ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2013

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2013, стр. 3-24.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КОММУТАТИВНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРОВ

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *angen@arminco.com*

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются некоторые интерполяционные задачи типа проблемы пересечения Петре о коммутативности интерполяционных функторов. В наиболее общей постановке задача заключается в описании условий, при которых справедливо равенство $F(A, G(A_0, A_1)) = G(F(A, A_0), F(A, A_1))$ (F и G - интерполяционные функторы).

MSC2010 number: 46B70, 46M35.

Ключевые слова: Интерполяция; задача пересечения Петре; интерполяционный функтор; пересечение и сумма банаховых пространств; методы "вещественной" и "комплексной" интерполяции.

1. Введение

Пусть F - некоторый интерполяционный функтор (см. [1, 2]), а $\{A, A_0, A_1\}$ - интерполяционная тройка. Петре в [3] рассмотрел вопрос: когда справедливо равенство

$$F(A, A_0 \cap A_1) = F(A, A_0) \cap F(A, A_1)? \tag{1.1}$$

Рассматривая в качестве функтора F функтор "вещественной"интерполяции, Петре указал достаточные условия для выполнения равенства

$$(A, A_0 \cap A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q} \tag{1.2}$$

в терминах "квазилинеаризуемости"соответствующих интерполяционных пар.

Замечая, что в равенстве (1.1) кроме функтора F присутствует еще и функтор пересечения, можно поставить задачу, заменяя функтор пересечения на функтор суммы и рассмотреть вопрос справедливости равенства:

$$(A, A_0 + A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{1.3}$$

Можно обобщить постановку задачи Петре, заменяя в равенстве (1.1) функтор пересечения на некоторый интерполяционный функтор G и рассмотреть вопрос справедливости равенства

$$F(A,G(A_0,A_1)) = G(F(A,A_0),F(A,A_1)). \tag{1.4}$$

Используя в (1.4) в качестве функторов F и G функторы суммы и пересечения приходим к следующему вопросу: когда справедливы равенства

$$A \cap (A_0 + A_1) = (A \cap A_0) + (A \cap A_1), \tag{1.5}$$

$$A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1)? \tag{1.6}$$

Оказывается, что существует связь между равенствами (1.2), (1.3) и (1.5), (1.6).

Напомним некоторые основные понятия теории интерполяции. Условимся тройку банаховых пространств $\{A, A_0, A_1\}$ (как и пару) называть интерполяционной тройкой (интерполяционной парой), если они линейно и непрерывно вложены в некоторое линейное топологическое пространство T.

Далее, будем полагать, что рассматриваемые тройки (пары) являются интерполяционными.

Определение 1.1. *Для пары $\{A_0, A_1\}$ определим пересечение и сумму:*

$$\Delta \equiv A_0 \cap A_1 = \{a \in T;\ \|a\|_\Delta = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}) < \infty\},$$

$$\Sigma \equiv A_0 + A_1 = \{a \in T;\ a = a_0 + a_1,\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\}.$$

Норма в Σ вводится следующим образом:

$$\|a\|_\Sigma = \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}).$$

Определение 1.2. *Пространство A промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место вложения $\Delta \subset A \subset \Sigma$.*

Определение 1.3. *Пусть $0 < \theta < 1$. Будем говорить, что банахово пространство A принадлежит классу $\mathcal{B}(\theta, A_0, A_1)$, если*

$$(A_0, A_1)_{\theta,1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\theta,\infty}. \tag{1.7}$$

Будем полагать, что $A_j \in \mathcal{B}(j, A_0, A_1)$, $j = 0, 1$.

Определение 1.4. *а) Банахово пространство A обладает* (A)*- свойством относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место равенства (1.5), (1.6).*

б) Пространство A обладает свойством (P) *относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место (1.2), (1.3) для всех θ и q, причем $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$.*

При этом равенства (1.5), (1.6) будем называть равенствами типа Петре, а равенства (1.2), (1.3) будем называть равенствами Петре.

Исследованию задачи Петре (равенство (1.2)) посвящены работы многих авторов, в частности отметим работы [3 -7]. Наш подход заключается в том, что мы фиксируем произвольную интерполяционную пару $\{A_0, A_1\}$, затем стараемся описать пространства A, обладающие (**P**) - свойством относительно этой пары.

2. О равенствах типа Петре

Теорема 2.1. *Если одно из пространств тройки $\{A, A_0, A_1\}$ вложено в другое, то равенства (1.5), (1.6) имеют место для этой тройки.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что независимо от условий теоремы, для любой интерполяционной тройки имеют место вложения

$$A \cap (A_0 + A_1) \supset (A \cap A_0) + (A \cap A_1), \tag{2.1}$$

$$A + (A_0 \cap A_1) \subset (A + A_0) \cap (A + A_1). \tag{2.2}$$

Обратные вложения к вложениям (2.1), (2.2) легко проверяются, если имеет место одно из вложений $A_0 \subset A_1$, $A_1 \subset A_0$. Кроме того, вложение, обратное к (2.1) очевидно при $A \subset A_0$ или $A \subset A_1$, а вложение, обратное к (2.2) очевидно при $A_0 \subset A$ или $A_1 \subset A$.

Пусть $A_0 \subset A$. Тогда вложение, обратное к (2.1) имеет вид

$$A \cap (A_0 + A_1) \subset A_0 + (A \cap A_1). \tag{2.3}$$

Пусть $a \in A \cap (A_0 + A_1)$. Тогда $a \in A$, $a = a_0' + a_1'$; $a_0' \in A_0$, $a_1' \in A_1$. Имеем

$$\|a_1'\|_A \le \|a\|_A + \|a_0'\|_A \le c\,(\|a\|_A + \|a_0'\|_{A_0}) < \infty.$$

То есть $a_1' \in A$. Тогда $a_1' \in A \cap A_1$. Таким образом, элемент a представляется в виде $a = a_0' + a_1'$, где $a_0' \in A_0, a_1' \in A \cap A_1$, и следовательно $a \in A_0 + (A \cap A_1)$. Теоретико-множественное вложение (2.3) доказано. Докажем непрерывность этого вложения. Для $A_0 \subset A$ имеем

$$\|a\|_{A_0+(A\cap A_1)} = \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_0\in A_0 \\ a_1\in A\cap A_1}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A\cap A_1}) \le \|a_0'\|_{A_0} + \|a_1'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} =$$

$$= \|a_0'\|_{A_0} + \|a - a_0'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} \le \|a_0'\|_{A_0} + \|a\|_A + \|a_0'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} \le$$

$$\le c\,(\|a_0'\|_{A_0} + \|a_1'\|_{A_1} + \|a\|_A)\,.$$

Взяв нижнюю грань по всем разложениям элемента a, $a = a_0' + a_1'$, $a_0' \in A_0$, $a_1' \in A_1$ приходим к (2.3). Равенство (1.5) доказано при $A_0 \subset A$(или $A_1 \subset A$). Аналогично доказываем вложение, обратное к (2.2) при $A \subset A_0$ (или $A \subset A_1$). □

Теорема 2.2. *а) Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется одно из равенств (1.5),(1.6), то выполняется и другое.*

б) Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняются равенства (1.5), (1.6), то аналоги этих равенств выполняются для любой другой очередности пространств тройки (например для $\{A_1, A, A_0\}$).

Доказательство. Поскольку $A_1 \subset A_0 +.A_1$, то к тройке $\{A_0 + A_1, A, A_1\}$ применима теорема 2.1. Имеем

$$(A_0 + A_1) \cap (A + A_1) = [(A_0 + A_1) \cap A] + [(A_0 + A_1) \cap A_1] = = [(A_0 + A_1) \cap A] + A_1. \tag{2.4}$$

Пусть для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется (1.5). Тогда из (2.4) получаем

$$(A_0 + A_1) \cap (A + A_1) = (A_0 \cap A) + (A_1 \cap A) + A_1 = A_1 + (A_0 \cap A).$$

т.е. для тройки $\{A_1, A, A_0\}$ выполняется (1.6). Таким образом, если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется (1.5), то для тройки $\{A_1, A, A_0\}$ выполняется (1.6). Это обстоятельство кратко запишем так

$$\{A, A_0, A_1\}_{(5)} \Rightarrow \{A_1, A, A_0\}_{(6)} \tag{2.5}$$

Аналогично, поскольку $A \cap A_0 \subset A_0$, то применяя теорему 2.1 к тройке $\{A \cap A_0, A_0, A_1\}$, получаем

$$(A \cap A_0) + (A \cap A_1) = [(A \cap A_0) + A_0] \cap [(A \cap A_0) + A_1] = A_0 \cap [(A \cap A_0) + A_1].$$

На основании (2.5), применяя (1.6) к тройке $\{A_1, A, A_0\}$, получаем

$$(A \cap A_0) + (A_0 \cap A_1) = A_0 \cap (A + A_1) \cap (A_0 + A_1) = A_0 \cap (A + A_1).$$

т.е.

$$\{A_1, A, A_0\}_{(6)} \Rightarrow \{A_0, A_1, A\}_{(5)}. \tag{2.6}$$

Таким образом, мы доказали цепочку следствий (см. (2.5), (2.6))

$$\{A, A_0, A_1\}_{(5)} \Rightarrow \{A_1, A, A_0\}_{(6)} \Rightarrow \{A_0, A_1, A\}_{(5)} \Rightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(6)}$$

Аналогично можно доказать, что $\{A, A_0, A_1\}_{(6)} \Rightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5)}$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) следует из утверждения а) и импликаций (2.5), (2.6). □

Теорема 2.3. *Пусть* $0<\theta<1, 1\le q\le\infty$ *и* $A=(A_0,A_1)_{\theta,q}$. *Тогда для тройки* $\{A,A_0,A_1\}$ *выполняются равенства (1.5), (1.6), т.е. (учитывая свойство промежуточности* $\Delta\subset A\subset\Sigma$*)*

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=[A_0+(A_0,A_1)_{\theta,q}]\cap[A_1+(A_0,A_1)_{\theta,q}], \tag{2.7}$$

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=[A_0\cap(A_0,A_1)_{\theta,q}]+[A_1\cap(A_0,A_1)_{\theta,q}]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из следствия 3.6.2 из [1] для K - функционала Петре имеем

$$K(t,a;A_0,A)\sim t\left[\int\limits_{t^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty}s^{-\theta q}K^q(s,a;A_0,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.9}$$

$$K(t,a;A,A_1)\sim\left[\int\limits_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}}s^{-\theta q}K^q(s,a;A_0,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.10}$$

(с соответствующими видоизменениями при $q=\infty$). Складывая соотношения (2.9), (2.10), при $t=1$, получаем

$$\|a\|_{(A+A_0)\cap(A+A_1)}\sim\|a\|_{A+A_0}+\|a\|_{A+A_1}\sim K(1,a;A_0,A)+$$

$$+K(1,a;A_1,A)\sim\left[\int\limits_0^{\infty}s^{-\theta q}K^q(s,a;A_0,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}=\|a\|_A.$$

Равенство (2.7) доказано. Равенство (2.8) следует из теоремы 2.2. □

Для дальнейших рассмотрений полезной оказывается следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{A,A_0,A_1\}$ *- интерполяционная тройка. Тогда*

а) $\{A\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5),(6)}\Leftrightarrow\{A,A_0,A_1\}_{(5),(6)}$,

б) $\{A+(A_0\cap A_1),A_0,A_1\}_{(5),(6)}\Leftrightarrow\{A,A_0,A_1\}_{(5),(6)}$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 а) для доказательства утверждения а) леммы 2.1 достаточно убедиться, что $\{A\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5)}\Leftrightarrow\{A,A_0,A_1\}_{(5)}$. Пусть имеет место $\{A\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5)}$. Тогда

$$A\cap(A_0+A_1)=A\cap(A_0+A_1)\cap(A_0+A_1)=[A\cap(A_0+A_1)\cap A_0]+$$

$$+[A\cap(A_0+A_1)\cap A_1]=A\cap A_0+A\cap A_1.$$

Односторонняя импликация $\{A\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5)}\Rightarrow\{A,A_0,A_1\}_{(5)}$ доказана. Имеем далее, из $\{A,A_0,A_1\}_{(5)}$:

$$A\cap(A_0+A_1)\cap(A_0+A_1)=A\cap(A_0+A_1)=A\cap A_0+A\cap A_1=$$

$$A\cap(A_0+A_1)\cap A_0+A\cap(A_0+A_1)\cap A_1$$

Утверждение а) доказано. Утверждение б) доказывается аналогично. □

3. (P)-СВОЙСТВО ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе мы установим, что пространства $A_0, A_1, A_0+A_1, A_0\cap A_1$, обладают свойством (P) относительно интерполяционной пары $\{A_0,A_1\}$.

Теорема 3.1. *Пространства* A_0, A_1 *обладают свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0,A_1\}$, *т.е.* ($0<\theta<1$ $\quad 1\le q\le\infty$, $j=0,1$)

$$(A_j,A_0\cap A_1)_{\theta,q}=(A_j,A_{1-j})_{\theta,q}\cap A_j, \tag{3.1}$$

$$(A_j,A_0+A_1)_{\theta,q}=(A_j,A_{1-j})_{\theta,q}+A_j. \tag{3.2}$$

Доказательство. Справедливость равенств (3.1) доказана в [6]. Докажем равенства (3.2). Пусть $j=1$ (ясно, что можно ограничиться этим случаем). На основании следствия 3.6.2 из [1] имеем

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1}=K(1,a;(A_0,A_1)_{\theta,q},A_1)\sim\left[\int\limits_0^1 s^{-\theta q}K^q(s,a;A_0,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.3}$$

Применяя в (3.3) теорему 2 из [8], получаем:

$$\|a\|_{(\Sigma,A_1)_{\theta,q}}=\left[\int\limits_0^\infty s^{-\theta q}K^q(s,a;\Sigma,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}\ge\left[\int\limits_0^1 s^{-\theta q}K^q(s,a;\Sigma,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left[\int\limits_0^1 s^{-\theta q}K^q(s,a;A_0,A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}\sim\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1},$$

т.е.

$$(\Sigma,A_1)_{\theta,q}\subset(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то равенство (3.2) выполняется. □

Теорема 3.2. *Пусть* $\{A_0,A_1\}$ - *интерполяционная пара. Пространства* Σ *и* Δ *обладают свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0,A_1\}$.

Доказательство. Докажем, что равенство (1.3) имеет место при $A=\Delta$. Имеем

$$\begin{aligned}(A_0,\Delta)_{\theta,q}+(A_1,\Delta)_{\theta,q} &= [A_0\cap(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1\cap(A_0,A_1)_{1-\theta,q}] = \\ &= (A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_0]\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1])+ \\ &+(A_1\cap[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0]\cap[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_1]) = \\ &(A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1])+(A_1\cap[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0]).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Первое равенство в (3.4) написано на основании (3.1) и теоремы 3.4.1 из [1]. Второе равенство вытекает из (2.7). Третье равенство очевидно. Применим теорему 2.1 к тройке

$$\{A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1]\,,A_1,(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0\}\,.$$

Тогда применяя равенство (1.6) к этой тройке, из (3.4) получаем

$$\begin{aligned}(A_0,\Delta)_{\theta,q}+(A_1,\Delta)_{\theta,q} &= (A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1]+A_1)\cap \\ &\cap(A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1]+[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0]) = \\ &(A_0\cap[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1]+A_1)\cap[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0]\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Применим теорему 2.1 к тройке $\{A_0,(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1,A_1\}$. Тогда из (3.5) имеем

$$(A_0,\Delta)_{\theta,q}+(A_1,\Delta)_{\theta,q}=[(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1]\cap[(A_0,A_1)_{1-\theta,q}+A_0]\,.$$

Применяя теорему 3.1 и теорему 3.4.1 из [1], получаем

$$(A_0,\Delta)_{\theta,q}+(A_1,\Delta)_{\theta,q}=(\Sigma,A_1)_{\theta,q}\cap(\Sigma,A_0)_{\theta,q}\supset(\Sigma,\Delta)_{\theta,q}\,.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к равенству (1.3) при $A=\Delta$. Равенство (1.2) при $A=\Sigma$ доказано в [6]. Заметим, что

$$(\Sigma,A_0)_{\theta,q}+(\Sigma,A_1)_{\theta,q}=A_0+(A_1,A_0)_{\theta,q}+A_1+(A_0,A_1)_{\theta,q}=\Sigma=(\Sigma,\Sigma)_{\theta,q}\,,$$

т.е. имеет место (1.3) при $A=\Sigma$.

Аналогично получаем

$$(\Delta,A_0)_{\theta,q}+(\Delta,A_1)_{\theta,q}=A_0\cap(A_1,A_0)_{\theta,q}\cap A_1\cap(A_0,A_1)_{\theta,q}=\Delta=(\Delta,\Delta)_{\theta,q}\,,$$

т.е. (1.2) имеет место при $A=\Delta$. □

4. О свойствах троек, удовлетворяющих равенствам типа Петре

В настоящем параграфе мы исследуем свойства троек, удовлетворяющих равенствам (1.5), (1.6). В частности оказывается, что выполнение этих равенств замкнуто относительно функторов суммы, пересечения и функтора "вещественной" интерполяции (во всяком случае для промежуточных пространств).

Теорема 4.1. *Пусть пространства A и B обладают свойством* (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$. *Тогда*

а) Из $B \supset \Delta$ следует, что $A \cap B$ тоже обладает свойством (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

б) Из $A \subset \Sigma$ следует, что $A + B$ тоже обладает свойством (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Таким образом, если одно из пространств A или B промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то пространства $A \cap B$ и $A + B$ обладают свойством (**A**).

Доказательство. Пусть сначала имеют место оба вложения $B \supset \Delta$, $A \subset \Sigma$. Тогда из (1.5) и (1.6), примененных соответственно к тройкам $\{A, A_0, A_1\}$ и $\{B, A_0, A_1\}$, имеем

$$A \cap B = [A \cap A_0 + A \cap A_1] \cap (B + A_0) \cap (B + A_1). \tag{4.1}$$

Поскольку $A \cap A_0 \subset B + A_0$, то к тройке $\{A \cap A_0, A \cap A_1, B + A_0\}$ применима теорема 2.1. Как и при доказательстве теоремы 2.2 это обстоятельство кратко запишем так: $\{,,\}_{(5),(6)}$. Тогда из (4.1) имеем

$$A \cap B = [A \cap A_0 + A \cap A_1 \cap (B + A_0)] \cap (B + A_1). \tag{4.2}$$

Поскольку $A \cap A_1 \cap (B + A_0) \subset B + A$, то на основании теоремы 2.1, примененной к тройке $\{A \cap A_0, A \cap A_1 \cap (B + A_0), B + A_1\}$, из (4.2) получаем

$$A \cap B = A \cap A_0 \cap (B + A_1) + A \cap A_1 \cap (B + A_0). \tag{4.3}$$

Используя (**A**) - свойство пространства B относительно пары $\{A_0, A_1\}$, из (4.3) и теоремы 2.2 получаем ($B \supset \Delta$):

$$A \cap B = A \cap [B \cap A_0 + A_0 \cap A_1] + A \cap [B \cap A_1 + A_0 \cap A_1] =$$

$$= (A \cap B) \cap A_0 + (A \cap B) \cap A_1,$$

т.е. $\{A \cap B, A_0, A_1\}_{(5)}$. Рассуждая аналогично, для $A + B$ получаем

$$A + B = A \cap A_0 + A \cap A_1 + (B + A_0) \cap (B + A_1) = A \cap A_0 + [A \cap A_1 + B + A_0] \cap$$

$$\cap[A\cap A_1+B+A_1]=A\cap A_0+[A\cap A_1+B+A_0]\cap[B+A_1]=A\cap A_0+$$
$$+[(A+A_0)(A_1+A_0)+B]\cap[B+A_1]=A\cap A_0+[A+A_0+B]\cap[B+A_1]=$$
$$=[A\cap A_0+A+A_0+B]\cap[A\cap A_0+B+A_1]=$$
$$=(A+B+A_0)\cap[(A+A_1)\cap(A_0+A_1)+B]=(A+B+A_0)\cap(A+B+A_1).$$

т.е.$\{A+B,A_0,A_1\}_{(6)}$. Таким образом, утверждение теоремы имеет место при одновременном выполнении вложений $B\supset\Delta$, $A\subset\Sigma$.

Докажем утверждение a) теоремы. На основании леммы 2.1 имеем

$$\{A\cap B\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5),(6)}\Rightarrow\{A\cap B,A_0,A_1\}_{(5),(6)}.$$

Поскольку $B\subset\Delta, A\cap(A_0+A_1)\subset\Sigma$ то из предыдущих рассмотрений и леммы 2.1 приходим к утверждению a).

Утверждение б) доказывается аналогично. □

Следующая теорема показывает, что множество промежуточных пространств, удовлетворяющих равенствам (1.5), (1.6), замкнуто относительно функтора "вещественной" интерполяции.

