}(m)=A(\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]),\ \bar{B}(m)=B(\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]),$$

перепишем (2.9), в более удобной форме

$$\lim_{m\to\infty}m(1-\bar{F}(x\bar{A}(m)+\bar{B}(m)))=h(x). \tag{2.10}$$

Обозначим $\hat{h}(x)=\exp(-h(x))$. (2.10) эквивалентно равенству

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-(1-\bar{F}(x\bar{A}(m)+\bar{B}(m)))\right]^m=\hat{h}(x),$$

следовательно

$$\lim_{m\to\infty}\left[\bar{F}(x\bar{A}(m)+\bar{B}(m)))\right]^m=\hat{h}(x). \tag{2.11}$$

Как уже отмечалось, функция $\bar{F}(x)$ является функцией распределения. Пусть $Y_1,Y_2,\ldots$ - независимые случайные величины с общей функцией распределения

$$\bar{F}(x)=1-\exp(-(-\ln(1-F(x)))^{\frac{1}{2}}),$$

и пусть, для некоторого фиксированного $r = 1, 2, \ldots$, $\tilde{M}_r = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_r\}$. В этом случае (2.11) означает, что при $m \longrightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\tilde{M}_m - \tilde{B}(m)}{\tilde{A}(m)} < x\right\} \longrightarrow \hat{h}(x). \tag{2.12}$$

Напомним, что $h(x) = \exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right)$, следовательно

$$\hat{h}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right)\right).$$

Отсюда, для функции $g(x)$ получаем выражение

$$g(x) = -\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}} \ln\left(-\ln \hat{h}(x)\right).$$

Из выражения (2.12) и теоремы 1.2 следует, что функция $\hat{h}(x)$ может быть только трех типов Λ_1, Λ_2 и Λ_3, соответственно, и $g(x)$ может принадлежать только трем типам g_1, g_2 и g_3, перечисленным в теореме. □

Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает очевидное следствие.

Следствие 2.1. *Множество всех предельных невырожденных функций распределения для центрированных и нормированных рекордов с подтверждением $X^{(n)}_{k(k)}$ состоит (с точностью до линейных преобразований) из функций вида $\Phi(g(x))$, где $g(x)$ определены в теореме 2.3.*

Abstract. The asymptotic behavior of records with confirmation is considered and the corresponding limiting distributions are obtained.

Список литературы

[1] В. К. Сагателян, "Об одной новой модели рекордных величин", Вестн. С.-Петербург. ун-та., Сер. 1., вып.(3), 144 – 147 (2008).
[2] В. Б. Невзоров, Рекорды. Математическая теория, М., ФАЗИС (2000).
[3] W. Dziubdziela, B. Kopocinsky, "Limiting properties of the k-th record values", Zastos. Mat., 15, no. 2, 187 – 190 (1976).
[4] Р. Н. Вадзинский, Справочник по вероятностным распределениям, СПб., Наука, 295 с. (2001).
[5] Г. Дэйвид, Порядковые статистики, М., Наука (1979).
[6] M. N. Tata, "On outstanding values in a sequence of random variables", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. B, 12, 9 – 20 (1969).
[7] Я. Галамбош, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, М., Наука (1984).
[8] Э. Гумбель, Статистика экстремальных значений, М., Мир (1965).
[9] B. Gnedenko, "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire", Ann. Math., 44, 423 – 453 (1943).
[10] S. I. Resnick, "Limit laws for record values", Stohast. Processes Appl., 1, 67 – 82 (1973).

Поступила 12 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 101-111.

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ КВАЗИПОЛИНОМОВ ИЗ СИСТЕМЫ МЮНТЦА

А. К. ТАСЛАКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. Л. Шварцом получены оценки коэффициентов квазиполиномов по системе Мюнтца. В настоящей работе получены точечные оценки для обобщенных производных таких квазиполиномов на интервале $[0,1]$.

MSC2010 number: 42C05.

Ключевые слова: Система Мюнтца; квазиполином; обобщенная производная; оценка Марковского типа.

1. Постановка задачи и аппарат ее решения

Рассмотрим квазиполином из системы Мюнтца

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x^{\gamma_1} + \cdots + a_n x^{\gamma_n}, \tag{1.1}$$

где

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = +\infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < +\infty \tag{1.2}$$

Л. Шварцем [1] получена неулучшаемая оценка для коэффициентов квазиполиномов (1.1) при условии

$$\|P_n\|_{L_2(0,1)} \le M_n. \tag{1.3}$$

Им же получены менее точные оценки при условии

$$\|P_n\|_{L_p(0,1)} \le M_n, \quad 1 \le p \le +\infty.$$

Для заданной функции $\varphi(x)$, $x > 0$ определим ее так называемые обобщенные производные (см. [3], стр. 4)

$$\varphi^{[0]}(x) = \varphi(x),\ \varphi^{[1]}(x) = \varphi'(x), \ldots, \varphi^{[k+1]}(x) = \left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \ldots \tag{1.4}$$

$$\varphi^{<k>}(x) = \varphi^{[k]}(x) \cdot x^{1-\gamma_k+\gamma_{k-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \gamma_{-1} = -1$$

Из (1.1) и (1.4) следует, что коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \dots n$, определяются так:

$$a_k = P_n^{<k>}(0+) / \prod_{\nu=0}^{k-1} (\gamma_k - \gamma_\nu), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.5}$$

(здесь и в дальнейшем мы считаем, что $\prod_{\nu=s}^{s-1} h_\nu := 1$). Значит, Л. Шварцем в [1] фактически были оценены сверху величины $\left|P_n^{<k>}(0+)\right|$, $k = 0, 1, \dots n$. Возникает естественный вопрос: оценить сверху $\left|P_n^{<k>}(x)\right|$ в любой точке $x \in [0, 1]$. Для решения этой задачи метод Шварца не применим. Основным аппаратом исследования рассматриваемого вопроса служит введенная в [4] система следующих квазиполиномов по системе Мюнтца, являющаяся обобщением системы полиномов Лежандра:

$$\hat{\chi}_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n + 1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{z - \gamma_\nu'}{z + \gamma_\nu} \cdot \frac{x^{-z} dz}{z - \gamma_n'}, \quad x \in [0, 1], \quad \gamma_\nu' = \gamma_\nu + 1 \tag{1.6}$$

где контур C- здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем охватывает окрестности полюсов подынтегральной функции (см. [4], стр. 8). В работе [4] доказано, что система функций $\{\hat{\chi}_n(x)\}$ ортонормальна на $L^2[0, 1]$.

Квазиполином (1.1) единственным образом представляется в виде суммы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \hat{\chi}_k(x), \quad \text{где} \quad C_k = \int_0^1 P_n(t) \hat{\chi}_k(t) dt, \qquad k = 0, 1, \dots n, \tag{1.7}$$

и согласно (1.4),

$$P_n^{[s]}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \hat{\chi}_k^{[s]}(x), \qquad P_n^{<s>}(x) = \sum_{k=s}^{n} C_k \hat{\chi}_k^{<s>}(x), \qquad 0 \le s \le n. \tag{1.8}$$

Учитывая, что при условии (1.3)

$$\left(\sum_{k=s}^{n} C_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|P_n\|_{L_2(0,1)} \le M_n,$$

и применив к (1.8) неравенство Буняковского-Шварца, получим

$$|P_n^{<s>}(x)| \le \left(\sum_{k=s}^{n} C_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=s}^{n} |\hat{\chi}_k^{<s>}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le M_n \left(\sum_{k=s}^{n} |\hat{\chi}_k^{<s>}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Для оценки сверху $|P_n^{<s>}(x)|$ сначала заметим, что при $x \in [0, 1]$,

$$\hat{\chi}_k^{[s]}(x) = \frac{(-1)^s \sqrt{2\gamma_k + 1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=0}^{k} (z - \gamma_\nu')}{\prod_{\nu=s}^{k} (z + \gamma_\nu)} \cdot \frac{x^{-z-\gamma_{s-1}-1}}{z - \gamma_k'} dz,$$

$$\hat{\chi}_k^{<s>}(x) = x^{\gamma_s} \frac{(-1)^s\sqrt{2\gamma_k+1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(z-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{k}(z+\gamma_\nu)} \cdot \frac{x^{-z}}{z-\gamma'_k} dz,$$

при этом, $\chi_k^{<s>}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \chi_k^{<s>}(x)$. Согласно равенству Р. Лагранжа, имеем

$$\sum_{k=s}^{n} (\gamma_k + \gamma'_k) \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}(z-\gamma'_\nu)(z_1-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{k}(z+\gamma_\nu)(z_1+\gamma_\nu)} = [R_{n,s}(z,z_1) - R_{0,s}(z,z_1)] \frac{1}{1-z-z_1},$$

где

$$R_{n,s}(z,z_1) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z-\gamma'_\nu)(z_1-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z+\gamma_\nu)(z_1+\gamma_\nu)}, \quad R_{0,s}(z,z_1) = \prod_{\nu=0}^{s-1}(z-\gamma'_\nu)(z_1-\gamma'_\nu).$$

Следовательно,

$$\text{(1.10)} \qquad \mathcal{K}_{n,s}^2(x) := \sum_{k=s}^{n} \left|\hat{\chi}_k^{<s>}(x)\right|^2 = \frac{x^{-2\gamma_s}}{(2\pi i)^2} \int\limits_C \int\limits_{C_1} R_{n,s}(z,z_1) \frac{x^{-z-z_1}}{1-z-z_1} dz_1 dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} Q_{n,s}(z) x^{-z} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'_1} Q_{n,s}(z_1) \frac{x^{-z_1}}{1+2\gamma_s - z - z_1} dz_1 dz,$$

где

$$Q_{n,s}(z) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z-\gamma_s-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_s+\gamma_\nu)}.$$

В контурных интегралах в (1.10) заменяя z на $-z$ и z_1 на $-z_1$, получаем $\mathcal{K}_{n,s}^2(x) =$

$$\text{(1.11)} \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma'_\nu+\gamma_s)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_\nu+\gamma_s)} x^z \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'_1} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z_1+\gamma'_\nu+\gamma_s)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z_1-\gamma_\nu+\gamma_s)} \cdot \frac{x^{z_1}}{1+2\gamma_s+z+z_1} dz_1 dz,$$

где контуры C', C'_1 охватывают окрестности точек $\gamma_\nu - \gamma_s$, $\nu = s, s+1, \ldots, n$.

2. Оценка сверху для $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|$ и основная теорема

Согласно (1.9) и (1.10) нам необходимо оценить сверху $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|$. Мы рассмотрим два случая: $x \in [0, e^{-2}]$ и $x \in [e^{-2}, 1]$. Начнем с рассмотрения второго случая.

Лемма 2.1. *При $x \in [e^{-2}, 1]$, справедливо неравенство*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s \left[\sum_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu + \gamma'_\nu)\right]^{s+\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Заметим, что функция $f(x) = x^{1+2\gamma_s}\mathcal{K}^2_{n,s}(x)$ неотрицательна и монотонно возрастает на интервале $[0, 1]$, так как

$$\left(t^{2\gamma_s+1}\mathcal{K}^2_{n,s}(t)\right)' = t^{2\gamma_s}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C Q_{n,s}(z)t^z dz\right)^2 \ge 0, \qquad t \in (0,1]. \tag{2.2}$$

Поэтому $x^{1+2\gamma_s}\mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le \mathcal{K}^2_{n,s}(1)$, при $x \in [e^{-2}, 1]$, и .

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le e^{2(2\gamma_s+1)} \cdot \mathcal{K}^2_{n,s}(1). \tag{2.3}$$

Для оценки $\mathcal{K}^2_{n,s}(1)$ в первом представлении $\mathcal{K}^2_{n,s}(x)$ в (1.10) сделав замену переменных $z = z' - \frac{1}{2}$ и $z_1 = z'_1 - \frac{1}{2}$, получим, что

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = x^{-2\gamma_s-1}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma^*_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma^*_\nu)}x^{-z}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z_1+\gamma^*_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z_1-\gamma^*_\nu)} \cdot \frac{x^{-z_1}}{-z-z_1}dz_1 dz \tag{2.4}$$

где $\gamma^*_\nu = \gamma_\nu + \frac{1}{2}$.

В качестве контуров C и C' соответственно возьмем $|z| = R$ и $|z_1| = 2R$, где

$$R = 6\sum_{\nu=s}^{n}\gamma^*_\nu > 3\gamma^*_n.$$

Тогда,

$$\left|\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma^*_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma^*_\nu)}\right| \le (2R)^s\prod_{\nu=s}^{n}\frac{R+\gamma^*_\nu}{R-\gamma^*_\nu}; \qquad \left|\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma^*_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma^*_\nu)}\right| \le (4R)^s\prod_{\nu=s}^{n}\frac{2R+\gamma^*_\nu}{2R-\gamma^*_\nu}.$$

Следовательно, согласно (2.3) и (2.4) будем иметь, что

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(1) \le c^{1+2s}e^{2(2\gamma_s+1)}R^{2s+1}A_{n,s}(R),$$

где

$$A_{n,s}(R) = \prod_{\nu=s}^{n}\frac{(R+\gamma^*_\nu)(2R+\gamma^*_\nu)}{(R-\gamma^*_\nu)(2R-\gamma^*_\nu)} =$$

$$= \prod_{\nu=s}^{n}\frac{2R^2+3R\gamma^*_\nu+\gamma^{*2}_\nu}{2R^2-3R\gamma^*_\nu+\gamma^{*2}_\nu} = \prod_{\nu=s}^{n}\left(1+\frac{6R\gamma^*_\nu}{2R^2-3R\gamma^*_\nu+\gamma^{*2}_\nu}\right) <$$

$$< \exp\left(6\sum_{\nu=s}^{n}\frac{\gamma^*_\nu}{2R-3R\gamma^*_\nu}\right) < \exp\left(\frac{6}{R}\sum_{\nu=s}^{n}\gamma^*_\nu\right) = c.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(1) \le c_s R^{2s+1} \exp\left(2(2\gamma_s+1)\right) \le c_s \left[\sum_{\nu=s}^{n}(\gamma_\nu+\gamma'_\nu)\right]^{2s+1}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Оценим сверху $\mathcal{K}_{n,s}(x)$ при $x \in [0, e^{-2}]$.

