

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2013

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

О РЯДАХ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: ggg@ysu.am

Аннотация. Доказывается, что если допустимая последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная или квазидвоичная и слабо регулярная, то оператор Пэли по соответствующей общей системе Франклина имеет слабый тип $(1, 1)$. Приводятся примеры общих систем Франклина с некоторыми свойствами.

MSC2010 number: 42C15; 42C25.

Ключевые слова: Общая система Франклина; оператор Пэли.

1. ВВЕДЕНИЕ

Определение 1.1. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0; 1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0; 1]$ и каждая точка $t \in (0; 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Через S_n обозначим пространство функций определенных на $[0; 1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n , если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Очевидно, что $\dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Поэтому существует единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} , $\|f\|_2 = 1$ и $f(t_n) > 0$. Эту функцию называют n -ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Определение 1.2. Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$ и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n -ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Начиная с работы [1] исследуется общая система Франклина. В [1] доказано, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции f , то

$$|S_n(x)| \leq C \cdot M(f, x),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k f_k(x)$ частичная сумма ряда Фурье, а $M(f, x)$ максимальная функция Харди-Литтлвуда функции f .

Далее в работах [2]-[8] исследованы свойства общей системы Франклина в зависимости от свойств разбиения $\mathcal{T}$. Приведем необходимые определения.

Определение 1.3. Последовательность $\mathcal{T}$ называется квазидвоичной, если $t_{2^k+1} < t_{2^k+2} < \dots < t_{2^{k+1}}$ и между двумя соседними точками из $\{t_n : 0 \leq n \leq 2^k\}$ находится по одной точке из $\{t_n : 2^k < n \leq 2^{k+1}\}$.

Когда последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоичная, для $n = 2^k + \nu$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^k$, обозначим $[n] = k$ и назовем рангом числа n .

Определение 1.4. Последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной, если существует постоянная $\gamma > 1$, такая что

$$\gamma^{-1} < \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n} < \gamma, \quad \text{для } n = 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Если в последовательности π_n точкой t_n является точка τ_i^n , то обозначаются $t_n^- = \tau_{i-1}^n$ и $t_n^+ = \tau_{i+1}^n$. Иными словами для фиксированного n через t_n^- и t_n^+ обозначаются ближайшие к t_n точки из $\mathcal{T}_{n-1}$, соответственно, слева и справа. Интервалы $(t_n^-; t_n)$ и $(t_n; t_n^+)$ назовем смежными.

Определение 1.5. Последовательность $\mathcal{T}$ называется слабо регулярной, если существует постоянная $\gamma > 1$, такая что

$$\gamma^{-1} < \frac{t_n^+ - t_n}{t_n - t_n^-} < \gamma, \quad \text{для } n = 2, 3, \dots$$

Иными словами последовательность $\mathcal{T}$ слабо регулярна, если отношение длин смежных интервалов снизу и сверху ограничен числами $1/\gamma$ и γ .

Отметим, что если последовательность $\mathcal{T}$ двоичная, т.е. $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то соответствующая система Франклина есть классическая система Франклина [9].

Классическая система Франклина исследовалась многими авторами. Подробный обзор этих результатов можно найти в работе [10]. Мы приведем только те, которые непосредственно касаются рассмотренных здесь вопросов.

Мажоранту частных сум и функцию Пэли ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ обозначим, соответственно, через

$$S^*(x) = \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| \quad \text{и} \quad P(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Каждой интегрируемой функции f сопоставляя мажоранту частных сум и функцию Пэли ее ряда Фурье-Франклина, получим два оператора S^*f и Pf действующие в пространстве $L_1[0; 1]$, т.е. когда $a_n = a_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x) dx$, то

$$S^*f(x) = \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n(f) f_n(x) \right| \quad \text{и} \quad Pf(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

С. В. Бочкаревым [11] доказано, что классическая система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$. Для этого он доказал, что в случае классической системы Франклина оператор Пэли имеет слабый тип $(1, 1)$.

Говорят, что оператор T имеет сильный тип $(p; p)$ если существует такая постоянная M_p , что для любой функции $f \in L_p[0; 1]$ выполняется

$$\|Tf\|_p \leq M_p \|f\|_p.$$

А если для любых $f \in L_p$ и $\lambda > 0$ выполняется

$$\mu\{x \in [0; 1] : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{M_p}{\lambda^p} \|f\|_p^p,$$

то говорят, что оператор T имеет слабый тип $(p; p)$. Очевидно, что если оператор T имеет сильный тип $(p; p)$, то он имеет также слабый тип $(p; p)$. В силу известной теоремы Марцинкевича, если сублинейный оператор T имеет слабый тип $(p_1; p_1)$ и $(p_2; p_2)$, где $p_1 < p_2$, то этот оператор имеет сильный тип $(p; p)$, для каждого $p \in (p_1; p_2)$.

В работе [2] доказано, что если последовательность T квазидвоичная и слабо регулярная, то соответствующая ей общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$. Затем безусловная базисность общей системы Франклина в пространствах $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$, при более слабом предположении чем слабая регулярность (при условии квазидвоичности)

последовательности $\mathcal{T}$ была доказана в работе [4]. И наконец в работе [5] была доказана безусловная базисность общей системы Франклина в пространствах $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$, для любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$. При этом в работах [2], [4], [5] не доказывалось, что оператор Pf имеет слабый тип $(1; 1)$. Недавно, в работе [12] было доказано, что если последовательность $\mathcal{T}$ квазидиадическая и сильно регулярная, то оператор Пэли по соответствующей общей системе Франклина имеет слабый тип $(1; 1)$. В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1.1. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоична и слабо регулярна с параметром γ , а $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда оператор Пэли по системе $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет слабый тип $(1; 1)$, т.е. существует постоянная M_γ , такая что для любого $f \in L_1[0; 1]$ имеет место

$$\mu \left\{ x \in [0; 1] : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} > \lambda \right\} \leq M_\gamma \frac{\|f\|_1}{\lambda} \quad \text{для любого } \lambda > 0.$$

Теорема 1.2. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярна, а $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда оператор Пэли по системе $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет слабый тип $(1; 1)$.

Для классической системы Франклина известно (см. [14]–[18]), что $S^*(x) \in L_p[0; 1]$, $0 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $P(x) \in L_p[0; 1]$. В работе [2] доказано, что аналогичное утверждение верно также в случае когда общая система Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствует некоторому сильно регулярному и квазидвоичному разбиению $\mathcal{T}$.

В работе [20] доказано, что при любой последовательности $\mathcal{T}$ из $P(x) \in L_1[0; 1]$ следует $S^*(x) \in L_1[0; 1]$. Об обратном утверждении, т.е. что из $S^*(x) \in L_1[0; 1]$ следует $P(x) \in L_1[0; 1]$, известно, что оно верно при сильно регулярной последовательности $\mathcal{T}$ (см. [20]). Для других допустимых разбиений не известно следует ли из $S^*(x) \in L_1[0; 1]$, что $P(x) \in L_1[0; 1]$.

В работе М. П. Погосяна [3] доказано, что если последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоична и сильно регулярна, а $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина, тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ на множестве E почти всюду (п.в.) сходится, тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E . Ранее в работе

[13] аналогичная теорема была доказана для классической системы Франклина. В последнем разделе приводится пример сильно регулярной последовательности $\mathcal{T}$ такой, что если $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина, то существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, который п.в. расходится, но $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на $[0; 1]$. Приводится также пример квазидвоичной последовательности $\mathcal{T}$ с аналогичным свойством. Тем самым указывается на важность одновременного требования сильной регулярности и квазидвоичности последовательности $\mathcal{T}$ в теореме М. П. Погосяна.

Введем следующие обозначения.

Через $C, C_1, C_\gamma, \dots$, обозначаются постоянные, зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$. $\rho(t, I)$ – расстояние между точкой t и интервалом I , и вообще $\rho(A, B)$ – расстояние между множествами A и B , т.е. $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$.

Через $d_n(t)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точками t_n и t . А через $d_n(A)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точкой t_n и множеством A .

Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C , такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные зависят от γ .

Через $\chi_A(x)$ обозначается характеристическая функция множества A , а через $\mu(A)$ – лебегова мера множества A , A^c – дополнение множества A .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Лемма 2.1. Для любого $\theta \in (0; 1)$ существует $C_\theta > 0$ такая, что для любых $\sigma_i \geq 0$ выполняется неравенство:

$$\sum_{n=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \sigma_j \theta^{|n-j|} \right)^2 \leq C_\theta \left(\sum_{j=1}^m \sigma_j \right)^2.$$

Доказательство. Очевидно

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \sigma_j \theta^{|n-j|} \right)^2 = \sum_{n=1}^m \left(\sum_{j,k=1}^m \sigma_j \sigma_k \theta^{|n-j|+|n-k|} \right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^m \sigma_j \sigma_k \left(\sum_{n=1}^m \theta^{|n-j|+|n-k|} \right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{n=1}^m \theta^{|n-j|+|n-k|} \leq \sum_{n=1}^m \theta^{|n-j|} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{2}{1-\theta}.$$

Следовательно, вместе с (2.1) получим

$$\sum_{n=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \sigma_j \theta^{|n-j|} \right)^2 \leq C_\theta \sum_{j,k=1}^m \sigma_j \sigma_k = C_\theta \left(\sum_{j=1}^m \sigma_j \right)^2.$$

□

Семейство интервалов линейности первых $n+1$ функций $\{f_k(x)\}_{k=0}^n$ обозначим через J_n . Ясно, что интервалы семейства J_n получаются разбиением отрезка $[0; 1]$ точками J_n . Обозначим также $J = \bigcup_{n \geq 1} J_n$.

Лемма 2.2. Пусть последовательность J сильно регулярная с параметром γ и интервалы I, I_1 с общим концом α принадлежат некоторому J_{n_1} . Тогда, если $I_k \in J_{n_k}$, $k = 1, \dots, m$, различные интервалы, с общим концом α , $I_k \subset I_{k-1}$ и $I \in J_{n_m}$, то $m \leq C_\gamma$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$|I_m| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} |I_{m-1}| \leq \dots \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{m-1} |I_1|,$$

$$\frac{1}{\gamma} |I| \leq |I_m| \quad \text{и} \quad |I_1| \leq \gamma |I|.$$

Поэтому

$$\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{m-1} \geq 1.$$

Отсюда $(m+1) \ln \gamma \geq (m-1) \ln(\gamma+1)$ или $m \ln(1+\gamma^{-1}) \leq \ln(\gamma^2 + \gamma)$. □

В исследованиях общей системы Франклина важную роль играют интервалы J_n и Δ_n связанные с функцией f_n . Для определения этих интервалов напомним, что при определении слабой регулярности мы определяли точки t_n^- и t_n^+ как ближайшие к t_n точки из J_{n-1} , соответственно, слева и справа. Тогда

обозначим через Δ_n интервал $(t_n^-; t_n^+)$. Известно, что функция $|f_n(x)|$ достигает наибольшего значения на $[t_n^-; t_n^+]$. Поэтому интервал Δ_n называют интервалом пика функции f_n . Определим еще точки t_n^{--} и t_n^{++} как точки из J_{n-1} , соответственно, ближайšie к t_n^- слева и к t_n^+ справа. Тогда, если $t_n = \tau_i^n$, то $t_n^{--} = \tau_{i-2}^n$, $t_n^- = \tau_{i-1}^n$, $t_n^+ = \tau_{i+1}^n$ и $t_n^{++} = \tau_{i+2}^n$. Из интервалов $[\tau_{i-2}^n; \tau_i^n]$, $[\tau_{i-1}^n; \tau_{i+1}^n]$, $[\tau_i^n; \tau_{i+2}^n]$ тот, который имеет наименьшую длину обозначим $I^* = [\tau_i^n; \tau_{i+2}^n]$. Интервал J_n один из интервалов $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$ и $[\tau_{i+1}^n; \tau_{i+2}^n]$ с условием, что $|J_n| = \max(|[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]|, |[\tau_{i+1}^n; \tau_{i+2}^n]|)$.

Очевидно, что если последовательность слабо регулярна, то $|J_n| \sim_\gamma |\Delta_n|$. Поэтому, ради удобства, в оценках полученных в работах [2], [5] для функций f_n мы можем J_n заменить на Δ_n .

Приведем нужные нам оценки. Обозначим $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i+1}^n$. Тогда выполняются (см. [2] стр. 12)

$$(2.2) \quad |f_n(\tau_{i-1}^n)|(1, 5\lambda_{i-1}^n + 2\lambda_i^n) \leq |f_n(\tau_i^n)|\lambda_i^n \leq 2|f_n(\tau_{i-1}^n)|(\lambda_{i-1}^n + \lambda_i^n),$$

когда $\tau_i^n < t_n$, и

$$(2.3) \quad |f_n(\tau_{i+1}^n)|(1, 5\lambda_{i+2}^n + 2\lambda_{i+1}^n) \leq |f_n(\tau_i^n)|\lambda_{i+1}^n \leq 2|f_n(\tau_{i+1}^n)|(\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n),$$

когда $\tau_i^n > t_n$.

В работах [2] и [5] из неравенств (2.2), (2.3) выведены некоторые следствия.

Во первых, существует такая постоянная C_γ , что для всех n

$$(2.4) \quad |f_n(x)| \leq C_\gamma q^{d_n(\delta)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_n| + \rho(\delta, \Delta_n) + |\delta|} \quad \text{когда } x \in \delta,$$

где δ любой интервал линейности функции f_n , а q здесь и далее равно $\frac{2}{3}$. Далее

$$|f_n(\tau_{i-1}^n)| \leq q|f_n(\tau_i^n)| \quad \text{когда } \tau_i^n < t_n,$$

$$(2.5) \quad |f_n(\tau_{i+1}^n)| \leq q|f_n(\tau_i^n)| \quad \text{когда } \tau_i^n > t_n.$$

Для любого $p \in [1; \infty)$ и некоторого $\epsilon \in (0; 1)$ имеют место

$$(2.6) \quad \int_{\tau_{i-2}^n}^{\tau_{i-1}^n} |f_n(x)|^p dx \leq \epsilon^p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |f_n(x)|^p dx \quad \text{если } \tau_i^n < t_n,$$

$$(2.7) \quad \int_{\tau_{i+1}^n}^{\tau_{i+2}^n} |f_n(x)|^p dx \leq \epsilon^p \int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |f_n(x)|^p dx \quad \text{если } \tau_i^n > t_n,$$

$$(2.8) \quad \int_0^x |f_n(x)|^p dx \leq C_{p,\gamma} q^{d_n(x)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{p}{2}}}{(|\Delta_n| + \rho(x, \Delta_n))^{p-1}}, \quad \text{когда } x < t_n,$$

$$\int_x^1 |f_n(x)|^p dx \leq C_{p,\gamma} q^{d_n(x)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{p}{2}}}{(|\Delta_n| + \rho(x, \Delta_n))^{p-1}}, \quad \text{когда } x > t_n$$

и

$$(2.9) \quad \|f_n\|_{L_p(\Delta_n)} \sim_\gamma \|f_n\|_p \sim_\gamma |\Delta_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad \text{когда } 1 \leq p \leq \infty.$$

Когда последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоична, рангом интервала Δ_n назовем ранг числа n . Напомним, что ранг числа $n = 2^k + \nu$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^k$, есть k и обозначили $[n] = k$. Положим $[\Delta_n] = k$.

Пусть $I = [\alpha; \beta]$ и $I \in \mathcal{I}$. Обозначим $n_0 = \min\{n : t_n \in (\alpha; \beta)\}$. Это означает, что $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_{n_0}$ и t_{n_0} единственная точка из $(\alpha; \beta)$ принадлежащая $\mathcal{T}_{n_0}$. Далее, пусть функция $g \in L_1$ такая, что

$$(2.10) \quad g(x) = 0, \quad \text{когда } x \notin I, \quad \int_I g(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_I x g(x) dx = 0.$$

Из (2.10) следует, что

$$a_n(g) = \int_0^1 g(x) f_n(x) dx = 0, \quad \text{когда } n < n_0.$$

Ниже мы докажем несколько лемм для функции g для сильно регулярной или квазидвоичной и слабо регулярной последовательности $\mathcal{T}$.

Для удобства формулировки лемм, обозначим $\alpha' = t_{n_0}^-$ и $\beta' = t_{n_0}^{++}$.

Лемма 2.3. (первая основная лемма) Если последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоичная и слабо регулярная с параметром γ , то

$$\int_{I_\gamma^c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1},$$

где I_γ интервал длины $(2\gamma + 1)|I|$ и концентрический с I , а I_γ^c его дополнение.

Доказательство этой леммы разобьем на несколько лемм.

Лемма 2.4. Для квазидвоичной и слабо регулярной с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ верно неравенство

$$\sum_{n: \Delta_n \subset I} \int_{I_\gamma^c} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $I_\gamma = (\alpha_\gamma; \beta_\gamma)$. Докажем, что

$$(2.11) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset I} \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1},$$

$$(2.12) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset I} \int_{\beta_\gamma}^1 a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Поскольку эти неравенства доказываются аналогично, мы докажем только (2.11).

Возможны два случая

Первый случай. $\alpha' \notin (\alpha_\gamma; \alpha)$.

Второй случай. $\alpha' \in (\alpha_\gamma; \alpha)$.

В первом случае $\alpha - \alpha' > \gamma |I|$. Пусть $[n_0] = k_0$. Обозначим $\Lambda_0 = (\alpha'; \alpha)$. Тогда $\alpha_\gamma \in \Lambda_0$ и $[\Lambda_0] = k_0$. Пусть $\Lambda_i \in \mathcal{J}$, $\Lambda_{i+1} \subset \Lambda_i$, $[\Lambda_{i+1}] = [\Lambda_i] + 1$ и точка α для всех является правым концом. Тогда в силу квазидвоичности и слабой регулярности с параметром γ последовательности $\mathcal{J}$, имеем

$$(2.13) \quad \frac{1}{\gamma+1} |\Lambda_i| \leq |\Lambda_{i+1}| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} |\Lambda_i|.$$

Пусть p такое, что

$$(2.14) \quad \alpha_\gamma \in \Lambda_{p-1} \quad \text{и} \quad \alpha_\gamma \notin \Lambda_p.$$

Обозначим

$$\Gamma_1 = \{n : [n_0] \leq [n] \leq [n_0] + p \quad \text{и} \quad \Delta_n \subset I\}.$$

Докажем, что

$$(2.15) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} \sum_{n \in \Gamma_1} a_n^2(g) f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Рассмотрим $D_m = \{n : [n] = m, \Delta_n \subset I\}$, $m \geq k_0$. Для фиксированного m интервалы Δ_n , $n \in D_m$, не пересекаются и $\bigcup_{n \in D_m} \Delta_n = I$. Обозначим $\sigma_i = \int_{\Delta_i} |g(x)| dx$, $i \in D_m$. Тогда, в силу (2.4),

$$|a_n(g)| \leq \sum_{i \in D_m} \int_{\Delta_i} |f_n(x) g(x)| dx \leq C_\gamma |\Delta_n|^{-1/2} \sum_{i \in D_m} q^{d_n(\Delta_i)} \sigma_i,$$

и поэтому

$$(2.16) \quad a_n^2(g) \leq C_\gamma |\Delta_n|^{-1} \left(\sum_{i \in D_m} q^{d_n(\Delta_i)} \sigma_i \right)^2.$$

Пусть $\Delta_n \subset I$ и $[n] = m = [n_0] + j$, $0 \leq j \leq p$. Тогда из (2.16) и неравенства (см. (2.4))

$$|f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{d_n(\Delta_j)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \Delta_j) + |\Delta_j|}, \quad \text{когда } x \in \Delta_j,$$

получим (см. также (2.6))

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2(g) f_n^2(x) dx &\leq C \cdot \int_{\Delta_j} a_n^2(g) f_n^2(x) dx \\ &\leq C_\gamma \left(\sum_{i \in D_m} \sigma_i q^{d_n(\Delta_i)} \right)^2 \cdot q^{2d_n(\Delta_j)} \frac{|\Delta_j|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \Delta_j) + |\Delta_j|)^2} \\ &\leq C_\gamma \left(\sum_{i \in D_m} \sigma_i q^{d_n(\Delta_i)} \right)^2 |\Delta_j|^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. также лемму 2.1)

$$\begin{aligned} (2.17) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} \sum_{n: \Delta_n \subset I, [n]=m} a_n^2(g) f_n^2(x) dx \\ \leq C_\gamma \sum_{n: \Delta_n \subset I, [n]=m} \left(\sum_{i \in D_m} \sigma_i q^{d_n(\Delta_i)} \right)^2 |\Delta_j|^{-1} \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |\Delta_j|^{-1}. \end{aligned}$$

Из (2.13) и (2.14) следует $\sum_{j=0}^p |\Delta_j|^{-1} \leq C_\gamma |\Lambda_p|^{-1} \leq C_\gamma |I|^{-1}$, которая вместе с (2.17) дает (2.15).

Сумма

$$\sum_{m > k_0 + p} \int_0^{\alpha_\gamma} \sum_{n: \Delta_n \subset I, [n]=m} a_n^2(g) f_n^2(x) dx$$

оценивается аналогично второму случаю.

