ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2013

Рубен Викторович Амбарцумян

Настоящий выпуск посвящен 70-летию академика Рубена Викторовича Амбарцумяна. Рубен Викторович родился в 1941 году в Елабуге (Россия) в семье известного армянского ученого Виктора Амазасповича Амбарцумяна. В 1962 году окончил Московский государственный университет им. Ломоносова и с тех пор занимал различные должности в Институте математики Академии Наук Армении. Как математик Р. В. Амбарцумян состоялся в Ереване и никогда не покидал этот город для проведения долгосрочных математических исследований; единственным исключением было его полугодовое пребывание в Темпельском университете (США, 1992 г.). В 1986 году Р.В. Амбарцумян был избран действительным членом Академии наук Армянской ССР (ныне НАН РА). В 1992-2009 гг. был главным редактором журнала "'Известия Национальной Академии Наук , серия Математика" и его английского перевода "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". В 1982 году награжден премией Ролло Дэвидсона.

Рубен Амбарцумян является признанным специалистом в области интегральной и стохастической геометрий, а также в теории случайных точечных процессов. Созданная Р.В. Амбарцумяном ветвь математики - Комбинаторная Интегральная Геометрия (КИГ), была центральной темой его исследований. История публикаций по КИГ начинается с цикла работ Р.В. Амбарцумяна, в которых использовался метод инвариантного вложения. Среди них отметим следующие статьи: "Probability Distribution in the Geometry of clusters", Studia. Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 235-241 и "The Solution of the Buffon- Sylvester problem in R^3", Z. Wahrsch. verw. Geb., 27 (1973), 53-74. Первая комбинаторная интерпретация рассматриваемых задач содержится в работе Р. В. Амбарцумяна "Combinatorial Solution of the Buffon- Sylvester problem", Z. Wahrsch. verw. Geb. 29(1974), 25-31.

Основными понятиями теории Рубена Амбарцумяна - являются множества Бюффона в пространствах гиперплоскостей, кольца, порожденные множествами Бюффона и комбинаторные валюации, определенные на множестве этих колец. В случае, когда рассматриваемое пространство является евклидовой плоскостью, гиперплоскости представляют собой обычные прямые, а множества Бюффона - "множества игл", возникающие в известной задаче Бюффона об игле (1776). В этих терминах каждая разумная комбинаторная валюация определяет непрерывную функцию, зависящую от плоских "игл", и наоборот. Р. В. Амбарцумян в работе "A Note on Pseudo-metrics in the Plane", Z. Wahrsch. Verw. Geb. 37 (1976), 145-155 указал на характеристическое свойство тех непрерывных метрик, для которых обычные прямые оказываются кратчайшими путями: если их рассматривать как функции игл, то комбинаторные валюации оказываются мерами. Именно на этом пути, КИГ позволила получить решение четвертой проблемы Гильберта, сформулированной в 1900 году, об описании класса метрик, для которых геодезическими являются обычные евклидовы прямые. Аналитические аспекты этого решения четвертой проблемы Гильберта были изучены Р.В. Амбарцумяном и В.К. Оганяном в работе "Parametric versions of Hilbert's fourth problem,"Israel Journal of Mathematics, vol. 103 (1998), no. 1, 41 - 65.

Первая монография Р.В. Амбарцумяна "Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology", опубликованная издательством John Wiley в 1982 году, представляла собой основополагающий труд, в котором были заложены начала новой теории. Еще до публикации этой монографии в своих заметках о КИГ А. Баддли из Кембриджского университета (в Bulletin of London Math. Soc.) и Ф. Пифке из Германии (в Monatshefte für Mathematik) полностью признавали приоритет Р.В. Амбарцумяна в создании этой теории. Следует отметить также, следующее высказывание А. Баддли во вступлении к вышеуказанной монографии: "Мы должны поблагодарить Амбарцумяна за то, что он открыл путь к обобщению интегральной геометрии и указал ее основные принципы, которыми руководствуются все исследователи".

Следует отметить высокую исследовательскую активность представителей армянской школы КИГ не только в рамках страны (их публикации, включающие множество работ Р.В. Амбарцумяна, заполнили около десятка специальных изданий Известий НАН Армении в 1992-2009 гг.) но и в рамках международной кооперации. Севанский (Армения) международный симпозиум 1976 года " 200 лет задачи Бюффона об игле" сыграл важную роль в определении путей развития интегральной и стохастической геометрий. Севанский дух международной интеграции присутствует как в Дополнении А. Баддли к монографии Р.В. Амбарцумяна, так и в следующих сборниках: "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии" (издательство Академии наук Арм.ССР, Ереван, 1980), "Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology" (под редакцией Р.В. Амбарцумяна и В. Вайля) Teubner-texte zur Mathematic, труды обервольфахского симпозиума, т. 65 (1984), "Stochastic and Integral Geometry", (под редакцией Р.В. Амбарцумяна) Acta Applicandae Mathematicae, т. 9 (1987), nos. 1-2.

Через восемь лет после публикации первой монографии, появилась вторая монография Р.В. Амбарцумяна "Factorization Calculus and Geometric Probability", Cambridge University Press, в серии Джиана-Карло-Роты энциклопедии математики и ее приложений 1990. Ж.-К.-Рота , создатель теории валюаций, был знаком с работами Р.В. Амбарцумяна, по крайней мере, с 1980 года. Статья Р.В. Амбарцумяна "A Synopsis of Combinatorial Integral Geometry" была опубликована в журнале Ж.-К.Роты "Advances in Mathematics", т. 37 (1980), н. 1, 1-15 (содержала КИГ исследования геодезических линий на общих многообразиях).

Главы второй монографии Р.В. Амбарцумяна, содержащие новый материал по КИГ, были включены в немецкий перевод R. V.Ambartzumian, D. Stoyan and Mecke, "Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Stochastische Geometrie", издательство Akademie Verlag, Berlin, 1993.

Еще в 1974 году, будучи приглашенным докладчиком на математическом конгрессе в Ванкувере, Р.В. Амбарцумян в своем выступлении "The solution to the Buffon-Sylvester Problem and Stereology" (Proceedings of the International Congress of Mathematicians, v. 2, 137-143) указал на возможные применения методов КИГ в области прикладной стереологии. Далее были опубликованы две работы Р.В. Амбарцумяна в Z. Wahrsch. verw. Geb. (1976 - о метриках, первая его работа по четвертой проблеме Гильберта, и 1978 - о топологических инвариантах, первая - по неевклидовой теме).

Первый результат по математической томографии был получен Р.В. Амбарцумяном в работе "Аналитические аспекты комбинаторной интегральной геометрии", Известия НАН Армении, т. 34 (1999), н. 6, 2-46. Здесь было установлено весьма полезное для исследований в области математической томографии соотношения (по терминологии автора "дезинтегрированным классическим изопериметрическим неравенством") являющееся обобщением классического изопериметрического неравенства. Таким образом, высказывание Ралфа Александера: "Комбинаторная интегральная геометрия является значительным вкладом в основы интегральной геометрии"(Bulletin (New Series) Американского Математического Общества , т. 10 (1984), н. 2 получает еще одно подтверждение. Статья Р.В. Амбарцумяна "Интегрирование комбинаторных разложений для дельта-мер", Известия НАН Армении, т. 40 (2005), н. 4, 5-22, содержит следствия дезинтегрированного изопериметрического неравенства в трехмерном случае.

Задача восстановления плоской выпуклой области на основе X-лучей (проблема Хаммера для X-лучей) была поставлена в 1961 году на симпозиуме о Выпуклости Американского Математического Общества: сколько снимков X-лучей для выпуклого тела нужно сделать для того, чтобы иметь возможность получить его точное восстановление? 34 года спустя Ричард Гарднер в своей фундаментальной книге "Geometric tomography" писал, что X-лучи в четырех разных направлениях справятся с этой задачей. Р.В. Амбарцумян в статье "Parallel X-ray Tomography of Convex Domains as a Search Problem in Two Dimensions", публикуемой в настоящем номере журнала, показал, что в обычном асимптотическом смысле, X-лучи только в трех разных направлениях могут быть достаточны для восстановления центрально-симметричных выпуклых областей.

Аналитический аппарат разложений комбинаторной интегральной геометрии порождает ряд результатов о случайных процессах, наблюдаемых на линейных секущих в плоских моделях стохастической геометрии. Р.В. Амбарцумяном было показано, что в некоторых плоских стохастических моделях свойство инвариантности относительно группы евклидовых движений уже подразумевает конкретные типы вероятностных распределений на линейных секущих. Типичным результатом такого рода (получение экспоненциального распределения) содержится в работе Р.В. Амбарцумяна "Случайные раскраски плоскости" в сборнике "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии" (издательство Академии наук Арм.ССР, Ереван, 1980). Этот результат приводится в специальной главе монографии "Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology". Дальнейшие аналогичные результаты о стохастических геометрических моделях можно найти в монографии "Factorization Calculus and Geometric probability". Статья Р.В. Амбарцумяна "Инвариантное вложение в Стохастической геометрии", Известия НАН Армении, т. 33 (1998), н. 4, рассматривает аналогичную задачу для трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых.

Первой работой Р.В. Амбарцумяна, использующей метод инвариантного вложения, была работа "Метод инвариантного вложения в теории случайных прямых" (Известия АН Арм.ССР. Математика, 1970). Тот же метод инвариантного вложения используется Р.В. Амбарцумяном в работе "Convex Polygons and Random Tessellations"сборник статей "Stochastic Geometry", под редакцией E. F. Harding и D. G. Kendall, John Wiley, 1974. Доказательство основной теоремы работы Р. В. Амбарцумяна "The solution of the Buffon- Sylvester Problem in R^3", Z. Wahrsch. verw. Geb., 27 (1974), 53-74, также опиралось на метод инвариантного вложения. Монография Р.В. Амбарцумяна "Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology опубликованная издательством John Wiley в 1982, содержит несколько различных доказательств этой теоремы, но первая глава все еще указывает на метод инвариантного вложения, как на естественный аналитический подход, который привел к решению задачи Бюффона-Сильвестра.

Одной из областей комбинаторной интегральной геометрии в которую Р.В. Амбарцумян внес серьезный вклад, является теория случайных точечных процессов. В этой области Р. В. Амбарцумян был одним из ведущих апологетов теории распределения Пальма. Например, известный сборник статей "Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications", Peter A. W. Lewis, редактор, Wiley-Interscience, (1972), содержал работу Р.В. Амбарцумяна "Palm distributions and superpositions of independent point processes in R^n". Главным вкладом Р.В. Амбарцумяна в теорию точечных процессов, несомненно, является теорема, содержащаяся в работе Р.В. Амбарцумяна и Г. С. Сукиасяна "Inclusion-exclusion and point processes", Acta Appl. Math., в. 22 (1991), 15 – 31.

Проблема существования точечных процессов с заданными корреляционными функциями (плотностями) $f(x_1, ..., x_n)$, в том числе и в случае бесконечных систем, является основной темой все возрастающего числа работ по так называемой "задаче реализуемости" статистической физики. Первая демонстрация "реализуемости"(для систем $f(x_1, ..., x_n)$, которые соответствуют модели парного взаимодействия с положительным потенциалом) была получена в той же статье Р.В. Амбарцумяна и Г. С. Сукиасяна. Это двойное достижение в полной мере признается, например, T. Kuna, J. L. Lebowitz и E.R Speer, в работе "Realizability of Point Processes"J. Stat. Phys. 129 (2007),, 417-439. Многомерный вариант был предложен Р.В. Амбарцумяном в работе "On Condensible Point Processes" опубликованной в сборнике статей New Trends Prob. Statist., т. 1 (1991), 655-667.

Редколлегия журнала поздравляет академика Рубена Викторовича Амбарцумяна с юбилеем.

Редколлегия Журнала

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 9-36.

SEVAN METHODOLOGIES REVISITED: RANDOM LINE PROCESSES

R. V. AMBARTZUMIAN

Institute of Mathematics National Academy of Sciences, Armenia
E-mail: *rouben@instmath.sci.am*

Abstract. The paper studies random line processes that are translation invariant in probability distribution, and whose first and second order moment measures possess continuous densities. The purpose is to review the analytical apparatus based on the concept of *horizontal or vertical windows and corresponding Palm-type probability distributions* that are now proved below to exist. That apparatus enables to study the relation between the quantities $p_k(l,\alpha)$ and $\pi_k(l,\alpha)$, where $p_k(l,\alpha)$ = probability to have k hits by the lines from Z on a "test segment"of length l and direction α, while $\pi_k(l,\alpha)$ = conditional probability of the same event, the condition being that the test segment lies on one of the lines from Z. Palm equations for *horizontal windows* have been known since long, but for *vertical windows* they were first put down in the last chapter of the book [4], under stronger condition of Euclidean motions invariance of Z. The paper considers two different *models* that imply Poissonity of the probabilities $p_k(l,\alpha)$. Translation invariant line processes can be viewed as stationary states of random dynamical arrays of countably many particles each moving with constant speed along the *test line*, and these models are of special interest in that context. In a model-free setting, the paper presents a formula for calculation of the conditional intensity $\Lambda(\alpha) = l^{-1}\sum_k k\,\pi_k(l,\alpha)$. That formula includes quantities depending on the distribution of the *typical vertex shape*. "Sevan metodologies" have been the topic of authors plenary report at the Rasht (Iran) meeting in 2011. This usage is motivated in a special historical section below; another section is devoted to detailed description of Sevan methodologies themselves.[1]

MSC2010 numbers: 60D05; 60G55; 52A22

Keywords: Combinatorial integral geometry; stochastic geometry; random line process; Palm-type distribution.

1. Some history

The collection of papers "Stochastic Geometry" [1] edited by E.F. Harding and D.G. Kendall inaugurated in 1974 a new direction in the theory of random point processes: random processes of geometrical elements (lines in the plane, or in space, planes in

[1]This research was partially supported by the State Committee of Sciences of the Republic of Armenia, Grant 11-1a359.

three dimensions etc.) that can be represented as points in appropriate manifolds. Earlier an effort to coordinate and promote that research took place at Oberwolfach meeting on Integral Geometry and Geometric Probability held in June 1969, with organizers D.G.Kendall and Klaus Krickeberg. Remarkably, that Symposium started a rare instance of East - West mathematical cooperation when the materials of the symposium were published in Soviet Armenia in 1970, in a special issue of the Armenian Academy mathematical *Izvestiya* [5]. In 1976, Buffon Needle Bicentenary International Conference was held at Sevan, Armenia [2] jointly sponsored by Royal Society, French and Armenian Academies. The Second Sevan Symposium on Stochastic and Integral Geometry [10], [12] was held in 1985. To commemorate that development, the methodologies presented by the author at the Sevan meetings of 1976 and 1985 we now call "Sevan"

D.G. Kendall who visited the first Sevan Conference, was at that time the President of the London Mathematical Society. In his "Introduction to Stochastic Geometry"in [1] he wrote that "the whole existing literature concerned with stochastic geometry"could be found within the pages of the collection [1]. A prominent place in [1] belongs to the paper by a young Cambridge mathematician Rollo Davidson entitled "Construction of Line-Processes: Second order Properties". That paper by Rollo Davidson was originally published in Soviet Armenia [5]. Quite tragically, Rollo Davidson died (on 29 July 1970 in a mountain-climbing accident) about a month before he could realize a planned visit to Armenian Academy (Yerevan) sponsored by the Royal Society [6]. The collection [1] was a tribute to his memory.

The topic of random line processes dominated the collection [1]. In Kendall's words, there is a sense in which "Stochastic geometry takes its origin in Crofton's famous article in the IXth edition of the *Encyclopedia Britannica*"that contained a study of Euclidean motion invariant Poisson line process. Rollo Davison's work was "an attempt to eschew Crofton's approach": in fact that pioneering work launched a series of studies of general random line processes, like [7]-[10],[12] and Chapter 9 of [4]. The collection [1] contained also several papers devoted to the concept of Palm distribution, an important tool in the present study.

2. Sevan methodologies.

We concentrate on three items that are applied in the present paper.

Combinatorial Integral Geometry We use the notation: $I\!R^2$ = the Euclidean plane, $\mathbf{G}$ = the space of Euclidean lines in $I\!R^2$ with usual Moebius band topology, see [3]. Euclidean motion invariant locally-finite measure dg in the space $\mathbf{G}$ (see (3.1) below) is uniquely defined by the condition

$$\int_{[P_1P_2]} dg = 2\,|P_1, P_2|,$$

where $[P_1, P_2]$ = the set of lines that separate two endpoints of a "needle"$P_1, P_2 \in \mathbf{R}^2$, $|P_i, P_j|$ is the Euclidean distance between P_i and P_j. In 1890 J.J.Sylvester considered the following problem. Let in the plane, n "needles"ν_1,...,ν_n be fixed in general position. The value of that measure on the sets

$$\mathbf{A} = \bigcap_{i=1}^{n}[\nu_i] \quad \text{or} \quad A = \bigcup_{i=1}^{n}[\nu_i]$$

in each case was known to have the representation

$$\int_A dg = \sum_{i<j} u_{ij}(\mathbf{A})\,|P_i, P_j|, \tag{2.1}$$

with some integer coefficients $u_{ij}(\mathbf{A})$. J.J. Sylvester asked for an algorithm of calculation of the integers $u_{ij}(A)$ for each set. Only in 1973 a solution was given in [11], known as the *solution of Buffon–Sylvester problem* [11], [3]. It is as follows.

Assume we have a finite collection of points

$$\{P_i\} = \{P_1, ..., P_N\} \subset I\!R^2.$$

We introduce an equivalence relation: two lines g_1, $g_2 \in \mathbf{G}$ which do not belong to any $[P_i]$ (where $[P]$ = the bundle of lines through P) we call equivalent if they induce the same separation of the set $\{P_i\}$ into two subsets.

An equivalence class Υ (a maximal set of equivalent lines) is always a connected set in the topology of $\mathbf{G}$, but its closure will not be compact if for each line $g \in \Upsilon$ the total $\{P_i\}$ lies in one of the two half-planes separated by g. All other equivalence classes have compact closures: these we call *atoms*. We denote

$r\{P_i\}$ = the minimal ring $r\{P_i\}$ of subsets of $\mathbf{G}$ which contains all atoms,

$[P_i, P_j] = \{g \in \mathbf{G} : g$ separates P_i from $P_j\}$, (the so called *Buffon sets*),

g_{ij} = the line through P_i and P_j.

An element $\mathbf{A} \in r\{P_i\}$ necessarily has the form $\mathbf{A} = \bigcup a_i$, where a_i are some of the atoms of $r\{P_i\}$.

If g_{ij} contains no points from $\{P_i\}$ except P_i and P_j, and the number of points in $\{P_i\}$ exceeds 2, then there exist exactly four different equivalence classes Υ for which we have $g_{ij} \in \partial\Upsilon$. We denote them as $\Upsilon_{ij}(++)$, $\Upsilon_{ij}(--)$, $\Upsilon_{ij}(+-)$ and $\Upsilon_{ij}(-+)$. We make a convention that

every line $g \in \Upsilon_{ij}(++)$ or $g \in \Upsilon_{ij}(--)$ leaves P_i and P_j in one half-plane,

every line $g \in \Upsilon_{ij}(+-)$ or $g \in \Upsilon_{ij}(-+)$ leaves P_i and P_j in different half-planes.

Given $\mathbf{A} \in r\{P_i\}$, the values of the indicator function

$$I_{\mathbf{A}}(g) = \begin{cases} 1, & \text{if } g \in \mathbf{A}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

on the lines from the above four sets we denote correspondingly as

$$I_{\mathbf{A}}(i^+, j^-) \equiv I_{\mathbf{A}}(g) \text{ for } g \in \Upsilon_{ij}(+-), \quad I_{\mathbf{A}}(i^-, j^+) \equiv I_{\mathbf{A}}(g) \text{ for } g \in \Upsilon_{ij}(-+),$$

$$I_{\mathbf{A}}(i^+, j^+) \equiv I_{\mathbf{A}}(g) \text{ for } g \in \Upsilon_{ij}(++), \quad I_{\mathbf{A}}(i^-, j^-) \equiv I_{\mathbf{A}}(g) \text{ for } g \in \Upsilon_{ij}(--).$$

The following result was proved in [3] in several different ways. Actually (2.1) is valid for any $A \in r\{P_i\}$. Under the condition that no line g_{ij} contains any points from $\{P_i\}$ other than P_i and P_j, the algorithm of calculation of the coefficients $u_{ij}(A)$ reduces to the *four indicator rule*:

$$u_{ij}(\mathbf{A}) = I_{\mathbf{A}}(i^+, j^-) + I_{\mathbf{A}}(i^-, j^+) - I_{\mathbf{A}}(i^+, j^+) - I_{\mathbf{A}}(i^-, j^-).$$

If the number of points in $\{P_i\}$ equals 2, i.e. $\{P_i\} = \{P_1, P_2\}$ then $r\{P_i\}$ contains only one element $\mathbf{A}$ for which the above remains valid since formally $I_{\mathbf{A}}(i^+, j^+) = I_{\mathbf{A}}(i^-, j^-) = 0$ and we get $u_{12}(\mathbf{A}) = 2$.

For the case where g_{ij} contains points from $\{P_i\}$ other from P_i and P_j (2.1) remains valid for every $A \in r\{P_i\}$, while the algorithm requires modification.

The class (+); A 2-set P_i, P_j belongs to the class $(+)$ if the interior of the linear segment P_i, P_j does not contain any points from $\{P_i\}$. For every $P_i, P_j \in (+)$, the equivalence classes $\Upsilon_{ij}(+-)$ and $\Upsilon_{ij}(-+)$ are uniquely defined (necessarily both are atoms).

The class (-): A 2-set P_i, P_j belongs to the class (-) if the interior of the complement (within g_{ij}) of the linear segment P_i, P_j does not contain points from $\{P_i\}$. For $P_i, P_j \in$ (-), the equivalence classes $\Upsilon_{ij}(++)$ and $\Upsilon_{ij}(--)$ are also uniquely defined (one of the two can fail to be an atom).

