ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2012

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 6, 2012, стр. 3-18.

In memory of my teacher in Math, Nikolaos Stamatas.

ON A CHARACTERIZATION OF ARAKELIAN SETS

G. FOURNODAVLOS

Department of Mathematics, University of Toronto, Canada

E-mail: *grifour@math.toronto.edu*

Abstract. Let K be a compact set in the complex plane, such that its complement in the Riemann sphere, $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$, is connected. Also, let $U \subset \mathbb{C}$ be an open set which contains K. Then there exists a simply connected open set $V \subset \mathbb{C}$ such that $K \subset V \subset U$. We show that if K is replaced by a closed set $F \subset \mathbb{C}$, then the preceding result is equivalent to the fact that F is an Arakelian set in $\mathbb{C}$. This holds in more general case when $\mathbb{C}$ is replaced by any simply connected open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. In the case of an arbitrary open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, the above extends to the one point compactification of Ω. Furthermore, if we do not require $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ to be connected, we can demand that each component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus V$ intersects a prescribed set A containing one point in each component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$. Using the previous result, we prove that again if we replace K by a closed set F, the latter is equivalent to the fact that F is a set of uniform meromorphic approximation with poles lying entirely in A.

MSC2010 numbers: 30E10.

Keywords: uniform approximation in the complex domain; Arakelian set; simply connected open set.

1. Introduction

When one starts doing approximations in complex analysis, he quickly realizes that topological lemmas play a key role to his work. This may seem strange to someone not familiar with the subject, but actually it is quite natural. A simple explanation is that the main tools for this kind of research, such as Runge's theorem [22] and Mergelyan's theorem [17], contain themselves topological conditions. Our work in the present paper rotates around the following standard topological lemma (see Proposition 3.10.6 in [18]).

Lemma 1.1. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact set with $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ connected. If U is an open set in $\mathbb{C}$ containing K, then there exists a simply connected open set V such that $K \subset V \subset U$.*

We note that throughout this article, when we say that an open subset of $\mathbb{C}$ is simply connected, it may not necessarily be path connected (as it is often the case). An equivalent statement is that the complement of this open set in the Riemann sphere, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, is connected. The above lemma has given several applications. For instance, in [4] and [16] it was used by the authors to obtain certain universal approximations. More recently, we used it in [8] to show the density of polynomials in a subspace of $A^\infty(\Omega)$, the space of holomorphic functions in a (simply connected) open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, smooth on the boundary. When I first encountered this lemma, I was interested in knowing if its conclusion still holds when the compact set K is replaced by a closed subset F of $\mathbb{C}$. Eventually, I realized that the answer, in general, is negative and a counterexample is the following:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\big(\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\} \times [0,n]\big) \cup \big([\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i}] \times \{n\}\big) \Big] \cup \big(\{1\} \times [0,\infty)\big).$$

This set F relates to the well-known Arakelian Approximation Theorem [1].

Theorem 1.1. *Let F be a closed set in the complex plane $\mathbb{C}$. Then every function $f : F \to \mathbb{C}$ continuous on F and holomorphic in F^0 ($f \in A(F)$) can be uniformly approximated on F by entire functions, $g \in H(\mathbb{C})$, if and only if the following hold:*

(i) $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus F$ is connected and

(ii) $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus F$ is locally connected at ∞.

Yet, in [19] one finds another proof of Theorem 1.1, based on Mergelyan's theorem, where conditions (i) and (ii) are replaced by the following equivalent condition:

(iii) $\mathbb{C} \setminus F$ has no bounded components and for every closed disk D in $\mathbb{C}$, the union of all bounded components of $\mathbb{C} \setminus (F \cup D)$ is a bounded set. Such a closed set, as in Theorem 1.1, is called an Arakelian set in $\mathbb{C}$. It is easy to see that in our counterexample F does not satisfy condition (ii). This is in accordance with [14], where it was shown that Lemma 1.1 is valid for every Arakelian set in $\mathbb{C}$. In the present article we start by proving that the converse is also true. More precisely, the following theorem holds.

Theorem 1.2. *Let F be a closed subset of $\mathbb{C}$. Then the following are equivalent:*

(1) for every open set $U \subset \mathbb{C}$, which contains F, there exists a simply connected open set V such that $F \subset V \subset U$;

(2) F is an Arakelian set in $\mathbb{C}$.

More generally, Arakelian sets may be defined for an arbitrary open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. The question is for a relatively closed set F in Ω, whether every function $f \in A(F)$ can be uniformly approximated on F by holomorphic functions $g \in H(\Omega)$. This was completely settled by Arakelian in [2], where he extended his Theorem 1.1. In this version one considers the one point compactification of Ω, $\Omega \cup \{\alpha\}$. The relatively closed set $F \subset \Omega$, for which the approximation is possible, is called an Arakelian set in Ω and again a purely topological description can be provided.

We extend Theorem 1.2 in this case by replacing the complex plane with a simply connected open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. This means that the open set V is still simply connected; that is $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus V$ is connected. Also, we can further extend Theorem 1.2 in the general case for any open set $\Omega \subset \mathbb{C}$. In this case V is not necessarily simply connected, but its complement $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ in the one point compactification of Ω has to be connected.

Next, we give two applications of our results. One of these is a simple proof of the fact that if Ω is a simply connected open subset of $\mathbb{C}$, then the union of a locally finite family of pairwise disjoint Arakelian sets in Ω is also an Arakelian set in Ω. We notice that when Ω is not simply connected the latter fails.

N. Tsirivas in his master thesis [25] used a variation of Lemma 1.1, without the assumption that $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ is connected (see Lemma 2.2 in [6]). In this case one considers a set A which contains one point in each component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ and requires that every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus V$ intersects A. We consider the same problem, as before, by replacing the compact set K with a closed set F and we manage to fully characterize the closed sets that satisfy the previous conclusion. Indeed, we realize that they are exactly these for which every function $f \in H(F)$, holomorphic in some neighborhood of F, can be uniformly approximated on F by meromorphic functions whose poles lie in A. Finally, we investigate the latter type of approximation for the larger space $A(F)$ and give a characterization relating to the preceding result. We note that this kind of approximation is different and more restrictive than, namely, uniform meromorphic approximation (see Roth's theorem [20]). The former approximation problem (in a much more general context though) was solved by Scheinberg in [24], where a topological description of such closed sets is given.

We remark that the above approximation problems have also been studied in the case of open Riemann surfaces. For example, in [10], [23], [24] the authors obtained their results for arbitrary open Riemann surfaces Ω and closed subsets F of essentially finite genus. We believe that our results can be extended in this case, but this is up to investigation. In the present article we will only consider planar open sets $\Omega \subset \mathbb{C}$ as domains of definition. P. M. Gauthier suggested that some alternative proofs could relate to Runge pairs and harmonic approximation (see [3], [11], [12]). A preliminary version of this article can be found in [7].

2. The main result and applications

In [2] N. U. Arakelian proved the following theorem.

Theorem 2.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and F be a relatively closed subset of Ω. Then every function $f \in A(F)$ can be uniformly approximated on F by functions $g \in H(\Omega)$ holomorphic in Ω, if and only if the following hold:*

(i) $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ is connected and

(ii) $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ is locally connected at α, where $\Omega \cup \{\alpha\}$ is the one point compactification of Ω.

Such a set F is also called an Arakelian set in Ω.

It is easy to see that condition (ii) is equivalent to the seemingly stronger one: "$(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ is locally connected". From now on, we shall say that B is a "hole of F"in Ω, iff B is a component of $\Omega \setminus F$ which is contained in some compact subset of Ω. Note that $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ is connected, iff F has no holes in Ω.

Proposition 2.1. *A closed set F in Ω, without holes, is an Arakelian set in Ω, if and only if for every compact set $K \subset \Omega$, the union of all holes of $F \cup K$ in Ω is contained in a compact subset of Ω.*

For the case $\Omega = \mathbb{C}$ see also [19]. We include a proof of the general case, for the sake of completeness.

Proof. ($\Rightarrow$) Suppose that there is a compact set $K \subset \Omega$, such that the union of all holes in Ω of $F \cup K$ is not contained in any compact subset of Ω. The complement $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus K$ is a neighborhood of α in $\Omega \cup \{\alpha\}$. Hence, there exists a neighborhood

$W \subset (\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus K$ of α in $\Omega \cup \{\alpha\}$, such that $W \cap \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F\big]$ is connected. Since $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus W$ is contained in a compact subset of Ω, there is a hole B of $F \cup K$ in Ω, such that $B \cap W \neq \emptyset$. Observe that $\partial B \subset F \cup K$. Since $W \cap \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F\big]$ and $F \cup K$ are disjoint, it follows that $W \cap \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F\big] \subset B \cup \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus \overline{B}\big]$, which is a contradiction.

($\Leftarrow$) Let $U \subset \Omega \cup \{\alpha\}$ be an open neighborhood of α in $\Omega \cup \{\alpha\}$. The set $K = (\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus U \subset \Omega$ is compact. Therefore, the union of all holes in Ω of $F \cup K$ is contained in a compact subset of Ω. Let $B_1, B_2 \ldots$ be those holes. Also, let $W = (\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus (K \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots)$. Obviously, W is a neighborhood of α and $W \subset U$. We notice that $W \cap \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F\big]$ is the union of $\{\alpha\}$ and all the components of $\Omega \setminus (F \cup K)$, which are either unbounded or have zero distance from the boundary of Ω. Thus, $W \cap \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F\big]$ is connected and the proof is complete. $\square$

Remark 2.1. *In order to determine whether a relatively closed set F, without holes, is an Arakelian set in Ω, it suffices to check the condition of Proposition 2.1 only for an exhausting sequence, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, of compact subsets of Ω. Such a sequence can be chosen so that $K_n \subset K^0_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K^0_n = \Omega$ and every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K_n$ contains a component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$, for all $n \in \mathbb{N}$ (see* [21], *p. 267). The latter is equivalent to the fact that K_n, $n \in \mathbb{N}$, has no holes in Ω.*

Also, assuming that a closed set F, without holes, is not an Arakelian set in Ω, by Proposition 2.1 there exists a compact set K such that the union of all holes of $F \cup K$ is not contained in any compact subset of Ω. If we consider a larger compact set $K \subset \widetilde{K} \subset \Omega$, then the same holds for the union of all holes of $F \cup \widetilde{K}$ in Ω. Thus, we can consider $\widetilde{K}$ to be a finite union of squares in a grid, whose sides are parallel to the coordinate axes and of the same length $\delta > 0$.

Proposition 2.2. *If F is an Arakelian set in Ω, then for every open set $U \subset \Omega$, which contains F, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ is connected.*

Proof. Let F be an Arakelian set in Ω and $U \subset \Omega$ be an open set such that $F \subset U$. For every $x \in \Omega \setminus U$, we define $d_x = \min\{\frac{dist(x,F)}{2}, \frac{dist(x,\mathbb{C}\setminus\Omega)}{2}, 1\} > 0$. Also, let $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an exhausting sequence of compact subsets of Ω, as in Remark 2.1.

- Observe that the cover $\{D(x, d_x) \mid x \in \Omega \smallsetminus U\}$ of the relatively closed set $\Omega \smallsetminus U$, has a locally finite subcover in Ω, which we denote by $\big\{D(x_i, d_{x_i})\big\}_{i=1}^{\infty}$. Indeed, it suffices to choose a finite cover of disks $D(x, d_x)$, $x \in \Omega \smallsetminus U$, for each of the compact sets $(K_n \smallsetminus K_{n-1}^0) \cap (\Omega \smallsetminus U)$, $n \in \mathbb{N}$, $K_0 = \emptyset$.

This implies that every compact subset of Ω intersects a finite number of disks from $\big\{D(x_i, d_{x_i})\big\}_{i=1}^{\infty}$. Observe that $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D(x_i, d_{x_i})} \subset \Omega$ is relatively closed and the set $\{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ has no accumulation points in Ω. Hence, $U_1 = \Omega \smallsetminus \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D(x_i, d_{x_i})}\big)$ is open and $F \subset U_1 \subset U$.

- We say that a point $x \in \Omega$ is joined with α by a curve Γ in $E \subset \Omega$, if $\Gamma : [0, +\infty) \to E$ is continuous and $\Gamma(0) = x$, $\lim_{t \to +\infty} \Gamma(t) = \alpha$. The image of such a curve, $\Gamma\big([0, +\infty)\big)$, is closed in Ω.

Each x_i can be joined with α by a curve Γ_i in $\Omega \smallsetminus F$, $i = 1, 2, \ldots$, such that for every $n \in \mathbb{N}$ only finitely many curves intersect the compact set K_n. Indeed, for every $n \in \mathbb{N}$, by Proposition 2.1 there are finitely many x_i's contained in the union of K_n and all the holes of $F \cup K_n$ in Ω. The points that we have not already joined with α (induction hypothesis), are contained in components of $\Omega \smallsetminus (F \cup K_{n-1})$, which are either unbounded or have zero distance from the boundary of Ω. Let x_i be such a point and E be the component of $\Omega \smallsetminus (F \cup K_{n-1})$ which contains it.

- For each $s \geq n$, by Proposition 2.1, E contains a component E_s of $\Omega \smallsetminus (F \cup K_s)$, which is either unbounded or has zero distance from $\partial\Omega$. Further, we can assume that $E_{s-1} \supset E_s$, $s \geq n$, where $E_{n-1} = E$. Let $x_{is} \in E_s$ and let Γ_{is} be a curve in E_{s-1}, which joins x_{is-1} with x_{is} , $s \geq n$, $x_{in-1} = x_i$ (such a curve exists, since E_{s-1} is open and connected). The desired curve, Γ_i, consists of all Γ_{is}, $s \geq n$.

Thus, the family of the curves Γ_i is locally finite in Ω and in particular the union $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ is relatively closed. We can easily see now that the open set $V = U_1 \smallsetminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i)$ has all the desired properties. Since the curves Γ_i do not intersect F, we have $F \subset V \subset U_1 \subset U$ and of course $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(\overline{D(x_i, d_{x_i})} \cup \Gamma_i\big) \cup \{\alpha\}$ is connected, which completes the proof. $\square$

Remark 2.2. *The method of proof of Proposition 2.2 implies that* V *can be chosen so that the collection of components of* $\Omega \setminus V$ *is locally finite in* Ω*.*

We note that the previous proposition, in the case $\Omega = \mathbb{C}$, is known (see [14]).

Proposition 2.3. *If* F *is a closed subset of* Ω *such that for every open set* $U \subset \Omega$*, which contains* F*, there exists an open set* $V \subset \Omega$ *with* $F \subset V \subset U$ *and* $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ *connected, then* F *is an Arakelian set in* Ω*.*

Proof. First, we notice that F has no holes in Ω. Indeed, if B is a hole of F in Ω and $x \in B$, then the open set $U = \Omega \setminus \{x\}$ contains F. Hence, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ is connected. Evidently, we have $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F \supset (\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$. Therefore, the latter is contained in the component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ that contains α. However, $x \in \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V\big] \cap B \neq \emptyset$, which is a contradiction, because B is a component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ not containing α.

Suppose now that F is not an Arakelian set in Ω. By Proposition 2.1 there exists a compact set $K \subset \Omega$, such that α is an accumulation point of the union of all holes of $F \cup K$ in Ω. Moreover, Remark 2.1 enables us to assume that K is a finite union of closed squares in a grid, whose sides are parallel to the coordinate axes and of some length $\delta > 0$.

Let $B_1, B_2, \ldots$ be a sequence of holes of $F \cup K$ in Ω and let $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$ be such that $x_n \to \alpha$, as $n \to +\infty$. The open set $U = \Omega \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$ contains F. Thus, there exists an open set V with $F \subset V \subset U$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ connected. Observe that $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ intersects B_n and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus \overline{B_n}$ for all $n \in \mathbb{N}$. This implies that there exists $y_n \in (\Omega \setminus V) \cap \partial B_n \cap \partial K$, $n \in \mathbb{N}$. Since ∂K is compact, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ has a limit point $y \in \partial K$. Also, $y \in \Omega \setminus V$, because $\Omega \setminus V$ is closed in Ω and $y \in \Omega$. We claim that $y \in F \subset V$, which is obviously a contradiction. Indeed, if $y \notin F$, then there exists $\varepsilon > 0$ such that the disk $\overline{D(y, \varepsilon)} \subset \Omega$ does not intersect F. In addition, we can choose $\varepsilon > 0$ small enough, depending on the place of y in the grid, so that $D(y, \varepsilon) \setminus K$ has at most two components. This is a contradiction, since $D(y, \varepsilon) \setminus K \subset \Omega \setminus (F \cup K)$ intersects infinitely many holes of $F \cup K$ in Ω. The proof is complete. $\square$

According to Propositions 2.2 and 2.3, we have the following characterization of Arakelian sets.

Theorem 2.2. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and $\Omega \cup \{\alpha\}$ be its one point compactification. If F is a closed set in Ω, then the following are equivalent:*

(1) for every open set $U \subset \Omega$, which contains F, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ is connected;

(2) F is an Arakelian set in Ω.

Our achievement so far was, in fact, to show the equivalence of two topological descriptions regarding relatively closed sets in open subsets of $\mathbb{C}$. In other words, Theorem 2.2 takes the following equivalent form for planar open sets Ω.

Theorem 2.3. *Let Ω be an open set in $\mathbb{C}$ and F be a relatively closed subset of Ω. Then the following are equivalent:*

(1) for every open set $U \subset \Omega$ with $F \subset U$ there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ is connected;

(2) $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ is connected and locally connected.

The advantage of this formulation, as P. M. Gauthier suggested, is that it can be examined if it is true for arbitrary open Riemann surfaces Ω, where the analogue of Theorem 2.1 does not hold in full generality (see [13], [23]).