Лемма 2.2. *Для $x \in [0, e^{-2}]$ справедливо неравенство*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s R_n \cdot M_{n,s}(R_n),$$

где

$$M_{n,s}(R_n) = \max_{\gamma_s \le y \le R_n} y^s \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2}\right], \tag{2.5}$$

а R_n определяется из соотношений:

$$R_n^{1+\alpha} > \gamma_n, \quad R_n > \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}, \quad \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu + \gamma'_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2} = 1, \quad a_\nu = \gamma_\nu - \gamma_s. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из (1.11) имеем

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} Q^*_{n,s}(z) x^z \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} Q^*_{n,s}(z_1) x^{z_1} \frac{1}{1+2\gamma_s+z+z_1} dz_1 dz,$$

где

$$Q^*_{n,s}(z) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_s+\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z+\gamma_s-\gamma_\nu)}. \tag{2.7}$$

Так как $\hat{\chi}_k^{<s>}(x) = O(1)$ при $x \to 0$, значит

$$x^{2\gamma_s}\mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le \sum_{k=s}^{n} [\hat{\chi}_k^{<s>}(x)]^2 = O(1)$$

и следовательно,

$$x^{2\gamma_s+1}\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = o(1), \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{2.8}$$

Интегрируя теперь (2.2) на $(0, x)$, $x \in (0, 1)$, будем иметь

$$x^{2\gamma_s+1}\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = \int\limits_0^x t^{2\gamma_s}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz\right)^2 dt \le$$

$$\le \max_{0\le t\le x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz\right)^2 \int\limits_0^x t^{2\gamma_s} dt,$$

откуда,

$$\mathcal{K}_{n,s}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}} \max_{0\leq t\leq x} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz \right|.$$

Следовательно, при $x \in [0,1]$

$$\mathcal{K}_{n,s}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}} \max_{0\leq t\leq x} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{s-1}(z+b_\nu) \prod_{\nu=s+1}^{n} \frac{z+b_\nu}{z-a_\nu} \cdot \frac{z+b_s}{z} t^z dz \right|, \tag{2.9}$$

где

$$b_\nu = \gamma'_\nu + \gamma_s, \qquad a_\nu = \gamma_\nu - \gamma_s, \qquad \nu = s+1, s+2, \ldots. \tag{2.10}$$

Таким образом, при $x \in [0, e^{-2}]$, вопрос оценки $\mathcal{K}_{n,s}(x)$ сводится к оценке правой части неравенства (2.9). Для этого выберем контур C (он охватывает окрестности точек $0, -a_{s+1}, \ldots, -a_n$) следующим образом:

$$C = C_1(R_n) \bigcup C_2(R_n) \bigcup C'_2(R_n) \bigcup C_3(R'_n) \bigcup C_4(r),$$

где $0 < r < \frac{a_{s+1}}{2}$, число R_n и R'_n определено в (17), $R'_n = cR_n^{1+\alpha} > a_n$, и

$$\begin{aligned}
C_1(R_n) &= [-iR_n, -ir] \bigcup [ir, iR_n], \quad r = 1 - e^{-\frac{1}{R_n}}, \\
C'_2(R_n) &= C\left(|z| = R_n, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < -\varphi_0\right), \\
C_2(R_n) &= C\left(|z| = R_n, \quad \varphi_0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right), \\
C_3(R'_n) &= C\left(z = 2R'_n l^{i\varphi} \cos\varphi, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0\right), \\
C_4(r) &= C\left(|z| = r, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3}{2}\pi\right), \\
2R'_n \cos\varphi_0 &= R_n, \qquad \text{т.е.} \ \cos\varphi_0 = \frac{R_n}{2R'_n} = \frac{1}{2R_n^\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть $Y(C)$ - значение модуля в (2.9). Начнем с оценки $Y(C_1)$. Заметим, что

$$Y(C_1) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{ir}^{iR_n} \prod_{\nu=1}^{s} |z+b_\nu| A_{n,s}(z) t^{Re z} \left| \frac{z+\gamma_s}{z} \right| |dz|, \tag{2.12}$$

где

$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left| \frac{z+b_\nu}{z-a_\nu} \right|. \tag{2.13}$$

Имеем

$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(\frac{y^2+b_\nu^2}{y^2+a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{y^2+a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + (2\gamma_s+1) \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2+a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2+a_\nu^2} \right]$$

Для продолжения оценки разобьем промежуток $(r, R_n]$ на две части (r, γ_s) и $(\gamma_s, R_n]$. Для второго промежутка при $y = Re\, z \in [\gamma_s, R_n]$ имеем

$$B_{n,s}(z) = \prod_{\nu=1}^{s} |z + b_\nu| \left|\frac{\gamma_s + 1 + z}{z}\right| A_{n,s}(z) \le c^s y^s \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2}\right],$$

а для первого промежутка

$$B_{n,s}(z) \le c^s y^s \frac{1}{y} \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{a_\nu^2}\right],$$

Следовательно,

$$Y(C_1) \le \frac{1}{2\pi} \int_r^{R_n} B_{n,s}(z)dy = \frac{1}{2\pi} \int_r^{\gamma_s} B_{n,s}(y)dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_s}^{R_n} B_{n,s}(y)dy \le \tag{2.14}$$

$$\le c_1^s M_{n,s}(R_n) R_n + c_2^s R_n \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{a_\nu^2}\right],$$

так как в интеграле по (r, γ_s) множитель $|\ln r| = |\ln(1 - e^{-\frac{1}{R_n}})| \le c' R_n$.

Заметим теперь, что согласно второму условию из (1.2) мы можем в (2.5) $\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2}$ заменить на $\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2}$, в результате чего получим:

$$\sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2} = \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{(\gamma_\nu' + \gamma_\nu)(\gamma_\nu^2 - a_\nu^2)}{(y^2 + a_\nu^2)(y^2 + \gamma_\nu^2)} \le$$

$$\le 6(\gamma_s + 1) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{1}{y^2 + a_\nu^2} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2} \le c_s + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2}$$

Сделав такую же замену в последнем слагаемом в (2.14), с учетом (2.5), получим, что $Y(C_1) \le R_n \cdot M(n, s, R_n)$, где

$$M(n, s, R_n) = \max\left\{M_{n,s}(R_n),\ \exp\left[(2\gamma_s + 1) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right]\right\}, \tag{2.15}$$

Перейдем к оценке $Y(C_2)$. Имеем

$$A_{k,s}(z) = \prod_{s+1}^{n} \left|\frac{z + b_\nu}{z - a_\nu}\right| = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left|\frac{R_n \cos\varphi + iR_n \sin\varphi + b_\nu}{R_n \cos\varphi + iR_n \sin\varphi - a_\nu}\right|$$

$$= \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{R_n^2 + a_\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{2R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \ln\left(1 - \frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2}\right)\right]\right\} < \exp\left\{(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2}\right\}$$

$$\times \exp\left\{\sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_\nu^k}{k}\right\},$$

где

$$l_\nu = \frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2} < \cos\varphi < \frac{1}{R_n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$, при достаточно большом n имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l_\nu^k}{k} < \frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu \sum_{k=1}^{\infty}\cos^{k-1}\varphi \le \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{R_n^\alpha}}\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu <$$

$$< \frac{1}{2}(1+\delta)\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu = \frac{1}{2}(1+\delta)\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2},$$

Следовательно, при достаточно большом n

$$A_{k,s}(z) \le \exp\left\{(\gamma_s + \frac{1}{2})\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2}\right\} \times \tag{2.16}$$

$$\times \exp\left\{\sum_{\nu=s+1}^{n}\left[\frac{R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2} + (1+\delta)\frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2}\right]\right\} < c_0 \exp\left[(1+\frac{\delta}{2})R_n\cos\varphi\right],$$

где c_s зависит только от s. Возвращаясь к оценке $Y(C_2)$ будем иметь

$$Y(C_2) \le c_s \prod_{\nu=1}^{s}|R_n + \gamma_s' - \gamma_\nu| \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+\frac{\delta}{2})R_n\cos\varphi}|x^{R_n\cos\varphi}|R_n d\varphi, \tag{2.17}$$

Так как $x \in (0, e^{-2})$, то $x^{R_n\cos\varphi} \le e^{-2R_n\cos\varphi}$ и после замены $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, получим

$$Y(C_2) < c_s R_n^{s+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R_n \sin\varphi}{2}} d\varphi < c_s R_n^s.$$

Аналогично оцениваются $Y(C_1')$ и $Y(C_2')$.

Оценим теперь $Y(C_3)$. Заметим, что при $z \in C_3$ и при достаточно большом n

$$\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z+a_\nu}\right| \le \prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{2R_n' + b_\nu}{2R_n' + a_\nu} = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left(1 + \frac{b_\nu - a_\nu}{2R_n' + a_\nu}\right) <$$

$$< \exp\left[(\gamma_s + \gamma_s')\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{R_n'}\right] = \exp\left[(\gamma_s + \gamma_s')\frac{n}{R_n'}\right] \le c_s,$$

так как при $\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu \ge h$ и $\gamma_n < cn$ имеем, что $n = O(R_n)$ и поэтому $n = o(R_n')$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu}\right| = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z+a_\nu}\right|\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right| \le c_s\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right|,$$

Оценим величину

$$A_{n,s}'(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right|,$$

При $z \in C_3$, т.е. $z = 2R_n' e^{i\varphi} \cos\varphi$, будем иметь

$$A_{n,s}'(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(\frac{4R_n'^2 \cos^2\varphi + 4R_n' a_\nu \cos^2\varphi + a_\nu^2}{4R_n'^2 \cos^2\varphi - 4R_n' a_\nu \cos^2\varphi + a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(\frac{1+\alpha_\nu}{1-\alpha_\nu} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\alpha_\nu = \frac{4R_n' a_\nu \cos^2\varphi}{4R_n'^2 \cos^2\varphi + a_\nu^2}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad 2R_n' \cos\varphi_0 = R_n.$$

Значит

$$A_{n,s}'(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} [\ln(1+\alpha_\nu) - \ln(1+\alpha_\nu)] \right\} <$$

$$< \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \alpha_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_\nu^k \right) < \exp\left[\sum_{\nu=s+1}^{n} \alpha_\nu \left(1 + \frac{1}{1-\alpha_\nu} \right) \right].$$

Но

$$\alpha_\nu = \frac{4R_n' a_\nu \cos^2\varphi}{4R_n'^2 \cos^2\varphi + a_\nu^2} < \frac{4R_n' a_\nu \cos^2\varphi}{4R_n'^2 \cos^2\varphi} = \frac{a_\nu}{R_n'} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ при достаточно большом n будем иметь, что

$$\prod_{\nu=s+1}^{n} \left| \frac{z+a_\nu}{z-a_\nu} \right| < e^{\frac{2+\delta}{2}} \sum_{\nu=s+1}^{n} \alpha_\nu = \exp\left[\left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{4R_n' a_\nu \cos^2\varphi}{4R_n'^2 \cos^2\varphi + a_\nu^2} \right] <$$

$$< \exp\left[(1+\delta_1) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu + \gamma_\nu'}{R_n^2 + a_\nu^2} 2R_n' \cos^2\varphi \right] < \exp(2R_n' \cos^2\varphi).$$

Учитывая, что $|x^z| \le e^{-2Re\,z} = e^{-2\cdot 2R_n' \cos^2\varphi}$, будем иметь

$$Y(C_3) \le \frac{1}{2\pi} \int_{C_3} \prod_{\nu=1}^{s} |z+b_\nu| \frac{z+b_0}{z} |A_{n,s}(z)||x^z dz| \le c(s) \int_0^{\varphi_0} e^{-2R_n'^2 \cos^2\varphi} (2R_n' \cos\varphi)^s R_n' d\varphi,$$

откуда после замены $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ получаем

$$Y(C_3) < c(s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n \sin^2\varphi} (2R_n' \sin\varphi)^s R_n' d\varphi \le c_s R_n'^{s+1} \int_0^{\infty} e^{-\beta R_n' \varphi^2} \varphi^s d\varphi,$$

где $\beta = \frac{4}{\pi^2}$. Обозначив $R_n' \varphi^2 = \psi$, получим, что при достаточно большом n,

$$Y(C_3) < c_s (R_n')^{s+1} \int_0^{\infty} e^{-\beta\psi} \frac{\psi^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{(R_n')^{\frac{s+1}{2}}} d\psi = c_s (R_n')^{s+1-\frac{s+1}{2}} = c_s (R_n')^{\frac{s+1}{2}}.$$

Оценим наконец $Y(C_4)$.

$$Y(C_4) = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \prod_{\nu=1}^{s} (z+b_\nu) \frac{z+b_0}{z} \prod_{\nu=s+1}^{n} \frac{z+b_\nu}{z-b_\nu} x^z dz \right| =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=0} s \prod_{\nu=1}^{s-1}(z+b_\nu)\frac{z+b_0}{z}\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu}x^z + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_r} B_{n,s}(z)x^z dz,$$

где

$$B_{n,s}(z) = \prod_{\nu=1}^{s}(z+b_\nu)\frac{z+b_0}{z}\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu},$$

$$C_r = C\left(|z|=r,\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right),\quad C'_r = C\left(|z|=r,\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right).$$

Имеем $r = 1-e^{-\frac{1}{R_n}}$, $(0<r<\gamma_{s+1}-\gamma_s)$, поэтому

$$Y(C_4) \le c_s\left[\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{b_\nu}{a_\nu} + \prod_{\nu=1}^{s}(b_\nu+r) : \prod_{\nu=s+1}^{n}(a_\nu - r)\right] <$$

$$< c_s \exp\left(\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{\gamma'_\nu+\gamma_\nu}{a_\nu - r} + 2r\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{a_\nu - r}\right).$$

Так как $a_\nu = \gamma_\nu - \gamma_s$, при достаточно малом $r>0$ можем найти $c_s>0$ так, что

$$Y(C_4) \le c_s \exp\left[(\gamma'_s+\gamma'_s)\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{\gamma_\nu} + 2r\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right].$$

Но мы имеем $r = 1-e^{-\frac{1}{R_n}}$, поэтому

$$Y(C_4) \le c_s \exp\left[(\gamma'_s+\gamma_s)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right].$$

Объединив оценки $Y(C_1)$, $Y(C_2)$, $Y(C_3)$, $Y(C_4)$, при $x\in[0,e^{-2}]$ получим (2.18)

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s \max\left(R_n\cdot M_{n,s}(R_n),\ R_n^{s+1},\ (R'_n)^{\frac{s+1}{2}},\ \exp\left[(\gamma_s+\gamma'_s)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]\right),$$

где $M_{n,s}(R_n)$ определено в (2.5). Нам следует определить - какие величины определяют max в (2.18).