We write

$$u'_{ij}(\mathbf{A}) = I_{\mathbf{A}}(i^+, j^-) + I_{\mathbf{A}}(i^-, j^+), \quad \text{well defined for } P_i, P_j \text{ from the class } (+),$$

$$u''_{ij}(\mathbf{A}) = I_{\mathbf{A}}(i^+, j^+) + I_{\mathbf{A}}(i^-, j^-), \quad \text{well defined for } P_i, P_j \text{ from the class } (-),$$

General algorithm. For any finite set of points $\{P_i\} \subset I\!R^2$ with number of points greater then 2, and every $\mathbf{A} \in r\{P_i\}$

$$\int I_{\mathbf{A}}(g)\, dg = \sum_{(+)} u'_{ij}(\mathbf{A})\, |P_i P_j| - \sum_{(-)} u''_{ij}(\mathbf{A})\, |P_i P_j|. \tag{2.2}$$

The book [3] contains numerous corollaries and generalizations of (2.2), while Chapter 10 of [4] contains the first case of calculation based on the coefficients $u'_{ij}(\mathbf{A})$ and $u''_{ij}(\mathbf{A})$.

Translational analysis of realizations. Let Z be a realization of a random line processes in $\mathbf{R}^2$,

$\mathbf{T}_2 =$ the group of parallel translations of $\mathbf{R}^2$,

$\mathbf{P} =$ probability distribution of Z assumed to be invariant with respect to $\mathbf{T}_2$,

$dt =$ Haar measure on the group $\mathbf{T}_2$ (corresponds to Lebesgue measure in $\mathbf{R}^2$),

$tZ =$ translation of Z by $t \in \mathbf{T}_2$.

The method is based on the study of integrals

$$\int_{\mathbf{b}} f(tZ)\, dt,$$

where $\mathbf{b}$ corresponds to some disc in $\mathbf{R}^2$, while $f(Z)$ is some function defined in the space of realizations Z. In the cases of interest $f(Z) = f_\varepsilon(Z)$ also depends on some small parameter ε, and it is possible to find the limit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{b}} f_\varepsilon(tZ)\, dt = x(Z). \tag{2.3}$$

By the invariance assumption concerning $\mathbf{P}$ we have the identity

$$\int f_\varepsilon(tZ)\, d\mathbf{P} \;=\; \int f_\varepsilon(Z)\, d\mathbf{P}.$$

In case there exists a function $y(Z)$ with finite integral (expectation) with respect to $\mathbf{P}$ such that uniformly in ε

$$\int_{\mathbf{b}} f_\varepsilon(tZ)\, dt \;\le\; y(Z), \tag{2.4}$$

then by Lebesgue bounded convergence theorem and Fubini theorem, integration in $d\mathbf{P}$ would imply

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon(Z)\, d\mathbf{P} \;=\; ||\mathbf{b}||^{-1} \int x(Z)\, d\mathbf{P}, \tag{2.5}$$

where $||\mathbf{b}||$ stands for the value of dt-measure (area) of $\mathbf{b}$. In the lemmas of Section 4 we take $||\mathbf{b}|| = 1$.

The simplest illustration of above general idea can be found in [4], pages 137, 193, where the method leads to the well known in the theory of translation invariant random point processes concept of "Palm Distribution". (Even earlier case is [14], where one of the sections is entitled "The move-and-average method".) The same method for line processes Z that are distribution invariant with respect to the Euclidean group was used in [4], Chapter 10. This led to the concept of "Palm Distribution"for the corresponding class of line processes. In Section 4 below we apply that methodology to line processes and the group $\mathbf{T}_2$, and so demonstrate the existence of "Palm-type"probabilities Π_v, and Π_{vv} (v stands for "vertical"windows). The same approach with minimal changes applies to "Palm-type"probabilities Π_h and Π_{hh} (h stands for "horizontal"windows).

Factorization of invariant measures. A considerable part of the book [4] is devoted to measures in the products of the spaces of geometrical elements that are invariant with respect to groups acting in the carrier spaces. Normally such measures split into two factors, one of the two being the Haar measure on the group. The problem then is to find the other measure factor. This is the "factorization"in the book's title. In [4] $\mathbf{T}_2$-invariant measures in the space $\mathbf{G}$ of lines and in the space $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ are treated on the basis of that factorization principle. In the present paper such measures come in as the first M_1 and the second M_2 moment measures of $\mathbf{T}_2$-invariant line processes. We will base on the following.

If a locally-finite $\mathbf{T}_2$-invariant measure M_1 possesses a density, then it necessarily has the form

$$\rho_1(\phi)\, dg$$

where ϕ is the direction of $g \in \mathbf{G}$, dg is the Euclidean motions invariant measure on $\mathbf{G}$ and $\rho(\phi)$ is a summable function defined on

$$(0, \pi) = \text{the space of planar directions.}$$

If we assume that the measure M_2 beyond the "diagonal"$g_1 = g_2$ possess a density, then necessarily it has the form

$$\rho_2(\phi_1, \phi_2)\, dg_1\, dg_2,$$

where $\rho_2(\phi_1, \phi_2)$ is some summable function defined on the product space $(0, \pi) \times (0, \pi)$. We will use the Jacobian result (see [4], p. 37)

$$\rho_2(\phi_1, \phi_2)\, dg_1\, dg_2 \;=\; \sin\tau\, \rho_2(\phi_1, \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2\, dQ, \tag{2.5}$$

where Q is the point where the lines g_1 and g_2 intersect, dQ is the planar Lebesgue, $d\phi_i$ are usual angular measures in the space of directions $(0, \pi)$.

3. Random line processes

The purpose of the present section is to presents necessary basic concepts from the line processes theory together with much of the notation used in the paper.
The space of sensed lines in the plane $\mathbf{R}^2$ can be represented by a cylindrical surface

$$[0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty),$$

where $[0, 2\pi)$ stands for the circle of unit radius. Each sensed line then receives natural coordinates (ϕ, p), where $\phi =$ direction of the line, $p =$ the signed distance of the line from the origin on the plane. A non-sensed line we denote by g. The space $\mathbf{G}$ of (non-sensed) lines in the plane, $g \in \mathbf{G}$, is obtained from the above cylinder by identifying pairs of lines that coincide except for directions. In this way $\mathbf{G}$ receives topology of the Möbius Band.

A random collection Z of lines in the plane is called a random line process in case Z corresponds to some random point process in $\mathbf{G}$. (Sometimes, as appropriate, below we use Z to denote a fixed realization of a random line process.) Let Z be a random line process such that Z with probability 1 has no lines parallel to g_0 = a "test line"on the plane. Then Z possesses random marked point process $\{x_i, \psi_i\}$ representation, where each $x_i \in g_0$ is the point where a line from Z intersects g_0, and ψ_i is the corresponding intersection angle. Conversely, a marked point processes $\{x_i, \psi_i\}$ generates via given g_0 a random line processes Z_{g_0} due to the map

$$\{x_i, \psi_i\} \to \{g_i\} \;=\; Z_{g_0}$$

where g_i is the line that hits $x_i \in g_0$ under angle ψ_i.

In case $\{x_i, \psi_i\}$ is invariant in distribution with respect to g_0-preserving translations of the plane, the corresponding Z_{g_0} in general is not translation invariant. Let $\{x_i, \psi_i\}_d$ be the marked point process induced by Z_{g_0} on the line g_d parallel to and distance d from g_0. The problem of existence of limiting distribution for $\{x_i, \psi_i\}_d$ as $d \to \infty$ attracted much attention some decades ago in the case where on g_0 the sequences $\{x_i\}$ and $\{\psi_i\}$ are assumed independent and $\{\psi_i\}$ is a sequence of independent angles, see [15], [16].

The probability distribution of Z we denote as $\mathbf{P}$: it is a probability measure that lives in the space of realizations of line processes, or, more properly, on the sigma-algebra ∇ defined to be the image of the sigma-algebra well known in the theory of random point processes. Elements of ∇ are called events. A classical example due to Crofton is the Poisson line process governed by the standard Euclidean motion invariant measure

$$dg \;=\; \sin\psi \, d\psi \, dl, \tag{3.1}$$

where

l = the usual one dimensional coordinate of the point $g \cap \gamma$ on some reference line γ,

ψ = the angle between the reference line and g.

By definition, it corresponds to the Poisson point process on $\mathbf{G}$ governed by dg.

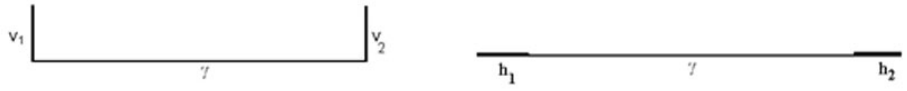

Рис. 1. Two pairs of “windows” at the endpoints of γ

We recall that a Poisson point process on $\mathbf{G}$ governed by a measure m that lives on $\mathbf{G}$ puts k points in a Borel set $B \subset \mathbf{G}$ with probability

$$\frac{[m(B)]^k}{k!} \exp^{-m(B)},$$

while the numbers k for disjoint sets B are independent.

Poisson line processes governed by measures of the form $\rho(\phi)\, dg$, where $\rho_1(\phi)$ is some density defined on $[0, \pi)$ are all $\mathbf{T}_2$ - invariant in distribution.

Basic Events. Let α be some direction in the plane to be called "horizontal γ be a "test"line segment in the plane of length l and planar direction α. So γ lies on a horizontal "test"line, see Fig.1, v_1 and $v_2 =$ vertical windows, both of length ε, and h_1 and $h_2 =$ horizontal windows, both of length ε. We write

$\binom{u}{k}$ = the segment $u \subset \mathbf{R}^2$ is hit by exactly k lines from Z

(we say that $g \in \mathbf{G}$ *hits* u if g separates the endpoints of u). Given several test segments u_1, u_2,... u_m and nonnegative integers k_1, k_2,..., k_m we consider the events

$$\binom{u_1}{k_1} \cap \binom{u_2}{k_2} \cap ... \cap \binom{u_m}{k_m}.$$

The events of the above type are said to belong to the class ∇_0 if the endpoints of γ are not among the endpoints of the segments $u_1, u_2, ..., u_m$. (The class ∇_0 serves measure continuation purposes in the Lemmas 1.2 below.) We write $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ for the intersection of $\binom{u_1}{k_1}$ and $\binom{u_2}{k_2}$. For the probabilities of such events we use notation like $\mathbf{P}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

For a line segment u we define the event $\binom{v}{1u} \subset \binom{v}{1}$ as

$$\binom{v}{1u} = \{Z : \text{the unique line from } Z \text{ that hits } v \text{ hits the segment } u\}.$$

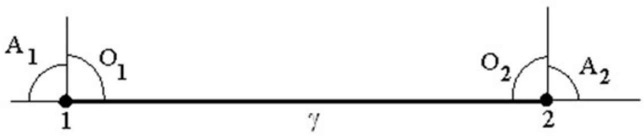

Рис. 2

Assume a probability measure Π is concentrated on realizations Z that with probability $\Pi = 1$ possess a line g_0 that contains one of the endpoints of γ. Then $\Pi(\Theta)$ will stand for the Π-probability of the *event*, that the random direction of g_0 belongs to Θ, where Θ is some arc of planar directions. In case with probability $\Pi = 1$ there are two lines in Z through each endpoint of γ, we will use the notation $\Pi\left[\Theta_1 \cap \Theta_2\right]$ for the probability of the corresponding intersection event.

In the definition of Acute-Obtuse factorization model given in Section 6 we choose $\Theta_i = A_i$ or $\Theta_i = O_i$, the arcs A_1, O_1, A_2, O_2 are shown on Fig.2 (A stands for *Acute* and O for *Obtuse*). In the proof of Lemma 5.1 we will use the event relations valid for each endpoint of γ, i.e. for $i = 1, 2$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \partial \begin{pmatrix} \gamma & v_i \\ k & 1\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ k-1 \end{pmatrix} \cap A_i, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \partial \begin{pmatrix} \gamma & v_i \\ k & 1d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap O_i, \tag{3.2}$$

where d_i is the hypotenuse spanning γ and v_i, while ∂ stands for the boundary of a set.

Densities of Moment Measures. The present paper considers line processes that are invariant in distribution with respect to the group $\mathbf{T}_2$. Within that class we specify the subclasses

$D1$ = line processes with first moment measure possessing a continuous density

$$\rho_1(\phi)\, dg, \quad \text{where } \phi \text{ is the direction of the line } g,$$

$D2$ = line processes with second moment measure possessing a continuous density

$$\rho_2(\phi_1, \phi_2)\, dg_1\, dg_2, \quad \text{where } \phi_1, \phi_2 \text{ are the directions of the lines } g_1, g_2.$$

The assumption $Z \in D1$ implies

$$\lambda(\alpha) = |\gamma|^{-1} \sum k \, \mathbf{P} \binom{\gamma}{k} < \infty$$

and hence as the length $|\gamma|$ tends to zero

$$\mathbf{P} \binom{\gamma}{1} = \lambda(\alpha) \, |\gamma| + o(|\gamma|) \quad \text{and} \quad \mathbf{P} \binom{\gamma}{k} = o(|\gamma|) \;\; \text{for} \;\; k > 1,$$

i.e. the set of hits on any test line is *orderly* in the usual random point process sense. From (3.1)

$$\lambda(\alpha) = \int \rho_1(\phi) \, \sin(\alpha, \phi) \, d\phi, \quad \lambda(v) = \int \rho_1(\phi) \, |\cos(\alpha, \phi)| \, d\phi,$$

where v stands for the vertical (perpendicular to α) direction,

$(\alpha, \phi) = \psi =$ the angle between directions α and ϕ,

$d\phi =$ the usual rotation invariant measure in the space of planar directions.

It will become clear (Lemma 4.2) that for the events

$$V_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cap (2), \quad \text{and} \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

where (2) is an event defined as

$(2) = \{Z :$ the windows v_1, v_2 are hit by two different lines from $Z\}$,

the assumption $Z \in D2$ implies

$$\mathbf{P}(V_2) = S_{vv}(\alpha) \, \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(H) = S_{hh}(\alpha) \, \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

where

$$S_{hh}(\alpha) = \int_0^\pi \int_0^\pi \rho_2(\phi_1, \phi_2) \, \sin(\alpha, \phi_1) \sin(\alpha, \phi_2) \, d\phi_1 \, d\phi_2,$$

$$S_{vv}(\alpha) = \int_0^\pi \int_0^\pi \rho_2(\phi_1, \phi_2) \, | \cos(\alpha, \phi_1) \;\; \cos(\alpha, \phi_2) \, | \, d\phi_1 \, d\phi_2. \tag{3.3}$$

As for the event

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cap (1)$$

where $(1) = \{Z :$ the windows v_1, v_2 are hit by the same line from $Z\}$, the relation

$$\mathbf{P}(V_1) = \rho_1(\alpha) \, \frac{\varepsilon^2}{l} + o(\varepsilon^2) \tag{3.4}$$

does not seem to be automatically valid, hence the definition: a line process $Z \in D_1$ is called orderly if it satisfies (3.4). We note that due to

$$\int_{[v_1] \cap [v_2]} dg = \frac{\varepsilon^2}{l} + o(\varepsilon^2)$$

the right-hand side of (3.4) is the asymptotical expression of the value of the first moment measure of $Z \in D1$ on the set $[v_1] \cap [v_2]$ = lines that hit both v_1 and v_2.

The Vertex Process. Let $\{Q_i\}$ be the set of vertices of $Z \in D2$: each vertex Q_i is a point where some two lines from Z intersect. We postulate that with probability $\mathbf{P} = 1$ no triads of lines from Z meet at a point. (In a broader framework of random segment processes related questions were considered in [13] and [14].) To each vertex Q_i correspond the marks (dependence on i is suppressed):

(ϕ_1, ϕ_2) = the directions of the two lines g_1, $g_2 \in Z$ that meet at Q_i and

τ = the angle between the directions ϕ_1 and ϕ_2,

(ϕ_1, ϕ_2) is the translational and τ is the Euclidean "shape"of Q_i.

By (2.6) $\{Q_i\}$ happens to be a point process of finite intensity λ_Q:

$$\lambda_Q = \int\int \sin\tau\, \rho_2(\phi_1, \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2.$$

According to [4], the probability density defined on the product $(0, \pi) \times (0, \pi)$ as

$$\frac{1}{\lambda_Q} \sin\tau\, \rho_2(\phi_1, \phi_2)\, d\phi_1\, d\phi_2 \tag{3.5}$$

describes the *translational random shape of a typical vertex* in $\{Q_i\}$. The corresponding expectation we denote as $\mathbf{E}_Q$. It follows that

$$\mathbf{E}_Q \frac{1}{\sin\tau} < \infty.$$

The results of Section 7 below (now published for the first time) permit to express the "conditional"intensity

$$\Lambda(\alpha) = \sum k\, \pi_k(l, \alpha)$$

via the intensities $\lambda(\alpha) = \sum k\, p_k(l, \alpha)$, λ_Q and some averages E_Q of certain parameters depending on random shape of a typical vertex in $\{Q_i\}$. We will often use the well-known *Wilhelm Blaschke relation* (rediscovered in [4])

$$2\,\rho_1(\alpha) = \lambda(\alpha) + \lambda''(\alpha). \tag{3.6}$$

4. Palm type probabilities

In Lemma 4.1 we can choose v, A, O to be either v_1, A_1, O_1 or v_2, A_2, O_2 as on Figs. 1,2. We note that

$$\mathbf{P}\binom{v}{1} = \lambda(v)\,\varepsilon + O(\varepsilon), \qquad \mathbf{P}\binom{v}{k} = o(\varepsilon) \quad \text{for } k = 2, 3, ...$$

are well known facts of the theory of stationary point processes on a line ($\lambda(v)$ is the intensity of the intersections point process on lines of vertical direction).

Lemma 4.1. *For every line process $Z \in D1$ and every event $C \in \nabla_0$ there exists a limit*

$$\Pi_v(C) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{P}\left[C \cap \binom{v}{1}\right]}{\mathbf{P}\binom{v}{1}} \tag{4.1}$$

that defines, by means of probability continuation, a probability measure Π_v on ∇. This Π_v is concentrated on realizations Z that possess a line through an end-point of γ. In particular, the probabilities $\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k} \cap A\right]$ and $\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k} \cap O\right]$ are well defined.

Proof. We apply the notation of the Translational analysis subsection of Section 3. Let $\mathbf{b} \subset \mathbf{T}_2$ correspond to the disc $b \subset \mathbf{R}^2$ i.e. $b = \{tO, t \in \mathbf{B}\}$, O is the origin. We put

$$f_\varepsilon(Z) = \varepsilon^{-1}\, I_{\binom{v}{1}}(Z)\, I_C(Z)$$

(product of two indicator functions). For realizations Z from the set that has probability $\mathbf{P} = 1$ we easily establish

$$x(Z) = \sum_{\chi_i} |\cos(\chi_i, \gamma)| \int_{u \in \chi_i} I_C(t_u Z)\, du, \tag{4.2}$$

where

$t_u =$ shift that takes the point $u \in \mathbf{R}^2$ to the common endpoint of v and γ,

$\chi_i =$ the chord $b \cap g_i$, $g_i \in Z$,

$(\chi_i, \gamma) =$ the angle between χ_i and γ,

$du =$ the length measure on the chord χ_i. Clearly

$$\int_{tO \in b} f_\varepsilon(tZ)\, dt \le c\, y(Z),$$

where $c =$ diameter of b, while $y(Z) =$ the number of lines from Z that hit b. If Z is random $Z \in D1$ with probability distribution $\mathbf{P}$, then

$$\int y(Z)\, d\mathbf{P} \;=\; \int_{[b]} \rho_1(\phi)\, dg < \infty,$$

where $[b] \subset \mathbf{G}$ is the set of lines that hit b. This proves the existence of

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\, \mathbf{P}\left[C \cap \binom{v}{1}\right].$$

In particular, replacing C by the total space of realizations we get the existence of

$$\lambda(v) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\, \mathbf{P}\binom{v}{1}.$$

The two limits together yield (4.1). From (4.2) follows the probability continuation formula valid at least for every $C \in \nabla$:

$$\Pi_v(C) \;=\; \int d\mathbf{P} \sum_{\chi_i} |\cos(\chi_i, \gamma)| \int_{\chi_i} I_C(t_u Z)\, du. \tag{4.3}$$

Lemma 4.1 is proved. $\square$

In the next Lemma 4.2 the event V_2 is as defined in Section 3 and we again apply Translational analysis as in Section 2. The quantities S_{hh} and S_{vv} are given by (3.3).

Lemma 4.2. *For every line process $Z \in D2$*

$$\mathbf{P}(V_2) \;=\; S_{vv}(\alpha)\, \varepsilon^2 \;+\; o(\varepsilon^2). \tag{4.4}$$

For every $C \in \nabla_0$ there exists the limit

$$\Pi_{vv}(C) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{P}(C \cap V_2)}{\mathbf{P}(V_2)}$$

that extends to a probability measure Π_{vv} on ∇. This Π_{vv} is concentrated on realizations Z that possess lines through each end-point of γ. In particular, the probabilities like $\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k} \cap A_1 \cap O_2\right]$ are well defined.

Proof. Let $g_1^{(i)}$, $g_2^{(i)}$ be two lines from Z that meet at a vertex Q_i, and τ_i be the angle between the two. By elementary calculations, the dt-measure of the set $\{t \in \mathbf{T}_2 :$ tv_1 hits $g_1^{(i)}$ and tv_2 hits $g_2^{(i)}\}$ equals

$$\frac{|\cos(g_1^{(i)}, \gamma)|\, |\cos(g_2^{(i)}, \gamma)|}{\sin \tau_i}\, \varepsilon^2. \tag{4.5}$$

Now using the notation of the Translational analysis subsection of Section 3 we put

$$f_\varepsilon(Z) \;=\; \varepsilon^{-2} I_{V_2}(Z)\, I_C(Z).$$

With probability 1 the limiting function $x(Z)$ exists; we write down, its explicit expression under a simplifying assumption about realization Z. Let $\{t_i\} \in \mathbf{b}$ be determined by the condition that for each t_i the set $t_i Z$ contains both endpoints of γ. If we assume, that Z has the property that for no pairs (i, m) the points $t_i Q_m$ coincide with endpoints of γ, then (4.5) implies

$$x(Z) \;=\; \sum_{t_i \in \mathbf{b}} \frac{|\cos(g_1^{(i)}, \gamma)|\, |\cos(g_2^{(i)}, \gamma)|}{\sin \tau_i}\, I_C(t_i Z). \tag{4.6}$$

It is easy to find an explicit expression for $x(Z)$ in case of general Z. We do not put it down because the present proof needs only existence of the limit that defines $x(Z)$. What the proof needs is the inequality

$$f_\varepsilon(Z) \;\le\; \sum_{t_i O \in b} \frac{1}{\sin \tau_i} \;=\; y(Z)$$

valid for every realization Z; it directly follows from (4.5). By(3.5), the function $y(z)$ is summable, hence

$$\Pi_{vv}(C) \;=\; \int x(Z)\, d\mathbf{P}. \tag{4.7}$$

As a by-product we get (4.4), and the proof ends in the same way as in Lemma 4.1. □

Further Remarks. First we briefly present the results for the case of horizontal windows (see Fig.1) that can be easily proved by the Translational analysis method of Section 2 above.