Второй случай. Пусть $\delta_m \in \mathcal{I}_{2^m}$, т.е. ранга m , и $\alpha_\gamma \in \delta_m$. Очевидно, что $\delta_m \supset \delta_{m+1}$ и $|\delta_{m+1}| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} |\delta_m|$. Применением (2.4) и (2.7) получаем

$$(2.18) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \frac{|\Delta_n| |\delta_m|}{(|\Delta_n| + \rho(\delta_m, \Delta_n) + |\delta_m|)^2} q^{2d_n(\alpha_\gamma)}.$$

Заметим, что $d_n(\alpha_\gamma) \geq 2^{m-k_0}$. Из (2.16), (2.18) следует

$$(2.19) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \left(\sum_{i \in D_m} q^{d_n(\Delta_i)} \sigma_i \right)^2 \frac{|\delta_m|}{\alpha - \alpha_\gamma} \quad \text{когда } n \in D_m.$$

Применяя лемму 2.1 и (2.19), получаем

$$(2.20) \quad \sum_{n \in D_m} \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 \frac{|\delta_m|}{\alpha - \alpha_\gamma}.$$

Суммируя (2.20) по m и учитывая, что $\sum_m |\delta_m| < C_\gamma$, получим (2.11). $\square$

Лемма 2.5. Для квазидвоичной и слабо регулярной с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ верны следующие неравенства

$$(2.21) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (0; \alpha_\gamma)} \int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1},$$

$$\sum_{n: \Delta_n \subset (\beta_\gamma; 1)} \int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Доказательство. Учитывая, что эти неравенства доказываются аналогично, мы докажем только первое. Для $\Delta_n \subset (0; \alpha_\gamma)$ из (2.4) имеем

$$|a_n| \leq C_\gamma \|g\|_1 q^{d_n(I)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \alpha)}.$$

Поэтому (см. (2.9))

$$\int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 q^{d_n(I)} \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \alpha))^2} \quad \text{для } \Delta_n \subset (0; \alpha_\gamma).$$

Следовательно

$$(2.22) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (0; \alpha_\gamma)} \int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx$$

$$\leq C_\gamma \|g\|_1^2 \sum_{n: \Delta_n \in (0; \alpha_\gamma)} q^{d_n(I)} \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \alpha))^2}$$

$$\leq C_\gamma \|g\|_1^2 \sum_{\nu} q^{\nu} \sum_{n: \Delta_n \in (0; \alpha_\gamma), d_n(I) = \nu} \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \alpha))^2}.$$

В силу квазидвоичности последовательности $\mathcal{T}$ имеем, что если $d_n(I) = d_{n'}(I)$ и $n \neq n'$, то $\Delta_n \cap \Delta_{n'} = \emptyset$. Поэтому

$$\sum_{n: \Delta_n \in (0; \alpha_\gamma), d_n(I) = \nu} \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, \alpha))^2} \leq C_\gamma \int_{\alpha - \alpha_\gamma}^1 \frac{1}{t^2} dt \leq C_\gamma |I|^{-1},$$

которая вместе с (2.22) дают (2.21). □

Лемма 2.6. Для квазидвоичной и слабо регулярной с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ выполняются неравенства

$$(2.23) \quad \sum_{n: \Delta_n \ni \alpha_\gamma} \int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1},$$

$$(2.24) \quad \sum_{n: \Delta_n \ni \beta_\gamma} \int_{I_\gamma^*} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Доказательство. Пусть n такое, что $\alpha_\gamma \in \Delta_n$. Тогда (см. (2.4))

$$|a_n| \leq C_\gamma \|g\|_1 \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{d_n(I)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I)}.$$

Следовательно, имеем

$$(2.25) \quad \sum_{n: \Delta_n \ni \alpha_\gamma} a_n^2 q^{-d_n(I)} \leq C_\gamma \|g\|_1^2 \sum_{n: \Delta_n \ni \alpha_\gamma} \frac{|\Delta_n| q^{d_n(I)}}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I))^2}.$$

Ясно, что интервалы Δ_n , с условием $\alpha_\gamma \in \Delta_n$ вложены и их длины убывают как геометрическая прогрессия. Убедимся, что

$$(2.26) \quad \sum_{n: \Delta_n \ni \alpha_\gamma} \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I))^2} \leq C_\gamma |I|^{-1}.$$

Эту сумму разобьем на две части, сумма по таким n , что α является правым концом Δ_n и сумма по остальным n . В первом случае, учитывая убывание длин $|\Delta_n|$ со скоростью геометрической прогрессии, получаем

$$\sum \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I))^2} \leq \sum \frac{1}{|\Delta_n|} \leq C_\gamma |I|^{-1}.$$

Во втором случае, пусть $\eta = \min\{|\Delta_n| : \alpha_\gamma \in \Delta_n \text{ и } \alpha \text{ правый конец } \Delta_n\}$. Тогда, в силу квазидвоичности и слабой регулярности $\mathcal{T}$, имеем $\eta \sim_\gamma (\alpha - \alpha_\gamma)$ и $\sum |\Delta_n| \sim_\gamma |I|$. Поэтому

$$\sum \frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I))^2} \leq C_\gamma |I|^{-2} \sum |\Delta_n| \leq C_\gamma |I|^{-1},$$

которое вместе с (2.26) и (2.25) доказывает (2.23). Неравенство (2.24) доказывается аналогично. $\square$

Лемма 2.7. Для квазидвоичной и слабо регулярной с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ выполняются неравенства

$$(2.27) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha_\gamma, \alpha)} \int_{I_\gamma^2} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1},$$

$$(2.28) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\beta, \beta_\gamma)} \int_{I_\gamma^2} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Доказательство. Для $\Delta_n \subset (\alpha_\gamma, \alpha)$ имеем (см. (2.4))

$$(2.29) \quad |a_n| \leq C_\gamma \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{d_n(I)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I)} \|g\|_1.$$

Пусть $\delta_m \in \mathcal{J}_m$, т.е. δ_m имеет ранг m , и $\alpha_\gamma \in \delta_m$. Очевидно $\delta_{m+1} \subset \delta_m$ и $|\delta_{m+1}| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} |\delta_m|$. С применением (2.4) и (2.7) получим

$$(2.30) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \frac{|\Delta_n| |\delta_m|}{(|\Delta_n| + \rho(\delta_m, \Delta_n) + |\delta_m|)^2} q^{2d_n(\alpha_\gamma)} \quad \text{когда } |\Delta_n| = m.$$

Из (2.29), (2.30) следует, что если $|\Delta_n| = m$, то

$$(2.31) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \frac{\|g\|_1^2 |\Delta_n|^2 |\delta_m| q^{2d_n(\alpha_\gamma) + d_n(I)}}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I))^2 (|\Delta_n| + \rho(\delta_m, \Delta_n) + |\delta_m|)^2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I)) (|\Delta_n| + \rho(\delta_m, \Delta_n) + |\delta_m|)} \leq \frac{1}{\rho(\Delta_n, I) + |\Delta_n| + \rho(\delta_m, \Delta_n) + |\delta_m|}.$$

Поэтому из (2.31) получим

$$(2.32) \quad \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 \frac{q^{d_n(\alpha) + d_n(\alpha_\gamma)}}{\alpha - \alpha_\gamma}$$

Учитывая, что члены последовательности $d_n(\alpha) + d_n(\alpha_\gamma)$ принимают разные натуральные значения из (2.32) получим

$$\sum_{\Delta_n \subset (\alpha_\gamma; \alpha)} \int_0^{\alpha_\gamma} a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Теперь докажем, что

$$(2.33) \quad \sum_{\Delta_n \subset (\alpha_\gamma; \alpha)} \int_{\beta_\gamma}^1 a_n^2 f_n^2(x) q^{-d_n(I)} dx \leq C_\gamma \|g\|_1^2 |I|^{-1}.$$

Нетрудно заметить, что доказательство (2.33) аналогично доказательству неравенства (2.12). Тем самым неравенство (2.27) доказано. Неравенство (2.28) доказывается аналогично. $\square$

Лемма 2.3 немедленно следует из лемм 2.4 — 2.7.

Лемма 2.8. (вторая основная лемма) Если последовательность T сильно регулярная с параметром γ , то

$$(2.34) \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \int_{\bar{I}} |f_n(x)| dx \leq C_\gamma \|g\|_1,$$

где $\bar{I}$ интервал $(\alpha'; \beta')$, а $\bar{I}^c$ его дополнение.

Лемма 2.9. Для сильно регулярной с параметром γ последовательности T верны следующие неравенства

$$(2.35) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (0; \alpha')} |a_n| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \|g\|_1$$

$$(2.36) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\beta'; 1)} |a_n| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \|g\|_1$$

Доказательство. Через $I_1, I_2, \dots, I_m, \dots$, обозначим в порядке возрастания те интервалы из J_{n_0} , которые лежат в $(\beta; 1)$. Очевидно $I_1 = (\beta; \beta')$. Для $\Delta_n \subset (\beta'; 1)$, с $n > n_0$ имеем, что $\Delta_n \subset I_m$, для некоторого $m > 1$. Для таких n , а также из (2.4), (2.9) получаем

$$(2.37) \quad d_n(I) \geq m, \quad \text{когда} \quad \Delta_n \subset I_m, \\ \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I, \Delta_n)} \leq \frac{|\Delta_n|}{\rho(I, I_m)},$$

$$(2.38) \quad |a_n| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \|g\|_1 q^{d_n(I)} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I, \Delta_n)}.$$

Для фиксированных m и k рассмотрим те $\Delta_n \subset I_m$ для которых $d_n(I) = k$. Нетрудно заметить, что такие Δ_n либо не пересекаются, либо имеют общий левый конец. В силу сильной регулярности J с параметром γ , сумма длин интервалов Δ_n с общим левым концом не превосходит $1 + \gamma$ умноженное на длину максимального из них. Следовательно

$$(2.39) \quad \sum_{\Delta_n \subset I_m, d_n(I)=k} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I, \Delta_n)} \leq (1 + \gamma) \frac{|I_m|}{\rho(I, I_m)} \leq C_\gamma.$$

Обозначим $k_m = \min\{d_n(I) : \Delta_n \subset I_m\}$. Из (2.37) имеем $k_m \geq m$. Тогда, с учетом (2.38), (2.39), получим (2.36):

$$\begin{aligned} \sum_{n: \Delta_n \subset (\beta'; 1)} |a_n| \|f_n\|_1 &= \sum_{m \geq 2} \sum_{n: \Delta_n \subset I_m} |a_n| \|f_n\|_1 \\ &\leq C_\gamma \|g\|_1 \sum_{m \geq 2} \sum_{k \geq k_m} q^k \sum_{n: d_n(I)=k, \Delta_n \subset I_m} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I, \Delta_n)} \\ &\leq C_\gamma \|g\|_1 \sum_{m \geq 2} q^m \leq C_\gamma \|g\|_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается (2.35). $\square$

Лемма 2.10. Для сильно регулярной с параметром γ последовательности J верны следующие неравенства

$$(2.40) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\beta; \beta')} |a_n| \int_{\beta'}^1 |f_n(x)| dx \leq C_\gamma \|g\|_1,$$

$$(2.41) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha'; \alpha)} |a_n| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_\gamma \|g\|_1.$$

Доказательство. Поскольку неравенства (2.40) и (2.41) доказываются аналогично, то мы докажем только (2.40). Пусть $\Delta_n \subset (\beta; \beta')$. Тогда в силу (2.4)

$$(2.42) \quad |a_n| \leq C_7 q^{d_n(I)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_n| + \rho(t_n, I)} \|g\|_1 \leq C_7 q^{d_n(I)} |\Delta_n|^{-\frac{1}{2}} \|g\|_1.$$

С учетом (2.8), из (2.42) получаем

$$(2.43) \quad |a_n| \int_{\beta'}^1 |f_n(x)| dx \leq C_7 q^{d_n(I) + d_n(\beta')} \|g\|_1, \quad \text{когда } \Delta_n \subset (\beta; \beta').$$

Заметим, что $d_n(I) + d_n(\beta')$ это количество точек из T_n в интервале $(\beta; \beta')$. Поэтому при появлении нового Δ_n в $(\beta; \beta')$ сумма $d_n(I) + d_n(\beta')$ на единицу возрастает. Следовательно из (2.43) получим (2.40). $\square$

Лемма 2.11. Для сильно регулярной с параметром γ последовательности T верны следующие неравенства

$$(2.44) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha'; \beta)} |a_n| \int_{\beta'}^1 |f_n(x)| dx \leq C_7 \|g\|_1,$$

$$(2.45) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha; \beta')} |a_n| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_7 \|g\|_1.$$

Доказательство. Докажем неравенство (2.45). Напомним, что $\Delta_n = (t_n^-; t_n^+)$. Для $\Delta_n \subset (\alpha; \beta')$ обозначим

$$V_n^- = (\alpha; t_n^-) \quad \text{и} \quad V_n^+ = (t_n^+; \beta').$$

Положим

$$a_{n,1} = \int_{V_n^-} g(x) f_n(x) dx, \quad a_{n,2} = \int_{\Delta_n} g(x) f_n(x) dx, \quad a_{n,3} = \int_{V_n^+} g(x) f_n(x) dx.$$

Ясно, что $a_n = a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3}$ и поэтому достаточно доказать, что

$$(2.46) \quad \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha; \beta')} |a_{n,\nu}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_7 \|g\|_1, \quad \text{для } \nu = 1, 2, 3.$$

Для фиксированного натурального i обозначим

$$N_i = \{n : \Delta_n \subset (\alpha; \beta'), \text{ в } (\alpha'; \alpha) \text{ имеются } i \text{ интервалов линейности функции } f_n\},$$

и пусть Λ_i тот из этих интервалов линейности, который имеет общий конец с I .

Оценим

$$\sum_{n \in N_i, d_n(\Lambda_i) = k} |a_{n,\nu}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx, \quad \nu = 1, 2, 3.$$



Для $n \in N_i$, с $d_n(\Lambda_i) = k$, из (см. (2.9))

$$|a_{n,2}| \leq \|f_n\|_\infty \int_{\Delta_n} |g(x)| dx \leq C_7 |\Delta_n|^{-1/2} \|g\|_{L_1(\Delta_n)}$$

и (см. (2.9) и (2.6))

$$\int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_7 |\Delta|^{1/2} \epsilon^{k+i}$$

получим

$$(2.47) \quad \sum_{n \in N_i, d_n(\Lambda_i)=k} |a_{n,2}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_7 \epsilon^{k+i} \sum_{n \in N_i, d_n(\Lambda_i)=k} \|g\|_{L_1(\Delta_n)}$$

Интервалы Δ_n , с условием $n \in N_i, d_n(\Lambda_i) = k$, либо не пересекаются, либо вложены. Когда эти интервалы вложены, то они имеют общий левый конец и общий соседний интервал слева. В силу леммы 2.2 количество таких вложенных интервалов не превосходит C_7 , поэтому

$$\sum_{n \in N_i, d_n(\Lambda_i)=k} \|g\|_{L_1(\Delta_n)} \leq C_7 \|g\|_1.$$

Отсюда и из (2.47) следует

$$\sum_{n \in N_i, d_n(\Lambda_i)=k} |a_{n,2}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_7 \epsilon^{k+i} \|g\|_1.$$

Суммируя последнее неравенство по i и k , получим (2.46) для $\nu = 2$.

Теперь докажем неравенство (2.46) для $\nu = 3$. Напомним, что t_n^+ правая соседняя с t_n точка из π_n . Нетрудно заметить, что если $n_1 < n_2 < \dots$ такие числа, что $d_{n_m}(\Lambda_i) = k$, то $t_{n_{m+1}}^+ < t_{n_m}^+$ и $d_{n_m}(t_{n_l}^+) \geq m - l$, когда $m > l$. Положим также $t_{n_0} = \beta$. Тогда в силу (2.4) получим

$$|a_{n_m,3}| \leq \sum_{l \leq m} \int_{t_{n_l}^+}^{t_{n_{l-1}}^+} |g(x)| |f_{n_m}(x)| dx \leq C_7 \sum_{l \leq m} |\Delta_{n_m}|^{-1/2} q^{m-l} \int_{t_{n_l}^+}^{t_{n_{l-1}}^+} |g(x)| dx.$$

Следовательно, с учетом (см. (2.9) и (2.6))

$$\int_0^{\alpha'} |f_{n_m}(x)| dx \leq C_7 \epsilon^{k+i} |\Delta_{n_m}|^{1/2},$$

получим

$$|a_{n_m,3}| \int_0^{\alpha'} |f_{n_m}(x)| dx \leq C_7 \epsilon^{k+i} \sum_{l \leq m} q^{m-l} \int_{t_{n_l}^+}^{t_{n_{l-1}}^+} |g(x)| dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n_m: d_{n_m}(\Lambda_i)=k} |a_{n_m,3}| \int_0^{\alpha'} |f_{n_m}(x)| dx &\leq C_\gamma \epsilon^{k+i} \sum_m \sum_{l \leq m} q^{m-l} \int_{t_{i+1}^+}^{t_{n_i}^+} |g(x)| dx \\ &= C_\gamma \epsilon^{k+i} \sum_l \sum_{m \geq l} q^{m-l} \int_{t_{i+1}^+}^{t_{n_i}^+} |g(x)| dx \leq C_\gamma q^{k+i} \sum_l \int_{t_{i+1}^+}^{t_{n_i}^+} |g(x)| dx \leq C_\gamma \epsilon^{k+i} \|g\|_1. \end{aligned}$$

Суммируя последнее неравенство по i и k , получим (2.46) для $\nu = 3$.

Докажем (2.46) для $\nu = 1$. При фиксированных i, k и для n , с условием $d_n(\Lambda_i) = k$ обозначим через $L_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, интервалы линейности функции f_n , находящиеся в $[\alpha, t_n^+]$, причем $\max L_{n,j} = \min L_{n,j+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_{n,1}| &\leq \sum_{j=1}^k \int_{L_{n,j}} |f_n(x)| |g(x)| dx \\ &\leq C_\gamma \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{k-j}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,j}) + |L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|a_{n,1}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \leq C_\gamma \epsilon^{k+i} \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_n| q^{k-j}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,j}) + |L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |g(x)| dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n: d_n(\Lambda_i)=k} |a_{n,1}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx \\ \leq C_\gamma \epsilon^{k+i} \sum_{n: d_n(\Lambda_i)=k} \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_n| q^{k-j}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,j}) + |L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Заметим, что при фиксированном j интервалы $L_{n,j}$ либо не пересекаются, либо имеют общий левый конец. Через $L_{j,p}^*$, $p = 1, 2, \dots$, обозначим максимальные из них. Пусть J такой интервал, что для некоторых n и j имеет место $J = L_{n,j}$. Тогда $d_n(J) = k - j$. В работе [20] доказано, что (см. [20] лемма 3.4) в таком случае

$$\sum_{n: d_n(J)=k-j} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, J) + |J|} \leq C_\gamma (k - j + 1).$$

Заметим также, что если $L_{n_1,j} \supset L_{n_2,j} \supset \dots \supset L_{n_{m_j},j}$, то интервалы линейности $L_{n_l,j-1}$, $l = 1, 2, \dots, m_j$, неизменны. Поэтому в силу леммы 2.2 имеем $m_j \leq C_\gamma$. Поэтому

$$(2.48) \quad \sum_k \sum_{n: d_n(\Lambda_i)=k} |a_{n,1}| \int_0^{\alpha'} |f_n(x)| dx$$

$$\leq C_7 \sum_k \epsilon^{k+i} \sum_{j=1}^k q^{k-j}(k-j+1) \sum_p \int_{L_{j,p}^*} |g(x)| dx \leq C_7 \epsilon^i \|g\|_1.$$

Суммируя (2.48) по i , получим (2.46) для $\nu = 1$. Неравенство (2.45) доказано. Аналогично доказывается неравенство (2.44). $\square$

Лемма 2.8 следует из лемм 2.9 — 2.11.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

В доказательствах теорем 1.1, 1.2 есть общая часть. Поэтому сделаем некоторые предварительные рассуждения и потом перейдем к рассмотрению слабо регулярного квазидвоичного и сильно регулярного случаев раздельно.

Для $f \in L_1[0; 1]$ определим

$$(3.1) \quad \mathcal{M}_T(f, x) = \sup_{I \in \mathcal{J}: x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{M}_T(f, x) \leq \mathcal{M}(f, x).$$

Поэтому для любого $\lambda > 0$

$$(3.2) \quad \mu\{x \in [0; 1] : \mathcal{M}_T(f, x) > \lambda\} \leq \frac{5}{\lambda} \|f\|_1.$$

Обозначим

$$(3.3) \quad E_\lambda = \{x \in [0; 1] : \mathcal{M}_T(f, x) > \lambda\}.$$

Из определения (3.1) следует, что множество E_λ представимо в виде объединения непересекающихся максимальных интервалов из $\mathcal{J}$, т.е.

$$E_\lambda = \bigcup_k I_k, \quad I_k \in \mathcal{J}, \quad \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f(t)| dt > \lambda,$$

и если для некоторого $I'_k \in \mathcal{J}$ выполняются $I'_k \supset I_k$ и $I'_k \neq I_k$, то

$$(3.4) \quad \frac{1}{|I'_k|} \int_{I'_k} |f(t)| dt \leq \lambda.$$

Если I'_k самый короткий интервал со свойствами $I'_k \in \mathcal{J}$, $I'_k \supset I_k$ и $I'_k \neq I_k$, то

$$(3.5) \quad |I'_k| \leq (1 + \gamma) |I_k|.$$

Из (3.4), (3.5) следует

$$(3.6) \quad \int_{I_k} |f(x)| \leq C_7 \lambda |I_k|.$$

Определим линейные функции $L_k(x)$, $x \in I_k$, со свойствами

$$(3.7) \quad \int_{I_k} f(x)dx = \int_{I_k} L_k(x)dx, \quad \int_{I_k} xf(x)dx = \int_{I_k} xL_k(x)dx.$$

Известно, что (см. [1], [19])

$$(3.8) \quad \int_{I_k} |L_k(x)|dx \leq 3 \int_{I_k} |f(x)|dx.$$

Обозначим

$$(3.9) \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{когда } x \notin E_\lambda, \\ L_k(x) & \text{когда } x \in I_k, \end{cases}$$

$$(3.10) \quad g(x) = f(x) - h(x) = \sum_k g_k(x), \quad g_k(x) = (f(x) - L_k(x))\chi_{I_k}(x).$$

Тогда из (3.6)-(3.8) следует

$$(3.11) \quad \int_{I_k} g_k(x)dx = \int_{I_k} xg_k(x)dx = 0,$$

$$(3.12) \quad \int_{I_k} |g_k(x)|dx \leq C_7\lambda|I_k|.$$

Нетрудно заметить, что из (3.6) и (3.8) следует неравенство $|L_k(x)| \leq C_7\lambda$, которое вместе с (3.3) дает

$$|h(x)| \leq C_7\lambda.$$

Следовательно для функции Пэли функции h имеем

$$\begin{aligned} \mu \left\{ x \in [0; 1] : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(h) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} > \lambda \right\} &= \mu \left\{ x \in [0; 1] : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(h) f_n^2(x) > \lambda^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(h) f_n^2(x) dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{C_7}{\lambda} \int_0^1 |h(x)| dx \\ &\leq \frac{C_7}{\lambda} \left(\int_{E_\lambda} |f(x)| dx + \sum_k \int_{I_k} |L_k(x)| dx \right) \leq \frac{C_7}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Очевидно что оператор Пэли сублинейный, т.е. если $\phi = \varphi + \psi$, то $P\phi(x) \leq P\varphi(x) + P\psi(x)$. Поэтому для доказательства теорем достаточно доказать, что

$$(3.13) \quad \mu \left\{ x \in [0; 1] : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} > \lambda \right\} \leq \frac{C_7}{\lambda} \|f\|_1.$$

Для доказательства неравенства (3.13) отдельно рассмотрим случай когда последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоичная и слабо регулярная и случай когда $\mathcal{T}$ сильно регулярная.

Доказательство теоремы 1.1. Для этого нужно доказать, что если последовательность $\mathcal{T}$ квазидвоична и слабо регулярна с параметром γ , то для функции g , определяемой формулами (3.9), (3.10), выполняется (3.13).

Через $I_{k,\gamma}$ обозначим интервал длины $(2\gamma+1)|I_k|$ и концентрический с I_k . Пусть $E_{\lambda,\gamma} = \bigcup_k I_{k,\gamma}$. Из (3.2) и (3.3) имеем

$$\mu(E_{\lambda,\gamma}) \leq \sum_k |I_{k,\gamma}| \leq (2\gamma+1)\mu(E_\lambda) \leq \frac{C_\gamma}{\lambda} \|f\|_1.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$(3.14) \quad \mu \left\{ x \notin E_{\lambda,\gamma} : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} > \lambda \right\} \leq \frac{C_\gamma}{\lambda} \|f\|_1.$$

Пусть $n_k = \min\{n : t_n \in I_k\}$. Из (3.11) следует, что

$$a_n(g_k) = \int_0^1 g_k(x) f_n(x) dx = 0 \quad \text{когда} \quad n \leq n_k.$$

Из (3.12) и леммы 2.3 имеем также

$$(3.15) \quad \int_{I_{k,\gamma}^c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g_k) f_n^2(x) q^{-d_n(I_k)} dx \leq C_\gamma \lambda^2 |I_k|,$$

где $I_{k,\gamma}^c$ дополнение интервала $I_{k,\gamma}$.

Положим $q_1 = \sqrt{q}$. При фиксированном n множество $\{d_n(I_k) : a_n(I_k) \neq 0\}$ состоит из разных натуральных чисел. Действительно, из (3.11) следует, что концы одного интервала линейности функции f_n не могут принадлежать одновременно разным I_k . Поэтому, если $k_1 \neq k_2$ и $a_n(k_1) \neq 0$, $a_n(k_2) \neq 0$, то $d_n(I_{k_1}) \neq d_n(I_{k_2})$. Тогда из очевидного равенства $a_n(g) = \sum_k a_n(g_k)$ имеем

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_k a_n(g_k) f_n(x) \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_k a_n(g_k) f_n(x) q_1^{-d_n(I_k)} q_1^{d_n(I_k)} \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_k a_n^2(g_k) f_n^2(x) q^{-d_n(I_k)} \sum_k q^{d_n(I_k)} \right) \leq C_\gamma \sum_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g_k) f_n^2(x) q^{-d_n(I_k)}. \end{aligned}$$

Из (3.16) и (3.15) получаем

$$\mu \left\{ x \notin E_{\lambda,\gamma} : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} > \lambda \right\} = \mu \left\{ x \notin E_{\lambda,\gamma} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) > \lambda^2 \right\}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{E_{\lambda, \gamma}^c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \frac{1}{\lambda^2} \sum_k \int_{I_{k, \gamma}^c} a_n^2(g_k) f_n^2(x) dx \leq C_\gamma \sum_k |I_k| \leq C_\gamma |E_\lambda|.$$

Из этого, с учетом (3.2), (3.3) получим (3.14). Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Для этого нужно убедиться, что для функции g , определяемой формулой (3.10) выполняется (3.13).