Lemma 2.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected open set. A set $G \subset \Omega$ has connected complement in $\Omega \cup \{\alpha\}$ if and only if its complement in the Riemann sphere, $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G$, is connected.*

Proof. ($\Rightarrow$) Let $G \subset \Omega$ with $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus G$ connected. Assume that $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G$ is not connected. Thus, there are two open sets U_1, U_2 in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, such that $U_i \cap \big[(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G\big] \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G \subset U_1 \cup U_2$ and $U_1 \cap U_2 \cap \big[(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G\big] = \emptyset$. Since $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$ is connected and it is contained in $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G$, it follows that $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$ is contained in exactly one of the sets U_1, U_2. Without loss of generality, we assume that $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega \subset U_1$. Observe that $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus U_1$ is a compact subset of Ω. This implies that $V_1 = \big[U_1 \cap (\Omega \setminus G)\big] \cup \{\alpha\}$ and the set $V_2 = U_2 \cap (\Omega \setminus G) \subset (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus U_1 \subset \Omega$ are two nonempty disjoint relatively open sets in $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus G$. Furthermore, it is immediate that $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus G = V_1 \cup V_2$ and hence we have a contradiction.

($\Leftarrow$) Let $G \subset \Omega$ with $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G$ connected. We define the map $\phi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \Omega \cup \{\alpha\}$:

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in \Omega \\ \alpha, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Obviously, ϕ is continuous and so $\phi\big((\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G\big) = (\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus G$ is connected. The proof is complete. $\square$

Combining Theorem 2.2 and Lemma 2.1, we obtain the following theorem.

Theorem 2.4. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected open set and let $F \subset \Omega$ be a relatively closed set. Then the following are equivalent:*

(1) for every open set $U \subset \Omega$, which contains F, there exists a simply connected open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$;

(2) F is an Arakelian set in Ω.

The next corollary is an immediate application of Theorem 2.4.

Corollary 2.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected open set. If $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a locally finite family of pairwise disjoint Arakelian sets in Ω, then the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ is also an Arakelian set in Ω.*

Proof. Let $U \subset \Omega$ be an open set, which contains the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Since $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a locally finite family of pairwise disjoint closed sets in Ω, there exist pairwise disjoint open sets $G_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, such that $F_n \subset G_n$ for all n. By Theorem 2.4 there are simply connected open sets V_n with $F_n \subset V_n \subset G_n \cap U$ for every $n \in \mathbb{N}$. Obviously, it holds $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset U$ and V_n, $n = 1, 2, \ldots$, are also pairwise disjoint. The latter implies that every component of $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ is simply connected and thus $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ is a simply connected open set. According to Theorem 2.4, the relatively closed set $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ is an Arakelian set in Ω, which completes the proof. $\square$

An alternative proof of the previous result in the case $\Omega = \mathbb{C}$, using Proposition 2.1, could be derived from [5]. In the same article, the authors use their proposition in order to solve a problem of uniform entire approximation. It is worth mentioning that if the conclusion of the preceding corollary is true for some family (not necessarily countable) of pairwise disjoint (connected) Arakelian sets, then there is a method (see

[15]) to join them all, retaining the key properties of an Arakelian set. The following example shows that Corollary 2.1 does not hold when Ω is not simply connected.

Example 2.1. *Let $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $F_1 = C(0, r_1)$ and $F_2 = C(0, r_2)$, where $0 < r_1 < r_2$. Observe that F_1, F_2 are two disjoint compact subsets of Ω with connected complements in the one point compactification of Ω. Hence, both sets are Arakelian in Ω. Nevertheless, the union $F_1 \cup F_2$ is not an Arakelian set in Ω, since $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ is not connected.*

The next example shows that even if $\Omega \subset \mathbb{C}$ is a simply connected open set, it is not true that the infinite denumerable union of pairwise disjoint Arakelian sets in Ω is also an Arakelian set in Ω.

Example 2.2. *Let $\Omega = \mathbb{C}$ and let $F_0 = \{2\} \times [0, +\infty)$, $F_n = \big(\{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^n}, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\} \times [0, n]\big) \cup \big([\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^n}, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}] \times \{n\}\big)$, $n \geq 1$. It is easy to see that each F_n, $n = 0, 1, \ldots$, is an Arakelian set in $\mathbb{C}$. However, $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ is not an Arakelian set in $\mathbb{C}$, because despite the fact that F is closed and $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus F$ is connected, the union of all holes of $F \cup \overline{D(0, r)}$ in $\mathbb{C}$, $r \geq 2$, is unbounded.*

Finally, we present another application of our characterization.

Corollary 2.2. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected open set and $F \subset \Omega$ be an Arakelian set in Ω. Also, let $f \in A(F)$ be such that $f(z) \neq 0$ for all $z \in F$. Then there exists a function $g \in A(F)$ such that $f = e^g$.*

Proof. According to Tietze's extension theorem, there exists a continuous extension of f on Ω, which we denote by $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$. Our assumption yields that the open set $U = \Omega \setminus \widetilde{f}^{-1}(\{0\})$ contains F. Thus, by Theorem 2.4 there is a simply connected open set V with $F \subset V \subset U$. If we consider the covering map $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, then the latter implies that $\widetilde{f}_{|V} : V \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ can be lifted to a continuous function $\mathrm{tg} : V \to \mathbb{C}$, such that $\widetilde{f}_{|V} = e^{\mathrm{tg}}$. The function $g = \mathrm{tg}_{|F}$ is obviously continuous on F and $f = e^g$. Since $f_{|F^0}$ is holomorphic, g is also holomorphic in F^0. Thus, $g \in A(F)$ and the proof is complete. □

We note that for $\Omega = \mathbb{C}$, Corollary 2.2 is known (see [14] for an application).

3. An extension of the main result

As we stated in Lemma 1.1, $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ must be connected in order for V to be simply connected. However, if we do not require $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ being disconnected (e.g., when we do approximations with rational functions), then we can obtain the following variation of Lemma 1.1 (see [6], [25]).

Lemma 3.1. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact set and $A \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be a set containing one point from each component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$. Then for every open set $U \subset \mathbb{C}$ with $K \subset U$, there exists an open set $V \subset \mathbb{C}$ such that $K \subset V \subset U$, every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus V$ intersects A and $\mathbb{C} \setminus V$ has finitely many components.*

Remark 3.1. *If $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ is connected and $A = \{\infty\}$, then Lemma 3.1 is actually Lemma 1.1.*

In Section 2 we investigated the relation of Lemma 1.1 with Arakelian's theorem [1], [2], i.e., uniform holomorphic approximation on closed sets. Our efforts in obtaining similar results for Lemma 3.1 indicated that in this case the corresponding extension is closely related to uniform approximation on closed sets by meromorphic functions having prescribed poles. This kind of approximation has been studied in the past and in a very general setting also (see the work due to S. Scheinberg [24]).

Let $M(\Omega)$ denote the set of meromorphic functions in Ω, $H(F)$ the set of holomorphic functions in a (varying) neighborhood of F and $R(G)$ the uniform limits, on G, of rational functions (without poles in G).

Theorem 3.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an arbitrary open set and F be a relatively closed subset of Ω. Also, let $B_1, B_2, \ldots$ be the holes of F in Ω and let $A \subset \Omega \cup \{\alpha\}$ be a set containing one point in each component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$. Then the following are equivalent:*

(1) *For every $f \in H(F)$ and $\varepsilon > 0$ there exists $g \in M(\Omega)$, all of whose poles lie in $A \cap \Omega$, such that $\|g - f\|_F < \varepsilon$.*
(2) *For every compact set $K \subset \Omega$ the union of the holes of $F \cup K$ in Ω, which do not intersect A, is contained in a compact subset of Ω.*
(3) *For every open set $U \subset \Omega$, which contains F, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$, every component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ intersects A and the collection of all components of $\Omega \setminus V$ is locally finite in Ω.*

Proof. The proof of 1. $\Leftrightarrow$ 2. is given in [24], Theorem 1. So we prove 2. $\Leftrightarrow$ 3. First we show 2. $\Rightarrow$ 3. Let $U \subset \Omega$ be an open set with $F \subset U$ and let $A = \{b_1, b_2, \ldots\} \cup \{\zeta\}$, where $b_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$ and ζ belongs to the component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ containing α. According to our assumption and Proposition 2.1, $\widetilde{F} = F \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ is an Arakelian set in Ω, because for any compact set $K \subset \Omega$ there is at most one hole of $\widetilde{F} \cup K$ in Ω, which intersects A and each hole of $\widetilde{F} \cup K$ is also a hole of $F \cup K$. Hence, by Theorem 2.2 there exists an open set $\widetilde{V} \subset \Omega$ such that $\widetilde{F} \subset \widetilde{V} \subset U \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus \widetilde{V}$ is connected.

Under the notation used in the proof of Proposition 2.2, we may assume that $\Omega \setminus U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D(x_i, d_{x_i})}$, where $\{\overline{D(x_i, d_{x_i})} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ is a locally finite family of closed disks in Ω. Let $k_1, k_2, \ldots$ be the indices for which $A_n = \{x_1, x_2, \ldots\} \cap B_{k_n} \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Also, let $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ be an exhausting sequence of compact subsets of Ω and let H_m, $m \in \mathbb{N}$, be the union of the holes of $F \cup K_m$ in Ω which do not intersect A. We can join inductively the x_i's contained in each B_{k_n} with b_{k_n} by curves $\Gamma_{in} \subset B_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, such that every K_m intersects at most finitely many of all these curves.

- For $m \in \mathbb{N}$, our assumption and the fact that the set $\{x_1, x_2, \ldots\}$ has no accumulation points in Ω, imply that there are finitely many x_i's contained in $K_m \cup H_m$. If such a point x_i is also contained in some B_{k_n} and we have not already joined it with b_{k_n} (induction hypothesis), then it must be contained in a hole $B \subset B_{k_n}$ of $F \cup K_{m-1}$ in Ω, $K_0 = \emptyset$, which contains $b_{k_n} \in A$. Whenever the case, we join x_i with b_{k_n} by a curve $\Gamma_{in} \subset B \subset (\Omega \setminus K_{m-1}) \cap B_{k_n}$.

Thus, the family of the curves Γ_{in} is locally finite in Ω and more particularly the union $\bigcup_{n} \bigcup_{x_i \in A_n} \Gamma_{in}$ is closed in Ω. Lastly, ζ can be joined with α by a curve Γ in $\Omega \setminus \widetilde{F} \subset \Omega \setminus F$, since $\widetilde{F}$ is an Arakelian set in Ω (see the proof of Proposition 2.2).

We define V to satisfy

$$(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V = \big[(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus \widetilde{V}\big] \cup \Gamma \cup \bigcup_{n} \big[\bigcup_{x_i \in A_n} \big(\overline{D(x_i, d_{x_i})} \cup \Gamma_{in}\big)\big].$$

It is evident that V is open, $F \subset V \subset U$ and every component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ intersects A. Finally, by Remark 2.2 (applied to $\widetilde{V}$) and the construction of the curves Γ_{in}, $x_i \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$, it follows that the collection of all components of

$\Omega \smallsetminus V = (\Omega \smallsetminus \widetilde{V}) \cup \Gamma \cup \bigcup_n \big[\bigcup_{x_i \in A_n} \big(\overline{D(x_i, d_{x_i})} \cup \Gamma_{in}\big)\big]$ is locally finite in Ω, yielding the implication 2. $\Rightarrow$ 3.

To prove 3. $\Rightarrow$ 2., let $\widetilde{F} = F \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$, $A = \{b_1, b_2, \ldots\} \cup \{\zeta\}$ be as above and let $U \subset \Omega$ be an open set with $F \subset \widetilde{F} \subset U$. It follows that there exists an open set $V \subset \Omega$, such that $F \subset V \subset U$ and every component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$ intersects A. Further, we have $\widetilde{F} \subset V \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset U$. Observe that $\widetilde{V} = V \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ is open and $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus \widetilde{V}$ is the component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$ which intersects A at ζ. Thus, $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus \widetilde{V}$ is connected and by Theorem 2.2 $\widetilde{F}$ is an Arakelian set in Ω.

Suppose that there is a compact set $K \subset \Omega$ such that the union of the holes of $F \cup K$ in Ω, which do not intersect A, is not contained in any compact subset of Ω. Since $\widetilde{F}$ is an Arakelian set in Ω, Proposition 2.1 implies that there are infinitely many of these holes, which accumulate on α and are contained in corresponding holes of F in Ω. Let $C_n \subset B_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, be a sequence of such holes and $x_n \in C_n$ with $x_n \to \alpha$, as $n \to +\infty$. We consider the open set $U = \Omega \smallsetminus \{x_1, x_2, \ldots\}$, which obviously contains F. Based on our assumption, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$, each component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$ intersects A and the collection of all components of $\Omega \smallsetminus V$ is locally finite in Ω. Note that each component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$ is contained in some component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus F$.

Since $x_n \in \Omega \smallsetminus U \subset \Omega \smallsetminus V$, $n \in \mathbb{N}$, the previous fact yields that the component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$ which contains x_n, is contained in B_{k_n} and consequently intersects A at b_{k_n}. However, the holes C_n (of $F \cup K$), $n \in \mathbb{N}$, do not intersect A. Therefore, either $b_{k_n} \in \partial C_n$ or the latter component intersects the interior and exterior of C_n. Whatever the case, there exist $y_n \in (\Omega \smallsetminus V) \cap \partial C_n \cap \partial K$ for all $n \in \mathbb{N}$. Also, it is clear that the terms of the sequence $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are contained in distinct components of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \smallsetminus V$. Thus, K intersects infinitely many components of $\Omega \smallsetminus V$ and we obtain a contradiction. The proof is complete. $\square$

Remark 3.2. *It is sufficient to require condition* 2. *only for an exhausting sequence* $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ *of compact subsets of* Ω*, as in Remark 2.1.*

With our previous result, we managed to give a precise connection of Lemma 3.1 with complex approximation. However, we notice that there is an essential difference between Theorem 3.1 and Theorems 2.1, 2.2. That is because in Theorem 3.1 we considered a smaller class of approximable functions, namely, $H(F)$ instead of $A(F)$. Now we would like to characterize the closed sets F (in $\Omega \subset \mathbb{C}$) for which every element in $A(F)$ admits the corresponding approximation.

Observe that in this case both topological conditions 2. and 3. of Theorem 3.1 fail to imply the stronger approximation we seek. The reason behind this issue is that the analogue of Mergelyan's theorem [17] for rational approximation does not hold in general. Indeed, there is an interesting "Swiss cheese"example, where for certain compact sets $K \subset \Omega$ we have $R(K) \neq A(K)$ (see A. Roth's construction [9], p. 110). Thus, we need to impose an additional assumption, which will ensure that F has no such problematic compact subsets.

Theorem 3.2. *Let Ω, F, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ and A be as in Theorem 3.1. Then the following are equivalent:*

(1) *Every function $f \in A(F)$ can be uniformly approximated on F by meromorphic functions $g \in M(\Omega)$, all of whose poles lie in $A \cap \Omega$;*

(2) (a) *$A(F \cap \overline{D}) = R(F \cap \overline{D})$, for each disk D such that $\overline{D} \subset \Omega$ and*

(b) *for every compact set $K \subset \Omega$ the union of the holes of $F \cup K$ in Ω, which do not intersect A, is contained in a compact subset of Ω;*

(3) (a) *$A(F \cap \overline{D}) = R(F \cap \overline{D})$, for each disk D such that $\overline{D} \subset \Omega$,*

(b) *for every open set $U \subset \Omega$, which contains F, there exists an open set $V \subset \Omega$ such that $F \subset V \subset U$, every component of $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus V$ intersects A and the collection of all components of $\Omega \setminus V$ is locally finite in Ω.*

Proof. The proof of (1) $\Leftrightarrow$ (2) follows from Theorem 1 in [24], if we take into consideration Theorem 2 from [9] (p. 136). As for (2) $\Leftrightarrow$ (3), by Theorem 3.1, we have (2) (b) $\Leftrightarrow$ (3) (b). □

Remark 3.3. *If F has no holes in Ω, that is, $(\Omega \cup \{\alpha\}) \setminus F$ is connected, then one can easily see that condition* 2. (a) *is satisfied thanks to Mergelyan's theorem (see* [9]*, p. 135). In this case, for $A = \{\alpha\}$, we notice that Theorem 3.2 is in fact a combination of Theorem 2.1, Proposition 2.1, Theorem 2.2 and Remark 2.2.*

Acknowledgements: I would like to thank V. Nestoridis for his valuable suggestions and his interest in this work. Also, I would like to thank P. M. Gauthier for useful comments on preliminary versions of the present article and for bringing to my attention references I was not aware of.