There is a counterpart of Lemma 4.1 that states the existence of the limit

$$\Pi_h(C) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{P}\left[C \cap \binom{h}{1}\right]}{\mathbf{P}\binom{h}{1}}$$

for every line process $Z \in D1$ and every $C \in \nabla_0$, where h is one of the two horizontal windows h_1, h_2. The analog of (4.3) happens to be

$$\Pi_h(C) \;=\; \int d\mathbf{P} \sum_{\chi_i} \sin(\chi_i, \gamma) \int_{\chi_i} I_C(t_u Z)\, du. \tag{4.8}$$

From (4.3) and (4.8) we conclude that

$$\Pi_v(C) \;=\; [\lambda(v)]^{-1}\, \mathbf{E}_h\, |\cot\psi|\, I_C(Z), \tag{4.9}$$

where $\mathbf{E}_h$ stands for the expectation with respect to measure Π_h, while $I_C(Z)$ is the usual indicator function of the event $C \in \nabla$, and ψ is the direction of the line through the endpoint of γ that exists with Π_h-probability 1.

The counterpart of Lemma 4.2 states that for $Z \in D2$

$$\mathbf{P}(H) \;=\; S_{hh}(\alpha)\,\varepsilon^2 \;+\; o(\varepsilon^2),$$

where $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, and the existence of the limit

$$\Pi_{hh}(C) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbf{P}(C\cap H)}{\mathbf{P}(H)}.$$

The analogs of (4.3) and (4.8) for $\Pi_{hh}(C)$ and $\Pi_{vv}(C)$ we write down under an additional assumption that (4.6) holds with probability one.

Given a test interval γ, let a line process $Z \in D2$ satisfy (4.6) with probability 1. Then

$$\Pi_{hh}(C) \;=\; \int d\mathbf{P} \sum_{t_i\in\mathbf{b}} \frac{\sin(g_1^{(i)},\gamma)\,\sin(g_2^{(i)},\gamma)|}{\sin\tau_i}\, I_C(t_i Z),$$

$$\Pi_{vv}(C) \;=\; \int d\mathbf{P} \sum_{t_i\in\mathbf{b}} \frac{|\cos(g_1^{(i)},\gamma)|\,|\cos(g_2^{(i)},\gamma)|}{\sin\tau_i}\, I_C(t_i Z),$$

implying

$$\Pi_{vv}(C) \;=\; [S_{vv}(\alpha)]^{-1}\, \mathbf{E}_{hh}|\cot\psi_1|\,|\cot\psi_2|\; I_C(Z), \tag{4.10}$$

where S_{vv} is given by (3.3), $\mathbf{E}_{hh}$ stands for the expectation with respect to Π_{hh}, and ψ_1, ψ_2 are the directions of the two lines through the two endpoints of γ that exist with Π_{hh}-probability 1.

5. "Palm equations" for vertical and horizontal windows

For the probability distribution $\mathbf{P}$ of a translation invariant Z, we reasonably write

$$p_k(l,\alpha) \;=\; \mathbf{P}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix},$$

where l is the length and α is the (horizontal) direction of γ. The Lemmas 3,4 refer to the following differential operators acting on $p_k(l,\alpha)$.

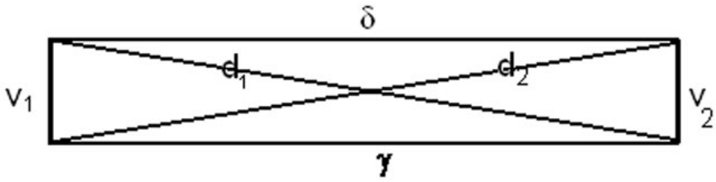

Рис. 3

Let the segments γ, σ, d_1 and d_2 be as on Fig. 3. After appropriate choice of positive rotation in the space of planar directions α we have

$$\lim_{l\to 0}(\lambda(v)\,|v|)^{-1}\left[\mathbf{P}\binom{d}{k}-\mathbf{P}\binom{\gamma}{k}\right]=\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial\alpha}.$$

By formal Taylor expansion we find ($\delta =$ the angle between γ and d_2 is $\varepsilon\, l^{-1}+o(\varepsilon)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}\left[\mathbf{P}\binom{d_1}{k}-\mathbf{P}\binom{\gamma}{k}-\mathbf{P}\binom{\sigma}{k}+\mathbf{P}\binom{d_2}{k}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{p_k(\sqrt{l^2+\varepsilon^2},\alpha+\delta)-2p_k(l,\alpha)+p_k(\sqrt{l^2+\varepsilon^2},\alpha-\delta)}{\varepsilon^2}$$

$$=l^{-1}\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l}+l^{-2}\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial\alpha^2}. \tag{5.1}$$

Generally speaking, both identities are valid under certain smoothness conditions imposed on the function $p_k(l,\alpha)$. However the first identity always holds for $Z\in D1$, while the condition $Z\in D2$ does not guarantee (5.1). So for $Z\in D2$ we speak about additional *smoothness condition* (5.1).

In Lemma 5.3 that follows we can choose d, v, A, O to be either d_1, v_1, A_1, O_1 or d_2, v_2, A_2, O_2 as on Figs. 2, 3.

Lemma 5.1. *If $Z\in D1$, then the first order vertical window Palm equation is valid:*

$$[\lambda(v)\,l]^{-1}\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial\alpha}=$$

$$\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k-1}\cap A\right]+\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k}\cap O\right]-\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k}\cap A\right]-\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k-1}\cap O\right]. \tag{5.2}$$

Proof. We represent $\binom{\gamma}{k}$ as a union of mutually exclusive events

$$\binom{\gamma}{k} = \bigcup_{j\geq 0} \begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & j \end{pmatrix}.$$

By (3.2), when $|v| \to 0$

$$\sum_{j>2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & j \end{pmatrix} = o(|v|),$$

and therefore

$$\mathbf{P}\binom{\gamma}{k} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 1 \end{pmatrix} + o(|v|).$$

Similarly

$$\mathbf{P}\binom{d}{k} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k & 1 \end{pmatrix} + o(|v|).$$

Because γ, d and v are sides of a triangle, a set equality

$$\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & v \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

follows. By subtraction

$$\mathbf{P}\binom{d}{k} - \mathbf{P}\binom{\gamma}{k} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 1 \end{pmatrix} + o(|v|). \tag{5.3}$$

By (3.2) we have

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k-1 & 1\gamma \end{pmatrix} + \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma & v \\ k & 1d \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(v)\,|v|\,\Pi_v \left[\binom{\gamma}{k-1} \cap A\right] + \lambda(v)\,|v|\,\Pi_v \left[\binom{\gamma}{k} \cap O\right] + o(|v|),$$

and similarly

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k-1 & 1\gamma \end{pmatrix} + \mathbf{P}\begin{pmatrix} d & v \\ k & 1d \end{pmatrix} + o(|v|) =$$

$$= \lambda(v)\,|v|\,\Pi_v \left[\binom{\gamma}{k} \cap O\right] + \lambda(v)\,|v|\,\Pi_v \left[\binom{\gamma}{k-1} \cap A\right] + o(|v|).$$

It remains to substitute this into (5.3), divide the result by $|v|$ and calculate the limits. This proves Lemma 5.3. □

In the next lemma we use conditioning by the event V_1 defined in Section 3. Intuitively, $\pi_k(l,\alpha)$ is the conditional probability of $\binom{\gamma}{k}$, conditional upon the event "γ belongs to a line from Z". We say that a line process $Z \in D2$ is orderly if it satisfies (3.4).

Lemma 5.2. *If $Z \in D2$ is orderly and the smoothness condition (5.1) is satisfied, then the limits*

$$\pi_k(l,\alpha) \;=\; \lim_{|h|\to 0} \frac{\mathbf{P}\left[\binom{\gamma}{k} \cap V_1\right]}{\mathbf{P}(V_1)}.$$

exist for $k = 0, 1, 2, \ldots$ and satisfy the second order vertical window Palm equation

(5.4)

$$\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l} + l^{-1}\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2} \;=\; 2\,\rho_1(\alpha)\;[\pi_{k-1}(l,\alpha) \;-\; \pi_k(l,\alpha)] + S_{vv}(\alpha)\,l\;[y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}]\,.$$

where $\pi_{-1}(l,\alpha) \;=\; 0$, while for $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} y_k \;=\; &\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k} \cap A_1 \cap O_2\right] + \Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k} \cap O_1 \cap A_2\right] - \\ &- \Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k} \cap A_1 \cap A_2\right] - \Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k} \cap O_1 \cap O_2\right], \end{aligned}$$

with $y_{-1} = y_{-2} = 0$.

Proof. On the set $[v_1] \cap [v_2]$= lines that hit both v_1 and v_2 we define

$\chi = \chi(g) =$ the segment cut from $g \in \mathbf{G}$ by v_1 and v_2,

$\binom{\chi}{k}_*$ = the lines $g \in [v_1] \cap [v_2]$ for which $\chi(g)$ is hit by k lines from realization Z,

$I_{\binom{\chi}{k}_*}(Z,g)$ = a usual indictor function defined in the (Z,g)-space, $g \in [v_1] \cap [v_2]$.

The function

$$I_k(Z,g) \;=\; I_{[v_1]\cap[v_2]}(g)\, I_{\binom{\chi}{k}_*}(Z,g)$$

we integrate first with respect to dg and then with respect to probability distribution $\mathbf{P}$ of Z. By interchange of the integration order

$$\int d\mathbf{P} \int I_k(Z,g)\,dg \;=\; \int_{[v_1]\cap[v_2]} \mathbf{P}\binom{\chi}{k}\,dg.$$

Both v_i being vertical, as ε tends to 0 we have $\chi \;=\; l + O(\varepsilon^2)$. Therefore (see around (3.4))

$$\int_{[v_1]\cap[v_2]} \mathbf{P}\binom{\chi}{k}\,dg \;=\; \mathbf{P}\binom{\gamma}{k}\,\frac{\varepsilon^2}{l} \;+\; o(\varepsilon^2). \tag{5.5}$$

On the other hand, the set $[v_1] \cap [v_2] \cap \binom{\chi}{k}_* \subset \mathbf{G}$ belongs to the ring $r\{P_i\}$, where we take

$\{P_i\} = \{q_i\} \cup \{p_i\}$ with $\{q_i\}$ = the four endpoints of v_1 and v_2 and $\{p_i\}$ = points where the lines from Z hit v_1, v_2, γ_1 or σ_2. Therefore the integral $\int I_k(Z,g)\,dg$ can be decomposed according to (2.2). So we need the combinatorial coefficients u'_{ij} and u''_{ij} for the set $[v_1] \cap [v_2] \cap \binom{\chi}{k}_*$. As explained in Section 2 above, these coefficients have purely combinatorial nature; they have been put down in [4], pages 262-267 in the section "Averaging a combinatorial decomposition"of Chapter 10.

For instance for the 2-sets $\{P_i, P_j\}$ that belong to the closure of γ (or σ) we have

$u'_{ij} = 0$ if at least one point from $\{P_i, P_j\}$ belongs to the interior of γ (or σ) and

$u''_{ij} = -I_{\binom{\gamma}{k}_*}(Z, \gamma)$ if $\{P_i, P_j\}$ are the two endpoints of γ (the same for σ).

Also, for the 2-sets $\{P_i, P_j\}$ that belong to the closure of d_1 (or d_2) we have

$u'_{ij} = 0$ if at least one point from $\{P_i, P_j\}$ belongs to the interior of d_1 (or d_2) and

$u'_{ij} = I_{\binom{d_1}{k}_*}(Z, d_1)$ if $\{P_i, P_j\}$ are the two endpoints of d_1 (the same for d_2).

Thus the joint contribution of the mentioned 2-sets after averaging (i.e. after integration with respect to $\mathbf{P}$) happens to be, compare with (5.1)

$$\sqrt{l^2+\varepsilon^2}\,\mathbf{P}\binom{d_1}{k} + \sqrt{l^2+\varepsilon^2}\,\mathbf{P}\binom{d_2}{k} - l\,\mathbf{P}\binom{\gamma}{k} - l\,\mathbf{P}\binom{\sigma}{k} =$$

$$\left[l^{-1}p_k(l,\alpha) + \frac{dp_k(l,\alpha)}{dl} + l^{-1}\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Due to (5.5), after dividing by ε^2 and calculating the limit we get the left-hand side of the equation (5.4). The sum of the remaining members is responsible for the right-hand side of (5.4). A detailed derivation contained in [4], pages 262-267 leads to (5.5). We note that the Euclidean motions invariance of $\mathbf{P}$ assumed in [4] automatically guarantees "orderly"behavior of $\mathbf{P}$ in the sense of (3.4) and yields

$$\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

The proof is complete. □

We remark that an alternative proof of Lemma 5.2 can be found in complete detail in [9]. It uses representations of the events $\binom{d_1}{k}$, $\binom{\gamma}{k}$, $\binom{\sigma}{k}$ and $\binom{d_2}{k}$ as unions of the events of the type $\begin{pmatrix} U & v_1 & v_2 \\ k & k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ and an analysis in the style of the proof of Lemma 5.1.

The similar results for $\binom{\gamma}{k}$ in case instead of vertical windows we use horizontal h_1 and h_2 are as follows. If $Z \in D1$, then

$$\frac{d\,p_k(l,\alpha)}{d\,l} = \lim_{l\to 0} \varepsilon^{-1} \left[\mathbf{P}\binom{\gamma\cup h}{k} - \mathbf{P}\binom{\gamma}{k}\right] = \lambda(\alpha)\left[\Pi_h\binom{\gamma}{k-1} - \Pi_h\binom{\gamma}{k}\right]. \tag{5.6}$$

If $Z \in D2$, then with h_1 and h_1 as on Fig. 1

$$\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial l^2} = \lim_{l\to 0} \varepsilon^{-2} \left[\mathbf{P}\binom{\gamma\cup h_1\cup h_2}{k} - \mathbf{P}\binom{\gamma\cup h_1}{k} - \mathbf{P}\binom{\gamma\cup h_2}{k} + \mathbf{P}\binom{\gamma}{k}\right] =$$

$$S_{hh}(\alpha)\left[\Pi_{hh}\binom{\gamma}{k-2} - 2\,\Pi_{hh}\binom{\gamma}{k-1} + \Pi_{hh}\binom{\gamma}{k}\right]. \tag{5.6}$$

By summation, (5.4) implies $2\,\rho_1(\alpha) = \lambda + \lambda''$; hence (5.4) can be called a *decomposition of W.Blaschke's relation* (3.6).

6. Factorization models

The product events $\binom{\gamma}{k} \cap A_2$ and $\binom{\gamma}{k} \cap A_1 \cap A_2$ that appear in Lemmas 3,4 suggest the question: what happens in the simplest case, where on these events the probabilities Π_v and Π_{vv} factorize?

Definition 6.1. *We say that $Z \in D2$ satisfying conditions of Lemma 5.2 belongs to Acute-Obtuse Independence class (or is an AOI model) on (any) test line g_0 of direction α if for every segment $\gamma \subset g_0$*

$$\Pi_v\left[\binom{\gamma}{k}\cap A_2\right] = \Pi_v\binom{\gamma}{k}\,\Pi_v(A_2), \quad \Pi_v\left[\binom{\gamma}{k}\cap O_2\right] = \Pi_v\binom{\gamma}{k}\,\Pi_v(O_2),$$

$$\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k}\cap A_1\cap A_2\right] = \Pi_{vv}\binom{\gamma}{k}\,\Pi_{vv}(A_1)\,\Pi_{vv}(A_2),$$

$$\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k}\cap O_1\cap O_2\right] = \Pi_{vv}\binom{\gamma}{k}\,\Pi_{vv}(O_1)\,\Pi_{vv}(O_2),$$

$$\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k}\cap A_1\cap O_2\right] = \Pi_{vv}\binom{\gamma}{k}\,\Pi_{vv}(A_1)\Pi_{vv}(O_2),$$

$$\Pi_{vv}\left[\binom{\gamma}{k}\cap O_1\cap A_2\right] = \Pi_{vv}\binom{\gamma}{k}\,\Pi_{vv}(O_1)\Pi_{vv}(A_2).$$

All Poisson $Z \in D2$ and their mixtures are in fact AOI models. Given stationary marked point process $\{x_i, \psi_i\}$ on a test line g_0 (see Section 3), to each x_i we apply the transformation $\psi_i \to \pi - \psi_i$ or keep ψ_i intact, according to independent tosses of a coin. In case the limit of $\{x_i, \psi_i\}_d$, as $d \to \infty$ happens to be a line process $Z \in D_2$, then the letter will necessarily be an AOI model. Unsolved problem: can this approach produce AOI models beyond the class of Poisson mixtures, see [15]?

A model Z ∈AOI is Symmetrical if always

$$\Pi_v(A) = \frac{1}{2}, \quad \Pi_v(O) = \frac{1}{2},$$

$$\Pi_{vv}(A_1) = \Pi_{vv}(A_2) = \frac{1}{2}, \quad \Pi_{vv}(O_1) = \Pi_{vv}(O_2) = \frac{1}{2}.$$

In the Symmetrical AOI case (5.2) writes

$$\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha} = 0, \tag{6.1}$$

while (5.4) reduces to

$$\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l} + l^{-1}\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 2\,\rho_1(\alpha)\,[\pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha))]\,. \tag{6.2}$$

It turns out that if additionally, the model Z is directionally stable at α, i.e. if

$$\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0 \quad \text{for} \quad k =, 1, 2, ..., \tag{6.3}$$

then the probabilities $p_k(l,\alpha)$ and $\pi_k(l,\alpha)$ satisfy the equations system

$$\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l} = 2\,\rho_1(\alpha)\,[\pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha)]\,.$$

The additional condition

$$p_k(l,\alpha) = \pi_k(l,\alpha) \;\text{ and }\; \frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad l \in (0,\infty) \tag{6.4}$$

then implies Poissonity of the probabilities $p_k(l,\alpha)$ (with parameter $\lambda(\alpha)l$, see (3.6)). Another model that implies Poissonity of the probabilities $p_k(l,\alpha)$ was considered in [9]; it is defined by the *factorization assumptions* F1,F2 and F3 as below based on above formulae for horizontal windows.

By a remarkable interplay of signs, (4.9) and (5.2) yield

$$\Pi_v\left(\binom{\gamma}{k} \cap A\right) - \Pi_v\left(\binom{\gamma}{k} \cap O\right) = \frac{1}{\lambda(v)}\mathbf{E}_h\, I\binom{\gamma}{k}\cot\psi, \tag{6.5}$$

where I stands for the indicator function of the corresponding event (dependence on Z suppressed). By (4.10) and a similar signs interplay, for the quantities y_k in Lemma 4 we get

$$y_k = [S_{vv}(\alpha)]^{-1}\mathbf{E}_{hh} I\binom{\gamma}{k}\cot\psi_1\cot\psi_2. \tag{6.6}$$

Assumption F1: $\cot\psi$ and I_C as in (4.9), for $C = \binom{\gamma}{k}$ are Π_h-uncorrelated, i.e.

$$\mathbf{E}_h I \binom{\gamma}{k} \cot\psi = \Pi_h \binom{\gamma}{k} \mathbf{E}_h \cot\psi.$$

We have

$$\mathbf{E}_h \cot\psi = (\lambda(\alpha))^{-1} \int \cos\psi f_1(\phi) d\psi = (\lambda(\alpha))^{-1}\lambda'(\alpha)$$

with $\lambda'(\alpha)$ denoting the first derivative in α. By (5.6)

$$\lambda(\alpha)\left[\Pi_h \binom{\gamma}{k-1} - \Pi_h \binom{\gamma}{k}\right] = \frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t},$$

so F1 implies the differential equation

$$\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial\alpha} = t\cdot(\lambda(\alpha))^{-1}\lambda'(\alpha)\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l}.$$

By standard method of characteristics, its general solution has the form

$$p_k(l,\alpha) = q_k(\lambda(\alpha)l), \tag{6.7}$$

where $q_k(\cdot)$ is some function of one argument.