Пусть, как и в доказательстве теоремы 1.1, $I_{k, \gamma}$ концентрический с I_k интервал длины $(2\gamma + 1)|I_k|$ и $E_{\lambda, \gamma} = \bigcup_k I_{k, \gamma}$. Из леммы 2.8 имеем

$$(3.17) \quad \int_{E_{\lambda, \gamma}^c} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(g_k)| |f_n(x)| dx \leq C_\gamma \|g_k\|_1.$$

Учитывая, что $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x))^{1/2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(g) f_n(x)|$ и $|a_n(g)| \leq \sum_k |a_n(g_k)|$, из (3.17) и (3.12) получим

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ x \notin E_{\lambda, \gamma} : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(g) f_n^2(x) \right)^{1/2} > \lambda \right\} \\ & \leq \mu \left\{ x \notin E_{\lambda, \gamma} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(g) f_n(x)| > \lambda \right\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{E_{\lambda, \gamma}^c} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(g) f_n(x)| dx \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{E_{\lambda, \gamma}^c} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(g_k) f_n(x)| dx \leq \frac{C_\gamma}{\lambda} \sum_k \|g_k\|_1 \leq C_\gamma \sum_k |I_k|. \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.13). Теорема 1.2 доказана.

4. ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Допустим последовательность $\mathcal{T} = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ слабо регулярна с параметром γ . Укажем на перестановку $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такую, что последовательность $\mathcal{T}_\sigma = \{t_n^\sigma\}_{n=0}^{\infty}$, где $t_n^\sigma = t_{\sigma(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ квазидвоична и слабо регулярна. Положим $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$ и $t_i^\sigma = t_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, 3$, т.е. $t_0^\sigma = t_0 = 0$, $t_1^\sigma = t_1 = 1$, $t_2^\sigma = t_2$. Этим завершается первый шаг построения σ . Далее положим

$$\sigma(3) = \min\{n : t_n \in (t_{\sigma(0)}; t_{\sigma(2)})\} \quad \text{и} \quad \sigma(4) = \min\{n : t_n \in (t_{\sigma(2)}; t_{\sigma(1)})\}.$$

Очевидно, что последовательность $\{t_{\sigma(i)}\}_{i=0}^4$ квазидвоична и слабо регулярна с параметром γ . Этим завершается второй шаг построения σ . Допустим на первых

k шагах построили квазидвоичную последовательность $\{t_i^\sigma\}_{i=0}^{2^k} = \{t_{\sigma(i)}\}_{i=0}^{2^k}$ с параметром γ . Возрастающую перестановку последовательности $\{t_{\sigma(i)}\}_{i=0}^{2^k}$ обозначим через $\{\tau_j^k\}_{j=0}^{2^k}$, т.е. $\{t_i^\sigma\}_{i=0}^{2^k} = \{t_{\sigma(i)}\}_{i=0}^{2^k}$ и $\tau_{j-1}^k < \tau_j^k$, $j = 1, 2, \dots, 2^k$. Положим

$$t_{2^k+j}^\sigma = t_{\sigma(2^k+j)}, \text{ где } \sigma(2^k+j) = \min \{n : t_n \in (\tau_{j-1}^k; \tau_j^k)\}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Очевидно, что квазидвоичная структура сохранится и полученная последовательность $\{t_i^\sigma\}_{i=0}^{2^{k+1}}$ будет квазидвоичной. Нетрудно заметить, что если $t_{\sigma(2^k+j)} = t_n$, то $t_n^- = \tau_{j-1}^k = t_{\sigma(2^k+j)}^-$ и $t_n^+ = \tau_j^k = t_{\sigma(2^k+j)}^+$. Поэтому сохранится слабая регулярность с тем же параметром γ .

Продолжая этот процесс, получим такую перестановку $\{\sigma(n)\}_{n=0}^\infty$, что последовательность $\mathcal{T}_\sigma = \{t_n^\sigma\}_{n=0}^\infty = \{t_{\sigma(n)}\}_{n=0}^\infty$ квазидвоична и слабо регулярна с параметром γ . Соответствующую общую систему Франклина обозначим через $\{f_n^\sigma\}_{n=0}^\infty$, а интервал пика функции f_n^σ — через Δ_n^σ . При этом, ясно что

$$\Delta_n^\sigma = \Delta_{\sigma(n)}.$$

Замечание 4.1. Для любого $p \in (1; \infty)$ системы $\{f_n^\sigma\}_{n=0}^\infty$, $\{f_{\sigma(n)}\}_{n=0}^\infty$ являются эквивалентными базисами в $L_p[0; 1]$, т.е. для любой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ выполняется

$$(4.1) \quad \left\| \sum_{n=0}^\infty a_n f_n^\sigma \right\|_p \sim_{\gamma, p} \left\| \sum_{n=0}^\infty a_n f_{\sigma(n)} \right\|_p.$$

Доказательство. Из (2.9) следует, что

$$\mathcal{M}(f_n^\sigma, x) \geq C_\gamma \frac{|\Delta_{\sigma(n)}|^{1/2}}{|\Delta_{\sigma(n)}| + \rho(\Delta_{\sigma(n)}, x)}.$$

А из (2.4) следует

$$|f_{\sigma(n)}(x)| \leq C_\sigma \frac{|\Delta_{\sigma(n)}|^{1/2}}{|\Delta_{\sigma(n)}| + \rho(\Delta_{\sigma(n)}, x)}.$$

Поэтому

$$(4.2) \quad |f_{\sigma(n)}(x)| \leq C_\sigma \mathcal{M}(f_n^\sigma, x).$$

Аналогично получаем

$$(4.3) \quad |f_n^\sigma(x)| \leq C_\sigma \mathcal{M}(f_{\sigma(n)}, x).$$

Применяя неравенство Фефермана-Стейна (см. [21] глава 2, теорема 1) о том, что если $g_i \in L_p$, $1 < p < \infty$, то

$$\left\| \left(\sum_i M^2(g_i, \cdot) \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_p \left\| \left(\sum_i g_i^2(\cdot) \right)^{1/2} \right\|_p,$$

из (4.2) и (4.3) получим

$$(4.4) \quad \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n f_n^{\sigma}(\cdot))^2 \right)^{1/2} \right\|_p \sim_{\gamma, p} \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_{\sigma(n)}^2(\cdot) \right)^{1/2} \right\|_p,$$

для любых a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, и $1 < p < \infty$. В работе [5] доказана, что при любой допустимой последовательности T соответствующая общая система Франклина является безусловным базисом в $L_p(0; 1)$, $1 < p < \infty$, и для любой последовательности a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, выполняется

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(\cdot) \right\|_p \sim_p \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(\cdot) \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Поэтому из (4.4) следует (4.1). $\square$

М. П. Погосян [3] доказал, что если последовательность T квазидиадическая и сильно регулярная, то

$$(4.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \text{ п.в. сходится на } E,$$

тогда и только тогда, когда

$$(4.6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < \infty \text{ п.в. на } E.$$

Для классической системы Франклина эквивалентность условий (4.5) и (4.6) установлена в работе [13].

Здесь мы приведем два примера последовательностей T , которые указывают на то, что квазидвоичность или сильная регулярность в отдельности не обеспечивают эквивалентность условий (4.5) и (4.6).

Пусть T двоичная последовательность, т.е. если $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2^k$, то $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$. Для последовательности $\mathcal{K} = \{k_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ с условием $k_1 < k_2 < \dots < k_\nu < \dots$ обозначим через $\mathcal{T}^{\mathcal{K}} = \{t_n^{\mathcal{K}}\}_{n=0}^{\infty}$ допустимую последовательность со следующими свойствами:

- 1) для любого k_ν имеет место $\mathcal{T}_{2^{k_\nu}}^{\mathcal{K}} = T_{2^{k_\nu}}$,

2) $t_{2^{k_\nu+i}}^{\mathcal{K}} = t_{2^{k_\nu+i-1}+1}$, для $i = 1, 2, \dots, k_{\nu+1} - k_\nu$,

3) остальные числа из последовательности T ранга $2^{k_\nu+1}, 2^{k_\nu+2}, \dots, 2^{k_{\nu+1}}$, т.е. числа из

$$(4.7) \quad \bigcup_{k=k_\nu}^{k_{\nu+1}-1} \{t_n : n = 2^k + m, m = 2, 3, \dots, 2^k\},$$

составляют числа $t_{2^j}^{\mathcal{K}}$, $j = 2^{k_\nu} + k_{\nu+1} - k_\nu + 1, 2^{k_\nu} + k_{\nu+1} - k_\nu + 2, \dots, 2^{k_{\nu+1}}$, в том порядке в каком встречаются в последовательности (4.7).

Нетрудно заметить, что $\mathcal{T}^{\mathcal{K}}$ сильно регулярная последовательность с параметром $\gamma = 2$ и если к последовательности $\mathcal{T}^{\mathcal{K}}$ применить перестановку описанную перед замечанием 4.1, то получим последовательность T .

Пусть $\{f_{\mathcal{K},n}(x)\}_{n=0}^\infty$ - общая система Франклина соответствующая последовательности $\mathcal{T}$, а $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ - классическая система Франклина. Тогда в силу замечания 4.1 системы $\{f_{\mathcal{K},n}(x)\}_{n=0}^\infty$ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются эквивалентными базисами в $L_p(0;1)$, $1 < p < \infty$. Для системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ условия (4.5) и (4.6) эквивалентны. Покажем, что для системы $\{f_{\mathcal{K},n}(x)\}_{n=0}^\infty$ условия (4.5) и (4.6), вообще говоря, не эквивалентны.

Замечание 4.2. Существует такая последовательность $\mathcal{K}$ и такие числа a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, что

$$(4.8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_{\mathcal{K},n}^2(x) < \infty \quad \text{когда} \quad x \in (0;1],$$

однако

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_{\mathcal{K},n}(x) \quad \text{н.в. расходится на} \quad [0;1].$$

Доказательство. Допустим числа $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ и a_n , $n = 0, 1, \dots, 2^{k_\nu}$, уже выбраны. Заметим, что каким бы не был $k_{\nu+1}$ имеем

$$\{t \in \mathcal{T}_{2^{k_\nu+i}}^{\mathcal{K}} : t > 2^{-k_\nu}\} = \{t \in \mathcal{T}_{2^{k_\nu}}^{\mathcal{K}} : t > 2^{-k_\nu}\} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, k_{\nu+1} - k_\nu.$$

Тогда существуют такие числа (см [2] доказательство леммы 2.10) $\alpha_{\nu,i}$, что

$$f_{\mathcal{K},2^{k_\nu+i}}(x) = \alpha_{\nu,i} f_{\mathcal{K},2^{k_\nu}}(x), \quad \text{когда} \quad x \geq 2^{1-k_\nu} \quad \text{и} \quad i = 2, 3, \dots, k_{\nu+1} - k_\nu.$$

Выберем такие числа $a_{2^{k_\nu+i}}$, чтобы выполнялись

$$a_{2^{k_\nu+i}} f_{\mathcal{K},2^{k_\nu+i}}(2^{-k_\nu}) = \frac{1}{i\nu} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, k_{\nu+1} - k_\nu.$$

С учетом (2.5), из последних двух неравенств получим

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^{k_{\nu+1}-k_{\nu}} a_{2^{k_{\nu}+i}}^2 f_{\mathcal{X}, 2^{k_{\nu}+i}}^2(x) \leq \frac{C}{\nu^2} \text{ когда } x \geq 2^{-k_{\nu}}$$

и

$$\left| \sum_{i=1}^{k_{\nu+1}-k_{\nu}} a_{2^{k_{\nu}+i}} f_{\mathcal{X}, 2^{k_{\nu}+i}}(x) \right| \geq C \ln(k_{\nu+1} - k_{\nu}) |a_{2^{k_{\nu}+1}} f_{\mathcal{X}, 2^{k_{\nu}+1}}(x)| \text{ когда } x \geq 2^{-k_{\nu}}.$$

Из последнего соотношения следует, что выбрав $k_{\nu+1}$ достаточно большим получим

$$(4.10) \quad \mu \left\{ x \geq 2^{-k_{\nu}} : \left| \sum_{i=1}^{k_{\nu+1}-k_{\nu}} a_{2^{k_{\nu}+i}} f_{2^{k_{\nu}+i}}(x) \right| \geq \nu \right\} > 1 - 2^{1-k_{\nu}}.$$

Из (4.10) следует, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_{\nu+1}-k_{\nu}} a_{2^{k_{\nu}+i}} f_{2^{k_{\nu}+i}}(x)$$

почти всюду на $[0; 1]$ неограниченно расходится. Из (4.9) следует (4.8). $\square$

Замечание 4.3. Существует квазидвоичная последовательность $\mathcal{T}$ и числа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, такие что

$$(4.11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < \infty, \text{ п.в. на } [0; 1]$$

и

$$(4.12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \text{ п.в. расходится на } [0; 1],$$

где $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ общая система Франклина соответствующая последовательности $\mathcal{T}$.

Доказательство. Мы укажем лишь на основные идеи доказательства. Допустим уже построены $\mathcal{T}_{2^{k_{\nu}}}$, т.е. первые $2^{k_{\nu}}$ точки последовательности $\mathcal{T}$ и выбраны числа a_n , $0 \leq n \leq 2^{k_{\nu}}$, такие что

$$(4.13) \quad \sum_{n=2^{k_{i-1}+1}}^{2^{k_i}} a_n^2 f_n^2(x) \leq \frac{1}{i^2}, \text{ когда } x \in E_i \text{ и } \mu(E_i) > 1 - i^{-2}$$

$$(4.14) \quad \left| \sum_{n=2^{k_{i-1}+1}}^{2^{k_i}} a_n f_n(x) \right| > \frac{1}{2}, \text{ когда } x \in D_i,$$

причем, если $\delta \in J_{2^{k_\nu-1}}$ интервал линейности функции $f_{2^{k_\nu-1}}$, то

$$(4.15) \quad \mu(\delta \cap D_i) > \frac{\mu(\delta)}{2}.$$

Интервалы семейства $J_{2^{k_\nu}}$ точками $\{t_n : 2^{k_\nu} + 1 \leq n \leq 2^{k_\nu+1}\}$ разделим пополам. Этим мы обеспечим всюду плотность последовательности J . Пусть $\delta = (\alpha; \beta) \in J_{2^{k_\nu+1}}$. Выберем точки α_i, β_i $i = 1, 2$, так чтобы $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta$;

$$(4.16) \quad (\beta_2 - \alpha_2) > \left(1 - \frac{1}{2\nu^2}\right) (\beta - \alpha)$$

и отношения

$$(4.17) \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha} \text{ и } \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta - \beta_1} \text{ "очень" малы.}$$

Точку α_2 выберем как точку ранга $k_\nu + 2$ из δ . Далее, сохраняя квазидвоичную структуру, выберем точки рангов $k_\nu + 3, k_\nu + 4, \dots, k_\nu + 1$, таким образом, чтобы точки находящиеся в δ находились в $(\alpha_1; \alpha_2) \cup (\beta_2; \beta_1)$. Для $i = k_\nu + 2, k_\nu + 3, \dots, k_\nu + 1$ через θ_i условно обозначим ту ближайшую точку ранга i , которая находится слева от α_2 . Функцию Франклина связанной с точкой θ_i обозначим $f_{\delta,i}$. Выберем числа $a_{\delta,i}$, $i = k_\nu + 3, k_\nu + 4, \dots, k_\nu + 1$, так чтобы выполнялись

$$a_{\delta,i} f_{\delta,i}(\alpha_2) = \nu^{-2}, \quad i = k_\nu + 3, k_\nu + 4, \dots, k_\nu + 1.$$

Если взять $k_{\nu+1} = k_\nu + \nu^2$, то будем иметь

$$(4.18) \quad \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} a_{\delta,i} f_{\delta,i}(\alpha_2) = 1$$

$$\sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} a_{\delta,i}^2 f_{\delta,i}^2(\alpha_2) = \frac{1}{\nu^2}.$$

Из (4.18), с учетом (4.16) и (2.5) следует

$$(4.19) \quad \mu \left\{ x \in \delta : \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} a_{\delta,i}^2 f_{\delta,i}^2(x) > \frac{1}{\nu^2} \right\} < \frac{1}{\nu^2} |\delta|.$$

За счет малости отношений (4.17), в силу (2.3), можно считать, что $f_{\delta,i}(\alpha_2) \approx -2f_{\delta,i}(\beta_2)$ с большой точностью. Поэтому

$$(4.20) \quad \mu \left\{ x \in (\alpha_2; \beta_2) : \left| \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} a_{\delta,i} f_{\delta,i}(x) \right| > \frac{1}{2} \right\} > \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}.$$

За счет малости отношений (4.17), в силу (2.2) и (2.3), можно добиться того, чтобы суммы

$$\sum_{i=k_{\nu}+1}^{k_{\nu+1}} |a_{\delta,i} f_{\delta,i}(x)| \quad \text{и} \quad \sum_{i=k_{\nu}+1}^{k_{\nu+1}} a_{\delta,i}^2 f_{\delta,i}^2(x)$$

были "очень" малы вне δ . Из этого, из (4.19), (4.20) и из малости отношений (4.17) следуют соотношения (4.13)-(4.15) для $i = \nu + 1$. Очевидно, что из (4.13)-(4.15) следуют (4.11), (4.12). $\square$

Abstract. We prove that if the admissible sequence $\mathcal{T}$ is strongly regular or is quasi-binary and weakly regular, then the Paley operator by the corresponding general Franklin system is of weak type (1, 1). Examples of general Franklin system with some properties are also discussed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", *Funct. Approx. Comment. Math.*, **25**, 129 – 143 (1997).
- [2] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, **374**, 1 – 59 (1998).
- [3] M. P. Poghosyan, "Almost everywhere convergence of series by generalized Franklin system", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **35**, no. 2, 64 – 77 (2000).
- [4] G. G. Gevorkyan, A. A. Sahakian, "Unconditional basis property of general Franklin systems" [in Russian], *Izv. NAN Armenii, ser. Mat.*, **35**, no. 4, 7 – 25 (2000).
- [5] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ", *Studia Math.*, **164**, 161 – 204 (2004).
- [6] А. А. Степанян, "О представлении измеримых функций рядами по общей системе Франклина", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42**, no. 3, 13 – 22 (2007).
- [7] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, "Об абсолютной и безусловной сходимости почти всюду рядов по общей системе Франклина", *Изв. РАН, сер. Матем.*, **73**, no. 2, 69 – 90 (2009).
- [8] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On the trigonometric conjugate to the general Franklin System", *Studia Math.*, **193**, 203 – 239 (2009).
- [9] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", *Math. Ann.*, **100**, 522 – 528 (1928).
- [10] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Survey on the orthogonal Franklin system", In: *Approximation Theory, DARBA, Sofia*, 84 – 132 (2002).
- [11] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", *Anal. Math.*, **1**, 249 – 257 (1975).
- [12] Г. Г. Геворкян, А. С. Мартirosян, "Мажоранта и функция Пэли рядов по общей системе Франклина", *Труды МИАН*, **280**, 138 – 149 (2013).
- [13] Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", *Analysis Mathematica*, **16**, 87 – 114 (1990).
- [14] P. Sjölin, "Convergence almost everywhere of spline expansions in Hardy spaces", In: *Topics in modern harmonic analysis*, (Turin/Milan, 1982). *Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi*, Rome, 645 – 651 (1983).
- [15] P. Sjölin, J. O. Strömberg, "Basis properties of Hardy spaces", *Ark. Mat.*, **21**, 111 – 125 (1983). *Analysis Mathematica*, **16**, 87 – 114 (1990).
- [16] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", *Studia Math.* **27**, 289 – 323 (1966).
- [17] P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^{1n} ", *Ark. Mat.*, **20**, 293–300 (1982).

- [18] G. G. Gevorkian, "Some theorems on unconditional convergence and a majorant of Franklin series and their application to the spaces $Re(H^p)$ ", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 49 – 76 (1992).
- [19] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", *Studia Math.*, 23, 141 – 157 (1963).
- [20] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin system as bases in $H^1[0, 1]$ ", *Studia Math.*, 167, 259 – 292 (2005).
- [21] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton (1993).

Поступила 7 июня 2012

ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА И ГАНКЕЛЯ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ВЕРГМАНА-ДЖРВАШАНА ГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

М. А. ЗАКАРЯН

Иджеванский филиал Ереванского государственного университета
E-mail: mzakaryan@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются весовые пространства гармонических функций. Имея нижние и верхние оценки эквивалентного ядра этого пространства мы рассматриваем операторы Теплица и Ганкеля с различными символами, а также мы изучаем некоторый компакт и критерий Фредгольма для них.

MSC2010 number: 42B35

Ключевые слова: Матрица Теплица, матрица Ганкеля, весовое пространство, гармоническая функция, весовая функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\omega : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\omega(t) \neq 0$ п.в. и пусть $L^p(\omega) := L^p(B_n, \omega(1 - |x|) dm_n) = L^p$ весовые пространства на единичном шаре B_n из $\mathbb{R}^n$, где $1 \leq p < \infty$, а dm_n нормированная мера Лебега на B_n . Для $n \geq 2$, пусть $h(B_n)$ пространство всех гармонических функций на B_n . Рассмотрим операторы Теплица и Ганкеля на пространствах $h^p(\omega) := h(B_n) \cap L^p(\omega)$, $1 \leq p < \infty$ индуцированных нормой $\|\cdot\|_{\omega, p}$ в пространстве Банаха $L^p(\omega)$. Напомним, что (см. [17]) измеримая по Лебегу функция $\omega : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ называется *правильно меняющейся в нуле*, если существуют постоянные $\delta, \theta \in (0, 1)$, и $m, M > 0$ такие, что для всех $t \in (0, \delta)$ и любого $\lambda \in [\theta, 1]$ имеем $\omega(t) > 0$ и

$$(1.1) \quad m \leq \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} \leq M.$$

Пусть S есть множество всех таких функций ω , с условием, что ω и $1/\omega$ ограничены п.в на каждом компактном множестве из $(0, 1]$. Очевидно, что S замкнуто относительно конечных произведений и для $\omega \in S$ имеем $\omega^\gamma \in S$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$.

¹Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта.

Из теоремы A1 работы [17] следует, что действительнoзначная функция $\omega(t)$ определенная на $(0, 1]$ принадлежит S тогда и только тогда, когда существуют измеримые ограниченные функции $\epsilon, \eta: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и $0 < \delta \leq 1$ такие, что

$$(1.2) \quad \omega(t) = \exp \left(\eta(t) + \int_1^t \frac{\epsilon(s)}{s} ds \right), \quad t \in (0, \delta].$$

Для функции $\omega \in S$, которая имеет вид (1.2), определим

$$\sigma_0(\omega) := \bigcap_{0 < \delta < 1} \text{esssup}(\epsilon|_{(0, \delta]}),$$

где $\{\text{esssup}\}(\epsilon|_{(0, \delta]})$ есть существенный образ функции ϵ в интервале $(0, \delta]$. Так как $\sigma_0(\omega)$ является компактным множеством из $\mathbb{R}$, то числа $\alpha_\omega := \max \sigma_0(\omega)$ и $\beta_\omega := \min \sigma_0(\omega)$ существуют. Из (1.2) вытекает, что для $\beta < \beta_\omega \leq \alpha_\omega < \alpha$ существуют постоянные $c, C > 0$ такие, что $ct^\beta \leq \omega(t) \leq Ct^\beta$ для всех $t \in (0, 1]$.