Список литературы

[1] N. U. Arakelian, "Uniform approximation on closed sets by entire functions" [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR, **28**, 1187 – 1206 (1964).
[2] N. U. Arakelian, "Uniform and tangential approximations by analytic functions" [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSR, **3**, 273 – 285 (1968); Translation in American Mathematical Society Translations (2), **122**, 85 – 97 (1984).
[3] D. H. Armitage, P. M. Gauthier, "Recent developments in harmonic approximation with application", Results in Math., **29**, 1 – 15 (1996).
[4] G. Costakis, "Some remarks on universal functions and Taylor series", Math. Proc. Cambr. Philos. Soc., **128**, 157 – 175 (2000).
[5] A. A. Danielyan and L. A. Rubel, "Uniform approximation by entire functions that are all bounded on a given set", Constr. Approx., **14**, 469 – 473 (1998).
[6] E. Diamantopoulos, Ch. Mouratides and N. Tsirivas, "Universal Taylor series on unbounded open sets", Analysis (Munich), **26**, 323 – 336 (2006).
[7] G. Fournodavlos, "On a characterization of Arakelian sets", arXiv:1107.0393 (2011).
[8] G. Fournodavlos and V. Nestoridis, "Generic approximation of functions by their Padé approximants", arXiv: 1106.0169 (2011).
[9] D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser (1987).
[10] P. M. Gauthier, "Meromorphic uniform approximation on closed subsets of open Riemann surfaces", Approx. Theory and Funct. Anal. (Proc. Internat. Sympos. Approximation Theory, Univ. Estadual de Campinas, Campinas, 1977), North-Holland Pub. Co., 139 – 158 (1979).
[11] P. M. Gauthier, "Subharmonic extensions and approximations", Can. Math. Bull., **37**, 46 – 53 (1994).
[12] P. M. Gauthier, M. Goldstein and W. H. OW, "Uniform approximation on closed sets by harmonic functions with Newtonian singularities", J. London Math. Soc. (2), **28**, 71 – 82 (1983).
[13] P. M. Gauthier and W. Hengartner, "Uniform approximation on closed sets by functions analytic on a Riemann surface", Approx. Theory (Proc. Conf. Inst. Math., Adam Mickiewicz Univ., Poznan, 1972), Reidel, Dordrecht, 63 – 69 (1975).
[14] P. M. Gauthier and M. R. Pouryayevali, "Approximation by Meromorphic Func- tions with Mittag-Leffler Type Constraints", Can. Math. Bull., **44**, 420 – 428 (2001).
[15] P. M. Got'e, "Remarks on a theorem of Keldysh and Lavrent'ev" [in Russian], Translated from the English by A. Nersesyan. Uspekhi Mat. Nauk, **40**, no. 4(244), 157 – 158 (1985).
[16] K.-G. Grosse-Erdmann, "Holomorphe Monster und universelle Funktionen", Mitt. Math. Sem. Giessen, **176**, 1 – 84 (1987).
[17] S. N. Mergelyan, "Uniform approximations to functions of a complex variable" [in Russian], Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **7**, no. 2 (48), 31 – 122 (1952). Translation in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1, **3**, 294 – 391 (1962).
[18] R. Narasimhan, Analysis on Real and Complex Manifolds, 2nd ed., North-Holland Pub. Co. (1973).
[19] J.-P. Rosay and W. Rudin, "Arakelian's approximation theorem", Amer. Math. Monthly, **96**, 432 – 434 (1989).
[20] A. Roth, "Uniform and tangential approximation by meromorphic functions on closed sets", Canad. J. Math., **28**, 104 – 111 (1976).
[21] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill (1986).
[22] C. Runge, "Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen", Acta Math., **6**, 229 – 244 (1885).

[23] S. Scheinberg, "Uniform approximation by functions analytic on a Riemann surface", Annals of Math., **108**, 257 – 298 (1978).
[24] S. Scheinberg, "Uniform approximation by meromorphic functions having prescribed poles", Math. Ann., **243**, 83 – 93 (1979).
[25] N. Tsirivas, Master's Thesis, Universal Taylor series, University of Athens (Greek) (2004).

Поступила 3 сентября 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 6, 2012, стр. 19-28.

SUMMABILITY OF MULTIPLE TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES BY LINEAR METHODS

L. GOGOLADZE

Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia

E-mail: *lgogoladze1@hotmail.com*

Abstract. The paper deals with the problem of estimation of deviations of functions of several variables from linear means of their multiple trigonometric Fourier series. An approach of reducing this problem to the corresponding problem for functions of single variable is developed.

MSC2010 numbers: 42B08

Keywords: best approximation; quasi-polynomials; modulus of continuity.

1. INTRODUCTION

Let R^s $(s \geq 1)$ be the s-dimensional Euclidean space and let N^s be the set of lattice points in R^s. By $x = (x_1, \ldots, x_s)$, $y = (y_1, \ldots, y_s)$ we denote the points of the space R^s and by $m = (m_1, \ldots, m_s)$, $n = (n_1, \ldots, n_s)$ the points of the set N^s. For any $i = 1, \ldots, s$ we set $\bar{i} = \{1, \ldots, i\}$. If B is an arbitrary subset of the set $\bar{s}$, then by x_B we denote the point $(x'_1, \ldots, x'_s)$, where $x'_i = x_i$ when $i \in B$ and $x'_i = 0$ when $i \in \bar{s} \backslash B = B'$. By $|B|$ denote the number of elements of the set B. If $B = \{i_1, \ldots, i_{|B|}\}$, then

$$\sum_{\nu_B = n_B}^{m_B} c_\nu = \sum_{\nu_{i_1} = n_1}^{m_1} \cdots \sum_{\nu_{i_{|B|}} = n_{|B|}}^{m_{|B|}} c_{\nu_{i_1}}, \ldots, \nu_{i_{|B|}}.$$

We will also use the following notation: by Π_s we denote the set of all nonempty subsets of the set $\bar{s}$; $e = (1, \ldots, 1)$; $m \pm n = (m_1 \pm n_1, \ldots, m_s \pm n_s)$; $m \geq n$ denotes $m_i \geq n_i$, $i \in \bar{s}$; $m \to \infty$ denotes $m_i \to \infty$, $i \in \bar{s}$; $dt_B = \prod_{i \in B} dt_i$ and $dt = \prod_{i=1}^{s} dt_i$.

Let X^s be either the Lebesgue space $L_p(T^s)$, $T \in [-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$, or the space of continuous functions $C(T^s)$. If $f \in X^s$, by $\|f\|_{X^s}$ we denote the norm of f in the space X^s. Besides, for any $B \in \Pi_s$ we set

$$\|f\|_{X^{|B|}} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-|B|} \displaystyle\int_{T^{|B|}} |f(t)|^p dt_B \right)^{\frac{1}{p}}, & X^{|B|} = L_p(T^{|B|}), \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{\substack{t_j \in T \\ j \in B}} |f(t)|, & X^{|B|} = C(T^{|B|}). \end{cases}$$

It is clear that

$$\left\| \|f\|_{X^{|B|}} \right\|_{X^{|B'|}} = \|f\|_{X^s} \; . \tag{1.1}$$

For $f \in X^s$ we set

$$\Delta_{h_{\{j\}}} f(x) = f(x + h_{\{j\}}) - f(x),$$

and define $\Delta_{h_B} f(x)$ to be the repeated applications of the operation h_j when j runs over the set $B \subset \overline{s}$. By the expression

$$\sup_{\substack{|h_j| < \delta_j \\ j \in B}} \|\Delta_{h_B} f(x)\|_{X^s} = \omega_B(f, \delta_B)_{X^s}, \quad \delta_B \ge 0, \tag{1.2}$$

we define the modulus of continuity of a function $f \in X^s$ with respect to those variables whose indices belong to the set $B \subset \overline{s}$.

Let $T^{(j)}_{m_j}(x) \in X^s$ be a trigonometric polynomial of degree m_j $(m_j \ge 0)$ with respect to the variable x_j and coefficients depending on the remaining variables x_i, $i \in \{j\}'$. For $m_j < 0$ we assume that $T^{(j)}_{m_j}(x) = 0$. The following sum

$$T_m(x) = \sum_{j \in \overline{s}} T^{(j)}_{m_j}(x) \tag{1.3}$$

is called the trigonometric quasi-polynomial of degree m (see [1]). Denote by P_n the set of trigonometric quasi-polynomials of degree $\le n$, that is,

$$P_n = \{T_m(x) : \; m \le n\}.$$

The quantity

$$\mathcal{H}_n(f)_{X^s} = \inf_{T_m \in P_n} \|f - T_m\|_{X^s} \; , \tag{1.4}$$

introduced by M. K. Potapov [2], is called the best "angular" approximation of a function f (see [2]), or the best approximation of f by the quasi-polynomials of degree $\le n$ (see [1]). In what follows we will use the last term. M. K. Potapov [2] and Yu. A. Brudnyi [1] have found relationships between the best approximation $\mathcal{H}_n(f)_{X^s}$

and the modulus of continuity $\omega(f, n^{-1})$. Specifically, they proved direct and inverse theorems for the approximation of a function $f \in X^s$ by trigonometric polynomials.

Let the multiplicative matrix $\Lambda = \Big(\prod_{j=1}^{s} \lambda^{(j)}_{n_j,k_j}\Big) = (\lambda_{n,k})$ be given. The matrices $\Lambda_j = (\lambda^{(j)}_{n_j,k_j})$, $j = 1, \dots, s$, are called constituent matrices of the matrix Λ. Let the elements of Λ be such that for any $\varphi \in X^1$ and $f \in X^s$ we have the following relations:

$$L_{n_j}(\varphi, x_j) = \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_{m_j} \exp(im_jx_j)\lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_T \varphi(x_j+t_j) \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_jt_j)\lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|}dt_j, \quad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1.5}$$

$$L_n(f, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_m \prod_{j=1}^{s} \exp(im_jx_j)\lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{T^N} f(x+t) \prod_{j=1}^{s}\Big(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_jt_j)\lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|}\Big)dt, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_T \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_jt_j)\lambda^{(j)}_{n_jm|m_j|}dt_j = 1, \quad j \in \{1,\dots,N\}. \tag{1.7}$$

2. THE MAIN RESULT

Theorem 2.1. *Let for any $j \in \overline{s}$ and $\varphi \in X^1$ the inequalities*

$$\|\varphi - L_{n_j}(\varphi)\|_{X^1} \le \varkappa_{\Lambda_j} \sum_{k_j=0}^{\infty} E_{k_j}(\varphi)_{X^1} \cdot a^{(j)}_{n_j,k_j} \tag{2.1}$$

hold, where (a_{n_j,k_j}), $j \in \overline{s}$, are nonnegative matrices. Then for any $f \in X^s$

$$\|f - L_n(f)\|_{X^s} \le \varkappa_\Lambda \sum_{B\in\Pi_s} \sum_{k_B=0}^{\infty} \mathcal{H}_{k_B-e_{B'}}(f) \prod_{j\in B} a^{(j)}_{n_j,k_j}. \tag{2.2}$$

Proof. First, using the method of induction, we show that for any natural s

$$f(x+t) - f(x) = \sum_{B\in\Pi_s} \Delta_{t_B} f(x). \tag{2.3}$$

Indeed, for $s = 1$ the equality (2.3) is trivial. Assuming that (2.3) is valid for any $s = d$, it is easy to check that for any $x, t \in R^{d+1}$

$$\sum_{B\in\Pi_{d+1}} \Delta_{t_B} f(x) = \Delta_{t_{\{d+1\}}}\Big(\sum_{B\in\Pi_d} \Delta_{t_B} f(x)\Big) + \sum_{B\in\Pi_d} \Delta_{t_B} f(x) + \Delta_{t_{\{d+1\}}} f(x). \tag{2.4}$$

In view of the assumption we have

$$\sum_{B\in\Pi_d} \Delta_{t_B} f(x) = f(x+t_{\overline{d}}) - f(x).$$

From this and (2.4) we get

$$\sum_{B\in\Pi_{d+1}} \Delta_{t_B} f(x) = f(x+t) - f(x+t_{\overline{d}}) - f(x+t_{\{d+1\}}) + f(x)$$

$$+ f(x+t_{\overline{d}}) - f(x) + f(x+t_{\{d+1\}}) - f(x) = f(x+t) - f(x),$$

yielding (2.3) for any natural s.

Further, it follows from (1.6), (1.7) and (2.3) that

$$L_n(f,x) - f(x) = (2\pi)^{-s} \int_T (f(x+t) - f(x)) \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_j t_j) \lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|} \Big) dt$$

$$= \sum_{B\in\Pi_s} (2\pi)^{-s} \int_{T^s} \Delta_{t_B} f(x) \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_j t_j) \lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|} \Big) dt = \sum_{B\in\Pi_s} I(B,f,\Lambda,x).$$

Therefore we have

$$\|f - L_n(f)\|_{X^s} \le \sum_{B\in\Pi_s} \|I(B,f,\Lambda,x)\|_{X^s} \,. \tag{2.5}$$

We now proceed to estimate the norm $\|I(B,f,\Lambda,x)\|_{X^s}$. Note first that $\Delta_{t_B} f(x)$ does not depend on $t_{B'}$. Consequently, in view of (1.7), we get

$$I(B,f,\Lambda_B,x) = (2\pi)^{-s} \int_{T^s} \Delta_{t_B} f(x) \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_j t_j) \lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|} \Big) dt \tag{2.6}$$

$$= (2\pi)^{-|B|} \int_{T^{|B|}} \Delta_{t_B} f(x) \prod_{j\in B} \Big(\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \exp(im_j t_j) \lambda^{(j)}_{n_j,|m_j|} \Big) dt_B.$$

Assuming that for any $B\in\Pi_s$ the inequality

$$\|I(B,f,\Lambda_B,x)\|_{X^{|B|}} \le \varkappa_{\Lambda_B} \sum_{k_B=0}^{\infty} \|f - T_{k_B - e_{B'}}\|_{X^{|B|}} \prod_{j\in B} a^{(j)}_{n_j,k_j} \tag{2.7}$$

is proved, where $T_{k_B - e_{B'}}$ is any trigonometric quasi-polynomial of degree $k_B - e_{B'}$ and $\Lambda_B = \Big(\prod_{j\in B} \lambda^{(j)}_{n_j,k_j}\Big)$, in view of (1.1), we obtain

$$\|I(B,f,\Lambda_B,x)\|_{X^s} \le \varkappa_{\Lambda_B} \sum_{k_B=0}^{\infty} \|f - T_{k_B - e_{B'}}\|_{X^s} \prod_{j\in B} a^{(j)}_{n_j,k_j} \,.$$

From the latter inequality and (2.5), by virtue of arbitrariness of $T_{k_B - e_{B'}}(x)$ the assertion of the theorem follows.

To complete the proof, it remains to prove the inequality (2.7) for any $B \in \Pi_s$. We apply induction on the number of elements in the set B. Consider first the case where $|B| = 1$, that is, B consists of one element.

By (2.1), for any trigonometric polynomial $T_{k_j}^{(j)}(x)$ of degree k_j with respect to the variable x_j with coefficients depending on the remaining variables x_i, $i \in \{j\}'$, we have

$$\|f - L_{n_j}(f)\|_{X^{|\{j\}|}} \leq \varkappa_{\Lambda_j} \sum_{k_j=0}^{\infty} \|f - T_{k_j}^{(j)}\|_{X^{|\{j\}|}} a_{n_j,k_j} .$$

Let $B = \{j\}$. It follows from (1.5), (1.7) and (2.6) that

$$L_{n_j}(f, x) - f(x) = I(\{j\}, f, \Lambda_{\{j\}}, x).$$

The last two relations imply (2.7) in the case where $B \in \Pi_s$ consists of one element.

Assume now that (2.7) is true for those $B \in \Pi_s$ for which $|B| = d$, and prove it when $|B| = d + 1$.

Let $B_1 = \{j_1, \ldots, j_d\}$ and $B_2 = \{j_1, \ldots, j_{d+1}\}$. Using (2.6) it is easy to show that

$$I(B_2, f, \Lambda, x) = I(\{j_{d+1}\}, I(B_1, f, \Lambda_{B_1}), \Lambda_{\{d+1\}}, x), \tag{2.8}$$

$$I(B_1, f_1 + f_2, \Lambda_{B_1}, x) = I(B_1, f_1, \Lambda, x) + I(B_1, f_2, \Lambda, x). \tag{2.9}$$

Besides, if $T_{k_{j_{d+1}}}^{(j_{d+1})}$ is any trigonometric polynomial of degree $k_{j_{d+1}}$ with respect to the variable $x_{j_{d+1}}$ with coefficients depending on the remaining variables, then $I(B, T_{k_{j_{d+1}}}^{(j_{d+1})}, \Lambda, x)$ will be a trigonometric polynomial of degree $k_{j_{d+1}}$ with respect to the variable $x_{j_{d+1}}$.

Therefore, by the validity of inequality (2.7) when B consists of one element,for $B = \{j_{d+1}\}$ we have

$$\begin{aligned} \|I(B_2, f, \Lambda_{B_2}, x)\|_{X^{|\{j_{d+1}\}}} \\ \leq \varkappa_{\Lambda_{j_{d+1}}} \sum_{k_{j_{d+1}}=0}^{\infty} \left\| I(B_1, f, \Lambda_{B_1}, x) - I(B_1, T_{k_{j_{d+1}}}^{(j_{d+1})}, \Lambda_{B_1}, x) \right\|_{X^{|\{j_{d+1}\}|}} a_{n_{j_{d+1}}, k_{j_{d+1}}}^{(j_{d+1})} . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assuming (2.7) when $B_1 = \{j_1, \dots, j_d\}$, in view of (2.9), we have

$$\text{(2.11)} \qquad \left\| I(B_1, f, \Lambda_{B_1}, x) - I(B_1, T^{(j_{d+1})}_{k_{j_{d+1}}}, \Lambda_{B_1}, x) \right\|_{X^{|B_1|}}$$
$$\le \varkappa_{\Lambda_{B_1}} \sum_{k_{B_1}=0}^{\infty} \left\| f - T^{(j_{d+1})}_{k_{j_{d+1}}} - T_{k_{B_1} - e_{B_1'}} \right\|_{X^{|B_1|}} \prod_{j \in B_1} a^{(j)}_{n_j, k_j} \ ,$$

where $T_{k_{B_1} - e_{B_1'}}$ is any trigonometric quasi-polynomial of degree $k_{B_1} - e_{B_1'}$. Observe that (see (1.3)) for any preassigned $T_{k_{B_2} - e_{B_2'}}$ (trigonometric quasi-polynomial of degree $k_{B_2} - e_{B_2'}$) one can choose $T^{(j_{d+1})}_{k_{j_{d+1}}}$ and $T_{k_{B_1} - e_{B_1'}}$ to satisfy

$$T_{k_{B_2} - e_{B_2'}}(x) = T^{(j_{d+1})}_{k_{j_{d+1}}}(x) + T_{k_{B_1} - e_{B_1'}}(x).$$

Now, taking $X^{|B_1|}$- norm of both sides of (2.10) and using (1.1) and (2.11), we get

$$\| I(B_2, f, \Lambda_{B_1}, x) \|_{X^{|B_2|}} \le \varkappa_{\Lambda_{B_2}} \sum_{k_{B_2}=0}^{\infty} \| f - T_{k_{B_2} - e_{B_2'}} \|_{X^{|B_2|}} \prod_{j \in B_2} a^{(j)}_{n_j, k_j} \ ,$$

where $T_{k_{B_2} - e_{B_2'}}$ is any trigonometric quasi-polynomial of degree $k_{B_2} - e_{B_2'}$.