Теорема 4.2. *Пусть* $0<\theta<1$, $1\le q\le\infty$, $A_0\cap A_1\subset A, B\subset A_0+A_1$ *Если пространства* A *и* B *обладают свойством* (A) *относительно пары* $\{A_0,A_1\}$, *то* $(A,B)_{\theta,q}$ *также обладает свойством* (A) *относительно этой пары.*

Доказательство теоремы будет приведено в §7. Обозначим правые части равенств (1.5), (1.6) через

$$A_*=(A\cap A_0)+(A\cap A_1),\quad A^*=(A+A_0)\cap(A+A_1).$$

Для промежуточного относительно пары $\{A_0,A_1\}$ пространства A свойство (A) означает, что $A=A_*=A^*$.

Теорема 4.3. *Пусть* $1\le q\le\infty$. *Тогда*

$$(A_*,A)_{\frac12,q}=A\cap(A^*,A_*)_{\frac12,q},\tag{4.4}$$

$$(A^*,A)_{\frac12,q}=A+(A^*,A_*)_{\frac12,q}.\tag{4.5}$$

Доказательство. Имеем

$$(A_*,A)_{\frac12,q}=(A\cap A_0+A\cap A_1,A)_{\frac12,q}=(A\cap(A\cap A_0+A_1),A)_{\frac12,q}=$$
$$=A\cap(A\cap A_0+A_1,A)_{\frac12,q}=A\cap(A+A_1,A\cap(A\cap A_0+A_1,A))_{\frac12,q}=\tag{4.6}$$
$$=A\cap(A+A_1,A\cap A_0+A\cap A_1)_{\frac12,q}=A\cap(A+A_1,A_*)_{\frac12,q}.$$

Второе и пятое равенства в (4.6) написаны на основании теоремы 2.1, примененной к тройке $\{A, A\cap A_0, A_1\}$, третье равенство написано на основании теоремы 3.1, четвертое равенство написано на основании следствия из теоремы 3 из [6]. Аналогично (4.6) получаем

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A\cap (A + A_0, A_*)_{\frac{1}{2},q}. \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) имеем

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A\cap (A + A_0, A_*)_{\frac{1}{2},q} \cap (A + A_1, A_*)_{\frac{1}{2},q} \supset$$

$$\supset A\cap ((A + A_0)\cap (A + A_1), A_*)_{\frac{1}{2},q} = A\cap (A^*, A_*)_{\frac{1}{2},q}. \tag{4.8}$$

Поскольку очевидно $A_* \subset A \subset A^*$, то обратное вложение к (4.8) тоже выполняется, и мы приходим к (4.4). Аналогично доказываем (4.5):

$$(A^*, A)_{\frac{1}{2},q} = ((A + A_0)\cap (A + A_1), A)_{\frac{1}{2},q} = (A + A_1\cap (A + A_0), A)_{\frac{1}{2},q} =$$

$$= A + (A_1\cap (A + A_0), A)_{\frac{1}{2},q} = A + (A + A_1\cap (A + A_0), A\cap A_1))_{\frac{1}{2},q} =$$

$$= A + ((A + A_0)\cap (A + A_1), A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q} = A + (A^*, A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q}.$$

Аналогично получаем $(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A + (A^*, A\cap A_0)_{\frac{1}{2},q}$. Тогда

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A + (A^*, A\cap A_0)_{\frac{1}{2},q} + (A^*, A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q} \subset A + (A^*, A_*)_{\frac{1}{2},q}.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (4.5). □

5. Достаточные условия для выполнения равенств Петре

В §2 мы доказали (P) - свойство для первоначальных пространств A_0, A_1, Σ, Δ относительно интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$. Продолжим исследование интерполяционной проблемы Петре и укажем достаточные условия для выполнения равенств (1.2), (1.3).

Теорема 5.1. *Пусть* $0 < \eta < 1$. *Если* $A \in \mathcal{B}(\eta; A_0, A_1)$, *то пространство* A *обладает свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство. Имеем ($0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$)

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A_*, \Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0 + A\cap A_1, \Delta)_{\theta,q} \supset \tag{5.1}$$

$$\supset (A\cap A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A\cap A_1, \Delta)_{\theta,q}.$$

Поскольку $A \in \mathcal{B}(\eta, A_0, A_1)$, то из теоремы 3.1 имеем

$(A_0, \Delta)_{\eta,1} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta,1} \subset A_0\cap A,\qquad (A_0, \Delta)_{\eta,\infty} = A_0\cap (A_0, A_1)_{\eta,\infty} \supset A_0\cap A,$

т.е.

$$A_0 \cap A \in \mathcal{B}(\eta; A_0, \Delta). \tag{5.2}$$

Аналогично получаем

$$A_1 \cap A \in \mathcal{B}(\eta; \Delta, A_1). \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2), (5.3) и включения $\Delta \in \mathcal{B}(1; A_0, \Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(0; \Delta, A_1)$ показывают, что можно применить теорему реитерации (см. теорему 3.5.3 из [1]). Тогда из (5.1) имеем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\eta(1-\theta),q}. \tag{5.4}$$

Применяя к правой части (5.4) теорему 3.1, получаем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset \left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right]. \tag{5.5}$$

Поскольку (см. теорему 3.4.1 из [1])

$$(A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta),q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \subset (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}, \tag{5.6}$$

то к тройке $\left\{A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}, A_1, (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right\}$ можно применить теорему 2.1. Тогда из (5.5), (5.6) имеем

$$\begin{aligned}
(A, \Delta)_{\theta,q} &\supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap \\
&\cap \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right) = \\
&= \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \supset \\
&\supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right]\right) \cap \\
&\cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} = (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Последнее равенство в (5.7) написано на основании теоремы 2.3 (см. (2.8)). Теперь, используя теорему реитерации 3.5.3 из [1], получаем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (1.2). Равенство (1.3) доказывается аналогично. □

Непосредственным следствием доказанной теоремы является то, что пространства $(A_0, A_1)_{\eta,r}$ и $[A_0, A_1]_\eta$ обладают (P) - свойством относительно пары $\{A_0, A_1\}$ (см. теоремы 3.4.1 и 4.7.1 из [1]) для всех индексов $\eta, r : 0 < \eta < 1,\ 1 \le r \le \infty$.

Теорема 5.2. *Пусть Δ плотно в A_j $(j=0,1)$ и $0<\eta<1$. Если A - интерполяционное пространство типа η (см. теорему 2.4.1 из [1]) относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то A обладает свойством* (P) *относительно этой пары.*

Доказательство. На основании теоремы 3.9.1 из [1] заключаем, что $A \in \mathcal{B}(\eta; A_0, A_1)$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 6.1. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть* $0<\alpha,\beta,\eta<1\,,\quad 1\le q_0,q_1\le\infty$. *Положим*

$$B_0=(A_0,A_1)_{\alpha,q_0}\quad (\text{ или } [A_0,A_1]_\alpha), B_1=(A_0,A_1)_{\beta,q_1}\quad (\text{ или } [A_0,A_1]_\beta).$$

Если A - интерполяционное пространство типа η относительно пары $\{B_0, B_1\}$, то A обладает свойством (P) *относительно пары $\{A_0, A_1\}$.*

Доказательство. Из теоремы 3.5.3 из [1] имеем $(1\le r\le\infty)$:

(5.8) $$(B_0,B_1)_{\eta,r}=(A_0,A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta,r}.$$

Теорема 3.4.2 из [1] (теорема 4.2.2 для метода "комплексной"интерполяции) утверждает, что $A_0\cap A_1$ плотно в B_j $(j=0,1)$. Тогда в B_j $(j=0,1)$. плотно и пространство $B_0\cap B_1$. Теперь из теоремы 3.9.1 из [1] получаем

(5.9) $$(B_0,B_1)_{\eta,1}\subset A\subset(B_0,B_1)_{\eta,\infty}.$$

Учитывая (5.8), вложения (5.9) можно переписать в виде

$$(A_0,A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta,1}\subset A\subset(A_0,A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta,\infty},$$

т.е. $A\in\mathcal{B}(\alpha(1-\eta)+\beta\eta; A_0, A_1)$. Утверждение теоремы следует из теоремы 5.1. $\square$

6. Об уточнении одного классического утверждения

Хорошо известно (см. утверждение е) теоремы 1.3.3 из [2], утверждение д) теоремы 3.4.1 из [1] для "вещественного"метода и утверждение д) теоремы 1.9.3 из [2], утверждение в) теоремы 4.2.1 из [1] для "комплексного"метода), что если $A_1\subset A_0$, то

(6.1) $$(A_0,A_1)_{\theta,q}\subset(A_0,A_1)_{\eta,q},$$

где $0<\eta<\theta<1,\ 1\le q,r\le\infty$.

Оказывается, что справедливы и обратные утверждения. Кроме того, вторые нижние индексы в (6.1) могут не совпадать:

(6.2) $$(A_0,A_1)_{\theta,q}\subset(A_0,A_1)_{\eta,r}.$$

Теорема 6.1. *Пусть* $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$. *Для выполнения каждого из вложений (6.1), (6.2) необходимо и достаточно, чтобы* $A_1 \subset A_0$.

Утверждение остается верным при $\theta = 1$, если заменить $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ (или $[A_0, A_1]_\theta$) на A_1; и при $\eta = 0$, если заменить $(A_0, A_1)_\eta$ (или $[A_0, A_1]_q$) на A_0.

Доказательство. Докажем утверждение для "вещественного" метода. Пусть сначала $0 < \eta < \theta < 1$, $q = r$. Учитывая утверждение д) теоремы 3.4.1 из [1] достаточно доказать, что из вложения (6.2) следует вложение $A_1 \subset A_0$.

Используя теорему 3.1 и вложение (6.2), имеем

(6.3) $$(\Delta, A_1)_{\theta,q} = A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} \subset A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}.$$

Далее, из утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1] ($1-\theta < 1-\eta$ и $\Delta \subset A_1$), имеем

(6.4) $$(\Delta, A_1)_{\theta,q} = (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} \supset (A_1, \Delta)_{1-\eta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}.$$

Вложения (6.3), (6.4) дают $(\Delta, A_1)_{\theta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}$, $\eta < \theta$.
Теперь из упражнения 21 §3.16 из [1] следует , что $\Delta = A$, т.е. $A_1 \subset A_0$.

Пусть теперь $\theta = 1$ или $\eta = 0$. Ограничимся случаем $\theta = 1$. Тогда вложение (6.2) принимает вид

(6.5) $$A_1 \subset (A_0, A_1)_{\eta,r}.$$

Вложение (6.5) следует из вложения $A_1 \subset A_0$. В справедливости обратного утверждения можно убедиться применяя теорему реитерации 3.5.2 из [1]. Получаем

$$(A_0, A_1)_{\alpha,p} \subset (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\alpha,p} = (A_0, A_1)_{\eta\alpha,p}, \quad 0 < \alpha < 1, \ 1 \le p \le \infty.$$

Теперь вложение $A_1 \subset A_0$ следует из выше доказанного. Таким образом утверждение теоремы для "вещественного"метода доказано при $q = r$.

Пусть теперь $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$. Предположим, что имеет место вложение (6.2). Тогда аналогично тому, как это делалось выше, на основании теоремы реитерации ($0 < \alpha < 1$, $1 \le p \le \infty$) имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta\alpha,p} = (A_0, (A_0, A_1)_{\theta,q})_{\alpha,p} \subset (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\alpha,p} = (A_0, A_1)_{\eta\alpha,p}.$$

Теперь из выше доказанного следует, что $A_1 \subset A_0$.

Пусть, наконец $A_1 \subset A_0$. Из теоремы реитерации имеем

(6.6) $$((A_0, A_1)_{\eta,r}, (A_0, A_1)_{\theta,q})_{\alpha,q} = (A_0, A_1)_{\beta,q},$$

где $\beta = (1-\alpha)\eta + \theta\alpha$. Поскольку $\beta < \theta$, то из вложения $A_1 \subset A_0$ (см. теорему 3.4.1 из [1]) следует, что

$$(6.7) \qquad (A_0, A_1)_{\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\beta,q}.$$

Если положить $B_0 = (A_0, A_1)_{\eta,r}$, $B_1 = (A_0, A_1)_{\theta,q}$. то из (6.6), (6.7) имеем $B_1 \subset (B_0, B_1)_{\alpha,q}$. Тогда из доказанного выше (случай $\theta = 1, \eta = \alpha$) следует, что $B_1 \subset B_0$, т.е. вложение (6.2) имеет место.

Утверждение теоремы доказано для метода "вещественной"интерполяции.

Докажем утверждение для "комплексного"метода. Пусть $0 \le \eta < \theta \le 1$. Учитывая утверждение в) теоремы 4.2.1 из [1] достаточно доказать, что из вложения (6.1) следует вложение $A_1 \subset A_0$. Воспользуемся теоремой 1.10.3/2 из [2]. Тогда, используя (6.1), получаем

$$(A_0, A_1)_{(1-\alpha)\theta+\alpha,q} = ([A_0, A_1]_\theta, A_1)_{\alpha,q} \subset ([A_0, A_1]_\eta, A_1)_{\alpha,q} =$$

$$= (A_0, A_1)_{(1-\alpha)\eta+\alpha,q}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Как было доказано выше, из полученного вложения интерполяционных пространств "вещественного" метода следует, что $A_1 \subset A_0$. □

7. О связи равенств Петре и равенств типа Петре

В этом параграфе мы исследуем вопрос справедливости равенств (1.2), (1.3) для тройки $\{A, A_0, A_1\}$, где пространство A является промежуточным относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Оказывается, что в этом случае, для выполнения равенств (1.2), (1.3) достаточно выполнения одного из равенств (1.5), (1.6) (второе равенство тогда выполняется автоматически). Начнем рассмотрения с доказательства формул для суммы и пересечения интерполяционных пространств.

Теорема 7.1. *Пусть $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$. Тогда справедливы равенства:*

а) $(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q}$,

б) $(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}$,

в) $(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}$,

г) $(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta,r}$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta,r} =$$

$$= (\Sigma, A_0)_{1-\theta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{1-\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta,r} =$$

$$= (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{1-\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q}.$$

Первое равенство написано на основании теоремы 2.3 (см. (2.7)) и теоремы 3.1, второе и четвертое равенства на основании утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1], в третьем равенстве использована теорема 6.1.

Аналогично доказываем утверждение в) теоремы. На основании теоремы 2.3 (см. (2.8)), утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1] и теоремы 6.1 имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} + (A_0, \Delta)_{\eta,r}$$

$$+(\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} + (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_1, \Delta)_{1-\eta,r} =$$

$$= (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} = (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}.$$

Докажем утверждение б). На основании теоремы 2.3 и (3.1) имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap [(A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}].$$

Поскольку, согласно теореме 6.1 $(\eta < \theta)\, (A_0, \Delta)_{\theta,q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta,r}$, то на основании теоремы 2.1 убеждаемся, что для тройки $\{(A_0, \Delta)_{\theta,q}, (\Delta, A_1)_{\theta,q}, (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}\}$ имеет место формула (1.5). Тогда

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} +$$

$$+ [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} +$$

$$+(A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} \tag{7.1}$$

$$+(\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}.$$

Первое и второе равенства в (7.1) написаны на основании формулы (1.5) (см. теорему 2.1 и теорему 6.1), в третьем равенстве использована теорема 6.1. Воспользовавшись равенствами (3.1), убеждаемся, что второе и третье слагаемые в (7.1) совпадают с Δ . Теперь утверждение б) следует из (7.1).

Наконец утверждение г) есть следствие цепочки

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] +$$

$$+ [(\Sigma, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] = ([(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}) \cap$$

$$\cap ([(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}) =$$

$$= [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}] \cap [(A_0, \Sigma)_{\theta,q} + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}] \cap$$

$$\cap [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] \cap [(A_0, \Sigma)_{\theta,q} + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] =$$

$$= (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\eta,r}.$$

Первое равенство написано на основании формулы (2.7) и теоремы 3.1 (формула (3.2)). Второе и третье равенства написаны на основании формулы (1.6) с учетом теорем 2.1 и 6.1. Последнее равенство написано на основании теоремы 6.1 и равенств (3.2) (см. теорему 3.1). □

Доказанная теорема позволяет установить связь между (A) и (P) свойствами.

Теорема 7.2. *Пусть A - промежуточное пространство относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется какое-либо из равенств (1.5), (1.6), то для этой тройки выполняются оба равенства (1.2), (1.3) для всех $\theta, q: 0 < \theta < 1,\ 1 \leq q \leq \infty$ (т.е. из свойства* (A) *следует свойство* (P)*).*

Доказательство. Для произвольного пространства A имеем

$$(A,\Delta)_{\theta,q} \supset (A_*,\Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0 + A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q} \supset (A\cap A_0,\Delta)_{\theta,q}+$$

$$+(A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0,\Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A\cap A_1)_{1-\theta,q}. \tag{7.2}$$

Если положить $B_0 = (A\cap A_0)$, $B_1 = (A\cap A_1)$, то

$$B_0\cap B_1 = A\cap A_0\cap A_1 = \Delta, \tag{7.3}$$

$$B_0 + B_1 = A\cap A_0 + A\cap A_1 = A\cap(A_0 + A_1) = A. \tag{7.4}$$

В первом равенстве в (7.3) использовали вложение $A\supset\Delta$. В равенстве (7.4) использовали вложение $A\supset\Delta$ и (A)- свойство. Теперь из (7.2), используя утверждения а)-г) теоремы 7.1, и равенств (7.3), (7.4), получаем

$$(A,\Delta)_{\theta,q} \supset (B_0,\Delta)_{\theta,q} + (\Delta, B_1)_{1-\theta,q} = (B_0, B_0+B_1)_{1-\theta,q}\cap$$

$$\cap(B_0+B_1,B_1)_{\theta,q} = (B_0,A)_{1-\theta,q}\cap(A,B_1)_{\theta,q} = (A,B_0)_{\theta,q}\cap(A,B_1)_{\theta,q} = \tag{7.5}$$

$$= (A, A\cap A_0)_{\theta,q}\cap(A, A\cap A_1)_{\theta,q} = A\cap(A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}.$$

На последнем шаге цепочки использовали равенства (3.1). Из равенства (2.2) имеем

$$A = A + (A_0\cap A_1) = (A\cap A_0)\cap(A\cap A_1) \supset (A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}. \tag{7.6}$$

Теперь соотношения (7.5), (7.6) дают: $(A,\Delta)_{\theta,q}\supset(A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}$. Поскольку обратное вложение очевидно, мы приходим к (1.2). Докажем равенство (1.3). Имеем

$$(A,\Sigma)_{\theta,q} = ((A+A_0)\cap(A+A_1),\Sigma)_{\theta,q} \subset (A+A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(A+A_1,\Sigma)_{\theta,q} =$$

$$= (A+A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(\Sigma, A+A_1)_{1-\theta,q} = (A+A_0,A)_{1-\theta,q} + (A, A+A_1)_{\theta,q} =$$

$$= A + (A_0, A)_{1-\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Первые два шага очевидны. Третье равенство написано на основании утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1]. Четвертое равенство написано на основании теоремы 7.1 и равенства (1.6). Пятое равенство написано на основании равенств (3.2). Последнее равенство есть следствие цепочки (см. (1.5))

$$A = A \cap (A_0 + A_1) = A \cap A_0 + A \cap A_1 \subset (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Таким образом, $(A, \Sigma)_{\theta,q} \subset (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}$. Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (1.3). □

Теоремы 2.1 и 7.2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 7.3. *Если пространство A такое, что имеет место какое-либо из следующих четырех двусторонних вложений*

$$\Delta \subset A \subset A_0, \quad \Delta \subset A \subset A_1, \quad A_0 \subset A \subset \Sigma, \quad A_0 \subset A \subset \Sigma,$$

то пространство A обладает свойством (P) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство. Ясно, что при выполнении любого из четырех вложений, пространство A промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Далее, вложения $A \subset A_j$ или $A_j \subset A$ $(j = 0, 1)$) обеспечивают выполнение равенств (1.5), (1.6) (см. теорему 2.1). Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 7.2. □

В заключении параграфа докажем теорему 4.2, сформулированную в §4.

Доказатаельство теоремы 4.2. На основании (2.7), (3.2) имеем

$$(A, B)_{\theta,q} = (A, A + B)_{\theta,q} \cap (A + B, B)_{\theta,q}. \tag{7.7}$$

Согласно теореме 4.1 достаточно доказать, что пространства $(A, A + B)_{\theta,q}$ и $(A + B, B)_{\theta,q}$ обладают свойством (A) относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Проверим сначала, что пространство $A + B$ обладает свойством (A) относительно пары $\{B + A_0, B + A_1\}$. Из теоремы 2.1 имеем

$$(A+B)\cap(B+A_0)+(A+B)\cap(B+A_1) = B+A_0\cap(A+B)+B+A_1\cap(A+B) = A+B.$$

Последнее равенство написано на основании утверждения б) теоремы 4.1. Таким образом, пространство $A + B$ обладает свойством (A) относительно пары $\{B + A_0, B + A_1\}$ и следовательно (свойство промежуточности) по теореме 7.2 и свойством (P) тоже. Тогда, используя (A)- свойство пространства B, имеем

$$(A + B, B)_{\theta,q} = (A + B, (B + A_0) \cap (B + A_1))_{\theta,q} =$$

$$(7.8) \qquad = (A+B, B+A_0)_{\theta,q} \cap (A+B, B+A_1))_{\theta,q} \supset$$

$$\supset [(A+B,B)_{\theta,q} + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + (A+B,A_1)_{\theta,q}].$$

Согласно (2.7)

$$(A+B,A_j)_{\theta,q} = [A_j + (A+B,A_j)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_j)_{\theta,q}], \quad j=0,1.$$

Тогда из (7.7) и теоремы 2.1 получаем

$$(A+B,B)_{\theta,q} = [(A+B,B)_{\theta,q} + [A_0 + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap$$

$$\cap [A+B+(A+B,A_0)_{\theta,q}]] \cap$$

$$\cap [(A+B,B)_{\theta,q} + [A_1 + (A+B,A_1)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_1)_{\theta,q}]] =$$

$$(7.9) \qquad = [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0 + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap$$

$$\cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1 + (A+B,A_1)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_1)_{\theta,q}] \supset$$

$$\supset [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1] \cap (A+B).$$

Применяя в (7.9) утверждение б) теоремы 4.1, получаем:

$$(A+B,B)_{\theta,q} \supset [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1] \cap$$

$$\cap [A+B+A_0] \cap [A+B+A_1] =$$

$$= [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1].$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то пространство $(A+B,B)_{\theta,q}$ обладает свойством (A) относительно пары $\{A_0, A_1\}$.