Для весовой функции $\omega \in L^1(0, 1] \cap S$ имеем $\alpha_\omega \geq -1$. Пример $\omega(t) := t^{-1}(\log(e/t))^{-2}$ с $\beta_\omega = -2$, $\alpha_\omega = -1$ показывает, что $\alpha_\omega = -1$ достижимо. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ нетрудно построить вес из $L^1(0, 1] \cap S$ такой, что $\beta_\omega < s$. Однако мы ограничиваемся весами $\omega \in S$ такими, что $\beta_\omega > -1$ и которые принадлежат пространству $L^1(0, 1]$. Весовые пространства аналитических и гармонических функций с различными весами из $L^1(0, 1] \cap S$ были интенсивно исследованы в литературе. Известные результаты были получены для степенного веса $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$. В частности, в случае гармонических функций воспроизводящее ядро для пространства $h^p(\omega_\alpha)$ было получено в [7] для $\alpha \in \mathbb{N}_0$, а в [8] для всех $\alpha > -1$. Отметим, что для $\alpha \in \mathbb{N}$ найденные ядра различны, причем в обоих случаях эти ядра являются эквивалентными.

2. Рост оценки для воспроизводящего ядра и проекция типа БЕРГМАНА-ДЖРВАШАНА

Ниже нам понадобится следующий результат.

Лемма 2.1. Пусть $\omega \in S$, $0 < \alpha < \alpha_\omega$, $\beta_\omega > -1$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $r \in [0, 1]$

$$(2.1) \quad I(r) := \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} d\rho \leq C \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^\alpha}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \in (\alpha_\omega, \alpha)$ и $\beta \in (-1, \beta_\omega)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\text{esssup}(\epsilon|_{(0, \delta]}) \subset (\beta, \alpha)$, где ω представлена в виде (1.2). Для $\delta \leq 1 - r \leq 1$ имеем $I(r) \leq \delta^{-\alpha-1} \|\omega\|_{L^1(0, 1]} < \infty$. Так как правая часть в (2.1)

существенно ограничена снизу, то желанная оценка имеет место почти для всех $r \in [0, 1 - \delta]$. Для $0 < 1 - r < \delta$ имеем

$$I(r) = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt = \int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\delta} + \int_{\delta}^1 := I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).$$

Следовательно, обозначая $u(1-r) = t$ из (1.2) для всех $r \in [0, 1 - \delta]$ получаем

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \int_0^{1-r} \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \leq \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \int_0^1 \frac{\omega(u(1-r))}{\omega(1-r)} du \\ &= \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \int_0^1 \exp \left(\eta((1-r)u) - \eta(1-r) + \int_{1-r}^{u(1-r)} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right) du \\ &\leq \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \exp(2 \|\eta\|_{L^\infty(0,1)}) \int_0^1 \exp \left(\beta \log \left(\frac{(1-r)u}{1-r} \right) \right) du \\ &\leq C_1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a}, \end{aligned}$$

так как интеграл $\int_0^1 u^\beta du$ конечен. Аналогично получаем оценку для второго интеграла

$$\begin{aligned} I_2(r) &= \int_{1-r}^{\delta} \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \leq \frac{1}{r^{a+1}} \int_{1-r}^{\delta} \frac{\omega(t)}{t^{a+1}} dt \\ &\leq \frac{\omega(1-r)}{(1-\delta)^{a+1}} \int_{1-r}^{\delta} t^{-a-1} \exp \left(\eta(t) - \eta(1-r) + \int_{1-r}^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right) dt \\ &\leq C' \omega(1-r) \int_{1-r}^{\delta} t^{-a-1} \exp \left(\alpha \log \left(\frac{t}{1-r} \right) \right) dt \\ &\leq \frac{C' \omega(1-r)}{(1-r)^a (a-\alpha)} \left((1-r)^{a-\alpha} - \delta^{a-\alpha} \right) \leq C_2 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \end{aligned}$$

для почти всех $r \in [1 - \delta, 1]$. Так как

$$I_3(r) \leq \int_{\delta}^1 \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \leq \delta^{-a-1} \|\omega\|_{L^1((0,1))} < \infty,$$

для почти всех $r \in [1 - \delta, 1]$, то лемма 2.1 доказана. □

Аналогичный результат для полудиска был получен в [16].

Для $x, y \in B_n$ имеем $x = |x|x', y = |y|y'$ где $x', y' \in S_{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Если $\omega \in L^1(0, 1] \cap S$ и $\alpha > \alpha_\omega$, то $h^p(\omega) \subset h^p(\omega_\alpha)$. Используя ядро типа Джрбашяна [8] и теорему 7.1 из [8], для всех $f \in h^p(\omega_\alpha)$ получаем следующую интегральную формулу

$$(2.2) \quad f(x) = \int_{B_n} f(y) Q_\alpha(x, y) (1 - |y|^2)^\alpha d\sigma_n(y), \quad x \in B_n,$$

где

$$Q_\alpha(x, y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1 + n/2)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(k + n/2)} (|x| |y|)^k Z_x^k(y')$$

где $Z_x^k(y')$ — зональные гармоники (см. [19], [20] или [3]).

Учитывая, что верхнюю оценку для воспроизводящего ядра можно найти в [7] и [8], а нижнюю оценку в [15], то приходим к следующему результату:

Лемма 2.2. (см. [15] Свойство 4 и [8] теорема 7.1) Для фиксированного $\alpha > -1$ и $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, имеем:

- a) Существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x, y \in B_n$ имеет место верхняя оценка

$$|Q_\alpha(x, y)| \leq \frac{C(1 - |x||y|)^{\{\alpha\}-1}}{\left((|x||y|)^2 - 2|x||y|\langle x', y' \rangle + 1\right)^{(n+[\alpha]-1)/2}}.$$

- b) Существуют постоянные $R_0 \in (0, 1/4)$, $\theta \in [1/2, 1)$, и $c, \hat{C} \in (0, \infty)$ такие, что для всех $R \in (0, R_0)$ и всех $x, y \in B_n$, $|x| \geq \theta$ и $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$, имеет место следующая оценка

$$Q_\alpha(x, y) \geq \frac{c}{(1 - |x||y|)^{n+\alpha}} \geq \frac{\hat{C}}{\left((|x||y|)^2 - 2|x||y|\langle x', y' \rangle + 1\right)^{(n+\alpha)/2}},$$

где $B_{R(1-|x|)}(x)$ шар с центром в x и радиусом $R(1 - |x|)$.

Лемма 2.3. Для $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ и $\alpha > -1$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x \in B_n$ и любого $\rho \in [0, 1]$, имеем

$$(2.3) \quad J_\alpha(x, \rho) := \int_{S_{n-1}} |Q_\alpha(x, \rho y')|^p d\sigma_{n-1}(y') \leq \frac{C}{(1 - \rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}},$$

где σ_{n-1} — нормированная поверхностная мера на S_{n-1} .

Доказательство. Используя лемму 2.2, получаем

$$J_{\alpha}(x, \rho) \leq C_0 \int_{S_{n-1}} \frac{(1 - \rho|x|)^{-(\alpha+1)p}}{((\rho|x|)^2 - 2\rho|x|(x', y') + 1)^{p(n+|\alpha|-1)/2}} d\sigma(y').$$

Очевидно, что $\sup_{\rho|x| \leq \frac{1}{2}} J_{\alpha}(x, \rho) < \infty$. Предположим, что $\rho|x| > 1/2$ и выберем координатную систему так, что $x = |x|(1, 0, \dots, 0)$. Учитывая, что $\sigma_{n-2}(S_{n-2}) = 1$, и используя свойства А.4 и А.6 из [3], получаем:

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(x, \rho) &\leq C \frac{(n-1)V_{n-1}}{nV_n} (1 - \rho|x|)^{-(\alpha+1)p} \\ &\quad \cdot \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{((\rho|x|)^2 - 2\rho|x|t + 1)^{p(n+|\alpha|-1)/2}} dt \\ &\leq C_1 (1 - \rho|x|)^{-(\alpha+1)p} \left(1 + \int_0^1 \frac{(\rho|x|)^{-\frac{n-3}{2}}}{((\rho|x|)^2 - 2\rho|x|t + 1)^{p(n+|\alpha|-1-n+3)/2}} dt \right) \\ &\leq C_2 \frac{(1 - \rho|x|)^{-(\alpha+1)p}}{(1 - \rho|x|)^{p(n+|\alpha|-1)-n+1}} = \frac{C_2}{(1 - \rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}}, \end{aligned}$$

где $V_{n-1} = V_{n-1}(B_{n-1})$ и $V_n = V_n(B_n)$ суть объемы шаров B_{n-1} и B_n соответственно. Лемма 2.3 доказана. $\square$

Для $1 < p < \infty$ обозначим $p' := \frac{p}{p-1}$ так, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Лемма 2.4. Пусть $1 < p < \infty$ и $\omega \in S$ вида (1.2) и $\beta_{\omega} > -1$. Тогда для любого $\alpha > \max \left\{ -1, \frac{1}{p}(\alpha_{\omega} + n) - n \right\}$ существуют постоянные $c, C > 0$ такие, что

$$(2.4) \quad c \frac{\omega(1-|x|)^{1/p}}{(1-|x|)^{\alpha+n/p'}} \leq \|Q_{\alpha}(x, \cdot)\|_{\omega, p} \leq C \frac{\omega(1-|x|)^{1/p}}{(1-|x|)^{\alpha+n/p'}} \text{ п.в. на } B_n.$$

Доказательство. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\|Q_{\alpha}(x, \cdot)\|_{\omega, p}^p = \int_0^1 \omega(1-\rho) \frac{\rho^{n-1}}{n} \int_{S_{n-1}} \|Q_{\alpha}(x, \rho y')\|^p d\sigma_{n-1}(y') d\rho.$$

Из леммы 2.3 вытекает, что

$$\|Q_{\alpha}(x, \cdot)\|_{\omega, p}^p \leq C \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}} d\rho.$$

Верхняя оценка в (2.4) есть следствие леммы 2.1. Для нижней оценки мы применим оценку для $Q_{\alpha}(x, y)$ в $B_{R(1-|x|)}(x)$ из леммы 2.2.

Пусть $R_0 \in (0, 1/4)$, $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ будут как и в лемме 2.2. Тогда для $\theta \leq |x| < 1$, $0 < R < R_0$, и $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$ имеем

$$Q_\alpha(x, y) \geq c_1(1 - |x||y|)^{-n-\alpha} \geq c_2(1 - |x|)^{-n-\alpha},$$

где $c_2 = c_1 3^{-n-\alpha}$. Отсюда, для $\theta \leq |x| < 1$ и $0 < R < R_0$ получаем

$$\begin{aligned} \|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}^p &\geq \int_{B_{R(1-|x|)}(x)} \|Q_\alpha(x, y)\|^p \omega(1 - |y|) dm_n(y) \\ &\geq c_2(1 - |x|)^{-p(n+\alpha)} \int_{B_{R(1-|x|)}(x)} \omega(1 - |y|) dm_n(y). \end{aligned}$$

Так как $\omega \in S$, то существуют $\theta_1 \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1]$ и постоянные $m, M > 0$ такие, что $m \leq \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} \leq M$ для любого $t \in (0, \delta]$, $\lambda \in [\theta_1, 1)$. Для $0 < R < R_1 := \min\{R_0, 1 - \theta_2, \theta_2^{-1} - 1\}$, $r_0 := \max\{1 - \delta/2, \theta\} < |x| < 1$ и для всех $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$ имеем $1 - |y|, 1 - |x| \in (0, \delta)$ и $\theta_2 \leq 1 - R \leq \frac{1-|y|}{1-|x|} \leq 1 + R \leq \frac{1}{\theta_2}$. Следовательно, получаем

$$m_0 := \min \left\{ m, \frac{1}{M} \right\} \leq \frac{\omega(1 - |y|)}{\omega(1 - |x|)} \leq M_0 := \max \left\{ m, \frac{1}{M} \right\}.$$

Отсюда для $r_0 \leq |x| < 1$ и $0 < R < R_1$ получим

$$\begin{aligned} \|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}^p &\geq c_2 \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)}} \int_{B_{R(1-|x|)}(x)} \frac{\omega(1 - |y|)}{\omega(1 - |x|)} dm_n(y) \\ &\geq c_2 m_0 \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)}} m_n(B_{R(1-|x|)}(x)) = c_3 R^n \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)-n}}, \end{aligned}$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от R и x . Нетрудно видеть, что функция $x \mapsto \|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}$ со значениями $(0, \infty)$ непрерывна на $r\overline{B}_n$ и следовательно, ограничена снизу на $r\overline{B}_n$. Отсюда следует, что для фиксированного $R \in (0, R_1)$ существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $|x| \in B_n$ нижняя оценка в (2.4) имеет место. $\square$

Далее, мы рассматриваем интегральные операторы P_γ , $\gamma > -1$, заданные формулами

$$(P_\gamma f)(x) := \int_{B_n} (1 - |y|^2)^\gamma Q_\gamma(x, y) f(y) dm_n(y).$$

Известно, что для $\gamma > (1 + \alpha)/p - 1$ оператор P_γ определяет ограниченный проектор из $L^p(\omega_\alpha)$, $1 < p < \infty$ на $h^p(\omega_\alpha)$, где $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$, $0 < t \leq 1$ (см. [8], теорема 7.3). Точнее, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.1. Пусть $\omega \in S$, $\beta_\omega > -1$ и $p \in (1, \infty)$. Тогда для всех $\gamma > \frac{(1+\alpha_\omega)}{p} - 1$ оператор P_γ есть ограниченный проектор из $L^p(\omega)$ на $h^p(\omega)$.

Доказательство. Как и в классическом случае, мы применим критерий Шура (см. [8] Лемма 2.2, или [11] теорема 1.8). Так как p' сопряженный к p , то будем иметь $-(\gamma+1)/p' < (\gamma-\alpha_\omega)/p$ и $-(\beta_\omega+1)/p < 0$. Отсюда вытекает, что интервалы $((\gamma-\alpha_\omega)/p, 0)$ и $(-(\gamma+1)/p', 0)$ имеют непустое пересечение. Фиксируем некоторое s из этого пересечения и обозначим $h(x) := (1-|x|)^s$, $x \in B_n$. Тогда используя лемму 2.3 получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_n} (1-|y|^2)^\gamma |Q_\gamma(x, y)| h(y)^{p'} dm_n(y) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 \rho^{n-1} (1-\rho^2)^{\gamma+sp'} \int_{S_{n-1}} |Q_\gamma(x, \rho y')| d\sigma_{n-1}(y') d\rho \\ &\leq C \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\gamma+sp'}}{(1-\rho|x|)^{\gamma+1}} d\rho \leq C_1 (1-|x|)^{p's} = C_1 h(x)^{p'}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы применили лемму 2.1 для степенного веса $t \mapsto t^{\gamma+sp'}$, что имеет место, так как $\gamma+sp' > -1$ и $\gamma+sp' < \gamma$. Замечая, что $Q_\gamma(x, y) = Q_\gamma(y, x)$ и используя лемму 2.3, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_n} \frac{(1-|y|^2)^\gamma}{\omega(1-|y|)} |Q_\gamma(x, y)| h(x)^p \omega(1-|x|) dm_n(x) \\ &= \frac{(1-|y|^2)^\gamma}{n\omega(1-|y|)} \int_0^1 \rho^{n-1} (1-\rho)^{sp} \omega(1-\rho) \int_{S_{n-1}} |Q_\gamma(\rho x', y)| d\sigma_{n-1}(x') d\rho \\ &\leq C_2 \frac{(1-|y|)^\gamma}{\omega(1-|y|)} \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{sp} \omega(1-\rho)}{(1-\rho|x|)^{\gamma+1}} d\rho \leq C_3 (1-|y|)^{sp} = C_3 h(y)^p, \end{aligned}$$

где мы применили лемму 2.1 для функции $\tilde{\omega} : t \mapsto \omega(t)t^{sp}$, так как $\beta_{\tilde{\omega}} = \beta_\omega + sp > -1$ и $\alpha_{\tilde{\omega}} = \alpha_\omega + sp < \gamma$. По критерию Шура P_γ есть ограниченный линейный оператор в $L^p(\omega)$, который удовлетворяет условию $\text{га}P_\gamma = h^p(\omega)$ и $P_\gamma^2 = P_\gamma$. $\square$

Из последнего свойства получаем, что $h^p(\omega)$ есть банахово пространство, так как оно является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $L^p(\omega)$. Отсюда следует также, что $Q_\alpha(x, y)$ есть эквивалентное ядро для

пространства $h^p(\omega)$:

$$(2.5) \quad |Q_\alpha(x, y)| \approx |Q_\omega(x, y)|,$$

где $A \approx B$ означает $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ с положительными постоянными C_1 и C_2 .

Лемма 2.5. Пусть $\omega \in S$, $\beta_\omega > -1$ и $p \in (1, \infty)$. Тогда для любого

$$\alpha > \max\{-1, \frac{1}{p}(\alpha_\omega + n) - n\}$$

имеем $\|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}^{-1} Q_\alpha(x, \cdot) \rightarrow 0$ слабо в $h^p(\omega)$ при $|x| \rightarrow 1$.

Доказательство. Для любого непрерывного линейного функционала Φ на $h^p(\omega)$ существует $f \in L^{p'}(\omega)$ такая, что

$$\Phi(u) = \int_{B_n} u(y) f(y) \omega(1 - |y|) dm_n(y).$$

Для всех непрерывных функций на B_n с компактным носителем и $r := \max_{y \in \text{supp}(f)} |y| < 1$ из леммы 2.2 получаем

$$C_f := \sup_{x, y \in B_n} |Q_\alpha(x, y) f(y)| \omega(1 - |y|) < \infty.$$

Используя лемму 2.4 и выбирая $\alpha_1 \in (\alpha_\omega, p(n + \alpha) - n)$, получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_n} \frac{Q_\alpha(x, y) f(y)}{\|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}} \omega(1 - |y|) dm_n(y) \right| \\ & \leq C \frac{(1 - |x|)^{\alpha + n/p'}}{\omega(1 - |x|)} \leq (1 - |x|)^{p(n + \alpha) - n - \alpha_1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $|x| \rightarrow 1$, где постоянная $C > 0$ зависит только от ω и α_1 . Так как функции с компактным носителем в B_n плотны в $L^{p'}(\omega)$ и $\|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}^{-1} Q_\alpha(x, \cdot) \equiv 1$, то для любой $f \in L^{p'}(\omega)$ имеем

$$\int_{B_n} \frac{Q_\alpha(x, y) f(y)}{\|Q_\alpha(x, \cdot)\|_{\omega, p}} \omega(1 - |y|) dm_n(y) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow 1.$$

□

3. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА И ГАНКЕЛЯ С РАЗЛИЧНЫМИ СИМВОЛАМИ

Для $\varphi \in L^\infty(B_n)$ оператор Теплица на $h_\omega^p(B_n)$ определяется следующим образом $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$, где $P: L_\omega^p(B_n) \rightarrow h_\omega^p(B_n)$ непрерывная проекция ($1 < p < \infty$). T_φ есть ограниченный оператор и ясно, что $|T_\varphi| \leq |P| \|\varphi\|_\infty$. Сопряженный к

T_φ оператор T_φ^* определяется как $T_\varphi^* : h_\omega^p(B_n) \rightarrow h_\omega^p(B_n)$, $T_\varphi^*(\Phi)f = \Phi(T_\varphi f)$, где $\Phi \in (h_\omega^p(B_n))^*$ или с скалярным произведением: $\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle f, T_\varphi^* g \rangle$ где $f \in h_\omega^p(B_n)$, $g \in h_\omega^p(B_n)$. Пусть $\mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))$ обозначает замкнутый компактный идеал в $\mathcal{L}(h_\omega^p(B_n))$. Норма $S + \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))$ в $\mathcal{L}(h_\omega^p(B_n))/\mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))$ определяется так:

$$|S + \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))| = \inf_{K \in \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))} |S + K|.$$

Нетрудно доказать следующие свойства:

Предложение 3.1. Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty(B_n)$ и $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

- i) $T_{a\varphi_1 + b\varphi_2} = aT_{\varphi_1} + bT_{\varphi_2}$,
- ii) T_1 есть тождественный оператор,
- iii) $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$, где $T_{\bar{\varphi}}$ есть оператор Теплица с символом $\bar{\varphi}$ определенный на $h_\omega^p(B_n)$.

Предложение 3.2. Пусть G компактное подмножество в B_n и $\varphi \in L^\infty(B_n)$, $\varphi \equiv 0$ на $B_n \setminus G$. Тогда T_φ есть компактный оператор на $h_\omega^p(B_n)$.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $h_\omega^p(B_n)$. Так как $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть равномерно ограниченная последовательность на каждом компактном подмножестве в B_n , то существует функция f на B_n такая, что некоторая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ последовательности $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на G . Следовательно, f — гармоническая функция. Значит $\{\varphi f_{n_j}\}$ сходится по норме $L_\omega^p(B_n)$ к $\{\varphi f\}$ и тогда оператор произведения $M_\varphi : h_\omega^p(B_n) \rightarrow L_\omega^p(B_n)$ есть компактный оператор. Поэтому, $T_\varphi = PM_\varphi|_{h_\omega^p(B_n)}$ есть компактный оператор. $\square$

Следствие 3.1. $|T_\varphi + \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \sup_{r < |x| < 1} |\varphi(x)|$.

Доказательство. Так как при $r < 1$ $T_{\varphi\chi(B_n)_r}$ есть компактный оператор, имеем

$$\begin{aligned} |T_\varphi + \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))| &= \inf_{K \in \mathfrak{K}(h_\omega^p(B_n))} |T_\varphi + K| \leq |T_\varphi - T_{\varphi\chi(B_n)_r}| \\ &= |T_\varphi - \varphi\chi(B_n)_r| \leq |\varphi - \varphi\chi(B_n)_r| = \sup_{r < |x| < 1} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

$\square$

Оператор Ганкеля $H_\varphi, H_\varphi : h_\omega^p(B_n) \rightarrow L_\omega^p(B_n)$ определяется так: $H_\varphi f = (I - P)(\varphi f)$ где $\varphi \in L^\infty(B_n)$. Между операторами Ганкеля и Теплица имеется связь:

$T_{\varphi\psi} - T_{\varphi}T_{\psi} = H_{\varphi}^*H_{\psi}$, где

$$\begin{aligned} T_{\varphi}, T_{\psi}, T_{\varphi\psi} : h_{\omega}^p(B_n) &\rightarrow h_{\omega}^p(B_n), \\ H_{\psi} : h_{\omega}^p(B_n) &\rightarrow L_{\omega}^p(B_n), H_{\varphi}^* : L_{\omega}^p(B_n) \rightarrow h_{\omega}^p(B_n). \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что

$$(3.1) \quad H_{\varphi\psi} = S_{\varphi}H_{\psi} + H_{\varphi}T_{\psi},$$

где $H_{\varphi}, H_{\psi}, H_{\varphi\psi} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n), T_{\psi} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow h_{\omega}^p(B_n), S_{\varphi} : L_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n), \varphi, \psi \in L^{\infty}(B_n), 1 < p < \infty$. Из (3.1) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.3. Пусть $1 < p < \infty$ фиксировано. Множество функций $\varphi \in C(\overline{B_n})$ таких, что оператор Ганкеля $H_{\varphi} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n)$ компактен, составляют замкнутую подалгебру в $C(\overline{B_n})$.