This proves (2.7) when $|B| = d + 1$, and hence for any $B \in \Pi_s$. The proof of Theorem 1.1 is completed. $\square$

Corollary 2.1. *Let the conditions of Theorem 2.1 and*

$$\text{(2.12)} \qquad \sum_{k_j=0}^{\infty} a_{n_j, k_j} < \varkappa_{\Lambda_j} \ , \quad j \in \overline{s},$$

be fulfilled. Then

$$\text{(2.13)} \qquad \| f - L_n(f) \|_{X^s} \le \varkappa_{\Lambda} \sum_{j \in \overline{s}} \sum_{k_j=0}^{\infty} E^{\{j\}}_{k_j}(f)_{X^s} a^{(j)}_{n_j, k_j} \ .$$

Proof. According to the definitions of the best approximation by quasi-polynomials (1.4) and partial best approximation by trigonometric polynomials we have

$$\text{(2.14)} \qquad H_{n_{\{i\}} - e_{\{i\}'}}(f)_{X^s} = E^{\{j\}}_{n_i}(f)_{X^s} \ , \quad i \in \overline{s}.$$

Let us take any $B \in \Pi_s$ and let $i \in B$. Using the monotonicity of $H_n(f)_{X^s}$, and (2.12), (2.14), we obtain

$$\text{(2.15)} \qquad \sum_{k_B=0}^{\infty} H_{k_B - e_{B'}}(f) \prod_{j \in B} a^{(j)}_{n_j, k_j} \le \sum_{k_B=0}^{\infty} E^{\{i\}}_{k_i}(f)_{X^s} \prod_{j \in B} a^{(j)}_{n_j, x_j}$$
$$\le \varkappa_{\Lambda} \sum_{k_i=0}^{\infty} E^{\{i\}}_{k_i}(f)_{X^s} a^{(i)}_{n_i, k_i} \ .$$

This and (2.2) imply the assertion of Corollary 2.1. □

Assume that we have a sequence $\{\varepsilon_k\}_{k\geq -e}$ decreasing with respect to each index k_j, $j\in\overline{s}$ and satisfying the condition

$$\lim_{k_j\to\infty}\varepsilon_k=0,\quad j\in\overline{s}.$$

Consider the following classes of functions

$$X^1(\varepsilon^{(j)})=\left\{\varphi:\varphi\in X^1,\ \ E^{\{j\}}_{k_j}(\varphi)_{X^1}\leq\varepsilon_{k_{\{j\}}-e_{\{j\}'}}\right\},\quad j\in\overline{s},$$
$$X^s(\varepsilon)=\left\{f:f\in X^s,\ \ H_k(f)_{X^s}\leq\varepsilon_k\right\}.$$

Now we are going to show that under the condition (2.12) the result of Theorem 2.1 is final in the following sense.

Assume that for any $j\in\overline{s}$

$$\sup_{\varphi\in X^1(\varepsilon^{(j)})}\|\varphi-L_{n_j}(\varphi)\|_{X^1}\geq\varkappa_{\Lambda_j}\sum_{k_j=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{j\}}-e_{\{j\}'}}a^{(j)}_{n_j,k_j}\,. \tag{2.16}$$

Then

$$\sup_{f\in X^s(\varepsilon)}\|f-L_n(f)\|_{X^s}\geq\varkappa_\Lambda\sum_{B\in\Pi}\sum_{k_B=0}^{\infty}\varepsilon_{k_B-e_{B'}}(f)\prod_{j\in B}a^{(j)}_{n_j,k_j}\,. \tag{2.17}$$

In fact, there exists $i\in\overline{s}$ such that

$$\varkappa_{\Lambda_i}\sum_{k_i=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{i\}}-e_{\{i\}'}}a^{(i)}_{n_i,k_i}\geq\frac{1}{s+1}\sum_{j\in\overline{s}}\varkappa_{\Lambda_j}\sum_{k_j=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{j\}}-e_{\{i\}'}}a^{(j)}_{n_j,k_j}\,. \tag{2.18}$$

It follows from (2.16) that there exists a function $\psi\in X^1(\varepsilon^{(i)})$ such that

$$\|\psi-L_{n_i}(\psi)\|_{X^1}\geq\varkappa_{\Lambda_i}\sum_{k_i=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{i\}}-e_{\{i\}'}}a^{(i)}_{n_i,k_i}\,. \tag{2.19}$$

Let us take any $B\in\Pi_s$ and let $j\in B$. Then using the monotonicity of ε_k and (2.12), we obtain

$$\sum_{k_B=0}^{\infty}\varepsilon_{k_B-e_{B'}}\prod_{d\in B}a_{n_d,x_d}\leq\varkappa_\Lambda\sum_{k_j=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{j\}}-e_{\{j\}'}}a^{(j)}_{n_j,k_j}\,.$$

This inequality yields

$$\sum_{B\in\Pi_s}\sum_{k_B=0}^{\infty}\varepsilon_{k_B-e_{B'}}\prod_{d\in B}a_{n_d,x_d}\leq\varkappa_\Lambda\sum_{j\in\overline{s}}\sum_{k_j=0}^{\infty}\varepsilon_{k_{\{j\}}-e_{\{j\}'}}a^{(j)}_{n_j,k_j}\,. \tag{2.20}$$

Assume now $f(x)=\psi(x_i)$. Then, in view of (1.7), we have

$$L_n(f,x)=L_{n_i}(\psi,x_i).$$

Therefore

$$\|f - L_n(f)\|_{X^s} = \|\psi - L_{n_i}(\psi)\|_{X^1} \ .$$

This and (2.18)–(2.20) imply (2.17).

Consider now the approximative properties of rectangular Fourier sums. This special case of Theorem 2.1 needs special attention, since in the one-dimensional case the properties of partial sums of Fourier series are studied in more detail than other linear means.

Let $f \in L(T^2)$ and let $S_n(f, x)$ be the partial sums of Fourier series of function f. Below Y^s stands for one of the spaces $C(T^s)$ or $L(T^s)$. Observe that for spaces $L_p(T^s)$, $1 < p < \infty$ the results considered below are less significant.

In the one-dimensional case K. I. Oskolkov in [3] and [4] proved that

$$\|f - S_n(f)\|_{Y^1} \leq \varkappa \sum_{\nu=0}^{n} \frac{E_{n+\nu}(f)_{Y^1}}{\nu + 1} \ .$$

From this and Theorem 2.1 we obtain the following result.

Theorem 2.2. *Let $f \in Y^s$. Then*

$$\|f - S_n(f)\|_{Y^s} \leq \varkappa_s \sum_{B \in \Pi_s} \sum_{\nu_B = 0}^{n_B} H_{(n+\nu)_B - e_{B'}}(f)_{Y^s} \prod_{j \in B} \frac{1}{\nu_j + 1} \ . \tag{2.21}$$

According to (2.14), in the special case of $s = 2$, $Y^2 = C(T^2)$, the inequality (2.21) becomes

$$\begin{aligned} \|f - S_{n_1 n_2}(f)\|_{C(T^2)} \leq \varkappa \Bigg(& \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{H_{n_1+\nu_1, n_2+\nu_2}(f)_{C(T^2)}}{(\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1)} \\ & + \sum_{\nu_1=0}^{n_1} E^{\{1\}}_{n_1+\nu_1}(f)_{C(T^2)} \cdot \frac{1}{\nu_1 + 1} + \sum_{\nu_2=0}^{n_2} E^{\{2\}}_{n_2+\nu_2}(f)_{C(T^2)} \cdot \frac{1}{\nu_2 + 1} \ . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Next, in view of D. Jackson's theorem (see (1.2)) we have

$$E^{(i)}_{n_i+\nu_i}(f)_{C(T^2)} < \varkappa \omega_{\{i\}} \left(f, \frac{1}{n_i + \nu_i} \right)_{C(T^2)} < \varkappa \omega_{\{i\}} \left(f, \frac{1}{n_i + 1} \right)_{C(T^2)}, \quad i = 1, 2.$$

Finally, according to Potapov - Brudnyi theorem (see [1], [2]), we have

$$H_{n_1+\nu_1, n_2+\nu_2}(f)_{C(T^2)} \leq \varkappa \omega_{\{1,2\}} \left(f, \frac{1}{n_1 + 1}, \frac{1}{n_2 + 1} \right)_{C(T^2)} .$$

Putting together the last two inequalities and (2.22) we obtain

$$
\begin{aligned}
(2.23)\quad & \|f - S_{n_1,n_2}(f)\|_{C(T^2)} \\
& \leq \varkappa \Bigg[\omega_{\{1\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}\right)_{C(T^2)} \ln(n_1+2) + \omega_{\{2\}}\left(f, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)} \ln(n_2+2) \\
& \qquad + \omega_{\{1,2\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)} \ln(n_1+2)\ln(n_2+2)\Bigg].
\end{aligned}
$$

This unimprovable inequality was obtained by L. V. Zhizhiashvili [5, p. 178]. This inequality, on account of

$$
\omega_{\{1,2\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)} \leq 2\min\left(\omega_{\{1\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}\right)_{C(T^2)}, \omega_{\{2\}}\left(f, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)}\right),
$$

yields the following corollary of Theorem 2.2:

$$
\begin{aligned}
(2.24)\quad & \|f - S_{n_1,n_2}(f)\|_{C(T^2)} \\
& \leq \varkappa \Bigg[\omega_{\{1\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}\right)_{C(T^2)} \ln(n_1+2) + \omega_{\{2\}}\left(f, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)} \ln(n_2+2) \\
& + \min\left(\omega_{\{1\}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}\right)_{C(T^2)}, \omega_{\{2\}}\left(f, \frac{1}{n_2+1}\right)_{C(T^2)}\right) \ln(n_1+2)\ln(n_2+2)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Let now $\omega_1(t)$ and $\omega_2(t)$ be given moduli of continuity, and let

$$
H_{\omega_1,\omega_2} = \left\{ f : f \in C(T^2),\ \ \omega_{\{j\}}\left(f, \frac{1}{n_j+1}\right)_{C(T^2)} \leq \omega_j\left(\frac{1}{n_j+1}\right)_{C(T^2)},\ \ j=1,2 \right\}.
$$

From the asymptotic equality, obtained by A. I. Stepanetz (see [6, p. 195]) for the quantity

$$
\sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}} \|f - S_{n_1,n_2}(f)\|_{C(T^2)},
$$

we get the unimprovability of the estimate (2.24) in the class of functions H_{ω_1,ω_2}. This estimate, however, becomes crude for those functions of the class H_{ω_1,ω_2} whose best approximations by quasi-polynomials decrease rapidly. For instance, if

$$
f(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{\cos k_1 x_1}{2^{k_1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\cos k_2 x_2}{2^{k_2}},
$$

it can be easily shown that the estimates (2.23) and (2.24) in this case become more crude than estimate (2.22).

Список литературы

[1] Ju. A. Brudnyi, "Approximation of functions of n variables by quasi-polynomials" [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **34**, 564, 564 – 583 (1970).

[2] M. K. Potapov, "The study of certain classes of functions by means of "angular" approximation" [in Russian], Studies in the theory of differentiable functions of several variables and its applications, IV. Trudy Mat. Inst. Steklov, **117**, 256 – 291, 345 (1972).

[3] K. I. Oskolkov, "Lebesgue's inequality in the uniform metric and on a set of full measure" [in Russian], Mat. Zametki, **18**, no. 4, 515 – 526 (1975).

[4] K. I. Oskolkov, "Lebesgue's inequality in the mean" [in Russian], Mat. Zametki, **25**, no. 4, 551 – 555, 636 (1979).

[5] L. V. Zhizhiashvili, Conjugate Functions and Trigonometric Series [in Russian], Izdat. Tbilis. Univ., Tbilisi (1969).

[6] A. I. Stepanets, Uniform Approximation by Trigonometric Polynomials. Linear Methods [in Russian], Naukova Dumka, Kiev, (1981).

Поступила 28 декабря 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 6, 2012, стр. 29-52.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ СТРОМБЕРГА

К. А. КЕРЯН, А. С. МАРТИРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *karenkeryan@yahoo.com*, *anush.martirosyan@gmail.com*

Аннотация. В работе исследованы полиномиальные всплески Стромберга. Доказана теорема единственности для рядов по этой системе. Для функции Пелли этой системы получена слабая оценка типа (1,1). Приведены некоторые контрпримеры.

MSC2010 number: 42C10.

Ключевые слова: всплеск Стромберга; теорема единственности; мажоранта частных сумм; функция Пелли.

1. Введение

В настоящей работе исследованы полиномиальные всплески Стромберга степени $m \geq 0$, изучение которых началось с работы [1]. Напомним определение этого всплеска: пусть $A_0 = \mathbb{Z}_+ \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Обозначим через S_i^m, $i = 0, 1$ пространство функций из $L_2(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R})$, которые на каждом интервале разбиения A_i являются полиномами степени $m+1$. Ясно, что $S_0^m \subset S_1^m$ и коразмерность S_0^m в S_1^m равна единице. Поэтому существует единственная, с точностью знака, функция $\tau \in S_1^m$ такая, что $\tau \perp S_0^m$ и $\|\tau\|_2 = 1$. В работе [1], наряду с другими результатами, получено, что система функций $f_{jk}(x) = 2^{j/2}\tau(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. τ представляет из себя всплеск.

Эта система имеет похожие свойства с системой Франклина. В частности, в работе [1] получена экспоненциальная оценка для τ:

$$|\tau(x)| \leq C_0 r^{|x|},\ 0 < r < 1.$$

Аналогичные оценки для функций системы Франклина известны как экспоненциальные оценки функций Франклина, доказаные З. Чисельским [3]. В последующем изложении мы укажем еще на несколько сходств между этими системами. Однако оказывается, некоторые свойства, которые верны для системы Франклина, и даже для линейных периодических всплесков Стромберга, не верны для полиномиальной системы Стромберга (соответствующие примеры приведены в разделе 5 настоящей работы).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j,k} a_{jk} f_{jk}(t). \tag{1.1}$$

Условимся обозначать коэффициенты через $a_{jk}(f)$, если это ряд Фурье-Стромберга некоторой функции $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, т.е.

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(t) f(t) dt.$$

Частные суммы ряда (1.1) определим следующим образом:

$$S_{JK}(t) = \sum_{(j,k) \le (J,K)} a_{jk} f_{jk}(t), \tag{1.2}$$

где $(j,k) \le (J,K)$ означает $j < J$, $k \in \mathbb{Z}$ или $j = J$, $k \le K$. В дальнейшем под сходимостью ряда (1.2) будем предполагать что для каждого целого j ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

и для каждого целого j_0 ряд

$$\sum_{j \le j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

сходятся. В разделе 2 (см. свойство 2.3) доказывается, что если $a_{jk} = a_{jk}(f)$, $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, то ряд (1.2) абсолютно сходится на $\mathbb{R}$.

Мажоранту частных сумм и функцию Пелли ряда (1.1) обозначим соответственно через

$$S^*(t) = \sup_{J,K} |S_{JK}(t)| \quad \text{и} \quad P(t) = \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если же речь идет о ряде Фурье-Стромберга некоторой функции f, то будем писать $S^* f(t)$ и $Pf(t)$.

Известно, что для классической системы Франклина (см. [2]) и даже для общей системы Франклина с квазидиадическим и сильно регулярным разбиением (см. [4]) оператор Пелли имеет слабый тип (1.1). В настоящей работе доказывается, что и в случае полиномиального всплеска Стромберга этот оператор имеет слабый тип (1.1) (см. теорему 4.2).

Используя методы работ [4]-[7], можно доказать, что из слабого типа (1.1) оператора Пелли следует, что для $f \in L_1(\mathbb{R})$ справедливо

$$\mu \{t \in \mathbb{R} : Pf(t) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Напомним, что функция g называется A-интегрируемой на $\mathbb{R}$, если она удовлетворяет условию

$$\mu\{t \in \mathbb{R} : |g(t)| > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

и если существует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [g(t)]_\lambda dt, \quad \text{где} \quad [g(t)]_\lambda = \begin{cases} g(t), & |g(t)| \le \lambda, \\ 0, & |g(t)| > \lambda. \end{cases}$$

При этом пишут

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [g(t)]_\lambda dt = (A) \int_{\mathbb{R}} g(t) dt.$$

В разделе 4 доказывается следующая теорема:

Теорема 1.1. *Пусть $S_{JK}(t)$ п.в. сходится к функции $f(t)$ и*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mu\{t \in \mathbb{R} : \ S^*(t) > \lambda\} = 0.$$

Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ выполняются

$$a_{jk} = (A) \int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t) dt.$$

Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [8]. Теорема верна и для общей системы Франклина в случае сильно регулярного и квазидиадического разбиения (см. [9]).

Условимся обозначать постоянные, зависящие лишь от порядка m, через C_1, $C_2, \dots$.

Если постоянная зависит от некоторого параметра, будем отмечать это в индексе.

Дополнение интервала $I \subset \mathbb{R}$ условимся обозначать через I^c.