Assumption F2: the random variables $\cot\psi_1\ \cot\psi_2$ and $I\binom{\gamma}{k}$ as in (4.10) are Π_h-uncorrelated, i.e.

$$\mathbf{E}_{hh} I \binom{\gamma}{k} \cot\psi_1 \cot\psi_2 = \Pi_{hh} \binom{\gamma}{k} \mathbf{E}_{hh} \cot\psi_1 \cot\psi_2.$$

Due to (5.7) and (4.10), this brings (5.4) to the form

$$l\,\frac{\partial p_k(l,\alpha)}{\partial l} + \frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial\alpha^2} = 2\,\rho_1(\alpha)\,[\pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha)] + l^2\frac{\partial^2 p_k(l,\alpha)}{\partial l^2}\ \mathbf{E}_{hh}\cot\psi_1\cot\psi_2.$$

By a direct substitution of (6.7) and (3.6) we get, that under F1 and F2

$$(\lambda+\lambda'')\,q_k' + l[(\lambda')^2 - \lambda^2\ \mathbf{E}_{hh}\cot\psi_1\cot\psi_2]\,q_k'' = (\lambda+\lambda'')\,[\pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha)]. \tag{6.8}$$

Assumption F3:

$$\mathbf{E}_{hh}\cot\psi_1\cot\psi_2 = \mathbf{E}_h\cot\psi_1 \mathbf{E}_h\cot\psi_2 = [\lambda'(\alpha)]^2[\lambda(\alpha)]^{-2}.$$

Under F3 the equation (6.8) transforms to

$$q_k' = \pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha). \tag{6.9}$$

This infinite system of equations is easily solved if we assume (6.4)(which in [9] was called *sufficient mixing* condition). Under (6.4), the solution of (6.9) satisfying natural initial conditions $q_0(0) = 1$ and $q_k(0) = 0$ for $k > 0$ yields Poisson probabilities with unit parameter $q_k(t) = \frac{t^k}{k!}\, e^{-t}$. We summarize: *if the three factorization properties F1, F2 and F3 are valid for any direction α and length t, then the property of sufficient mixing (6.4) implies that $p_k(t,\alpha)$ are Poisson probabilities with parameter $\lambda(\alpha)t$.*

7. A model-free result

We start with definition of the quantities $C(a)$ and $S(a)$ posing in the theorem that follows. We put

$$C(\alpha) \;=\; \Pi_{vv}\,[A_1 \cap O_2] + \Pi_{vv}\,[O_1 \cap A_2] \;-\; \Pi_{vv}\,[A_1 \cap A_2] - \Pi_{vv}\,[O_1 \cap O_2]\,,$$

and express $C(\alpha)$ as a double integral over $(0,\pi) \times (0,\pi)$. We identify the direction ϕ_1 with the angle ψ_1 and direction ϕ_2 with the angle ψ_2, assuming that the angle ψ_1 is measured from α (= direction of γ) in the *clockwise* direction while the angle ψ_2 is measured from α in the *anticlockwise* direction. Under this convention for both $i = 1,2$ we get (see Fig. 2)

$$\{\psi_i \in A_i\} = (0, \frac{\pi}{2}) \quad \text{and} \quad \{\psi_i \in O_i\} = (\frac{\pi}{2}, \pi).$$

This yields

$$C(\alpha) \;=\; \int_0^\pi \int_0^\pi \rho_2(\phi_1,\phi_2)\, \cos\psi_1\, \cos\psi_2\, d\phi_1\, d\phi_2.$$

As for $S(\alpha)$, we put $S(\alpha) = S_{hh}(\alpha)$, see (3.3), i.e.

$$S(\alpha) \;=\; \int_0^\pi \int_0^\pi \rho_2(\phi_1,\phi_2)\, \sin\psi_1\, \sin\psi_2\, d\phi_1\, d\phi_2.$$

If we additionally assume rotation invariance, then $S = S(\alpha)$, $C = C(\alpha)$, $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$, $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ are constants and by (3.6) $2\,\rho_1 = \lambda$, where λ is the intensity of hits on test lines of any direction. By τ we denote the angle between the directions ϕ_1 and ϕ_2.

Theorem 7.1. *For every orderly-(3.4) line process $Z \in D2$ that satisfies the smoothness condition (5.1) we have*

$$4\,\rho_1(\alpha)\,\Lambda(\alpha) \;=\; 2\,S(\alpha) + \frac{\partial^2 S(\alpha)}{\partial\alpha^2} \;-\; 2\,C(\alpha). \tag{7.1}$$

If $Z \in D2$ happens to be rotation invariant then $S(\alpha) = S$ and $C(\alpha) = C$ are constants:

$$S \;=\; \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,(\pi - \tau)\,\cos\tau\, d\tau \;+\; \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin\tau\, d\tau, \tag{7.2}$$

$$C \,=\, \int_0^{\pi} \rho_2(\tau)\,(\pi-\tau)\,\cos\tau\,d\tau \,-\, \int_0^{\pi} \rho_2(\tau)\,\sin\tau\,d\tau, \tag{7.3}$$

and the product of the constant values $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ *and* $\lambda = \lambda(\alpha)$ *equals*

$$\lambda\,\Lambda \,=\, \frac{2}{\pi}\,\lambda_Q. \tag{7.4}$$

Proof. For every line process $Z \in D2$ the second moment

$$\sum k^2\, p_k(l,\alpha)$$

can be found by integration in the space $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$:

$$\sum k^2\, p_k(l,\alpha) \,=\, \int_{[\gamma]}\int_{[\gamma]} \rho_2(\phi_1,\phi_2)\,dg_1 dg_2 \,+\, \lambda(\alpha)\,l = \; S(\alpha)\,l^2 \,+\, \lambda(\alpha)\,l, \tag{7.5}$$

where $[\gamma] \,=\, \{g \in \mathbf{G} : g \text{ hits } \gamma\}$ while $\lambda(\alpha)\,l$ is the contribution of the diagonal set $\{g_1 = g_2\}$. We have the identities

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,[\pi_{k-1}(l,\alpha) - \pi_k(l,\alpha)] \,=\, 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_k(l,\alpha) \,+\, \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(l,\alpha) \,=\, 2\,\Lambda(\alpha)\,l \,+\, 1,$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,[y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}] \,=\, 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k \,=$$

$$\Pi_{vv}\,[A_1\cap A_2] + \Pi_{vv}\,[O_1\cap O_2] \,-\, \Pi_{vv}\,[A_1\cap O_2] - \Pi_{vv}\,[O_1\cap A_2] =$$

$$=\, 2\,(S_{vv})^{-1}\,C(\alpha),$$

From (7.5) we get

$$2\,S(\alpha) \,+\, \frac{\lambda(\alpha)}{l} \,+\, \frac{\partial^2 S(\alpha)}{\partial\alpha^2} \,+\, \frac{1}{l}\frac{\partial^2\,\lambda(\alpha)}{\partial\alpha^2} \,=$$

$$2\,\frac{\rho_1(\alpha)}{l}\,[2\,\Lambda(\alpha)\,l \,+\, 1] \,+\, 2\,C(\alpha).$$

Because of the identity (3.6) the above is equivalent to (7.1).

The Case of Rotation Invariant Z. In that case (7.1) reduces to

$$S \,=\lambda\,\Lambda \,+\, C. \tag{7.6}$$

For rotation-invariant Z the calculation of S and C can be reduced to one-dimensional integration, for in that case

$$\rho_2(\phi_1,\phi_2) \,=\, \rho_2(\tau),$$

where $\tau > 0$ is the angle between directions ϕ_1 and ϕ_2. The calculation for S runs as follows.

We consider two cases $\psi_2 = \psi_1 + \tau$ or $\psi_2 = \psi_1 - \tau$, so

$$S \;=\; S_1 \;+\; S_2,$$

where

$$S_1 = \int_0^\pi \sin\psi\, d\psi \int_0^{\pi-\psi} \sin(\psi+\tau)\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; S_{11} \;+\; S_{12},$$

$$S_2 = \int_0^\pi \sin\psi\, d\psi \int_0^{\psi} \sin(\psi-\tau)\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; S_{21} \;-\; S_{22},$$

where in turn

$$S_{11} \;=\; \int_0^\pi \sin^2\psi\, d\psi \int_0^{\pi-\psi} \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; \int_0^\pi \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \int_0^{\pi-\tau} \sin^2\psi\, d\psi,$$

$$S_{12} \;=\; \int_0^\pi \sin\psi\,\cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi-\psi} \sin\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; \int_0^\pi \sin\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \int_0^{\pi-\tau} \sin\psi\,\cos\psi\, d\psi,$$

$$S_{21} \;=\; \int_0^\pi \sin^2\psi\, d\psi \int_0^{\psi} \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; \int_0^\pi \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \int_\tau^{\pi} \sin^2\psi\, d\psi,$$

$$S_{22} \;=\; \int_0^\pi \sin\psi\,\cos\psi\, d\psi \int_0^{\psi} \sin\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; \int_0^\pi \sin\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \int_\tau^{\pi} \sin\psi\,\cos\psi\, d\psi.$$

The interior integrals are easily calculated, so we get

$$S_{11} \;=\; S_{21} \;=\; \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\cos\tau\,\left[\frac{\pi-\tau}{2} \;+\; \frac{\sin 2\tau}{4}\right]\, d\tau,$$

$$S_{12} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\, d\tau,$$

$$S_{22} \;=\; -\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\, d\tau.$$

Since $S \;=\; S_{11} \;+\; S_{12} \;+\; S_{21} \;-\; S_{22}$, we get

$$S \;=\; \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\cos\tau\,\left[\pi-\tau\;+\;\frac{\sin 2\tau}{2}\right]\, d\tau \;+\; \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\, d\tau,$$

which is equivalent to (7.2).

Similarly, the term C writes as

$$C \;=\; C_1 \;+\; C_2,$$

where

$$C_1 \;=\; \int_0^\pi \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi-\psi} \cos(\psi+\tau)\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; C_{11} \;-\; C_{12},$$

$$C_2 \;=\; \int_0^\pi \cos\psi\, d\psi \int_0^{\psi} \cos(\psi-\tau)\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; C_{21} \;+\; C_{22}.$$

We have

$$C_{11} \;=\; \int_0^\pi \cos^2\psi\, d\psi \int_0^{\pi-\psi} \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \;=\; \int_0^\pi \cos\tau\,\rho_2(\tau)\, d\tau \int_0^{\pi-\tau} \cos^2\psi\, d\psi,$$

$$C_{12} = \int_0^\pi \sin\psi\,\cos\psi\,d\psi \int_0^{\pi-\psi} \sin\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\pi \sin\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau \int_0^{\pi-\tau} \sin\psi\,\cos\psi\,d\psi,$$

$$C_{21} = \int_0^\pi \cos^2\psi\,d\psi \int_0^{\psi} \cos\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\pi \cos\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau \int_\tau^{\pi} \cos^2\psi\,d\psi,$$

$$C_{22} = \int_0^\pi \sin\psi\,\cos\psi\,d\psi \int_0^{\psi} \sin\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\pi \sin\tau\,\rho_2(\tau)\,d\tau \int_\tau^{\pi} \sin\psi\,\cos\psi\,d\psi.$$

We find

$$C_{11} = C_{21} = \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\cos\tau\left[\frac{\pi-\tau}{2} - \frac{\sin 2\tau}{4}\right]d\tau,$$

$$C_{12} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\,d\tau,$$

$$C_{22} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\,d\tau,$$

and since $C = C_{11} - C_{12} + C_{21} + C_{22}$, finally

$$C = \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\cos\tau\left[\pi - \tau - \frac{\sin 2\tau}{2}\right]d\tau - \int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin^3\tau\,d\tau,$$

which is equivalent to (7.3).

The last assertion of the theorem 7.1 follows from

$$\lambda\,\Lambda = S - C = 2\int_0^\pi \rho_2(\tau)\,\sin\tau\,d\tau = \frac{2}{\pi}\,\lambda_Q, \tag{7.7}$$

where λ_Q is the intensity of the vertex process $\{Q_i\}$. The proof of the theorem 7.1 is complete.

Let us consider the random vertex process $\{Q_i\}$ we discussed in Section 3. We define a vertex shape as an ordered pair (ϕ_1, ϕ_2) of planar directions to the two lines from Z that meet at a vertex Q_i. Given some direction α, with the typical vertex in $\{Q_i\}$ we associate two random variables

$$s(\alpha) = \frac{\sin(\alpha,\phi_1)\,\sin(\alpha,\phi_2)}{\sin\tau} \quad \text{and} \quad c(\alpha) = \frac{\cos(\alpha,\phi_1)\,\cos(\alpha,\phi_2)}{\sin\tau},$$

where the angles we measure in a way to have $(\alpha,\phi_1) = \psi_1$ and $(\alpha,\phi_2) = \psi_2$, see above, while τ is the angle between directions ϕ_1 and ϕ_2. The following Corollary follows directly from (3.6) and the Theorem 7.1 just proved.

Corollary 7.1. *The conditional intensity $\Lambda(\alpha)$ depends on the translational shape of the typical vertex in $\{Q_i\}$. In fact for every line process $Z \in D2$ that satisfies the conditions of the above theorem*

$$\Lambda(\alpha) = \frac{\lambda_Q}{\lambda(\alpha) + \lambda''(\alpha)}\left[\mathbf{E}_Q\,s(\alpha) + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathbf{E}_Q\,s(\alpha) - \mathbf{E}_Q\,c(\alpha)\right].$$

Список литературы

[1] E. F. Harding and D. G. Kendall, Stochastic Geometry, John Wiley and Sons Ltd (1974).
[2] R. V. Ambartzumian, "Stochastic Geometry from the standpoint of Integral Geometry", Adv. Appl. Prob., **9**, 792 – 823 (1977).
[3] R. V. Ambarzumian, Combinatorial Integral Geometry With Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons (1982).
[4] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability. Cambridge University Press (1990).
[5] R. Davidson, Construction of Line-Processes: Second order Properties. Izvestia Acad. Nauk Arm. SSR, Ser. Mat., **5** (1970) Reproduced in [1].
[6] E. F. Harding and D. G. Kendall, Rollo Davidson, pages 381-384 in [1].
[7] O. Kallenberg, "A counterexample to R.Davidson's conjecture on line processes", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **82**, 301 - -307 (1977).
[8] J. Mecke, "An explicit description of Kallenberg's lattice type Point Process", Math. Nachr., **89**, 185-195 (1979).
[9] R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in Stochastic Geometry", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, English Translation of Izvestia Natsional'noj Akademii Nauk Armenii. Matemaika, **33**, No 4, 2–14 (1998).
[10] Stochastic and Integral Geometry, edited by R.V. Ambartzumian, Acta Applicandae Mathematicae, **9**, Nos. 1-2 (1987)
[11] R. V. Ambartzumian, "The Solution to the Buffon– Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$", Z. Wahrsch. verw. Geb., **27**, 53–74 (1973).
[12] G. S. Sukiasian "Randomizable Point Systems", in [10]
[13] R. V. Ambartzumian, "Random fields of segments and random mosaics on a plane", Proc. sixth Berkley Symp. Math.Stat. Prob, III, 369 – 381 (1972).
[14] R. V. Ambartzumian, "Stereology of random planar segment processes", REND. SEM. MAT.Univers. Pollitecn. Torino, **39**, no. 2, ... (1981).
[15] L. Breiman, "The Poisson tendency in traffic distributions", Ann. Math. Statist., **34**, 308 – 311 (1972).
[16] H. Solomon, P. Wang, "Nonhomogenous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow", Proc. sixth Berkley Symp. Math.Stat. Prob, III, 383 – 399 (1972).

Поступила 4 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 37- 52.

PARALLEL X-RAY TOMOGRAPHY OF CONVEX DOMAINS AS A SEARCH PROBLEM IN TWO DIMENSIONS

R. V. AMBARTZUMIAN

Institute of Mathematics National Academy of Sciences, Armenia
E-mail: *rouben@instmath.sci.am*

Abstract. In 1961, at A.M.S. Symposium on Convexity, P.C. Hammer proposed the following problem: how many X-ray pictures of a convex planar domain **D** must be taken to permit its exact reconstruction? Richard Gardner writes in his fundamental 2006 book [4] that X-rays in four different directions would do the job. The present paper points at the possibility that in certain asymptotical sense X-rays in only three different directions can be enough for approximate reconstruction of centrally symmetric convex domains. The accuracy of reconstruction would tend to become perfect in the limit, as the directions of the three X-rays change, all three converging to some given direction. The analysis leading to that conclusion is based on two lemmas of Section 1 and *Pleijel type identity for parallel X-rays* derived in Sections 2 and 3. These tools together supply a system of two differential equations with respect to two unknown functions that describe the two *branches* of the domain boundary **D**. The system is easily resolved. The solution intended to provide a complete tomography reconstruction of **D**, happens however to depend on a two dimensional parameter, whose "real value"remains unknown. So tomography reconstruction of **D** becomes possible if a satisfactory approximation to that unknown "real value" can be found. In the last section a test procedure for the individual candidates for "approximate real value" of the parameter is described. A uniqueness theorem concerning tomography of circular discs is proved.

MSC2010 numbers: 52A22; 53C65; 60D05;
Keywords: X-ray; tomography; convex planar domain; reconstruction.

1. Two lemmas

In the present paper, $\mathcal{D}$ denotes the class of bounded convex domains **D** with continuously differentiable boundary $\partial\mathbf{D}$ that possesses no linear segments. The space $\mathcal{C}$ of planar directions we identify with $(0, 2\pi)$ converted to a circle, and let $\alpha \in \mathcal{C}$ be a reference direction. In $\mathcal{C}$ we consider the usual angular coordinate $\varepsilon \in (0, 2\pi)$ assuming that ε is measured clockwise from direction α ($\varepsilon = 0$ coincides with direction α).

Let X_ε be the axis of direction ε that contains the origin O in the plane. For each direction $\varepsilon \in \mathcal{C}$ we consider the right system of Cartesian coordinates $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ with x-axis coinciding with X_ε. We will use both notation: $X_\alpha = X_0$.

By $[\mathbf{D}]_\alpha$ we denote the space of chords of $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ that are perpendicular to the direction α. The point $u \in X_\alpha$ where the linear continuation of the chord $\chi \in [\mathbf{D}]_\alpha$ hits X_α we call the base of $\chi \in [\mathbf{D}]_\alpha$. We denote

$\chi_u =$ the chord from $[\mathbf{D}_\alpha]$ whose base is $u \in X_\alpha$, $|\chi_u| =$ the length of χ_u,

$p_\alpha =$ (open) perpendicular projection of $\mathbf{D}$ on X_α (the range of u).

$\chi_M =$ the longest chord in $[\mathbf{D}_\alpha]$,

$u_M =$ the base of χ_M, $u_M \in X_\alpha$,

$L =$ the left part of p_α separated by u_M,

$R =$ the right part of p_α separated by u_M.

Lemma 1.1. *For any $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ and any choice of α, the longest chord χ_M is unique in $[\mathbf{D}]_\alpha$, while the length function $|\chi_u|$ is strictly monotone increasing on L and strictly monotone decreasing on R.*

A satisfactory proof of Lemma 1.1 can be obtained easily by considering the graphs of the continuous functions $t_1(u)$ and $t_2(u)$ each defined in the interior of p_α:

$t_i(u) =$ tan of the angle between α and the lines tangent to the boundary $\partial\mathbf{D}$ at the upper $(i = 2)$ or lower $(i = 1)$ endpoints of $\chi(u)$. The two graphs can have only one intersection point, whose projection on X_a happens to be u_M.

Without loss of generality, we assume that the convex domain $\mathbf{D}$ lies totally in the half-plane $y_\alpha > 0$, i.e. in the left half-plane bounded by X_α. Thus we can speak about upper and lower endpoint of χ_u for every $u \in p_\alpha$. *Elevation* of a chord $\chi \in [\mathbf{D}]_\alpha$ is defined to be the y_α-value of the lower endpoint of χ.

By Lemma 1.1, the following two "elevation functions"are well defined on the interval $(0, M)$:

$U_L(l) =$ elevation of the chord χ_u that satisfies $|\chi_u| = l$ and $u \in L$,

$U_R(l) =$ the same for $u \in R$.

Lemma 1.2. *For every $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ the identity*

$$U_L(l) - U_R(l) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^l \rho_\alpha(\tau)\, d\tau$$

is valid for every $l \in (0, M)$, where $\rho_\alpha(\tau)$ is the distance between two chords from $[\mathbf{D}_\alpha]$ of common length τ.

The remaining part of the section contains a proof of Lemma 1.2.

Let $f(T)$ be a sufficiently smooth function defined for $T > 0$ which vanishes identically in some neighborhood of $T = 0$. We consider the integral

$$J(\varepsilon) \;=\; \int_{[\mathbf{D}]_\varepsilon} f(|\chi|)\, dx_\varepsilon \;=\; \int_{p_\varepsilon} f(T(x_\varepsilon))\, dx_\varepsilon, \tag{1.1}$$

where

$p_\varepsilon =$ the perpendicular projection of $\mathbf{D}$ on X_ε,

$dx_\varepsilon =$ the Lebesgue measure on X_ε (equivalently, on $[\mathbf{D}]_\varepsilon$)),

$T(x_\varepsilon) := |\chi| =$ the length of the chord $\chi \in [\mathbf{D}]_\varepsilon$ whose base is $x_\varepsilon \in X_\varepsilon$.

The purpose is to calculate the first derivative of $J(\varepsilon)$ at $\varepsilon = 0$.

For given ε let us consider the map that sends X_ε into X_0:

$$x_\varepsilon \to u, \quad u \in X_0, \quad \text{with Jacobian } \frac{dx_\varepsilon}{dx_0} = \cos\varepsilon,$$

where u denotes the point where the line perpendicular to ε and containing x_ε hits X_0. To change the integration variable in (1.1) from x_ε to u we write

$T_\varepsilon(u) =$ the length of the chord $\chi \in [\mathbf{D}]_\varepsilon$ whose base $x_\varepsilon \in X_\varepsilon$ maps into $u \in X_0$,

in particular

$T_0(u) =$ the length of the chord $[\mathbf{D}]_0$ whose base is $u \in X_0$, $[\mathbf{D}]_0 = [\mathbf{D}]_\alpha$.