Заметим, что если $\varphi \in L^{\infty}(B_n), n \in (1, \infty)$, то $H_{\varphi} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n)$ представляется в виде:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad (H_{\varphi}f)(x) &= (I - P)(\varphi f) = \varphi(x)f(x) - P(\varphi f)(x) \\ &= \varphi(x) \int_{B_n} (1 - |y|^2)^{\alpha} Q_{\alpha}(x, y) f(y) dm_n(y) \\ &\quad - \int_{B_n} (1 - |y|^2)^{\alpha} Q_{\alpha}(x, y) \varphi(y) f(y) dm_n(y) \\ &= \int_{B_n} (1 - |y|^2)^{\alpha} Q_{\alpha}(x, y) (\varphi(x) - \varphi(y)) f(y) dm_n(y) \\ &= \int_{B_n} (1 - |y|^2)^{\alpha} Q_{\alpha}^{\varphi}(x, y) f(y) dm_n(y), \end{aligned}$$

где $Q_{\alpha}^{\varphi}(x, y) = (\varphi(x) - \varphi(y))Q_{\alpha}(x, y)$ есть так называемое ядро интегрального оператора (3.2).

Докажем результат, который в безвесовом случае можно найти в [12].

Теорема 3.1. Пусть $p \in (1, \infty)$ и φ непрерывная функция на B_n . Оператор Ганкеля $H_{\varphi} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n)$ компактен.

Доказательство. Так как $A = \{\varphi \in C(\overline{B_n}) : H_{\varphi} \text{ компактен}\}$ есть замкнутая подалгебра в $C(\overline{B_n})$, то достаточно показать, что $A = C(\overline{B_n})$. Согласно теореме Стоуна-Вайерштрасса достаточно показать, что $H_{x_j} : h_{\omega}^p(B_n) \rightarrow L_{\omega}^p(B_n), f \mapsto$

$(I - P)(x_j f)$ есть компакт, где $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ есть j -ая координата точки x . Согласно (3.2) имеем

$$(3.3) \quad (H_{x_j} f)(x) = \int_{B_n} (1 - |y|^2)^\alpha Q_\omega^{x_j}(x, y) f(y) dm_n(y)$$

где $Q_\omega^{x_j}(x, y) = (x_j - y_j) Q_\omega(x, y)$. Покажем, что для некоторых $q > 1$ и ω интеграл

$$I := \int_{B_n} \omega(1 - |x|) \left(\int_{B_n} \omega(1 - |y|) |Q_\omega^{x_j}(x, y)|^{q'} dm_n(y) \right)^{q/q'} dm_n(x)$$

ограничен. Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{B_n} \omega(1 - |x|) \left(\int_{B_n} \omega(1 - |y|) \frac{|x_j - y_j|^{q'}}{|px' - y'|^{q'(n+\alpha)}} dm_n(y) \right)^{q/q'} dm_n(x) \\ &\leq \int_{B_n} \omega(1 - |x|) \left(\int_0^1 \frac{\omega(1 - |y|) d\rho}{(1 - \rho r)^{q'(n+\alpha) - n + 1 - q'}} \right)^{q/q'} dm_n(x). \end{aligned}$$

Последний интеграл ограничен при $q > \frac{n+\alpha_\omega}{\alpha_\omega - \alpha + 1}$ и $\alpha - 1 < \alpha_\omega < n + 2\alpha + 1$. Используя интерполяцию операторов для весовых L^p пространств, мы получим, что $T : L_\omega^p(B_n) \rightarrow L_\omega^p(B_n)$ есть компактный оператор. Так как H_{x_j} сужение T на $h_\omega^p(B_n)$, то H_{x_j} есть компактный оператор. Для того чтобы для операторов типа (3.2) были выполнены эти условия достаточно выбрать ω так, чтобы $\alpha - 1 < \alpha_\omega < \alpha + 1$. $\square$

Следствие 3.2. Пусть $\varphi, \psi \in C(\overline{B_n})$. Тогда операторы $T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi$ и $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ компактны на $h_\omega^p(B_n)$.

Теорема 3.2. Если $\varphi \in C(\overline{B_n})$ то $\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\partial B_n)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\sigma_e(T_\varphi) \subset \varphi(\partial B_n)$. Без ограничения общности предположим, что $0 \notin \varphi(\partial B_n)$. Нам нужно показать, что T_φ есть Фредгольмов оператор. Пусть $\psi \in C(\overline{B_n})$ такой, что $\psi = \frac{1}{\varphi}$ на ∂B_n . Согласно Утверждению 3.2, $T_{\varphi\psi} - I = T_{\varphi\psi - I}$ есть компакт и с (3.2) оператор $T_\psi T_\varphi - I$ и $T_\varphi T_\psi - I$ есть компактный оператор. Из теоремы Аткинсона следует, что T_φ есть компактный оператор. Сейчас покажем, что $\varphi(\partial B_n) \subset \sigma_e(T_\varphi)$. Пусть $\varphi(\theta) = 0$ для некоторого $\theta \in \partial B_n$. Нужно показать, что T_φ есть не фредгольмов оператор. Предположим обратное: T_φ есть Фредгольмов оператор. По теореме Аткинсона существует $S \in \mathcal{L}(h_\omega^p(B_n))$ такое, что $ST_\varphi - I$ есть компактный оператор на

$h_{\omega}^p(B_n)$. По лемме 2.5 $ST_{\varphi} \|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^{-1} Q_{\omega}(x, \cdot) - \|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^{-1} Q_{\omega}(x, \cdot) \rightarrow 0$ по норме топологии на $h_{\omega}^p(B_n)$ при $|x| \rightarrow 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|ST_{\varphi} \|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^{-1} Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^p &\leq C \left\| M_{\varphi} \frac{Q_{\omega}(x, \cdot)}{\|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}} \right\|_{\omega, p}^p \\ &= C \int_{B_n} \omega(1-|y|) |\varphi(y)|^p \frac{|Q_{\omega}(x, y)|^p}{\|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^p} dm_n(y) \\ &= C \left(\int_{A_n} + \int_{B_n \setminus A_n} \right), \end{aligned}$$

где $A_n = \{y \in B_n : |y - \theta| < \delta, \delta > 0\}$. Так как $\varphi(\theta) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \theta$, то для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать δ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{A_n} \omega(1-|y|) |\varphi(y)|^p \frac{|Q_{\omega}(x, y)|^p}{\|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^p} dm_n(y) &\leq \\ \varepsilon \int_{B_n} \omega(1-|y|) \frac{|Q_{\omega}(x, y)|^p}{\|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^p} dm_n(y) &= \varepsilon, \\ \int_{B_n \setminus A_n} \omega(1-|y|) |\varphi(y)|^p \frac{|Q_{\omega}(x, y)|^p}{\|Q_{\omega}(x, \cdot) \|_{\omega, p}^p} dm_n(y) &\leq \\ \leq C \int_{|y-\theta| \geq \delta} \frac{(1-|x|)^{(n+\alpha)p-n}}{\omega(1-|x|)} |Q_{\omega}(x, y)|^p dm_n(y) &\leq C_1 \varepsilon, \end{aligned}$$

если $|x - \theta|$ достаточно мало. Это противоречие и доказывает теорему. $\square$

Следствие 3.3. Пусть $\varphi \in C(\overline{B_n})$, $1 < p < \infty$, тогда T_{φ} есть компактный оператор на $h_{\omega}^p(B_n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \equiv 0$ на ∂B_n .

4. ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА С РС И МАТРИЦ СИМВОЛАМИ НА $h_{\omega}^p(B^n)$

Пусть F — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ пересекающая B_n . Тогда множество $B_n \setminus F$ состоит из двух частей, которые обозначаем через B_n^+ и B_n^- .

$$B_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n : \det(a_1, \dots, a_{n-1}, y - x_0) > 0\}$$

$$B_n^- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n : \det(a_1, \dots, a_{n-1}, y - x_0) < 0\},$$

где $a_1, \dots, a_{n-1}$ есть произвольный базис в F , $x_0 \in F$ фиксировано и $y \in B_n$.

Обозначая $F \cup \partial B_n = \partial F$ и определяя

$$HC(B_n) = \left\{ \varphi \in L^{infv}(B_n) : \varphi|_{B_n^+}, \varphi|_{B_n^-} - \text{равномерно непрерывны} \right\},$$

замечаем, что $HC(B_n)$ есть замкнутая подалгебра из $L^\infty(B_n)$ и поэтому мы можем записать

$$HC(B_n) = \{ \langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \in C(B_n^+), \psi \in C(B_n^+) \}$$

. Напомним, что алгебра PC есть замкнутая подалгебра в $L^\infty(B_n)$, состоящая из кусочно непрерывных функций на T . Пусть $\varphi^\sharp$ есть кривая, соединяющая значения правого и левого пределов из φ прямыми отрезками в точке разрыва. Известно, что в гильбертовом пространстве H^2 справедлив следующий результат (см. [10]):

Предложение 4.1. *Если φ и $\psi \in PC$, то*

- i) $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ есть компакт,
- ii) T_φ есть Фредгольмов оператор тогда и только тогда, когда $\varphi^\sharp$ не проходит через начало координат.

Мы покажем, что эти свойства остаются справедливыми для φ и ψ из $HC(B_n)$. Отметим, что результат Предложения 4.1 зависит от факта, что мы можем аппроксимировать точки разрыва функции только для двух направлений из T . Эти свойства сохраняются для функции из $HC(B_n)$. Пусть $\lambda \in F$ и $f = \langle \varphi, \psi \rangle \in HC(B_n)$. Если мы аппроксимируем λ через B_n^+ , то $\lim f(x) = \varphi(\lambda)$, а если аппроксимируем λ через B_n^- , то $\lim f(x) = \psi(\lambda)$. Пусть $j(C(\overline{B_n}))$ и $j(HC(B_n))$ будут замкнутыми алгебрами из $\mathcal{L}(h_\omega^2(\partial B_n, \omega))$, порожденные $\{T_\varphi : \varphi \in C(\overline{B_n})\}$ и $\{T_\varphi : \varphi \in HC(B_n)\}$ соответственно. Для $\lambda \in \partial B_n$ определим замкнутую алгебру τ_λ в $j(HC(B_n))$, порожденную $\{T_\varphi : \varphi \in C(\overline{B_n}) ; \varphi(\lambda) = 0\}$.

Доказательства следующих двух лемм аналогичны следствиям из [13].

Лемма 4.1. i) Алгебра $j(C(\overline{B_n}))$ неприводима и содержит $K(h_\omega^2(B_n))$.

ii) $j(C(\overline{B_n})) / K(h_\omega^2(B_n))$ - *-изометрично изоморфн $C(\partial B_n)$ и имеет максимальный идеал пространства ∂B_n .

iii) Каждый идеал τ_λ содержит $K(h_\omega^2(B_n))$.

Лемма 4.2. Пусть $f = \langle \varphi, \psi \rangle \in HC(B_n)$. Существенный спектр T_φ состоит из $\{\varphi(\lambda) : \lambda \in \partial B_n \setminus \partial F\}$ вместе с замкнутыми прямолинейными отрезками, соединяющими $\varphi(\lambda)$ с $\psi(\lambda)$ для каждого $\lambda \in \partial F$.

Рассмотрим теперь критерий Фредгольма для операторов Теплица в n -мерном случае. Для этого мы будем использовать численный диапазон операторов. Мы

вычислим также индекс для этих операторов для специальных случаев. Пусть $L_N^2(B_n, \omega)$ ($L_N^2(\partial B_n, \omega)$) и $h_N^2(B_n, \omega)$ ($h_N^2(\partial B_n, \omega)$) будут пространства векторов столбцов длиной N с элементами, которые принадлежат $L^2(B_n, \omega)$ ($L^2(\partial B_n, \omega)$) и $h^2(B_n, \omega)$ ($h^2(\partial B_n, \omega)$). Функции из $h^2(\partial B_n, \omega)$ имеют единственное аналитическое продолжение в B_n (см. [10]). Соответственно, пусть $L^\infty(B_n)$ ($L^\infty(\partial B_n)$) будет пространство $N \times N$ матриц с элементами из $L^\infty(B_n)$ ($L^\infty(\partial B_n)$). Для простоты обозначим через $P(\bar{P})$ соответственно через $P_N(\bar{P}_N)$ проекцию из $L^2(B_n, \omega)$ ($L^2(\partial B_n, \omega)$) на $h^2(B_n, \omega)$ ($h^2(\partial B_n, \omega)$) соответственно $L_N^2(B_n, \omega)$ ($L_N^2(\partial B_n, \omega)$) на $h_N^2(B_n, \omega)$ ($h_N^2(\partial B_n, \omega)$).

Много свойств критерия фредгольмовости операторов Теплица можно найти например в [4] и [9].

Определение 4.1. Пусть A – единичная нормированная алгебра над C . Численный образ $V(A, a)$ в $a \in A$ определяется как

$$V(A, a) = \{f(a) : f \in D(A, 1)\},$$

где

$$D(A, 1) := \{f \in A^* : f(1_a) = \|f\| = 1\}.$$

Приведем некоторые свойства численного образа (см. [5], [6]).

Предложение 4.2. 1. Для $a, b \in A$ и $\alpha, \beta \in C$ имеем

$$i) V(A, a + b) \subset V(A, a) + V(A, b)$$

$$ii) V(A, a + b) = \alpha + \beta V(A, a)$$

$$iii) V(A, a) \text{ есть выпуклый компакт.}$$

2. Если B есть подалгебра из A , содержащая единичный элемент, то для каждого $b \in B$ $V(B, b) = V(A, b)$

3. Для каждого $a \in A$ имеем $\sigma(a) \subset \{V(A, a)\}$, где $\sigma(a)$ есть спектр элемента a из A .

Хорошо известно, что если T линейный ограниченный оператор над гильбертовым пространством H , то численный диапазон оператора T называется $W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$. Между этими двумя определениями существует следующая связь.

Лемма 4.3. (см. [6]) Пусть T – линейный ограниченный оператор над гильбертовым пространством H . Тогда $\overline{W(T)} = V(L(H, T))$.

Лемма 4.4. (см. [1]) Пусть A и B суть единичные алгебры, $a \in A$ и $\varphi : LH\{1_A, a\} \rightarrow B$ — линейное преобразование такое, что $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(1_A) = 1_B$. Тогда $V(B, \varphi(a)) \subset \{V(A, a)\}$.

Нам понадобится метод локализации, который можно найти в [9].

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{A}$ есть C^* -алгебра, A есть C^* -алгебра, содержащаяся в центре $\mathfrak{A}$ и имеющая максимальный идеал пространства M_A и для фиксированного $x \in M_A$, τ_x есть замкнутый идеал в A , порожденный через максимальный идеал $\{a \in A : \hat{a} = 0\}$ в A . Тогда $\bigcap_{x \in M_A} \tau_x = \{0\}$.

При этом,

1) Если Φ_x есть канонический эпиморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\tau_x$, то $\sum_{x \in M_A} \oplus \Phi_x$ есть $*$ -мономорфизм из $\mathfrak{A}$ на $\sum_{x \in M_A} \oplus \mathfrak{A}/\tau_x$.

2) T есть обратимый в τ_x тогда и только тогда, когда $\Phi_x(T)$ обратим в $\mathfrak{A}/\tau_x$ для $x \in M_A$.

Определение 4.2. Для $a \in L^\infty(\partial B_n)$ существенный образ $R(a)$ состоит из всех матриц $b \in C_{N \times N}$, для которых множество $\{t \in \partial B_n : |a(t) - b| < \varepsilon\}$ для всех $\varepsilon > 0$ имеет положительную меру.

Для $A \subset L^\infty_{N \times N}(\partial B_n)$ пусть $\tau(A)$ будет C^* -под-алгебра, порожденная $\{T_a : a \in A\}$ в $\mathcal{L}(h_N^2(\partial B_n, \omega))$ ($\mathcal{L}(h_N^2(B_n, \omega))$) и пусть $\mathfrak{A}(h_N^2(\partial B_n, \omega))$ ($\mathfrak{A}(h_N^2(B_n, \omega))$) будет идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(h_N^2(\partial B_n, \omega))$ ($\mathcal{L}(h_N^2(B_n, \omega))$)

Пусть $C(\partial B_n)(C(B_n))$ — пространство всех непрерывных функций на $\partial B_n(B_n)$, а $C_{N \times N}(\partial B_n)(C_{N \times N}(B_n))$ — пространство всех $N \times N$ матриц, элементы которых принадлежат $C(\partial B_n)(C(B_n))$. В этом случае имеем

$$\mathfrak{A} = \tau(L^\infty_{N \times N}(\partial B_n)) / \mathfrak{A}(h_N^2(\partial B_n, \omega))$$

соответственно

$$\mathfrak{A} = \tau(L^\infty_{N \times N}(B_n)) / \mathfrak{A}(h_N^2(B_n, \omega))$$

и

$$A = \tau(C(\partial B_n) \cdot I_N) / K(h_N^2(\partial B_n, \omega))$$

соответственно

$$A = \tau(C(B_n) \cdot I_N) / K(h_N^2(B_n, \omega)),$$

где I_N есть $N \times N$ единичная матрица и $C(\partial B_n) \cdot I_N (C(B_n) \cdot I_N)$ есть множество всех диагональных матриц, чьи элементы непрерывны. Множество A находится в центре $\mathfrak{A}$ и изоморфно $C(\partial B_n) (C(B_n))$, и мы можем локализовать $\mathfrak{A}$ к точкам ∂B_n . В самом деле, для t из ∂B_n пусть τ_t будет замкнутый идеал в $\mathfrak{A}$, порожденный $\{T_a \in \mathfrak{A} : a \in C(\partial B_n) \cdot I_N, a(t) = 0\}$ и $\mathfrak{A}_t$ будет частная алгебра $\mathfrak{A}/\tau_t$. Пусть Ψ_t будет естественный $*$ -гомеоморфизм из $\tau(L_{N \times N}^\infty(\partial B_n))$ на $\mathfrak{A}_t$. Из теоремы 4.1 следует, что оператор Тейлора T_a есть оператор Фредгольма тогда и только тогда, когда для всех $t \in \partial B_n$ $\Psi_t(T)$ есть обратимый в $\mathfrak{A}_t$. Пусть $U_\varepsilon(t)$ — окрестность точки t .

Теорема 4.2. Пусть $a \in L_{N \times N}^\infty(\overline{\partial B_n})$ такой, что для всех $t \in \partial B_n$ существует обратимая матрица $H_t, G_t \in C_{N \times N}$ такая, что $0 \notin \cap_{\varepsilon > 0} \overline{W(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)})}$. Тогда T_a есть оператор Фредгольма.

Доказательство. Пусть $c \in C(\overline{B_n}) \cdot I_N$ — непрерывная функция на B_n с элементами $c_{ii}, i = 1, 2, \dots, N$ чьи носители находятся в $U_\varepsilon(t)$ и значение в $\{0, 1\}$. Пусть $c_{ii} \equiv 1$ на $U_\varepsilon(t)$ и равна нулю на дополнении $U_\varepsilon(t)$. Для каждого t определим линейное преобразование из $\partial B_n : \Psi_t^c : L_{N \times N}^\infty(U_\varepsilon(t)) \rightarrow \mathfrak{A}; d \mapsto \Psi_t(T_{cd})$. Так как $\Psi_t^c(1) = \Psi_t(T_c) = \Psi_t(T_{1-(1-c)1}) = \Psi_t(T_1) - \Psi_t(T_{(1-c)1}) = 1$ и $|\Psi_d^c(d)| = |\Psi_t(T_{cd})| \leq |T_{cd}| = |cd| \leq |d|$, то $|\Psi_d^c| = 1$. Из леммы 4.4 следует, что численный диапазон $V(\mathfrak{A}_t, \Psi_d^c(d)) \subset V(L_{N \times N}^\infty(U_\varepsilon(t), d))$ и из свойства 4.2 получаем

$$\sigma(\Psi_d^c(d)) \subset V(\mathfrak{A}_t, \Psi_d^c(d)).$$

Тогда существует изометрия $d \mapsto M_d$ между $L_{N \times N}^\infty(U_\varepsilon(t))$ и $\mathcal{L}(L_N^2(U_\varepsilon(t)))$ и из свойства 4.2 следует, что $V(L_{N \times N}^\infty(U_\varepsilon(t))) = V(\mathcal{L}(L_N^2(U_\varepsilon(t))), M_d)$. Из леммы 4.3 получаем $V(L_{N \times N}^\infty(U_\varepsilon(t))) = \overline{W(d)}$. Так как $0 \notin \cap_{\varepsilon > 0} \overline{W(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)})}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $0 \notin \cap_{\varepsilon > 0} \overline{W(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)})}$ и $0 \notin \sigma(\Psi_d^c(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)}))$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\Psi_d^c(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)}) = \Psi(T_{c H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)}})$ обратим. Тогда $a = H_t^{-1} H_t a = H_t^{-1}((1-c) + c \chi_{U_\varepsilon(t)} + c \chi_{\partial B_n \setminus U_\varepsilon(t)}) H_t a$ и для Ψ_t имеем $\Psi_t(T_a) = \Psi_t(T_{H_t^{-1}(1-c)H_t a}) + \Psi_t(T_{H_t^{-1}c \chi_{U_\varepsilon(t)} H_t a})$. Так как $T_{1-c} \in \tau_t$, то $T_{H_t^{-1}(1-c)H_t a} = 0$ и

$$H_t^{-1} \Psi_t^c(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)}) G_t^{-1} = \Psi(T_{H_t^{-1}c H_t a |_{U_\varepsilon(t)} G_t G_t^{-1}}) = \Psi(T_a)$$

— обратимый оператор для всех $t \in \partial B_n$. □

Оценка для спектра T_φ и выпуклого множества численного диапазона T в гильбертовом пространстве получена в [22]. Остаются ли в силе эти свойства для многомерного пространства типа Бергмана-Джрбашяна, нуждается в изучении.

Основной результат для индекса операторов Фредгольма в многомерном случае пространства типа Бергмана-Джрбашяна в единичном шаре был получен в [21]. К сожалению, мы не смогли обобщить этот результат для $\mathbb{R}^n$ для гармонических функций. Поэтому мы вычислим индекс операторов Фредгольма при $n = 2$.