Легко заметить, что $R_nM_{n,s}(R_n)\ge c_sR_n^{s+1}$, кроме того, $(R'_n)^{\frac{s+1}{2}} = cR_n^{(1+\alpha)\frac{s+1}{2}} < c_1R_n^{s+1}$. Заметим также, что $M_{n,s}(R_n)$ мажорирует не только R_n^s, но также и

$$\exp\left[(\gamma'_s+\gamma_s)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu^2+y^2}\right],$$

поэтому $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|\le c_sR_n\cdot M_{n,s}(R_n)$. Лемма 2.2 доказана. □

Из Лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если последовательность $\{\gamma_\nu\}$ удовлетворяет условиям (1.2), тогда*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s\hat{M}(n,s,R_n,x),\quad x\in[0,1],\quad s=1,2,\ldots,n-1,$$

где

$$\hat{M}(n,s,R_n,x)=\begin{cases}R_n\cdot M_{n,s}(R_n), & x\in[0,e^{-2}],\\ \left[\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu+\gamma_\nu^{'})\right]^{s+\frac{1}{2}}, & x\in[e^{-2},1],\end{cases}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 2.2. *Пусть квазиполином P_n определен в (1.1), (1.2), и $\|P_n\|_{L^2(0,1)}\le M_n$. Тогда*

$$|P_n^{<s>}(x)|\le c_s M_n\cdot M(n,s,R_n,x),\quad x\in[0,1],\quad s=1,2,\ldots,n-1. \tag{2.19}$$

Чтобы судить о степени точности оценки (2.21) заметим, что для квазиполинома $\hat{\chi}_n(x)$ имеем

$$|\hat{\chi}_n^{<s>}(0)|==\frac{\sqrt{\gamma_n+\gamma_n^{'}}}{\gamma_n-\gamma_s}\prod_{\nu=s+1}^{n-1}\frac{(\gamma_\nu^{'}+\gamma_s)}{(\gamma_n-\gamma_s)}\prod_{\nu=0}^{s}(\gamma_\nu^{'}+\gamma_s)=$$

$$=\frac{c_*(s)}{\sqrt{\gamma_n}}\prod_{\nu=s+1}^{n-1}\left(1+\frac{\gamma_s+\gamma_s^{'}}{\gamma_\nu-\gamma_s}\right)\ge\frac{c(s)}{\sqrt{\gamma_n}}\exp\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_s+\gamma_s^{'}}{\gamma_\nu}\right).$$

Значит, если в $M_{n,s}(R_n)$ максимум получится при $0<y<c<\infty$, тогда

$$R_nM_{n,s}(R_n)=R_n\cdot O\left[\exp\left(\sum_{\nu=s}^{n}\frac{\gamma_s+\gamma_s^{'}}{\gamma_\nu}\right)\right].$$

Поэтому в этом случае для малых x оценка может оказаться хуже возможно ожидаемого на порядок $R_n\sqrt{\gamma_n}$, где число R_n, например, при $\gamma_\nu=\nu,\ \nu=1,2,\ldots$, имеет порядок $O(n)$, причем получаемая погрешность не зависит от s, если $0<s\le s_0<<n$. Следует еще учесть, что квазиполином $\hat{\chi}_n(x)$ скорее всего не является экстремальным, порядок погрешности может быть и $o(R_n\sqrt{\gamma_n})$. Для больших $x\in[0,1]$ полученный здесь результат в случае обычных полиномов, имеет порядок $n^{2(s+1)}$, а между тем точный порядок есть n^{2s+1}.

Abstract. L. Schwartz has obtained estimates for coefficients of quasipolynomials from Muntz system. In this paper we obtain exact estimates for generalized derivatives of such quasipolynomials on the interval [0, 1].

Список литературы

[1] L. Schwartz, 'Étuade des sommer d'exponentielles réelles', Actualites Scientifiques et industrielles, no. 959, Paris (1943).

[2] Г. В. Бадалян, В. Едигарян "Обобщение задачи Менделеева", Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по теории аппроксимации функции в комплексных областях, г. Уфа, 1987.

[3] Г. В. Бадалян, "Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их приложения", Изв. АН Арм. ССР, серия физмат, естеств. и технич. наук, 8, no. 5, 1 – 28 (1955).

[4] Г. В. Бадалян, "Обобщенные факториальные ряды", Сообщения Института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 5, 13 – 64, (1950).

Поступила 12 января 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 112-122.

ON A NON-DISSIPATIVE KIRCHHOFF VISCOELASTIC PROBLEM

N. TATAR

King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia

E-mail: tatarn@kfupm.edu.sa

Abstract. In this paper we consider a Kirchhoff type viscoelastic problem, and prove uniform stability of the system. We do not rely on the dissipativity of the system or the boundedness of the energy as in the previous treatments. There appears a quadratic term which we cannot estimate by the initial energy as our system is not clearly dissipative in advance.

MSC2010 numbers: 35L20, 35B40, 45K05

Keywords: Exponential decay; Kirchhoff equation; memory term; relaxation function; viscoelasticity.

1. Introduction

In this paper we consider the following wave equation with a viscoelastic damping term:

$$(1.1)\quad \begin{cases} u_{tt} = \left(1 + a(t)\,\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + f(t,x), \ \ in\ \Omega \times \mathbf{R}_+ \\ u = 0, \ \ on\ \Gamma \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$; the functions $u_0(x)$ and $u_1(x)$ are given initial data; the (nonnegative) relaxation function $h(t)$, the (non-negative) function $a(t)$ and $f(t,x)$ will be specified later, and $\|\cdot\|_2$ stands for the L^2-norm.

The equation in (1.1) describes the motion of a viscoelastic body according to the Kirchhoff model (see [8,18]). The integral term in (1.1) represents the memory term or the dependence on the history and the kernel involved is the relaxation function.

Kirchhoff type problems (with different dissipations) and viscoelastic problems have been investigated independently by several authors during the last decades (see, e.g., [2-19]). A number of results on well-posedness and asymptotic behavior of the solutions have been established. Among them only few papers deal with problems of the type (1.1). It should be noticed that the study of the problem of interest leads to some considerable new complications.

In the above cited papers were extensively used the boundedness of energy to estimate the quantities of interest. In our case, due to the presence of the forcing term $f(t,x)$ in the Kirchhoff problem, the derivative of the energy is not necessarily negative, and hence we cannot use the boundedness of the energy to estimate some terms like the one involving the coefficient of diffusion $a(t)\|\nabla u\|_2^2 \Delta u$. Moreover, even without this forcing term, since the relaxation function $h(t)$ generally is not non-increasing (see [17]), again we cannot use the boundedness of the energy to estimate the corresponding terms. In this paper we resolve this problem with the help of an inequality due to Airapetyan et al. [1]. Note that the well-posedness of the problem can be proved using the Faedo Galerkin method (see, [1,8,18]).

Theorem. *Let* $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *and* $h(t)$ *be a nonnegative summable kernel. Then there exists a unique solution* u *of the problem (1.1) satisfying* $u \in C\left([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$ *and*

$$u_t \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$$

for some $T > 0$.

The paper is organized as follows: in Section 2 we prepare some material needed to prove the main results of the paper (equivalence of the classical and modified energy functionals and some lemmas). Section 3 is devoted to the statement and proof of our decay result. In Section 4 we present some simple examples illustrating our findings.

2. Preliminaries

In this section we introduce different functionals we will work with, prove the equivalence of the classical and modified energy functionals, and state a useful identity and a lemma which constitutes the key tool in our contribution. We define the (classical) energy by

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right) + \frac{a(t)}{4}\|\nabla u\|_2^4,\ t \geq 0$$

where $\|.\|_2$ denotes the norm in $L^2(\Omega)$. It follows from the equation $(1)_1$ that if $a(t)$ is a differentiable function, then

$$E'(t) = \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)\,ds\,dx + \frac{a'(t)}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \int_\Omega u_t f(t,x)\,dx,\ t \geq 0.$$

Observe that

$$2\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)\,ds\,dx = \int_\Omega (h'\Box\nabla u)\,dx - h(t)\|\nabla u\|_2^2 -$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega (h\Box\nabla u)dx - \left(\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2\right\},$$

where

$$(h\Box v)(t) = \int_0^t h(t-s)\,|v(t)-v(s)|^2\,ds,\ t\geq 0.$$

Therefore, modifying $E(t)$ to

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left\{\|u_t\|_2^2 + \left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{a(t)}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \int_\Omega (h\Box\nabla u)dx\right\}$$

we obtain, for $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega (h'\Box\nabla u)dx - \frac{h(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{a'(t)}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \int_\Omega u_t f(t,x)dx \\ &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega (h'\Box\nabla u)dx - \frac{h(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{a'(t)}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \delta\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\|f\|_2^2,\ \delta>0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

These steps will be justified later. Clearly $\mathcal{E}'(t)$ is not necessarily negative at this stage, and this already eliminates several possible methods and techniques. We assume that the kernel is such that

$$1-\int_0^{+\infty} h(s)ds =: 1-\kappa > 0. \tag{2.2}$$

Next, we define the standard functionals: $\Phi_1(t) = \int_\Omega u_t u dx$,

$$\Phi_2(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,(u(t)-u(s))\,dsdx.$$

The next functional was introduced in [17]:

$$\Phi_3(t) = \int_\Omega\int_0^t H_\gamma(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx,$$

where

$$H_\gamma(t) := \gamma(t)^{-1}\int_t^\infty h(s)\gamma(s)ds, \tag{2.3}$$

and $\gamma(t)$ will be determined later (see **(H3)** below). The modified energy we will work with is given by

$$L(t) := \mathcal{E}(t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i\Phi_i(t) \tag{2.4}$$

for some $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,3$, to be determined.

The next result states that $L(t)$ and $\mathcal{E}(t)+\Phi_3(t)$ are equivalent.

Proposition 2.1. *There exist constants $\rho_i > 0$, $i = 1,2$, such that*

$$\rho_1[\mathcal{E}(t)+\Phi_3(t)] \leq L(t) \leq \rho_2[\mathcal{E}(t)+\Phi_3(t)]$$

for all $t \geq 0$ and small enough λ_i, $i = 1,2$.

Proof. By Poincaré inequality we have

$$\Phi_1(t) = \int_\Omega u_t u dx \le \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{C_p}{2}\|\nabla u\|_2^2,$$

where C_p is the Poincaré constant, and also

$$\Phi_2(t) \le \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{C_p}{2}\kappa \int_\Omega (h\Box\nabla u)dx$$

where we have used the inequalities

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^t h(t-s)\,(u(t)-u(s))\,ds \\ &\le \textstyle\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}\,(u(t)-u(s))\,ds \\ &\le \left(\textstyle\int_0^t h(t-s)ds\right)^{1/2}\left(\textstyle\int_0^t h(t-s)\,(u(t)-u(s))^2\,ds\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

The last two estimates imply

$$\begin{aligned} L(t) \le{}& \tfrac{1}{2}\left(1+\lambda_1+\lambda_2\right)\|u_t\|_2^2 + \tfrac{1}{2}\left(1-\textstyle\int_0^t h(s)ds + \lambda_1 C_p\right)\|\nabla u\|_2^2 \\ &+\tfrac{1}{2}\left(1+\lambda_2 C_p\kappa\right)\textstyle\int_\Omega (h\Box\nabla u)dx + \lambda_3\Phi_3(t). \end{aligned}$$

On the other hand we have

$$\begin{aligned} 2L(t) \ge{}& (1-\lambda_1-\lambda_2)\|u_t\|_2^2 + (1-\lambda_2 C_p\kappa)\textstyle\int_\Omega (h\Box\nabla u)dx \\ &+[1-\kappa-\lambda_1 C_p]\|\nabla u\|_2^2 + 2\lambda_3\Phi_3(t). \end{aligned}$$

Therefore, $\rho_1[\mathcal{E}(t)+\Phi_3(t)] \le L(t) \le \rho_2[\mathcal{E}(t)+\Phi_3(t)]$ for some constants $\rho_i > 0$, $i=1,2$, and small enough λ_i, $i=1,2$, such that $\lambda_1 < \min\{1,(1-\kappa)/C_p\}$ and $\lambda_2 < \min\left\{\frac{1}{C_p\kappa}, 1-\lambda_1\right\}$. Proposition 2.1 is proved.

We will need the following identity: for continuous functions h and v defined on $(0,\infty)$ and $t \ge 0$

(2.5)

$$v(t)\int_0^t h(t-s)v(s)ds = \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)v^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)v^2(s)ds - \frac{1}{2}(h\Box v)(t).$$

The proof is straightforward.

The following lemma, which was proved in [1], plays a key role in the proofs of our results.

Lemma 2.1. *Let $\chi(t)$, $\sigma(t)$, $\beta(t) \in C[0,\infty)$. If there exists a positive function $\mu(t) \in C^1[0,\infty)$ such that*

$$0 \le \sigma(t) \le \frac{\mu(t)}{2}\left(\chi(t) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\right),\ \beta(t) \le \frac{1}{2\mu(t)}\left(\chi(t) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\right),$$

then a nonnegative solution $v(t)$ of the following inequality

$$v'(t) \le -\chi(t)v(t) + \sigma(t)v^2(t) + \beta(t)$$

such that $\mu(0)v(0) < 1$, satisfies the inequality $v(t) < \frac{1}{\mu(t)}$.