For every ε from sufficiently small neighborhood of direction 0 the assumption as regards $f(u)$ allows to replace p_ε in (1.1) by $p_0 \subset X_0$, therefore for $\varepsilon \to 0$

$$J(\varepsilon) \;=\; \cos\varepsilon \int_{p_0} f(T_\varepsilon(u))\, du \;=\; \int_{p_0} f(T_\varepsilon(u))\, du \;+\; o(\varepsilon^2) \tag{1.2}$$

(for simplicity we write du instead of dx_0). In (1.2) the integration domain does not depend on ε, so the derivative of $J(\varepsilon)$ at $\varepsilon = 0$ happens to be

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(0) \;=\; \int_{p_0} \frac{df(T_0(u))}{d\varepsilon}\, du. \tag{1.3}$$

Let $g_\varepsilon(u)$ be the axis perpendicular to direction ε that contains $u \in p_0$. In the Cartesian system that correspond to $\varepsilon = 0$, the coordinates of the two $(i = 1, 2)$ points where $g_\varepsilon(u)$ meets $\partial\mathbf{D}$ let be

$$x_{0i} = x_{0i}(\varepsilon, u), \quad y_{0i} = y_{0i}(\varepsilon, u), \quad \text{and}$$

$$r_i \;=\; r_i(u, \varepsilon) = \text{ the distance from } u \text{ to } (x_{0i}, y_{0i}),\ r_2 \ge r_1 \ge 0.$$

By $T_\varepsilon(u) \;=\; r_2(u, \varepsilon) \;-\; r_1(u, \varepsilon)$ we have

$$\frac{dT_\varepsilon(u)}{d\varepsilon} \;=\; \frac{d(r_2 - r_1)}{d\varepsilon} \;=\; \frac{\partial r_2}{dx_{02}} \frac{dx_{02}}{d\varepsilon} \;-\; \frac{\partial r_1}{dx_{01}} \frac{dx_1}{d\varepsilon}.$$

We note that for $\varepsilon = 0$ and $i = 1, 2$

$$\frac{\partial r_i(u,0)}{dx_{i0}} = \frac{\partial Y_i(u)}{du}, \qquad \frac{dx_{0i}(0,u)}{d\varepsilon} = Y_i(u),$$

where by definition

$$Y_1(u) = r_1(u,0) \quad \text{and} \quad Y_2(u) = r_2(u,0).$$

It is important, that the graphs of the functions $Y_1(u)$ and $Y_2(u)$, both defined on p_0 and satisfying $Y_1(u) \leq Y_2(u)$, represent the two *branches* of $\partial\mathbf{D}$ that project on p_0. Now (1.3) takes the form

$$\text{(1.4)} \qquad \frac{d}{d\varepsilon} J(0) = \int_{p_0} f'(T_0(u))\, W(u)\, du,$$

where

$$W(u) = Y_2(u)\, \frac{dY_2(u)}{du} - Y_1(u)\, \frac{dY_1(u)}{du}.$$

A standard δ - formalism permits to calculate the integral in (1.4) if for some $\tau > 0$ we choose

$$\text{(1.5)} \qquad f(z) = h_\tau(z) \text{ where } h_\tau(z) = 0 \text{ for } z < \tau, \text{ and } h_\tau(z) = 0 \text{ otherwise},$$

in which case $h'_\tau(z) = \delta_\tau(z)$. For that choice

$$J(\varepsilon) = \rho_\alpha(\tau) = \text{the distance between } \chi_1 \text{ and } \chi_2,$$

where χ_1 and χ_2 are the two parallel chords of $\mathbf{D}$, both of length τ and perpendicular to direction ε. We have

$$\text{(1.6)} \qquad \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \rho_\alpha(\tau) = \int_{p_0} \delta_\tau(T_0(u))\, W(u)\, du.$$

Therefore

$$\int_{p_0} \delta_\tau(T_0(u))\, W(u)\, du = \int_L \delta_\tau(T_0(u))\, W(u)\, du + \int_R \delta_\tau(T_0(u))\, W(u)\, du =$$

$$\int_0^M \delta_\tau(T)\, W(x)\, \frac{du_L(T)}{dT}\, dT + \int_M^0 \delta_\tau(T)\, W(x)\, \frac{du_R(T)}{dT}\, dT,$$

where for $T > 0$

$u_L(T) =$ the point from L for which $T_0(u_L(T)) = T$,

$u_R(T) =$ the point from R for which $T_0(u_R(T)) = T$.

Thus

$$\text{(1.7)} \qquad \int_{p_0} \delta_\tau(T_0(u))\, W(u)\, du = W(u_L(\tau))\, \frac{du_L(\tau)}{d\tau} - W(u_R(\tau))\, \frac{du_R(\tau)}{d\tau}.$$

From (1.4) we find

$$\frac{dY_i(u_L(\tau))}{du}\, \frac{du_L(\tau)}{d\tau} = \frac{dU_{iL}(\tau)}{d\tau},$$

$$\frac{dY_i(u_R(\tau))}{du}\,\frac{du_R(\tau)}{d\tau} \;=\; \frac{dU_{iR}(\tau)}{d\tau},$$

where $i = 1, 2$ while

$$U_{iL}(\tau) \;=\; Y_i(u_L(\tau)) \quad \text{and} \quad U_{iR}(\tau) \;=\; Y_i(u_R(\tau)). \tag{1.8}$$

Taken together with (1.6) this implies

$$\frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau) \;=\; \left[U_{2L}(\tau)\,\frac{dU_{2L}(\tau)}{d\tau} \;-\; U_{1L}(\tau)\,\frac{dU_{1L}(\tau)}{d\tau}\right] -$$

$$-\left[U_{2R}(\tau)\,\frac{dU_{2R}(\tau)}{d\tau} \;-\; U_{1R}(\tau)\,\frac{dU_{1R}(\tau)}{d\tau}\right], \tag{1.9}$$

We integrate (1.9) in $d\tau$ from 0 to some $T > 0$. Using formulae like

$$\int_0^T U_{2L}(\tau)\,\frac{dU_{2L}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \;=\; \int_0^{U_{2L}(T)} y\,dy \;=\; \frac{1}{2}\,U_{2L}^2(T),$$

we get

$$2\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau)\,d\tau \;=\; U_{2L}^2(T) \;-\; U_{1L}^2(T) \;-\; U_{2R}^2(T) \;+\; U_{1R}^2(T).$$

On the other hand

$$U_{2L}(T) \;=\; U_{1L}(T) \;+\; T, \qquad U_{2R}(T) \;=\; U_{1R}(T) \;+\; T,$$

yielding

$$2\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau)\,d\tau \;=\; [U_{1L}(T) \;+\; T)]^2 - U_{1L}^2(T) - \;[U_{1R}(T) \;+\; T]^2 \;+\; U_{1R}^2(T) \;=$$

$$2U_{1L}(T)\,T \;-\; 2U_{1R}(T)\,T \;=\; 2T\,[U_{1L}(T) \;-\; U_{1R}(T)],$$

or finally

$$U_{1L}(T) \;-\; U_{1R}(T) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau)\,d\tau. \tag{1.10}$$

which coincides with the assertion of the Lemma 1.2.

2. Totally disintegrated Pleijel identity

We will be considering subsets of the space

$\mathbf{G}$ = the space of lines in the plane, the lines $g \in \mathbf{G}$ carry no orientation. We prefer to use the "translational"(ϕ, t) parametrization of lines $g \in \mathbf{G}$:

ϕ = direction of g, $\phi \in (0, \pi)$ converted to a circle and

t = signed distance of the line g from the origin ($t \in (-\infty, \infty)$ can be identified with a translation of g in the direction perpendicular to ϕ). In $\mathbf{G}$ there exists unique (up to a constant factor) measure dg invariant with respect to the Euclidean motions. In the (ϕ, t) parametrization

$$dg = d\phi\, dt, \tag{2.1}$$

where $d\phi$ is the uniform measure in the space of planar directions (identified as usual with the Lebesgue measure on the interval $(0, \pi)$), dt is the Lebesgue measure on $(-\infty, \infty)$.

Let $\mathbf{D}$ be a *strictly convex* bounded domain in the plane $\mathbb{R}^2$ with piecewise-smooth boundary $\partial\mathbf{D}$. From now on

$[\mathbf{D}]$ = the space of linear chords of $\mathbf{D}$, $[\mathbf{D}] \subset \mathbf{G}$,

$g \in [\mathbf{D}]$ = a linear chord of $\mathbf{D}$,

dg = restriction of the measure (2.1) to $[\mathbf{D}]$.

χ = length of the chord g: $\chi = \chi(g) = |g|$) (notation preferred in [1] and [2]).

Clearly the linear chords $g \in [\mathbf{D}]$ inherit the (ϕ, t) parametrization from lines in $\mathbb{G}$. We also denote

$[\mathbf{D}]*$ = the space of oriented linear chords of $\mathbf{D}$,

ν = an element of $[\mathbf{D}]*$, we can speak about the *start* endpoint of ν on $\partial\mathbf{D}$,

$[\nu]$, $[g]$ = the set of chords that hit ν or g (so $[\nu], [g] \subset [\mathbf{D}]$),

$[\nu]*$, $[g]*$ = the set of oriented chords that hit ν or g (i.e. $[\nu]*, [g]* \subset [\mathbf{D}]*$).

The identity (2.2) below essentially presents the combinatorial solution of the Buffon–Sylvester problem for n needles (see [1] and [2], pages 107-109).

We set

$\nu_1, ..., \nu_n$ = a sequence of elements of $[\mathbf{D}]*$, we assume that $n > 1$,

$I_m(\nu) = 1$ if ν is hit by m chords from the collection $\nu_1, ..., \nu_n$, otherwise $I_m(\nu) = 0$ (we say that ν hits a chord g if ν contains exactly one point from the interior of g).

$$A = \bigcap_1^n [\nu_i] \subset [\mathbf{D}]$$

and choose some chord $g_0 \in [\mathbf{D}]$. In the space $[\mathbf{D}]$ we consider the delta–measure δ_0 concentrated on g_0. Assuming that no three endpoints of the chords $\nu_1, ..., \nu_n$ lie on a line and that g_0 avoids all these endpoints, the “four indicator formula” yields

$$2\delta_0(A) = 2\sum_{i=1}^n I_{n-1}(\nu_i)\,\delta_0([\nu_i]) + \sum I_{n-2}(d_i)\,\delta_0([d_i]) - \sum I_{n-2}(s_i)\,\delta_0([s_i]). \tag{2.2}$$

Here each d_i or s_i is a segment joining a pair of endpoints of two different chords, say ν_r and ν_l from the collection $\nu_1, ..., \nu_n$. By definition

d_i if ν_r and ν_l lie in different half-planes with respect to continuation of d_i,

s_i if ν_r and ν_l lie in one half-plane with respect to continuation of s_i.

On the space $([\mathbf{D}]*)^n$ of sequences $\nu_1, ..., \nu_n$, we consider the product measure

$$d\nu_1 ... d\nu_n,$$

where each measure $d\nu_i$ (a measure on $[\mathbf{D}]*$) locally coincides with dg (a measure on $[\mathbf{D}]$).

We integrate (2.2) over $([\mathbf{D}]*)^n$ with respect to that product measure. First

$$2\int ... \int \delta_0(A)\, d\nu_1 ... d\nu_n = 2\prod_1^n \int_{[g_0]*} d\nu_i = 2\,(4\chi_0)^n, \tag{2.3}$$

where $\chi_0 = |g_0|$ is the length of the chord g_0. Using symmetry we find

$$2\int ... \int \sum_{i=1}^n I_{n-1}(\nu_i)\, \delta_0([\nu_i])\, d\nu_1 ... d\nu_n \;=\; 2n\int_{[g_0]_*} d\nu_1 \int ... \int I_{n-1}(\nu_1)\, d\nu_2 ... d\nu_n \;=$$

$$= 4n\int_{[g_0]} (4\chi)^{n-1}\, dg. \tag{2.4}$$

In the next integral calculation we use the expression of $d\nu$ in the coordinates

$l =$ the start endpoint of ν, $l \in \partial\mathbf{D}$,

$\psi =$ the angle between ν and the line tangent to $\partial\mathbf{D}$ at l, that is

$$dg \;=\; \sin\psi\, d\psi\, dl,$$

where dl is the length measure on $\partial\mathbf{D}$. We find (a similar calculation is contained in [1] as well as in [2], page 155)

$$\int \Big[\sum I_{n-2}(d_i)\, \delta_0([d_i]) \;-\; \sum I_{n-2}(s_i)\, \delta_0([s_i])\Big]\, d\nu_1 ... d\nu_n \;=$$

$$= -\,8n(n-1)\left[\int_{L_1}\int_{L_2} + \int_{L_2}\int_{L_1}\right] (4\chi)^{n-2}\, \cos\beta_1\, \cos\beta_2\, dl_1\, dl_2 \;=$$

$$= -\,4n(n-1)\int_{[g_0]} (4\chi)^{n-1}\, \cot\beta_1\, \cot\beta_2\, dg, \tag{2.5}$$

where in the second line

$\chi =$ the length of linear chord between l_1 and l_2 (the chord l_1, l_2),

$L_1, L_2 =$ the parts of $\partial\mathbf{D}$ separated by the endpoints of g_0,

$dl_i =$ length measures on L_i, $i = 1, 2$,

$\beta_1, \beta_2 =$ the angles between the chord l_1, l_2 and $\partial\mathbf{D}$ at its endpoints l_1 and l_2, both taken to lie within $\partial\mathbf{D}$, in the same half-plane with respect to (continuation of) l_1, l_2.

In the third line of (2.5) we used the Jacobian relation (see [2], page 50)

$$dg \;=\; \frac{\sin\beta_1\, \sin\beta_2}{\chi}\, dl_1 dl_2.$$

Putting together (2.3), (2.4) and (2.5), after deleting the common factor 4^n we obtain what we now call the *totally disintegrated Pleijel identity*

$$\chi_0^n = \frac{n}{2}\int_{[g_0]} \chi^{n-1}\, dg - \frac{1}{2}\, n\,(n-1) \int_{[g_0]} \chi^{n-1} \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dg. \tag{2.6}$$

This identity was used for derivation of "disintegrated iso-perimetric inequality" in [3], in the context of point X-ray theory; as for parallel X-rays, they require one more integration.

3. Integration over a bundle of parallel chords

Given a planar direction $\alpha \in (0, \pi)$, we consider the following subset of $[\mathbf{D}]$:

$[\mathbf{D}]_\alpha =$ the family of parallel chords of $\mathbf{D}$ that have direction perpendicular to α.

The chords from $[\mathbf{D}]_\alpha$ are parameterized solely by the translational parameter t already mentioned above. For simplicity we suppress the explicit mentioning of α in the notation:

$dt =$ one dimensional Lebesgue measure on $[\mathbf{D}]_\alpha$,

$g_t =$ the chord from $[\mathbf{D}]_\alpha$ that corresponds to t,

$\chi_t =$ the length of g_t.

We put down (2.6) for a chord $g_t \in [\mathbf{D}]_\alpha$:

$$(\chi_t)^n = \frac{n}{2}\int_{[g_t]} \chi^{n-1}\, dg - \frac{1}{2}\, n\,(n-1) \int_{[g_t]} \chi^{n-1} \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dg. \tag{3.1}$$

This being an identity valid for every t, we integrate it by the measure dt. First we mention that for any $g \in [\mathbf{D}]$ integration of the indicator function $I_{[g_t]}(g)$ yields

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} I_{[g_t]}(g)\, dt = \chi \sin\widehat{\alpha\phi},$$

where $\widehat{\alpha\phi}$ is the angle between the direction α and the direction ϕ of the chord g, while $\chi = |g|$. Hence by an interchange of integration order, for any function $f(g)$ defined on $[\mathbf{D}]$ we get

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} dt \int_{[g_t]} f(g)\, dg = \int_{[\mathbf{D}]} f(g)\, dg \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} I_{[g_t]}(g)\, dt = \int_{[\mathbf{D}]} f(g)\, \chi \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg.$$

Therefore integrating (3.1) yields

(3.2)
$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n\, dt = \frac{n}{2}\int_{[\mathbf{D}]} \chi^n \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg - \frac{n(n-1)}{2}\int_{[\mathbf{D}]} \chi^n \cot\beta_1 \cot\beta_2 \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg.$$

By (1.1) the identity (3.2) can be written as

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n\, dt = \frac{n}{2}\int_0^\pi \sin\widehat{\alpha\phi}\, d\phi \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n\, dt - \tag{3.3}$$

$$- \frac{n(n-1)}{2} \int_0^\pi \sin \widehat{\alpha\phi}\, d\phi \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \cot \beta_1 \cot \beta_2 \, dt.$$

Clearly the relation (3.3) has a specific form

$$Z(\alpha) = \int_0^\pi z(\phi) \sin \widehat{\alpha\phi}\, d\phi,$$

where $Z(\alpha)$ and $z(\phi)$ are some functions defined on $(0, \pi)$. From the last equation $z(\phi)$ can be found in terms of $Z(\alpha)$ (see [2], pages 30-31): in operator notation,

$$z(\phi) = \mathcal{A}\{Z(\alpha)\},$$

the operator $\mathcal{A}$ being

$$\mathcal{A}\{Z(\alpha)\} = \frac{1}{2}\left[Z(\phi) + \frac{d^2}{d\phi^2} Z(\phi)\right],$$

with the second derivative of $Z(\alpha)$ defined on the basis of the $(0, \pi)$ model of the space of planar directions. In the case (3.3) we have

$$Z(\alpha) = \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n \, dt$$

and

$$z(\phi) = \frac{n}{2} \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \, dt - \frac{n(n-1)}{2} \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n.$$

If the boundary $\partial\mathbf{D}$ is sufficiently smooth, then the operator $\mathcal{A}$ is well defined: a sufficient condition is that the tangent direction should change continuously along $\partial\mathbf{D}$, and this property we will assume below. So we get

$$\int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \, dt + \frac{d^2}{d\phi^2} \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \, dt =$$

$$n \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \, dt - n(n-1) \int_{[\mathbf{D}]_\phi} (\chi_t)^n \cot \beta_1 \cot \beta_2 \, dt.$$

Thus for every integer $n > 1$ and every direction α (to replace ϕ) we come to what we call the *Pleijel type identity for parallel X-rays*

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n \, dt - \frac{1}{n-1} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n \, dt = n \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t)^n \cot \beta_1 \cot \beta_2 \, dt.$$

For sufficiently broad class of functions $f(x)$ it implies

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} f(\chi_t) \, dt - \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} F(\chi_t) \, dt = \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} f'(\chi_t) \, \chi_t \cot \beta_1 \cot \beta_2 \, dt, \tag{3.4}$$

where

$$F(x) = x \int_0^x \frac{f(u)}{u^2} \, du.$$

The identity (3.4) remains valid for certain "generalized functions"as well. First we choose the function $f(u)$ in (3.4) to be

$$f(u) = h_T(u), \tag{3.5}$$

where for some $T > 0$

$$h_T(u) = 0 \quad \text{if} \quad u < T, \quad \text{and} \quad h_T(u) = 1 \quad \text{if} \quad u > T.$$

Then by standard formalism

$$f'(u) = \delta_T(u) = \text{ the usual delta-function concentrated on } T$$

and

$$F(x) = x \int_0^x \frac{h_T(u)\, du}{u^2} = x\, h_T(x) \int_T^x \frac{du}{u^2},$$

i.e.

$$F(x) = \frac{x - T}{T}\, h_T(x).$$

Hence in case of (3.5) the identity (3.4) takes the form

(3.6)

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} h_T(\chi_t)\, dt - \frac{1}{T}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t - T)\, h_T(\chi_t)\, dt = \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} \delta_T(\chi_t)\, \chi_t \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dt.$$

We consider the functions

$\rho_\alpha(T) =$ the distance between the two parallel chords from $[\mathbf{D}]_\alpha$ both of length T,

$H_\alpha(T) =$ the area of the part of $\mathbf{D}$ between the two parallel chords of length T as above minus the rectangular area $T\,\rho_\alpha(T)$. We call $H_\alpha(T)$ the "area function". Clearly

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} h_T(\chi_t)\, dt = \rho_\alpha(T) \quad \text{and} \quad \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} (\chi_t - T)\, h_T(\chi_t)\, dt = H_\alpha(T),$$

so (3.6) rewrites as

$$\rho_\alpha(T) - \frac{1}{T}\frac{d^2}{d\alpha^2} H_\alpha(T) = \int_{[\mathbf{D}]_\alpha} \delta_T(\chi_t)\, \chi_t \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dt. \tag{3.7}$$

With this Pleijel-type identity we work in the next section.

4. The differential equations

After writing the right-hand side of (3.7) as

$$\int_L \delta_T(|\chi|)\, |\chi| \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dt + \int_R \delta_T(|\chi|)\, |\chi| \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dt,$$

where L and R are as in Lemma 1 above, in each of the two integrals we make an integration variable change, choosing the chord length $|\chi|$ to replace t. So by the usual δ -formalism (compare with (1.7))

$$\int_{[\mathbf{D}]_\alpha} \delta_T(|\chi|)\,|\chi|\,\cot\beta_1\,\cot\beta_2\,du\;=$$

$$T\,\cot\beta_1^{(L)}\,\cot\beta_2^{(L)}\,\frac{d\,u_L(T)}{dT}\;-\;T\,\cot\beta_1^{(R)}\,\cot\beta_2^{(R)}\,\frac{d\,u_R(T)}{dT}, \tag{4.1}$$

where $u_L(T)$ and $u_R(T)$ are as in Section 1, while the angles $\beta_i^{(L)}, \beta_i^{(R)}$, $i = 1, 2$, correspond to the (unique) chord of length T based in L or R correspondingly.
Preparing the definition below, we make a convention that the vertices of the angles $\beta_i^{(L)}$ and $\beta_i^{(R)}$, $i = 1, 2$, lie on the graph of the corresponding function $Y_i(u)$. While $Y_1(u)$ and $Y_2(u)$ are the two *branches* of $\mathbf{D}$ defined in Section 1, we use the standard writing

$$\frac{d\,Y_i(u_L(T))}{du}\;=\;\text{the value of }\frac{d\,Y_i(u))}{du}\text{ at the point }u\;=\;u_L(T)$$

Another additional convention is that both $\beta_1^{(L)}$ and $\beta_2^{(R)}$ lie to the left of the corresponding chord of length T.

Definition 4.1. *For $i = 1, 2$ we define the functions $s_i(u)$ by the relations*

$$\cot\beta_i^{(L)}\;=\;s_i(u_L(T))\,\frac{d\,Y_i(u_L(T))}{du}\quad\textit{and}\quad\cot\beta_i^{(R)}\;=\;s_i(u_R(T))\,\frac{d\,Y_i(u_R(T))}{du}$$

and put

$$\sigma(u)\;=\;s_1(u)\,s_2(u).$$

The standard geometrical interpretation of a derivative implies

$$\sigma(u)\textit{ attains only values }+1\textit{ or }-1.$$

From the definition of the class $\mathcal{D}$ we conclude that for values of u sufficiently close to the ends of the corresponding p_α necessarily

$$\sigma(u)\;=\;-1.$$

The jumps of $\sigma(u)$ occur exactly at two points u_1 and u_2 uniquely determined by the equations

$$\frac{d\,Y_i(u_i)}{du}\;=\;0,\quad i\;=\;1,2$$

(this corresponds to the idea of exactly two lines of direction α tangent to $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$). So the following lemma is valid.