Лемма 4.5. Пусть K – комплексное множество из $\mathbb{C}$, а U – открытое множество из K . Для $a \in L_{N \times N}^\infty(U)$ и $b \in R(a)$ справедливо следующее включение:

$$\overline{W(b)} \subset \overline{W(a)}.$$

Доказательство. Пусть $y \in \overline{W(b)}$ – произвольный элемент. Тогда для всех $\delta > 0$ существует $x \in C_N$ с $|x| = 1$ такое, что $|\langle bx, x \rangle - y| = |\langle (b - y)x, x \rangle| < \delta$. Так как b принадлежит $R(a)$, множество $\{t \in U : |a(t) - b| < \delta\}$ имеет положительную меру. Множество матриц, для которых $|\langle (a(t) - y)x, x \rangle| < \delta$ является открытой окрестностью для b и множество

$$A := \{t \in U : |\langle (a(t) - y)x, x \rangle| < \delta\}$$

имеет положительную меру. Определим f из $L_N^2(U)$ так, что $f(t) := \frac{\chi_A(t)}{\sqrt{\mu(A)}}$ для $t \in U$. Ясно также, что $|f| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle (a - y)f, f \rangle_{L_N^2(U)}| &= \left| \int_U \langle (a(t) - y)f(t), f(t) \rangle d\mu(t) \right| \\ &= \left| \int_A \langle (a(t) - y)\chi, \chi \rangle \frac{1}{\mu(A)} d\mu(t) \right| \leq \sup_{t \in A} |\langle (a(t) - y)\chi, \chi \rangle| \leq \delta, \end{aligned}$$

и y принадлежит $\overline{W(a)}$. □

Abstract. The paper considers weighted spaces of harmonic functions. Having lower and upper bounds for the equivalent kernels of such spaces we consider Toeplitz and Hankel operators with different symbols. The Fredholm criterion for these operators on some compact is also studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Albrecht, "Several variable spectral theory in the noncommutative case", Banach Center Publications, 8, 9 – 30 (1982).
- [2] O. E. Antonenkova, F. A. Shamoian, "Cauchy transformation for the linear continuous functionals and projections in the weighted spaces of analytic functions", Sibirsk. Math. Zh., 46, no. 6, 1207 – 1234 (2005).
- [3] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York (1992).
- [4] A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag (1990).
- [5] F. Bonsall, J. Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements Normed Algebras, Cambridge University Press, (1971).
- [6] F. Bonsall, J. Duncan, Numerical Ranges 2, Cambridge University Press, (1973).
- [7] R. R. Coifman, R. Rochberg, "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p ", Astérisque 77, 11 – 66 (1980).
- [8] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A_p^2 Spaces, Teubner -Texte zur Mathematik, Band, 105, Leipzig (1993).
- [9] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, New York (1972).
- [10] R. G. Douglas, Banachalgebra Techniques in the Theory of Toeplitz operators, CBMS 15, Amer. Math. Soc., Providence, (1973).
- [11] H. Hedelmalin, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Graduate Texts in Mathematics, 199, Springer, New York-Berlin-Heidelberg (2000).
- [12] M. Javović, "Compact Hankel operators on harmonic Bergman spaces", Integral Equations and Operator Theory, 27, 426 – 438 (1997).
- [13] G. McDonald, "Toeplitz operators on the ball with piecewise continuous symbol", Illinois Journal of Math., 23, no. 2, 286 – 284 (1979).
- [14] J. Miao, "Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces", Integral Equations and Operator Theory, 27, 426 – 438 (1997).
- [15] J. Miao, "Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of unit ball", Monatshefte für Mathematik, 125, 25 – 35 (1998).
- [16] F. A. Shamoian, "Diagonal mapping and problems of representation in weighted spaces of fuctions that are holomorphic in a polydisk" [in Russian], Sibirsk. Math. Zh., 31, no. 2, 197–215 (1990). Translation in Siberian Math. J., 31, no. 2, 350 – 365 (1990).
- [17] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Mathematics 508, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).
- [18] F. A. Shamoian and M. A. Zakaryan, "Some problems of representation in weighted spaces of functions harmonic in a ball", Dokl. Akad. Nauk Armenii, 94, no. 4, 210 – 216 (1993).
- [19] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ (1970).
- [20] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ (1971).
- [21] U. Venugopalkrishna, "Fredholm operators associated with strongly pseudocoelomates domains in C^n ", J. Functional Analysis, 9, 345 – 373 (1972).
- [22] T. H. Wolff, Counterexamples to two variants of the Helson-Szegö Theorem, California Inst. of Technology, Report N. 11, Pasadena (1983).

Поступила 24 октября 2011

АЛГЕБРЫ СО СВЕРХТОЖДЕСТВАМИ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ДЕ МОРГАНА

Ю. М. МОВСИСЯН, В. А. АСЛАНЯН

Ереванский государственный университет

E-mails: *yurimovsisyan@yahoo.com*; *vahagn.aslanyan@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс алгебр, в которых выполняются сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Для таких алгебр с двумя бинарными операциями доказывается структурная теорема. В качестве следствия получаем конечный базис сверхтождеств для многообразия алгебр Де Моргана, состоящий из сверхтождеств, функциональные и предметные ранги которых не больше 3.

MSC2010 number: 06D30, 08A05, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: сверхтождество; алгебра Де Моргана; Де Морганова сумма алгебр; базис сверхтождеств; квазирешетка Де Моргана.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] характеризуются алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр. В настоящей работе методом [1] решается более общая задача. А именно, характеризуются алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана. Алгебра $Q(+, \cdot, ')$ с двумя бинарными и одной унарной операциями называется алгеброй Де Моргана, если $Q(+, \cdot)$ - дистрибутивная решетка, а $Q(+, \cdot, ')$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$(x + y)' = x' \cdot y',$$

$$x'' = x,$$

где $x'' = (x')'$ [2, 3]. Сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана характеризуются в работе [4].

Напомним, что сверхтождество [5, 6] – формула второго порядка вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2), \quad (*)$$

где ω_1, ω_2 – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без

кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре $(Q; \Sigma)$, если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же ариности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q .

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра многообразия V удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае данное сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V .

В дальнейшем мы будем использовать следующую характеристику сверхтождеств многообразия дистрибутивных решеток $([1, 7])$.

Теорема 1.1. *Многообразие дистрибутивных решеток удовлетворяет следующим сверхтождествам:*

$$(1.1) \quad X(x, x) = x,$$

$$(1.2) \quad X(x, y) = X(y, x),$$

$$(1.3) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

$$(1.4) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)).$$

И наоборот, любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток является следствием сверхтождеств (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

Если $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma)$ — алгебра и $|A|$ — ариность операции $A \in \Sigma$, то множество

$$T_{\mathfrak{A}} = \{|A| \mid A \in \Sigma\}$$

называется арифметическим типом алгебры $\mathfrak{A}$. T -алгеброй называется алгебра с арифметическим типом T . О категории T -алгебр см. [1, 5, 6, 7], в которой морфизмы между двумя T -алгебрами определяются как пары $(\varphi, \bar{\psi}) : (Q; \Sigma) \Rightarrow (Q'; \Sigma')$ отображений $\varphi : Q \rightarrow Q'$ и $\bar{\psi} : \Sigma \rightarrow \Sigma'$, где отображение $\bar{\psi}$ сохраняет ариность операций и для всех $A \in \Sigma$, $|A| = n$, $a_1, \dots, a_n \in Q$ справедливо равенство:

$$\varphi A(a_1, \dots, a_n) = (\bar{\psi} A)(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n).$$

Эта категория обычно обозначается через $\widetilde{Alg}_T$. Тожественные соотношения этой категории являются сверхтождествами. Произведение в этой категории называется суперпроизведением алгебр и обозначается через $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ для двух алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Определение 1.1. T -алгебра $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{1, 2\}$, называется квазирешеткой Де Моргана (или Де Моргановой квазирешеткой), если она удовлетворяет всем сверхтождествам многообразия алгебр Де Моргана.

Заметим, что существует квазирешетка Де Моргана, не являющаяся алгеброй Де Моргана. Действительно, для алгебры Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q; \{+, \cdot, '\})$ рассмотрим суперпроизведение $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \ltimes \mathfrak{A} = (Q \times Q; \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\})$, где $A_1 = (+, +)$, $A_2 = (+, \cdot)$, $A_3 = (\cdot, \cdot)$, $A_4 = (\cdot, +)$, $A_5 = (' , ')$. Тогда в этой алгебре выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Это верно и для подалгебры $(Q \times Q; \{A_1, A_4, A_5\})$. Но в этой алгебре не верны тождества поглощения, следовательно, она не является алгеброй Де Моргана.

2. О ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫХ КВАЗИРЕШЕТКАХ ДЕ МОРГАНА

Сначала заметим, что из сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана

$$(2.1) \quad X(x) = Y(x)(= \bar{x})$$

следует, что унарная операция в квазирешетке Де Моргана единственна. Обозначим ее через $\bar{}$, а слово $\overline{F(x, y)}$ обозначим через $\bar{F}(x, y)$.

Предложение 2.1. Если квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma)$ подпрямой неразложима, то количество бинарных операций в множестве Σ не больше 2.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству лемм 3.1, 4.1 из работы [1], с использованием следующих сверхтождеств из работы [1]: (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10). $\square$

Теперь из теоремы Биркгофа о подпрямых произведениях для категории T -алгебр вытекает следующее следствие.

Следствие 2.1. В категории T -алгебр, где $T = \{1, 2\}$, любая квазирешетка Де Моргана изоморфна подпрямому произведению квазирешеток Де Моргана с не более чем двумя бинарными операциями.

Итак, требуется описать квазирешетки Де Моргана с одной или двумя бинарными операциями.

3. КВАЗИРЕШЕТКИ ДЕ МОРГАНА С ОДНОЙ ВИНАРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

В настоящем параграфе мы характеризуем квазирешетки Де Моргана с одной бинарной операцией. Пусть $\mathfrak{A} = Q(+, -)$ является такой алгеброй. Тогда в ней справедливы следующие сверхтождества: (1.1)–(1.3), (2.1)

$$(3.1) \quad F(x, y) = G(x, y),$$

$$(3.2) \quad X(X(x)) = x,$$

$$(3.3) \quad \overline{F}(\overline{F}(x, y), \overline{x}) = x,$$

$$(3.4) \quad \overline{F}(\overline{F}(x, y), z) = F(\overline{F}(\overline{x}, z), \overline{F}(\overline{x}, z)).$$

Следовательно, в ней справедливы и следующие тождества:

$$(3.5) \quad \begin{cases} x + x = x, & x + y = y + x, & x + (y + z) = (x + y) + z, & \overline{\overline{x}} = x, \\ \overline{x + y + \overline{x}} = x, & \overline{x + y + z} = \overline{\overline{x} + z} + \overline{\overline{y} + z}. \end{cases}$$

Обратно, пусть алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, -)$ с одной унарной и одной бинарной операциями удовлетворяет этим тождествам. Определим бинарную операцию $\cdot$ в этой алгебре: $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$. Легко доказать, что алгебра $\mathfrak{A}' = Q(+, \cdot, -)$ является алгеброй Де Моргана, и следовательно удовлетворяет всем сверхтождествам алгебр Де Моргана. Но тогда ее редукт $\mathfrak{A} = Q(+, -)$ также удовлетворяет этим сверхтождествам. Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, -)$ с одной унарной и одной бинарной операциями, является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (3.5).*

4. КВАЗИРЕШЕТКИ ДЕ МОРГАНА С ДВУМЯ ВИНАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В этом параграфе мы характеризуем произвольные квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями. Для этого введем следующее понятие Де Моргановой суммы.

Определение 4.1. Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Omega \cup \{F\})$ – произвольная алгебра с одной унарной операцией F . Пусть $(Q_i; \Omega)$, $i \in I$ – подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}_i = (Q_i; \Omega \cup \{F_i\})$ – алгебры с одной унарной операцией F_i . Алгебра $\mathfrak{A}$ называется Де Моргановой суммой алгебр $\mathfrak{A}_i$, если выполняются следующие условия:

- 1) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, для всех $i, j \in I, i \neq j$;
- 2) $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$;

3) На множестве I можно определить бинарные операции $+$, $\cdot$ и унарную операцию $-$ так, что $I(+, \cdot, -)$ есть алгебра Де Моргана;

4) Если $i, j \in I$ и $i \leq j$ (здесь через " $\leq$ " обозначен частичный порядок решетки $I(+, \cdot)$), то существует изоморфизм $(\varphi_{i,j}, \bar{\varepsilon}) : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_j$, где $\bar{\varepsilon}(F_i) = F_j$, $\bar{\varepsilon}(A) = A$ для любого $A \in \Omega$, причем $\varphi_{i,i}$ есть тождественное отображение множества Q_i , и для любых $i \leq j \leq k$ имеем $\varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$;

5) Для любого $i \in I$ существует изоморфизм

$$(h_{i,\bar{i}}, \bar{\varepsilon}) : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{i}},$$

причем $h_{i,\bar{i}}^{-1} = h_{\bar{i},i}$ и $h_{i,\bar{i}} \cdot \varphi_{i,k} = \varphi_{\bar{i},k}$ для любого $k \geq i + \bar{i}$, $k \in I$;

6) Для любой n -арной операции $A \in \Omega$ ($n \geq 2$) и для любых $x_1, \dots, x_n \in Q$ имеем:

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(\varphi_{i_1, i_0}(x_1), \dots, \varphi_{i_n, i_0}(x_n)),$$

где $x_j \in Q_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1, n}$, $i_0 = i_1 + \dots + i_n$;

7) Для любого $x \in Q$ имеем:

$$F(x) = h_{i,\bar{i}}(F_i(x)),$$

где $x \in Q_i$.

Замечание 4.1. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой алгебр $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$. Тогда для любых $i, j \in I$ имеем $i + j \in I$, $i \leq i + j$, $j \leq i + j$ и следовательно алгебры $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ изоморфны алгебре $\mathfrak{A}_{i+j}$. Поэтому алгебры $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ изоморфны для всех $i, j \in I$.

Заметим, что в определении Де Моргановой суммы замена Де Моргановых алгебр на булевы алгебры приводят к определению булевой суммы [1].

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. Пусть $\omega = \omega(x_1, \dots, x_n)$ – Де Морганово слово, т.е. слово с бинарными и одной унарной функциональными переменными. Если алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, -)$ является Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$, то при значениях $x_j = a_j \in Q_{i_j}$, $j = \overline{1, n}$ имеем $\omega(a_1, \dots, a_n) \in Q_k$, где $k = \omega(i_1, \dots, i_n)$ – значение слова ω в алгебре Де Моргана $I(+, \cdot, -)$ при $x_j = i_j \in I$. Причем существует такое $t_0 \in I$, $t_0 \geq i_1 + \dots + i_n + k$, что для любого $t \in I$, $t \geq t_0$ верно следующее равенство:

$$\omega(\varphi_{i_1, t}(a_1), \dots, \varphi_{i_n, t}(a_n)) = \varphi_{k, t}(\omega(a_1, \dots, a_n)).$$

Доказательство. Эта лемма есть уточнение леммы 4.2 из [1] о булевых словах на случай Де Моргановых алгебр. Ее доказательство как и в [1], проводится индукцией. Например, пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2$ и лемма верна для слов ω_1 и ω_2 при всех $t \geq t_1$ и $t \geq t_2$ соответственно. Чтобы доказать утверждение для ω , достаточно в доказательстве леммы 4.2[1] для этого случая везде единицу булевой алгебры заменить на $t \geq t_0 = t_1 + t_2$. Пусть теперь $\omega = \bar{\pi}$ и утверждение леммы для слова π верно при всех $t \geq t_1$. Чтобы доказать утверждение для рассматриваемого случая, достаточно в доказательстве леммы 4.2[1] для этого случая везде единицу булевой алгебры заменить на $t \geq t_0 = t_1 + k$. $\square$

Следующей теоремой характеризуются квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями.

Теорема 4.1. *Алгебра $\mathcal{A} = (Q; \{+, \cdot, ^-\})$ с двумя бинарными операциями $+$, $\cdot$ и одной унарной операцией $-$ является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она является алгеброй Де Моргана или Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Доказательство достаточности аналогично доказательству достаточности теоремы 4.2 из [1]. Только здесь надо ссылаться на лемму 4.1 и заменить 1 (единица булевой алгебры) на $t \geq t_0$.

Необходимость. Требуется доказать, что любая квазирешетка Де Моргана $\mathcal{A} = (Q; \{+, \cdot, ^-\})$ является Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана. В доказательстве мы используем некоторые сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана, которые, по определению, справедливы и в алгебре $\mathcal{A}$.

Сначала заметим, что операции $+$ и $\cdot$ удовлетворяют тождествам идемпотентности, ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

Теперь определим следующее отношение $\sim$ на множестве Q :

$$x \sim y \Leftrightarrow x + (xy) = x, y + (yx) = y.$$

Из доказательства леммы 3.1 [1] следует, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Следовательно множество Q разбивается на непересекающиеся множества Q_i , $i \in I$, т.е. имеем фактор-множество $Q/\sim = \{Q_i : i \in I\}$. Тогда $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$.

Теперь докажем следующие свойства отношения $\sim$:

$$1. x \sim y, z \sim t \Rightarrow x + z \sim y + t;$$

$$2. xy \sim x + y;$$

$$3. x \sim y \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{y},$$

где $x, y, z, t \in Q$.

Из $x \sim y, z \sim t$ вытекает, что $x + (xy) = x, y + (yx) = y, z + (zt) = z, t + (tz) = t$.

Далее, воспользуемся следующим сверхтождеством:

$$(4.1) \quad F(F(x, z), G(F(x, z), F(y, t))) = F(F(x, G(x, y)), F(z, G(z, t))).$$

Имеем $(x + z) + (x + z)(y + t) = (x + (xy)) + (z + (zt)) = x + z$ и

$$(y + t) + (y + t)(x + z) = (y + (yx)) + (t + (tz)) = y + t,$$

откуда получаем $x + z \sim y + t$. Теперь из сверхтождеств

$$(4.2) \quad F(F(x, y), G(F(x, y), G(x, y))) = F(x, y)$$

и

$$(4.3) \quad G(F(x, y), F(F(x, y), G(x, y))) = F(x, y)$$

получаем тождества:

$$(x + y) + (x + y)(xy) = x + y$$

и $(xy) + (xy)(x + y) = xy$. А это значит, что $x + y \sim xy$.

Докажем третий пункт. Воспользуясь сверхтождеством

$$(4.4) \quad F(\bar{F}(x, G(x, y)), G(\bar{F}(x, G(x, y)), \bar{F}(y, G(y, x)))) = \bar{F}(x, G(x, y)),$$

получаем $\overline{x + (xy)} + \overline{x + (xy)} \cdot \overline{y + (yx)} = \overline{x + (xy)}$. Теперь если $x \sim y$, то $\bar{x} + (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{x}$. Аналогично получим, что $\bar{y} + (\bar{y} \cdot \bar{x}) = \bar{y}$, т.е. $\bar{x} \sim \bar{y}$.

Легко проверить, что множества $Q_i, i \in I$ замкнуты относительно операций $+$ и $\cdot$. Действительно

$$u, v \in Q_i \Rightarrow u \sim v \stackrel{1}{\Rightarrow} u = u + u \sim u + v \stackrel{2}{\Rightarrow} uv \sim u + v \sim u \Rightarrow uv, u + v \in Q_i.$$

Определим новую унарную операцию $'$ на множестве Q следующим образом:

$$x' = x \cdot \overline{x + \bar{x}} + \overline{x \cdot (x + \bar{x})}.$$

Сначала заметим, что $(x + y)' = x' \cdot y'$ для любых $x, y \in Q$. Воспользуемся сверхтождеством:

$$(4.5) \quad F(G(F(x, y), \overline{F}(F(x, y), \overline{F}(x, y))), \overline{G}(F(x, y), F(F(x, y), \overline{F}(x, y)))) = \\ G(F(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x}))), F(G(y, \overline{F}(y, \overline{y})), \overline{G}(y, F(y, \overline{y}))).$$

Полагая здесь $F = +$, $G = \cdot$ получаем требуемое тождество.

Из сверхтождества

$$(4.6) \quad F(G(u, \overline{F}(u, \overline{u})), \overline{G}(u, F(u, \overline{u}))) = x,$$

где обозначено $u = F(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x})))$, легко получаем, что $(x')' = x$.

В следующем шаге воспользуемся следующими сверхтождествами:

$$(4.7) \quad F(x, G(x, F(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x})))) = x,$$

$$(4.8) \quad F(u, G(u, x)) = u,$$

где обозначено $u = F(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x})))$. Полагая $F = +$, $G = \cdot$ в этих сверхтождествах, получаем $x + (xx') = x$ и $x' + (x'x) = x'$. А это значит, что $x \sim x'$, т.е. множества Q_i замкнуты относительно этой унарной операции. Из свойств операции $'$, доказанных выше, следует, что алгебры $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$ — суть алгебры Де Моргана. Докажем, что $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой этих алгебр.

Из свойств 1–3 отношения $\sim$ вытекает, что на фактор-множестве $Q/\sim$ можем определить операции $+$ и $\cdot$ следующим образом: если $x \in Q_i$, $y \in Q_j$, $i, j \in I$, то определим $Q_i + Q_j = Q_k \Leftrightarrow x + y \in Q_k$ и $\overline{Q_i} = Q_j \Leftrightarrow \overline{x} \in Q_j$.

Еще определим операцию $\cdot$ с помощью этих двух операций: $Q_i \cdot Q_j = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}}$.

Докажем, что полученная таким образом алгебра $(Q/\sim; \{+, \cdot, '\})$ является Де Моргановой алгеброй, т.е. проверим аксиомы алгебр Де Моргана.

Идемпотентность, ассоциативность и коммутативность очевидны. Докажем тождество дистрибутивности. Пусть $Q_i, Q_j, Q_k \in Q/\sim$ и пусть $Q_i(Q_j + Q_k) = Q_l$ и $(Q_i Q_j) + (Q_i Q_k) = Q_l$. Тогда $Q_l = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j} + \overline{Q_k}}$ и $Q_l = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}} + \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_k}}$.

Если $a \in Q_i$, $b \in Q_j$, $c \in Q_k$, то $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \in Q_l$ и $\overline{a} + \overline{b} + \overline{a} + \overline{c} \in Q_l$.

Из сверхтождества

$$(4.9) \quad \overline{F}(\overline{x}, \overline{F}(y, z)) = F(\overline{F}(\overline{x}, \overline{y}), \overline{F}(\overline{x}, \overline{z}))$$

следует, что $\overline{\overline{a + b + c}} = \overline{\overline{a + b} + \overline{a + c}}$. А это значит, что $Q_i \cap Q_l \neq \emptyset$, т.е. $Q_i = Q_l$. Аналогично из сверхтождества

$$(4.10) \quad \overline{F(\overline{x}, \overline{F(x, y)})} = x$$

следуют тождества поглощения.

Тождество $\overline{\overline{Q_i}} = Q_i$ вытекает из тождества $\overline{\overline{x}} = x$, $x \in Q_i$.

Далее, $\overline{Q_i \cdot Q_j} = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}} = \overline{Q_i} + \overline{Q_j}$.

Теперь определим операции $+$, $\cdot$, $\overline{}$ на множестве I следующим образом:

$$i + j = k \Leftrightarrow Q_i + Q_j = Q_k,$$

$$i \cdot j = k \Leftrightarrow Q_i \cdot Q_j = Q_k,$$

$$\overline{i} = k \Leftrightarrow \overline{Q_i} = Q_k.$$

Относительно этих операций алгебра $I(+, \cdot, \overline{})$ превращается в алгебру Де Моргана, причем $Q_i + Q_j = Q_{i+j}$, $Q_i \cdot Q_j = Q_{ij}$, $\overline{Q_i} = Q_{\overline{i}}$.

Ясно, что если $a \in Q_i$, $b \in Q_j$, то $a + b \in Q_i + Q_j = Q_{i+j}$. Кроме того, $ab \sim a + b$, т.е. ab также принадлежит множеству Q_{i+j} .

Теперь определим отображение $\varphi_{i,j} : Q_i \rightarrow Q_j$ для $i, j \in I$, $i \leq j$ (здесь " $\leq$ " — частичный порядок решетки $I(+, \cdot)$). Для всякого $x \in Q_i$ определим $\varphi_{i,j}(x) = x + (xu)$, где u произвольный элемент множества Q_j . Убедимся в корректности этого определения, т.е. докажем, что $x + (xu)$ не зависит от выбора u и всегда принадлежит множеству Q_j . Пусть $u, v \in Q_j$. Тогда $u \sim v$, следовательно, $u + (uv) = u$, $v + (vu) = v$. Из сверхтождества

$$(4.11) \quad F(x, G(x, F(y, G(y, z)))) = F(x, G(x, F(x, G(z, y))))$$

для всех $x \in Q_i$ получаем $x + (xu) = x + x(u + (uv)) = x + x(v + (vu)) = x + (xv)$. Имеем $i \leq j$, поэтому $i + j = j$ и если $x \in Q_i$, $u \in Q_j$, то $xu \in Q_{i+j} = Q_j$ и $x + (xu) \in Q_{i+j} = Q_j$.

Если $i = j$, то $x \sim u$ и поэтому $x + (xu) = x$, т.е. $\varphi_{i,i} = \varepsilon$ для любого $i \in I$.

Заметим, что $\varphi_{i,j}$ — гомоморфизм. Действительно, пусть $u \in Q_j$, $x, y \in Q_i$.

Тогда

$$\varphi_{i,j}(x+y) = (x+y) + (x+y)u = (x+xu) + (y+yu) = \varphi_{i,j}(x) + \varphi_{i,j}(y),$$

$$\varphi_{i,j}(xy) = xy + xyu = (x+xu)(y+yu) = \varphi_{i,j}(x) \cdot \varphi_{i,j}(y),$$

$$(\varphi_{i,j}(x))' = (x+xu)' = x' \cdot (xu)' = x'(x' + y') = x' + x'u' = \varphi_{i,j}(x'),$$

поскольку $u' \in Q_j$.