3. Asymptotic behavior

In this section we state and prove the main result of this paper. We first introduce some notation (see [11]). Let h and κ be as in (1.1) and (2.2), respectively. We set $\omega = \frac{1-\kappa}{\kappa}$, and for a measurable set $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^+$, we define the probability measure $\hat{h}$ by

$$\hat{h}(\mathcal{A}) := \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{A}} h(s)ds. \tag{3.1}$$

The flatness set and the flatness rate of h are defined by

$$\Omega_h := \left\{ s \in \mathbf{R}^+ : h(s) > 0 \textit{ and } h'(s) = 0 \right\} \tag{3.2}$$

and

$$\mathcal{R}_h := \hat{h}(\Omega_h), \tag{3.3}$$

respectively. Also, we define

$$\tilde{\Omega}_{ht} := \left\{ s \in \mathbf{R}^+ : 0 \le s \le t,\ h(t-s) > 0 \textit{ and } h'(t-s) = 0 \right\},$$

and let $t_* > 0$ be a number such that $\int_0^{t_*} h(s)ds = h_* > 0$.

We impose the following assumptions on the kernel $h(t)$.

- **(H1)** $h(t) \ge 0$ for all $t \ge 0$ and $0 < \kappa = \int_0^{+\infty} h(s)ds < 1$.
- **(H2)** $h(t)$ is an absolutely continuous function such that $h'(t) \le 0$ for almost all $t > 0$.
- **(H3)** There exists a non-decreasing function $\gamma(t) > 0$ such that $\eta(t) := \gamma'(t)/\gamma(t)$ is a decreasing function and $\int_0^{+\infty} h(s)\gamma(s)ds < +\infty$.
- **(H4)** The function $a(t)$ is a continuously differentiable, and $f \in L^2(\Omega)$ is a continuous function in t.

Remark 3.1. Note that the assumption **(H3)** is satisfied for a broad class of functions including polynomials and exponential functions. Moreover, we are considering kernels satisfying **(H2)** and **(H3)** just for simplicity. Our approach can be applied for other more general kernels as well. In particular, for occasionally increasing kernels (see [17]).

Theorem 3.1. *Let the hypotheses (H1)-(H4) be satisfied, and let $H_\gamma(0) < \frac{2-\kappa}{8}\kappa$ and $\mathcal{R}_h < 1/4$, where $H_\gamma(t)$ and $\mathcal{R}_h$ are as in (2.3) and (3.3), respectively. If there exists a positive function $\mu(t) \in C^1[0,\infty)$ such that*

$$0 \le \frac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{\rho_1^4(1-\kappa)^2} \le \frac{\mu(t)}{2}\left(A(t) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\right),$$
$$\|f\|_2^2 \le \frac{B}{\mu(t)}\left(A(t) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\right)$$

where $a'_+(t) := \sup\{0, a'(t)\}$ and B is given in (3.20) below, then $E(t) \le C/\mu(t)$ for $t \ge 0$ in the cases:

(a) $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\bar{\eta}\neq 0$ *and* $A(t)\equiv A=\rho_2^{-1}\max\{C_2,\lambda_3\bar{\eta}\}$ *(C_2 is as in (3.19) and λ_3 will be chosen), or*

(b) $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=0$ *and* $A(t)=A\eta(t)=\rho_2^{-1}\max\{1,\lambda_3\}$, $t\geq 0$ *for some positive constant C provided that* $\mu(0)L(0)<1$.

Remark 3.2. The conditions imposed on $\mathcal{R}_h$ and $H_\gamma(0)$ may be relaxed with a trade-off on γ. Moreover, the existence of such a function μ is illustrated by some examples given in Section 4.

Proof of Theorem 3.1. A differentiation of $\Phi_1(t)$ with respect to t along trajectories of (1.1) gives

$$\Phi_1'(t)=\|u_t\|_2^2-\|\nabla u\|_2^2+\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx-a(t)\|\nabla u\|_2^4+\int_\Omega ufdx$$

and, by the identity (2.5), we obtain

(3.4)
$$\begin{aligned}\Phi_1'(t)\leq \|u_t\|_2^2-\left(1-\tfrac{\kappa}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t h(t-s)\|\nabla u(s)\|_2^2ds-\tfrac{1}{2}\int_\Omega(h\Box\nabla u)dx\\ -a(t)\|\nabla u\|_2^4+\delta_1C_p\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{1}{4\delta_1}\|f\|_2^2,\ \delta_1>0.\end{aligned}$$

For $\Phi_2(t)$ we have

$$\begin{aligned}\Phi_2'(t)=-\textstyle\int_\Omega u_{tt}\int_0^t h(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx\\ -\textstyle\int_\Omega u_t\left[\int_0^t h'(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds+u_t\int_0^t h(s)ds\right]dx\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\Phi_2'(t)=-\textstyle\int_\Omega\Big[\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\Delta u+\int_0^t h(t-s)\left(\Delta u(t)-\Delta u(s)\right)ds\\ +a(t)\|\nabla u\|_2^2\Delta u+f(t,x)\Big]\textstyle\int_0^t h(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx-\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|u_t\|_2^2\\ -\textstyle\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx.\end{aligned}$$

Therefore

(3.5)
$$\begin{aligned}\Phi_2'(t)=\left(1-\textstyle\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx\\ +a(t)\|\nabla u\|_2^2\textstyle\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx\\ -\textstyle\int_\Omega f(t,x)\int_0^t h(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx-\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|u_t\|_2^2\\ +\textstyle\int_\Omega\left|\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)ds\right|^2dx-\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx.\end{aligned}$$

Now we estimate the terms on the right-hand side of expression (3.5). We start with the second term, for which clearly we have

$$\begin{aligned}&a(t)\|\nabla u\|_2^2\textstyle\int_\Omega\nabla u.\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx\\ &\leq\tfrac{a(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2\left[\|\nabla u\|_2^2+\left(\textstyle\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega(h\Box\nabla u)dx\right]\\ &\leq\tfrac{a(t)}{2}\|\nabla u\|_2^4+\tfrac{a(t)}{2}\|\nabla u\|_2^2\left(\textstyle\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega(h\Box\nabla u)dx\\ &\leq\tfrac{2a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t)+\tfrac{2a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t)=\tfrac{4a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Next, for the third term on the right-hand side of (3.5) we have

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad &\int_\Omega f(t,x)\int_0^t h(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx \\ &\le \delta_2 C_p\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega (h\Box\nabla u)dx+\tfrac{1}{4\delta_2}\|f\|_2^2,\ \delta_2>0.\end{aligned}$$

Regarding the first term on the right-hand side of (3.5), for any measurable sets $\mathcal{A}$ and Ω such that $\mathcal{A}=\mathbf{R}^+\backslash\Omega$, we have

$$\begin{aligned}(3.8)\qquad &\int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &=\int_\Omega \nabla u\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &+\int_\Omega \nabla u\int_{\Omega_t} h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &\le \int_\Omega \nabla u\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &+\left(\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2-\int_\Omega\nabla u\int_{\Omega_t} h(t-s)\nabla u(s)dsdx,\end{aligned}$$

where we have adopted the notation: $\mathcal{B}_t:=\mathcal{B}\cap[0,t]$. It is easy to see that for $\delta_3>0$

$$\begin{aligned}(3.9)\qquad &\int_\Omega \nabla u\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &\le \delta_3\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{\kappa}{4\delta_3}\int_\Omega\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2dsdx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.10)\qquad &\int_\Omega \nabla u\int_{\Omega_t} h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ &\le \tfrac{1}{2}\left(\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_t} h(t-s)\|\nabla u(s)\|_2^2ds.\end{aligned}$$

The inequalities (3.9) and (3.10) together with (3.8) imply

$$\begin{aligned}(3.11)\qquad &\int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)dsdx \\ &\le \left(\delta_3+\tfrac{3}{2}\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{\kappa}{4\delta_3}\int_\Omega\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2dsdx \\ &+\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_t} h(t-s)\|\nabla u(s)\|_2^2ds\end{aligned}$$

where $\hat{h}$ is defined by formula (3.1).

Thus, it remains to estimate the last two terms on the right-hand side of (3.5). For the next to the last term we have

$$\begin{aligned}(3.12)\qquad &\int_\Omega\left|\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)ds\right|^2dx \\ &\le (1+\tfrac{1}{\delta_4})\kappa\int_\Omega\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2dsdx \\ &+(1+\delta_4)\left(\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right)\int_\Omega\int_{\Omega_t} h(t-s)\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2dsdx,\ \delta_4>0.\end{aligned}$$

Finally, the last term on the right-hand side of (3.5) is estimated for any $\delta_5>0$ as follows

$$\begin{aligned}(3.13)\qquad &\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx \\ &\le \delta_5\|u_t\|_2^2+\tfrac{C_p}{4\delta_5}\left(\int_0^t |h'(s)|\,ds\right)\int_\Omega (|h'|\Box\nabla u)dx \\ &\le \delta_5\|u_t\|_2^2-\tfrac{C_p}{4\delta_5}h(0)\int_\Omega (h'\Box\nabla u)dx.\end{aligned}$$

Taking into account (3.6)-(3.13), from (3.5), we obtain

$$
\begin{aligned}
\Phi_2'(t) \leq & (1-h_*)\left[\delta_3 + \tfrac{3}{2}\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right]\|\nabla u\|_2^2 + (\delta_5 - h_*)\|u_t\|_2^2 \\
& +\delta_2 C_p\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega (h\Box\nabla u)dx + \tfrac{1}{4\delta_2}\|f\|_2^2 + \tfrac{4a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t) \\
& +\kappa\left[1 + \tfrac{1-h_*}{4\delta_3} + \tfrac{1}{\delta_4}\right]\int_\Omega\int_{A_t} h(t-s)\,|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2\,dsdx \\
& +\tfrac{1}{2}(1-h_*)\int_{\Omega_t} h(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds \\
& -\tfrac{C_p}{4\delta_5}h(0)\int_\Omega\int_{A_t} h'(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
& +(1+\delta_4)\left(\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right)\int_\Omega\int_{\Omega_t} h(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Further, a differentiation of $\Phi_3(t)$ yields

(3.15)

$$
\begin{aligned}
\Phi_3'(t) &= H_\gamma(0)\,\|\nabla u\|_2^2 + \int_0^t H_\gamma'(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds \\
&= H_\gamma(0)\,\|\nabla u\|_2^2 - \int_0^t \tfrac{\gamma'(t-s)}{\gamma(t-s)}H_\gamma(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds - \int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds \\
&\leq H_\gamma(0)\,\|\nabla u\|_2^2 - \eta(t)\int_0^t H_\gamma(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds - \int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds,
\end{aligned}
$$

where we have used the fact that $\eta(t) := \gamma'(t)/\gamma(t)$ is a non-increasing function.

Taking into account the estimates (2.1), (3.4), (3.14) and (3.15), we can write

$$
\begin{aligned}
L'(t) \leq & \tfrac{1}{2}\int_\Omega (h'\Box\nabla u)dx - \tfrac{\lambda_2 C_p}{4\delta_5}h(0)\int_\Omega\int_{A_t} h'(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
& + \left[\tfrac{a'(t)}{4} - \lambda_1 a(t)\right]\|\nabla u\|_2^4 + [\delta + \lambda_1 + (\delta_5 - h_*)\lambda_2]\,\|u_t\|_2^2 \\
& +\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{\delta} + \tfrac{\lambda_1}{\delta_1} + \tfrac{\lambda_2}{\delta_2}\right]\|f\|_2^2 + \tfrac{4a(t)}{(1-\kappa)^2}\lambda_2\mathcal{E}^2(t) - \lambda_3\eta(t)\Phi_3(t) \\
& + \left\{\lambda_1\delta_1 C_p + \lambda_2(1-h_*)\left[\delta_3 + \tfrac{3}{2}\int_{\Omega_t} h(t-s)ds\right] + \lambda_3 H_\gamma(0) - \lambda_1\left(1-\tfrac{\kappa}{2}\right)\right\} \\
& \times\|\nabla u\|_2^2 + \left(\tfrac{\lambda_1}{2} + \tfrac{\lambda_2(1-h_*)}{2} - \lambda_3\right)\int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\,ds \\
& +\lambda_2\kappa\left[\delta_2 C_p + 1 + \tfrac{1-h_*}{4\delta_3} + \tfrac{1}{\delta_4}\right]\int_\Omega\int_{A_t} h(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
& + \left[\lambda_2\delta_2 C_p\kappa + (1+\delta_4)\lambda_2\int_{\Omega_t} h(t-s)ds - \tfrac{\lambda_1}{2}\right] \\
& \times\int_\Omega\int_{\Omega_t} h(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Consider the following sets (see [11])

$$
\mathcal{A}_n := \left\{s\in\mathbf{R}^+ : nh'(s) + h(s) \leq 0\right\},\ n\in\mathbf{N},
$$

and observe that

$$
\bigcup_n \mathcal{A}_n = \mathbf{R}^+\backslash\{\Omega_h \cup \mathcal{N}_h\},
$$

where $\mathcal{N}_h$ is the null set where h' is not defined and Ω_h is as in (3.2).