Lemma 4.1. *For any* $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ *and any direction* α, *the function* $\sigma(u)$ *attains the value* $+1$ *within the interval* $(u_1, u_2) \subset p_\alpha$ *and the value* -1 *in the interior of the remaining part of* p_α.

Writing as appropriate

$$u_L = u_L(T) \quad \text{and} \quad u_R = u_R(T),$$

as well as for every $T \in (0, M)$

$$\Psi_L = \frac{d\,Y_1(u_L)}{du} \quad \text{and} \quad \Psi_R = \frac{d\,Y_1(u_R)}{du},$$

we put (4.1) as

$$\rho_\alpha(T) - \frac{1}{T}\frac{d^2}{d\alpha^2}H_\alpha(T) =$$

$$\sigma(u_L)\,T\,\Psi_L\,\frac{d\,Y_2(u_L)}{du}\,\frac{d\,u_L(T)}{dT} - \sigma(u_R)\,T\,\Psi_R\,\frac{d\,Y_2(u_R)}{du}\,\frac{d\,u_R(T)}{dT}.$$

We also have additional equations valid for every $T \in (0, M)$:

$$\text{(4.2)} \qquad \frac{d\,Y_2(u_L)}{du} = \Psi_L + \frac{d\,T_0(u_L)}{du} \quad \text{and} \quad \frac{d\,Y_2(u_R)}{du} = \Psi_R + \frac{d\,T_0(u_R)}{du},$$

that follow from $Y_2(u) = Y_1(u) + T_0(u)$. This reduces the previous equation to

$$\text{(4.3)} \qquad \rho_\alpha(T) - \frac{1}{T}\frac{d^2}{d\alpha^2}H_\alpha(T) = \sigma(u_L)\,T\,\frac{d\,u_L(T)}{dT}\left[\Psi_L^2 + \Psi_L\,\frac{d\,T_0(u_L)}{du}\right] -$$

$$- \sigma(u_R)\,T\,\frac{d\,u_R(T)}{dT}\left[\Psi_R^2\,\frac{d\,u_R(T)}{dT} + \Psi_R\,\frac{d\,T_0(u_R)}{du}\right].$$

Our purpose is to find Ψ_L and Ψ_R. This will be possible if to (4.3) we add an additional equation for Ψ_L and Ψ_R. We turn to the equation (1.10) and differentiate:

$$\text{(4.4)} \quad \frac{d}{dT}U_{1L}(T) = \frac{d}{dT}U_{1R}(T) + Q(T) \quad \text{with} \quad Q(T) = \frac{d}{dT}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau)\,d\tau\right].$$

Since $U_{1L}(T) = Y_1(u_L)$ identically (compare with (1.8)), we find

$$\frac{dU_{1L}(T)}{dT} = \frac{dY_1(u_L)}{du}\,\frac{du_L}{dT} = \Psi_L\,\frac{du_L}{dT}.$$

This relation remains valid if we replace L by R. Thus the additional equation happens to be

$$\text{(4.5)} \qquad \Psi_L\,\frac{du_L}{dT} = \Psi_R\,\frac{du_R}{dT} + Q(T) \quad \text{or} \quad \Psi_L = \Psi_R\,\frac{du_R}{du_L} + Q(T)\,\frac{dT}{du_L}.$$

Substitution of (4.5) into (4.3) yields the following lemma.

Lemma 4.2. *Given* $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$, *for* $T \in (0, M)$ *the function*

$$\frac{d\,Y_1(u_R)}{du} = \Psi_R$$

satisfies the quadratic equation

$$A\,\Psi_R^2 + B\,\Psi_R + C = 0, \tag{4.6}$$

with coefficients

$$A = \sigma(u_L)\,T\left[\frac{du_R}{du_L}\right]^2 \frac{d\,u_L(T)}{dT} - \sigma(u_R)\,T\,\frac{d\,u_R(T)}{dT},$$

$$B = \sigma(u_L)\,T\,\frac{du_R}{du_L}\,[2\,Q(T) + 1] - \sigma(u_R)\,T,$$

$$C = \sigma(u_L)\,T\,Q^2(T)\,\frac{dT}{du_L} - \left[\rho_\alpha(T) - \frac{1}{T}\frac{d^2}{d\alpha^2}H_\alpha(T)\right],$$

where

$$u_L = u_L(T),\ u_R = u_R(T),\quad \frac{du_R}{du_L}$$

have been defined as functions of T. *After* Ψ_R *is found from (4.6), we can find*

$$\frac{d\,Y_1(u_L)}{du} = \Psi_R\,\frac{du_R}{du_L} + Q(T)\,\frac{dT}{du_L},$$

where

$$Q(T) = \frac{d}{dT}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{d\varepsilon}\rho_\alpha(\tau)\,d\tau\right].$$

5. The problem of tomographic reconstruction of D

In mathematical tomography [4] the function $T_\alpha(u) = T_0(u)$ is called an X-ray of $\mathbf{D}$ perpendicular to the direction α. The quantities that can be calculated on the basis of a given X-ray $T_\alpha(u)$ for some single direction α can be called *single ray.* Thus the functions

(5.1)
$$u_L(T),\ u(T),\quad \frac{d\,u_L(T)}{dT},\quad \frac{d\,u_R(T)}{dT},\quad \frac{du_R}{du_L},\quad \frac{dT(u_L)}{du},\quad \frac{dT(u_R)}{du},\quad \rho_\alpha(T),\quad H_\alpha(T)$$

that appear in the expressions for A, B, C in Lemma 4 are single ray. On the other hand, the functions

$$Q(T) \quad \text{and} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2}H_\alpha(T) \tag{5.2}$$

found in the same expressions are not single ray. From the presence of the directional derivative in the expression for $Q(T)$, we conclude that two X-rays $T_\phi(u)$ in directions close to α would be enough for approximate evaluation of that quantity. That evaluation would tend to become exact in the limit, as the directions of the two X-rays change, both converging to direction α. By the presence of the second directional derivative, evaluation of the second quantity in (5.2) would require knowledge of $T_\phi(u)$ for three values ϕ close enough to α. This evaluation too is of the asymptotically exact nature, similar to the mentioned property of the evaluation of $Q(T)$. These remarks suggest an approach to tomographic reconstruction of $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ postulating that the quantities in (5.1) and (5.2) are "known". However, beyond (5.1)–(5.2) there are discontinuous quantities

$$\nu_L(T) = \sigma(u_L) \quad \text{and} \quad \nu_L(T) = \sigma(u_R) \tag{5.3}$$

on which A, B, C depend. There is another discontinuous function $S(T)$ that also attain only values $+1$ and -1: it appears in the expression for Ψ_R found from (2.8) as

$$\Psi_R(A, B, C, S(T)) = \frac{-B + S(T)\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{5.4}$$

What about them?

By Lemma 4.1, both $\nu_L(T)$ and $\nu_R(T)$ can have exactly 1 jump in the interval $(0, M)$ (for smaller values of T both equal -1). As for $S(T)$, this function may have jumps only at values of T, for which the square root in (5.4) vanishes. This essentially reduces the problem to finding the jump locations for $\nu_L(T)$ and $\nu_R(T)$.

The class of functions $\nu(T)$ defined on the interval $(0, M)$ that attain only values -1 (for smaller values of T) and 1 and possess exactly one points of discontinuity we identify with the interval $(0, M)$. The space of pairs $[\nu_1(T), \nu_2(T)]$ we identify with the square $(0, M) \times (0, M)$. Lemma 4.2 offers an algorithm of *search* within $(0, M) \times (0, M)$, that would permit to find, basing on the quantities (5.1)–(5.2) the pair $[\nu_L(T), \nu_R(T)]$ that approximates

$[\mu_L(T), \mu_R(T)]$ = the element from $(0, M) \times (0, M)$ that really corresponds to $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ under study.

Given a pair $[\nu_L(T), \nu_R(T)]$, we choose an $S(T)$ according to the above remark and calculate $\Psi_R(A, B, C, S(T))$ as in (5.4). By Lemma 4.2, and (4.2) we obtain both functions

$$\frac{dY_1(u)}{du} \quad \text{and} \quad \frac{dY_2(u)}{du}.$$

and with them the two functions $Y_1(u)$ and $Y_2(u)$ (each determined up to a shift perpendicular to direction α). In this way we obtain a map

$$[\nu_L(T), \nu_R(T)] \Rightarrow [Y_1(u),\ Y_2(u)]. \tag{5.5}$$

It is clear, that if $[\nu_L(T), \nu_R(T)] = [\mu_L(T), \mu_R(T)]$, then $Y_1(u)$ would become the lower and $Y_2(u)$ the upper branch of $\partial\mathbf{D}$.

The map (5.5) can be used in a search for a satisfactory approximation for $\sigma_0(u), S_0(T)$. Here some continuous functional $\mathcal{F}$ defined in the space of pairs $[\,Y_1(u),\ Y_2(u)\,]$ can help:

$\mathcal{F}[\,Y_1(u),\ Y_2(u)\,]$ should play the role of distance from the pair $[\,Y_1(u),\ Y_2(u)\,]$ to the set $\mathcal{D}$,

$\mathcal{F}[\,Y_1(u),\ Y_2(u)\,] = 0$ if Y_1 and Y_2 are the upper and lower branches of boundary of some $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$.

The search for $[\nu_L(T), \nu_R(T)]$ approximating $[\mu_L(T), \mu_R(T)]$ based on some concrete $\mathcal{F}$ can be as follows. It is necessary to choose some (sufficiently small) $\varepsilon > 0$ and have a source of test candidate pairs $[\nu_L(T), \nu_R(T)]$. The candidates can be supplied say, by Monte Carlo method as random points in $(0, M) \times (0, M)$, or come from some lattice in that square. Given a candidate pair, $Y_1(u)$ and $Y_2(u)$ are calculated on the basis of (3.1)-(3.2); if $\mathcal{F}[\,Y_1(u),\ Y_2(u)\,] > \varepsilon$, then $[\nu_L(T), \nu_R(T)]$ is rejected, otherwise it is accepted as an approximation for $[\mu_L(T), \mu_R(T)]$. The convex hull of the figure obtained by appropriately shifted graphs of $Y_1(u)$ and $Y_2(u)$ is then accepted as an (approximate) reconstruction of $\mathbf{D}$. This would yield asymptotically exact reconstruction of $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ by means of three parallel X-rays.

Now we give an example where complete tomographic reconstruction of a $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ can be done without described search procedure.

Let for some direction α, some $r > 0$ and every $u \in (-r, r)$

$$T_\alpha(u) = 2\sqrt{r^2 - u^2}, \tag{5.6}$$

and the directional derivatives at α let be identical zero, i.e. for every $T \in (0, 2r)$

$$Q(T) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} H_\alpha(T) = 0 \tag{5.7}$$

Of course, in case of $\mathbf{D} =$ a circular disc $\mathbf{D}$ of radius r with abscissa of the center at $u = 0$ we have those values, but is the contrary assertion valid?

Without difficulty we get

$$U_{1L}(T) = U_{1R}(T), \quad \text{which is the same as} \quad Y_1(u_L) = Y_1(u_R),$$
$$\frac{du_R}{du_L} = -1, \qquad \frac{d\,u_L(T)}{dT} = +\frac{T}{2\,\rho(T)} \qquad \frac{d\,u_R(T)}{dT} = -\frac{T}{2\,\rho(T)},$$

so the functions in Lemma 3 are found to be

$$A = \frac{T^2}{2\,\rho(T)}\,[\,\sigma(u_L) + \sigma(u_R)\,], \quad B = -T\,[\,\sigma(u_L) + \sigma(u_R)\,], \quad C = -\rho(T),$$

implying

$$B^2 - 4AC = 2T^2 [1 + \sigma(u_L)\,\sigma(u_R) + \sigma(u_L) + \sigma(u_R)] = 2T^2 c,$$

where c can attain only values 0 or 4. To keep $\Psi_R(A, B, C, S(T))$ continuous and by Lemma 3, we necessarily have to assume that $c = 0$. Hence

$$\Psi_R(A, B, C, S(T)) = \frac{-B}{2A} = \frac{\rho(T)}{T} = \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}}.$$

Integrating this Ψ_R we get familiar expressions for Y_1 and Y_2 that correspond to a circular disc of radius r. We conclude that the following uniqueness result holds:

Theorem 5.1. *Let for some $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ the X-ray for some direction α be given by (5.6). If for the same α holds (5.7), then necessarily $\mathbf{D}$ is a circular disc of radius r.*

To end the paper, we point at a corollary, probably of interest in convexity theory.

Corollary 5.1. *For every $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ the discriminant $B^2 - 4AC$ is continuous and nonnegative; at the discontinuity points of $S_0(T)$ necessarily $B^2 - 4AC = 0$.*

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry With Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons (1982).

[2] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press (1990).

[3] R. V. Ambartzumian, "Integration of combinatorial decompositions for delta-measures", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **40**, no. 4, 2 – 20 (2005).

[4] R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd ed. (2006)

Поступила 4 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 53-70.

ПРИНЦИП РАНДОМИЗАЦИИ В ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Б. С. НАХАПЕТЯН, Л. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: *nahapet@instmath.sci.am*, *lindakhim@gmail.com*

Аннотация. Приводится общий способ построения многомерных мартингалов. Полученные результаты позволяют расширить область приложения предельных теорем к случайным полям, в частности, к гиббсовским случайным полям.

MSC2010 number: 60G60

Ключевые слова: Мартингалы, гиббсовские случайные поля, рандомизация, предельные теоремы.

1. Введение

Мартингальный метод является одним из самых востребованных в теории случайных процессов, особенно в вопросах сходимости последовательностей случайных величин и в предельных теоремах для сумм случайных слагаемых (см., например, [1] - [4]). В то же время, данный метод, прекрасно зарекомендовавший себя в одномерных задачах, в применении к многомерным системам (случайные поля) пока еще не столь продуктивен.

Стандартное объяснение состоит в том, что обычное определение мартингала существеннейшим образом опирается на свойство абсолютной упорядоченности прямой, тогда как пространственные структуры этим свойством не обладают. По этой причине, например, один из основных способов построения одномерных мартингалов как суммы случайных величин, центрированных условными математическими ожиданиями, в применении к случайным полям приводит к весьма искусственным конструкциям, полезность которых не совсем очевидна.

Отсюда ясно, что для использования мартингального метода в многомерном случае принципиально важно иметь такое определение мартингала, в рамках которого возможно построение достаточно интересных классов случайных объектов, обладающих мартингальным свойством.

В работах [5, 6] приведены весьма широкие классы случайных полей, у которых суммы компонент по возрастающим множествам образуют мартингал (мартингал-разностные случайные поля). Одним из таких классов является класс случайных полей с симметричным фазовым пространством и четными плотностями. Важным является то, что данный критерий мартингальности вполне приложим к гиббсовским случайным полям: гиббсовские случайные поля с симметричным пространством спинов и четным потенциалом являются мартингал-разностями.

В последнее время вопросы, относящиеся к предельным теоремам для многомерных мартингалов, привлекают все большее внимание (см., например, [5] - [13]). Отметим, что для однородных мартингал-разностных случайных полей Центральная Предельная Теорема (ЦПТ) верна при минимальных условиях: существование второго момента и эргодичность (см. [7]). При тех же условиях верна и функциональная предельная теорема (см. [8]). Что касается ЦПТ для гиббсовских случайных полей, то, поскольку в области единственности эти поля эргодичны, то в этой области для мартингал-разностных гиббсовских случайных полей асимптотическая нормальность имеет место. Таким образом, применение мартингального метода позволяет с новой точки зрения рассматривать вопросы, связанные со сферой приложения ЦПТ к гиббсовским случайным полям.

В настоящей работе посредством метода рандомизации существенно обобщается критерий мартингальности, предложенный в работе [5], что позволяет значительно расширить область справедливости предельных теорем (ЦПТ, функциональная и локальная предельные теоремы) для гиббсовских случайных полей.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Случайные поля. Пусть $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ — целочисленная решетка и $X \subset \mathbb{R}^1$ — конечное множество, $|X| < \infty$.

Случайным полем, заданным на $\mathbf{Z}^d$, с фазовым пространством X, будем называть совокупность $(\xi_t) = \left(\xi_t, t \in \mathbf{Z}^d\right)$ случайных величин, каждая из которых принимает значение в X.

Для $S \subset \mathbf{Z}^d$ обозначим через $X^S = \{(x_t, t \in S)\}$ множество конфигураций на S. Для $S = \emptyset$ предполагается, что $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Для любых $S, T \subset \mathbf{Z}^d$, таких, что $S \cap T = \emptyset$ и любых конфигураций $x \in X^S$ и $y \in X^T$ обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T. Для $S \subset T$, $x \in X^T$, обозначим через x_S сужение конфигурации x на S.

Пусть $\Im^{\mathbf{Z}^d}$ —σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $X^{\mathbf{Z}^d}$. Распределением случайного поля (ξ_t) называется вероятностная мера P на $\left(X^{\mathbf{Z}^d}, \Im^{\mathbf{Z}^d}\right)$, такая, что

$$\Pr\left\{\left(\xi_t, t \in \mathbf{Z}^d\right) \in B\right\} = P(B), \qquad B \in \Im^{\mathbf{Z}^d}.$$

Для всех $S \subset \mathbf{Z}^d$ обозначим через $W(S) = \{V \subset S, |V| < \infty\}$ множество всех конечных подмножеств S. При $S = \mathbf{Z}^d$ будем использовать более простое обозначение W. В соответствии с теоремой Колмогорова, задание распределения P случайного поля эквивалентно заданию согласованной системы $\{P_V, V \in W\}$ конечномерных распределений случайного поля, т.е. такой системы, что для всех $I \subset V$, $I, V \in W$

$$\sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) = P_I(x), \qquad x \in X^I,$$

где

$$P_V\left(x_1, ..., x_{|V|}\right) = \Pr\left\{\xi_{t_1} = x_1, ..., \xi_{t_{|V|}} = x_{|V|}\right\}.$$

Случайное поле (ξ_t) называется положительным, если для любого $V \in W$ распределение вероятностей $P_V(x) > 0$ для всех $x \in X^V$, и называется однородным, если для всех $V \in W$ и $a \in \mathbf{Z}^d$ выполняется равенство

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\xi_{t+a} = x_t, t \in V), \qquad x_t \in X, \quad t \in V.$$

Однородное случайное поле (ξ_t) называется эргодическим, если для всех $V, \Lambda \in W$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k \in I_n} P\left(\{\xi_t = x_t, t \in V\} \cap \{\xi_{s+k} = u_s, s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= P\left(\xi_t = x_t, t \in V\right) P\left(\xi_s = u_s, s \in \Lambda\right),$$

где I_n – куб со стороной n, а $x_t, u_s \in X$, $t \in V$, $s \in \Lambda$.

Для случайного поля (ξ_t) и любого $V \in W$ условной вероятностью $q_V^{\bar{x}}(x)$, $x \in X^V$ с граничными условиями $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ называется следующий предел

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \lim_{\tilde{V} \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus V} \frac{P_{\tilde{V} \cup V}\left(\xi_t = x_t, t \in V, \xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}{P_{\tilde{V}}\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}, \tag{2.1}$$

который существует почти всюду. Следуя Добрушину (см. [14, 15]), совокупность $Q = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ будем называть условным распределением случайного поля (ξ_t). Подсистему $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ условного распределения Q случайного поля будем называть его одноточечным условным распределением (см. [16]). Известно (см. [17]), что случайные поля с конечным фазовым пространством имеют по крайней мере одну версию условного распределения Q, для которого пределы (2.1) существуют для всех $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$, $V \in W$. Далее под условным распределением случайного поля мы будем понимать именно такую совокупность пределов (2.1).

Пусть (ξ_t) — случайное поле и $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in W$. Пусть для данного поля $\lim_{n \to \infty} \frac{DS_{V_n}}{n} = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$, где V_n — d-мерный куб со стороной n, $n = 1, 2, \ldots$. Скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_{V_n} - MS_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Предположим, что S_V принимает целочисленные значения, и пусть $j \in \mathbb{Z}$. Скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива Локальная Предельная Теорема (ЛПТ), если

$$\sup_j \left| \sqrt{DS_{V_n}} P\left(S_{V_n} = j\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(S_{V_n} - MS_{V_n}\right)^2}{2DS_{V_n}}\right\}\right| \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Мартингал-разностные случайные поля. Случайное поле (ξ_t) называется мартингал-разностным случайным полем (см. [5]), если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\left|\xi_t\right| < \infty \qquad \text{и} \qquad M\left(\xi_t / \xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Здесь $M\left(\xi_t/\xi_s, s \in \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}\right)$ — условное математическое ожидание ξ_t относительно σ-алгебры, порожденной случайными величинами ξ_s, $s \in \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}$, $t \in \mathbf{Z}^d$.

Мартингал-разностные случайные поля интересны тем, что суммы их компонент S_V образуют мартингал относительно любой возрастающей последовательности конечных множеств решетки $\mathbf{Z}^d$, а ЦПТ для таких полей имеет место при минимальных условиях ([7]).

Теорема 2.1. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое мартингал-разностное случайное поле, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для этого поля справедлива ЦПТ.*

Гиббсовские случайные поля. В основе определения гиббсовских случайных полей обычно лежит понятие потенциала. Совокупность функций

$$\Phi = \left\{\Phi_V(x), x \in X^V, V \in W\right\},$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{J \in W: J \neq \emptyset} \sup_{x \in X^J} |\Phi_J(x)| < \infty,$$

называется потенциалом взаимодействия. Для каждого $V \in W$ и $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus V}$ определим потенциальную энергию

$$U_V^{\bar{x}}(x) = \sum_{J \subset V: J \neq \emptyset} \sum_{\bar{J} \in W(\mathbf{Z}^d \setminus V)} \Phi_{J \cup \bar{J}}(x_J \bar{x}_{\bar{J}}).$$

Рассмотрим совокупность конечномерных распределений вероятностей следующего вида

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \frac{\exp\left\{-U_V^{\bar{x}}(x)\right\}}{\sum\limits_{z \in X^V} \exp\left\{-U_V^{\bar{x}}(z)\right\}}, \qquad x \in X^V, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus V}, V \in W,$$

которая называется гиббсовской спецификацией (см. [14, 15]).