Теперь, если $i, j, k \in I$, $i \leq j \leq k$ и $u \in Q_j$, $v \in Q_k$, то $u+v+uv \in Q_{j+k+(j+k)} = Q_k$.

Следовательно,

$$(\varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k})(x) = \varphi_{j,k}(\varphi_{i,j}(x)) = \varphi_{j,k}(x+xu) = (x+xu) + (x+xu)v =$$

$$x+xu+xv+xuv = x+x(u+v+uv) = \varphi_{i,k}(x).$$

Из сверхтождества

$$(4.12) \quad \overline{F(F(x, G(x, z)), \overline{F(x, y)})} = F(x, G(x, \overline{F(y, z)}))$$

следует инъективность $\varphi_{i,j}$, ($i \leq j$). Если $\varphi_{i,j}(a) = \varphi_{i,j}(b)$, $a, b \in Q_i$, то $a+au = b+bu$, $u \in Q_j$. Тогда

$$\overline{a+au+a+b} \stackrel{(4.12)}{=} a+a \cdot \overline{b+u}.$$

Имеем $\overline{b} \in Q_j$, $\overline{u} \in Q_j$, следовательно $\overline{b+u} \in Q_{j+j} = Q_{ij} = Q_i$. А это значит, что $\overline{b+u} \sim a$, т.е. $a+a \cdot \overline{b+u} = a$. Поэтому $\overline{a+au+a+b} = a$. Аналогично $\overline{b+bu+b+a} = b$. И окончательно

$$a = \overline{a+au+a+b} = \overline{b+bu+b+a} = b,$$

поскольку $a+au = b+bu$, как было сказано выше.

Сюръективность отображения $\varphi_{i,j}$ следует из сверхтождества

$$(4.13) \quad F(\overline{G(\overline{x}, F(\overline{x}, \overline{y}))}, G(\overline{G(\overline{x}, F(\overline{x}, \overline{y}))}, x)) = x.$$

Если $b \in Q_j$, то для произвольного $a \in Q_i$ имеем:

$$\overline{b(b+a)} \in Q_{j+j+i} = Q_{ij} = Q_i,$$

так как $i \leq j$. Отсюда

$$\varphi_{i,j}(\overline{b(b+a)}) = \overline{b(b+a)} + \overline{b(b+a)} \cdot b \stackrel{(4.13)}{=} b.$$

Теперь определим отображение $h_{i,\bar{i}}: Q_i \rightarrow Q_{\bar{i}}$ следующим образом:

$$h_{i,\bar{i}}(x) = (\bar{x})', \quad x \in Q_i.$$

Из сверхтождества

$$(4.14) \quad F(G(\bar{x}, \bar{F}(\bar{x}, x)), \bar{G}(\bar{x}, F(\bar{x}, x))) = \bar{F}(G(x, \bar{F}(x, \bar{x})), \bar{G}(x, F(x, \bar{x})))$$

получаем тождество $(\bar{x})' = \bar{x}'$.

На следующем шаге воспользуемся сверхтождеством

$$(4.15) \quad \bar{F}(G(t, \bar{F}(t, \bar{t})), \bar{G}(t, F(t, \bar{t}))) = \\ F(\bar{F}(G(u, \bar{F}(u, \bar{u})), \bar{G}(u, F(u, \bar{u}))), \bar{F}(G(v, \bar{F}(v, \bar{v})), \bar{G}(v, F(v, \bar{v}))),$$

где обозначено $t = F(x, y)$, $u = F(x, G(x, y))$, $v = F(y, G(y, x))$. Если заменить $F = +$, $G = \cdot$ в (4.15), то получим:

$$\overline{(x+y)'} = \overline{(x+xy)'} + \overline{(y+yx)'}$$

Следовательно,

$$h_{i,\bar{i}}(x+y) = \overline{(x+y)'} = \overline{(x+xy)'} + \overline{(y+yx)'} = \bar{x}' + \bar{y}' = h_{i,\bar{i}}(x) + h_{i,\bar{i}}(y),$$

для $x, y \in Q_i$. Аналогично, при замене $F = \cdot$, $G = +$ в (4.15), получаем дуальное тождество $h_{i,\bar{i}}(x \cdot y) = h_{i,\bar{i}}(x) \cdot h_{i,\bar{i}}(y)$. Далее,

$$h_{i,\bar{i}}(x') = \overline{(x')'} = \bar{x} = ((\bar{x})')' = (h_{i,\bar{i}}(x))'.$$

Итак, мы показали, что $h_{i,\bar{i}}$ есть гомоморфизм. Из равенства

$$h_{\bar{i},i}(h_{i,\bar{i}}(x)) = h_{\bar{i},i}((\bar{x})') = \overline{((\bar{x})')'} = \bar{\bar{x}} = x$$

вытекает биективность $h_{i,\bar{i}}$. Кроме того $(h_{i,\bar{i}})^{-1} = h_{\bar{i},i}$.

После этого воспользуемся следующим сверхтождеством:

$$(4.16) \quad F(\bar{t}, G(\bar{t}, u)) = F(x, G(x, u)),$$

где обозначено $u = F(x, F(\bar{x}, y))$, $t = F(G(x, \bar{F}(x, \bar{x})), \bar{G}(x, F(x, \bar{x})))$.

При замене $F = +$, $G = \cdot$ получим тождество

$$\bar{x}' + \bar{x}' \cdot (x + \bar{x} + y) = x + x(x + \bar{x} + y).$$

Если возьмем $x \in Q_i$, $y \in Q_k$, где $k \in I$, $k \geq i + \bar{i}$, то $x + \bar{x} \in Q_{i+\bar{i}}$, $x + \bar{x} + y \in Q_{i+\bar{i}+k} = Q_k$, следовательно

$$\varphi_{i,k}(h_{i,\bar{i}}(x)) = \varphi_{i,k}(\bar{x}') = \bar{x}' + \bar{x}' \cdot (x + \bar{x} + y) = x + x(x + \bar{x} + y) = \varphi_{i,k}(x),$$

потому что $x + \bar{x} + k \in Q_k$. Итак,

$$h_{i,\bar{i}} \cdot \varphi_{\bar{i},k} = \varphi_{i,k},$$

для любого $k \geq i + \bar{i}$.

Пусть теперь $x \in Q_i$, $y \in Q_j$, где $i + j = k$. Тогда $x + y \in Q_k$, и

$$\varphi_{i,k}(x) + \varphi_{j,k}(y) = (x + x(x + y)) + (y + y(x + y)) = (x + y) + (x + y)(x + y) = x + y,$$

$$\varphi_{i,k}(x) \cdot \varphi_{j,k}(y) = (x + x(x + y)) \cdot (y + y(x + y)) =$$

$$xy + xy(x + y) + x(x + y)y + xy(x + y) = xy + xy(x + y) = xy + xy + xy = x \cdot y,$$

$$\bar{x} = \overline{(x')'} = h_{i,\bar{i}}(x').$$

Этим мы доказали, что алгебра $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой Де Моргановых алгебр $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$. Теорема доказана.

5. СЛЕДСТВИЯ

Следствие 5.1. *Подпрямо неразложимая T -алгебра $\mathfrak{D}$, где $T = \{1, 2\}$, удовлетворяющая сверхтождествам (1.1) – (1.4), (2.1), (3.2) – (3.4), (4.1) – (4.16), а также (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1], является Де Моргановой квазирешеткой, т.е. в ней выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Из доказательства предложения 2.1 следует, что мощность бинарных операций такой алгебры $\mathfrak{D}$ не больше 2 (поскольку в доказательстве этого предложения мы воспользовались только сверхтождествами (1.1) – (1.4), (2.1), а также (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1]). Теперь если $\mathfrak{D}$ имеет одну бинарную операцию, то она удовлетворяет тождествам (3.5), и в силу предложения 3.1, является квазирешеткой Де Моргана, т.е. в ней выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. А если $\mathfrak{D}$ имеет две бинарные операции, то из теоремы 4.1 следует, что она является Де Моргановой алгеброй или Де Моргановой суммой Де Моргановых алгебр (поскольку в доказательстве этой теоремы мы использовали лишь сверхтождества (1.1) – (1.4), (2.1), (3.2) – (3.4), (4.1) – (4.16), а также (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1]). Теперь из достаточности этой же теоремы следует, что $\mathfrak{D}$ является квазирешеткой Де Моргана. $\square$

Следствие 5.2. *Сверхтождества (1.1) – (1.4), (2.1), (3.2) – (3.4), (4.4) – (4.10), (4.12) – (4.16), а также (4.8) из работы [1] составляют конечный базис сверхтождеств многообразия алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Сначала заметим, что сверхтождества (1.1)–(1.4), (2.1), (3.2)–(3.4), (4.1) – (4.16), а также (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1] составляют базис сверхтождеств многообразия алгебр Де Моргана. Пусть алгебра $\mathfrak{D}$ удовлетворяет этим сверхтождествам. Мы должны доказать, что в этой алгебре справедливы все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана.

Из теоремы Биркгофа о подпрямых произведениях для категории T -алгебр и следствия 5.1 следует, что в рассматриваемой категории T -алгебр, алгебра $\mathfrak{D}$ изоморфна подпрямому произведению квазирешеток Де Моргана, которые, по определению, удовлетворяют всем сверхтождествам многообразия алгебр Де Моргана. Поэтому $\mathfrak{D}$ также удовлетворяет всем этим сверхтождествам.

Далее, сверхтождества (4.1) – (4.3), (4.11), а также (3.5), (3.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1] являются сверхтождествами многообразия дистрибутивных решеток, и в силу теоремы 1.1 являются следствиями сверхтождеств (1.1) – (1.4).

□

Из этого результата непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 5.3. *Многообразие алгебр Де Моргана имеет конечный базис сверхтождеств, состоящий из сверхтождеств, функциональные и предметные ранги которых не превосходят 3.*

Abstract. The paper characterizes the algebras with hyperidentities of the variety of De Morgan algebras. For these algebras with two binary operations we prove a structure result. As a consequence, we obtain a finite base of the hyperidentities having functional and objective ranks not exceeding three.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат., 60, 6, 127 – 168 (1996).
- [2] R. Balbes, P. Dwinger, Distributive Lattices, Univ. of Missouri Press (1974).
- [3] Yu. M. Movsisyan, "Binary representations of algebras with at most two binary operations. A Cayley theorem for distributive lattices", International Journal of Algebra and Computation, 19, 97 – 106 (2009).

- [4] Yu.M.Movsisyan, V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", *Logic Journal of the IGPL* 20, 1193 – 1174 (2012) (doi:10.1093/jigpal/jzr053).
- [5] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во Ереванского государственного университета (1988).
- [6] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд-во Ереванского государственного университета (1990).
- [7] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", *Успехи Мат. Наук*, 53 (1(319)), 61 – 114 (1998).

Поступила 19 января 2012

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАТРИЦАМИ ТИПА ТЕПЛИЦА-ГАНКЕЛЯ

Х. А. ХАЧАТРЯН, М. Ф. БРОЯН

Армянский национальный аграрный университет
E-mail: *Khach82@rambler.ru*; *Broyan@rambler.ru*

Аннотация. Исследуется класс нелинейных бесконечных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица-Ганкеля. Строится однопараметрическое семейство положительных решений для этой системы. Изучается также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности.

MSC2010 number: 45G10, 45M20.

Ключевые слова: система алгебраических уравнений; однопараметрическое семейство решений; предел решения; бесконечная матрица типа Теплица-Ганкеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая нелинейная бесконечная система алгебраических уравнений:

$$(1.1) \quad x_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k - \omega_k(x_k)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)^T$.

Здесь $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ - бесконечная матрица с неотрицательными элементами, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(1.2) \quad a_n > a_{n+1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1, \quad a_{-n} = a_n,$$

$$(1.3) \quad \nu_j(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^j a_n < +\infty, \quad j = 0, 1, 2.$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ — заданный числовой параметр системы.

Последовательность вещественнозначных измеримых функций $\{\omega_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

$$(1.4) \quad 1) \quad \omega_k \in C[0; +\infty), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1.5) \quad 2) \quad \text{существует } \delta > 0 \text{ такое, что } 0 \leq \omega_k(\tau) \text{ убывает на } [\delta; +\infty), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$(1.6) \quad 3) \quad \text{существует функция } \tilde{\omega} \in L_1(0, +\infty) \cap C_0[0; +\infty), \quad \tilde{\omega}(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [\delta, +\infty), \\ m_1(\tilde{\omega}) < +\infty, \quad \tilde{\omega} \downarrow [\delta; +\infty); \quad \omega_k(\tau) \leq \tilde{\omega}(k+1+\tau), \quad k = 0, 1, \dots, \quad \tau \in [\delta; +\infty).$$

Здесь $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ — заданная монотонно возрастающая последовательность, причем

$$(1.7) \quad 0 < \gamma_n \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \gamma_n) n^j < +\infty, \quad j = 0, 1.$$

Система (1.1), кроме самостоятельного математического интереса, имеет важное прикладное значение в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1]). Кроме того, указанная система имеет применения в эконометрике, а именно в задаче распределения национального дохода в стране (см. [2], [3]).

В том частном случае, когда $\omega_k \equiv 0$ и $\varepsilon = 0$, система (1.1) сравнительно недавно была исследована в [4]. В случае, когда $\gamma_n \equiv 1$, $\omega_n \equiv 0$, $\varepsilon = 0$, (1.1) превращается известное в литературе дискретное уравнение Винера-Хопфа, исследованию которого посвящены многочисленные работы (см. например [4] — [7]).

В настоящей работе при условиях (1.2)–(1.7) доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений в пространстве ограниченных последовательностей. Строится также предел последовательности $\{x_n\}_0^{\infty}$, когда $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что часть этих результатов являются дискретными аналогами результатов работы [8].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть E — одно из следующих банаховых пространств: m , l_p , $p \geq 1$, где m — пространство ограниченных последовательностей $m = \{b = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)^T : \sup_{0 \leq k \leq \infty} |b_k| < +\infty\}$, с нормой $\|b\|_m = \sup_{0 \leq k \leq \infty} |b_k|$, а l_p — пространство бесконечных векторов $l_p = \{b = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)^T : \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p < +\infty\}$ с нормой $\|b\|_{l_p} =$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Введем следующий класс Ω бесконечных теплицевых матриц: $A \in \Omega$, если

$$(A)_{nk} = a_{n-k} \quad n, k = 0, 1, \dots, \quad \|A\|_{\Omega} = \mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < +\infty.$$

При $\mu \leq 1$ матрица A называется регулярной, а при $\mu < 1$ — вполне регулярной. Если $a_{-k} = a_k$, то A симметричная и совпадает со своей транспонированной A^* . Введем также подклассы $\Omega^{\pm} \subset \Omega$:

1) $U_+ \in \Omega^+$, если $U_+ = (\bar{u}_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ и $\bar{u}_n = 0$, при $n < 0$.

2) $U_- \in \Omega^-$, если $U_- = (\bar{u}_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ и $\bar{u}_n = 0$, при $n < 0$.

Как известно, классы $\Omega^{\pm}$ замкнуты относительно умножения и являются банаховыми алгебрами (см. [6]).

В наших дальнейших рассмотрениях основную роль играет следующий факт: если $U_- \in \Omega^-$ и $U_+ \in \Omega^+$, то $U_- U_+ \in \Omega$ и $(U_- U_+)_{nk} = \sum_{j=\max(n,k)}^{\infty} \bar{u}_{j-n} \bar{u}_{j-k}$. Как известно (см. [6], [9]), если A — регулярная матрица, то при условиях (1.2), (1.3) имеет место следующая факторизация:

$$(2.1) \quad I - A = (I - U_-)(I - U_+),$$

где I — единичная матрица, $U_+ \in \Omega^+$, $U_- \in \Omega^-$. Факторизация (2.1) эквивалентна следующей нелинейной системе относительно $\{\bar{u}_n, \bar{u}_n^{\dagger}\}$:

$$\bar{u}_n^{\dagger} = a_n + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k \bar{u}_{n+k}^{\dagger}, \quad \bar{u}_n = a_{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_{n+k} \bar{u}_k^{\dagger}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{u}_0^{\dagger} + \bar{u}_0 = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k \bar{u}_k^{\dagger} \quad \text{и} \quad \sigma_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k^{\dagger} = 1.$$

Наряду с (1.1) рассмотрим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$(2.2) \quad S_n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) S_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Систему (2.2) запишем в матричной форме:

$$(I - A_0 + \varepsilon A_1)S = 0,$$

Здесь A_0 и A_1 следующие операторы:

$$A_0 = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad (A_0 S) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} S_k \right)_{n=0}^{\infty},$$

$$A_1 = (a_{n+k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad (A_1 S) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} S_k \right)_{n=0}^{\infty},$$

$$S = (S_0, S_1, \dots, S_n, \dots)^T \in E.$$

Так как A_0 — регулярная матрица, то оператор $I - A_0$ допускает факторизацию (2.1) (см.[9]). Из (2.1), с учетом факторизационной теоремы 1 работы [10] следует, что оператор $I - A_0 + \varepsilon A_1$ в E допускает следующую факторизацию:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} I - A_0 + \varepsilon A_1 &= (I - U_-)(I + B)(I - U_+), \\ B &= (b_{n+k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad b_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (BS) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} S_k \right)_{n=0}^{\infty}, \\ b &= (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)^T \in l_1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k b_k < +\infty, \end{aligned}$$

причем B является вполне непрерывным в каждом из пространств E .

С учетом факторизации (2.3), решение системы (2.2) сводится к последовательному решению следующих уравнений:

$$(2.4) \quad (I - U_-) \overset{\circ}{S} = 0,$$

$$(2.5) \quad (I + B) \overset{1}{S} = \overset{\circ}{S},$$

$$(2.6) \quad (I - U_+) S = \overset{1}{S}.$$

Рассмотрим следующие возможности:

а) $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B .

Уравнение (2.4) запишем в раскрытом виде:

$$(2.7) \quad \overset{\circ}{S}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{u}_{k-n} \overset{\circ}{S}_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$\overset{\circ}{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k \overset{\circ}{S}_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $\sigma_- := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k = 1$, то $\overset{\circ}{S} = (1, 1, \dots, 1, \dots)^T$ будет удовлетворять системе (2.7). Подставляя это значение в (2.5), получим:

$$(2.8) \quad \overset{1}{S}_n = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} \overset{1}{S}_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как $\lambda = -1$ не является собственным значением для вполне непрерывного (в E) оператора B , то система (2.8) имеет ограниченное решение $\overset{1}{S} = (\overset{1}{S}_0, \overset{1}{S}_1, \dots, \overset{1}{S}_n)^T$, т.е. $\overset{1}{S} \in m$.

Теперь убедимся, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{1}{S}_n = 1$ и $\overset{0}{S} - \overset{1}{S} \in l_1$. С этой целью систему (2.8) запишем в следующей форме:

$$(2.9) \quad 1 - \overset{1}{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} \overset{1}{S}_k$$

Из (2.9) непосредственно следует

$$(2.10) \quad |1 - \overset{1}{S}_n| \leq \sup_{j \in N} |\overset{1}{S}_j| \sum_{k=n}^{\infty} b_k \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Нетрудно убедиться, что $b^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \dots, \sum_{k=n}^{\infty} b_k, \dots \right)^T \in l_1$, поскольку $b \in l_1$ и $\sum_{k=0}^{\infty} k b_k < +\infty$. Следовательно, из (2.10), с учетом вышесказанного получаем:

$$(2.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{1}{S}_n = 1, \quad \overset{0}{S} - \overset{1}{S} \in l_1.$$

Перейдем теперь к решению уравнения (2.6):

$$(2.12) \quad S_n = \overset{1}{S}_n + \sum_{k=0}^{\infty} \overset{+}{u}_{n-k} \overset{1}{S}_k \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Так как свободный член $\overset{1}{S}_n$ системы (2.12) обладает свойствами (2.11), то из (1.3), с учетом того, что и $\sigma_+ = 1$, следует, что система (2.12) имеет решение следующей структуры (см. [6] теорема 3):

$$S_n = \frac{1}{m_1} n + q_n,$$

где

$$m_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n \overset{+}{u}_n < +\infty, \quad q^* = (q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)^T, \quad q^* \in m.$$

б) Теперь предположим, что $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B . В этом случае из (2.4) выберем нулевое решение $\overset{0}{S} = (0, 0, \dots, 0, \dots)^T$. Подставляем это решение в (2.5), получаем

$$\overset{1}{S}_n = - \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \overset{1}{S}_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия б) следует, что система имеет ненулевое, ограниченное решение $\overset{1}{S} = (\overset{1}{S}_0, \overset{1}{S}_1, \dots, \overset{1}{S}_n, \dots)^T$.

$$|\overset{1}{S}_n| \leq \sup_n |\overset{1}{S}_n| \sum_{k=n}^{\infty} b_k \Rightarrow \overset{1}{S}_n \rightarrow 0, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

Более того, если учитывать последнее неравенство и тот факт, что $b^* \in l_1$, получим $\bar{S} \in l_1$. Следовательно, система (2.12) имеет ограниченное решение (см. [6]).

Однако в обоих случаях это решение может быть знакопеременным. Докажем, что система (2.2) обладает также положительным решением $S^* = (S_0^*, S_1^*, \dots, S_n^*, \dots)^T$, причем $S_n^* \geq |S_n|$.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, \dots, S_n^*, \dots)^T$, причем*

$$|S_n| \leq S_n^* \leq \frac{1}{m_1}n + q, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $q = \sup_n |q_n|$ и $S_n^* \sim \frac{1}{m_1}n$, когда $n \rightarrow \infty$.

Если $\varepsilon \in [0, 1)$ и

$$l_0 \equiv \sup_n \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n} < +\infty,$$

то система (2.2) имеет положительное, монотонно возрастающее решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, \dots, S_n^*, \dots)^T$, $S_n^* \geq |S_n|$, причем

$$S_n^* \sim \frac{1}{m_1}n, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\inf_n S_n^* = \alpha_0 > 0, \quad S_n^* \leq \frac{1}{m_1}n + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$(2.13) \quad c \equiv \max \left(\frac{l_0}{m_1}, \frac{2r_0}{m_1}, q \right), \quad r_0 = \sum_{n=0}^{\infty} na_n.$$

Доказательство. Сперва подробно обсудим случай $\varepsilon = 1$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} S_n^{(p+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k^{(p)}, \\ S_n^{(0)} &= \frac{1}{m_1}n + q, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

По индукции докажем, что $S_n^{(p)}$ монотонно убывают по p .