2. Некоторые свойства и известные факты для системы Стромберга

Заметим, что из экспоненциальной оценки функции τ следует, что τ ограниченная функция, т.е. можно обозначить $\max_{x\in\mathbb{R}}|\tau(x)|$ через C_τ. Из той же оценки имеем, что

$$|f_{jk}(x)| \le C_0 2^{j/2} r^{|2^j x - k|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Исследуем другие свойства этой системы.

Свойство 2.1. [1] *В случае $m = 0$ (линейного всплеска Стромберга) имеет место*

$$\tau(l) = \tau(1)(\sqrt{3}-2)^{l-1},\ l = 1, 2, 3, \dots,$$
$$\tau(l) = \tau(0)(-\sqrt{3}-2)^{2l},\ l = 0, -1/2, -1, \dots,$$

где $\tau(0)$ и $\tau(1)$ отличны от нуля.

Свойство 2.2. *В случае $m = 1$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такая, что $\tau(k) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное: $\tau(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\{N_l : l \in A_1\}$ базис пространства S_1^1, состоящий из B-сплайнов. Точки разбиения A_1 обозначим через t_i, $i \in \mathbb{Z}$ в порядке возрастания с $t_0 = 0$. Нам понадобятся следующие известные свойства B-сплайнов (см. [10]):

N1. $suppN_{t_i} = (t_i, t_{i+3})$,

N2. $N_{t_i}(x) > 0$, $x \in (t_i, t_{i+3})$,

N3. N_{t_i} образуют деление единицы, и поэтому $N_{t_{i-1}}(t_i) + N_{t_{i-2}}(t_i) = 1$,

N4. $N_{t_i}(x + t_i) = N_{t_{i+1}}(x + t_{i+1})$, если $|i| \ge 2$.

N5. $N_{t_i}(x + t_i) = N_{t_i}(t_{i+3} - x)$, если $i \neq 0, 1$.

Заметим, что из свойств **N3**, **N4** и **N5** следует

N6. $N_{t_i}(t_{i+1}) = N_{t_i}(t_{i+2}) = \frac{1}{2}$ если $i \neq 0, 1$.

Из $\tau \in S_1^1$ имеем

$$\tau(x) = \sum_{l\in A_1} a_l N_l(x),\ a_l \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Итак, с учетом предположения и свойства **N6**, для $k \ge 3$, получим

$$0 = \tau(k) = \sum_{l\in A_1} a_l N_l(k) = a_{k-1}N_{k-1}(k) + a_{k-2}N_{k-2}(k) = \frac{1}{2}a_{k-1} + \frac{1}{2}a_{k-2}.$$

Откуда следует, что $a_k = -a_{k+1}$, $k \geq 1$. Учитывая, что $a_k \to 0$, когда $k \to +\infty$ (см. [11], доказательство леммы 2.2), получим $a_k = 0$, $k \geq 1$.

Положим в (2.1) значения $x = 2$ и $x = 1$ получим

$$0 = \tau(2) = a_1 N_1(2) + a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(2) = a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(2)$$

$$0 = \tau(1) = a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(1) + a_0 N_0(1) = a_0 N_0(1).$$

Учитывая **N2** получим $a_{1/2} = a_0 = 0$.

Положив в (2.1) $x = 0$ и учитывая **N6**, получим

$$0 = \tau(0) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(0) + a_{-1} N_{-1}(0) = \frac{1}{2} a_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{-1},$$

т.е. $a_{-\frac{1}{2}} = -a_{-1}$. Ясно, что из (2.1) и из $a_{t_i} = 0$, $i \geq 0$, имеем

$\tau(x) = 0, x \geq 1$,

$\tau(x) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x)$, $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ и

$\tau(x) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) + a_{-1} N_{-1}(x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Пусть $\widetilde{N}_0(x)$ B-сплайн с узлами $\{0, 1, 2, 3\}$. Тогда $\widetilde{N}_0(x) = \frac{1}{2} x^2$, $x \in [0, 1]$. Так как $\tau \perp S_0^1$ и $\widetilde{N}_0(x) \in S_0^1$, то

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad 0 = 2 \int_{\mathbb{R}} \tau(x) \widetilde{N}_0(x) dx &= \int_0^1 x^2 \tau(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (a_{-1} N_{-1}(x) + a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 a_{-1} N_{-1}(x) dx + \int_0^1 x^2 a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) dx.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $a_{-\frac{1}{2}} = -a_{-1}$ и

$N_{-\frac{1}{2}}(x) = 2(1-x)^2 - 6(\frac{1}{2} - x)^2$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$N_{-\frac{1}{2}}(x) = 2(1-x)^2$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

$N_{-1}(x) = 2(\frac{1}{2} - x)^2$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

из (2.2) получим

$$0 = a_{-1} \left(8 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 dx - 2 \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx \right) = -\frac{7}{4} a_{-1} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx.$$

Поэтому a_{-1}, а вместе с ним и $a_{-\frac{1}{2}}$ равны нулю.

Итак, получили $a_{t_i} = 0$, $i \geq -2$, откуда и из (2.1) следует, что $\tau(x) = 0$, $x \geq 0$. А это невозможно, ибо в таком случае τ принадлежала бы S_0^1, но по построению $\tau \perp S_0^1$. Следовательно наше предположение неверно. Свойство доказано. □

Свойство 2.3. *Если $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, то для любого целого j_0 существует постоянная $C_{j_0 p}$, зависящая только от j_0 и p, такая, что*

$$\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{jk}(f)||f_{jk}(x)| \leq C_{j_0 p} \|f\|_p.$$

Доказательство. Для $p = 1$ из

$$|a_{jk}(f)| \leq \|f_{jk}\|_\infty \|f\|_1 \leq C_\tau 2^{j/2} \|f\|_1,$$

получим

$$|a_{jk}(f)||f_{jk}(x)| \leq C_1 2^j \|f\|_1 r^{|2^j x - k|}.$$

Пусть теперь $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\|f_{jk}\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}} |f_{jk}(t)|^q dt \leq C_0 2^{jq/2} \int_{\mathbb{R}} r^{2^j q |t - k/2^j|} dt \\ &= C_0 \frac{2^{jq/2}}{2^j q} \int_{\mathbb{R}} r^{|t|} dt \leq C_{2p}\, 2^{j(q/2-1)}.\end{aligned}$$

Поэтому, для $p > 1$ имеем

$$\begin{aligned}&|a_{jk}(f)||f_{jk}(x)| \leq \|f_{jk}\|_q \|f\|_p |f_{jk}(x)| \\ &\leq C_{3p} \|f\|_p 2^{j(1/2-1/q)} 2^{j/2} r^{|2^j x - k|} = C_{3p} \|f\|_p 2^{j/p} r^{|2^j x - k|}.\end{aligned}$$

Итак, для $p \geq 1$ получили

$$|a_{jk}(f)||f_{jk}(x)| \leq C_{4p} \|f\|_p 2^{j/p} r^{|2^j x - k|},$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{jk}(f)||f_{jk}(x)| &\leq C_{4p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|2^j x - k|} \\ &\leq 2C_{4p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} \sum_{k \geq 0} r^k \leq C_{5p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} = C_{6p} 2^{j_0/p} \|f\|_p.\end{aligned}$$

Свойство доказано. □

Замечание 2.1. *В разделе 5 для $m = 0$ и $m = 1$ приведен пример функции из пространства $L_\infty(\mathbb{R})$, для которой утверждение свойства 2.3 не верно (см. пример 1).*

Рангом двоичного интервала $I = \left(\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right)$ назовем число j. Обозначим через $\{j,k\}$ интервал $\left(\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right)$. Приведем еще две леммы, которые нам понадобятся при доказательстве основных теорем.

Лемма 2.1. [11] *Пусть $I = [\frac{\alpha}{2^{j_0}}, \frac{\beta}{2^{j_0}}]$, $\alpha, \beta, j_0 \in \mathbb{Z}$ и*

$$F_{j,I}(x) = \sum_{k:\{j,k\}\subset I} a_{jk} f_{jk}(x).$$

Тогда существует постоянная $C_m > 0$ такая, что для $j \ge j_0$

$$|F_{j,I}(x)| \le C_m r^{2^j d(x,I)} \max_{t\in\left[\frac{\beta}{2^{j_0}}, \frac{\beta+m+2}{2^{j_0}}\right]} |F_{j,I}(t)|, \quad x \ge \max I,$$

$$|F_{j,I}(x)| \le C_m r^{2^j d(x,I)} \max_{t\in\left[\frac{\alpha-m-2}{2^{j_0}}, \frac{\alpha}{2^{j_0}}\right]} |F_{j,I}(t)| \quad x \le \min I,$$

где $d(x, I) = \inf\{|x - y|,\, y \in I\}$.

Лемма 2.2. [12] *Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \delta \le 1$ существует постоянная $C_{n,\delta}$ такая, что для любого полинома $P(x)$ степени n и подмножества $A \subset [a, b]$ с условием $\mu(A) \ge \delta(b - a)$, справедливо*

$$\max_{x\in[a,b]} |P(x)| \le C_{n,\delta} \sup_{x\in A} |P(x)|.$$

3. Основные леммы

Пусть $Mf(x)$ есть максимальная функция Харди-Литлвуда:

$$Mf(x) = \sup_{I:x\in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|dt,$$

Известно, что она удовлетворяет следующему неравенству

$$\mu\{x : Mf(x) > y\} \le \frac{5}{y}\|f\|_1, \quad y > 0, \quad f \in L_1. \tag{3.1}$$

Обозначим

$$E_\lambda = \{t \in \mathbb{R} : S^*(t) > \lambda\}, \quad B_\lambda = \left\{t \in \mathbb{R} : M\chi_{E_\lambda}(t) > \frac{1}{3(m+2)}\right\}. \tag{3.2}$$

Ясно, что $E_{\lambda_1} \supset E_{\lambda_2}$, $B_{\lambda_1} \supset B_{\lambda_2}$, при $\lambda_1 < \lambda_2$, а также $\mu(E_\lambda \setminus B_\lambda) = 0$, $\mu(B_\lambda) \le 15(m + 2)\mu(E_\lambda)$. По условию теоремы 1.1 имеем $\lambda\mu(E_\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$, поэтому начиная с некоторого места $\mu(E_\lambda)$, а следовательно и $\mu(B_\lambda)$, конечны. В последующем будем считать λ настолько большим, что $\mu(B_\lambda) < \infty$.

Лемма 3.1. *Существует постоянная C_7 такая, что для любого ряда (1.1) и $\lambda > 0$ имеет место*

$$\int\limits_{B_\lambda^c} \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{(j,k)\le(J,K) \\ \{j,k\}\subset B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| dt \le C_7 \lambda \mu(E_\lambda).$$

Лемма 3.2. *Существует постоянная C_8 такая, что для любого ряда (1.1) и $\lambda > 0$ имеет место*

$$\int\limits_{B_\lambda} \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{(j,k)\le(J,K) \\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \le C_8 \lambda \mu(E_\lambda).$$

Лемма 3.3. *Ряд*

$$\sum_{\{j,k\}\not\subset B_\lambda} a_{jk} f_{jk}(x)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in L_1(\mathbb{R}) \bigoplus L_\infty(\mathbb{R})$.

Множество B_λ с точностью до множества меры нуль можно представить в виде объединения интервалов $B_q^{(\lambda)}$ не имеющих общих концов. Зафиксируем некоторый $B_q^{(\lambda)}$. Пусть $\{j_q, k_q\}$ самый большой двоичный интервал входящий в $B_q^{(\lambda)}$. Ясно, что тогда

$$2^{-j_q} \le |B_q^{(\lambda)}| \le 4 \cdot 2^{-j_q}.$$

Для $j \ge j_q$ обозначим через $I_q^{(j)}$ интервал вида $[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_2}{2^j}]$ наибольшей длины, содержащийся в $B_q^{(\lambda)}$. Заметим, что для $i = 1, 2, ..., m+2$ имеют место

$$\left| \left[\frac{k_1 - i}{2^j}, \frac{k_1 - i + 1}{2^j} \right] \cap E_\lambda^c \right| > \frac{1}{3 \cdot 2^{j-1}} \quad \text{и} \tag{3.3}$$

$$\left| \left[\frac{k_2 + i - 1}{2^j}, \frac{k_2 + i}{2^j} \right] \cap E_\lambda^c \right| > \frac{1}{3 \cdot 2^{j-1}}. \tag{3.4}$$

Действительно, если бы не выполнялось (3.3), то хотя бы для одного $i = 1, 2, ..., m+$ 2 было бы справедливо следующее:

$$\left| \left[\frac{k_1 - i}{2^j}, \frac{k_1 - i + 1}{2^j} \right] \cap E_\lambda \right| \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^j},$$

следовательно,

$$\left|\left[\frac{k_1-m-2}{2^j},\ \frac{k_1}{2^j}\right]\cap E_\lambda\right|\geq\frac{1}{3\cdot 2^j},$$

а это значит, что $\left[\frac{k_1-m-2}{2^j},\ \frac{k_1}{2^j}\right]\subset B_\lambda$, что невозможно по определению интервала $I_q^{(j)}$. Следовательно, (3.3) выполняется для всех $i=1,2,...,m+2$. Неравенство (3.4) доказывается аналогично.

Обозначим

$$S_{q,l}^{(j)}(t)=\sum_{\substack{k:k\leq l\\ \{j,k\}\subset I_q^{(j)}}}a_{jk}f_{jk}(t).$$

Ясно, что $|S_{q,l}^{(j)}(t)|\leq 2\lambda$, $t\in E_\lambda^c$, учитывая также (3.3), (3.4) и леммы 2.1, 2.2, получим

$$|S_{q,l}^{(j)}(t)|\leq C_9\lambda r^{2^j d(t,I_q^{(j)})},\quad t\notin I_q^{(j)}.$$

Обозначим

$$\Phi_q^{(\lambda)}(t)=\begin{cases}0, & t\in\{j_q,k_q\},\\ \sum\limits_{j=j_q}^{h-1}\max\limits_l|S_{q,l}^{(j)}(t)|, & t\in I_q^{(h)}\setminus I_q^{(h-1)},h>j_q,\\ \sum\limits_{j=j_q}^{\infty}\max\limits_l|S_{q,l}^{(j)}(t)|, & t\notin B_q^{(\lambda)}.\end{cases}$$

Ясно, что

$$\int_{\mathbb{R}}\Phi_q^{(\lambda)}(t)dt=\sum_{j=j_q}^{\infty}\int_{(I_q^{(j)})^c}\max_l|S_{q,l}^{(j)}(t)|dt\leq C_{10}\lambda\sum_{j=j_q}^{\infty}\int_{(I_q^{(j)})^c}r^{2^j d(t,\,I_q^{(j)})}dt=$$
$$2C_{10}\lambda\sum_{j=j_q}^{\infty}\int_0^{\infty}r^{2^j t}dt\leq C_{11}\lambda\sum_{j=j_q}^{\infty}2^{-j}\leq C_{12}\lambda 2^{-j_q}\leq C_{12}\lambda|B_q^{(\lambda)}|. \tag{3.5}$$

Очевидно, что

$$\sup_{J,K}\left|\sum_{\substack{\{j,k\}\subset B_\lambda\\ (j,k)\leq(J,K)}}a_{jk}f_{jk}(t)\right|\leq\sum_q\Phi_q^{(\lambda)}(t),\quad t\notin B_\lambda. \tag{3.6}$$

Из последних двух неравенств и $\mu(B_\lambda)\leq 15(m+2)\mu(E_\lambda)$, получаем

$$\int_{B_\lambda^c}\sup_{J,K}\left|\sum_{\substack{\{j,k\}\subset B_\lambda\\ (j,k)\leq(J,K)}}a_{jk}f_{jk}(t)\right|dt\leq C_{12}\lambda\sum_q|B_q^{(\lambda)}|$$
$$=C_{12}\lambda\mu(B_\lambda)\leq 15C_{12}(m+2)\lambda\mu(E_\lambda),$$

и лемма 3.1 доказана.

Докажем, что существует постоянная C_{13} такая, что

$$|a_{jk}f_{jk}(t)| \le C_{13}\lambda r^{2^j|t-\frac{k}{2^j}|},\ \{j,k\} \not\subset B_\lambda. \tag{3.7}$$

Аналогично доказательству соотношений (3.3), (3.4) можно убедится, что из $\{j,k\} \not\subset B_\lambda$ следует

$$|\{j,k+i\} \cap E^c_\lambda| \ge \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^j}, \quad i = -m-1,\ -m,\ ...,\ m+1. \tag{3.8}$$

Так как $|a_{jk}f_{jk}(t)| \le 2\lambda$ на E^c_λ, а $f_{jk}(x)$ полином степени $m+1$ хотя бы на каждой половине $\{j,k+i\}$, для всех $i=-m-1,\ -m, ...,\ m+1$, из леммы 2.2 и (3.8) будем иметь, что

$$|a_{jk}f_{jk}(x)| < C_{14}\lambda,\ x \in \{j,k+i\}.$$

Осталось заметить, что (3.7) следует из леммы 2.1.