Согласно Добрушину ([15]), гиббсовским случайным полем, отвечающим потенциалу Φ, называется случайное поле, имеющее версию условного распределения, почти всюду совпадающую с гиббсовской спецификацией, построенной по этому потенциалу.

Приведем условия на потенциал, при которых соответствующее гиббсовское случайное поле является мартингал-разностным (см. [5]).

Теорема 2.2. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле с симметричным относительно нуля фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ. Если Φ —четный потенциал, т.е.*

$$\Phi_V(\theta_t x_t, t \in V) = \Phi_V(x_t, t \in V), \qquad V \in W,$$

для всех $\theta_t \in \{1, -1\}$, тогда гиббсовское случайное поле (ξ_t) является мартингал-разностным.

Предельные теоремы для гиббсовских случайных полей играют важнейшую роль в статистической физике, и этой проблематике посвящено большое количество работ (см., например, ([18]–[22]). Следует отметить, что при доказательстве ЦПТ для гиббсовских случайных полей, помимо требования малости нормы потенциала, как правило, накладываются определенные условия и на скорость убывания корреляции. Однако в том случае, когда гиббсовское случайное поле является мартингал-разностным, в этом нет необходимости — для справедливости ЦПТ достаточно, чтобы данное поле обладало эргодическим свойством. Приведем соответствующее утверждение, являющееся следствием теорем 2.1 и 2.2.

Следствие 2.1. *Пусть Φ — четный потенциал, такой, что соответствующее гиббсовское случайное поле (ξ_t) является однородным, эргодическим и $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для данного поля справедлива ЦПТ.*

В работе [20] для гиббсовских случайных полей, соответствующих потенциалам с конечным радиусом действия, показано, что ЛПТ следует из ЦПТ. Таким образом, имеет место и следующий факт.

Следствие 2.2. *Пусть Φ — четный потенциал с конечным радиусом действия, такой, что соответствующее гиббсовское случайное поле (ξ_t) является однородным, эргодическим и $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для данного поля справедлива ЛПТ.*

В дальнейшем нами также будет использоваться введенное в работе [16] определение гиббсовского случайного поля, не использующее понятие потенциала: случайное поле (ξ_t) с распределением P называется гиббсовским, если оно положительно и для каждого $x \in X$ существует строго положительный равномерный по $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ предел

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \qquad t \in \mathbb{Z}^d.$$

Совокупность $\mathfrak{Q}^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ называется одноточечной канонической спецификацией.

Следующая теорема репрезентации показывает эквивалентность приведенных определений гиббсовского случайного поля.

Теорема 2.3. *Если P — гиббсовское случайное поле, то одноточечная каноническая спецификация допускает гиббсовское представление с помощью равномерно сходящегося потенциала. Обратно, если случайное поле имеет версию условного распределения, которое допускает гиббсовское представление с равномерно сходящимся потенциалом, то поле P — гиббсовское.*

3. Рандомизация случайных полей

Рандомизация. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^1$ — конечные множества и $V \in W$. Пусть $\varphi_V : Y^V \to X^V$ — некоторое сюрьективное отображение и $\varphi_V^{-1}(x)$ — прообраз $x \in X^V$ при отображении φ_V.

Обозначим через $R_V^{\varphi} = \left\{R_V^{\varphi,x}, x \in X^V\right\}$ — совокупность распределений вероятностей на Y^V, таких, что для каждого $x \in X^V$

$$R_V^{\varphi,x}(y) > 0, \quad y \in \varphi_V^{-1}(x) \qquad \text{и} \qquad R_V^{\varphi,x}(y) = 0, \quad y \notin \varphi_V^{-1}(x).$$

Такую совокупность R_V^{φ} распределений вероятностей будем называть рандомизацией на Y^V. В дальнейшем для R_V^{φ} и $R_V^{\varphi,x}$ также будут использоваться обозначения R_V и R_V^x соответственно.

Пусть $\hat{P}_V$ — некоторое распределение вероятностей на Y^V. Нетрудно проверить, что функция

$$P_V(x) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y), \qquad x \in X^V, \tag{3.1}$$

является распределением вероятностей на X^V. Рассмотрим обратную задачу — нахождение такого распределения вероятностей $\hat{P}_V$ на Y^V, которое при заданных распределении вероятностей P_V на X^V и отображении φ_V удовлетворяет соотношению (3.1). Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть P_V — некоторое распределение вероятностей на X^V и R_V^{φ} — некоторая рандомизация на Y^V. Тогда функция*

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{z\in X^V} R_V^z(y)\, P_V(z), \qquad y \in Y^V, \tag{3.2}$$

является распределением вероятностей на Y^V, удовлетворяющим при каждом $x \in X^V$ соотношению (3.1).

Обратно, если некоторая функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ при каждом $x \in X^V$ удовлетворяет соотношению (3.1), тогда существует рандомизация R_V^{φ} на Y^V, такая, что

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{z\in X^V} R_V^z(y)\, P_V(z), \qquad y \in Y^V,$$

причем

$$R_V^x(y) = \begin{cases} \hat{P}_V(y)\left(\displaystyle\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)\right)^{-1}, & y \in \varphi_V^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi_V^{-1}(x). \end{cases}$$

Доказательство. Легко убедиться, что функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$, определяемая соотношением (3.2), есть распределение вероятностей. Покажем, что $\hat{P}_V(y)$ удовлетворяет (3.1). Действительно, для каждого $x \in X^V$ имеем

$$\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y) = \sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \sum_{z\in X^V} R_V^z(y) P_V(z) = \sum_{z\in X^V} P_V(z) \sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} R_V^z(y) =$$

$$= P_V(x) \sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} R_V^x(y) = P_V(x).$$

Пусть теперь $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ — некоторая функция, удовлетворяющая соотношению (3.1). Тогда для $x \in X^V$ можем написать

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{P_V(x)} = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{\displaystyle\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)}.$$

Далее, положим $R_V^x(y) = \hat{P}_V(y)\left(\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)\right)^{-1}$ при $y \in \varphi_V^{-1}(x)$ и $R_V^x(y) = 0$ при $y \notin \varphi_V^{-1}(x)$. Тогда

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x)\, R_V^x(y) = \sum_{z\in X^V} P_V(z)\, R_V^z(y), \qquad y \in Y^V.$$

Лемма 3.1 доказана. □

В дальнейшем будем использовать отображение $\varphi_S : Y^S \to X^S$ специального вида, которое при заданном отображении $\varphi : Y \to X$ определяется следующим образом:

$$\varphi_S(y) = \varphi_S((y_t, t \in S)) = (\varphi(y_t), t \in S),$$

$y = (y_t, t \in S) \in Y^S$, $S \subset \mathbf{Z}^d$.

Имеет место следующее свойство рандомизаций.

Лемма 3.2. *Пусть для всех $t \in V$ задана рандомизация $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$ и пусть*

$$R_V^x(y) = \prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t), \tag{3.3}$$

$y = (y_t, t \in V) \in Y^V$, $x = (x_t, t \in V) \in X^V$. *Тогда совокупность $R_V = \{R_V^x, x \in X^V\}$ является рандомизацией на Y^V.*

Доказательство. Действительно, для всех $x \in X^V$ имеем $R_V^x(y) \geq 0$, $y \in Y^V$ и

$$\sum_{y\in Y^V} R_V^x(y) = \sum_{y\in Y^V}\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) = \sum_{y_{t_1}\in Y} R_{t_1}^{x_{t_1}}(y_{t_1}) \ldots \sum_{y_{t_{|V|}}\in Y} R_{t_{|V|}}^{x_{t_{|V|}}}(y_{t_{|V|}}) = 1.$$

Далее, поскольку для всех $x_t \in X$ и $t \in \mathbf{Z}^d$, $R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y_t \in \varphi^{-1}(x_t)$ и $R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y_t \notin \varphi^{-1}(x_t)$, то для всех $x \in X^V$, $\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y \in \varphi_V^{-1}(x)$ и $\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y \notin \varphi_V^{-1}(x)$. □

Рандомизацию $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$ будем называть равномерной, если для всех $x \in X$

$$R_t^x(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi^{-1}(x)|}, & y \in \varphi^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi^{-1}(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Совокупность $R = \{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ рандомизаций R_t на $Y^{\{t\}}$ будем называть однородной, если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$R_t^x(y) = R^x(y), \qquad x \in X, y \in Y.$$

Ассоциированные случайные поля. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть задано случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X, множество Y, отображение $\varphi : Y \to X$ и совокупность рандомизаций $R = \{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$. Тогда существует случайное поле (η_t) с фазовым пространством Y, такое, что для всех $V \in W$*

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V), \qquad x_t \in X, t \in V.$$

Конечномерные распределения вероятностей случайного поля (η_t) имеют вид

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t\in V} R_t^{\varphi(y_t)}(y_t) \cdot P(\xi_t = \varphi(y_t), t \in V), \qquad y_t \in Y,$$

или, что эквивалентно,

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V), \qquad y_t \in \varphi^{-1}(x_t),$$

$x_t \in X$, $t \in V$.

Доказательство. Пусть $\{P_V, V \in W\}$ — совокупность конечномерных распределений случайного поля (ξ_t). Для всех $V \in W$ обозначим

$$R_V^x(y) = \prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t),$$

$y = (y_t, t \in V) \in Y^V$, $x = (x_t, t \in V) \in X^V$. В соответствии с леммой 3.2, совокупность $R_V = \{R_V^x, x \in X^V\}$ является множеством рандомизаций на Y^V. Для каждого $V \in W$ определим функцию

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{x\in X^V} R_V^x(y) P_V(x), \qquad y \in Y^V,$$

которая, в силу леммы 3.1, является распределением вероятностей на Y^V. Покажем, что совокупность конечномерных распределений вероятностей $\{\hat{P}_V, V \in W\}$

согласована по Колмогорову. С учетом согласованности $\{P_V, V \in W\}$, можем написать

$$\sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \hat{P}_V(yw) = \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \sum_{x \in X^I, u \in X^{V \setminus I}} R_V^{xu}(yw) P_V(xu) =$$

$$= \sum_{x \in X^I} \sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} \prod_{t \in I} R_t^{x_t}(y_t) \cdot \prod_{t \in V \setminus I} R_t^{u_t}(w_t) =$$

$$= \sum_{x \in X^I} R_I^x(y) \sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) \sum_{w \in Y^{V \setminus I}} R_{V \setminus I}^u(w) = \sum_{x \in X^I} R_I^x(y) P_I(x) = \hat{P}_I(y).$$

Следовательно, в силу теоремы Колмогорова, существует случайное поле (η_t), для которого $\left\{\hat{P}_V, V \in W\right\}$ является совокупностью конечномерных распределений вероятностей, причем для всех $x \in X^V$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^x(y) P_V(x) = \sum_{x \in X^V} R_V^x(y) P(\xi_t = x_t, t \in V),$$

$y \in Y^V$. Тогда для $y \in \varphi_V^{-1}(x)$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = R_V^x(y) P(\xi_t = x_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V).$$

Далее, в силу Леммы 3.1, для всех $V \in W$ можем написать

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} P(\eta_t = y_t, t \in V), \qquad x \in X^V.$$

С другой стороны, для любого $x \in X^V$ имеем

$$\sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} P(\eta_t = y_t, t \in V) = P\left(\eta_t \in \varphi^{-1}(x_t), t \in V\right) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V).$$

Следовательно, для всех $x \in X^V$

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V).$$

Теорема 3.1 доказана. □

Случайное поле (η_t) назовем ассоциированным со случайным полем (ξ_t) (посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R).

В дальнейшем нам понадобится формула связи условных одноточечных распределений заданного и ассоциированного с ним случайных полей.

Теорема 3.2. *Пусть* $Q_\xi^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (ξ_t), *и* $\hat{Q}_\eta^{(1)} = \left\{\hat{q}_t^{\bar{y}}, \bar{y} \in Y^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (η_t), *ассоциированного с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R. *Тогда*

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot q_t^{\bar{x}}(\varphi(y)), \qquad y \in Y, \tag{3.5}$$

$\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$.

Доказательство. Используя теорему 3.1, для всех $y \in Y$ можем написать

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V \uparrow \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V \cup \{t\}}(\eta_t = y; \eta_s = \bar{y}_s, s \in V)}{P_V(\eta_s = \bar{y}_s, s \in V)} =$$

$$= \lim_{V \uparrow \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot \prod_{s \in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s) \cdot P_{V \cup \{t\}}(\xi_t = \varphi(y), \xi_s = \bar{x}_s, s \in V)}{\prod_{s \in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s) \cdot P_V(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V)} =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot q_t^{\bar{x}}(\varphi(y)),$$

при $\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$. □

Однородность и эргодичность ассоциированного случайного поля. Приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет однородным эргодическим полем.

Теорема 3.3. *Пусть* (ξ_t) *— однородное эргодическое случайное поле и* (η_t) *— случайное поле, ассоциированное с* (ξ_t) *посредством однородной совокупности рандомизаций* R. *Тогда ассоциированное случайное поле* (η_t) *является однородным эргодическим случайным полем.*

Доказательство. Покажем, что (η_t) является однородным случайным полем. Используя результаты теоремы 3.1 и однородность совокупности рандомизаций R, для всех $V \subset \mathbf{Z}^d$ и $a \in \mathbf{Z}^d$ можем написать

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V) =$$

$$= \prod_{t \in V} R^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_{t+a} = x_t, t \in V) = P(\eta_{t+a} = x_t, t \in V),$$

где $x_t \in X$, $y_t \in Y$, $t \in V$. Далее, с учетом эргодичности случайного поля (ξ_t), для всех $V, \Lambda \in W$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k\in I_n} P\left(\{\eta_t = y_t, t \in V\} \cap \{\eta_{s+k} = w_s, s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k\in I_n} \prod_{t\in V} R^{\varphi(y_t)}(y_t) \times$$

$$\times \prod_{s\in\Lambda} R^{\varphi(w_s)}(w_s) P\left(\{\xi_t = \varphi(y_t), t \in V\} \cap \{\xi_{s+k} = \varphi(w_s), s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \prod_{t\in V} R^{\varphi(y_t)}(y_t) P\left(\xi_t = \varphi(y_t), t \in V\right) \prod_{s\in\Lambda} R^{\varphi(w_s)}(w_s) P\left(\xi_s = \varphi(w_s), s \in \Lambda\right) =$$

$$= P\left(\eta_t = y_t, t \in V\right) P\left(\eta_s = w_s, s \in \Lambda\right),$$

где I_n – куб со стороной n и $y_t, w_s \in Y$, $t \in V$, $s \in \Lambda$. □

Ассоциированные мартингал-разностные случайные поля. Приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет мартингал-разностным.

Теорема 3.4. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R. Если для всех $x \in X$ и $t \in \mathbf{Z}^d$*

$$\sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^x(y) = 0, \tag{3.6}$$

тогда случайное поле (η_t) является мартингал-разностным случайным полем.

Доказательство. Пусть $Q_\xi^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$ — одноточечное условное распределение случайного поля (ξ_t). Поскольку случайное поле (η_t) ассоциировано со случайным полем (ξ_t), то, в силу теоремы 3.2, его одноточечные условные вероятности имеют вид

$$q_t^{\bar{y}}(y) = R_t^x(y)\, q_t^{\bar{x}}(x), \qquad y \in \varphi^{-1}(x), x \in X,$$

$\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$. Вычислим условное математическое ожидание случайного поля (η_t). Имеем

$$M\left(\eta_t/\eta_s = \bar{y}_s, s \in \mathbf{Z}^d\setminus\{t\}\right) = \sum_{y\in Y} y \cdot \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) =$$

$$= \sum_{x\in X} \sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{\varphi(y)}(y)\, q_t^{\varphi(\bar{y})}(\varphi(y)) = \sum_{x\in X} q_t^{\bar{x}}(x) \sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{x}(y) = 0,$$

для всех $\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$. Следовательно,

$$M\left(\eta_t/\eta_s, s \in \mathbf{Z}^d\setminus\{t\}\right) = 0.$$

Теорема 3.4 доказана. □

В случае совокупности равномерных рандомизаций, условие (3.6) упрощается.

Следствие 3.1. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций. Если отображение φ и множество Y таковы, что*

$$\sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y = 0, \qquad \text{для всех } x \in X, \tag{3.7}$$

тогда случайное поле (η_t) является мартингал-разностным случайным полем.

Отметим, что совокупность равномерных рандомизаций, определяемых по (3.4), удовлетворяет условиям теоремы 3.3. Таким образом, для ассоциированных случайных полей можно сформулировать следующее следствие из ЦПТ.

Следствие 3.2. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций. Если отображение φ и множество Y удовлетворяют условию (3.7), тогда для (η_t) справедлива ЦПТ.*

Ассоциированные гиббсовские мартингал-разностные случайные поля. Применим полученные результаты к гиббсовским случайным полям. Прежде всего покажем, что случайное поле, ассоциированное с гиббсовским случайным полем, также является гиббсовским.

Теорема 3.5. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле. Тогда ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также является гиббсовским случайным полем.*

Доказательство. Пусть P — распределение случайного поля (ξ_t), компоненты которого принимают значения в множестве X. Тогда, по определению гиббсовского случайного поля, его канонические одноточечные условные вероятности имеют вид

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V\uparrow \mathbf{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \tag{3.8}$$

причем $q_t^{\bar{x}}(x) > 0$, $x \in X$ и сходимость в (3.8) равномерна по $\bar{x}$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $V_0 \in W$, такое, что

$$\sup_{\bar{x}\in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

для всех V, таких, что $V_0 \subset V$.

Пусть компоненты случайного поля (η_t), ассоциированного с (ξ_t) посредством совокупности рандомизаций $R = \left\{R_t, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$, принимают значения в множестве Y. Покажем, что (η_t) также является гиббсовским случайным полем. Понятно, что если поле (ξ_t) — положительно, тогда и ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также будет положительным. Далее покажем, что пределы

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V\uparrow \mathbf{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{\hat{P}_{V\cup\{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)}, \qquad y \in Y, t \in \mathbf{Z}^d,$$

сходятся равномерно по $\bar{y}$, $\bar{y} \in Y^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}$. Воспользовавшись теоремой 3.1 и соотношением (3.5), можем записать

$$\sup_{\bar{y}\in Y^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) - \frac{\hat{P}_{V\cup\{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)} \right| =$$

$$= \sup_{\bar{x}\in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}} \sup_{\bar{y}\in\varphi^{-1}_{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})} \left| R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{R_t^{\varphi(y)}(y)\, R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_V(\bar{x}_V)} \right| =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot \sup_{\bar{x}\in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

где $x = \varphi(y)$, $y \in Y$ и $t \in \mathbf{Z}^d$. □

Приведем условия на потенциал, при которых гиббсовское случайное поле, отвечающее этому потенциалу, будет мартингал-разностным.

Теорема 3.6. *Пусть гиббсовское случайное поле* (η_t) *с фазовым пространством* Y *задается потенциалом* Φ. *Пусть существует разбиение* Π *множества* Y $(Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Y_k,\ Y_i \cap Y_j = \varnothing,\ i \neq j)$, *такое, что*

$$\sum_{y \in Y_k} y = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{3.9}$$

Если потенциал Φ *принимает постоянные значения на элементах разбиения* Π, *т.е. для всех* $V \in W$

$$\Phi_{V \cup \{t\}}(y_t y_V) = \Phi_k(y_V), \qquad y_t \in Y_k, t \in \mathbf{Z}^d, k = \overline{1,n}, \tag{3.10}$$

тогда гиббсовское случайное поле (η_t) *является мартингал-разностным случайным полем.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что при данных условиях потенциальная энергия принимает постоянные значения на элементах разбиения Π. Действительно, пусть $y \in Y_k$. Тогда

$$U_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{V \in W(\mathbf{Z}^d \setminus \{t\})} \Phi_{V \cup \{t\}}(y_t y_V) = \sum_{V \in W(\mathbf{Z}^d \setminus \{t\})} \Phi_k(y_V) = U_{t,k}^{\bar{y}},$$

для всех $k = \overline{1,n}$, $\bar{y} \in Y^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$. Далее, для всех $y \in Y_k$ можем написать

$$q_t^{\bar{y}}(y) = \frac{\exp\left\{U_t^{\bar{y}}(y)\right\}}{\sum\limits_{z \in Y} \exp\left\{U_t^{\bar{y}}(z)\right\}} = \frac{\exp\left\{U_{t,k}^{\bar{y}}\right\}}{\sum\limits_{z \in Y} \exp\left\{U_t^{\bar{y}}(z)\right\}} = q_{t,k}^{\bar{y}}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Тогда для всех $\bar{y} \in Y^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbf{Z}^d$

$$M\left(\eta_t / \eta_s = \bar{y}_s, s \in \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}\right) = \sum_{y \in Y} y \cdot q_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{y \in Y_k} y \cdot q_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{k=1}^{n} q_{t,k}^{\bar{y}} \sum_{y \in Y_k} y = 0.$$

Следовательно,

$$M\left(\eta_t / \eta_s, s \in \mathbf{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0.$$

Теорема 3.6 доказана. □

Нетрудно проверить, что гиббсовские случайные поля с симметричным относительно нуля фазовым пространством и четным потенциалом удовлетворяют условиям теоремы 3.6.

Теперь можно сформулировать следствия из теоремы 2.1 для гиббсовских мартингал-разностных полей при более общих условиях на потенциал.