Аналогично доказываем, что пространство $(A, A+B)_{\theta,q}$ обладает свойством (A) относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Тогда из (7.7) и теоремы 4.1 а) получаем, что пространство $(A,B)_{\theta,q}$ обладает свойством (A) относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Теорема 4.2 доказана.

8. О других равенствах типа Петре

Положим в (1.4) в качестве функторов F и G функторы пересечения и "вещественной" интерполяции соответственно. Тогда из (1.4) мы приходим к следующему вопросу: когда справедливо равенство

$$(8.1) \qquad A \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} = (A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q}?$$

Отметим, что вопрос справедливости равенства (8.1) интересовал многих авторов. Отметим работы [9 - 13]. Полагая в (1.4) в качестве функторов F и G

функторы суммы и "вещественной" интерполяции соответственно, мы приходим к вопросу справедливости равенства

$$A + (A_0, A_1)_{\theta,q} = (A + A_0, A + A_1)_{\theta,q}. \tag{8.2}$$

В настоящем параграфе мы докажем, что равенства (8.1), (8.2) вообще говоря не выполняются. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть* $0 < \theta, \eta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$, $A = (A_0, A_1)_{\eta,r}$. *Если выполнено какое-либо из равенств (8.1), (8.2), то* $A_0 = A_1$.

Доказательство. Имеем

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = ((A_0, \Delta)_{\eta,r}, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$

$$((A_0, \Delta)_{\eta,r}, (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} \cap ((A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$

$$= ((A_0, \Delta)_{\eta,r}, A)_{\theta,q} \cap (A, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$

$$= ((A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta,r}, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$

$$= (A_0 \cap A, A)_{\theta,q} \cap (A, A \cap A_1)_{\theta,q} = A \cap (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q} = \tag{8.3}$$

$$(A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} \cap ((A_0, A_1)_{\eta,r}, A_1))_{\theta,q} =$$

$$= (A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}.$$

Первое равенство написано на основании (3.1), второе равенство написано на основании (2.7) и (3.2), третье равенство написано на основании (2.8) и (3.1), в четвертом равенстве опять использовали (3.1), в пятом и седьмом равенствах подставлено значение пространства A. Шестое равенство написано на основании (3.1). Последнее равенство написано на основании теоремы 3.5.3 из [1].

Поскольку $\theta\eta < \eta < \eta(1-\theta) + \theta$, то из этой же теоремы следует, что

$$(A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\eta,r} \tag{8.4}$$

Тогда из (8.3), (8.4) имеем

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}. \tag{8.5}$$

Из утверждения а) теоремы 7.1 имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}, \tag{8.6}$$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0} \cap (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}, \tag{8.7}$$

где $p_0 = q$, $p_1 = r$, если $\eta > \theta$ и $p_0 = r$, $p_1 = q$, если $\eta < \theta$. Обозначим

$E = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q}$, $F = (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}$, $G = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0}$, $H = (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}$.

Тогда из теоремы 6.1 (см. (6.2)) получаем

$$E \subset G, \quad F \subset H. \tag{8.8}$$

Использовали, что $\eta(1-\theta)+\theta > \max(\theta,\eta)$ и $\theta\eta < \min(\theta,\eta)$.

Пусть имеет место равенство (8.1). Тогда из (8.1), (8.5), (8.6), (8.7) имеем

$$E \cap F = (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = A \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} =$$

$$= (A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0} \cap (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1} = G \cap H. \tag{8.9}$$

С другой стороны

$$E + F = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} =$$

$$= A_0 + (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} + A_1 + (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = A_0 + A_1,$$

$$G + H = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta\eta),p_0} + (\Sigma, A_1)_{\max(\eta,\theta),p_1} =$$

$$= A_0 + (A_0, A_1)_{\min(\theta,\eta),p_0} + A_1 + (A_0, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1} = A_0 + A_1,$$

т.е.

$$E + F = G + H. \tag{8.10}$$

Таким образом, из (8.8) - (8.10) получаем

$$\begin{cases} E \cap F = G \cap H, \\ E + F = G + H, \\ E \subset G, \ \ F \subset H. \end{cases}$$

Убедимся, что из полученных соотношений следует, что

$$E = G, \quad F = H. \tag{8.11}$$

Из (8.8) имеем $E+F \subset G+F$. Тогда из (8.10) получаем $G+H = E+F \subset G+F$. Теперь $H \subset G+H \subset G+F$. Поскольку $F \subset G+F$, $H \subset G+F$, то

$$F + H \subset G + F. \tag{8.12}$$

Далее, поскольку $F \subset H$, то к тройке $\{F, G, H\}$ применима теорема 2.1. Тогда из равенства (1.6), примененного к этой тройке, получаем (см. (8.9), (8.12))

$$F = F + E \cap F = F + G \cap H = (F + G) \cap (F + H) = F + H,$$

то есть $H \subset F$. Полученное вложение вместе с (8.8) дает $H = F$. Аналогично убеждаемся, что $E = G$. Равенства (8.11) доказаны. Перепишем полученные равенства (8.11) в виде

$$(A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0}, \ \theta\eta < \min(\theta,\eta),$$

$$(\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}, \ \eta(1-\theta)+\theta > \max(\theta,\eta).$$

Полученные равенства (см. [1]) показывают, что $A_0 = \Sigma = A_1$. Аналогично доказываем утверждение в предположении справедливости (8.2). $\square$

Таким образом, если $A_0 \neq A_1$, то равенства (8.1), (8.2) не имеют места и, следовательно, в этом случае не имеет места равенство (1.4). Однако оказывается, что в этом случае справедливо другое соотношение между функторами F и G

$$G(F(A, A_0), F(A, A_1)) = F(G(A_0, A), G(A, A_1)). \tag{8.13}$$

Если G - функтор "вещественной"интерполяции, F - функтор пересечения, то (8.13) принимает вид

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.14}$$

Если же F - функтор суммы, то

$$(A + A_0, A + A_1)_{\theta,q} = (A_0, A)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.15}$$

Докажем равенства в более общей ситуации. Оказывается, что и здесь важную роль играет (**A**) - свойство.

Теорема 8.2. *Пусть A - промежуточное пространство относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется какое-либо из равенств (1.5), (1.6), то для этой тройки выполняются оба равенства (8.14), (8.15) для всех $\theta, q : 0 < \theta < 1, \ 1 \leq q \leq \infty$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} &= (A \cap A_0, A \cap A_0 + A \cap A_1)_{\theta,q} \cap \\ \cap (A \cap A_0 + A \cap A_1, A \cap A_1)_{\theta,q} &= (A \cap A_0, A)_{\theta,q} \cap \\ \cap (A, A \cap A_1)_{\theta,q} &= A \cap (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}\end{aligned} \tag{8.16}$$

Первое равенство написано на основании (2.7), (3.2), второе равенство написано на основании равенства (1.5) и свойства промежуточности пространства A относительно пары $\{A_0, A_1\}$, третье равенство написано на основании (3.1). Далее, из свойства промежуточности пространства A относительно пары $\{A_0, A_1\}$ и равенства (1.6), имеем

$$A = A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1) \supset (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.17}$$

Теперь соотношения (8.16), (8.17) приводят нас к равенству (8.14).

Равенство (8.15) доказывается аналогично:

$$(A+A_0, A+A_1)_{\theta,q} = (A+A_0, (A+A_0)\cap(A+A_1))_{\theta,q} +$$

$$+((A+A_0)\cap(A+A_1), A+A_1)_{\theta,q} = (A+A_0, A)_{\theta,q} + \tag{8.18}$$

$$+(A, A+A_1)_{\theta,q} = A + (A_0, A)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}$$

Поскольку $A = A\cap(A_0+A_1) = (A\cap A_0)+(A\cap A_1) \subset (A_0, A)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}$, то из (8.18) получаем (8.15). Теорема доказана. □

Abstract. The paper considers some interpolation problems of type of Peetre intersection problem on commutation of interpolation functors. The general statement of the problem is to find sufficient conditions for the equality $F(A, G(A_0, A_1)) = G(F(A, A_0), F(A, A_1))$, where F and G are the interpolation functors.

Список литературы

[1] Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, М., Мир (1980).
[2] Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, М., Мир (1980).
[3] J. Peetre, "Über den Durchschnitt von Interpolationsrdumen, Arch. Math., Basel, 25, 511 – 513 (1974).
[4] J. Peetre, "Non-commutative interpolation", Le Matemat, 25, 1 – 15 (1970).
[5] P. Grisvard, "Interpolation non commutative", Atti. Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 52, 11 – 15 (1972).
[6] L. Maligranda, "On commutativity of interpolation with intersection", 13-th Winter School on Abstract Analysis, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl, 10, 113 – 118 (1985).
[7] A. G. Bagdasaryan, "On one approach to the Peetre problem of intersection", Proceedings of A. Razmadze Mat. Inst, Tbilisi, 126, 1 – 10 (2001).
[8] L. Maligranda, "The K-functional for symmetric spaces", Lecture Notes in Math., 1070, 169 – 182 (1984).
[9] M. S. Baouendi, C. Goulaouic, "Commutation de l'intersection et des foncteurs d'interpolation", C.R. Acad. Sci. Paris 265, 313 – 315 (1967).
[10] H. Triebel, "Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24, 1 – 35 (1970).
[11] N. Krugljak, L. Maligranda, L. E. Persson, "The Failure of Hardy's inequality and interpolation of intersections, Arkiv Mat, 37, 323 – 344 (1999).
[12] A. G. Baghdasaryan, "On some interpolation problems of Peetre type", Proceeding of A.Razmadze Mathematical Institute, 135, 27 – 39 (2004).
[13] С. В. Асташкин, П. Сунехаг, "Вещественный метод интерполяции на парах пересечений", Функц. анализ и его прил., 40:3, 66 – 69 (2006).

Поступила 19 октября 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2013, стр. 25-42.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО КОВАРИОГРАММЕ

А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ara1987-87@mail.ru;* *victo@aua.am*[1]

Аннотация. В статье рассмотрена задача восстановления треугольников по распределению длины хорды в направлении. Мы получили следующие результаты: 1. Явные выражения для ковариограммы и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для любого треугольника; 2. Выражение функции распределения длины хорды для треугольника; 3. Максимальная хорда треугольника непрерывна на S^1 (S^1 пространство всех направлений плоскости); 4. Если зависящая от ориентации функция распределения длины хорды задана на всюду плотном подмножестве из S^1, то треугольник восстанавливается, с точностью до параллельных переносов и отражений; 5. Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящих от ориентации функций распределения длины хорды совпадают для всех $u \in A$.

MSC2010 number: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Ограниченная выпуклая область; ковариограмма; распределение длины хорды; распределение длины хорды в направлении.

Введение

Характеризует ли функция распределения длины хорды выпуклое множество на плосткости? Этот вопрос был поставлен В. Бляшке в [1]. Меллоу и Кларк в [2] построили пару неконгруэнтных выпуклых 12-ти угольников с одной и той же функцией распределения длины хорды. Одним из возможных направлений исследования этой проблемы является рассмотрение подклассов выпуклых множеств, для которых функция распределения длины хорды единственным образом восстанавливает выпуклое множество из этих подклассов. (см. [3], [4]).

В [5] Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет D в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных

---

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1A-125

переносов и отражений [5]. В. Нагель в [6] доказал, что плоский выпуклый многоугольник восстанавливается в классе всех плоских выпуклых многоугольников по ковариограмме (с точностью до параллельных переносов и отражений). В [7] доказано, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений.

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Выражения ковариограммы и зависящей от направления функции распределения длины хорды для любого треугольника.
2. Выражение функции распределения длины хорды для произвольного треугольника.
3. Доказано, что длина максимальной хорды треугольника непрерывна по $u \in S^1$ (S^1 единичная окружность с центром в начале координат).
4. Если функция распределения длины хорды в направлении u для треугольника задана на всюду плотном подмножестве из S^1, то можно восстановить треугольник, с точностью до параллельных переносов и отражений.
5. . Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды совпадают для каждого $u \in A$.

1. Ковариограмма для треугольника

Пусть R^n - n-мерное евклидово пространство, $D \subset R^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $V_n(\cdot)$ - n - мерная мера Лебега в R^n.

Определение 1.1. *([8]). Функция $C(D,\cdot) : R^n \to [0,\infty)$ равная*

(1.1) $$C(D,h) = V_n(D \cap (D-h)), \quad h \in R^n,$$

называется ковариограммой множества D.

Ковариограмма $C(D,h)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Ж. Матерон (см. [5], [8]) доказал, что для $t > 0$ и $u \in S^{n-1}$

(1.2) $$\frac{\partial C(D,tu)}{\partial t} = -V_{n-1}(\{y \in u^{\perp} : V_1(D \cap (l_u + y) \geq t\}),$$

где $l_u + y$ есть прямая, параллельная направлению u и проходящая через точку y, причем через $u^{\perp}$ обозначается ортогональное дополнение к u. Правая часть (1.2) есть фукция x-лучей множества D в направлении параллельном u (см [9]) и является распределение длины хорды множества D в направлении u.

Обозначим через $b(D, u)$ ширину области D в направлении u. Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая D имеет точку пересечения с прямой, параллельной направлению $u^{\perp}$ и проходящей через начало координат. Точка пересечения равномерно распределена в интервале $[0, b(D, u)]$. Обозначим $F(D, u, t)$ зависящую от ориентации функцию распределения длины хорды множества D в направлении $u \in S^1$.

Свойство 1.1. *Зависящая от ориентации функция распределения длины хорды множества D в направлении $u \in S^1$ определяется по формуле*

$$F(D, u, t) = 1 - \frac{b((D \cap (D - tu), u))}{b(D, u)}, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Связь между ковариограммой и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды впервые обнаружил Ж. Матерон в [5].

Лемма 1.1. *Пусть $u \in S^1$ и $t > 0$ такое, что $D \cap (D - tu)$ содержит внутренние точки. Тогда $C(D, tu)$ дифференцируема по t и*

$$-\frac{\partial C(D, tu)}{\partial t} = (1 - F(D, u, t)) \cdot b(D, u). \tag{1.4}$$

В точке $t = 0$ существует правосторонняя производная левой части, и равество (1.4) остается в силе.

Очевидно, что

$$b(D, u) = -\left.\frac{\partial C(D, tu)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{1.5}$$

Обозначим через G пространство всех прямых g в евклидовой плоскости R^2, и пусть (φ, p) - полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного на прямую g из начала координат O.

Обозначим через $\mu(\cdot)$ локально-конечную меру в пространстве G, инвариантную относительно группы всех евклидовых движений (параллельных переносов и вращений). Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет вид ([1])

$$\mu(dg) = dg = dp\, d\varphi,$$

где dp - одномерная мера лебега, а $d\varphi$- равномерная мера на S^1.

Для ограниченной выпуклой области D, обозначим множество прямых, пересекающих D через

$$[D] = \{g \in G,\ g \cap D \neq \emptyset\}$$

Имеем (см [1]) $\mu([D]) = |\partial D|$, где ∂D - граница области D, а $|\partial D|$ обозначает длину ∂D.

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[D]$. Функция

$$F_D(t) = \frac{\mu(\{g \in [D],\ |g \cap D| \leq t\})}{|\partial D|}, \qquad t \in R^1$$

называется функцией распределения длины хорды области D.

2. Ковариограмма треугольника и функция распределения длины хорды треугольника в направлении u

Пусть ABC - треугольник. Обозначим $|AB| = a$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, площадь ΔABC через S, а длину периметра через ∂D. Пусть AB лежит на луче с нулевым направлением, а направление против часовой стрелки берется в качестве положительного. Пусть $t_{\max}(u)$ хорда максимальной длины в направлении $u \in S^1$. Имеем

$$C(\Delta ABC, tu) = \begin{cases} S\left(1 - \frac{t}{t_{\max}(u)}\right)^2, & t \in [0, t_{\max}(u)] \\ 0, & t \geq t_{\max}(u) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F(\Delta ABC, u, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{t_{\max}(u)}, & t \in [0, t_{\max}(u)], \\ 1, & t \geq t_{\max}(u), \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$t_{\max}(u) = \begin{cases} \frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}, & u \in [0, \alpha], \\ \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}, & u \in [\alpha, \pi - \beta], \\ \frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u \in [\pi - \beta, \pi], \\ -\frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}, & u \in [\pi, \pi + \alpha], \\ -\frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}, & u \in [\pi + \alpha, 2\pi - \beta], \\ -\frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u \in [2\pi - \beta, 2\pi]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Из (2.3) легко заметить, что $t_{\max}(u)$ непрерывна на S^1, следовательно, если мы имеем величины $t_{\max}(u)$ ΔABC на всюду плотном множестве в S^1, то можно единственным образом восстановить $t_{max}(u)$ для любого $u \in S^1$. Кроме того, из (2.1) и (2.2) вытекает:

Следствие 2.1. *Если функция распределения длины хорды в направлении u или ковариограмма треугольника заданы на всюду плотном подмножестве из S^1, то можно восстановить треугольник, с точностью до параллельных переносов и отражений.*

Пример 2.1. Пусть $n \in N$ и $u_1, u_2, ..., u_n \in S^1$. Не нарушая общности, мы можем предположить, что $0 = u_0 \le u_1 < u_2 < ... < u_n < \pi$. Пусть O - начало полярной системы координат, а луч с нулевым направлением лежит на полярной оси. Выберем $t_1, t_2 > 0$ так, чтобы прямая l, проходящая через точки $(t_1, u_1) = A_1$ и $(t_2, u_2) = A_2$, составлял с нулевым направлением угол больше u_n (обозначим этот угол через x, пусть $\pi/2 < x < \pi$). Обозначим через l_i прямую, проходящую через O и параллельную u_i ($i = 0$ или $i \ge 3$). Также для i обозначим через $A_i \equiv (t_i, u_i)$ точку пересечения l и l_i. Поскольку $u_n < x < \pi$, то можно выбрать направления u_{n+1} и u_{n+2} такие что $x > u_{n+2} > u_{n+1} > u_n$ и $u_{n+2} > u_{n+1} > \pi/2$. Рассмотрим ΔA_0OA_{n+1} и ΔA_0OA_{n+2}. Поскольку их тупые углы различны, они неконгруентны (см. Рис. 1). Также отметим, что из конструкции треугольников следует, что значения $t_{max}(u)$ для треугольников A_0OA_{n+1} и A_0OA_{n+2} для $i = 1, 2, ..., n$ совпадают. Следовательно,

$$F(\Delta A_0OA_{n+1}, u_i, t) = F(\Delta A_0OA_{n+2}, u_i, t), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Следствие 2.2. *Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящих от ориентации функций распределения длины хорды совпадают для каждого $u \in A$.*

В [10] сформулирована следующая проблема: существует ли множество конечных направлений $A = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, такое, что соответствующий набор значений $F(u_1, t), F(u_2, t), ..., F(u_m, t)$ зависящих от ориентации функций распределения длины хорды однозначно определяют ограниченную выпуклую область. Найти минимальное m, которое удовлетворяет этому условию. Пример 2.1 дает отрицательный ответ на эту проблему.

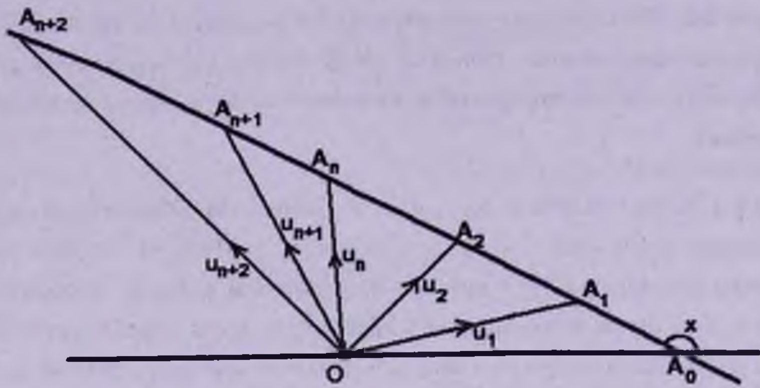

Рис. 1

3. Доказательства (2.1)-(2.3)

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [0, \alpha]$. Если интерпретировать точки треугольника ABC векторами $-tu$, то в результате получим $\Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$. Пусть $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ содержит внутренние точки. Поскольку $BC \| B_{tu}C_{tu}$, то треугольник $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ подобен ΔABC. A является одной из вершин этого треугольника, а остальные вершины на сторонах AB и AC обозначим соответственно D и E. Рассмотрим прямые, проходящие через точки D и E и параллельные направлению u. Пересечение этих прямых со стороной BC обозначим, соответственно, D_{tu} и E_{tu}. Легко заметить, что $DD_{tu} = EE_{tu} = t$. Значение ковариограммы в точке tu равно площади ΔADE:

$$C(\Delta ABC, tu) = S_{\Delta ADE} = k^2 S, \tag{3.1}$$

где $k = \frac{AD}{AB}$. (см. Рис. 2).