Сперва убедимся, что $S_n^{(1)} \leq S_n^{(0)}$, при всех $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) \left(\frac{1}{m_1} k + q \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} \left(\frac{1}{m_1} k + q \right) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \left(\frac{1}{m_1} k + q \right) \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^n a_{\tau} \left(\frac{1}{m_1} (n - \tau) + q \right) - \sum_{\tau=n}^{\infty} a_{\tau} \left(\frac{1}{m_1} (\tau - n) + q \right) \leq \frac{1}{m_1} n + q - 2q \sum_{\tau=n+1}^{\infty} a_{\tau} \\ &\leq \frac{1}{m_1} n + q = S_n^{(0)}, \end{aligned}$$

Так как a_n убывает и $a_{-n} = a_n$. Учитывая, что $a_{n-k} \geq a_{n+k}$, то предполагая $S_n^{(p)} \leq S_n^{(p-1)}$, из (2.14) получим

$$S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k^{(p)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k^{(p-1)} = S_n^{(p)}.$$

Теперь по индукции докажем, что

$$(2.15) \quad S_n^{(p)} \geq |S_n|, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

В случае $p = 0$ неравенство (2.15) очевидно, поскольку

$$|S_n| \leq \frac{1}{m_1} n + q = S_n^{(0)}.$$

Предположим теперь, что (2.15) выполняется при некотором $p \in \mathbb{N}$ и докажем его в случае $p + 1$. Имеем

$$S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k^{(p)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) |S_k| \geq |S_n|.$$

Из последнего неравенства, с учетом монотонности $S_n^{(p)}$ по p , получим что последовательность $\{S_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_n^{(p)} = \tilde{S}_n,$$

причем $\tilde{S}_n$ удовлетворяет системе (2.1). Из (2.14), (2.15) получаем

$$(2.16) \quad \frac{1}{m_1} n + q \geq \tilde{S}_n \geq |S(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, учитывая (2.16) и (2.12), можем утверждать, что $\tilde{S}_n \sim \frac{1}{m_1} n$, при $n \rightarrow \infty$

Теперь убедимся, что $\tilde{S}_n$ возрастает по n . С этой целью сначала по индукции докажем, что $S_n^{(p)}$ возрастает по n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Действительно,

записывая итерации (2.14) в следующем виде:

$$(2.17) \quad S_n^{(p+1)} = \sum_{\tau=-\infty}^n a_\tau S_{n-\tau}^{(p)} - \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n}^{(p)},$$

$$S_n^{(0)} = \frac{1}{m_1} n + q, \quad n = 0, 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots$$

и предполагая, что $S_n^{(p)}$ возрастает по n , из (2.17) получим

$$S_{n+1}^{(p+1)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{\tau=-\infty}^{n+1} a_\tau S_{n+1-\tau}^{(p)} - \sum_{\tau=n+1}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n-1}^{(p)} - \sum_{\tau=-\infty}^n a_\tau S_{n-\tau}^{(p)} + \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n}^{(p)}$$

$$\geq \sum_{\tau=-\infty}^n a_\tau (S_{n+1-\tau}^{(p)} - S_{n-\tau}^{(p)}) + \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau (S_{\tau-n}^{(p)} - S_{\tau-n-1}^{(p)}) \geq 0.$$

Следовательно $S_n^{(p+1)}$ возрастает по n для $p = 0, 1, \dots$. Из последнего следует, что $\tilde{S}_n$ возрастает по n . $\square$

Перейдем теперь ко второй части доказательства, когда $\varepsilon \in [0, 1)$. С этой целью докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.1. Пусть $l_0 \equiv \sup_n \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n} < +\infty$. Тогда, при выполнении условий (1.2)-(1.3), для всех $\varepsilon \in [0, 1)$ справедливо следующее неравенство:

$$(2.18) \quad \frac{1 - \varepsilon}{m_1 c(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)n} \leq \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{\infty} k a_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где число c задается согласно (2.13).

Доказательство. Обозначим через φ_n следующую последовательность:

$$(2.19) \quad \varphi_n = (m_1 c(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)n) \sum_{k=n}^{\infty} a_k - (1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} k a_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем, что последовательность φ_n убывает и

$$\varphi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сначала заметим, что $\varphi_0 > 0$:

$$\varphi_0 = m_1 c(1 + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} a_k - (1 - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \frac{m_1 c(1 + \varepsilon)}{2} - (1 - \varepsilon)r_0$$

$$\geq \frac{m_1}{2} \cdot \frac{2r_0}{m_1} (1 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)r_0 = 2r_0\varepsilon > 0.$$

Оценим разность:

$$\begin{aligned} \varphi_n - \varphi_{n+1} &= m_1 c(1 + \varepsilon) \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right) + (1 - \varepsilon)n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right) \\ &\quad - (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \geq m_1 \frac{l_0}{m_1} (1 + \varepsilon)a_n + (1 - \varepsilon)na_n - (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\ &\geq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + (1 - \varepsilon)na_n = 2\varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + (1 - \varepsilon)na_n \geq 0. \end{aligned}$$

Из сказанных фактов следует, что $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$.

Поскольку $n \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} ka_k \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то из (2.19) непосредственно следует, что $\varphi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Так как φ_n убывает по n и $\varphi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то $\varphi_n \geq 0$, т.е. справедливо неравенство (2.18). Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим (2.2) и следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} S_n^{(p+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) S_k^{(p)}, \\ S_n^{(0)} &= \frac{1}{m_1} n + c, \quad n, p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Используя (2.13) и оценку (2.18), аналогичным образом можно убедиться в достоверности следующих фактов:

$$S_n^{(p)} \text{ убывает по } p, \quad S_n^{(p)} \text{ возрастает по } n, \quad S_n^{(p)} \geq \tilde{S}_n.$$

Следовательно последовательность $\{S_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ имеет предел:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_n^{(p)} = S_n^* \geq \tilde{S}_n$$

и этот предел удовлетворяет системе (2.2).

Докажем, что $\inf_n S_n^* \equiv \alpha_0 > 0$. Так как $S_n^* \geq \tilde{S}_n$, $\tilde{S}_n \geq 0$, $\tilde{S}_n \not\equiv 0$, то существует хотя бы одно $n_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$, такая что $S_{n_0}^* > 0$. Зафиксируем это число. Из (2.2), с учетом монотонности S_n^* , получим

$$\begin{aligned} S_n^* &\geq \sum_{k=n_0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) S_k^* \geq S_{n_0}^* \sum_{k=n_0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \\ &= S_{n_0}^* \left(\sum_{j=-\infty}^{n-n_0} a_j - \varepsilon \sum_{j=n+n_0}^{\infty} a_j \right) \geq S_{n_0}^* \left(\sum_{j=-\infty}^{-n_0} a_j - \varepsilon \sum_{j=n_0}^{\infty} a_j \right) \geq S_{n_0}^* (1 - \varepsilon) \sum_{j=n_0}^{\infty} a_j. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\alpha_0 \geq (1 - \varepsilon) S_{n_0}^* \sum_{j=n_0}^{\infty} a_j > 0$. Таким образом теорема 2.1 полностью доказана.

Аналогичным образом доказывается следующий результат.

Теорема 2.2. *Предположим, что $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное, возрастающее и ограниченное решение $\tilde{S} = (\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n, \dots)^T$, причем $|S_n| \leq \tilde{S}_n \leq \sup_n |S_n|$. Если же $\varepsilon \in [0, 1)$, то система (2.2) имеет положительное, монотонно возрастающее и ограниченное решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*, \dots)^T$, $S_n^* \geq \tilde{S}_n$, причем:*

$$S_n^* \leq \sup_n \tilde{S}_n, \quad \inf_n S_n^* \equiv \beta_0^* > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \sup_n \tilde{S}_n.$$

Теперь займемся вопросами построения положительного, монотонно возрастающего решения для следующей более общей системы:

$$(2.20) \quad h_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) h_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

относительно искомого вектора $h = (h_0, h_1, \dots, h_n, \dots)^T$.

При условиях (1.2)-(1.3) и (1.7), система (2.20) имеет нетривиальное решение $\tilde{h} = (\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n, \dots)^T$ следующей структуры: $0 \leq \tilde{h} \equiv \tilde{S}_n - r_n \leq \tilde{S}_n$ (см. [4]), где $r = (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)^T$ -ограниченное решение системы:

$$r_n = (1 - \gamma_n) \tilde{S}_n + \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) r_k.$$

С использованием неотрицательного решения $\tilde{h}$, аналогичным образом как и выше, устанавливаются следующие результаты:

Теорема 2.3. *Пусть $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3) и (1.7). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.20) имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее решение $h = (h_0, h_1, \dots, h_n, \dots)^T$, причем $h_n \geq \tilde{h}_n$ и*

$$h_n \leq \frac{1}{m_1} n + q, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$h_n \sim \frac{1}{m_1} n, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

Далее, при $\varepsilon \in [0, 1)$, $l_0 < +\infty$, система (2.20) имеет положительное, монотонно возрастающее решение $h^* = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_n^*, \dots)^T$, причем $h_n^* \geq h_n$, и

$$h_n^* \sim \frac{1}{m_1} n, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty,$$

$$\inf_n h_n^* \equiv \beta_0^* > 0, \quad h_n^* \leq \frac{1}{m_1} n + c,$$

где число c задается согласно (2.13).

Теорема 2.4. *Предположим, что $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3) и (1.7). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.20) имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее и ограниченное решение $h = (h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots)^T$, $h_n \geq \tilde{h}$.*

Если же $\varepsilon \in [0, 1)$, то система (2.20) имеет положительное, монотонно возрастающее и ограниченное решение $h^ = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_n^*, \dots)^T$, причем:*

$$h_n^* \leq \sup_n \tilde{h}_n, \quad \inf_n h_n^* \equiv \beta_0 > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^* = \sup_n \tilde{h}_n.$$

Теперь рассмотрим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$(2.21) \quad \eta_n = 2\tilde{\omega}(n + \delta) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \eta_k, \quad n = 0, 1, \dots,$$

относительно искомого бесконечного вектора $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots)^T$.

Здесь $\tilde{\omega}$ удовлетворяет условиям (1.4)-(1.6). Будем также предполагать, что последовательность $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ и матрица $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (1.7) и (1.2)-(1.3), а $l_0 < +\infty$. Тогда система (2.21) имеет неотрицательное и ограниченное решение: $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots)^T \in m$, причем $2\omega(n + \delta) \leq \eta_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (см. [6]).

Введем следующее множество

$$(2.22) \quad \Pi \equiv \left[\max \left(\frac{\max(\eta^0, \delta_0)}{\beta_0}, \delta \right), +\infty \right),$$

где $\eta^0 = \sup_n \eta_n$, $\beta_0 \equiv \inf_n h_n^*$, а $\delta_0 \geq \delta$ — некоторое фиксированное число, для которого $\tilde{\omega}(\delta_0) < \delta_0$. Справедлива

Лемма 2.2. *Пусть $t \in \Pi$ — некоторое число. Тогда*

$$h_n^t \equiv t h_n^* \geq \eta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Поскольку $t \in \Pi$, то из (2.22) следует, что

$$t \geq \frac{\max(\eta^0, \delta_0)}{\beta_0},$$

следовательно, получаем

$$h_n^t = t h_n^* \geq t \beta_0 \geq \max(\eta^0, \delta_0) \geq \eta^0 \geq \eta_n.$$

□

Введем последовательность следующих функций:

$$(2.23) \quad \lambda_n^t = 1 - \frac{\tilde{\omega}(n + h_n^t)}{h_n^t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, t \in \Pi.$$

Лемма 2.3. *Справедливы следующие факты:*

- а) $0 < \lambda_n^t \leq 1$,
- б) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda_n^t) n^j < +\infty, \quad j = 0, 1$,
- в) λ_n^t возрастает по n ,
- д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^t = 1$.

Доказательство. Сперва докажем а).

Пусть $t \in \Pi$, тогда $t \geq \frac{\max(\eta_n^0, \delta_0)}{\beta_0}$ и следовательно $h_n^t \geq \delta_0 \geq \delta$. Так как $\tilde{\omega}$ убывает на $[\delta, +\infty)$, то

$$\tilde{\omega}(n + h_n^t) \leq \tilde{\omega}(n + \delta_0).$$

Итак

$$\lambda_n^t \geq 1 - \frac{\tilde{\omega}(n + \delta_0)}{h_n^t} \geq 1 - \frac{\tilde{\omega}(n + \delta_0)}{\delta_0} \geq 1 - \frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0} > 0, \quad \lambda_n^t \leq 1.$$

Итак $0 < \lambda_n^t \leq 1$.

$$б) \quad n^j (1 - \lambda_n^t) \leq \frac{\tilde{\omega}(n + \delta_0)}{\delta} n^j \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^j (1 - \lambda_n^t) < +\infty, \quad j = 0, 1.$$

в) и д) непосредственно следуют из вида (2.23). Лемма доказана. $\square$

Пусть $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots)^T$ удовлетворяет следующей системе:

$$(2.24) \quad \tau_n = 2\tilde{\omega}(n + h_n^t) + \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \tau_k.$$

Введем следующие итерации:

$$\begin{aligned} \tau_n^{(p+1)} &= 2\tilde{\omega}(n + h_n^t) + \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \tau_k^{(p)}, \\ \tau_n^{(0)} &= 2\tilde{\omega}(n + h_n^t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Индукцией по p можно доказать, что

$$(2.25) \quad \begin{aligned} &\tau_n^{(p)} \text{ возрастает по } p, \\ &\tau_n^{(p)} \leq \eta_n, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно последовательность $\{\tau_n^{(p)}\}_0^\infty$ имеет предел:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tau_n^{(p)} = \tau_n$$

и предельный вектор $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots)^T$ удовлетворяет системе (2.24), а из (2.25) следует, что

$$(2.26) \quad 2\tilde{\omega}(n + h_n^t) \leq \tau_n \leq \eta_n \leq h_n^t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in \Pi.$$

Рассмотрим теперь соответствующую однородную систему уравнений:

$$(2.27) \quad q_n = \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) q_k.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что $\tilde{q}_n^t = 2h_n^t - \tau_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет системе (2.27). Введем следующие итерации:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} q_n^{(p+1)} &= \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) q_k^{(p)}, \\ q_n^{(0)} &= 2h_n^t, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Индукцией по p докажем, что

$$(2.29) \quad q_n^{(p)} \downarrow \text{ по } p.$$

В случае $p = 1$ имеем:

$$q_n^{(1)} = \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) 2h_n^t = 2\lambda_n^t h_n^t \leq 2h_n^t = q_n^{(0)}.$$

Предполагая, что $q_n^{(p)} \leq q_n^{(p-1)}$ из (2.28) получаем $q_n^{(p+1)} \leq q_n^{(p)}$. Заметим также, что $q_n^{(p)} \leq 2\lambda_n^t \cdot h_n^t$, $p = 1, 2, 3, \dots$

Теперь докажем, что

$$(2.30) \quad q_n^{(p)} \geq \tilde{q}_n^t, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

В случае $p = 0$, $q_n^{(0)} = 2h_n^t = \tilde{q}_n^t + \tau_n \geq \tilde{q}_n^t$. Предполагая, что $q_n^{(p)} \geq \tilde{q}_n^t$ при некотором p , из (2.28) получим: $q_n^{(p+1)} \geq \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \tilde{q}_k^t = \tilde{q}_n^t$.

Таким образом, из (2.29), (2.30) следует существование предела последовательности $\{q_n^{(p)}\}_0^\infty$:

$$(2.31) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} q_n^{(p)} = q_n \leq 2\lambda_n^t h_n^t,$$

причем $q = (q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)^T$ удовлетворяет системе (2.27) и цепочке неравенств

$$(2.32) \quad h_n^t \leq \tilde{q}_n^t \leq q_n \leq 2\lambda_n^t h_n^t \leq 2h_n^t.$$

Неравенство $h_n^t \leq \tilde{q}_n^t$ сразу следует из леммы 2 и (2.26). Прямой проверкой можно убедиться, что если $q = (q_0, q_1, \dots, q_n, \dots)^T$ является решением системы (2.27) и удовлетворяет неравенствам (2.32), то $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots)^T$, $\psi_n = \frac{q_n}{\lambda_n^t}$ будет удовлетворять системе

$$\psi_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \lambda_k^t \psi_k,$$

и неравенствам

$$(2.33) \quad h_n^t \leq \tilde{q}_n^t \leq q_n \leq \psi_n \leq 2h_n^t, \quad t \in \Pi.$$

3. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ (1.1).

В этом параграфе мы строим однопараметрическое семейство положительных решений для уравнения (1.1).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (1.2)-(1.6), причем $l_0 < +\infty$, $\alpha \in [0, 1)$. Тогда система (1.1) обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{x_n^t\}_{t \in \Pi}$, $x^t = (x_0^t, x_1^t, \dots, x_n^t, \dots)^T$ со следующими свойствами:

$$\text{если } t_1, t_2 \in \Pi \text{ и } t_1 > t_2, \text{ то } x_n^{t_1} - x_n^{t_2} \geq 2(t_1 - t_2)\beta_0,$$

$$(3.1) \quad \psi_n \leq x_n^t \leq 2h_n^t, \quad t \in \Pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем

a) если $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B , то $x^t \in m$, для любого $t \in \Pi$,

b) если же $\lambda = -1$ не является собственным значением B , то $x_n^t \sim \frac{2t}{m_1}n$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Далее, если дополнительно $\omega_k(\tau)$ убывает также по k и $\varepsilon = 0$, то x_n^t возрастает по n для любого $t \in \Pi$.

Доказательство. Введем следующие специальные итерации:

$$(3.2) \quad x_n^{(p+1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)})), \quad x_n^{(0)} = 2h_n^t,$$

для любых $n, p = 0, 1, 2, \dots$

Индукцией по p нетрудно убедиться, что

$$(3.3) \quad x_n^{(p)} \geq \psi_n, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(3.4) \quad x_n^{(p)} \text{ убывает по } p, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(3.5) \quad \text{если } t_1, t_2 \in \Pi \text{ то } x_n^{t_1(p)} - x_n^{t_2(p)} \geq 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}),$$

$$(3.6) \quad x_n^{(p)} \text{ возрастает по } n \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

Сначала докажем (3.3). Пусть $p = 0$, тогда неравенство (3.3) сразу следует из (2.33): $x_n^{(0)} = 2h_n^t \geq \psi_n$. Предположим (3.3) справедливо при некотором $p \in \mathbb{N}$.

Тогда с учетом монотонности ω_k на $[\delta, +\infty)$, (2.23) и неравенства $x_n^{(p)} \geq \psi_n$ будем иметь:

$$\begin{aligned} x_n^{(p+1)} &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)})) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \omega_k(\psi_k)) \\ &\geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \omega_k(h_k^t)) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \omega(k + h_k^t)) \\ &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - (1 - \lambda_k^t)h_k^t) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - (1 - \lambda_k^t)\psi_k) \\ &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})\lambda_k^t \psi_k = \psi_n. \end{aligned}$$

Докажем свойство (3.4). Так как $x_n^{(p)} \geq \psi_n \geq h_n^t \geq \delta$, $t \in \Pi$, то

$$x_n^{(1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(0)} - \omega_k(x_k^{(0)})) \leq 2\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})h_k^t = 2h_n^t = x_n^{(0)}.$$

Теперь, предполагая, что $x_n^{(p)} \leq x_n^{(p-1)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, убедимся, что тогда $x_n^{(p+1)} \leq x_n^{(p)}$. Из монотонности ω_k на $[\delta, +\infty)$ и с учетом неравенства $x_n^{(p)} \geq \delta$, в (3.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} x_n^{(p+1)} &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)})) \\ &\geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p-1)} - \omega_k(x_k^{(p-1)})) = x_n^{(p)}. \end{aligned}$$

Займемся теперь доказательством неравенства (3.5). В случае $p = 0$ неравенство (3.5) превращается в равенство. Предположим, что оно выполняется при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} x_n^{t_1(p+1)} - x_n^{t_2(p+1)} &\geq 2\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(h_k^{t_1} - h_k^{t_2}) \\ &+ \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\omega_k(x_k^{t_2(p)}) - \omega_k(x_k^{t_1(p)})) \geq 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}). \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{x_n^{(p)}\}_0^\infty$ имеет предел $\lim_{p \rightarrow \infty} x_n^{(p)} = x_n^t \geq \psi_n$, $x^t = (x_0^t, x_1^t, \dots, x_n^t, \dots)^T$ этот предел удовлетворяет системе (1.1). Из (3.5), (3.6) получаем

$$x_n^{t_1} - x_n^{t_2} \geq 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}) \geq 2(t_1 - t_2)\beta_0.$$

В случае а) из неравенства $x_n^t \leq 2h_n^t$ следует, что $x^t \in m$.

В случае б) из (3.1), с учетом (2.33), приходим к асимптотическому равенству:

$$x_n^t \sim \frac{2t}{m_1} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы нам остается убедиться, что если $\omega_k(\tau)$ убывает также по k , то x_n^t возрастает по n для $t \in \Pi$. Пусть $x_{n+1}^{(p)} \geq x_n^{(p)}$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующую разность:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(p+1)} - x_n^{(p+1)} &= \gamma_n \left(\sum_{\tau=-\infty}^n a_\tau (x_{n+1-\tau}^{(p)} - x_{n-\tau}^{(p)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau=-\infty}^{n+1} a_\tau (\omega_{n-\tau}(x_{n-\tau}^{(p)}) - \omega_{n+1-\tau}(x_{n+1-\tau}^{(p)})) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_{n+1}^{(p+1)} \geq x_n^{(p+1)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Теорема доказана. $\square$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper studies a class of non-linear infinite algebraic systems with matrix of Toeplitz-Hankel type. An one-parameter family of positive solutions for such systems is constructed, and the asymptotic behavior at infinity of the solution is investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", *Астрофизика*, **2**, по. 4, 31 – 36 (1986).
- [2] J. D. Sargan, "The distribution of wealth", *Econometrics*, **25**, по. 4, 568 – 590 (1957).
- [3] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одного нелинейного интегродифференциального уравнения в задаче распределения дохода", *ЖВМ и МФ*, **50**, по. 10, 1793 – 1802 (2010).
- [4] Л. Г. Арабаджян, "Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае", *Матем. заметки*, **89**, по. 1, 3 – 11 (2011).
- [5] Э. Пресдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений*, Москва, Изд. Мир (1979).
- [6] Л. Г. Арабаджян, "О дискретных уравнениях Винера-Хопфа в консервативном случае", *Матем. Анализ и его приложения, Тематический сб. научных трудов*, 26 – 36 (1980).
- [7] E. Basor and T. Ehrhard, "On a class of Toeplitz and Hankel Operators", *New York Journal of Mathematics*, **5**, 1 – 16 (1999).
- [8] Х. А. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью", *Известия РАН, Сер. Матем.*, **76**, по. 1, 173 – 200 (2012).
- [9] Н. В. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Линейные алгебраические системы с теплическими матрицами", *ЖВМ и МФ*, **17**, по. 5, 1102 – 1116 (1977).
- [10] Н. В. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", *Дифф. урав.*, **26**, по. 1, 1442 – 1452 (1990).

Поступила 24 октября 2012

1300pp

Cover-to-cover translation of the present IZVESTIYA is published by Allerton Press, Inc. New York, under the title

*JOURNAL OF
CONTEMPORARY
MATHEMATICAL
ANALYSIS*

(Armenian Academy of Sciences)

Below is the contents of a sample issue of the translation

Vol. 48, No. 4, 2013

CONTENTS

R. H. BARKHUDARYAN, On the Gibbs phenomenon for expansions by eigenfunctions of the boundary problem for Dirac system	139
NEMAT NYAMORADI, Positive solutions for multi-point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations	145
S. S. DAVIDOV, On the invertible algebras linear over an Abelian group	158
EIKE BIEHLER, Proofs of the conjectures by Mecke for mixed line-generated tessellations.....	166
LIN TANG, A weighted transplantation theorem for Laguerre function expansions	174

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 48, номер 5, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, О рядах по общей системе Франклина.....	3
М. А. ЗАКАРЯН, Операторы Теплица и Ганкеля на весовых пространствах типа Бергмана-Джрбашяна гармонических в единичном шаре	31
Ю. М. МОВСИЯН, В. А. АСЛАНЯН, Алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана.....	49
Х. А. ХАЧАТРИАН, М. Ф. БРОЯН, Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса нелинейных бесконечных алгебраических систем с матрицами типа Теплица-Ганкеля.....	63 – 78

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 48, No. 5, 2013

CONTENTS

G. G. GEVORKYAN, On series by general Franklin system.....	3
M. A. ZAKARYAN, Toeplitz and Hankel operators on Bergman-Djrbashian type weighted spaces of harmonic functions on the unit ball	31
YU. M. MOVSIYAN, V. A. ASLANYAN, Algebras with hyperidentities of the variety of De Morgan algebras	49
Kh. A. KHACHATRYAN, M. F. BROYAN, One-parameter family of positive solutions for a class of non-linear infinite algebraic systems with Toeplitz-Hankel type matrices	63 – 78