Следствие 3.3. *Пусть* (η_t) *— однородное эргодическое гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* Y*, отвечающее потенциалу* Φ*, причем* $M\eta_0^2 > 0$*. Если существует разбиение* Π *множества* Y*, удовлетворяющее условию* (3.9)*, а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (3.10)*, тогда для данного поля справедлива ЦПТ.*

Следствие 3.4. *Пусть* (η_t) *— однородное эргодическое гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* Y*, отвечающее потенциалу* Φ *с конечным радиусом действия такое, что* $M\eta_0^2 > 0$*. Если существует разбиение* Π *множества* Y*, удовлетворяющее условию* (3.9)*, а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (3.10)*, тогда для данного поля справедлива ЛПТ.*

Abstract. A general approach to the construction of multidimensional martingales is developed. The obtained results allow considerably extend the range of applicability of the martingale method to the theory of random fields, especially to the theory of limiting distributions of Gibbs random fields.

Список литературы

[1] Doob J. L., Stochastic processes. New York, Wiley, 1953

[2] Hall P., Heyde C.C., Martingale limit theory and its applications. Academic Press, New York-London, 1980

[3] Мейер П. А., Вероятность и потенциал. Москва, Мир, 1973

[4] Ширяев А.Н., Вероятность. Москва, Наука, 1989

[5] Nahapetyan, B.S., Petrosyan, A.N., Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math., Vol. 17, 105–110, 1992

[6] Nahapetyan, B.S., Petrosyan, A.N. Martingale-difference random fields. Limit theorems and some applications. E. Shrödinger Intern. Inst., Vienna. Preprint ESI 283, 1995

[7] B. Nahapetian, Billingsley-Ibragimov Theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 320, 1539–1544, 1995

[8] Pogosyan S., Roelly S., Invariance principle for martingale-difference random fields. Statist. Probab. Lett. 38 (3), 235–245, 1998

[9] Dedecer J., A central limit theorem for stationary random fields, Probab. Theory Relat. Fields 110, no. 3, 397–426, 1998

[10] Illig A., Troung-Van B., Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales. http://www.mathpreprints.com/statistics/0304010/, 2003

[11] El Machkouri M., Volný D., Wu W.B., A central limit theorem for stationary random fields. http://arxiv.org/abs/1109.0838, 2011

[12] Gordin M., Peligrad M., On the functional central limit theorem via martingale approximation. Bernoulli, 17(1), 424–440, 2011

[13] Banys P., CLT for linear random fields with stationary martingale-difference innovations. Lith. Math. J., 303–309, 2011

[14] Добрушин Р.Л., Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности. Теор. вер. и ее примен., 113, 2, 201–229, 1968

[15] Добрушин Р.Л., Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функц. анализ и его приложения, т.2, 4, 31–43, 1968

[16] Dachian S., Nahapetian B.S., On Gibbsiannes of Random Fields, Markov Processes and Related Fields. Vol 15, 81–104, 2009

[17] Goldstein S., A note on specifications. Z. Wahrsch. verw. Geb. 46, 45–51, 1978

[18] Minlos R.A., Halfina A.M., Central limit theorem for the energy and the number of particles in lattice systems of gas. Izv. Akad. Nauk SSSR, 34, 1173–1191, 1970

[19] Malyshev V.A., The central limit theorem for Gibbsian random fields. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 16, 1141–1154, 1975

[20] Dobrushin R.L., Tirozzi B., The Central Limit Theorem and the Problem of Equivalence of Ensembles. Commun. math. Phys. 54, 173–192, 1977

[21] Nahapetian B.S., The central limit theorem for random fields with mixing property. Multicomponent random systems, Dobrushin R.L., Sinai Ya.G. (eds.), Dekker, Ney York, Basel, 1980

[22] Nahapetian B.S., Limit theorems and some applications in statistical physics. Teubner-Text zur Mathematik 123 (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.Leipzig), 1991

Поступила 4 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 71-78

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ СПЕЦИФИКАЦИЙ ОДНОТОЧЕЧНЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

Б. С. НАХАПЕТЯН, Г. Т. ОРОМЯН

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: *nahapet@instmath.sci.am*, *Gevorg.horomyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе [5] были получены необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений вероятностей, индексированных бесконечными граничными условиями, является подсистемой некоторой спецификации. В настоящей заметке дана алгебраическая интерпретация указанных условий согласованности. Кроме того, приводится их физическая интерпретация, предложенная Дашяном С. и Нахапетяном Б.С.

MSC2010 number: 60G60

Ключевые слова: Спецификация, одноточечные условные распределения, условия согласованности, алгебраическая интерпретация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие спецификации (согласованная система конечномерных распределений с бесконечными граничными условиями) играет основополагающую роль в вопросах описания случайных полей (см., например, [1] - [3]). В работах [1, 2] была поставлена задача (проблема Добрушина) отыскания необходимых и достаточных условий (условия согласованности), при которых система одноточечных вероятностных распределений, индексированных бесконечными граничными условиями, является подсистемой некоторой спецификации.

Данная задача была решена в работах [4, 5], где, в частности, было показано, что найденные условия допускают элементарную вероятностную интерпретацию.

В настоящей заметке раскрывается алгебраический смысл этих условий. Показывается, что рассматриваемая проблема по своей сути является алгебраической и сводится к вопросу существования решения некоторой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Условия же согласованности обеспечивают ее разрешимость.

Показывается также, что указанная проблема эквивалентна задаче продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 1$ — целочисленная решетка, $W = \{V \subset \mathbf{Z}^d, |V| < \infty\}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbf{Z}^d$ и X — некоторое конечное множество.

Для $S \subset \mathbf{Z}^d$ обозначим через X^S совокупность всех конфигураций на S. При $S = \emptyset$ положим $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, где $\emptyset$ — пустая конфигурация. Для $S, T \subset \mathbf{Z}^d$, таких, что $S \subset T$ и любой конфигурации $x = (x_t, t \in T)$ на T через x_S обозначим сужение конфигурации x на S, определяемое следующим образом $x_S = (x_t, t \in S)$. Для $S, T \subset \mathbf{Z}^d$, таких, что $S \cap T = \emptyset$ и любых конфигураций $x \in X^S$ и $y \in X^T$ обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T.

Пусть $Q = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ – некоторая спецификация, т.е. совокупность положительных конечномерных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus V}$, согласованная по Добрушину, а именно, для всех $I, V \in W$, $I \subset V$,

$$q_V^{\bar{x}}(xy) = \left(q_V^{\bar{x}}\right)_{V \setminus I}(x)\, q_I^{\bar{x}x}(y), \qquad y \in X^I,$$

где $(q_V^{\bar{x}})_{V \setminus I}$ есть сужение распределения $q_V^{\bar{x}}$ на $V \setminus I$, а именно

$$\left(q_V^{\bar{x}}\right)_{V \setminus I}(x) = \sum_{z \in X^I} q_V^{\bar{x}}(xz), \qquad x \in X^{V \setminus I}.$$

Имеет место следующее утверждение (см. [5])

Теорема 2.1. *Пусть* $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$ *— совокупность одноточечных положительных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями. Для того, чтобы совокупность* $Q^{(1)}$ *была подсистемой некоторой спецификации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия согласованности: для любых* $t, s \in \mathbf{Z}^d$, $x, u \in X^t$, $y, v \in X^s$ *и*

$\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus V}$

$$q_t^{\bar{x}v}(x)\, q_s^{\bar{x}x}(y)\, q_t^{\bar{x}y}(u)\, q_s^{\bar{x}u}(v) = q_s^{\bar{x}u}(y)\, q_t^{\bar{x}y}(x)\, q_s^{\bar{x}x}(v)\, q_t^{\bar{x}v}(u). \tag{2.1}$$

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Пусть $Q = \left\{q_\Lambda^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \Lambda}, \Lambda \in W\right\}$ — некоторая спецификация. Пусть $\Lambda \in W$, $t \in \Lambda$ и $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \Lambda}$. Поскольку для Q условия согласованности Добрушина имеют место, можем написать

$$q_\Lambda^{\bar{x}}(xu) = q_t^{\bar{x}u}(x) \sum_{z \in X} q_\Lambda^{\bar{x}}(zu), \tag{3.1}$$

где $x \in X$, $u \in X^{\Lambda \setminus \{t\}}$. Отсюда видно, что проблему Добрушина можно интерпретировать как вопрос разрешимости системы уравнений (3.1), где $q_t^{\bar{x}u}(x)$ — заданные величины, а $q_\Lambda^{\bar{x}}(zu)$, $z \in X$ — неизвестные.

На простом примере покажем, как условия согласованности (2.1) обеспечивают разрешимость системы уравнений (3.1). Пусть $\Lambda = \{t, s\}$, $X = \{0, 1\}$. Для этого случая система (3.1) запишется следующим образом

$$\begin{cases} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, y) = q_t^{\bar{x}y}(x) \sum\limits_{u \in X} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(u, y) \\ q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, y) = q_s^{\bar{x}x}(y) \sum\limits_{u \in X} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, u) \end{cases}$$

Поскольку граничные условия $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t,s\}}$ фиксированы, мы не будем явно отмечать зависимость от них распределений вероятностей, и примем следующую систему обозначений

$$q_{t,s}^{\bar{x}}(x, y) = z_{xy}, \qquad q_t^{\bar{x}y}(x) = a_{xy}, \qquad q_s^{\bar{x}x}(y) = b_{yx}, \qquad x, y \in X.$$

В этих обозначениях система (3.1) будет эквивалентна следующей системе уравнений

$$z_{00} = \frac{a_{00}}{a_{10}} \cdot z_{10}, \qquad z_{01} = \frac{a_{01}}{a_{11}} \cdot z_{11}, \qquad z_{00} = \frac{b_{00}}{b_{10}} \cdot z_{01}, \qquad z_{10} = \frac{b_{01}}{b_{11}} \cdot z_{11},$$

при этом $0 < a_{xy} < 1$, $0 < b_{yx} < 1$, $x, y \in X$ и

$$a_{00} + a_{10} = 1, \qquad a_{01} + a_{11} = 1, \qquad b_{00} + b_{10} = 1, \qquad b_{01} + b_{11} = 1.$$

Для того, чтобы данная однородная система имела ненулевое решение, ее детерминант

$$D = a_{00} b_{10} a_{11} b_{01} - b_{00} a_{01} b_{11} a_{10}$$

должен равняться нулю, а это требование эквивалентно выполнению условия согласованности (2.1).

В общем случае, решение данной задачи сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

Пусть $\Lambda \in W$. Рассмотрим следующее функциональное уравнение

$$a(x) = A(x,y)\, a(y), \tag{3.2}$$

где $a(x)$, $x \in X^{\Lambda}$ — искомая функция, а $A(x,y)$, $x, y \in X^{\Lambda}$ — известная функция, определенная на упорядоченных парах конфигураций.

Для того, чтобы уравнение (3.2) имело бы решение, необходимо, чтобы функция $A(x,y)$ удовлетворяла следующим очевидным соотношениям

$$A(x,x) = 1, \qquad A(x,y) = A(x,z)\, A(z,y). \tag{3.3}$$

Эти условия являются также достаточными для существования решения уравнения (3.2).

Отметим, что из (3.3) следует, что для любых двух последовательностей конфигураций $z_1, z_2, ..., z_n$ и $z_1', z_2', ..., z_m'$ выполняется равенство

$$A(x,z_1)\, A(z_1,z_2) \cdot ... \cdot A(z_n,y) = A(x,z'_1)\, A(z'_1,z'_2) \cdot ... \cdot A(z'_m,y). \tag{3.4}$$

Утверждение 3.1. *Пусть условия* (3.3) *имеют место. Тогда для любого* $z_0 \in X^{\Lambda}$ *и постоянной* $C(z_0)$ *функция*

$$a(x) = A(x,z_0)\, C(z_0)$$

является решением уравнения (3.2).

Если функция $a(x)$ *является решением уравнения* (3.2), *тогда* $a(x)$ *с необходимостью имеет следующий вид*

$$a(x) = A(x,z_0)\, a(z_0),$$

где z_0 *— любая конфигурация из* X^{Λ}.

По причине простоты, доказательство этого утверждения опускается.

Пусть $M = X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$ — подмножество пар конфигураций на X^{Λ}, отличающихся только в одной точке. Пусть заданная на M функция $A^*(x,y)$ удовлетворяет условиям (3.3). Приведем условия, при которых функция $A^*(x,y)$ может быть продолжена на все пространство $X^\Lambda \times X^\Lambda$.

Введем оператор $K_t^u : X^\Lambda \to X^\Lambda$, который при действии на конфигурацию $x \in X^\Lambda$ присваивает ее компоненте в точке t значение u, $u \in X$, $t \in \mathbf{Z}^d$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $A^*(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям согласованности: для любых $t, s \in \mathbf{Z}^d$ и $u, v \in X$*

(3.5)

$$A^*(x, K_t^u x)\, A^*(K_t^u x, K_s^v K_t^u x) = A^*(x, K_s^v x)\, A^*(K_s^v x, K_t^u K_s^v x), \qquad x \in X^\Lambda.$$

Тогда функция $A^*(x,y)$ имеет продолжение $A(x,y)$ на все пространство $X^\Lambda \times X^\Lambda$, такое, что для $A(x,y)$ выполняются условия (3.3).

Доказательство. Пусть $x, y \in X^\Lambda$ — некоторые конфигурации, отличающиеся в n ($n \le |\Lambda|$) точках, и пусть $t_1, t_2, ..., t_n$ — их некоторая нумерация. Пусть $u_i = y_{t_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Положим

$$A(x,y) = A^*\left(x, K_{t_1}^{u_1} x\right) A^*\left(K_{t_1}^{u_1} x, K_{t_2}^{u_2} K_{t_1}^{u_1} x\right) \cdot ... \cdot A^*\left(K_{t_n}^{u_n} ... K_{t_1}^{u_1} x, y\right).$$

Покажем, что функция $A(x,y)$ корректно определена, т.е. ее значения не зависят от нумерации точек, в которых отличаются конфигурации x и y. Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} &A^*\left(x, K_{t_1}^{u_1} x\right) A^*\left(K_{t_1}^{u_1} x, K_{t_2}^{u_2} K_{t_1}^{u_1} x\right) \cdot ... \cdot A^*\left(K_{t_n}^{u_n} ... K_{t_1}^{u_1} x, y\right) = \\ (3.6)\qquad &= A^*(x, K_1^{u_1} x)\, A^*(K_1^{u_1} x, K_2^{u_2} K_1^{u_1} x) \cdot ... \cdot A^*(K_n^{u_n} ... K_1^{u_1} x, y). \end{aligned}$$

Справедливость же соотношения (3.6) следует из того, что операторы $K_{t_1}^{u_1}$, $K_{t_2}^{u_2}$, ..., $K_{t_n}^{u_n}$ коммутируют, а переход от перестановки $t_1, t_2, ..., t_n$ к перестановке 1,2, ...,n осуществляется посредством определенного количества транспозиций, при этом, благодаря условию (3.5), значение функции $A(x,y)$ не изменяется. Остается заметить, что из (3.4) непосредственно следует выполнимость условий (3.3) для функции $A(x,y)$. □

Покажем, что теорема 2.1 является прямым следствием теоремы 3.1. Пусть $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$ — совокупность одноточечных распределений вероятностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1. Для $t \in \Lambda$ и $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \Lambda}$ определим

$$A^*(x,y) = \frac{q_t^{\bar{x}x}(x_t)}{q_t^{\bar{x}x}(y_t)},$$

где $x = x_t z$, $y = y_t z$, $x_t, y_t \in X^{\{t\}}$, $z \in X^{\Lambda \setminus \{t\}}$. Функция $A^*(x,y)$ очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы 3.1, следовательно, она может быть продолжена на все $X^\Lambda \times X^\Lambda$, причем

$$A(x,y) = \frac{q_t^{\bar{x} y_{(t_2,\dots,t_n)}}(x_{t_1})\, q_t^{\bar{x} x_{t_1} y_{(t_3,\dots,t_n)}}(x_{t_2}) \cdot \dots \cdot q_t^{\bar{x} x_{(t_1,\dots,t_{n-1})}}(x_{t_n})}{q_t^{\bar{x} y_{(t_2,\dots,t_n)}}(y_{t_1})\, q_t^{\bar{x} x_{t_1} y_{(t_3,\dots,t_n)}}(y_{t_2}) \cdot \dots \cdot q_t^{\bar{x} x_{(t_1,\dots,t_{n-1})}}(y_{t_n})}, \qquad x, y \in X^\Lambda,$$

а решение уравнения

$$a(x) = A(x,y)\, a(y), \qquad x, y \in X^\Lambda,$$

удовлетворяющее требованию

$$\sum_{x \in X^\Lambda} a(x) = 1$$

единственно и имеет вид

$$a(x) = \frac{A(x,y)}{\sum\limits_{z \in X^\Lambda} A(z,y)}, \qquad x \in X^\Lambda,$$

который совпадает с формулой восстановления спецификации, полученной в работе [5].

Заметим, что имеется также и физическая интерпретация условий согласованности (2.1), предложенная Дашяном С. и Нахапетяном Б.С.

4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Пусть совокупность функций

$$\Delta = \left\{ \Delta_t^{\bar{x}}(x,u) : x, u \in X, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d \right\}$$

такова, что ее элементы связаны соотношением

$$\Delta_t^{\bar{x}}(x,u) = \Delta_t^{\bar{x}}(x,z) + \Delta_t^{\bar{x}}(z,u). \tag{4.1}$$

Понятно, что $\Delta_t^{\bar{x}}(x,x) = 0$. Величину $\Delta_t^{\bar{x}}(x,u)$ можно трактовать как энергию (при граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t\}}$), необходимую для перехода частицы, находящейся в точке t, из состояния x в состояние u. Тогда соотношение (4.1) будет представлять собой уравнение баланса.

Обозначим через $\Delta_{\{t,s\}}^{\bar{x}}((x,u);(y,v))$ энергию (при граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d \setminus \{t,s\}}$), необходимую для перехода частицы, находящейся в точке t, из состояния x в состояние u, и частицы, находящейся в точке s, из состояния y в состояние v. Понятно, что должно быть

$$\Delta^{\bar{x}}_{\{t,s\}}\left((x,u);(y,v)\right) = \Delta^{\bar{x}y}_{t}(x,u) + \Delta^{\bar{x}u}_{s}(y,v)$$

и

$$\Delta^{\bar{x}}_{\{t,s\}}\left((x,u);(y,v)\right) = \Delta^{\bar{x}x}_{s}(y,v) + \Delta^{\bar{x}v}_{t}(x,u).$$

Таким образом, элементы совокупности Δ должны быть связаны следующим соотношением

(4.2) $$\Delta^{\bar{x}y}_{t}(x,u) + \Delta^{\bar{x}u}_{s}(y,v) = \Delta^{\bar{x}x}_{s}(y,v) + \Delta^{\bar{x}v}_{t}(x,u)$$

для любых $t,s \in \mathbf{Z}^d$ и $x,u,y,v \in X$.

Совокупность Δ, удовлетворяющую соотношениям (4.1) и (4.2) будем называть энергетическим полем на решетке $\mathbf{Z}^d$.

Пусть $U^{\bar{x}}_{t}(x)$ — потенциальная энергия частицы, находящейся в точке t в состоянии x при граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}$. Ясно, что

$$\Delta^{\bar{x}}_{t}(x,u) = U^{\bar{x}}_{t}(x) - U^{\bar{x}}_{t}(u).$$

Из условия (4.2) следует справедливость следующего соотношения

(4.3) $$U^{\bar{x}y}_{t}(x) - U^{\bar{x}y}_{t}(u) + U^{\bar{x}u}_{s}(y) - U^{\bar{x}u}_{s}(v) = U^{\bar{x}v}_{t}(x) - U^{\bar{x}v}_{t}(u) + U^{\bar{x}x}_{s}(y) - U^{\bar{x}x}_{s}(v)$$

для любых $t,s \in \mathbf{Z}^d$ и $x,u,y,v \in X$.

Согласно принципу максимума энтропии, гиббсовское распределение, отвечающее энергетическому полю Δ будет иметь вид

$$q^{\bar{x}}_{t}(x) = \frac{\exp\left\{-\Delta^{\bar{x}}_{t}(x,\alpha)\right\}}{\sum\limits_{z\in X}\exp\left\{-\Delta^{\bar{x}}_{t}(z,\alpha)\right\}} = \frac{\exp\left\{-U^{\bar{x}}_{t}(x)\right\}}{\sum\limits_{z\in X}\exp\left\{-U^{\bar{x}}_{t}(z)\right\}}.$$

Из условия (4.3) непосредственно следует, что элементы совокупности

$$\left\{q^{\bar{x}}_{t}(x),\, x\in X, \bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$$

удовлетворяют условиям согласованности (2.1).

Семейство функций $U = \left\{U^{\bar{x}}_{t}, t \in \mathbf{Z}^d\right\}$, удовлетворяющих условию (4.3), имеет фундаментальное значение при построении гиббсовской теории, поскольку предположения, определяющие различные классы гиббсовских случайных полей (например, квазилокальность, трансляционная инвариантность, ограниченность радиуса взаимодействия и т.д.), могут быть сформулированы исключительно в терминах свойств функции $U^{\bar{x}}_{t}, t \in \mathbf{Z}^d$.

Abstract. In the paper [5] necessary and sufficient conditions (consistency conditions) under which the system of one-point probability distributions indexed by infinite boundary conditions is a subsystem of some specification were found. In this note we give an algebraic interpretation of the above consistency conditions, as well as present their physical interpretation introduced by Dachian and Nahapetian.

Список литературы

[1] Р. Л. Добрушин, "Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности", Теор. вер. и ее примен., 113, no. 2, 201 – 229 (1968).
[2] R. L. Dobrushin, "Prescribing a system of random variables by conditional distributions", Theory Probab. Appl., 15, 458 – 486 (1970).
[3] H. O. Georii, "Gibbs measures and phase transitions", Studies in Math., no. 9, De Gruter (1988).
[4] S. Dachian, B. S. Nahapetian, "Description of random fields by means of one - point conditional distributions and some applications", Markov Processes and Related Fields, 7, 193 – 214 (2001).
[5] S. Dachian, B. S. Nahapetian, "Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very week positivity", Journal of Statistical Physics, 117, No. 1 – 2, 281 – 300 (2004).

Поступила 4 марта 2012

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 48, номер 1, 2013

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 48, No. 1, 2013

Contents