Легко заметить, что $AD = AB - DB = a - DB$. Можно найти DB из ΔDBD_{tu}. $\angle BDD_{tu} = u$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BD_{tu}D = \pi - (\beta + u)$. В ΔDBD_{tu} по теореме синусов получаем

$$DB = \frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta} DD_{tu} = \frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta} t. \tag{3.2}$$

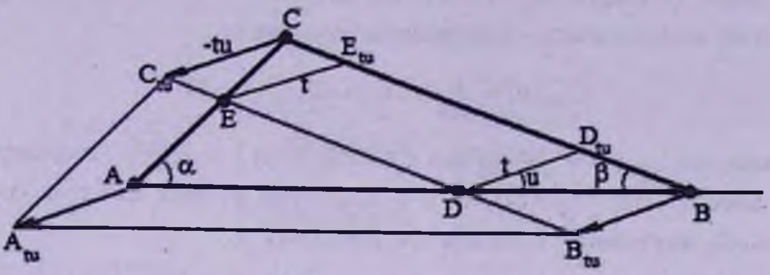

Рис. 2

Подставляя (3.2) в (3.1) для каждого $u \in [0, \alpha]$, получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.3}$$

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [\alpha, \pi-\beta]$. Легко заметить, что $C(D, tu) = C(D, t(\pi+u))$. Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi+u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta]$. Направление $\pi+u$ образует угол с лучом CA, который обозначим через u'. Поскольку $\pi+u = \pi+\alpha+u'$, то $u' \in [0, \pi-\alpha-\beta]$. Этот случай был фактически рассмотрен, здесь AB, $\angle CAB$ и $\angle ABC$ заменяем на CA, $\angle BCA$ и $\angle CAB$ соответственно. Поскольку $u' = \alpha - u$ для $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\,\sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.4}$$

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [\pi-\beta, \pi]$. Обозначим через u'' угол, образованный лучом BA и направлением u. Пусть $u = \pi - u''$. Следовательно $u'' \in [0, \beta]$. Этот случай уже был рассмотрен. Здесь AB, $\angle CAB$ и $\angle ABC$ заменены на AB, $\angle ABC$ и $\angle CAB$ соответственно. Следовательно, для $u \in [\pi-\beta, \pi]$ (так как $u'' = \pi - u$) получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.5}$$

Для направлений $u \in [\pi, 2\pi]$ рассмотрим следующие три случая

$$u \in [\pi, \pi+\alpha], \quad u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta] \quad \text{и} \quad u \in [2\pi-\beta, 2\pi].$$

Поскольку $C(\Delta ABC, t(\pi+u)) = C(\Delta ABC, tu)$, для каждого из этих трех случаев мы можем найти ковариограмму, заменяя в формулах (3.3) — (3.5) u на $u-\pi$.

Если $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ не имеет внутренних точек, то $C(\Delta ABC, tu) = 0$. Поскольку ковариограмма - непрерывная функция, то

$$t_{max}(u) = \min_{t\geq 0}\{t : C(\Delta ABC, tu) = 0\}.$$

Докажем, что $t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$ для $u \in [0, \alpha]$. Если $t = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, используя (2.5) легко доказать, что $C(\Delta ABC, tu) = 0$ независимо от того, имеет ли $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ внутренние точки или нет. Поскольку

$$t_{\max}(u) = \min_{t\geq 0}\{t : C(\Delta ABC, tu) = 0\},$$

то $t_{\max}(u) \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$. С другой стороны, $t_{\max}(u) \geq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, так как в противном случае

$$\lim_{t\to t_{\max}(u)-} C(\Delta ABC, tu) \neq C(\Delta ABC, t_{\max}(u)u) = 0,$$

Что противоречит непрерывности ковариограммы.

Поскольку $t_{\max}(u) \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$ и $t_{\max}(u) \geq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, то $t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$. Аналогичным образом получаем (2.3).

Таким образом, получаем

(3.6)

$$C(tu) = \begin{cases} \frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))^2\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\,\sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + t\sin(u+\beta))^2\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + t\sin u\,\sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + t\sin(u-\alpha))^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

(3.6) представляет явное выражение ковариограммы для треугольника. Здесь и ниже $C(\Delta ABC, tu) = C(t\,u)$.

Дифференцируя (3.6) получаем

(3.7)

$$\frac{\partial C(tu)}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))\sin(u+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ -\frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\sin(\alpha+\beta))\sin u}{\sin\alpha\sin\beta}, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ -\frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))\sin(u-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + t\sin(u+\beta))\sin(u+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + t\sin u\sin(\alpha+\beta))\sin u}{\sin\alpha\sin\beta}, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + t\sin(u-\alpha))\sin(u-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

Согласно (1.5) и (3.7), получаем

$$b(\Delta ABC,u)=\begin{cases}\frac{a\sin\alpha\sin(u+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha]\\ a\sin u, & u\in[\alpha,\pi-\beta]\\ \frac{a\sin\beta\sin(u-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi]\\ -\frac{a\sin\alpha\sin(u+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha]\\ -a\sin u, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta]\\ -\frac{a\sin\beta\sin(u-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi].\end{cases} \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получаем

(3.9)
$$F(\Delta ABC,u,t)=\begin{cases}\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}]\\ \frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sin u, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}]\\ \frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u-\alpha)}{\sin\alpha}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]\\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}]\\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sin u, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}]\\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u-\alpha)}{\sin\alpha}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}].\end{cases}$$

Подставляя (2.3) в (3.6) и (3.9) получаем (2.1) и (2.2).

4. Распределение длины хорды для треугольника

Пусть AB - максимальная сторона ΔABC, а $\angle CAB$ - минимальный угол ΔABC. Согласно обозначениям, $BC=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $CA=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\angle BCA=\pi-(\alpha+\beta)$. Поскольку AB максимальная сторона, то $\angle BCA$ максимальный угол. Отсюда $\alpha\le\beta\le\pi-(\alpha+\beta)$.

Далее $\angle ABC+\angle BCA=\pi-\alpha$ и $\angle ABC\le\angle BCA$. Следовательно

$$\beta\le\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}. \tag{4.1}$$

Также можно доказать, что для любого треугольника выполняется следующее неравенство

$$\sin\alpha\le\sin\beta\le\sin(\alpha+\beta). \tag{4.2}$$

Так как sin - возрастающая функция на интервале $[0,\pi/2]$, то получаем неравенство (4.2) для тупоугольного треугольника $(\alpha+\beta\le\pi/2)$.

Для остроугольного треугольника $(\alpha+\beta\ge\pi/2)$ используем неравенство $\alpha\le\beta\le\pi-(\alpha+\beta)$

$$\beta\le\pi/2-\alpha/2\leftrightarrow 2\beta\le\pi-\alpha\leftrightarrow\alpha+\beta\le\pi-\beta. \tag{4.3}$$

Так как sin - убывающая функция на интервале $[\pi/2, \pi]$, получаем неравенство (4.2).

Чтобы получить явное выражение функции распределения длины хорды для треугольника ABC, вычислим

$$\mu(t) := \mu(\{g \in [\Delta ABC], \ |g \cap \Delta ABC| < t\}), \quad t \in \mathbf{R} \tag{4.4}$$

интегрируя $b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)$ на интервале $[0, \pi]$. Из (3.8) и (3.9) вытекает

$$F(\Delta ABC, u, t) \cdot b(\Delta ABC, u) =$$

$$= \begin{cases} \frac{t \sin\alpha \sin^2(u+\beta)}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [0, \alpha], \ t \in [0, \frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{t \sin(\alpha+\beta) \sin^2 u}{\sin\alpha \sin\beta}, & u \in [\alpha, \pi-\beta], \ t \in [0, \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) \sin u}] \\ \frac{t \sin\beta \sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi-\beta, \pi], \ t \in [0, \frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{t \sin\alpha \sin^2(u+\beta)}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi, \pi+\alpha], \ t \in [0, -\frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{t \sin(\alpha+\beta) \sin^2 u}{\sin\alpha \sin\beta}, & u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta], \ t \in [0, -\frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) \sin u}] \\ \frac{t \sin\beta \sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [2\pi-\beta, 2\pi], \ t \in [0, -\frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \end{cases} \tag{4.5}$$

Значения $F(\Delta ABC, u, t) \cdot b(\Delta ABC, u)$ равны $b(\Delta ABC, u)$, при $t \geq t_{\max}(u)$ и равны 0, когда $t \leq 0$.

Вычислим $\min t_{\max}(u)$ и $\max t_{\max}(u)$ для направлений $u \in [0, \alpha]$, $u \in [\alpha, \pi-\beta]$ и $u \in [\pi-\beta, \pi]$.

Вначале рассмотрим тупоугольный треугольник. Поскольку $\alpha + \beta \leq \pi/2$, то $0 < \beta < \alpha + \beta \leq \pi/2$, и так как sin - возрастающая функция на интервале $[0, \pi/2]$, то

$$\min_{u \in [0,\alpha]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u \in [0,\alpha]} t_{\max}(u) = a. \tag{4.6}$$

Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi/2 \in [\alpha, \pi-\beta]$ (так как $\alpha, \beta < \pi/2$), с другой стороны, из (4.2) получаем $\sin\alpha \leq \sin\beta$. Следовательно,

$$\min_{u \in [\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u \in [\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.7}$$

Если $u \in [\pi-\beta, \pi]$, то $u - \alpha \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$. Поскольку $\alpha + \beta \leq \pi/2$, то sin убывает на интервале $[\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$, следовательно

$$\min_{u \in [\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u \in [\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a \tag{4.8}$$

Рассмотрим остроугольный треугольник. Если $u \in [0,\alpha]$, то $u+\beta \in [\beta, \alpha+\beta]$. Так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$, $\beta < \pi/2$, то $\pi/2 \in [\beta, \alpha+\beta]$, следовательно

$$\min_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = a\sin\beta \quad \text{и} \quad \max_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = a. \tag{4.9}$$

Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi/2 \in [\alpha, \pi-\beta]$, с другой стороны, из (4.2) получаем $\sin\alpha \leq \sin\beta$. Откуда следует, что

$$\min_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.10}$$

Если $u \in [\pi-\beta, \pi]$, то $u-\alpha \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$, и так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$ и $\alpha < \pi/2$, следовательно $\pi/2 \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$. С другой стороны из (4.2) получаем $sin\alpha \leq sin(\alpha+\beta)$. Поэтому имеем

$$\min_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a\sin\alpha \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a. \tag{4.11}$$

Заметим, что для любого треугольника выполняется следующее неравенство

$$\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \leq a. \tag{4.12}$$

(4.12) следует из (4.2) и $|\sin x| \leq 1$.

4.1. Случай тупоугольного треугольника. Получаем явное выражение (4.4) из (4.5) — (4.8) и (4.12) для $0 < t \leq \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \int_0^\alpha \frac{t\sin\alpha\sin^2(u+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}du + \\ &+ \int_\alpha^{\pi-\beta} \frac{t\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta}du + \int_{\pi-\beta}^\pi \frac{t\sin\beta\sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}du = \frac{3t}{2} + \frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \\ &+ \frac{t}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\left(\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2(\alpha+\beta)) + \beta(\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta))\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Легко проверить, что

$$\alpha \leq \beta \leq \arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} < \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin u\sin(\alpha+\beta)} \leq t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством направлений

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi - \arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}\right]. \tag{4.14}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5) — (4.8), (4.12) и (4.14) для $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\, du = \int_0^\alpha \frac{t\sin\alpha\sin^2(u+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} du +$$

$$+ \int_{\pi-\beta}^{\pi} \frac{t\sin\beta\sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} du + \int_{\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}}^{\pi-\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}} a\sin u\, du +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}} \frac{t\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta} du + \int_{\pi-\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}}^{\pi-\beta} \frac{t\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta} du =$$

$$= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + a\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{3t}{2} + \tag{4.15}$$

$$+\frac{\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta))+\beta(\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta))}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}t.$$

Легко заметить, что $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\alpha,\beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \leq t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством

$$[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta]. \tag{4.16}$$

Легко проверить, что $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}, \alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Следовательно, множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \leq t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.17}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5) – (4.8), (4.12), (4.16) и (4.17) для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\, du =$$

$$= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + \frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} +$$

$$+\frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + \tag{4.18}$$

$$+\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + t + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha t}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right)$$

Более того, так как $\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} \in [\beta, \alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)} \le t\} \cap [0,\alpha]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \alpha\right]. \tag{4.19}$$

Далее, $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\alpha, \arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta})$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$. Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.20}$$

Мы имеем $F(\Delta ABC, u, t)\cdot b(\Delta ABC, u) = b(\Delta ABC, u)$ из (4.7) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$ и для направлений $u \in [\alpha, \pi-\beta]$.

Мы получаем элементарное выражение (4.4) из (4.5) – (4.8), (4.12), (4.19) и (4.20) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \frac{t\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} +$$

$$+\frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{t^2}} +$$

$$+\frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + \frac{t}{2} + \frac{a(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{t(\beta\sin^2\alpha+\alpha\sin^2\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.21}$$

Таким образом, мы получаем явное выражение функции распределения длины хорды для тупоугольного треугольника из (4.13), (4.15), (4.18) и (4.21).

Легко заметить, что $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\alpha \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $a\sin\beta \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Для вычисления функции распределения длины хорды для остроугольного треугольника, рассмотрим следующие два случая

1. $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\beta$ (минимальная сторона остроугольного треугольника не превышает максимальную высоту)
2. $a\sin\beta \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ (максимальная высота остроугольного треугольника не превышает минимальную сторону).

4.2. Случай остроугольного треугольника типа 1. Легко заметить, что явное выражение (4.4) для $0 < t \le \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ совпадает с (4.13), что вытекает из (4.5), (4.9) – (4.12).

Легко заметить, что явное выражение (4.4) для $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a\sin\alpha$ есть (4.15), которое вытекает из (4.5), (4.9) – (4.12) и (4.14).

Так как $\sin\alpha < t \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\beta, \arcsin\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)})$. Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin u\sin(\alpha+\beta)} \le t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с

$$[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi - \arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}] \tag{4.22}$$

Так как $\alpha+\beta \ge \pi/2$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\pi-\alpha-\beta, \pi/2)$. $\alpha+\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \ge \pi-\beta$ для $a\sin\alpha < t \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \ge \pi-\alpha-\beta \ge \alpha$ то $\pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \le \pi$. Следовательно, множество

$$\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством направлений

$$\left[\alpha + \arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}, \pi + \alpha - \arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.23}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.22) и (4.23) для $a\sin\alpha < t \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u)F(\Delta ABC, u, t)\,du = \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} +$$

$$+\frac{t\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + a\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} +$$

$$+\frac{3t}{2} + \frac{\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2(\alpha+\beta)) + \beta(\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta))}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}t - \frac{\pi t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} \tag{4.24}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a\sin\beta$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin u\sin(\alpha+\beta)} \le t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta\right]. \tag{4.25}$$

Так как $\alpha+\beta \ge \pi/2$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in \left[\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \pi-\alpha-\beta\right)$. Следовательно, множество направлений

$$\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.26}$$

Легко заметить, что явное выражение (4.4) для случая $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a\sin\beta$ есть (4.20), которое следует из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.25) и (4.26).

Далее, имеем $\arcsin \frac{a\sin\beta}{t} \in [\pi-\alpha-\beta, \pi/2)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, множество направлений

$$\{u : \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)} \le t\} \cap [0,\alpha]$$

совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \pi - \beta - \arcsin\frac{a\sin\beta}{t}\right]. \tag{4.27}$$

$\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in \left[\alpha, \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\beta$. Следовательно, множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u} \le t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta\right] \tag{4.28}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in \left[\arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}, \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, следовательно, множество направлений

$$\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством

$$[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}]. \tag{4.29}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.27) – (4.29) для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \\ &= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + \frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + \\ &+ \frac{t\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{t^2}} + \\ &+ \frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + t + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \\ &+ \frac{\alpha t}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right) - \frac{\pi t\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} \in [\beta, \pi-\alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta} \le t\} \cap [0,\alpha]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \alpha\right] \tag{4.31}$$

Далее имеем $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\in[\alpha,\arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta})$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}<t\le a$. Следовательно, множество направлений $\{u:\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}\le t\}\cap[\pi-\beta,\pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta,\pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right] \tag{4.32}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.31) и (4.32) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}<t\le a$, что совпадает с (4.21).
Мы получаем явное выражение функции распределения длины хорды для треугольника типа 1 из (4.13), (4.15), (4.18), (4.21), (4.24) и (4.30).

4.3. Случай остроугольного треугольника типа 2. Аналогичными вычислениями получаем явное выражение функции распределения длины хорды для случая треугольника типа 2.
Правильный треугольник - треугольник типа 2. Подставляя $\alpha=\beta=\pi/3$ в выражении функции распределения длины хорды для треугольника типа 2, получаем результат Зуланке для явного выражения функции распределения длины хорды для правильного треугольника [11].

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{a}, & 0\le t\le\frac{a\sqrt{3}}{2}\\ \frac{2t}{a\sqrt{3}}\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2t}-\frac{2\pi t}{3a\sqrt{3}}+\frac{t}{2a}+\frac{\sqrt{4t^2-3a^2}}{2t}, & \frac{a\sqrt{3}}{2}<t\le a\\ 1, & t\ge a.\end{cases}$$

Обозначим $a_1=a$, $a_2=\frac{a_1\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $a_3=\frac{a_1\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $h_1=\frac{a_1\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $h_2=a_1\sin\alpha$, $h_3=a_1\sin\beta$ (h_i, $i=1,2,3$ высоты треугольника).

Для тупоугольного треугольника $F(t)=$

$$\begin{cases}0, & t\le 0\\ \frac{3t}{2\theta D}+\frac{\pi a_1 t}{2h_1\theta D}+\frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D}+\frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D}-\frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & 0<t\le h_1\\ \frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t}+\frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}}+\frac{3t}{2\theta D}+\frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D}+\frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D}-\frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & h_1<t\le a_3\\ \frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t}+\frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t}+\frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}}+\frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}}+ & \\ +\frac{t}{\theta D}+\frac{a_3}{\theta D}+\frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D}-\frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D}-\frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D}, & a_3<t\le a_2\\ \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t}+\frac{a_3 t}{2h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t}+\frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}}+\frac{a_3}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}}+ & \\ +\frac{t}{2\theta D}+\frac{a_2+a_3}{\theta D}-\frac{\beta a_3 t}{2h_3\theta D}-\frac{\alpha a_2 t}{2h_2\theta D}, & a_2<t\le a_1\\ 1, & t\ge a_1\end{cases}$$

Для остроугольного треугольника типа 1 $F(t) =$

$$\begin{cases}
0, & t \le 0 \\
\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\pi a_1 t}{2h_1\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & 0 < t \le h_1 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & h_1 < t \le h_2 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D}, & h_2 < t \le a_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + \frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D}, & a_3 < t \le h_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & h_3 < t \le a_2 \\
\frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{2h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_3}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{t}{2\theta D} + \frac{a_2+a_3}{\theta D} - \frac{\beta a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\alpha a_2 t}{2h_2\theta D}, & a_2 < t \le a_1 \\
1, & t \ge a_1
\end{cases}$$

Аналогично, для остроугольного треугольника типа 2 имеем $F(t) =$

$$\begin{cases}
0, & t \le 0 \\
\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\pi a_1 t}{2h_1\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & 0 < t \le h_1 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & h_1 < t \le h_2 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + & \\
+\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D}, & h_2 < t \le h_3 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - & \\
-\frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & h_3 < t \le a_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_3\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & a_3 < t \le a_2 \\
\frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{2h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_3}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{t}{2\theta D} + \frac{a_2+a_3}{\theta D} - \frac{\beta a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\alpha a_2 t}{2h_2\theta D}, & a_2 < t \le a_1 \\
1, & t \ge a_1
\end{cases}$$

Abstract. The paper considers the problem of recognition of triangles by orientation-dependent chord length distribution. We obtain following results: 1. The explicit form of the covariogram and orientation-dependent chord length distribution function for

a triangle; 2. the explicit form for the chord length distribution function. 3. The length of the maximal chord of a triangle is continuous function on direction $u \in S^1$ (S^1 is the space of all directions in the plane); 4. If we have orientation-dependent chord length distribution function for an everywhere dense set of S^1, then we can uniquely recognize the triangle with respect to reflections and translations; 5. For any finite subset $A \subset S^1$, there are two non-congruent triangles with the same values of orientation-dependent chord length distribution functions on A.