Обозначим через $\mathfrak{I}_\lambda$ множество максимальных двоичных интервалов входящих в B_λ, т.е. $I \in \mathfrak{I}_\lambda$ если I-двоичный интервал, $I \subset B_\lambda$ и каждый двоичный интервал $I' \supset I$ не содержится в B_λ: $I' \not\subset B_\lambda$. Ясно, что с точностью до множества меры нуль справедливо представление

$$B_\lambda = \bigcup_{I\in\mathfrak{I}_\lambda} I.$$

Рассмотрим некоторый $I \in \mathfrak{I}_\lambda$. Пусть ранг I равен j_I и I' двоичный интервал ранга j_I-1, который содержит I. Из определения $\mathfrak{I}_\lambda$ следует, что $I' \notin \mathfrak{I}_\lambda$. Следовательно

$$\frac{1}{|I'|}\int_{I'}\chi_{E_\lambda}(t)dt \le \frac{1}{3(m+2)},$$

откуда получим

$$\frac{|I\cap E_\lambda|}{|I|} \le \frac{2}{3}\frac{1}{m+2}, \quad I \in \mathfrak{I}_\lambda. \tag{3.9}$$

Пусть $t \in I$. Тогда, учитывая (3.7) будем иметь

$$\sum_{j\ge j_I,\,\{j,k\}\not\subset B_\lambda} |a_{jk}f_{jk}(t)| \le C_{15}\lambda\sum_{j\ge j_I}\ \sum_{k:\,\{j,k\}\not\subset B_\lambda} r^{2^j|t-\frac{k}{2^j}|} \le C_{16}\lambda\sum_{j\ge j_I} r^{2^j d(t,I^c)}.$$

Интегрируя по I получим

$$\int_I \sum_{j\geq j_I,\,\{j,k\}\not\subset B_\lambda} |a_{jk}f_{jk}(t)|dt \leq C_{16}\lambda \sum_{j\geq j_I}\int_I r^{2^j d(t,I^c)}dt \tag{3.10}$$

$$= 2C_{16}\lambda \sum_{j\geq j_I}\int_0^\infty r^{2^j t}dt \leq C_{17}\lambda \sum_{j\geq j_I} 2^{-j} \leq C_{18}\lambda|I|.$$

Обозначим

$$\Phi_{\lambda,1}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\geq j_I,\\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} |a_{jk}f_{jk}(t)|, & t\in I\in \mathfrak{I}_\lambda,\\ 0, & t\notin B_\lambda. \end{cases}$$

Из (3.10) имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_{\lambda,1}(t)dt \leq C_{18}\lambda \sum_{I\in\mathfrak{I}_\lambda} |I| = C_{18}\lambda\mu(B_\lambda). \tag{3.11}$$

Ясно, что для любой пары целых чисел $(j_0,\, k_0)$ справедливо

$$\left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| \leq \left|\sum_{(j,k)\leq(j_0,k_0)} a_{jk}f_{jk}(t)\right| + \left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ \{j,k\}\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right|. \tag{3.12}$$

Пусть $t\notin B_\lambda$. Тогда из (3.12) и (3.6) получим

$$\left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| \leq \lambda + \sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t), \text{ для п.в. } t\notin B_\lambda. \tag{3.13}$$

Пусть $t\in I\in\mathfrak{I}_\lambda$ и ранг I равен j_I. Если $j_0<j_I$, то вторая сумма в (3.12) является полиномом степени $m+1$ на I, и поэтому, из (3.9) и леммы 2.2 получим, что она по модулю не превосходит $C_{19}\lambda$, а второе слагаемое не превосходит $\sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t)$. Если же $j_0\geq j_I$, то для $t\in I$ имеем

$$\left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| \leq \left|\sum_{\substack{j\leq j_I\\ k\in\mathbb{Z}}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| + \left|\sum_{\substack{j\leq j_I\\ \{j,k\}\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| + \left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ j>j_I,\,\{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right|.$$

Здесь используя вышесказанное имеем, что первое слагаемое не превосходит $C_{19}\lambda$, второе меньше $\sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t)$. Третье слагаемое меньше $\Phi_{\lambda,1}(t)$. Итак, для п.в. $t\in B_\lambda$ получим

$$\left|\sum_{\substack{(j,k)\leq(j_0,k_0)\\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk}f_{jk}(t)\right| \leq C_{19}\lambda + \Phi_{\lambda,1}(t) + \sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t), \tag{3.14}$$

откуда, учитывая (3.5) и (3.11), получим

$$\int_{B_\lambda} \sup_{(j_0,k_0)} \left| \sum_{\substack{(j,k)\le(j_0,k_0) \\ \{j,k\}\not\subset B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| dt \le C_{20}\lambda\mu(B_\lambda),$$

и этим доказательство леммы 3.2 завершено.

Перед тем как перейти к доказательству леммы 3.3, убедимся, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Если* $S^*(t) \in L_1(\mathbb{R}) \bigoplus L_\infty(\mathbb{R})$*, то существует функция* $f \in L_1(\mathbb{R}) \bigoplus L_\infty(\mathbb{R})$ *такая, что* $a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t)dt$.

Доказательство. Имеем $S^*(t) \le C + \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Обозначим

$$F_m(x) = \sum_{(-m,0)\le(j',k')<(m,0)} a_{j'k'} f_{j'k'}(x),$$

$$\varphi_m(x) = \int_0^x F_m(t)dt.$$

Имеем $|F_m(t)| \le 2(C + \phi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Заметим, что на каждом конечном интервале $[a,\, b]$ функция φ_m ограничена и имеет ограниченную вариацию, причем

$$\sup_{x\in[a,b]} |\varphi_m(x)| \le 2C(b-a) + 2\int_a^b |\phi(t)|dt,$$

$$\bigvee_a^b \varphi_m(x) \le 2C(b-a) + 2\int_a^b |\phi(t)|dt.$$

В силу теоремы Хелли существует подпоследовательность φ_{m_l}, которая сходится на $[a,\, b]$ к некоторой функции ограниченной вариации. Итак, рассмотрим интервал $[-1,\, 1]$. Из вышесказанных рассуждений следует, что существует подпоследовательность $\varphi_{m_l}^{(1)}$ последовательности φ_m, которая сходится на $[-1,\, 1]$. Теперь рассмотрим последовательность $\varphi_{m_l}^{(1)}$ на интервале $[-2,\, 2]$. Аналогично, используя теорему Хелли получим, что существует подпоследовательность $\varphi_{m_l}^{(2)}$, которая сходится на $[-2,\, 2]$, причем заметим, что на $[-1,\, 1]$ предельная функция совпадает с пределом $\varphi_{m_l}^{(1)}$. Продолжая этот процесс, на i-ом шагу получим последовательность $\varphi_{m_l}^{(i)}$, которая сходится на $[-i,\, i]$. Рассмотрим диагональную последовательность $\varphi^{(l)}_{m_l}$. Эта последовательность по построению будет сходится на $\mathbb{R}$. Исследуем предельную функцию $\varphi(x)$. Ясно, что

$$|\varphi^{(l)}_{m_l}(x)-\varphi^{(l)}_{m_l}(y)|\le 2C|x-y|+2\int_x^y|\phi(t)|dt,$$

поэтому

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le 2C|x-y|+2\int_x^y|\phi(t)|dt.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ представляет собой абсолютно непрерывную функцию на $\mathbb{R}$, причем

$$|\varphi'(x)|\le 2C+2|\phi(x)|,\ \text{ для почти всех } x\in\mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Обозначим $f(x)=\varphi'(x)$. Из (3.15) становится ясно, что $f\in L_1(\mathbb{R})\bigoplus L_\infty(\mathbb{R})$. Докажем, что имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)f(x)dx=\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x). \tag{3.16}$$

Действительно, возьмем произвольный $\varepsilon>0$ и пусть $A>0$ некоторое действительное число. Используя (3.15) получим

$$\begin{aligned}\left|\int_A^\infty f_{jk}(x)f(x)dx\right|&\le\int_A^\infty|f_{jk}(x)||\varphi'(x)|dx\\ &\le\int_A^\infty|f_{jk}(x)|(2C+2|\phi(x)|)dx\le 2C\int_A^\infty|f_{jk}(x)|dx+2C'\int_A^\infty|\phi(x)|dx.\end{aligned}$$

Учитывая, что $f_{jk},\phi\in L_1(\mathbb{R})$, можно выбрать число A настолько большим, чтобы обе слагаемые были меньше ε. Аналогичные оценки верны и для интегралов

$$\int_A^\infty f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x),\qquad\int_{-\infty}^{-A} f_{jk}(x)d\varphi(x),\qquad\int_{-\infty}^{-A} f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x).$$

С другой стороны для любого конечного A по теореме Хелли имеем

$$\int_{-A}^{A} f_{jk}(x)d\varphi(x)=\lim_{l\to\infty}\int_{-A}^{A} f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x),$$

следовательно

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)d\varphi(x)-\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x)\right|\le 8\varepsilon.$$

Откуда, используя произвольность ε, получим равенство (3.16).

Остается доказать, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)d\varphi^{(l)}_{m_l}(x)=a_{jk}. \tag{3.17}$$

Так как

$$|\sum_{k'\in\mathbb{Z}} a_{j'k'}f_{j'k'}(x)|\leq 2S^*(x) \quad \text{и} \quad S^*(x)f_{jk}(x)\in L_1(\mathbb{R}),$$

то

$$\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)\sum_{k'\in\mathbb{Z}} a_{j'k'}f_{j'k'}(x)dx=\sum_{k'\in\mathbb{Z}} a_{j'k'}\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)f_{j'k'}(x)dx.$$

Аналогично получим, что при $m>|j|$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)F_m(x)dx=\sum_{(-m,0)\leq(j',k')<(m,0)} a_{j'k'}\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x)f_{j'k'}(x)dx=a_{jk},$$

откуда и следует равенство (3.17). Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.3 следует из леммы 3.4 учитывая оценки (3.13), (3.14) и интегрируемость функций $\Phi_{\lambda,1}(t)$ и $\Phi_q^{(\lambda)}(t)$ на $\mathbb{R}$ (см. (3.5) и (3.11)).

4. Доказательство теорем

Мы докажем следующую теорему, откуда непосредственно следует справедливость теоремы 1.1.

Теорема 4.1. *Пусть $S_{JK}(t)$ п.в. сходится к функции $f(t)$ и для некоторой последовательности $\lambda_i\uparrow\infty$ выполняется равенство*

$$\lim_{i\to\infty}\lambda_i\mu\{t\in\mathbb{R}:\, S^*(t)>\lambda_i\}=0.$$

Тогда для всех $j,k\in\mathbb{Z}$ имеем

$$a_{jk}=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}}[f(t)f_{jk}(t)]_{\Lambda_i}dt,$$

где $\Lambda_i=2^{j/2}C_\tau\cdot\lambda_i$.

Доказательство. Пусть E_{λ_i} и B_{λ_i} множества определенные в (3.2). Фиксируем некоторый $\{j_0,k_0\}$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}}[f(t)f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i}dt=\int_{B_{\lambda_i}}[f(t)f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i}dt+\int_{B^c_{\lambda_i}}[f(t)f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i}dt.$$

Первое слагаемое по модулю не превосходит

$$\Lambda_i\mu(B_{\lambda_i})=2^{j_0/2}C_\tau\cdot\lambda_i\mu(B_{\lambda_i})\to 0,\ \text{когда } i\to\infty,$$

а второе слагаемое равно

$$\int_{B^c_{\lambda_i}} f(t)f_{j_0k_0}(t)dt$$

так как $|f(t)| < \lambda_i$, когда $t \in B^c_{\lambda_i}$ и

$$|f_{j_0k_0}(t)| \le C_\tau 2^{j_0/2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\widetilde{I}_p^{(j)}$ составляющие интервалы $\mathbb{R} \setminus \sum_q I_q^{(j)}$ (см. раздел 3). Заметим, что для каждого $j \in \mathbb{Z}$ число интервалов $I_q^{(j)}$, а значит и число $\widetilde{I}_p^{(j)}$ конечно (так как $\mu(B_{\lambda_i})$ конечно), следовательно, можно считать, что эти интервалы пронумерованы в порядке возрастания. Пусть

$$S_q^{(j)}(x) = \sum_{\{j,k\}\subset I_q^{(j)}} a_{jk} f_{jk}(x) \quad \text{и} \quad \widetilde{S}_p^{(j)}(x) = \sum_{\{j,k\}\subset \widetilde{I}_p^{(j)}} a_{jk} f_{jk}(x).$$

Ясно, что

$$\sum_j \sum_q \left| S_q^{(j)}(t) \right| \le \sum_q \Phi_q^{(\lambda_i)}(t) \in L_1(\mathbb{R}),$$

следовательно ряд $\sum_j \sum_q |S_q^{(j)}(t)|$ почти всюду сходится. Очевидно, что

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{B^c_{\lambda_i}} f_{j_0k_0}(t) f(t) dt + o(1)$$
$$= \int_{B^c_{\lambda_i}} f_{j_0k_0}(t) \left(\sum_j \sum_q S_q^{(j)}(t) + \sum_j \sum_p \widetilde{S}_p^{(j)}(t) \right) dt + o(1).$$

Отсюда, с учетом леммы 3.1, получим

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{B^c_{\lambda_i}} f_{j_0k_0}(t) \sum_j \sum_p \widetilde{S}_p^{(j)}(t) dt + o(1).$$

Откуда, применяя лемму 3.2 и учитывая ограниченность функции $f_{j_0k_0}(t)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{\mathbb{R}} f_{j_0k_0}(t) \sum_j \sum_p \widetilde{S}_p^{(j)}(t) dt + o(1).$$

Ясно, что для каждого двоичного интервала $\{j,k\}$ начиная с некоторого i имеет место $\{j,k\} \not\subset B_{\lambda_i}$, следовательно, применяя лемму 3.3, получим

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{j_0k_0}(t) \sum_j \sum_p \widetilde{S}_p^{(j)}(t) dt = a_{j_0k_0}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 4.2. *Существует постоянная C_{21} такая, что для любого $g \in L_1(\mathbb{R})$ и $y > 0$ имеет место*

$$\mu\{t \in \mathbb{R} :\ Pg(t) > y\} \le \frac{C_{21}}{y} \|g\|_1.$$

Доказательство. Заметим, что если $g = g' + g''$, то $Pg(t) \le Pg'(t) + Pg''(t)$. Поэтому

$$\mu\{t \in \mathbb{R}:\, Pg(t) > y\} \le \mu\left\{t:\, Pg'(t) > \frac{y}{2}\right\} + \mu\left\{t:\, Pg''(t) > \frac{y}{2}\right\}.$$

Отсюда следует, что без ограничения общности можем считать $g(t) \ge 0$.

Обозначим $G_y = \{x \in \mathbb{R}:\, Mg(x) > y\}$. Из (3.1) имеем

$$|G_y| \le \frac{5}{y}\|g\|_1. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathcal{I}_y$ множество максимальных двоичных интервалов входящих в G_y, т.е. двоичный интервал I принадлежит $\mathcal{I}_y$ если $I \subset G_y$ и $I' \not\subset G_y$ для каждого двоичного интервала $I' \supset I$. Ясно, что $G_y = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_y} I$.
Рассмотрим $I \in \mathcal{I}_y$. Пусть ранг I равен j_I, а I' двоичный интервал ранга $j_I - 1$ содержащий I. Поскольку $I' \not\subset G_y$, то

$$\frac{1}{|I'|}\int_{I'} g(t)dt \le y. \tag{4.2}$$

Ясно, что $|I'| = 2|I|$. Учитывая неотрицательность функции $g(t)$, получим

$$\frac{1}{2|I|}\int_I g(t)dt \le \frac{1}{|I'|}\int_{I'} g(t)dt.$$

Отсюда, учитывая определение $\mathcal{I}_y$ и неравенство (4.2), получим

$$\frac{1}{|I|}\int_I g(t)dt \le 2y, \quad I \in \mathcal{I}_y. \tag{4.3}$$

Определим функцию $g_1(t)$ следующим образом:

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t), & t \notin G_y, \\ L_I(t), & t \in I \in \mathcal{I}_y. \end{cases}$$

где $L_I(t)$, $t \in I$, проекция функции $g(t), t \in I$, на пространство полиномов степени $m+1$ на I. Поскольку норма такого проектора в L_1 ограничена числом C_m, то $\|L_I\|_{L_1(I)} \le C_m \cdot \|g\|_{L_1(I)}$. Отсюда и из (4.3) имеем, что $\|L_I\|_{L_1(I)} \le 2C_m y|I|$. Поэтому, в силу неравенства Чебышева, будем иметь

$$\mu\{t \in I:\, |L_I(t)| > 4C_m y\} \le \frac{1}{4C_m y}\|L_I\|_{L_1(I)} \le \frac{1}{2}|I|.$$

Откуда, используя лемму 2.2 и учитывая, что функция $L_I(t)$ является полиномом на I, получим $|L_I(t)| \le C_{22}y$, $t \in I$. Следовательно $|g_1(x)| \le C_{22}y$, когда $x \in G_y$.