Furthermore, denoting $\Omega_n = \mathbf{R}^+\backslash\mathcal{A}_n$, and taking into account that $\Omega_{n+1}\subset\Omega_n$ for all n and $\bigcap_n \Omega_n = \Omega_h\cup\mathcal{N}_h$, we obtain $\lim_{n\to\infty}\hat{h}(\Omega_n) = \hat{h}(\Omega_h)$. Define the sets

$$
\tilde{A}_{nt} := \left\{s\in\mathbf{R}^+ : 0\leq s\leq t,\ nh'(t-s) + h(t-s)\leq 0\right\},\ n\in\mathbf{N}.
$$

In (3.16), we take $\mathcal{A} := \tilde{A}_{nt}$, $\Omega := \bar{\Omega}_{nt}$ and $\lambda_1 = (h_* - \varepsilon)\,\lambda_2$ for some small enough $\varepsilon > 0$, to obtain

(3.17)

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq \tfrac{1}{4}\left[1 - \tfrac{\lambda_2 C_p}{\delta_5} h(0)\right] \int_\Omega \int_{\tilde{A}_{nt}} h'(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx \\
&+ \left[\tfrac{a'(t)}{4} - \lambda_1 a(t)\right] \|\nabla u\|_2^4 + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{\delta} + \tfrac{(h_*-\varepsilon)\lambda_2}{\delta_1} + \tfrac{\lambda_2}{\delta_2}\right] \|f\|_2^2 + \tfrac{4a(t)}{(1-\kappa)^2}\lambda_2 \mathcal{E}^2(t) \\
&- \lambda_3 \eta(t)\Phi_3(t) + \left\{\delta_1 C_p (h_* - \varepsilon)\,\lambda_2 + \lambda_2 (1 - h_*)\left[\delta_3 + \tfrac{3}{2}\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds\right]\right. \\
&\left. + \lambda_3 H_\gamma(0) - (h_* - \varepsilon)\,\lambda_2 (1 - \tfrac{\kappa}{2})\right\} \|\nabla u\|_2^2 + \left[\delta + (\delta_5 - \varepsilon)\,\lambda_2\right] \|u_t\|_2^2 \\
&+ \left(\tfrac{(1-\varepsilon)\lambda_2}{2} - \lambda_3\right) \int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u(s)\|_2^2\, ds \\
&+ \left[\lambda_2 \kappa\left(1 + \delta_2 C_p + \tfrac{1-h_*}{4\delta_3} + \tfrac{1}{\delta_4}\right) - \tfrac{1}{4n}\right] \int_\Omega \int_{\tilde{A}_{nt}} h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx \\
&+ \lambda_2 \left[\delta_2 C_p \kappa + (1 + \delta_4)\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds - \tfrac{h_* - \varepsilon}{2}\right] \\
&\times \int_\Omega \int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx.
\end{aligned}$$

Noticing that $\frac{a'(t)}{4}\|\nabla u\|_2^4 \leq \frac{a'_+(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t)$, we chose $\delta_5 = \varepsilon/2$, $\lambda_3 = \frac{(1-\varepsilon)\lambda_2}{2}$ and λ_2 satisfying $\lambda_2 < \frac{\varepsilon}{2C_p h(0)}$, and

$$\lambda_2 \kappa\left(1 + \delta_2 C_p + \frac{1-h_*}{4\delta_3} + \frac{1}{\delta_4}\right) - \frac{1}{4n} \leq -C_1,\ C_1 > 0,$$

to get

(3.18)

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq -\lambda_1 a(t)\|\nabla u\|_2^4 + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{\delta} + \tfrac{(h_*-\varepsilon)\lambda_2}{\delta_1} + \tfrac{\lambda_2}{\delta_2}\right]\|f\|_2^2 + \tfrac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t) \\
&- \lambda_3 \eta(t)\Phi_3(t) + \lambda_2\left\{\delta_1 C_p (h_* - \varepsilon) + (1 - h_*)\left[\delta_3 + \tfrac{3}{2}\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds\right]\right. \\
&\left. + \tfrac{(1-\varepsilon)}{2} H_\gamma(0) - (h_* - \varepsilon)\,(1 - \tfrac{\kappa}{2})\right\} \|\nabla u\|_2^2 + \left[\delta - \tfrac{\varepsilon}{2}\lambda_2\right]\|u_t\|_2^2 \\
&+ \lambda_2\left[\delta_2 C_p \kappa + (1 + \delta_4)\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds - \tfrac{h_* - \varepsilon}{2}\right] \\
&\times \int_\Omega \int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx - C_1 \int_\Omega \int_{\tilde{A}_{nt}} h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx.
\end{aligned}$$

For small enough ε and δ_4 and large enough values of n and t_*, we have $\hat{h}(\Omega_h) < 1/4$ and

$$(1 + \delta_4)\kappa \hat{h}(\Omega_n) - \frac{h_* - \varepsilon}{2} < 0,$$

implying

$$(1 + \delta_4)\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds - \frac{h_* - \varepsilon}{2} < 0$$

$$\frac{3}{2}\kappa(1 - h_*)\int_{\bar{\Omega}_{nt}} h(t-s) ds < \rho(h_* - \varepsilon)\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)$$

with $\rho = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\kappa(1+3h_*)}{4(h_*-\varepsilon)(2-\kappa)}\right]$. Note that $\rho < 1/2$. For the remaining $1-\rho$ we require that

$$\frac{1-\varepsilon}{2} H_\gamma(0) < (1-\rho)\,(h_* - \varepsilon)\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right).$$

This relation is satisfied for $H_\gamma(0) < \frac{9-\kappa}{8}\kappa$ and sufficiently large t_*. Therefore, for small enough δ_i, $i = 1,2,3$ and δ we obtain

(3.19)
$$L'(t) \le -C_2\mathcal{E}(t) + \frac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{(1-\kappa)^2}\mathcal{E}^2(t) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\delta} + \frac{\kappa\lambda_2}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}\right]\|f\|_2^2 - \lambda_3\eta(t)\Phi_3(t),$$

for $t \ge t_*$ and some positive constant C_2.

(a) If $\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \bar{\eta} \neq 0$, then $\eta(t) \ge \bar{\eta}$, and by Proposition 2.1 there exist $C_3 > 0$ such that

$$L'(t) \le -C_3L(t) + \frac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{\rho_1^2(1-\kappa)^2}L^2(t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\kappa\lambda_2}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}\right)\|f\|_2^2. \tag{3.20}$$

Applying Lemma 3.1 with

$$\chi(t) = C_3,\ \sigma(t) = \frac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{\rho_1^2(1-\kappa)^2},\ \beta(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\kappa\lambda_2}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}\right)\|f\|_2^2$$

we infer that $E(t) \le C/\mu(t)$, $t \ge 0$ for some positive constant C.

(b) If $\lim_{t\to\infty}\eta(t) = 0$, there exist $\hat{t} \ge t_*$ such that $\eta(t) \le C_2$ for all $t \ge \hat{t}$. Therefore

$$L'(t) \le -C_4\eta(t)L(t) + \frac{a'_+(t) + 4\lambda_2 a(t)}{\rho_1^2(1-\kappa)^2}L^2(t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\kappa\lambda_2}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}\right)\|f\|_2^2 \tag{3.21}$$

for some $C_4 > 0$. Taking $\chi(t) = C_4\eta(t)$ we conclude that

$$E(t) \le C/\mu(t),\ t \ge 0.$$

This completes the proof of Theorem 3.1.

4. Examples

First, as it was mentioned above (see Remark 3.1), polynomials and exponential functions satisfy the assumption (H3). Indeed, for $\gamma(t) = (1+t)^\alpha$, $\alpha > 0$, we have $\eta(t) = \gamma'(t)/\gamma(t) = \alpha(1+t)^{-1}$, and for $\gamma(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, we find $\eta(t) = \gamma'(t)/\gamma(t) = \alpha$.

Next, we give two examples that illustrate both possible cases in Theorem 3.1.

Example 4.1. Let $\sigma(t) = \sigma_0 e^{\nu t}$ for some positive constants σ_0 and ν, which may result when $a(t) = ae^{\nu t}$) and $\beta(t) = \beta_0 e^{-\nu t}$ for some positive constant β_0. This situation can occur, for instance, if the function $f(t,x)$ is of the form $g(x)e^{-\frac{\nu}{2}t}$. Then $\mu(t) = \mu_0 e^{\nu t}$ with μ_0 satisfying $\sigma_0 \le \frac{\mu_0}{2}(\chi_0 - \nu)$ and $\beta_0 \le \frac{1}{2\mu_0}(\chi_0 - \nu)$, where $\chi_0 = C_3$ (see formula (3.20)). This is possible when $\nu < \chi_0$ and $4\sigma_0\beta_0 < (\chi_0 - \nu)^2$.

Example 4.2. Assume that $C_4\eta(t) = \alpha(1+t)^{-1}$ (see (3.21)). This can occur if $\gamma(t)$ is of the form $(1+t)^\alpha$), $\sigma(t) \le \sigma_0(1+t)^{\nu_1}$ and $\beta(t) = \beta_0(1+t)^{\nu_2}$. For instance, this is the case when the functions $a(t)$ and $f(t,x)$ are of the form $a(1+t)^{\nu_1}$ and

$h(x)(1+t)^{\nu_2/2}$, respectively, with $\nu_1+\nu_2 \le -2$, $\alpha > 2(\nu_1+1)$ and $16\sigma_0\beta_0 < \alpha^2$. Then, there exists a constant C such that $\mu(t) = C(1+t)^{\nu}$ with $\nu = \nu_1 + 1$.

Acknowledgment. The author is grateful for the financial support and the facilities provided by King Fahd University of Petroleum and Minerals.

REFERENCES

[1] R. G. Airapetyan, A. G. Ramm and A. B. Smirnova, "Continuous methods for solving nonlinear Ill-posed problems", Operator Theory and Applications, **25**, 111-138 (2000).

[2] J. A. D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari and D. W. Reynolds, "On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity", Math. Models Methods Appl. Sci., **16**, 1677-1694 (2006).

[3] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and P. Martinez, "General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems", Nonlinear Anal., **68** (1), 177-193 (2008).

[4] X. S. Han and M. X. Wang, "Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping", Nonlinear Anal. **70** (9), 3090-3098 (2009).

[5] W. Liu, "General decay rate estimate for a viscoelastic equation with weakly nonlinear time-dependent dissipation and source terms", J. Math. Physics, **50** (11), 113506 (2009).

[6] M. Medjden and N.-e. Tatar, "Asymptotic behavior for a viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel", Appl. Math. Comput., **167** (2), 1221-1235 (2005).

[7] S. Messaoudi and N.-e. Tatar, "Exponential decay for a quasilinear viscoelastic equation", Math. Nachr., **282** (10), 1443-1450 (2009).

[8] J. E. Muñoz Rivera and F. P. Quispe Gómez, "Existence and decay in non linear viscoelasticity", Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat., **8** (6), 1–37 (2003).

[9] K. Nishihara amd Y. Yamada, "On global solutions of some degenerate quaslinear hyperbolic equations with dissipative terms", Funcial. Ekvac., **33**, 151-159 (1990).

[10] K. Ono, "On global existence, asymptotic behavior and blowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation", Math. Meth. Appl. Sci., **20**, 151-177 (1997).

[11] V. Pata, "Exponential stability in linear viscoelasticity", Quart. Appl. Math., **64** (3), 499-513 (2006).

[12] G. A. Perla Menzala, "On a global classical solution of a nonlinear wave equation with damping", Appl. Anal., **10**, 179-195 (1980).

[13] N.-e. Tatar, "On a problem arising in isothermal viscoelasticity", Int. J. Pure and Appl. Math., **3** (1), 1-12 (2003).

[14] N.-e. Tatar, "Polynomial stability without polynomial decay of the relaxation function", Math. Meth. Appl. Sci., **31** (15), 1874-1886 (2008).

[15] N.-e. Tatar, "Exponential decay for a viscoelastic problem with a singular problem", Zeit. Angew. Math. Phys., **60** (4), 640-650 (2009).

[16] N.-e. Tatar, "On a large class of kernels yielding exponential stability in viscoelasticity", Appl. Math. Comp., **215** (6), 2298-2306 (2009).

[17] N.-e. Tatar, "Oscillating kernels and arbitrary decays in viscoelasticity", Math. Nachr., **285**, 1130-1143 (2012).

[18] S.-T. Wu and L.-Y. Tsai, "On global existence and blow up of solutions for an integro-differential equation with strong damping", Taiwanese J. Math., **10** (4), 979-1014 (2006).

[19] S. Q. Yu, "Polynomial stability of solutions for a system of nonlinear viscoelastic equations", Appl. Anal., **88** (7), 1039-1051 (2009).

Поступила 17 июля 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 123-137.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF SECOND ORDER NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH JACOBI OPERATORS

XIA LIU, YUANBIAO ZHANG, HAIPING SHI, XIAOQING DENG

Oriental Science and Technology College, Hunan Agricultural University, Changsha, China[1]
Science College, Hunan Agricultural University, Changsha, China
Packaging Engineering Institute, Jinan University, Zhuhai, China
Modern Business and Management Department, Guangdong Construction Vocational Technology Institute, Guangzhou, China
School of mathematics and Statistics, Hunan University of Commerce, Changsha, China

E-mails: *xia991002@163.com; abiaoa@163.com; shp7971@163.com; dengxq924@163.com*

Abstract. The paper is devoted to a question of existence and multiplicity of solutions of boundary value problems for a class of nonlinear difference equations with Jacobi second order operators. By using the critical point theory, some sufficient conditions are obtained.

MSC2010 numbers: 39A10, 47B36.

Keywords: Multiple nontrivial solutions; boundary value problem; Jacobi operator; critical point theory.

1. Introduction

Throughout the paper the following notation will be used. The letters $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{R}$ denote the sets of all natural, integer and real numbers, respectively; k will stand for a positive integer. For any a, $b \in \mathbf{Z}$ we define $\mathbf{Z}(a) = \{a, a+1, \cdots\}$, $\mathbf{Z}(a,b) = \{a, a+1, \cdots, b\}$ when $a \leq b$. By Δ we denote the forward difference operator defined by $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Also, the symbol * will denote the transpose of a vector.

The second order forward-backward differential-difference equation

$$c^2 u''(t) = V'(u(t+1) - u(t)) - V'(u(t) - u(t-1)),\ t \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

has been studied extensively by many scholars. For example, Smets and Willem [26] have established the existence of solitary waves of (1.1).

[1]This project is supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Eduction of China (Grant No. 20114410110002), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171078), the Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant No. S2013010014460), the Science and Research Program of Hunan Provincial Science and Technology Department (Grant No. 2012FJ4109) and the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (Grant No. 12C0170, 13C487).

A generalization of (1.1) is the following equation

$$Su(t) = f(t, u(t+1), u(t), u(t-1)),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1.2}$$

where S stands for the Sturm-Liouville differential expression and $f \in C(\mathbf{R}^4, \mathbf{R})$.

The present paper considers the second order difference equation

$$Lu_n = f(n, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \tag{1.3}$$

with boundary value conditions

$$u_a + \alpha u_{a+1} = A,\ u_{b+2} + \beta u_{b+1} = B, \tag{1.4}$$

where L is the Jacobi operator defined by $Lu_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n$, a_n and b_n are real-valued for each $n \in \mathbf{Z}$, $f \in C(\mathbf{R}^4, \mathbf{R})$, and α, β, A and B are constants.