Список литературы

[1] Luis A. Santalo, Integral geometry and geometric probability (Addision-Wesley, Reading, MA, 2004).

[2] C. L. Mallows, and J. M. Clark, "Linear intercept distributions do not characterize plane sets" J. Appl. Prob. 7, p. 240-244, (1970)

[3] J. Gates, "Recognition of triangles and quadrilaterals by chord length distribution" J. Appl. Prob. 19, p. 873-879, (1982).

[4] P. Waksman, "Plane polygons and a conjecture of Blaschke's" Adv. Appl. Prob. 17, p. 774-793, (1985).

[5] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry (Wiley, New York 1975).

[6] W. Nagel, "Orientation-dependent chord lenght distributions characterize convex polygons" Appl. Prob., 30, no. 3, pp. 730 – 736 (1993).

[7] G. Bianchi, and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society 11, 1187-1202, (2009).

[8] G. Matheron, Les variables regionalisees et leur estimation. (Masson, Paris 1965).

[9] R. J. Gardner, Geometric Tomography, (Cambridge University Press, New York, 1995).

[10] V. K. Ohanyan, and N. G. Aharonyan, "Tomography of bounded convex domains", SUTRA: International Journal of Mathematical Science, vol. 2, no. 1, pp. 1-12 (2009).

[11] R. Sulanke, "Die verteilung der Sehnenlengen an ebenen und rämlichen Figuren", Math. Nachr., vol. 23, p. 51-74 (1961).

Поступила 1 апреля 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 3, 2013, стр. 43-72.

ON MOCKENHOUPT'S CONJECTURE IN THE HARDY-LITTLEWOOD MAJORANT PROBLEM

SÁNDOR KRENEDITS

Kozma Lajos Technical College, 40 Deák str. Budapest, Hungary H-1041

E-mail: *krenedits@t-online.hu*

Abstract. The Hardy-Littlewood majorant problem has a positive answer only for even integer exponents p, while there are counterexamples for all $p \notin 2\mathbb{N}$. Montgomery conjectured that even among the idempotent polynomials there must exist counterexamples, i.e. there exist a finite set of characters and some $\pm$ signs with which the signed character sum has larger p^{th} norm than the idempotent obtained with all the signs chosen $+$ in the character sum. That conjecture was proved recently by Mockenhaupt and Schlag. However, Mockenhaupt conjectured that even the classical $1 + e^{2\pi ix} \pm e^{2\pi i(k+2)x}$ three-term character sums, used for $p = 3$ and $k = 1$ already by Hardy and Littlewood, should work in this respect. That remained unproved, as the construction of Mockenhaupt and Schlag works with four-term idempotents. In our previous work we proved this conjecture for $k = 0, 1, 2$, i.e. in the range $0 < p < 6$, $p \notin 2\mathbb{N}$. Continuing this work here we demonstrate that even the $k = 3, 4$ cases hold true. Several refinement in the technical features of our approach include improved fourth order quadrature formulae, finite estimation of G'^2/G (with G being the absolute value square function of an idempotent), valid even at a zero of G, and detailed error estimates of approximations of various derivatives in subintervals, chosen to have accelerated convergence due to smaller radius of the Taylor approximation.

MSC2010 numbers: 42A05.

Keywords: idempotent exponential polynomials; Hardy-Littlewood majorant problem; Montgomery conjecture; Mockenhaupt conjecture; concave functions; Taylor polynomials; quadrature formulae.

1. Introduction

We denote, as usual, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ the one dimensional torus or circle group. Following Hardy and Litlewood [7], f is said to be a majorant to g if $|\widehat{g}| \leq \widehat{f}$. Obviously, then f is necessarily a positive definite function. The (upper) majorization property (with constant 1) is the statement that whenever $f \in L^p(\mathbb{T})$ is a majorant of $g \in L^p(\mathbb{T})$,

Supported in part by the Hungarian National Foundation for Scientific Research, Project #'s K-81658 and K-100461.

then $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. Hardy and Littlewood proved it for all $p \in 2\mathbb{N}$ – this being an easy consequence of the Parseval identity. On the other hand already Hardy and Littlewood observed that this fails for $p = 3$. Indeed, they took $f = 1 + e_1 + e_3$ and $g = 1 - e_1 + e_3$ (where here and the sequel we denote $e_k(x) := e(kx)$ and $e(t) := e^{2\pi i t}$, as usual) and calculated that $\|f\|_3 < \|g\|_3$.

The failure of the majorization property for $p \notin 2\mathbb{N}$ was shown by Boas [3]. Boas' construction exploits complex Taylor series expansion around zero: for $2k < p < 2k+2$ the counterexample is provided by the polynomials $f, g := 1 + re_1 \pm r^{k+2} e_{k+2}$, with r sufficiently small to make the effect of the first terms dominant over later, larger powers of r.

Utilizing Riesz products – an idea suggested to him by Y. Katznelson – Bachelis proved [2] the failure of the majorization property for any $p \notin 2\mathbb{N}$ even with arbitrarily large constants. That is, not even $\|g\|_p < C_p \|f\|_p$ holds with some fixed constant $C = C_p$.

Montgomery conjectured that the majorant property for $p \notin 2\mathbb{N}$ fails also if we restrict to *idempotent* majorants, see [11, p. 144]. (A suitable integrable function is idempotent if its convolution square is itself: that is, if its Fourier coefficients are either 0 or 1.) This has been recently proved by Mockenhaupt and Schlag in [10].

Theorem 1.1 (Mockenhaupt & Schlag). *Let $p > 2$ and $p \notin 2\mathbb{N}$, and let $k > p/2$ be arbitrary. Then for the trigonometric polynomials*

$$g = (1 + e_k)(1 - e_{k+1}) \quad \text{and} \quad f = (1 + e_k)(1 + e_{k+1})$$

we have $\|g\|_p > \|f\|_p$.

Oddly enough, the quite nice, constructive example is given with a four-term idempotent polynomial, although trinomials may seem simpler objects to study. Indeed, there is a considerable knowledge, even if usually for the maximum norm, on the space of trinomials, see e.g. [6, 12, 13]. Note that three-term examples are the simplest we can ask for, as two-term polynomials can never exhibit failure of the majorization property. In the construction of Mockenhaupt and Schlag, however, the key role is played by the fact that the given 4-term idempotent is the product of two two-term idempotents, the p^{th} power integral of which then can be expressed by the usual trigonometric and hyperbolic functions. So even if four terms is a bit more complicated, but the product form gives way to a manageable calculation.

Nevertheless, one may feel that Boas' idea, i.e. the idea of cancelation in the $(k+1)^{\text{st}}$ Fourier coefficients works even if r is not that small – perhaps even if $r = 1$. The difficulty here is that the binomial series expansion diverges, and we have no explicit way to control the interplay of the various terms occurring with the $\pm$ signed versions of our polynomials. But at least there is one instance, the case of $p = 3$, when all this is explicitly known: already Hardy and Littlewood [7] observed that failure of the majorant property for $p = 3$ is exhibited already by the pair of idempotents $1 + e_1 \pm e_3$. In fact, this idempotent example led Montgomery to express (in a vague form, however, see [11], p. 144) his conjecture on existence of *idempotent* counterexamples.

There has been a number of attempts on the Montgomery problem. In particular, led by the examples of Hardy-Littlewood and Boas, Mockenhaupt [9] expressed his view that $1 + e_1 \pm e_{k+2}$, where $2k < p < 2k + 2$, should provide a counterexample in the Hardy-Littlewood majorant problem, (at least for $k = 1, 2$). So we are to discuss the following reasonably documented conjecture.

Conjecture 1.1. *Let $2k < p < 2k + 2$, where $k \in \mathbb{N}$ arbitrary. Then the three-term idempotent polynomial $P_k = 1+e_1+e_{k+2}$ has smaller p-norm than $Q_k = 1+e_1-e_{k+2}$.*

We have proved this for $k = 0, 1, 2$ in [8].

One motivation for us was the recent paper of Bonami and Révész [4], who used suitable idempotent polynomials as the base of their construction, via Riesz kernels, of highly concentrated ones in $L^p(\mathbb{T})$ for any $p > 0$. These key idempotents of Bonami and Révész had special properties, related closely to the Hardy-Littlewood majorant problem. For details we refer to [4]. For the history and relevance of this closely related problem of idempotent polynomial concentration in L^p see [4, 5], the detailed introduction of [8], the survey paper [1], and the references therein.

As already hinted by Mockenhaupt's thesis [9], proving that $1 + e_1 \pm e_{k+2}$ would be a counterexamle in the Hardy-Littlewood majorant problem may require some numerical analysis as well. However, we designed a way to accomplish this differently than suggested by Mockenhaupt, for we don't know how to get it done along the lines hinted by him. Instead, in [8] we used function calculus and support our analysis by numerical integration and error estimates where necessary.

These methods are getting computationally more and more involved when k is getting larger. Striving for a worst-case error bound in the usual Riemann numerical integration formula forces us to consider larger and larger step numbers (smaller and smaller step sizes) in the division of the interval $[0, 1/2]$, where a numerical integration is to be executed. Therefore, for k getting larger, we can as well expect the step numbers increase to a numerically extraneous amount, where calculations loose liability in view of the possibly accumulating small errors of the computation of the operations and regular function values – powers, logarithms and trigonometrical or exponential functions – involved. Any reader would readily accept a proof, which with a certain precise error estimate refers to a numerical integration formula on say a few hundred nodes, but perhaps no reader would be fully convinced reading that a numerical tabulation and integration on several tens of thousands of function values led to the numerical result. Correspondingly, in this paper we settle with the goal of keeping any numerical integration, i.e quadrature, under the step number (or number of nodes, division number) $N = 500$, that is step size $h = 0.001$.

Calculation of trigonometrical and exponential functions, as well as powers and logarithms, when within the numerical stability range of these functions (that is, when the variables of taking negative powers or logarithms is well separated from zero) are done by mathematical function subroutines of usual Microsoft excel spreadsheet, which computes the mathematical functions with 15 significant digits of precision. Although we do not detail the estimates of the computational error of applying spreadsheets and functions from Microsoft Excel tables, it is clear that under this step number size our calculations are reliable well within the error bounds. For a more detailed error analysis of that sort, which similarly applies here, too, see our previous work [8], in particular footnote 3 on page 141 and the discussion around formula (22).

In view of the above considerations, instead of pushing forward exactly the same numerical analysis as done in [8] for $k = 1, 2$ also for higher values of k, (which could have been done at least for some k, though), here we renew the approach and invoke a number of new features of the numerical analysis. These "tricks"will enable us to keep N below 500, and thus keep the invoked numerical calculations of quadratures reliable.

First, instead of the classical and simplest numerical integration by using "brute force"Riemann sums, we apply a more involved quadrature formula (2.11), derived from Taylor approximation, which in turn allows us to keep the step number under good control. Here instead of the most famous Simpson rule, which uses only function values, we prefer a somewhat more involved quadrature, calculating the approximate value of the integral by means of using also the values of the second derivative of the integrand. The gain is considerable even if not in order, but in the constant of the error formula.

Second, as already suggested in the conclusion of [8], we apply Taylor series expansion at more points than just at the midpoint $t_0 := k + 1/2$ of the t-interval $(k, k+1)$. This reduces the size of powers of $(t - t_0)$, from powers of $1/2$ to powers of smaller radii. The Taylor polynomial of degree 7, considered in [8], had error size 2^{-8} due to the contribution of $|\xi - t_0|^8$ in the Lagrange remainder term, while here for $k = 4$ the division of the t-interval to $(4, 4.5)$ and $(4.5, 5)$ results in $O(4^{-n})$ in the respective error contribution.

2. Notations and a few general formulas for the numerical analysis

Let $k \in \mathbb{N}$ be fixed. (Actually we will work with $k = 3$ or $k = 4$ only.) To set the framework, here we briefly sketch the general scheme of our argument, and exhibit a number of general formulae for later use in the analysis.

In the sequel we write $F_{\pm}(x) = 1 + e(x) \pm e((k+2)x)$ and consider the p^{th} power integrals $f_{\pm}(p) := \int_0^1 |F_{\pm}(x)|^p dx$ as well as their difference

$$\Delta(p) = f_-(p) - f_+(p) = \int_0^1 |F_-(x)|^p \, dx - \int_0^1 |F_+(x)|^p dx.$$

Our goal is to prove Conjecture 1.1, that is $\Delta(p) > 0$ for all $p \in (2k, 2k+2)$.

Let us introduce a few further notations. We will write $t = p/2 \in [k, k+1]$ and put

$$G_{\pm}(x) = |F_{\pm}(x)|^2, \qquad g_{\pm}(t) = \frac{1}{2} f_{\pm}(2t) = \int_0^{1/2} G_{\pm}^t(x)dx, \tag{2.1}$$

$$d(t) := \frac{1}{2}\Delta(2t) = g_-(t) - g_+(t) = \int_0^{1/2} \left[G_-^t(x) - G_+^t(x)\right] dx. \tag{2.2}$$

So we are to prove that $d(t) > 0$ for $k < t < k+1$. First we derive that at the endpoints d vanishes; and, for later use, we also compute some higher order integrals of $G_{\pm}$.

Lemma 2.1. *Let $\rho \in \mathbb{N}$ with $1 \le \rho \le k+1$. Then we have*

$$G_{\pm}^{\rho} = |F_{\pm}^{\rho}|^2 = \left| \sum_{\nu=0}^{\rho\cdot(k+2)} a_{\pm}(\nu) e_{\nu} \right|^2 \tag{2.3}$$

with

$$a_{\pm}(\nu) = (\pm 1)^{\mu} \binom{\rho}{\mu} \binom{\rho-\mu}{\lambda}, \tag{2.4}$$

where $\mu = \left[\dfrac{\nu}{k+2}\right]$ and $\lambda = \nu - \mu(k+2)$ is the reduced residue of $\nu \mod k+2$. Therefore,

$$\int_0^{1/2} |G_{\pm}|^{\rho}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\rho\cdot(k+2)} |a_{\pm}(\nu)|^2 . \tag{2.5}$$

In particular, $\int_0^{1/2} |G_+|^{\rho}\, dx = \int_0^{1/2} |G_-|^{\rho}\, dx$ for all $0 \le \rho \le k+1$ and thus $d(k) = d(k+1) = 0$.

Remark 2.1. *By similar calculations one can compute $a_{\pm}(\nu)$ even for higher values of ρ as well. E.g. in the range $k+2 \le \rho \le 2k+3$ we have*

$$a_{\pm}(\nu) = (\pm 1)^{\mu} \left\{ \binom{\rho}{\mu}\binom{\rho-\mu}{\lambda} \pm \binom{\rho}{\mu-1}\binom{\rho-\mu+1}{\lambda+(k+2)} \right\}.$$

That we will not use, however.

Proof. In the trinomial development of $(1 + e_1 \pm e_{k+2})^{\rho}$ the general term coming from choosing σ times $\pm e_{k+2}$ and τ times e_1 (and then necessarily $\rho - \sigma - \tau$ times the constant term 1) has the form $(\pm 1)^{\sigma}\binom{\rho}{\sigma}\binom{\rho-\sigma}{\tau}$. This to contribute to $a_{\pm}(\nu)$ we must have $\nu = \sigma(k+2) + \tau$, a condition which forces $\nu \equiv \tau \mod k+2$. Now if $\rho \le k+1$, we also have $0 \le \tau \le k+1$, so the number τ of choosing e_1s is exactly λ, the mod $k+2$ reduced residue of ν, and consequently $\sigma = (\nu - \lambda)/(k+2) = \mu$. That results in formula (2.4) for $a_\pm(\nu)$, while (2.5) follows by Parseval's formula. Whence the assertion is proved.

To start the analysis of $G(x) := G_\pm(x)$, let us compute its x-derivatives. We find

$$\begin{aligned} & G_\pm(x) = 3 + 2\{\cos(2\pi x) \pm \cos((2k+2)\pi x) \pm \cos((2k+4)\pi x)\}, \\ (2.6) \qquad & G_\pm^{'}(x) = -4\pi \sin(2\pi x) \mp (4k+4)\pi \sin((2k+2)\pi x) \\ & \mp (4k+8)\pi \sin((2k+4)\pi x)), \\ & G_\pm^{''}(x) = -8\pi^2 \cos(2\pi x) \mp 8(k+1)^2\pi^2 \cos((2k+2)\pi x) \\ & \mp 8(k+2)^2\pi^2 \cos((2k+4)\pi x)\}, \end{aligned}$$

and in general

$$\begin{aligned} G_\pm^{(2m+1)}(x) &= (-4)^{m+1}\pi^{2m+1} \\ & \cdot \left\{\sin(2\pi x) \pm (k+1)^{2m+1} \sin((2k+2)\pi x) \pm (k+2)^{2m+1} \sin((2k+4)\pi x)\right\}, \\ G_\pm^{(2m)}(x) &= 2(-4)^m \pi^{2m} \\ & \cdot \left\{\cos(2\pi x) \pm (k+1)^{2m} \cos((2k+2)\pi x) \pm (k+2)^{2m} \cos((2k+4)\pi x)\right\}. \end{aligned}$$

Consequently we have

$$\begin{aligned} (2.7) \qquad & \|G_\pm\|_\infty \le 9 = M_0, \\ & \|G_\pm^{(m)}\|_\infty \le 2^{m+1}\pi^m\{1 + (k+1)^m + (k+2)^m\} = M_m(k) = M_m \end{aligned}$$

for $m = 1, 2, \ldots$. We encounter a new phenomenon, compared to [8], when $k = 3$, since here $G_+(x)$ does not have a positive lower bound: we in fact have $G_+(1/3) = 0$. (Let us note in passing that for G_- we have $\min_{\mathbb{T}} G_- \approx 0.282... > 1/4$ – but we do not use this in the following.)

For higher x-derivatives of the composite functions $G_+^t \log^j G_+$, needed in our analysis, vanishing of G_+ causes concerns for occurring negative powers of G_+ after differentiation, while the appearance of $\log^j G_+$ invoke concerns of blowing up calculations and estimates in view of "$\log 0 = \infty$". The first problem we resolve by a comparison of G_+ to $G_+'^2$, always present in the numerator, while the second difficulty will be taken care of by using only continuous functions $v^a \log^b v$, with $a > 0, b \ge 0$, of $v = G_+(x)$. Although all this can be avoided, when G_- is strictly bounded away from zero, for a possibly better estimation we still calculate the same comparative estimates even for G_-. (Similarly, the idea of comparison of $G'^2_\pm$ and $G_\pm$ could be used for higher k as well, whether or not the functions $G_\pm$ vanish.)

So we want to compare G' and $\sqrt{G} = |F|$, more precisely G'^2 and G. Note that $G' = 2|F| \cdot |F|' = 2\sqrt{G} \cdot \left(\sqrt{G}\right)'$. Another heuristical reasoning to justify the search for a bound of G'^2/G, is that $G \geq 0$, hence whenever $G = 0$ we necessarily have $G' = 0$, and the multiplicity m of any zero of G being an integer (as G is an entire function), we conclude $m \geq 2$: so G'^2 has a zero of order $2(m-1) \geq m$.

So we start the search for a bound on $G'^2_\pm/G_\pm$. To this end we write $u = \cos v$ with $v = 2\pi x$ and calculate

$$\begin{aligned} G'^2_\pm(x) &= (4\pi)^2 (\sin v \pm (k+1)\sin(k+1)v \pm (k+2)\sin(k+2)v)^2 \\ &= 16\pi^2(1-u^2)\left[1 \pm (k+1)U_k(u) \pm (k+2)U_{k+1}(u)\right]^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

where $U_m(u) := \dfrac{\sin((m+1)v)}{\sin v}$ $(v := \arccos u)$ is the m-th Chebyshev polynomial of the second kind.

We are to compare this and

$$G_\pm(x) = 3 + 2\cos v \pm 2\cos(k+1)v \pm 2\cos(k+2)v = 3 + 2u \pm 2T_{k+1}(u) \pm 2T_{k+2}(u),$$

where here $T_m(u) = \cos(mv)$ $(v := \arccos u)$ is the mth Chebyshev polynomial of the first kind.

In all, G'^2/G is always an entire function of x, and substituting $u = \cos v = \cos 2\pi x$ we have the formula

$$\frac{G'^2(x)}{G(x)} = \frac{16\pi^2(1-u^2)\left[1 \pm (k+1)U_k(u) \pm (k+2)U_{k+1}(u)\right]^2}{3 + 2u \pm 2T_{k+1}(u) \pm 2T_{k+2}(u)}. \tag{2.9}$$

In the paper [8] we used Riemann sums and the standard Riemann sums approximation formula $\left|\int_0^{1/2} \Phi(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^N \Phi\left(\frac{n-1/2}{2N}\right)\right| \leq \frac{\|\Phi''\|_\infty}{192N^2}$, when numerically integrating functions of the form $\Phi := H := G^t \log^j G$ along the x values.