С другой стороны в точках Лебега множества $G_y^c = \{x \in \mathbb{R} : M(g,x) \le y\}$ имеет место $|g_1(x)| \le y$. Итак

$$|g_1(x)| \le C_{23} y \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Заметим, что из (4.4) и (4.1) следует

$$\int_{\mathbb{R}} g_1^2(t)dt = \int_{G_y^c} g^2(t)dt + \int_{G_y} g_1^2(t)dt \le y \int_{\mathbb{R}} g(t)dt + {C_{23}}^2 y^2 |G_y| \le C_{24} y \|g\|_1.$$

Поэтому

$$|\{t \in \mathbb{R} : Pg_1(t) > y\}| = \left|\left\{t \in \mathbb{R} : (Pg_1(t))^2 > y^2\right\}\right| \le \frac{\|g_1\|_2^2}{y^2} \le C_{24} \frac{\|g\|_1}{y}.$$

Нам остается доказать, что существует постоянная C_{25} такая, что для функции $g_2 = g - g_1$ имеет место

$$\left|\left\{t \in \mathbb{R} : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} > y\right\}\right| \le \frac{C_{25}}{y} \|g\|_1.$$

Обозначим через $\widetilde{I}$ концентрический интервал с интервалом I, который имеет длину $3|I|$ и пусть $\widetilde{G}_y = \bigcup_{I \in \mathfrak{I}_y} \widetilde{I}$. Из (4.1) получим

$$|\widetilde{G}_y| \le \frac{15}{y} \|g\|_1.$$

Поэтому, достаточно доказать, что

$$\mu \left\{t \notin \widetilde{G}_y : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} > y\right\} \le \frac{C_{25}}{y} \|g\|_1. \tag{4.5}$$

Обозначим $g_I = g_2 \cdot \chi_I$, $I \in \mathfrak{I}_y$ и допустим, что выполняется

$$\int_{\widetilde{I}^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \le C_{26} \|g_I\|_1. \tag{4.6}$$

Убедимся, что из (4.6) следует (4.5). Действительно, учитывая, что $\operatorname{supp} g_I \subset I$, из (4.3) и (4.4) получим

$$\|g_I\|_1 = \int_I |g_2(t)| dt \le \int_I |g(t)| dt + \int_I |g_1(t)| dt \le C_{27} y |I|.$$

Отсюда и из неравенства $|a_{jk}(g_2)| \leq \sum_{I \in \mathfrak{I}_y} |a_{jk}(g_I)|$ следует, что (см. (4.1))

$$\int_{\widetilde{G}_y^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)||f_{jk}(t)|dt \leq \sum_{I \in \mathfrak{I}_y} \int_{\widetilde{I}^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_I)||f_{jk}(t)|dt \tag{4.7}$$
$$\leq C_{28} y \sum_{I \in \mathfrak{I}_y} |I| = C_{28} y |G_y| \leq C_{29} \|g\|_1.$$

Учитывая, что $\left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)||f_{jk}(t)|$, из (4.7) получим

$$\mu \left\{ t \notin \widetilde{G}_y : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} > y \right\}$$
$$\leq \mu \left\{ t \notin \widetilde{G}_y : \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)||f_{jk}(t)| > y \right\} \leq \frac{C_{29}}{y} \|g\|_1.$$

Итак, займемся доказательством (4.6). Фиксируем некоторый $I \in \mathfrak{I}_y$ и исследуем функцию g_I. Пусть ранг I равен j_I. Из определения функции g_1 имеем, что для произвольного полинома $p(t)$ степени $m+1$ справедливо

$$\int_I g_I(t) p(t) dt = 0.$$

Поэтому, учитывая, что функция $f_{jk}(x)$ на двоичных интервалах ранга больше чем j есть полином степени $m+1$, выводим, что $a_{jk}(g_I) = 0$, если $j < j_I$. Следовательно, в сумме (4.6) участвуют только слагаемые с $j \geq j_I$. Обозначим

$N_1 = \{(j,k) : j \geq j_I, \{j,k\} \subset I\}$,

$N_2 = \{(j,k) : j \geq j_I, \{j,k\} \subset \mathbb{R} \setminus \widetilde{I}\}$,

$N_3 = \{(j,k) : j \geq j_I, \{j,k\} \subset \widetilde{I} \setminus I\}$.

Ясно, что достаточно доказать (4.6) с суммами по N_1, N_2 и N_3 раздельно.

Рассмотрим (4.6) с суммой по N_1. Пусть $j \geq j_I$. Обозначим через J_i, $i = 1, 2, ..., 2^{j-j_I}$ составляющие интервалы ранга j интервала I, а соответствующие интегралы через $\sigma_i^{(j)}$:

$$\sigma_i^{(j)} = \int_{J_i} |g_I(t)| dt, \quad i = 1, 2, ..., 2^{j-j_I}.$$

Имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq \sum_i \int_{J_i} |g_I(t) f_{jk}(t)| dt \leq 2^{j/2} C \sum_i \sigma_i^{(j)} r^{2^j d(J_i, \frac{k}{2^j})},$$

$$\int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq Cr^{2^{j-j_I}} 2^{-j/2}.$$

Из последних двух неравенств следует

$$\sum_{k:\,(j,k)\in N_1} |a_{jk}(g_I)| \int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq C_{30} r^{2^{j-j_I}} \sum_i \sigma_i^{(j)} \sum_{k:\,(j,k)\in N_1} r^{2^j d(J_i, \frac{k}{2^j})}$$
$$\leq C_{31} r^{2^{j-j_I}} \sum_i \sigma_i^{(j)} = C_{31} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1.$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k)\in N_1} \int_{\widetilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)||f_{jk}(t)|dt \leq C_{32} \|g_I\|_1.$$

Перейдем к оценке суммы по N_2. Пусть $N_2^- = \{(j,k) \in N_2 :\ \{j,k\} \text{ левее } I\}$, $N_2^+ = \{(j,k) \in N_2 :\ \{j,k\} \text{ правее } I\}$. Так как эти суммы оцениваются аналогично, мы ограничимся исследованием суммы по N_2^-. Пусть $j \geq j_I$. Для $(j,k) \in N_2^-$ имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq C_0 2^{j/2} r^{2^{j-j_I} + 2^j d(\widetilde{I}, \frac{k}{2^j})} \|g_I\|_1 \quad \text{и} \quad \int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq C_0 2^{-j/2}.$$

Следовательно имеет место

$$\sum_{k:\,(j,k)\in N_2^-} |a_{jk}(g_I)| \int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq C_{33} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1 \sum_{k:\,(j,k)\in N_2^-} r^{2^j d(\widetilde{I}, \frac{k}{2^j})} \leq C_{34} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1.$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k)\in N_2^-} \int_{\widetilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)||f_{jk}(t)|dt \leq C_{35} \|g_I\|_1.$$

Итак, осталось оценить сумму по N_3. Эту сумму тоже разобьем на две части – N_3^- и N_3^+ состоящие из тех $\{j,k\}$, которые соответственно левее и правее I. Эти суммы оцениваются аналогично, поэтому рассмотрим только сумму по N_3^-. В этом случае имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq C_0 2^{j/2} r^{2^j d(I, \frac{k}{2^j})} \|g_I\|_1 \quad \text{и} \quad \int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq C_0 2^{-j/2} r^{2^j d(\widetilde{I}^c, \frac{k}{2^j})}.$$

Отсюда, получим

$$\sum_{k:\,(j,k)\in N_3^-} |a_{jk}(g_I)| \int_{\widetilde{I}^c} |f_{jk}(t)|dt \leq C_{36} \|g_I\|_1 \sum_{k:\,(j,k)\in N_3^-} r^{2^j d(I, \frac{k}{2^j}) + d(\widetilde{I}^c, \frac{k}{2^j})}$$
$$= C_{36} \|g_I\|_1 r^{2^{j-j_I}} \sum_{k:\,(j,k)\in N_3^-} 1 = C_{36} \|g_I\|_1 2^{j-j_I} r^{2^{j-j_I}}.$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k)\in N_3^-} \int_{\widetilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)||f_{jk}(t)|dt \leq C_{37}\|g_I\|_1$$

что завершает доказательство теоремы. □

5. Примеры

Пример 1. *Если порядок всплеска Стромберга $m = 0$ или $m = 1$, то существует ограниченная функция f такая, что*

1. *функция Пелли $Pf(x) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$,*
2. *для произвольного $j_0 \in \mathbb{Z}$*

$$\sum_{j\leq j_0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{jk}(f)f_{jk}(x)| = \infty,\ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Из свойств 2.1 и 2.2 следует, что в случаях $m = 0$ и $m = 1$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tau(-k_0) \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\tau(-k_0) > 0$. Тогда для некоторого $0 < \delta < 1$ выполняется

$$\int_{-k_0+\delta/2}^{-k_0+\delta} \tau(x)dx = 2c_\tau > 0.$$

Предположим, что имеем последовательность целых чисел $j_1, j_2, ...$ стремящаяся к $-\infty$. Построим точки $x_1, x_2, ...$ следующим образом:

$$x_{2l-1} = \delta/2 \cdot 2^{-j_l} \quad \text{и} \quad x_{2l} = \delta \cdot 2^{-j_l}, \quad l = 1, 2, ...$$

Если число $k_0 \leq 0$, то ясно, что взяв $j_{l+1} < j_l - 1$ получим $x_{2l} < x_{2l+1}$, $l = 1, 2, ...$, причем в этом случае $x_l \uparrow \infty$. Определим функцию f следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ 1, & x \in (x_{2l-1}, x_{2l}), \quad l = 1, 2, ..., \\ 0, & x \in [x_{2l}, x_{2l+1}], \quad l = 1, 2, ... \end{cases}$$

Убедимся, что можно выбрать числа j_l так, чтобы выполнялось

$$a_{j_l k_0}(f) \geq c_\tau 2^{-j_l/2},\ l = 1, 2, \ldots . \tag{5.1}$$

Из определения точек x_l следует

$$\int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x)dx = 2c_\tau 2^{-j_l/2},\ l = 1, 2, \ldots .$$

Действительно

$$\int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x)dx = 2^{j_l/2}\int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} \tau(2^{j_l}x - k_0)dx = 2^{-j_l/2}\int_{-k_0+\delta/2}^{-k_0+\delta} \tau(x)dx = 2c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Пусть j_1 произвольное отрицательное целое число. Выберем $j_2 < j_1 - 1$ так, чтобы

$$\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_1-j_2}}^{\infty} |\tau(x)|dx < c_\tau, \tag{5.2}$$

$$C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_2-j_1} < \frac{1}{2}c_\tau. \tag{5.3}$$

Из (5.2) следует, что

$$\left|\int_{x_3}^{\infty} f(x)f_{j_1k_0}(x)dx\right| \le 2^{j_1/2}\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{-j_2}}^{\infty} |\tau(2^{j_1}x - k_0)|dx$$
$$= 2^{-j_1/2}\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_1-j_2}-k_0}^{\infty} |\tau(x)|dx \le 2^{-j_1/2}\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_1-j_2}}^{\infty} |\tau(x)|dx \le c_\tau 2^{-j_1/2}.$$

Тогда из определения f, (5.2) и из последней оценки получим

$$a_{j_1k_0} = \int_{x_1}^{x_2} f_{j_1k_0}(x)dx + \int_{x_3}^{\infty} f(x)f_{j_1k_0}(x)dx \ge c_\tau 2^{-j_1/2}.$$

Выберем $j_3 < j_2 - 1$ так, чтобы

$$\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_2-j_3}}^{\infty} |\tau(x)|dx < \frac{1}{2}c_\tau, \tag{5.4}$$

$$C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_3-j_2} < \frac{1}{3}c_\tau. \tag{5.5}$$

Из (5.4) следует, что

$$\left|\int_{x_5}^{\infty} f(x)f_{j_2k_0}(x)dx\right| \le 2^{-j_2/2}\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_2-j_3}}^{\infty} |\tau(x)|dx \le \frac{1}{2}c_\tau 2^{-j_2/2},$$

а из (5.3) следует, что

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f_{j_2k_0}(x)dx\right| \le 2^{-j_2/2}\int_{2^{j_2}x_1-k_0}^{2^{j_2}x_2-k_0} |\tau(x)|dx$$
$$\le 2^{-j_2/2}C_\tau 2^{j_2}|x_2 - x_1| \le 2^{-j_2/2}C_\tau \frac{\delta}{2}2^{j_2-j_1} \le \frac{1}{2}c_\tau 2^{-j_2/2}.$$

Тогда из определения f, (5.2) и из последних оценок получим

$$a_{j_2k_0} = \int_{x_1}^{x_2} f_{j_2k_0}(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f_{j_2k_0}(x)dx$$
$$+ \int_{x_5}^{\infty} f(x)f_{j_2k_0}(x)dx \ge c_\tau 2^{-j_2/2}.$$

Продолжая этот процесс на l-ом шагу выберем $j_{l+1} < j_l - 1$ так, чтобы

$$\int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_l - j_{l+1}}}^{\infty} |\tau(x)| dx < \frac{1}{l} c_\tau, \tag{5.6}$$

$$C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_{l+1} - j_l} < \frac{1}{l+1} c_\tau. \tag{5.7}$$

Из (5.6) следует, что

$$\left| \int_{x_{2l+1}}^{\infty} f(x) f_{j_l k_0}(x) dx \right| \leq 2^{-j_l/2} \int_{\frac{\delta}{2}\cdot 2^{j_l - j_{l+1}}}^{\infty} |\tau(x)| dx \leq \frac{1}{l} c_\tau 2^{-j_l/2},$$

а из (5.7) (заменяя $l+1$ на l) следует, что для каждого $i = 1, 2, ..., l-1$ выполняются

$$\left| \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} f_{j_l k_0}(x) dx \right| \leq 2^{-j_l/2} \int_{2^{j_l} x_{2i-1} - k_0}^{2^{j_l} x_{2i} - k_0} |\tau(x)| dx \leq 2^{-j_l/2} C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_l - j_i} \leq \frac{1}{l} c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Тогда из определения f, (5.2) и из последних оценок получим

$$a_{j_l k_0} = \sum_{i=1}^{l-1} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} f_{j_l k_0}(x) dx + \int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x) dx + \int_{x_{2l+1}}^{\infty} f(x) f_{j_l k_0}(x) dx \geq c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Следовательно (5.1) выполняется.

Итак, получили, что

$$|a_{j_l k_0}(f) f_{j_l k_0}(x)| \geq c_\tau \tau(2^{j_l} x - k_0).$$

Если же $k_0 > 0$, то можем получить $x_l \downarrow -\infty$ и все рассуждения легко провести аналогично и в этом случае.

Заметим, что для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ при $l \to \infty$ имеем $\tau(2^{j_l} x - k_0) \to \tau(-k_0) \neq 0$. Следовательно $|a_{j_l k_0}(f) f_{j_l k_0}(x)| \not\to 0$, $l \to \infty$, откуда непосредственно следуют оба утверждения. □

Замечание 5.1. *Заметим, что доказательство можно провести аналогично и в случае $m > 1$ если только известно, что соответствующий всплеск Стромберга отличен от нуля в некоторой целой точке.*

В работе [13] доказано, что в случае периодического линейного всплеска Стромберга сходимость п.в. функции Пелли и самого ряда на множестве положительной меры эквивалентны (теорема 4.4). Оказывается в не периодическом случае это не верно, а именно имеет место следующее утверждение.

Пример 2. *Пусть порядок всплеска Стромберга* $m = 0$. *Тогда существует ряд* $\sum\limits_{j,k} a_{jk} f_{jk}(x)$, *который почти всюду расходится, но* $\sum\limits_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(x)$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(x), \text{ где } a_k f_{0k}(0) = \frac{1}{k}. \tag{5.8}$$

Используя свойство 2.1 получим

$$f_{0k}(l) = \tau(l-k) = \tau(0)(-\sqrt{3}-2)^{2(l-k)} = f_{0k}(0)(-\sqrt{3}-2)^{2l},$$

если $l - k = 0, -1/2, -1, \dots$. Фиксируя $l \in A_1$, получаем

$$f_{0k}(l) = f_{0k}(0)(-\sqrt{3}-2)^{2l},\ k \geq l\,.$$

Следовательно, для таких $l \leq 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(l) = (-\sqrt{3}-2)^{2l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(0),$$

а для $l > 0$

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} a_k f_{0k}(l) = (-\sqrt{3}-2)^{2l} \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k f_{0k}(0).$$

Итак, имеем что ряд (5.8) расходится в точках A_1. Учитывая еще, что функции $f_{0k}(x)$ линейны на каждом интервале разбиения A_1, получим, что ряд (5.8) расходится кроме нулей функций $f_{0k}(x)$, число которых счетно. Следовательно ряд (5.8) расходится п.в. на $\mathbb{R}$.

Аналогичными рассуждениями получим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_{0k}^2(x)$ сходится на A_1, следовательно и на $\mathbb{R}$. □

Abstract. The paper is devoted to the Stromberg's polynomial wavelets of degree $m \geq 0$. A uniqueness theorem is proved for series by this system. For Pally function of this system a weak estimate of type (1,1) is obtained. Counterexamples are also discussed.

Список литературы

[1] J.-O. Stromberg, "A modified Franklin system and heigher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math., Wadsworth, Belmont, CA, 475 – 494 (1983).

[2] С. В. Бочкарев, "Существование базисов в пространстве функций, аналитических в круге и некоторые свойства системы Франклина", Матем. сб., **95** (1), 3 – 18 (1974).

[3] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system II”, Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).

[4] Г. Геворкян, А. Мартиросян, “Мажоранта и функция Пелли рядов по общей системе Франклина”, Труды МИРАН (в печати).

[5] Г. Геворкян, А. А. Саакян, “Unconditional basis properties of general Franklin series”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **35**, no. 4, 2 – 22 (2000).

[6] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “On general Franklin systems”, Dissert. Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).

[7] G.G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin system in $L_p[0;1]$, $1 < p < 1$”, Studia Math., **164**, 161 – 204 (2004).

[8] Геворкян Г. Г., “Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина”, Мат. заметки, **59** (4), 521 – 545 (1996).

[9] M. P. Poghosyan, “Uniqueness of series by general Franklin systems”, Izv. NAN Armenii, **35** (4) (2000).

[10] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer, Berlin (1993).

[11] Z. Ciesielski, G. Gevorkyan, “Franklin spline othogonal system in $L_p(\mathbb{R})$ with $0 < p \leq 1$”, Acta Sci. Math.(Szeged), **66**, 211 – 226 (2000).

[12] Г. Г. Геворкян, “Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение в пространстве ReH_p”, Труды МИАН, **193** (1989).

[13] Г. Г. Геворкян, “Теоремы о модифицированной системе Франклина построенной Стромбергом. II”, Изв. НАН Армении, **26** (1), 31 – 51 (1991).

Поступила 4 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 6, 2012, стр. 53 - 70.

О СХОДИМОСТИ В $L^1[0,1]$ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ХААРА

А. Х. КОБЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *a_kobelyan@ysu.am*

Аннотация. В статье доказано, что для любой полной подсистемы $\chi_S = \{\chi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ общей системы Хаара и для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$, с мерой $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$, такое, что для всякой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $g \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E_ε, такую что жадный алгоритм исправленной функции g по этой подсистеме сходится по $L^1(0,1)$ норме.