Observe that the equation (1.3) can be considered as a discrete analogue of (1.2), and the operator L leads to a symmetric matrix representation. Also, notice that the boundary value conditions in equation (1.4) include the following special cases: the Dirichlet boundary value conditions, the mixed boundary value conditions and the Neumann boundary value conditions:

$$u_a = A,\ u_{b+2} = B; \tag{1.5}$$

$$u_a = A,\ \Delta u_{b+1} = B; \tag{1.6}$$

$$\Delta u_a = A,\ u_{b+2} = B;\ and \tag{1.7}$$

$$\Delta u_a = A,\ \Delta u_{b+1} = B. \tag{1.8}$$

It is worthwhile to observe that the Jacobi operators appear in a variety of applications (see, e.g., [27], and references therein). They can be viewed as the discrete analogues of the Sturm-Liouville operators and their investigation has many similarities with that of Sturm-Liouville theory. It should be noted that there are a number of books devoted to the Sturm-Liouville operators, whereas there are only few on Jacobi operators. Moreover, there is a small number of researches available that cover some basic topics, such us positive solutions, periodic operators, boundary value problems, etc., which typically can be found in the books on Sturm-Liouville operators (see, e.g., [17]).

Without loss of generality, we can assume that $a = 0$ and $b = k-1$ for some positive number k. Then the boundary value problem (BVP) (1.3) with (1.4) becomes

$$Lu_n = f(n, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}),\ n \in \mathbf{Z}(1, k) \tag{1.9}$$

with boundary value conditions

$$u_0 + \alpha u_1 = A,\ u_{k+1} + \beta u_k = B. \tag{1.10}$$

The theory of nonlinear difference equations has been widely used to study discrete models appearing in many fields, such as computer science, economics, neural network, ecology, cybernetics, etc. Since the last decade, there has been much literature on qualitative properties of difference equations, those studies cover many of the branches of difference equations (see, e.g., [1, 8, 9,14-16, 18, 20, 22, 24, 25], and references therein).

In recent years, the boundary value problems for differential equations was studied extensively. By using various methods and techniques, such as the Schauder fixed point theorem, the cone theoretic fixed point theorem, the method of upper and lower solutions, coincidence degree theory, a series of results of nontrivial solutions for differential equations have been obtained in the literature (see, e.g., [2-6, 13, 28]. Notice that the critical point theory is also an important tool to deal with problems on differential equations (see [19, 23, 31]). Because of applications of difference equations in many areas (see [1, 8, 15, 16, 20, 25]), recently, some authors have gradually paid attention to applying critical point theory to deal with periodic and homoclinic solutions of discrete systems (see [7, 10-12, 29, 30, 32, 33]).

In particular, using the critical point theory, Chen and Fang [7] have obtained a sufficient condition for the existence of periodic and subharmonic solutions of the following second-order p-Laplacian difference equation

$$\Delta(\varphi_p(\Delta u(n-1))) + f(n, u(n+1), u(n), u(n-1)) = 0, \ n \in \mathbf{Z}.$$

We also refer the reader to [29, 30] for the discrete boundary value problems. Notice that, however, all these topics do not concern with the Jacobi operators.

As far as we know results obtained in the literature for the (BVP) (1.9) with (1.10) are very scarce. Since the function f in (1.9) depends on u_{n+1} and u_{n-1}, the traditional methods of establishing the functional, developed in [10-12, 29, 30, 32, 33], are inapplicable to our case. The present paper aims to fill this gap.

In this paper, motivated by the above arguments and results, we use the critical point theory and obtain sufficient conditions for the existence and multiplicity of the solutions of the BVP (1.9) with (1.10). The main idea is to transfer the question of existence of the solutions of the BVP (1.9) with (1.10) into that of the critical points of some functional. We also demonstrate the power of the critical point theory in the study of the existence of multiple solutions for boundary value problems for difference equations. For the basic concepts and results on variational methods, we refer the reader to [19,21,23,31].

Throughout the paper we suppose that $B = 0$ and $a_n < 0$ for $n \in \mathbf{Z}(1, k)$. The main results of the paper are the following theorems.

Theorem 1.1. *Assume that the following conditions are satisfied:*

(L_1) $b_1 - \alpha a_0 + a_1 > 0,\ b_k - \beta a_k + a_{k-1} > 0,\ b_i + a_i + a_{i-1} > 0,\ 2 \le i \le k-1;$

(F_1) *there exists a functional* $F(n,\cdot) \in C^1(Z \times R^2, R)$ *with* $F(0,\cdot) = 0$ *such that*

$$\frac{\partial F(n-1,v_2,v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2} = f(n,v_1,v_2,v_3),\ \forall n \in Z(1,k);$$

(F_2) *there exist constants* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *and* $1 < \tau_1 < 2$ *such that for any* $n \in Z(1,k)$,

$$F(n,v_1,v_2) \le c_1 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^{\tau_1} + c_2. \tag{1.11}$$

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least one solution.

Corollary 1.1. *Assume that the conditions* (F_1) *and* (L_1) *are satisfied. And, also*

(F_3) *there exists a constant* $M_0 > 0$ *such that for all* $(n,v_1,v_2) \in Z(1,k) \times R^2$

$$\left|\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1}\right| \le M_0,\ \left|\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}\right| \le M_0.$$

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least one solution.

Remark 1.1. *Assumption* (F_3) *implies that there exists a constant* $M_1 > 0$ *such that*
(F_3') $|F(n,v_1,v_2)| \le M_1 + M_0(|v_1| + |v_2|),\ \forall (n,v_1,v_2) \in Z(1,k) \times R^2.$

Theorem 1.2. *Assume that the conditions* (F_1) *and* (F_3) *are satisfied. And, also*

(L_2) $A = 0,\ b_1 - \alpha a_0 + a_1 = 0,\ b_k - \beta a_k + a_{k-1} = 0,\ b_i + a_i + a_{i-1} = 0,\ 2 \le i \le k-1;$

(F_4) $F(n,v_1,v_2) \to +\infty$ *for* $n \in Z(1,k)$ *as* $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \to +\infty$.

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least one solution.

Theorem 1.3. *Assume that the condition* (F_1) *is satisfied. And, also*

(F_5) *there exists a constant* $\sigma_1 > 2$ *such that for any* $n \in Z(1,k)$,

$$0 < \sigma_1 F(n,v_1,v_2) \le \frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1} v_1 + \frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2} v_2,\ \forall \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \ge R. \tag{1.12}$$

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least one solution.

Remark 1.2. *The condition (1.12) implies that there exist constants* $c_3 > 0$ *and* $c_4 > 0$ *such that*

$$F(n,v_1,v_2) \ge c_3 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^{\sigma_1} - c_4,\ \forall n \in \mathbf{Z}(1,k). \tag{1.13}$$

The next two theorems contain sufficient conditions ensuring at least two nontrivial solutions for BVP (1.9) with boundary value conditions (1.10).

Theorem 1.4. *Assume that* $A = 0$, *and the conditions* (L_1), (F_1) *and* (F_5) *are satisfied. And, also*

(F_6) *there exists a functional* $F(n,\cdot) \in C^1(Z \times R^2, R)$ *such that*

$$\lim_{r\to 0} \frac{F(n,v_1,v_2)}{r^2} = 0,\ r = \sqrt{v_1^2+v_2^2},\ \forall n \in Z(1,k).$$

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least two nontrivial solutions.

Theorem 1.5. *Assume that the conditions* (L_2) *and* (F_1) *are satisfied. And, also*

(F_7) *there exist constants* $\delta > 0$, $\tau_2 \in \left(0, \frac{1}{2(\beta^2+2)}\lambda_{\min}\right)$ *such that*

$$F(n,v_1,v_2) \le \tau_2\left(v_1^2+v_2^2\right),\ \textit{for } n \in Z(1,k) \textit{ and } v_1^2+v_2^2 \le \delta^2;$$

(F_8) *there exist constants* $\rho > 0$, $\gamma > 0$, $\sigma_2 \in \left(\frac{1}{2}\lambda_{\max}, +\infty\right)$ *such that*

$$F(n,v_1,v_2) \ge \sigma_2\left(v_1^2+v_2^2\right) - \gamma,\ \textit{for } n \in Z(1,k) \textit{ and } v_1^2+v_2^2 \ge \rho^2,$$

where $\lambda_{\min}$ *and* $\lambda_{\max}$ *are defined in formula (2.4).*

Then the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least two nontrivial solutions.

Remark 1.3. *It follows from* (F_8) *that there exists a constant* $\gamma' > 0$ *such that*

$$(F_8')\quad F(n,v_1,v_2) \ge \sigma_2\left(v_1^2+v_2^2\right) - \gamma',\ \forall (n,v_1,v_2) \in \mathbf{Z}(1,k) \times \mathbf{R}^2.$$

2. Variational structure and some lemmas

For a given $r > 1$, define the norm $\|\cdot\|_r$ on $\mathbf{R}^k$ as follows: for all $u \in \mathbf{R}^k$

$$\|u\|_r = \left(\sum_{j=1}^{k} |u_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Since $\|u\|_r$ and $\|u\|_2$ are equivalent, there exist constants k_1, k_2 such that $k_2 \ge k_1 > 0$, and

$$k_1\|u\|_2 \le \|u\|_r \le k_2\|u\|_2,\ \forall u \in \mathbf{R}^k. \tag{2.1}$$

Clearly, $\|u\| = \|u\|_2$. When $k > 2$, for the BVP (1.9) with (1.10), consider the functional J on $\mathbf{R}^k$ defined as follows:

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Pu, u\rangle + \langle \eta, u\rangle - \sum_{n=1}^{k} F(n, u_{n+1}, u_n), \tag{2.2}$$

$\forall u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)^* \in \mathbf{R}^k$, $u_0 + \alpha u_1 = A$, $u_{k+1} + \beta u_k = B$, where

$$P = \begin{pmatrix} b_1 - \alpha a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{k-1} & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & b_k - \beta a_k \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} a_0 A \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ a_k B \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Clearly, $J \in C^1(\mathbf{R}^k, \mathbf{R})$, and for any $u = \{u_n\}_{n\in\mathbf{Z}(1,k)} \in \mathbf{R}^k$, by using the equalities $u_0 + \alpha u_1 = A$ and $u_{k+1} + \beta u_k = B$, one can easily compute the partial derivative:

$$\frac{\partial J}{\partial u_n} = Lu_n - f(n, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \ n \in \mathbf{Z}(1, k).$$

Threfore, u is a critical point of J on $\mathbf{R}^k$ if and only if $\{u_n\}_{n=0}^{k+1} = (u_0, u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1})$ is a solution of the BVP (1.9) with (1.10), where $u_0 = A - \alpha u_1$ and $u_{k+1} = B - \beta u_k$. Thus, the existence of solutions of the BVP (1.9) with (1.10) is reduced to that of the critical points of J on $\mathbf{R}^k$. That is, the functional J is just the variational framework of the BVP (1.9) with (1.10).

Remark 2.1. *The case $k = 1$ is trivial. For the case $k = 2$, P has a different form, namely,*

$$P = \begin{pmatrix} b_1 - \alpha a_0 & a_1 \\ a_1 & b_2 - \beta a_2 \end{pmatrix}.$$

However, in this case, it is easy to complete the proofs of Theorems 1.1 – 1.5.

Remark 2.2. *It follows from (L_2) that 0 is an eigenvalue of P and $\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}}(1, 1, \cdots, 1)^* \in E_k$ is an eigenvector of P corresponding to 0. Let $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}$ be the other eigenvalues of P. Applying matrix theory, we infer that $\lambda_j > 0$ for all $j \in Z(1, k-1)$.*

Define

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_j | j \in \mathbf{Z}(1, k-1)\} > 0, \ \lambda_{\max} = \max\{\lambda_j | j \in \mathbf{Z}(1, k-1)\} > 0. \tag{2.4}$$

Denote $W = \{(u_1, u_2, \cdots, u_k)^* \in \mathbf{R}^k | u_n \equiv c, \ c \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{Z}(1, k)\}$ and let V be the direct orthogonal complement of $\mathbf{R}^k$ to W, i.e., $\mathbf{R}^k = V \oplus W$.

Let E be a real Banach space and let $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, that is, J is a continuously Fréchet-differentiable functional defined on E. We say that the functional J satisfis the Palais-Smale (PS) condition (see [12]), if any sequence $\{u^{(k)}\} \subset E$ for which $\{J(u^{(k)})\}$ is bounded and $J'(u^{(k)}) \to 0$ as $k \to \infty$ possesses a convergent subsequence in E. Let B_ρ denote the open ball in E about 0 of radius ρ and let ∂B_ρ denote its boundary.

Lemma 2.1. *(Saddle Point Theorem, [23]). Let E be a real Banach space, $E = E_1 \oplus E_2$, where $E_1 \neq \{0\}$ and is finite dimensional. Suppose that $J \in C^1(E, R)$ satisfies the (PS) condition and also*
(J_1) there exist constants μ, $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap E_1} \leq \mu$; (J_2) there exists $e \in B_\rho \cap E_1$ and a constant $\omega \geq \mu$ such that $J|_{e+E_2} \geq \omega$.
Then J possesses a critical value $c \geq \omega$ given by

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in B_\rho\cap E_1} J(h(u)),$$

where

$$\Gamma = \{h \in C(\bar{B}_\rho \cap E_1, E) \mid h|_{\partial B_\rho \cap E_1} = id\}$$

and id denotes the identity operator.

Lemma 2.2. *(Mountain Pass Lemma, [23]). Let E be a real Banach space and let $J \in C^1(E, R)$ satisfy the (PS) condition. If $J(0) = 0$ and*

(J_3) there exist constants ρ, $a > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho} \geq a$, and

(J_4) there exists $e \in E \setminus B_\rho$ such that $J(e) \leq 0$.

Then J possesses a critical value $c \geq a$ given by

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(g(s)), \tag{2.5}$$

where

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) | g(0) = 0,\ g(1) = e\}. \tag{2.6}$$

Lemma 2.3. *(Linking Theorem, [23]). Let E be a real Banach space, $E = E_1 \oplus E_2$, where E_1 is finite dimensional. Suppose that $J \in C^1(E, R)$ satisfies the (PS) condition and also*

(J_5) there exist constants $a > 0$ and $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap E_2} \geq a$;

(J_6) there exists an $e \in \partial B_1 \cap E_2$ and a constant $R_0 \geq \rho$ such that $J|_{\partial Q} \leq 0$, where $Q = (\bar{B}_{R_0} \cap E_1) \oplus \{re | 0 < r < R_0\}$.