A new feature of the present approach is that for better approximation we now improve the numerical integration method by means of invoking a quadrature formula. This was not feasible for small t, as higher derivatives of the composite function H lead to G in the denominator: the m^{th} derivative in general results in the occurrence of G^{t-m}, and negative powers of G bear the risk of blowing up all of our estimates.

This can be remedied a little by comparison of G'^2 to G, a lucky possibility explained above. This was already utilized in [8] to control 2^{nd} derivatives of H, and we'll make use of it here, too for $k=3$, when for some integrals (some occurring H functions) t can be as small as $t=3$, while we need to control 4^{th} derivatives of H in view of error terms of the quadrature formula we use. With this additional consideration the 4^{th} derivatives of H can always be controlled for $k \geq 3$. (For $k=0,1,2$, settled in [8], this could not have been possible.)

For remaining self-contained, we deduce here the otherwise well-known quadrature formula what we want to apply. This starts with the 3^{rd} order Taylor polynomial approximation (with the so-called Lagrange error term), valid for 4 times continuously differentiable functions φ:

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+\frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{\varphi'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{\varphi^{IV}(\xi_{x,x_0})}{24}(x-x_0)^4.$$

Integrating over a symmetric interval $[x_0-q,x_0+q]$ leads to

$$\left|\int_{x_0-q}^{x_0+q}\varphi(x)dx-\left\{\varphi(x_0)2q+\varphi''(x_0)\frac{q^3}{3}\right\}\right|=\left|\int_{x_0-q}^{x_0+q}\frac{\varphi^{IV}(\xi_{x,x_0})}{24}(x-x_0)^4dx\right|$$
$$\leq \max_{[x_0-q,x_0+q]}|\varphi^{IV}(x)|\int_{x_0-q}^{x_0+q}\frac{(x-x_0)^4}{24}dx\leq \max_{[x_0-q,x_0+q]}|\varphi^{IV}(x)|\,\frac{q^5}{60}.$$

Applying the same formula for N intervals of the form $[x_n-h/2,x_n+h/2]$, where $h=(b-a)/N$ and $x_n=(n-1/2)h+a$ with $n=1,\dots,N$, we obtain

(2.10)
$$\left|\int_a^b\varphi-\sum_{n=1}^N\left\{\varphi(x_n)h+\varphi''(x_n)\frac{h^3}{24}\right\}\right|\leq\frac{h^5}{60\ 2^5}\sum_{n=1}^N\max_{|x-x_n|\leq\frac{h}{2}}|\varphi^{IV}(x)|\leq\frac{Nh^5}{60\ 2^5}\|\varphi^{IV}\|_\infty.$$

This leads to the following quadrature formula.[1]

Lemma 2.2. *Let φ be a four times continuously differentiable function on $[0,1/2]$. Then we have*

(2.11)
$$\left|\int_0^{1/2}\varphi(x)dx-\sum_{n=1}^N\left\{\varphi\left(\frac{2n-1}{4N}\right)\frac{1}{2N}+\varphi''\left(\frac{2n-1}{4N}\right)\frac{1}{192N^3}\right\}\right|\leq\frac{\|\varphi^{IV}\|_\infty}{60\ 2^{10}N^4}.$$

[1] Note the noticeably better error estimate, not in order but in constant, than one would obtain by more customary Simpson type rules. This is due to the use of second derivatives, which in our case will still be calculable, explicit formulae.

Let us start analyzing the functions

$$H(x) = H_{t,j,\pm}(x) = G^t_\pm(x)\log^j G_\pm(x), \quad x \in [0,1/2], \quad t \in [k,k+1],\ j \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

To find the maximum norm of $H_{t,j,\pm}$, we in fact look for the maximum of an expression of the form $v^t|\log v|^j$, where $v = G(x)$ ranges from zero (or, if $G \neq 0$, from some positive lower bound) up to $\|G\|_\infty \leq 9$. For that, a direct calculus provides the following.

Lemma 2.3. *For any $s > 0$ and $m \in \mathbb{N}$ the function*

$$\alpha(v) = \alpha_{s,m}(v) = v^s|\log v|^m$$

behaves on $[0,\infty)$ the following way. It is nonnegative, continuous, continuously differentiable, (apart from possibly 0 in case $s \leq 1$), has precisely two zeroes at 0 and 1, and it has one single critical point $v_0 = \exp(-m/s)$. Consequently, it has exactly one local maximum point at v_0 where its local maximum is $\left(\frac{m}{es}\right)^m$, furthermore, the function increases in $[0,v_0]$ and also on $[1,\infty)$, and decreases on $[v_0,1]$. Therefore for any finite interval $[a,b] \subset [0,\infty)$ we have

$$\max_{[a,b]} \alpha(v) = \begin{cases} \alpha(b), & \text{if } \ a < b \leq v_0, \\ \alpha(v_0), & \text{if } \ a \leq v_0 < b \leq 1, \\ \max\{\alpha(v_0),\alpha(b)\}, & \text{if } \ a \leq v_0,\ 1 < b, \\ \alpha(a), & \text{if } \ v_0 < a < b \leq 1, \\ \max\{\alpha(a),\alpha(b)\}, & \text{if } \ v_0 < a < 1 < b, \\ \alpha(b), & \text{if } \ 1 \leq a < b. \end{cases} \tag{2.13}$$

In particular for $[a,b] = [0,9]$ we always have

$$\alpha^*_{s,m} = \max_{[0,9]} \alpha(v) = \max\left\{\left(\frac{m}{es}\right)^m, 9^s\log^m 9\right\} = \begin{cases} \left(\frac{m}{es}\right)^m & \text{if } \ m/s > \frac{1}{\sigma_0}, \\ 9^s\log^m 9 & \text{if } \ m/s \leq \frac{1}{\sigma_0}, \end{cases} \tag{2.14}$$

where $\sigma_0 \approx 0.126...$ is the unique root of the equation $\sigma 9^\sigma = 1/(e\log 9)$.

For the application of the above quadrature (2.11) we calculate (c.f. also [8])

$$H''(x) = H''_{t,j,\pm}(x) = G''(x)G^{t-1}(x)\log^{j-1}G(x)\left\{t\log G(x) + j\right\} \tag{2.15}$$

$$+G'^2(x)G^{t-2}(x)\log^{j-2}G(x)\left\{t(t-1)\log^2 G(x) + j(2t-1)\log G(x) + j(j-1)\right\}.$$

However, the error estimation in the above explained quadrature approach forces us to consider even fourth x-derivatives of $H = H_{t,j,\pm}$. In order to calculate

$$H^{IV} = \sum_{m=0}^{4} \binom{4}{m} (G^t)^{(m)} (\log^j G)^{(4-m)}, \tag{2.16}$$

we start with computing

$$\begin{aligned}
(G^t)' &= tG^{t-1}G' \\
(G^t)'' &= t(t-1)G^{t-2}G'^2 + tG^{t-1}G'' \\
(G^t)''' &= t(t-1)(t-2)G^{t-3}G'^3 + 3t(t-1)G^{t-2}G'G'' + tG^{t-1}G''' \\
(G^t)^{IV} &= t(t-1)(t-2)(t-3)G^{t-4}G'^4 + 6t(t-1)(t-2)G^{t-3}G'^2G'' \\
&+ 3t(t-1)G^{t-2}G''^2 + 4t(t-1)G^{t-2}G'G''' + tG^{t-1}G^{IV}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

and denoting $L = \log G$ also

$$(L^j)' = \frac{jL^{j-1}G'}{G}$$

$$(L^j)'' = \frac{G'^2}{G^2} j[(j-1)L^{j-2} - L^{j-1}] + \frac{G''}{G} jL^{j-1}$$

$$(L^j)''' = \frac{G'^3}{G^3} j\left[(j-1)(j-2)L^{j-3} - 3(j-1)L^{j-2} + 2L^{j-1}\right] \tag{2.18}$$

$$+\frac{G'G''}{G^2} 3j[(j-1)L^{j-2} - L^{j-1}] + \frac{G'''}{G} jL^{j-1},$$

$$(L^j)^{IV} = \frac{G'^4}{G^4} j\left[[(j-1)(j-2)(j-3)L^{j-4} - 6(j-1)(j-2)L^{j-3} + \right.$$

$$\left. +11(j-1)L^{j-2} - 6L^{j-1}\right] + \frac{G'^2G''}{G^3} 6j\left[(j-1)(j-2)L^{j-3} - \right.$$

$$\left. -3(j-1)L^{j-2} + 2L^{j-1}\right] + \frac{G'G'''}{G^2} 4j\left[(j-1)L^{j-2} - L^{j-1}\right] +$$

$$+\frac{G^{IV}}{G} jL^{j-1} + \frac{G''^2}{G^2} 3j\left[(j-1)L^{j-2} - L^{j-1}\right].$$

Inserting (2.17) and (2.18) into (2.16) we arrive at the desired general formula for $H^{IV}_{t,j,\pm}$ as follows

$$\begin{aligned} H^{IV} &= G^{t-4}G'^4\Big\{j(j-1)(j-2)(j-3)L^{j-4} + [4t-6]j(j-1)(j-2)L^{j-3} \\ &+ [6t^2-18t+11]j(j-1)L^{j-2} + [2t^3-9t^2+11t-3]2jL^{j-1} + t(t-1)(t-2)(t-3)L^j\Big\} \\ &+ 6\cdot G^{t-3}G'^2G''\Big\{j(j-1)(j-2)L^{j-3} + 3(t-1)j(j-1)L^{j-2} + [3t^2-6t+2)]jL^{j-1} \\ &+ t(t-1)(t-2)L^j\Big\} + 4\cdot G^{t-2}G'G'''\Big\{j(j-1)L^{j-2} + (2t-1)jL^{j-1} + t(t-1)L^j\Big\} \\ &+ G^{t-1}G^{IV}\left\{jL^{j-1} + tL^j\right\} + 3\cdot G^{t-2}G''^2\Big\{j(j-1)L^{j-2} + (2t-1)jL^{j-1} + t(t-1)L^j\Big\}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

At all occurrences we will need an estimate for $\|H^{IV}\|_\infty$ in order to apply it in the numerical quadrature formula. Therefore, we now start estimating the above expression. For a shorter notation we write $v := G(x) \in [0,9]$ and $\ell := |L| = |\log v|$. As a first step we thus find for $j = 1,2,3,...,t \geq 3$ the estimates

$$\begin{aligned} |H^{IV}(x)| &\leq v^{t-4}M_1^4\Big\{j(j-1)(j-2)(j-3)\ell^{j-4} + [4t-6]j(j-1)(j-2)\ell^{j-3} \\ &+ [6t^2-18t+11]j(j-1)\ell^{j-2} + [2t^3-9t^2+11t-3]2j\ell^{j-1} + t(t-1)(t-2)(t-3)\ell^j\Big\} \\ &+ 6\cdot v^{t-3}M_1^2M_2\Big\{j(j-1)(j-2)\ell^{j-3} + 3(t-1)j(j-1)\ell^{j-2} + [3t^2-6t+2]j\ell^{j-1} \\ &+ t(t-1)(t-2)\ell^j\Big\} + v^{t-1}M_4\left\{j\ell^{j-1} + t\ell^j\right\} \\ &+ v^{t-2}(3M_2^2 + 4M_1M_3)\Big\{j(j-1)\ell^{j-2} + (2t-1)j\ell^{j-1} + t(t-1)\ell^j\Big\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Furthermore, to be used typically for smaller values of $v = G(x)$, that is to say only for $0 \leq v \leq 3$, we can derive a different estimation whenever some constant $M^* := M^*(k)$ is known satisfying $\|G'^2/G\|_\infty \leq M^*$. Namely, we then have

$$\begin{aligned} |H^{IV}(x)| &\leq v^{t-2}M^{*2}\Big\{j(j-1)(j-2)(j-3)\ell^{j-4} + [4t-6]j(j-1)(j-2)\ell^{j-3} \\ &+ [6t^2-18t+11]j(j-1)\ell^{j-2} + [2t^3-9t^2+11t-3]2j\ell^{j-1} + t(t-1)(t-2)(t-3)\ell^j\Big\} \\ &+ 6\cdot v^{t-2}M^*M_2\Big\{j(j-1)(j-2)\ell^{j-3} + 3(t-1)j(j-1)\ell^{j-2} + [3t^2-6t+2)]j\ell^{j-1} \\ &+ t(t-1)(t-2)\ell^j\Big\} + 4\cdot v^{t-1.5}\sqrt{M^*}M_3\Big\{j(j-1)\ell^{j-2} + (2t-1)j\ell^{j-1} + t(t-1)\ell^j\Big\} \\ &+ v^{t-1}M_4\left\{j\ell^{j-1} + t\ell^j\right\} + 3\cdot v^{t-2}M_2^2\Big\{j(j-1)\ell^{j-2} + (2t-1)j\ell^{j-1} + t(t-1)\ell^j\Big\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Furthermore, estimating by means of $\Lambda := \max(\ell, 1)$ and using $\ell^{j-1}, \ell^{j-2}, \ell^{j-3}, \ell^{j-4} \leq \Lambda^j$ and also $2\sqrt{v} \leq 1 + v$ we are led to

$$|H^{IV}(x)| \leq v^{t-2}\Lambda^j \Bigg(M^{*2}\Big\{ j(j-1)(j-2)(j-3) + [4t-6]j(j-1)(j-2) + [6t^2-18t+11]j(j-1) + [2t^3-9t^2+11t-3]2j + t(t-1)(t-2)(t-3)\Big\} + 6\cdot M^*M_2\Big\{j(j-1)(j-2) + 3(t-1)j(j-1) + [3t^2-6t+2)]j + t(t-1)(t-2)\Big\} + 2\sqrt{M^*}M_3\Big\{j(j-1) + (2t-1)j + t(t-1)\Big\} + 3M_2^2\Big\{j(j-1)+(2t-1)j+t(t-1)\Big\}\Bigg)$$

$$+ v^{t-1}\Lambda^j \Bigg(2\cdot\sqrt{M^*}M_3\Big\{j(j-1)+(2t-1)j+t(t-1)\Big\} + M_4\{j+t\}\Bigg). \tag{2.22}$$

3. The proof of the $k = 3$ case of Conjecture 1.1

When $k = 3$, let us start with a few concrete numerical estimates of the functions $G_{\pm}^{(m)}$ and $H_{\pm}^{(m)}$. For $k = 3$ we need $U_3(u) = 4u(2u^2-1)$, $U_4(u) = 16u^4 - 12u^2 + 1$ and $T_4(u) = 8u^4 - 8u^2 + 1$, $T_5(u) = 16u^5 - 20u^3 + 5u$. Writing these in (2.9) yields for G_+

$$\frac{G_+'^2}{G_+}(x) = \frac{16\pi^2(1-u^2)\left[80u^4 + 32u^3 - 60u^2 - 16u + 6\right]^2}{32u^5 + 16u^4 - 40u^3 - 16u^2 + 12u + 5} = \frac{16\pi^2(1-u^2)[40u^3 - 4u^2 - 28u + 6]^2}{8u^3 - 4u^2 - 8u + 5}, \tag{3.1}$$

canceling the common factors of $(2u+1)^2$. Note that the denominator is now non-vanishing in the interval $[-1, 1]$, as its minimum is ≈ 0.12, attained at $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0.76759...$. Thus the above rational function can be maximized numerically on the range $u \in [-1, 1]$ of $u = \cos(2\pi x)$, the maximum being ≈ 3699, so

$$G_+'^2(x) < 3700 G_+(x). \tag{3.2}$$

Although G_- does not vanish, for a possibly better estimation for small values of $G_-(x)$, we still work out a bound on $G_-'^2/G_-$. Again with $u = \cos v$ and $v = 2\pi x$ we get from (2.9)

$$\max_{[-1,1]} \frac{G_-'^2}{G_-}(x) = \max_{[-1,1]} \frac{16\pi^2(1-u^2)\left[80u^4 + 32u^3 - 60u^2 - 16u + 4\right]^2}{-32u^5 - 16u^4 + 40u^3 + 16u^2 - 8u + 1} \approx 3865 < 3900. \tag{3.3}$$

Note that now the denominator does not vanish and there is no singularity to make the numerical maximization difficult. Summing up, we find

$$\left\| \frac{G_{\pm}'^2}{G_{\pm}} \right\|_\infty < M^*(3) := 3900. \tag{3.4}$$

The next step is, as in [8], to see that $d^{(j)}(3) > 0$ for the first few values of $j = 1, 2$.

Lemma 3.1. *We have $d'(3) > 0$.*

Remark 3.1. *A preliminary numerical calculation yields the approximate value $d'(3) \approx$ 0.01401... We don't need the concrete value, but this information suggests us the proper choice of the targeted error bound of $\delta = 0.007$ below.*

Proof. From (2.2) we clearly have

$$\begin{aligned} d^{(j)}(t) = g_-^{(j)}(t) - g_+^{(j)}(t) &= \int_0^{1/2} G_-^t(x) \log^j G_-(x)dx - \int_0^{1/2} G_+^t(x) \log^j G_+(x)dx \\ &= \int_0^{1/2} H_{t,j,-}(x)dx - \int_0^{1/2} H_{t,j,+}(x)dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Now we calculate the value – that is, these two integrals – numerically for $t = k = 3$ and $j = 1$. Both integrals should be computed within the error bound $\delta := 0.007$. Invoking Lemma 2.2 we are left with the estimation of $\|H_{3,1,\pm}^{IV}\|_\infty$. The general formula of (2.19) now specializes to

$$\begin{aligned} H^{IV} = 6\frac{G'^4}{G} &+ G'^2G''(66 + 36L) + GG'G'''(20 + 24L) \\ &+GG''^2(15 + 18L) + G^2G^{IV}(1 + 3L). \end{aligned} \tag{3.6}$$

We now estimate $|H^{IV}(x)|$ distinguishing two cases, the first being when $v := G(x) \geq$ 3. Inserting the estimates of $\|G^{(m)}\|_\infty$ from (2.7) for $m = 0, 1, 2, 3, 4$, we get from (3.6)

$$\begin{aligned} &|H^{IV}(x)| \leq 6\frac{(40\pi)^4}{v} + (40\pi)^2(8 \cdot \pi^2 \cdot 42)(66 + 36 \log v) \\ &+ v(40\pi)(16\pi^3 \cdot 186)(20 + 24 \log v) \\ &+ v(8\pi^2 42)^2(15 + 18 \log v) + v^2(32\pi^4 882)(1 + 3 \log v) \\ &= \pi^4\{15,360,000/v + 35,481,600 + 19,353,600 \log v + 4,074,240v \\ &+ 4,889,088v \log v + 28,224v^2 + 84,672v^2 \log v\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

which is clearly an increasing function of $v = G(x)$ for $v \geq 2$, e.g. Therefore substituting the maximal possible value $v = 9$ we obtain in this case

$$|H^{IV}(x)| \leq 22,444,818,695 < 2.3 \cdot 10^{10}. \tag{3.8}$$

For smaller values of $v = G(x)$ we estimate (3.6) the same way as it is done in general in (2.21), with M_m in (2.7) and M^* in (3.4) (or, we substitute $t = k = 3$ and $j = 1$ in (2.21) and use the numerical values of M_m and M^* as said). This yields

$$|H^{IV}(x)| \leq 1.2{\cdot}10^9 v + (6.7 v \log v + 1.2 v^{3/2} + 1.4 v^{3/2} \log v){\cdot}10^8 + (2.8 v^2 + 8.3 v^2 \log v){\cdot}10^6.$$

(Also, we could have substituted $t = k = 3$ and $j = 1$ in (2.22) and apply (2.7) and (3.4) in that.) The function on the right hand side takes its maximum on $[0,3]$ at $v = 3$, thus

$$|H^{IV}(x)| \leq 7.014 \cdot 10^9 < 8 \cdot 10^9$$

is obtained in this second case. In all, we find $\|H^{IV}(x)\| < 2.3 \cdot 10^{10}$, hence in the numerical quadrature formula (2.11) the error is estimated by

$$\frac{2.3 \cdot 10^{10}}{60 \cdot 2^{10} N^4}.$$

To bring this down below $\delta = 0.007$, we need to chose the step number N as large as to have

$$\frac{2.3 \cdot 10^{10}}{60 \cdot 2^{10} N^4} < \delta \qquad \text{i.e.} \qquad N \geq N_0 := \sqrt[4]{\frac{2.3 \cdot 10^{10}}{60 \cdot 2^{10} \cdot 0.007}} \approx 86....$$

Calculating the quadrature formula with $N = 100$, we obtain the approximate value 0.014012641..., whence $d'(3) > 0.014012641... - 2 \cdot 0.007 > 0$.