Then J possesses a critical value $c \geq a$ given by

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u)),$$

where $\Gamma = \{h \in C(\bar{Q}, E) \mid h|_{\partial Q} = id\}$ and id denotes the identity operator.

Lemma 2.4. *Assume that the conditions (L_2), (F_1), (F_3) and (F_4) are satisfied. Then the functional J satisfies the (PS) condition.*

Proof. Let $u^{(l)} \in \mathbf{R}^k$ and $l \in \mathbf{Z}(1)$ be such that $\left\{J\left(u^{(l)}\right)\right\}$ is bounded and $J'\left(u^{(l)}\right) \to 0$ as $l \to \infty$. Then there exists a positive constant M_2 such that $\left|J\left(u^{(l)}\right)\right| \leq M_2$.

Let $u^{(l)} = v^{(l)} + w^{(l)} \in V + W$. For l large enough, since

$$-\|u\| \leq \left\langle -J'\left(u^{(l)}\right), u\right\rangle = -\left\langle Pu^{(l)}, u\right\rangle + \sum_{n=1}^{k} f\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}, u_{n-1}^{(l)}\right) u_n,$$

in view of (F_1) and (F_3), we can write

$$\begin{aligned}\left\langle Pu^{(l)}, v^{(l)}\right\rangle &\leq \sum_{n=1}^{k} f\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}, u_{n-1}^{(l)}\right) v_n^{(l)} + \left\|v^{(l)}\right\| \\ &\leq 2M_0 \sum_{n=1}^{k} \left|v_n^{(l)}\right| + \left\|v^{(l)}\right\| \leq \left(2M_0\sqrt{k} + 1\right) \left\|v^{(l)}\right\|.\end{aligned}$$

On the other hand, we have $\langle Pu^{(l)}, v^{(l)}\rangle = \langle Pv^{(l)}, v^{(l)}\rangle \geq \lambda_{\min} \left\|v^{(l)}\right\|^2$. Therefore $\lambda_{\min} \left\|v^{(l)}\right\|^2 \leq (2M_0\sqrt{k}+1) \left\|v^{(l)}\right\|$, implying that $\{v^{(l)}\}$ is bounded.

Next, we show that $\{w^{(l)}\}$ is bounded. Since

$$M_2 \geq -J\left(u^{(l)}\right) = -\frac{1}{2}\left\langle Pu^{(l)}, u^{(l)}\right\rangle + \sum_{n=1}^{k} F\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}\right),$$

$$= -\frac{1}{2}\left\langle Pu^{(l)}, u^{(l)}\right\rangle + \sum_{n=1}^{k}\left[F\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}\right) - F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right)\right] + \sum_{n=1}^{k} F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right),$$

we get

$$\sum_{n=1}^{k} F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right)$$

$$\leq M_2 + \frac{1}{2}\left\langle Pv^{(l)}, v^{(l)}\right\rangle + \sum_{n=1}^{k}\left|F\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}\right) - F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right)\right|$$

$$\leq M_2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left\|v^{(l)}\right\|^2$$

$$+\sum_{n=1}^{k}\left|\frac{\partial F\left(n, w_{n+1}^{(l)} + \theta v_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)} + \theta v_n^{(l)}\right)}{\partial v_1}\cdot v_{n+1}^{(l)} + \frac{\partial F\left(n, w_{n+1}^{(l)} + \theta v_{n+1}^{(l)}, w_n^{(k)} + \theta v_n^{(l)}\right)}{\partial v_2}\cdot v_n^{(l)}\right|$$

$$\leq M_2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left\|v^{(l)}\right\|^2 + \sqrt{4k - 4\beta + \beta^2}M_0\left\|v^{(l)}\right\|,$$

where $\theta \in (0,1)$. It is easy to see that $\left\{\sum_{n=1}^{k} F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right)\right\}$ is bounded.

It follows from (F_4) that $\{w^{(l)}\}$ is bounded. If otherwise, we assume that $\|w^{(l)}\| \to +\infty$ as $l \to \infty$. Since there exist $z^{(l)} \in \mathbf{R}^k, l \in \mathbf{N}$, such that $w^{(l)} = (z^{(l)}, z^{(l)}, \cdots, z^{(l)})^* \in E_k$, then

$$\|w^{(l)}\| = \left(\sum_{n=1}^{k}\left|w_n^{(l)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{k}\left|z^{(l)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}|z^{(l)}| \to +\infty \text{ as } l \to \infty.$$

Since

$$F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right) = \begin{cases} F\left(n, z^{(l)}, z^{(l)}\right), \text{ when } n \in \mathbf{Z}(1,k), \\ F\left(n, -\beta z^{(l)}, z^{(l)}\right), \text{ when } n = k \end{cases}$$

then $F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right) \to +\infty$ as $l \to \infty$.

This contradicts the fact that $\left\{\sum_{n=1}^{k} F\left(n, w_{n+1}^{(l)}, w_n^{(l)}\right)\right\}$ is bounded. Lemma 2.4 is proved. □

Lemma 2.5. *Assume that the conditions (L_1), (F_1), (F_5) and (F_6) are satisfied.*

Then the functional J satisfies the (PS) condition.

Proof. It follows from (L_1) that P is positive definite. We denote by $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ its eigenvalues, and define

$$\bar{\lambda}_{\min} = \min\{\lambda_j | j \in \mathbf{Z}(1,k)\} > 0, \ \bar{\lambda}_{\max} = \max\{\lambda_j | j \in \mathbf{Z}(1,k)\} > 0. \tag{2.7}$$

Let $u^{(l)} \in \mathbf{R}^k$ and $l \in \mathbf{Z}(1)$ be such that $\left\{J\left(u^{(l)}\right)\right\}$ is bounded and $J'\left(u^{(l)}\right) \to 0$ as $l \to \infty$. Then there exists a positive constant M_3 such that $-M_3 \leq J\left(u^{(l)}\right) \leq M_3$, $\forall l \in \mathbf{N}$. By (1.13), we have

$$\begin{aligned}
-M_3 \leq J\left(u^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left\langle Pu^{(l)}, u^{(l)}\right\rangle - \sum_{n=1}^{k} F\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{\max}\left\|u^{(l)}\right\|^2 - c_3\sum_{n=1}^{k}\left[\sqrt{\left(u_{n+1}^{(l)}\right)^2 + \left(u_n^{(l)}\right)^2}\right]^{\sigma_1} + c_4 k \\
&\leq \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{\max}\left\|u^{(l)}\right\|^2 - c_3 k_1^{\sigma_1}\left\|u^{(l)}\right\|^{\sigma_1} + c_4 k.
\end{aligned}$$

This implies

$$c_3 k_1^{\sigma_1}\left\|u^{(l)}\right\|^{\sigma_1} - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{\max}\left\|u^{(l)}\right\|^2 \leq M_3 + c_4 k.$$

Since $\sigma_1 > 2$, there exists a constant $M_4 > 0$ such that

$$\left\|u^{(l)}\right\| \leq M_4, \ \forall l \in \mathbf{N}.$$

Therefore, $\left\{u^{(l)}\right\}$ is bounded on $\mathbf{R}^k$. As a consequence, $\left\{u^{(l)}\right\}$ possesses a convergent subsequence in $\mathbf{R}^k$. Thus the (PS) condition is satisfied. Lemma 2.5 is proved. □

Lemma 2.6. *Assume that the conditions (L_2), (F_1), (F_7) and (F_8) are satisfied. Then the functional J satisfies the (PS) condition.*

Proof. Let $u^{(l)} \in \mathbf{R}^k$, $l \in \mathbf{Z}(1)$ be such that $\left\{J\left(u^{(l)}\right)\right\}$ is bounded and $J'\left(u^{(l)}\right) \to 0$ as $l \to \infty$. Then there exists a positive constant M_5 such that $\left|J\left(u^{(l)}\right)\right| \leq M_5$. By (F_8'), for any $u^{(l)} \in E_k$ and $l \in \mathbf{Z}(1)$ we have

$$\begin{aligned}
-M_5 \leq J\left(u^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left\langle Pu^{(l)}, u^{(l)}\right\rangle - \sum_{n=1}^{k} F\left(n, u_{n+1}^{(l)}, u_n^{(l)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left\|u^{(l)}\right\|^2 - \sum_{n=1}^{k}\left\{\sigma_2\left[\left(u_{n+1}^{(l)}\right)^2 + \left(u_n^{(l)}\right)^2\right] - \gamma'\right\} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\lambda_{\max} - \sigma_2\right)\left\|u^{(l)}\right\|^2 + k\gamma' \leq k\gamma'.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}\right)\left\|u^{(l)}\right\|^2 \leq M_5 + k\gamma'.$$

Since $\sigma_2 > \frac{1}{2}\lambda_{\max}$, it is easy to see that $\{u^{(l)}\}$ is a bounded sequence in E_k. As a consequence, $\{u^{(l)}\}$ possesses a convergent subsequence in E_k, and the result follows. Lemma 2.6 is proved. □

3. Proofs of the main results

In this section, we prove our main results by using the critical point method.

Proof of Theorem 1.1. It follows from (L_1) that the matrix P is positive definite. Let $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ be the eigenvalues of P. Applying matrix theory, we have $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, k$. Without loss of generality, we may assume that

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k.$$

Then for any $u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)^* \in \mathbf{R}^k$ we have

$$\begin{aligned} J(u) &\ge \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - \|\eta\| \cdot \|u\| - c_1 \sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{u_{n+1}^2 + u_n^2}\right)^{r_1} - c_2 k \\ &\ge \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - \|\eta\| \cdot \|u\| - c_1 \sum_{n=1}^{k} [(1+|\beta|)\cdot\|u\| + \|u\|]^{r_1} - c_2 k \\ &\ge \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - \|\eta\| \cdot \|u\| - c_1 k(2+|\beta|)^{r_1}\|u\|^{r_1} - c_2 k \to +\infty \text{ as } \|u\| \to +\infty, \end{aligned}$$

which by (F_2) implies that J is bounded from below. From this, we conclude that a (PS) sequence must be bounded in $\mathbf{R}^k$. This means that $J(u)$ is coercive. By the continuity of $J(u)$, there exists $\bar{u} \in E_k$ such that $J(\bar{u}) = c_0$. Clearly, $\bar{u}$ is a critical point of J. This completes the proof of Theorem 1.1. □

Proof of Theorem 1.2. Observe first that by Lemma 2.4, J satisfies the (PS) condition. Next, we verify the conditions (J_1) and (J_2). For any $v \in V$, by (F_3') we have

$$\begin{aligned} -J(v) &= -\frac{1}{2}\langle Pv, v\rangle + \sum_{n=1}^{k} F(n, v_{n+1}, v_n) \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}\|v\|^2 + kM_1 + M_0\sum_{n=1}^{k}(|u_{n+1}| + |u_n|) \\ &\le -\tfrac{1}{2}\lambda_{\min}\|v\|^2 + kM_1 + \sqrt{4k - 4\beta + \beta^2}M_0\|v\| \to -\infty \text{ as } \|v\| \to +\infty, \end{aligned}$$

implying that the condition (J_1) is satisfied.

Next, for any $w \in W$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_k)^*$, there exists $z \in \mathbf{R}$ such that $w_n = z$ for all $n \in \mathbf{Z}(1, k)$. By (F_4), there exists a constant $R_0 > 0$ such that

$F(k,-\beta z,z) > 0$ and $F(n,z,z) > 0$ for $n \in \mathbf{Z}(1,k-1)$ and $|z| > R_0/\sqrt{2}$. Let $M_6 = \min\limits_{n\in \mathbf{Z}(1,k-1),|z|\le R_0/\sqrt{2}} \{F(n,z,z), F(k,-\beta z,z)\}$ and $M_7 = \min\{0, M_6\}$. Then

$$F(k,-\beta z,z) \ge M_7,\ F(n,z,z) \ge M_7,\ \forall (n,z,z) \in \mathbf{Z}(1,k-1) \times \mathbf{R}^2.$$

So, we have

$$-J(w) = \sum_{n=1}^{k} F(n, w_{n+1}, w_n) = \sum_{n=1}^{k-1} F(n,z,z) + F(k,-\beta z,z) \ge kM_7,\ \forall w \in W.$$

It can easily be seen that the functional $-J$ satisfies all the assumptions of Lemma 2.1, and the result follows. Theorem 1.2 is proved. □

Proof of Theorem 1.3. Since the matrix P (see (2.3)) is symmetric, its eigenvalues (denoted by $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$) are real, and without loss of generality, we may assume that $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k$. Therefore, for any $u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)^* \in \mathbf{R}^k$, we have

$$\begin{aligned} J(u) &\le \frac{1}{2}\lambda_k \|u\|^2 + \|\eta\| \cdot \|u\| - c_3 \sum_{n=1}^{k} \left[\sqrt{u_{n+1}^2 + u_n^2}\right]^{\sigma_1} + c_4 k \\ &\le \frac{1}{2}\lambda_k \|u\|^2 + \|\eta\| \cdot \|u\| - c_3 k_1^{\sigma_1} \|u\|^{\sigma_1} + c_4 k \to -\infty \ \text{ as } \|u\| \to +\infty. \end{aligned}$$

Due to the continuity of $J(u)$, the above inequality implies that there exist upper bounds of values of functional J. Classical calculus shows that J attains its maximal value at some point, which is just the critical point of J. Theorem 1.3 is proved. □

Proof of Theorem 1.4. First observe that by (F_6), for any $\epsilon = \frac{1}{4(\beta^2+2)}\tilde{\lambda}_{\min}$, where $\tilde{\lambda}_{\min}$ is defined in (2.7), there exists $\rho > 0$, such that

$$|F(n, v_1, v_2)| \le \frac{1}{4(\beta^2+2)} \tilde{\lambda}_{\min} \left(v_1^2 + v_2^2\right), \forall n \in \mathbf{Z}(1,k),$$

for $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \le \sqrt{2}\rho$.