Lemma 3.2. *We have $d''(3) > 0$.*

Remark 3.2. *Preliminary numerical calculation yields $d''(3) \approx 0.087602...$.*

Proof. From (3.5) now we calculate the value – that is, these two integrals – numerically for $t = k = 3$ and $j = 2$. Both integrals should be computed within the error bound $\delta := 0.04$. As before, invoking Lemma 2.2 we are left with the estimation of $\|H^{IV}_{3,2,\pm}\|_\infty$. The general formula of (2.19) now specializes to

$$\begin{aligned} H^{IV} &= G'^2 G''(36L^2 + 132L + 72) + GG''^2(18L^2 + 30L + 6) \\ &\quad + GG'G'''(24L^2 + 40L + 8) + G^2 G^{IV}(3L^2 + 2L) + \frac{G'^4}{G}(12L + 22). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Similarly as before, in the estimation of $|H^{IV}(x)|$ we distinguish two cases. Namely, we separate cases according to $v := G(x) \geq e$ or $0 \leq v < e$. For the case when $e \leq v \leq 9$, i.e. $1 \leq L \leq \log 9$, application of (2.7) after substituting $t = k = 3$ and $j = 2$ in (2.20) (in other words, using (2.7) in estimating (3.9)) yields

$$
\begin{aligned}
|H^{IV}(x)| &\leq (40\pi)^2 336\pi^2(36L^2+132L+72) + G(336\pi^2)^2(18L^2+30L+6) \\
&+ G40\pi 2976\pi^3 \cdot (24L^2+40L+8) + G^2 28,224\pi^4(3L^2+2L) \\
&+ \frac{(40\pi)^4}{G}(12L+22) \leq \pi^4\{288,064,517.... + 43,137,255...v \\
&+ 344,030...v^2 + \frac{123,818,739}{v}\},
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

which is, by easy calculus, an increasing function of $v = G(x)$ for $v \geq 2$, e.g. Therefore substituting the maximal possible value $v = 9$ yields in this case

$$|H^{IV}(x)| < 7 \cdot 10^{10}. \tag{3.11}$$

For smaller values of $G(x)$ when $0 \leq v := G(x) \leq e$, in (2.22) we substitute $t = k = 3$ and $j = 2$ and then use (2.7) for $m \geq 2$ and also (3.4), leading to

$$
\begin{aligned}
|H^{IV}(x)| &\leq v\Lambda^2\left(34M^{*2} + 240M^*M_2 + 36\sqrt{M^*}M_3 + 54M_2^2\right) \\
&+ v^2\Lambda^2\left(36\sqrt{M^*}M_3 + 5M_4\right) \\
&\leq e\left(34\cdot 3900^2 + 240\cdot 3900\cdot 336\pi^2 + 36\sqrt{3900}\cdot 3040\pi^3 + 54\cdot 336^2\pi^4\right) \\
&+ e^2\left(36\sqrt{3900}\cdot 3040\pi^3 + 5\cdot 28,224\pi^4\right) \approx 13,700,830,408 < 2\cdot 10^{10},
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

applying also that on $[0,e]$ $v\Lambda^2 \leq e$ and $v^2\Lambda^2 \leq e^2$.

Summing up,

$$\|H^{IV}\|_\infty \leq 7\cdot 10^{10},$$

hence in the numerical quadrature formula (2.11) the error is estimated by

$$\frac{7\cdot 10^{10}}{60\cdot 2^{10}N^4}.$$

We need to chose the step number N large enough to bring this error below $\delta = 0.04$, i.e. to have

$$N \geq N_0 := \sqrt[4]{\frac{7\cdot 10^{10}}{60\cdot 2^{10}\cdot 0.04}} \approx 73.05....$$

Calculating the quadrature formula with $N = 100$, i.e. step size $h = 0.005$, we obtain the numerical approximate value 0.08760174..., so $d''(3) > 0.08760174... - 2\cdot 0.04 > 0$.

Our next aim will be to show that d'' is concave in $[3,4]$, i.e. that $d^{IV} < 0$. That will be the content of Lemma 3.4. To arrive at it, our approach will be a computation of some approximating polynomial, which is, apart from a possible slight and well controlled error, a Taylor polynomial of d^{IV}.

Numerical tabulation of values gives that d^{IV} is decreasing from $d^{IV}(3) \approx -0.068447...$ to even more negative values as t increases from 3 to 4. Thus our goal is to set $n \in \mathbb{N}$ and $\delta_j > 0$, $(j = 0, \ldots, n+1)$ suitably so that in the Taylor expansion

$$\begin{aligned} d^{IV}(t) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{d^{(j+4)}(\frac{7}{2})}{j!} \left(t - \frac{7}{2}\right)^j + R_n(d^{IV}, t), \\ R_n(d^{IV}, t) &= \frac{d^{(n+5)}(\xi)}{(n+1)!} \left(t - \frac{7}{2}\right)^{n+1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

the standard error estimate

$$\begin{aligned} |R_n(d^{IV}, t)| &\leq \frac{\|H_{\xi,n+5,+}\|_{L^1[0,1/2]} + \|H_{\xi,n+5,-}\|_{L^1[0,1/2]}}{(n+1)!} \cdot 2^{-(n+1)} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}\|H_{\xi,n+5,+}\|_\infty + \frac{1}{2}\|H_{\xi,n+5,-}\|_\infty}{(n+1)!2^{n+1}} \\ &\leq \frac{\max_{3\leq\xi\leq4} \|H_{\xi,n+5,+}\|_\infty + \max_{3\leq\xi\leq4} \|H_{\xi,n+5,-}\|_\infty}{(n+1)!2^{n+2}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

provides the appropriately small error $\|R_n(d^{IV}, \cdot)\|_\infty < \delta_{n+1}$, while with appropriate approximation $\overline{d}_j$ of $d^{(j+4)}(7/2)$,

$$\left\| \frac{d^{(j+4)}(\frac{7}{2}) - \overline{d}_j}{j!} \left(t - \frac{7}{2}\right)^j \right\|_\infty = \frac{\left|d^{(j+4)}(\frac{7}{2}) - \overline{d}_j\right|}{2^j j!} < \delta_j \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Naturally, we wish to chose n and the partial errors δ_j so that $\sum_{j=0}^{n+1} \delta_j < \delta := 0.068$, say, so that $d^{IV}(t) < P_n(t) + \delta$ with

$$P_n(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{d}_j}{j!} \left(t - \frac{7}{2}\right)^j. \tag{3.16}$$

Here the approximate values $\overline{d}_j$ will be obtained by numerical integration, using the quadrature formula (2.11) in approximating $d^{j+4}(7/2)$, which has the integral representation (3.5) with $j = 0, \ldots, n$. To be precise, we apply the error formula of (2.11) with $N_j \in \mathbb{N}$ steps, where N_j are set in function of a prescribed error of approximation η_j, which in turn will be set in function of the choice of δ_j.

So now we carry out this programme. First, as $G_\pm(x) \in [0,9]$, $|G_\pm^\xi(x) \log^m G_\pm(x)| \leq \max_{[0,9]} |v^\xi \log^m v| = \alpha^*_{\xi,m}$, which we consider with $\xi \in [3,4]$ and $m = n+5 \geq 4$. By Lemma 2.3 we derive for all $n \leq 18$ that

(3.17)
$$\|H_{\xi,n+5,\pm}(x)\|_\infty \leq 9^4 \log^{n+5} 9 = 6561 \cdot 2^{n+5} \log^{n+5} 3 \qquad (3 \leq \xi \leq 4,\ 1 \leq n \leq 18).$$

In view of (3.14) this yields

$$|R_n(d^{(4)}, t)| \leq \frac{104,976 \log^{n+5} 3}{(n+1)!} < 0.011 =: \delta_{11}$$

for $n = 10$.

Now we must set $\delta_0, \ldots, \delta_{10}$, too. So let now $\delta_j = 0.005$ for each $j = 0, \ldots, 10$. The goal is that the termwise error (3.15) would not exceed δ_j, which will be guaranteed by N_j step quadrature approximation of the two integrals defining $d^{(j+4)}(7/2)$ with prescribed error η_j each. Therefore, we set $\eta_j := \delta_j 2^j j!/2$, and note that in order to have (3.15) it suffices that

$$N_j > N_j^\star := \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} \eta_j}} = \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} j! 2^{j-1} \delta_j}} \tag{3.18}$$

according to Lemma 2.2. So at this point we estimate $\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty$ for $j = 0, \ldots, 10$ to find appropriate values of $N_j^\star$.

Lemma 3.3. *For $j = 0, \ldots, 10$ we have the numerical estimates of Table 1 for the values of $\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty$. Setting $\delta_j = 0.005$ for $j = 0, \ldots, 10$ the approximate quadrature of order $500 =: N =: N_j \geq N_j^\star$ with the listed values of $N_j^\star$ yield the approximate values $\overline{d}_j$ as listed in Table 1, admitting the error estimates (3.15) for $j = 0, \ldots, 10$. Furthermore, $\|R_{10}(d^{IV}, t)\|_\infty < 0.011 =: \delta_{11}$ and thus with the approximate Taylor polynomial $P_{10}(t)$ defined in (3.16) the approximation $|d^{IV}(t) - P_{10}(t)| < \delta := 0.068$ holds uniformly for $t \in [3,4]$.*

Proof. We start with the numerical upper estimation of $H^{IV}_{7/2,j,\pm}(x)$ for $3 \leq x \leq 4$, where now in view of the shift of indices we need the estimation for $4 \leq j \leq 14$. All what follows is not sensitive to $j \leq 14$, but it is convenient that $j \geq 4$, as otherwise in some derivatives the powers of $L(x) = \log G(x)$ would diminish, changing the formula slightly.

TABLE 1. Estimates for values of $\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty$, corresponding values of $N^\star_j$ with $\delta_j := 0.005$, and values of $\overline{d_j}$ with $N := N_j := 500$ for $j = 0, \ldots, 10$.

j	estimate for $\|H^{IV}_{7/2,j+4,\pm}\|_\infty$	$N^\star_j$	$\overline{d_j}$
0	$3.3 \cdot 10^{12}$	*383*	*-8.097236891*
1	$9.1 \cdot 10^{12}$	*415*	*-37.59530251*
2	$2.5 \cdot 10^{13}$	*378*	*-141.3912224*
3	$6.8 \cdot 10^{13}$	*310*	*-468.2134571*
4	$1.9 \cdot 10^{14}$	*239*	*-1423.831595*
5	$4.8 \cdot 10^{14}$	*169*	*-4074.963995*
6	$2.8 \cdot 10^{15}$	*142*	*-11,148.7318*
7	$2.6 \cdot 10^{16}$	*128*	*-29,465.89339*
8	$2.7 \cdot 10^{17}$	*115*	*-75,792.43387*
9	$2.9 \cdot 10^{18}$	*101*	*-190,751.6522*
10	$3.4 \cdot 10^{19}$	*88*	*-471,634.7482*

In the general formula (2.19) now we substitute $t = 7/2$ and apply the estimates (2.7) of M_2, M_3 and M_4, which yields

$$\begin{aligned}
|H^{IV}_{7/2,j,\pm}(x)| \le \frac{G'^4}{\sqrt{G}} &\{[j(j-1)(j-2)(j-3) + 12j(j-1)(j-2) + 43j(j-1) \\
&+ 44j]\ell^{j-4} \left[\frac{1}{4}j(j-1)(j-2) + \frac{43}{16}j(j-1) + \frac{33}{4}j + 6.5625\right]\ell^j\} \\
&+ 3316.18...\sqrt{G}G'^2\Big\{ [j(j-1)(j-2) + 10j(j-1) + 17.75j]\,\ell^{j-3} \\
&+ \left[\frac{7.5}{12}j(j-1) + \frac{55.75}{3}j + 13.125\right]\ell^j\Big\} \\
&+ 377036.32... \cdot G^{1.5}|G'|\Big\{[j(j-1) + 6j]\ell^{j-2} + [1.5j + 8.75]\ell^j\Big\} \\
&+ 2749274.19... \cdot G^{2.5}\left\{j\ell^{j-1} + 3.5 \cdot \ell^j\right\} \\
&+ 32991290.22... \cdot G^{1.5}\Big\{[j(j-1) + 6j]\ell^{j-2} + [1.5j + 8.75]\ell^j\Big\}
\end{aligned}$$

As a general rule, we further insert the direct norm estimate $\|G'\|_\infty \le M_1$ for x-values with $v := G(x) \ge e$, say; then $\ell = L(x) = \log G(x) \in [1, \log 9]$ and a direct maximum estimate, i.e. estimating ℓ by $\log 9$, will also be written in. With these estimates applied, the resulting estimation will be a formula in function of $v \in [e, 9]$, and the estimation ends by finding the maximum of this expression in $[e, 9]$. Generally this will be easy as the formula happens to be an increasing function of v and thus the maximum is attained at the value $v = 9$.

However, for small values of $v := G(x)$ – i.e. when $0 \leq v \leq e$ – we will invoke combined estimates of G'^2/G instead, thus reducing the occurring factors of G in the denominator. This will be useful in particular when G happens to vanish (as it may, at least in principle, and as it indeed does so for $G_+(x)$ in case $k = 3$). Again, this estimation results in a formula entirely depending only on the value of v, but the formula will be a sum of terms of the form $v^a|\log v|^b$ with $a, b \geq 0$ and $a > 0$ whenever $b > 0$. So even if $\ell := |\log v|$ can become ∞ where $v = 0$, the occurring combined terms, thanks to the elimination of the negative powers of $v = G(x)$, will be continuous and have an explicit maximum value in the interval $[0, e]$. Finding the maximum of each terms – again usually at the right endpoint where $v = e$– will provide the final estimation in this second case of small values of $v = G(x)$.

When $v = G(x) \geq e$, substitution of $t = 7/2$ in (2.20) while using the estimates (2.7) of $\|G^{(m)}\|$ and $\ell \leq \log 9 < 2.2$ yields the estimate

$$|H^{IV}_{7/2,j,\pm}(x)| \leq 2.2^j \Big\{ \frac{A}{\sqrt{G}} + B \cdot \sqrt{G} \Big\},$$

where

$$\begin{aligned} A := A_j &:= 9 \cdot 10^6 \left[j^4 - 2j^3 + 105j^2 + 134j + 154 \right] \\ B := B_j &:= 2.8 \cdot 10^7 j^3 + 3.9 \cdot 10^8 j^2 + 5.7 \cdot 10^9 j + 1.2 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

This last function is a strictly convex function of $u := \sqrt{v} = \sqrt{G(x)}$ – so it must have a unique minimum and two monotonic parts before and after the minimum point. Easy calculus yields that the minimum is located at $v_0 := \frac{A}{B}$. Now v_0 is less than e, when $j < 14$, hence then the function is increasing on $[e, 9]$ and it achieves its maximum at $v = 9$. When $j = 14$, the minimum falls inside $[e, 9]$, and the maximum is the maximum of the values at e and 9, but the latter being much larger, we again find that our estimate is maximized taking $v = 9$. Finally, substitution of $v = 9$ yields (3.19)

$$|H^{IV}_{7/2,j,\pm}(x)| \leq 2.2^j \cdot \left\{ 3 \cdot 10^6 j^4 + 7.8 \cdot 10^7 j^3 + 1.5 \cdot 10^9 j^2 + 1.8 \cdot 10^{10} j + 3.7 \cdot 10^{10} \right\}.$$

When $G(x) < e$, we substitute $k = 3$ and $t = 7/2$ in (2.22), and apart from the values of M_2, M_3 and M_4 we also use the last estimate of (3.4). Further, we write in $v^{5/2}\Lambda^j \leq e \cdot v^{3/2}\Lambda^j$ and, by means of Lemma 2.3, $\max_{[0,e]} v^{3/2}\Lambda^j = \max\left(e^{3/2}, (\frac{2j}{3e})^j\right)$

which then yields

(3.20)
$$|H^{IV}_{7/2,j,\pm}(x)| \le \left\{1.6\cdot 10^7 j^4 + 1.1\cdot 10^8 j^3 + 5.6\cdot 10^8 j^2 + 1.6\cdot 10^9 j + 1.9\cdot 10^9\right\}.$$

>From here we take the maximum of (3.19) and the above (3.20) for all $j = 6,\dots,14$, which means using (3.19) up to $j = 9$ and then (3.20) for $j = 10,\dots,14$, leading to the upper estimates of $\|H^{IV}_{7/2,j,\pm}\|_\infty$ as listed in Table 1.

Finally, we collect also the resulting numerical estimates of $N_j^\star$ – as given by the formulae (3.18) – in Table 1 and furthermore list the accordingly computed values of $\overline{d_j}$, too, applying the numerical quadrature formula (2.11) with step size $h = 0.001$, i.e. $N = N_j = 500$ steps. □

Lemma 3.4. *We have $d^{IV}(t) < 0$ for all $3 \le t \le 4$.*

Proof. We approximate $d^{IV}(t)$ by the polynomial $P_{10}(t)$ constructed in (3.16) as the approximate value of the order 10 Taylor polynomial of d^{IV} around $t_0 := 7/2$. As the error is at most δ, it suffices to show that $p(t) := P_{10}(t) + \delta < 0$ in $[3,4]$.

Now $P_{10}(3) = -0.068458667...$ so $P_{10}(3) + \delta < 0$. Moreover, $p'(t) = P'_{10}(t) = \sum_{j=1}^{10} \dfrac{\overline{d}_j}{(j-1)!}(t-7/2)^{j-1}$ and $p'(3) = -4.00969183 < 0$. From the explicit formula of $p(t)$ we consecutively compute also $p''(3) = -23.12291565 < 0$, $p'''(3) = -93.80789264 < 0$ and $p^{(4)}(3) = -324.0046433$, $p^{(5)}(3) = -978.7532737...$, $p^{(6)}(3) = -3144.062078...$, $p^{(7)}(3) = -5587.909055...$, all < 0. Thus $p^{(j)}(3) < 0$ for $j = 0,\dots,7$.

Therefore in order to conclude $p(t) < 0$ for $3 \le t \le 4$ it suffices to show that $p^{(8)}(t) = \overline{d}_8 + \overline{d}_9(t-7/2) + (\overline{d}_{10}/2)(t-7/2)^2$ stays negative in the interval $[3,4]$. However, the leading coefficient of $p^{(8)}$ is negative, while it is easy to see that the discriminant $\Delta := \overline{d}_9^2 - 2\overline{d}_8\overline{d}_{10}$ of $p^{(8)}$ is negative, too: $\Delta \approx -3.511\cdot 10^{10}$. Therefore, the whole parabola of the graph of $p^{(8)}$ lies below the x-axis i.e. $p^{(8)}(t) < 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$. It follows that also $p(t) < 0$ for all $t \ge 3$. □

Proof of the $k = 3$ case of Conjecture 1.1.

Since $d(3) = d(4) = 0$, and $d'(3) > 0$, d takes some positive values close to 3; so in view of Lagrange's (Rolle's) theorem, d' takes some negative values as well. Therefore, d' decreases from a positive value at 3 to some negative value somewhere later; it follows that d'' takes some negative values in $(3,4)$. Also, d'' is concave and

$d''(3) > 0$ implies that d'' changes from positive values towards negative ones; by concavity, there is a unique zero point τ of d'' in $(3,4)$, where d'' has a definite sign change from positive to negative.

It follows that d', starting with the positive value at 3, first increases, achieves a maximal positive value at τ, and then it decreases, reaches zero and then eventually negative values, as seen above. That is, when it becomes zero at some point σ, it already has a negative derivative, and it keeps decreasing from that point on. So d' is positive until σ, when it has a strict sign change and becomes negative until 4. Therefore, d increases until σ and then decreases till 4; so d forms a cap shape and it is minimal at the endpoints 3 and 4, where it vanishes. It follows that $d > 0$ in $(3,4)$.

This concludes the proof of the $k = 3$ case of Conjecture 1.1.

4. The case $k = 4$ of Conjecture 1.1

First of all let us record that in case $k = 4$ in (2.9) we are to deal with $G_{\pm}(x) = 3 + 2u \pm 2[T_5(u) + T_6(u)] \qquad (u = \cos 2\pi x)$ so putting in $T_5(u) = 16u^5 - 20u^3 + 5u$ and $T_6(u) = 32u^6 - 48u^4 + 17u^2$ a numerical calculation of the occurring polynomials give

$$\min_{\mathbb{T}} G_+ \approx 0.0946... \qquad \text{and} \qquad \min_{\mathbb{T}} G_- \approx 0.02776... \tag{4.1}$$

Therefore in case $k = 4$ we can estimate $\ell := |L| = |\log G(x)| < |\log(0.027)| < 3.7$ for both signs of $G_{\pm}$.

Lemma 4.1. *We have $d'(4) > 0$.*

Remark 4.1. *By numerical calculation, $d'(4) \approx 0.0062067....$*

Proof. From (2.19) with $t = 4, j = 1$

$$\begin{aligned} H^{IV} &= G'^4(50 + 24L) + 6GG'^2G''(26 + 24L) + 4G^2G'G'''(7 + 12L) + \\ &+ G^3G^{IV}(1 + 4L) + 3G^2G''^2(7 + 12L). \end{aligned} \tag{4.2}$$

From this, $\ell < 3.7$ and the estimates (2.7) we get by plain substitution as before $\|H^{IV}\|_\infty < 1.6 \cdot 10^{12}$.

To bring the resulting error estimate down below $\delta = 0.003$, we need to chose the step number N as large as to have

$$\frac{1.6 \cdot 10^{12}}{60 \cdot 2^{10} N^4} < \delta \qquad \text{i.e.} \qquad N \geq N_0 := \sqrt[4]{\frac{1.6 \cdot 10^{12}}{60 \cdot 2^{10} \cdot 0.003}} \approx 306....$$

Calculating the quadrature formula with $N = 500$, we obtain the approximate value $0.0062067...$, whence $d'(4) > 0.0062067... - 2 \cdot 0.003 > 0$. □

Lemma 4.2. *We have $d''(4) > 0$.*

Remark 4.2. *By numerical calculation, $d''(4) \approx 0.0541341....$*

Proof. From (2.19) with $t = 4, j = 2$ and inserting the values of M_ms given by (2.7) together with $\ell < 3.7$ we get $\|H^{IV}\|_\infty < 7 \cdot 10^{12}$.

Thus to bring the error below $\delta = 0.027$, we need to chose the step number N large enough to have

$$\frac{7 \cdot 10^{12}}{60 \cdot 2^{10} N^4} < \delta \qquad \text{i.e.} \qquad N \geq N_0 := \sqrt[4]{\frac{7 \cdot 10^{12}}{60 \cdot 2^{10} \cdot 0.027}} \approx 255....$$

Calculating the quadrature formula with $N = 500$, we obtain the approximate value $0.05413417...$, whence $d''(4) > 0.05413417... - 2 \cdot 0.0027 > 0$. □

Lemma 4.3. *We have $d'''(4) > 0$.*

Remark 4.3. *By numerical calculation, $d'''(4) \approx 0.2255707....$*

Proof. From (2.19) with $t = 4, j = 3$ and calculating with the same values of M_m from (2.7) as above – together with $\ell < 3.7$ in view of (4.1) we arrive at

$$\begin{aligned} H^{IV} &= G'^4(60 + 210L + 150L^2 + 24L^3) + 6GG'^2G''(6 + 54L + 78L^2 + 24L^3) \\ &\quad + 4G^2G'G'''(6L + 21L^2 + 12L^3) + G^3G^{IV}(3L^2 + 4L^3) + \\ &\quad + 3G^2G''^2(6L + 21L^2 + 12L^3), \\ |H^{IV}| &< 5.4 \cdot 10^{13}. \end{aligned}$$

To bring this down below $\delta = 0.112$, we need to chose the step number N large enough to have

$$\frac{5.3 \cdot 10^{13}}{60 \cdot 2^{10} N^4} < \delta \qquad \text{i.e.} \qquad N \geq N_0 := \sqrt[4]{\frac{5.3 \cdot 10^{13}}{60 \cdot 2^{10} \cdot 0.112}} \approx 298....$$

Calculating the quadrature formula with $N = 500$, we obtain the approximate value 0.22557089..., whence $d'''(4) > 0.22557089... - 2 \cdot 0.112 > 0$.

So we arrive at the analysis of d^V. Numerical tabulation of values give that d^V is decreasing from $d^V(4) \approx -2,217868...$ to even more negative values as t increases from 4 to 5. So we now set forth *proving* that $d^V < 0$ in $[4,5]$. To arrive at it, our approach will be a computation of some approximating polynomial $p(t)$, which is, within a small and well controlled error, will be a Taylor polynomial of $d^V(t)$. However, as we intend to keep the step number N of the numerical integration under 500, we take the liberty of approximating d^V by different polynomials (using different Taylor expansions) on various subintervals of $[4,5]$. More precisely, we divide the interval $[4,5]$ into 2 parts, and construct approximating Taylor polynomials around 4.25 and 4.75.

So now setting $t_0 = 4.25$ or $t_0 = 4.75$, the Taylor approximation will have the form

$$d^V(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{d^{(j+5)}(t_0)}{j!}(t-t_0)^j + R_n(d^V, t_0, t),$$
$$R_n(d^V, t_0, t) = \frac{d^{(n+6)}(\xi)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}. \tag{4.3}$$

Therefore instead of (3.14) we can use

$$\begin{aligned} |R_n(d^V, t_0, t)| &\le \frac{\|H_{\xi,n+6,+}\|_{L^1[0,1/2]} + \|H_{\xi,n+6,-}\|_{L^1[0,1/2]}}{(n+1)!} \cdot 4^{-(n+1)} \\ &\le \frac{\frac{1}{2}\|H_{\xi,n+6,+}\|_\infty + \frac{1}{2}\|H_{\xi,n+6,-}\|_\infty}{(n+1)! 2^{2n+2}} \\ &\le \frac{\max_{|\xi-t_0|\le 1/4}\|H_{\xi,n+6,+}\|_\infty + \max_{|\xi-t_0|\le 1/4}\|H_{\xi,n+6,-}\|_\infty}{(n+1)! 2^{2n+3}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

So once again we need to maximize (2.12), that is functions of the type $v^\xi |\log v|^m$, on $[0,9]$ (or, more precisely, on the subinterval $\mathcal{R}(G) \approx [0.02776..., 9]$, where the values are actually attained by $v := G(x)$). So now similarly to (3.17), we get from (2.14) of Lemma 2.3 that for any $m \le 31$ and $|\xi - t_0| \le 1/4$

$$\|H_{\xi,m,\pm}\|_\infty = \max\left\{ \left(\frac{m}{e\cdot\xi}\right)^m, 9^\xi \log^m 9 \right\} = 9^\xi \log^m 9 \le 9^{t_0+1/4} \log^m 9.$$

In all, for $n \le 25$

(4.5)
$$\max_{|\xi - t_0| \le 1/4} \|H_{\xi,n+6,\pm}(x)\|_\infty \le \begin{cases} 9^{4.5} \log^{n+6} 9 = 19,683\, 2^{n+6} \log^{n+6} 3 & \text{if } t_0 = 4.25, \\ 9^5 \log^{n+6} 9 = 59,049\, 2^{n+6} \log^{n+6} 3 & \text{if } t_0 = 4.75. \end{cases}$$

In case $t_0 = 4.25$ now we chose $n = 7$. Then for this case the Lagrange remainder term (4.4) of the Taylor formula (4.3) can be estimated as $|R_n(d^V, t)| \le \dfrac{314,928 \log^{n+6} 3}{2^n (n+1)!} < 0.21 =: \delta_8$.

As before, the Taylor coefficients $d_{j+5}(t_0)$ cannot be obtained exactly, but only with some error, due to the necessity of some kind of numerical integration in the computation of the formula (3.5). Hence we must set the partial errors $\delta_0, \dots, \delta_7$ with $\sum_{j=0}^{8} \delta_j < \delta := 2.21$, say, so that $d^V(t) < P_n(t) + \delta$ for

$$P_n(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{d}_j}{j!} (t - 4.25)^j . \tag{4.6}$$

The analogous criteria to (3.15) now has the form:

$$\left\| \frac{d^{(j+5)}(4.25) - \overline{d}_j}{j!} (t - 4.25)^j \right\|_\infty = \frac{\left| d^{(j+5)}(4.25) - \overline{d}_j \right|}{2^{2j} j!} < \delta_j \;\; j = 0, 1, \dots, n. \tag{4.7}$$

That the termwise error (4.7) would not exceed δ_j will be guaranteed by N_j step quadrature approximation of the two integrals in (3.5) defining $d^{(j+5)}(4.25)$ with prescribed error η_j each. Therefore, we set $\eta_j := \delta_j 2^{2j} j!/2$, and note that in order to have (4.7)

$$N_j > N_j^\star := \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} \eta_j}} = \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} j! 2^{2j-1} \delta_j}} \tag{4.8}$$

suffices by the integral formula (2.11) and Lemma 2.2. That is, we must estimate $\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty$ for $j = 0, \dots, 7$ and thus find appropriate values of $N_j^\star$.

Lemma 4.4. *For $j = 0, \dots, 7$ we have the numerical estimates of Table 2 for the values of $\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty$. Setting δ_j as seen in the table for $j = 0, \dots, 7$, the approximate quadrature of order $500 := N_j \ge N_j^\star$ with the listed values of $N_j^\star$ yield the approximate values $\overline{d}_j$ as listed in Table 2, admitting the error estimates (4.7) for $j = 0, \dots, 7$. Furthermore, $\|R_8(d^V, t)\|_\infty < 0.21 =: \delta_8$ and thus with the approximate Taylor polynomial $P_7(t)$ defined in (4.6) the approximation $|d^V(t) - P_7(t)| < \delta := 2.21$ holds uniformly for $t \in [4, 4.5]$.*

TABLE 2. Estimates for values of $\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty$, chosen values of δ_j and resulting $N^\star_j$, and $\overline{d_j}$ with $N_j := N := 500$ for $j = 0, \dots, 7$.

j	estimate for $\|H^{IV}_{4.25,j+5,\pm}\|_\infty$	δ_j	$N^\star_j$	$\overline{d_j}$
0	$1.23 \cdot 10^{15}$	*0.65*	*499*	*-11.99030682*
1	$5.32 \cdot 10^{15}$	*0.73*	*494*	*-64.72801527*
2	$2.29 \cdot 10^{16}$	*0.4*	*492*	*-273.5687453*
3	$9.80 \cdot 10^{16}$	*0.15*	*486*	*-1000.494741*
4	$4.18 \cdot 10^{17}$	*0.04*	*486*	*-3319.462864*
5	$1.77 \cdot 10^{18}$	*0.01*	*466*	*-10,266.25853*
6	$7.47 \cdot 10^{18}$	*0.01*	*302*	*-30,113.02268*
7	$3.14 \cdot 10^{19}$	*0.01*	*188*	*-84,761.00164*

Proof. We start with the numerical upper estimation of $H^{IV}_{4.25,j,\pm}(x)$ for $4 \le x \le 4.5$. In the general formula (2.20) now we consider the case $t = 4.25$ and use the estimates (2.7) of M_1, M_2, M_3 and M_4, together with $\ell < 3.7$ – c.f. (4.1) to compute

$$|H^{IV}_{4.25,j,\pm}(x)| <$$
$$< 3.7^j \Big\{ 4.78 \cdot 10^6 j^4 + 3.72 \cdot 10^8 j^3 + 1.09 \cdot 10^{10} j^2 + 1.44 \cdot 10^{11} j + 7.29 \cdot 10^{11} \Big\}.$$

Finally, we collect the resulting numerical estimates of $\|H^{IV}\|$ in Table 2 and list the corresponding values of $N^\star_j$ and $\overline{d_j}$, too, as given by the formulae (4.8) and the numerical quadrature formula (2.11) with step size $h = 0.001$, i.e. $N = N_j = 500$ steps.

Lemma 4.5. *We have $d^V(t) < 0$ for all $4 \le t \le 4.5$.*

Proof. We approximate $d^V(t)$ by the polynomial $P_7(t)$ constructed in (4.6) as the approximate value of the order 7 Taylor polynomial of d^V around $t_0 := 4.25$. As the error is at most δ, it suffices to show that $p(t) := P_7(t) + \delta < 0$ in $[4, 4.5]$. Now $P_7(4) = -2.2178666857...$ so $P_7(4) + \delta < 0$. Moreover,

$$p'(t) = P_7'(t) = \sum_{j=1}^{7} \frac{\overline{d}_j}{(j-1)!}(t - 4.25)^{j-1}$$

and $p'(4) = -20.41147631... < 0$. From the explicit formula of $p(t)$ we consecutively compute also $p''(4) = -104.6546745... < 0$, $p'''(4) = -426.8260106... < 0$, $p^{(4)}(4) = -1473.198415... < 0$, $p^{(5)}(4) = -5386.784165... < 0$ and $p^{(6)}(4) = -8922.772271... < 0$. Finally, we arrive at $p^{(7)}(t) = \overline{d}_7$=-84,761.00164... . We have already checked that

$p^{(j)}(4) < 0$ for $j = 0 \dots 6$, so in order to conclude $p(t) < 0$ for $4 \le t \le 4.5$ it suffices to show $p^{(7)}(t) < 0$ in the given interval. However, $p^{(7)}$ is constant $\overline{d}_7$, hence $p^{(7)}(t) < 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. It follows that $p(t) < 0$ for all $t \ge 4$. $\square$

In case of $t_0 = 4.75$ we have for all $\xi \in [4.5, 5]$

$$\max\left\{\left(\frac{m}{e\cdot\xi}\right)^m, 9^\xi \log^m 9\right\} \le \max\left\{\left(\frac{m}{4.5e}\right)^m, 9^5 2^m \log^m 3\right\} = 9^5 \log^m 9 \tag{4.9}$$

for $m < 37$. In all, $\|H_{\xi,n+6,\pm}(x)\|_\infty \le 59{,}049\, 2^{n+6} \log^{n+6} 3$ for all $4.5 \le \xi \le 5$ and $4 \le n < 31$. In view of (4.4) this yields

$$|R_n(d^V, t)| \le \frac{944{,}784 \log^{n+6} 3}{2^n (n+1)!} < 9.1 =: \delta_7$$

for $n = 6$.

Next we set $\delta_0, \dots, \delta_6$. Now the criteria (3.15) is modified as

$$\left\| \frac{d^{(j+5)}(4.75) - \overline{d}_j}{j!} (t - 4.75)^j \right\|_\infty = \frac{\left|d^{(j+5)}(4.75) - \overline{d}_j\right|}{2^{2j} j!} < \delta_j, \ j = 0, 1, \dots, n. \tag{4.10}$$

Since the numerical calculation gives that $d^V(4.5) \approx -39.96194643...$, now we wish to chose the partial errors δ_j so that $\sum_{j=0}^{n+1} \delta_j < \delta := 39.9$, say, so that $d^V(t) < P_n(t) + \delta$ with

$$P_n(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{d}_j}{j!} (t - 4.75)^j . \tag{4.11}$$

The goal is that the termwise error (4.10) would not exceed δ_j, which will be guaranteed by N_j step quadrature approximation of the two integrals defining $d^{(j+5)}(4.75)$ with prescribed error η_j each. Therefore, we set $\eta_j := \delta_j 2^{2j} j!/2$, and note that in order to have (4.10)

$$N_j > N_j^\star := \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{4.75,j+5,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} \eta_j}} = \sqrt[4]{\frac{\|H^{IV}_{4.75,j+5,\pm}\|_\infty}{60 \cdot 2^{10} j! 2^{2j-1} \delta_j}} \tag{4.12}$$

suffices by the integral formula (2.11) and Lemma 2.2. That is, we must estimate $\|H^{IV}_{4.75,j+5,\pm}\|_\infty$ for $j = 0, \dots, 7$ and thus find appropriate values of $N_j^\star$.

Lemma 4.6. *For $j = 0, \dots, 6$ we have the numerical estimates of Table 3 for the values of $\|H^{IV}_{4.75,j,\pm}\|_\infty$. Setting δ_j as can be seen in the table for $j = 0, \dots, 6$, the approximate quadrature of order $500 := N_j \ge N_j^\star$ with the listed values of $N_j^\star$ yield the approximate values $\overline{d}_j$ as listed in Table 3, admitting the error estimates (4.10) for $j = 0, \dots, 6$. Furthermore, $\|R_7(d^V, t)\|_\infty < 9.1 =: \delta_7$ and thus with the approximate*

Taylor polynomial $P_6(t)$ *defined in* (4.11) *the approximation* $|d^V(t) - P_6(t)| < \delta :=$ 39.9 *holds uniformly for* $t \in [4.5, 5]$.

TABLE 3. Estimates for values of $\|H^{IV}_{4.75,j+5,\pm}\|_\infty$, set values of δ_j and the resulting $N_j^\star$, and the values of $\overline{d_j}$ with $N := N_j := 500$ steps for $j = 0, \ldots, 6$.

j	estimate for $\|H^{IV}_{4.75,j+5,\pm}\|_\infty$	δ_j	$N_j^\star$	$\overline{d_j}$
0	$4.98 \cdot 10^{15}$	*8*	*378*	*-111.5230149*
1	$2.13 \cdot 10^{16}$	*9*	*373*	*-432.5730847*
2	$9.07 \cdot 10^{16}$	*7*	*339*	*-1509.259877*
3	$3.85 \cdot 10^{17}$	*3*	*323*	*-4867.920658*
4	$1.63 \cdot 10^{18}$	*1*	*305*	*-14,785.12009*
5	$6.83 \cdot 10^{18}$	*1*	*207*	*-42,842.09045*
6	$2.86 \cdot 10^{19}$	*1*	*134*	*-119,563.5221*

Proof. We start with the numerical upper estimation of $H^{IV}_{4.75,j,\pm}(x)$ for $4.5 \leq x \leq 5$. In (2.20) now we insert $t = 4.75$, use again the estimates (2.7) of $M_1 - M_4$ and $\ell < 3.7$ and arrive at

$$|H^{IV}_{4.75,j,\pm}(x)| < \\ < 3.7^j \Big\{1.44 \cdot 10^7 j^4 + 1.23 \cdot 10^9 j^3 + 3.93 \cdot 10^{10} j^2 + 5.7 \cdot 10^{11} j + 3.18 \cdot 10^{12}\Big\}.$$

Finally, we collect the resulting numerical estimates of $\|H^{IV}\|$ in Table 3 and list the corresponding values of $N_j^\star$ and $\overline{d_j}$, too, as given by formulae (4.12) and the numerical quadrature formula (2.11) with step size $h = 0.001$, i.e. $N = N_j = 500$ steps.

Lemma 4.7. *We have* $d^V(t) < 0$ *for all* $4.5 \leq t \leq 5$.

Proof. We approximate $d^V(t)$ by the polynomial $P_6(t)$ constructed in (4.11) as the approximate value of the order 6 Taylor polynomial of d^V around $t_0 := 4.75$. As the error is at most $\delta = 39.9$, it suffices to show that $p(t) := P_6(t) + \delta < 0$ in $[4.5, 5]$. Now $P_6(4.5) = -39.9655627058...$ so $P_6(4.5) + \delta < 0$. Moreover, $p'(t) = P_6'(t) = \sum_{j=1}^6 \dfrac{\overline{d}_j}{(j-1)!}(t - 4.75)^{j-1}$ and $p'(4.5) = -174.8777051... < 0$. From the explicit formula of $p(t)$ we consecutively compute also $p''(4.5) = -662.2069802... < 0$, $p'''(4.5) = -2199.092624... < 0$, $p^{(4)}(4.5) = -7810.957541...2 < 0$ and $p^{(5)}(4.5) = -12,951.20993... < 0$. Finally, we arrive at $p^{(6)}(t) = \overline{d}_6$=-119,563.5221... We have already checked that $p^{(j)}(4.5) < 0$ for $j = 0 \dots 5$, so in order to conclude $p(t) < 0$ for $4.5 \le t \le 5$ it suffices to show $p^{(6)}(t) < 0$ in the given interval. However, $p^{(6)}$ is constant, so $p^{(6)}(t) < 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. It follows that also $p(t) < 0$ for all $t \ge 4.5$.

5. Conclusion

With the help of the sharper quadrature formula (2.11) further numerical analysis is possible for higher values of k. In principle we can divide the interval $(k, k+1)$ to smaller and smaller intervals to get improved error estimations of Taylor expansions to compensate the larger and larger error bounds resulting from e.g. (2.7) and the increase of t. We have a strong feeling that this way we could work further to higher values of k. However, even that possibility does not mean that we would have a clear *theoretical* reason, a firm grasp of the underlying law, rooted in the nature of the question, for what the result should hold for *all* k.

Acknowledgement. The author is grateful to Professor Szilárd Révész for continuous guidance and encouragement. Also the author gratefully acknowledges the distinction and support, given to him in form of the Ames Award, for the paper [8].

Список литературы

[1] J. M. Ash, How to concentrate idempotents? *Real Anaylsis Exchange* **35**, no. 1, 1–20 (2010).
[2] G. F. Bachelis, On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **24**, 119–128 (1973).
[3] R. P. Boas, Majorant problems for Fourier series, *J. d'Analyse Math.*, **10**, 253–271 (1962-3).
[4] A. Bonami, Sz. Gy. Revesz, Integral concentration of idempotent trigonometric polynomials with gaps, *Amer. J. Math.*, **131**, 1065 - 1108 (2009).
[5] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Concentration of the integral norm of idempotents. In: *Recent developments in fractals and related fields*, Proceedings of the Conference in honor of Jacques Peyrière, (held in Tunis, Tunisia, 2007), Barral, Julien; Seuret, Stéphane (Eds.), pages 107 - 129 (2010). See online at `http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/book/978-0-8176-4887-9`.
[6] N. G. Chebotarev, On a general criterion of the minimax, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **39**, 339-341 (1943).
[7] G. H. Hardy & J. E. Littlewood, Notes on the theory of series (XIX): a problem concerning majorants of Fourier series, *Quart. J. Math. Oxford*, **6**, 304 – 315 (1935).
[8] S. Krenedits, Three-term idempotent counterexamples in the Hardy-Littlewood majorant problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **388**, 136 - 150 (2012).
[9] G. Mockenhaupt, *Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators.* Thesis for habilitation. Siegen: Univ.-GSH Siegen, Fachbereich Mathematik, 52 pages (1996).
[10] G. Mockenhaupt, W. Schlag, On the Hardy-Littlewood majorant problem for random sets, *J. Funct. Anal.* **256**, no. 4, 1189–1237 (2009).

[11] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface of number theory and Fourier analysis*, Regional Conference Series in Mathematics **84**, American Mathematical Society, Providence (1994).

[12] S. Neuwirth, The maximum modulus of a trigonometric trinomial, *J. d'Analyse Math.*, **104**, 371 – 396 (2008).

[13] Sz. Gy. Révész, Minimization of maxima of nonnegative and positive definite cosine polynomials with prescribed first coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**, 589 - 608 (1995).

Поступила 12 мая 2012

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 48, номер 3, 2013

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 48, No. 3, 2013

Contents