Next, for any $u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)^* \in \mathbf{R}^k$ and $\|u\| \le \rho$, we have $|u_n| \le \rho$, $n \in \mathbf{Z}(1,k)$, and for $k > 2$ we can write

$$\begin{aligned} J(u) &\ge \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{\min}\|u\|^2 - \frac{1}{4(\beta^2+2)}\tilde{\lambda}_{\min} \sum_{n=1}^{k} \left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) \\ &\ge \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{\min}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\tilde{\lambda}_{\min}\|u\|^2 = \frac{1}{4}\tilde{\lambda}_{\min}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Taking $a \triangleq \frac{1}{4}\tilde{\lambda}_{\min}\rho^2 > 0$, we get $J(u) \ge a > 0$, $\forall u \in \partial B_\rho$. Observe also that there exist constants $a > 0$ and $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho} \ge a$. This implies that J satisfies the condition (J_3) of the Mountain Pass Lemma.

Clearly we have $J(0) = 0$, and in order to exploit the Mountain Pass Lemma in critical point theory, we need to verify that the other conditions of the Mountain Pass

Lemma are also satisfied. By Lemma 2.5, J satisfies the (PS) condition. So it remains to verify the condition (J_4).
From the proof of the (PS) condition it follows that $J(u) \leq \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{\max} \|u\|^2 - c_3 k_1^{\sigma_1} \|u\|^{\sigma_1} + c_4 k$. Since $\sigma_1 > 2$, we can choose $\bar{u}$ large enough to satisfy $J(\bar{u}) < 0$. By the Mountain Pass Lemma, J possesses a critical value $c \geq a > 0$, where $c = \inf_{h\in\Gamma} \sup_{s\in[0,1]} J(h(s))$ and $\Gamma = \{h \in C([0,1], \mathbf{R}^k) \mid h(0) = 0,\ h(1) = \bar{u}\}$.

Let $\tilde{u} \in \mathbf{R}^k$ be a critical point associated to the critical value c of J, that is, $J(\tilde{u}) = c$. Using the arguments of the proof of (PS) condition, we infer that there exists $\hat{u} \in \mathbf{R}^k$ such that $J(\hat{u}) = c_{\max} = \max_{s\in[0,1]} J(h(s))$.

Clearly, $\tilde{u} \neq 0$. If $\tilde{u} \neq \hat{u}$, then the conclusion of Theorem 1.4 holds. Otherwise, $\tilde{u} = \hat{u}$, and $c = J(\tilde{u}) = c_{\max} = \max_{s\in[0,1]} J(h(s))$. This implies $\sup_{u\in\mathbf{R}^k} J(u) = \inf_{h\in\Gamma} \sup_{s\in[0,1]} J(h(s))$. Therefore, $c_{\max} = \max_{s\in[0,1]} J(h(s))$ for any $h \in \Gamma$.
By the continuity of $J(h(s))$ with respect to s, $J(0) = 0$ and $J(\bar{u}) < 0$ imply that there exists $s_0 \in (0,1)$ such that $J(h(s_0)) = c_{\max}$. Choose $h_1,\ h_2 \in \Gamma$ such that $\{h_1(s) \mid s \in (0,1)\} \cap \{h_1(s) \mid s \in (0,1)\}$ is empty, then there exists $s_1,\ s_2 \in (0,1)$ such that $J(h_1(s_1)) = J(h_2(s_2)) = c_{\max}$. Thus, we get two different critical points of J on $\mathbf{R}^k$ denoted by $u^1 = h_1(s_1)$, $u^2 = h_2(s_2)$. The above arguments imply that the BVP (1.9) with (1.10) possesses at least two nontrivial solutions. Theorem 1.4 is proved. □

Proof of Theorem 1.5. By Lemma 2.6, J is bounded from above on E_k. We define $c_0 = \sup_{u\in E_k} J(u)$. The arguments of the proof of Lemma 2.6 imply $\lim_{\|u\|\to+\infty} J(u) = -\infty$. This means that $-J(u)$ is coercive. By the continuity of $J(u)$, there exists $\bar{u} \in E_k$ such that $J(\bar{u}) = c_0$. Clearly, $\bar{u}$ is a critical point of J.

Next, we claim that $c_0 > 0$. Indeed, by (F_7), for any $u \in V$, $\|u\| \leq \rho$, we have

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|u\|^2 - \tau_2 \sum_{n=1}^{k} \left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$$

$$\geq \left[\frac{1}{2}\lambda_{\min} - \left(\beta^2 + 2\right)\tau_2\right] \|u\|^2.$$

Taking $a = \left[\frac{1}{2}\lambda_{\min} - \left(\beta^2 + 2\right)\tau_2\right]\rho^2$, we have $J(u) \geq a$, $\forall u \in V \cap \partial B_\rho$. Therefore, we have proved that there exist constants $a > 0$ and $\rho > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap V} \geq a$. This implies that J satisfies the condition (J_5) of the Linking Theorem.

Noting that $Pu = 0$ for all $u \in W$, we have

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Pu, u\rangle - \sum_{n=1}^{k} F(n, u_{n+1}, u_n) = -\sum_{n=1}^{k} F(n, u_{n+1}, u_n) \leq 0.$$

Thus, the critical point $\bar{u}$ of J corresponding to the critical value c_0 is a nontrivial solution of the BVP (1.9) with (1.10).

It follows from Lemma 2.6 that J satisfies the (PS) condition on E_k. Now we are going to verify the condition (J_6).

We take $e \in \partial B_1 \cap V$, and for any $z \in W$ and $r \in \mathbf{R}$ we set $u = re + z$. Then we have

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle P(re+z), re+z\rangle - \sum_{n=1}^{k} F(n, re_{n+1} + z_{n+1}, re_n + z_n)$$

$$= \frac{1}{2}\langle P(re), re\rangle - \sum_{n=1}^{k}\left\{\sigma_2\left[(re_{n+1} + z_{n+1})^2 + (re_n + z_n)^2\right] - \gamma'\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\lambda_{\max} r^2 - \sigma_2 \sum_{n=1}^{k}(re_n + z_n)^2 + k\gamma'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda_{\max} - \sigma_2\right) r^2 - \sigma_2\|z\|^2 + k\gamma' \leq -\sigma_2\|z\|^2 + k\gamma'.$$

Thus, there exists a positive constant $R_2 > \delta$ such that for any $u \in \partial Q$, $J(u) \leq 0$, where $Q = (\bar{B}_{R_2} \cap W) \oplus \{re | 0 < r < R_2\}$. By the Linking Theorem, J possesses a critical value $c \geq \rho > 0$, where $c = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in Q} J(h(u))$ and $\Gamma = \{h \in C(\bar{Q}, E_k) \mid h|_{\partial Q} = id\}$.

Let $\tilde{u} \in E_k$ be a critical point associated to the critical value c of J, that is, $J(\tilde{u}) = c$. If $\tilde{u} \neq \bar{u}$, then the conclusion of Theorem 1.5 holds. Otherwise, $\tilde{u} = \bar{u}$. Then $c_0 = J(\bar{u}) = J(\tilde{u}) = c$, that is, $\sup\limits_{u\in E_k} J(u) = \inf\limits_{h\in\Gamma}\sup\limits_{u\in Q} J(h(u))$. Choosing $h = id$, we have $\sup\limits_{u\in Q} J(u) = c_0$. Since the choice of $e \in \partial B_1 \cap V$ is arbitrary, we can take $-e \in \partial B_1 \cap V$. Similarly, there exists a positive number $R_3 > \sigma$, such that for any $u \in \partial Q_1$ we have $J(u) \leq 0$, where $Q_1 = (\bar{B}_{R_3} \cap W) \oplus \{-re | 0 < r < R_3\}$.

Again applying Lemma 2.3, we conclude that J possesses a critical value $c' \geq \rho > 0$, where $c' = \inf_{h\in\Gamma_1}\sup_{u\in Q_1} J(h(u))$, and $\Gamma_1 = \{h \in C(\bar{Q}_1, E_k) \mid h|_{\partial Q_1} = id\}$.

If $c' \neq c_0$, then the proof is finished. If $c' = c_0$, then $\sup\limits_{u\in Q_1} J(u) = c_0$. Due to the inequalities $J|_{\partial Q} \leq 0$ and $J|_{\partial Q_1} \leq 0$, J attains its maximum at some points in the interiors of the sets Q and Q_1. However, $Q \cap Q_1 \subset W$ and $J(u) \leq 0$ for any $u \in W$. Therefore, there exists a point $u' \in E_k$ such that $u' \neq \tilde{u}$ and $J(u') = c' = c_0$. This completes the proof of Theorem 1.5. □

4. Examples

In this section we give two examples that illustrate our results obtained in Theorems 1.4 and 1.5.

Example 4.1. For $n \in \mathbf{Z}(1,k)$ consider the BVP:

$$-u_{n+1} - u_{n-1} + 3u_n = \sigma_1 u_n \left[\varphi(n)\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)^{\frac{\sigma_1}{2}-1} + \varphi(n-1)\left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right)^{\frac{\sigma_1}{2}-1}\right] \tag{4.1}$$

with boundary value conditions

$$u_0 + \alpha u_1 = 0, \; u_{k+1} + \beta u_k = 0, \tag{4.2}$$

where $\sigma_1 > 2$, $\alpha > -2$ and $\beta > -2$, $\varphi(s)(s \in \mathbf{R})$ is continuously differentiable and $\varphi(n) > 0$ with $\varphi(0) = 0$. It is easy to check that all the conditions of Theorem 1.4 are satisfied, and hence the BVP (4.1) with (4.2) possesses at least two nontrivial solutions.

Example 4.2. For $n \in \mathbf{Z}(1,k)$ consider the BVP:

$$-6u_{n+1} - 6u_{n-1} + 12u_n = \mu u_n \left[n^2\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)^{\frac{\mu}{2}-1} + (n-1)^2\left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right)^{\frac{\mu}{2}-1}\right] \tag{4.3}$$

with boundary value conditions

$$u_0 + \alpha u_1 = 0, \; u_{k+1} + \beta u_k = 0, \tag{4.4}$$

where $\mu > 2$, $\alpha = \beta = -1$. It is easy to verify that all conditions of Theorem 1.5 are satisfied, and hence the BVP (4.3) with (4.4) possesses at least two nontrivial solutions.

References

[1] R. P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. Marcel Dekker, New York (1992).

[2] C. D. Ahlbrandt, "Dominant and recessive solutions of symmetric three term recurrences J. Differential Equations, 107(2), 238-256 (1994).

[3] V. Anuradha, C. Maya, R. Shivaji, "Positive solutions for a class of nonlinear boundary value problems with Neumann-Robin boundary conditions J. Math. Anal. Appl., 236(1), 94-124 (1999).

[4] D. Arcoya, "Positive solutions for semilinear Dirichlet problems in an annulus J. Differential Equations, 94(2), 217-227 (1991).

[5] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, "On the monotonicity property for a certain class of second order differential equations J. Differential Equations, 82(1), 15-27 (1989).

[6] S.Z. Chen, "Disconjugacy, disfocality, and oscillation of second order difference equations J. Differential Equations, 107(2), 383-394 (1994).

[7] P. Chen, H. Fang, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order p-Laplacian difference equations Adv. Difference Equ., 2007, 1-9 (2007).

[8] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equation. Springer, New York (1996).

[9] P. Eloe, "A boundary value problem for a system of difference equations Nonlinear Anal., 7(8), 813-820 (1983).
[10] Z.M. Guo, J.S. Yu, "Applications of critical point theory to difference equations Fields Inst. Commun., 42, 187-200 (2004).
[11] Z.M. Guo, J.S. Yu, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations Sci. China Math, 46(4),506-515 (2003).
[12] Z.M. Guo, J.S. Yu, "The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations J. London Math. Soc., 68(2), 419-430 (2003).
[13] J.K. Hale, J. Mawhin, "Coincidence degree and periodic solutions of neutral equations J. Differential Equations, 15(2), 295-307 (1974).
[14] J. Henderson, H.B. Thompson, "Existence of multiple solutions for second-order discrete boundary value problems Comput. Math. Appl., 43(10-11), 1239-1248 (2002).
[15] W.G. Kelly, A. C. Peterson, Difference Equations: An Introduction with Applications. Academic Press, New York (1991).
[16] V. L. Kocic, G. Ladas, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993).
[17] V.A. Marchenko, Sturm-Liouville operators and applications. Birkhäuser, Basel (1986).
[18] H. Matsunaga, T. Hara, S. Sakata, "Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay Computers Math. Appl., 41(5-6), 543-551 (2001).
[19] J. Mawhin, M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, New York (1989).
[20] R.E. Mickens, Difference Equations: Theory and Application. Van Nostrand Reinhold, New York (1990).
[21] A. Pankov A, N. Zakharchenko, "On some discrete variational problems Acta Appl. Math., 65(1-3), 295-303 (2001).
[22] A. Peterson, "Boundary value problems for an nth order linear difference equations SIAM J. Math. Anal., 15(1), 124-132 (1984).
[23] P.H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Amer. Math. Soc., Providence RI, New York (1986).
[24] Y. Rodrigues, "On nonlinear discrete boundary value problems J. Math. Anal. Appl., 114(2), 398-408 (1986).
[25] A.N. Sharkovsky, Y.L. Maistrenko, E.Y. Romanenko, Difference Equations and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993).
[26] D. Smets, M. Willem, "Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices J. Funct. Anal., 149(1), 266-275 (1997).
[27] G. Teschl, Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Amer. Math. Soc., Providence RI, New York (2000).
[28] H. Wang, "On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in annulus J. Differential Equations, 109(1), 1-7 (1994).
[29] J.S. Yu, Z.M. Guo, "Boundary value problems of discrete generalized Emden-Fowler equation Sci. China Math, 49(10), 1303-1314 (2006).
[30] J.S. Yu, Z.M. Guo, "On boundary value problems for a discrete generalized Emden-Fowler equation J. Differential Equations, 231(1), 18-31 (2006).
[31] W.M. Zou, M. Schechter, Critical Point Theory and Its Applications. Springer, New York (2006).
[32] Z. Zhou, J.S. Yu, Y.M. Chen, "Periodic solutions of a $2n$th-order nonlinear difference equation Sci. China Math, 53(1), 41-50 (2010).
[33] Z. Zhou, J.S. Yu, Y.M. Chen, "Homoclinic solutions in periodic difference equations with saturable nonlinearity Sci. China Math, 54(1), 83-93 (2011).

Поступила 8 августа 2012

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 48

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
серия Математика

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 48

1300др.

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 48, No. 6, 2013

CONTENTS

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 48, номер 6, 2013

СОДЕРЖАНИЕ