MSC2010 number: 42C10,42C20.

Ключевые слова: общая система Хаара; жадный алгоритм; сходимость в L^1.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается сходимость в L^1 жадного алгоритма (гриди алгоритма) интегрируемой функций по общей системе Хаара, после исправления функции на множестве малой меры. Фундаментальные теоремы об исправлении функции на множестве малой меры были получены в 1912г. Н. Н. Лузиным и в 1939г. Д. Е. Меньшовым (см. [1], [2]).
В 1991г. Григоряном была получена следующая теорема (см.[3]):

Теорема 1.1. *(Усиленное L^1 -свойство) Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0,2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,2\pi]$ норме.*

Напомним определение жадного алгоритма.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве X, $||\psi_n||_X = 1$. Для каждого элемента $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \psi), \psi_k.$$

Пуст $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ есть некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Положим $\psi_S = \{\psi_k\}_{k \in \mathcal{S}}$. Пусть $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая перестановка чисел множества $\mathcal{S}$, для которой имеет место

$$|c_{\sigma(n)}(f)| \geq |c_{\sigma(n+1)}(f)| \quad \text{для всех} \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Множество всех таких перестановок обозначим через $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$. Когда в (1.1) имеют место строгие неравенства, то $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ содержит только один элемент.

Для каждого элемента $f \in X$ и для любой перестановки $\sigma = \{\sigma(k)\} \in \mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)}.$$

При $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $G_m(f, \psi)$ называется жадным алгоритмом по системе ψ (подробно о жадном алгоритме см. обзорную статью Темлякова [5]). Говорят, что жадный алгоритм элемента f по системе ψ сходится в X, если для всех $\sigma \in \mathbf{D}(f, \psi)$ имеет место

$$\lim_{m \to \infty} ||G_m(f, \psi, \sigma) - f||_X = 0.$$

Сходимость жадного алгоритма в банаховых пространствах изучались Девором [4], Темляковым [5], Конягиным [6], Войтащиком [7],[10] и другими авторами (см. [11]-[14]).

В дальнейшем через χ_E будем обозначать характеристическую функцию множества E, через $|E|$ – Лебегову меру множества E, через $||f||$ – L^1 норму функции f и $||f||_E := \int_E |f(t)|\, dt$.

Прежде, чем перейти к формулировке основных результатов настоящей работы, напомним определение общей системы Хаара, нормированной в L^1. Для начала положим $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $A_1^{(1)} = \Delta_1 = (0, 1)$, $\chi_1(x) = \chi_{(0,1)}$. Далее, выберем любую точку $t_2 \in (0, 1) \setminus \{t_0, t_1\}$, положив $A_1^{(2)} = (0, t_2)$, $A_2^{(2)} = (t_2, 1)$, $\Delta_2 = (0, 1)$,

$\Delta_2^+ = (0, t_2)$, $\Delta_2^- = (t_2, 1)$. Определим $\chi_2(x)$ следующим образом:

$$\chi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_2^+|}\ , & \text{при } x \in \Delta_2^+, \\ \frac{-1}{2|\Delta_2^-|}\ , & \text{при } x \in \Delta_2^-. \end{cases}$$

Пусть точки $t_0, t_1, ..., t_n$ уже выбраны, обозначим через $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_n^{(n)}$ интервалы, полученные от разделения отрезка [0,1] точками $\{t_k\}_{k=1}^n$. Возьмем любую точку t_{n+1} из $(0,1) \setminus \{t_0, t_1, ...t_n\}$, тогда t_{n+1} будет принадлежать некоторому $A_k^{(n)} = (a, b)$. Положим $\Delta_{n+1} = (a, b)$, $\Delta_{n+1}^+ = (a, t_{n+1})$, $\Delta_{n+1}^- = (t_{n+1}, b)$ и

$$\chi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_{n+1}^+|}\ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^+, \\ \frac{-1}{2|\Delta_{n+1}^-|}\ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^-, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Выбор системы точек $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=0}^\infty$ произволен, мы лишь потребуем, чтобы эта система была плотна в [0,1], то есть чтобы для множеств $A_k^{(n)}$ имело место следующее:

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\le k\le n} |A_k^{(n)}| = 0, \tag{1.2}$$

Значения функций в точках разрыва для нас несущественны и мы их не приводим. Система функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathcal{T} = \{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ называется общей системой Хаара нормированной в $L^1(0,1)$.

Отметим, что когда $\mathcal{T} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, ...\}$, то определенная система совпадает с классической системой Хаара. Коэффициенты Фурье-Хаара $c_n(f, \mathcal{H}_\mathcal{T})$ определяются следующей формулой:

$$c_n(f, \mathcal{H}) = \frac{1}{||\chi_n||_2^2} \int_{\Delta_n} f(t)\chi_n(t)dt \qquad n = 1, 2, ...$$

Обозначим $spec\{f\} = \{k \in \mathbb{N}, c_k \neq 0\}$.

Отметим, что общая система Хаара является базисом во всех $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$ и безусловным базисом в $L_p(0,1), 1 < p < \infty$ (это следует из работ Д. Л. Буркхолдера [15], [16]).

Вопросу сходимости жадного алгоритма по классической системе Хаара и общей системе Хаара посвящено много работ (см. напр. [17]-[24]) А в работе [7] доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. *(Войтащик) Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{l=1}^{\infty}$ *– нормированный базис в банаховом пространстве* X*. Для того, чтобы жадный алгоритм сходился в* X *для всех элементов из* X*, необходимо и достаточно, чтобы существовало* $C > 0$ *такое, что для каждого элемента* $f \in X$ *и для любых* $\sigma \in \mathbf{D}$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *выполнялось бы неравенство*

$$||G_m(f, \psi, \sigma)||_X \leq C||f||_X \ .$$

Отметим, что в работе [8] Т. Тао установил, что существует интегрируемая функция для которой жадный алгоритм по классической системе Хаара п.в. расходится, а в работе [9] Г. Геворкяном и А. Степанян этот результат был обобщен для любого 0-регулярного вейвлет разложения.

В работе Дилворта, Кутцаровой и Войтащика [10] показано, что существует интегрируемая функция для которой жадный алгоритм по классической системе Хаара расходится в $L^1(0,1)$.

В данной статье будут рассмотрены те подсистемы $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_n\}_{n \in \mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ общей системы Хаара для которых верно следующее

$$\left| \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \Delta_{n_k} \right| = 1 \ . \tag{1.3}$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.3. *Пусть* $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *– любая подсистема общей системы Хаара удовлетворяющая условию (1.3). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$*, существует измеримое множество* $E_\varepsilon \subset [0,1]$*, с мерой* $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$*, такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $g \in L^1(0,1)$ *совпадающую с* f *на* E_ε*, такую, что*

(1) $||G_m(g, \chi_{\mathbb{S}})|| \leq 4||g|| \leq 12||f||$;

(2) $\mathbf{D}(g, \chi_{\mathbb{S}})$ *содержит только один элемент* $\{\sigma(k)\}$*, который является перестановкой всех чисел* $\mathbb{S}$;

(3) $\lim\limits_{m \to \infty} ||G_m(g, \chi_{\mathbb{S}}) - g|| = 0$.

Замечание 1.1. *Отметим, что из теоремы Войтащика и пункта 1 теоремы 1.3 не следует утверждение пункта 3 Теоремы 1.3, так как в теореме Войтащика требуется выполнение неравенства для каждого элемента* $f \in L^1(0,1)$.

Замечание 1.2. *Теорема 1.3 для подсистем классической системы Хаара, в которые входят целые группы, была доказана Григоряном и Гогяном в работе* [20].

В работе Навасардяна и Степанян [21] доказана следующая теорема

Теорема 1.4. *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$

$$a_n\chi_n(x) \to 0 \ \ \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x) = \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1], |E| > 1-\varepsilon$ *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существуют* $g \in L^1(0,1)$ *и числа* $\delta_n = 0$ *или 1 такие, что* $g(x) = f(x)$, $x \in E$, *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x)$ *сходится к функции* g *по норме* $L^1(0,1)$.

В этой статье доказывается также, что по любой подсистеме общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3) можно построить ряд, который универсален в $L^1(E_\varepsilon)$ относительно подрядов, где E_ε-измеримое множество с $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$. А именно, верно следующее утверждение

Теорема 1.5. *Для любой подсистемы* $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3) и для любого* $\varepsilon > 0$, *существуют измеримое множество* $E_\varepsilon \subset [0,1]$ *с мерой* $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$ *и ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k, \ \text{с} \quad b_k \searrow 0 \ \ \text{при} \ \ k \to \infty,$$

такие, что для каждой $f \in L^1(E_\varepsilon)$ *существуют числа* $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\delta_k = 1$ *или* $0)$ *для которых ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k;$$

сходится к f *по норме* $L^1(E_\varepsilon)$.

2. Доказательство основных лемм

В дальнейшем будем считать, что $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая подсистема общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3).

Лемма 2.1. *Для любых чисел* $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ *и неотрицательного полинома* $g(x)$ *по общей системе Хаара, существует полином* $Q(x) = \sum_{i=N_0}^{N} a_k \varphi_i(x)$ *по подсистеме* $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и множество* E *такие, что*

(1) $|a_k| < \delta$, *для любого* $k \in spec\{Q\}$;

(2) $|E| \geq \frac{|G|}{3}$, $\quad E \subset G$, *где* $G = \{x \in (0,1), g(x) > 0\}$;

(3) $Q(x) = \begin{cases} g(x) & \text{если } x \in E \\ 0 & \text{если } x \notin G \end{cases}$, $Q(x) \leq -g(x)$ *если* $x \in G \backslash E$,

(4) *если для некоторых* $n \in [N_0, N]$, $x_0 \in (0,1)$ *и перестановки* $\lambda(k)$ *чисел* $\overline{N_0, N}$ *выполняется* $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda(k)} \varphi_{\lambda(k)}(x_0) > 0$, *то* $x_0 \in E$, *и* $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda(k)} \varphi_{\lambda(k)}(x_0) = g(x_0)$.

Доказательство. Пусть $g(x) = \sum_{r=1}^{R} L_r \chi_{\Delta_{l_r}}$, где $L_r > 0$, а Δ_{l_r} – непересекающиеся множества из $\{A_k^{(n)}\}$. Следовательно, $G = \bigcup_{r=1}^{R} \Delta_{l_r}$. Возьмем натуральные числа $N, N_1, (N > N_1 > N_0)$ настолько большими (см.(1.2),(1.3)), что

$$|A_k^{(N_1)}| \leq \min\{\frac{\delta}{2\max_{1\leq r\leq R}\{|L_r|\}}, \min_{1\leq r\leq R}\{|\Delta_{l_r}|\}\} \text{ для всех } k = 1, 2..., N_1; \tag{2.1}$$

$$\left| \bigcup_{k=N_1}^{N} \Delta_{n_k} \right| > 1 - \frac{|G|}{3}.$$

Через $\{\Delta_{m_k}\}_{k=1}^{M}$ обозначим непересекающиеся множества из $\{\Delta_{n_k}\}_{k=N_1}^{N}$, для которых

$$\left| \bigcup_{k=1}^{M} \Delta_{m_k} \right| > 1 - \frac{|G|}{3}. \tag{2.2}$$

Определим полином $Q(x)$ следующим образом:

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_n \varphi_n(x), \tag{2.3}$$

где

$$a_n = \begin{cases} 2(-1)^{sgn\left(|\Delta_n^{>}| - |\Delta_n^{+}|\right)} \; |\Delta_n^{>}| \; L_r, & \text{если } n \in \{m_k, k = 1, ..., M\} \text{ и } \Delta_n \subset G, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь через $\Delta_n^{>}$ обозначено то из множеств из $\Delta_n^{+}, \Delta_n^{-}$, чья Лебегова мера больше. Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{M} (\Delta_{m_k}^{>} \cap G). \tag{2.5}$$

Из определения $\{a_n\}$ и (2.1) вытекает, что

(1)
$$\max_{N_0\le n<N}\{|a_n|\}\le 2\max_{1\le r\le R}\{|L_r|\}\max_{1\le k\le N_1}\{|A_k^{(N_1)}|\}\le\delta.$$

(2) если x_0 принадлежит E, тогда x_0 принадлежит некоторому множеству $\Delta_{m_r}^{>}$ и следовательно,

$$Q(x_0)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x_0)=a_{m_r}\varphi_{m_r}(x_0)=L_r. \tag{2.6}$$

(3) если x_0 принадлежит $G\backslash E$, тогда x_0 принадлежит некоторому множеству $\Delta_{m_r}\setminus\Delta_{m_r}^{>}$ и, следовательно,

$$Q(x_0)=(-1)^{sgn(|\Delta_{m_r}^{>}|-|\Delta_{m_r}^{+}|)}\frac{|\Delta_m^{>}|}{|\Delta_{m_r}\setminus\Delta_{m_r}^{>}|}L_r\le -L_r. \tag{2.7}$$

(4) если x_0 не принадлежит множеству G, то

$$Q(x_0)=0. \tag{2.8}$$

Согласно (2.2), (2.4)-(2.8) имеем, что
$$E=\{x:\quad Q(x)=g(x)\}\text{ и }|E|\ge\frac{1}{3}|G|.$$
Теперь докажем утверждение 4) леммы 2.1. Так как в полиноме участвуют φ_{m_k}, для которых Δ_{m_k} не пересекаются, то для любого $N_0<n<N_1,$ и любой $\lambda(k)$ перестановки чисел $\overline{N_0,N}$, $\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\chi_{\lambda(k)}(x_0)$ в некоторой точке x_0 либо равен 0, либо равен некоторому $a_k\varphi_k(x_0)$. Следовательно, если
$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\varphi_{\lambda(k)}(x_0)>0,\text{ то }x_0\in E\text{ и }\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\varphi_{\lambda(k)}(x_0)=g(x_0).$$
Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Для любых чисел* $N_0\in\mathbb{N}$, $\delta_1>0$, $0<\varepsilon<1$, $L\ne 0$ *и любого множества* Δ *из множеств* $\{A_k^{(n)}\}$ *существует полином по подсистеме* $\chi_{\mathbb{S}}=\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *общей системы Хаара:* $Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x)$, *множество* $E\subset\Delta$ *и* $\sigma(k)$ *перестановка ненулевых чисел* $\{a_k\}_{k=N_0}^{N}$ *такие, что*

(1) $\delta_1>|a_{\sigma(N_0)}|\ge|a_{\sigma(N_0+1)}|\ge...\ge|a_{\sigma(m)}|>0,$

(2) $|E|>(1-\varepsilon)|\Delta|,$

(3) $Q(x) = \begin{cases} L, & \textit{если } x \in E, \\ 0, & \textit{если } x \notin \Delta, \end{cases}$

(4) $|L||\Delta| \le ||Q|| \le 2|L||\Delta|$,

(5) $\max\limits_{N_0 < n \le N} ||\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}|| \le 2|L||\Delta|$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $L > 0$. Для $g_1(x) = L\chi_\Delta, N_0, \delta_1$ применим лемму 2.1. Тогда существуют полином $Q_1(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k^1 \varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_S = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и множество $E_1 \subset \Delta$ такие, что

$$|a_k^1| < \delta_1, \forall k \in spec\{Q_1(x)\}; \tag{2.9}$$

$$|E_1| \ge \frac{|\Delta|}{3}; \tag{2.10}$$

$$Q_1(x) = \begin{cases} L & \text{если } x \in E_1, \\ 0 & \text{если } x \notin \Delta, \end{cases} \quad Q_1(x) \le -L, \quad \text{если } x \in \Delta \backslash E_1, \tag{2.11}$$

если для некоторых $n \in [N_0, N_1 - 1], x_0 \in (0,1)$ и для некоторой $\lambda^1(k)$ перестановки чисел $\overline{N_0, N_1 - 1}$ выполняется $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda^1(k)}^1 \varphi_{\lambda^1(k)}(x) > 0$, то $x_0 \in E_1$ и $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda^1(k)}^1 \varphi_{\lambda^1(k)}(x_0) = g_1(x_0)$.

Из (2.11) и из того, что $Q_1(x)$ полином, получаем

$$g_2(x) = L\chi_\Delta - Q_1(x) = g_1(x) - Q_1(x) = \sum_{r=1}^{R_2} L_r^2 \chi_{\Delta_{l_r^2}},$$

$$g_2(x) = 0 \ \text{ если } x \notin \Delta \setminus E_1, \qquad g_2(x) \ge 2L \ \text{ если } x \in \Delta \setminus E_1.$$

Применим лемму 2.1 для $g_2(x),\ N_1,\ \delta_2 = \min\{\delta_1, \min_{a_k^1 \neq 0}\{|a_k^1|\}\}$ и повторим все, что было сделано для функции g_1.

Таким образом, по очереди применяя лемму 2.1, получим для всех $1 \le \nu < \nu_0 = [\log_{2/3}\varepsilon] + 1$ множества E_ν и полиномы $Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^\nu \varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_S = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$|a_k^\nu| < \delta_\nu, k \in spec\{Q_\nu(x)\}, \text{ где } \delta_\nu = \min\{\delta_{\nu-1}, \min_{a_k^{\nu-1} \neq 0}\{|a_k^{\nu-1}|\}\}; \tag{2.12}$$

$$|E_\nu| \ge \frac{|\Delta \setminus \bigcup_{k=1}^{\nu-1} E_k|}{3}, \tag{2.13}$$

$$g_{\nu+1}(x) = L\chi_\Delta - \sum_{k=1}^{\nu} Q_k(x) = g_\nu(x) - Q_\nu(x) = \sum_{r=1}^{R_{\nu+1}} L_r^{\nu+1} \chi_{\Delta_{l_r^{\nu+1}}},$$

$$g_{\nu+1}(x)=0 \ \text{ если } x\notin\Delta\setminus\bigcup_{k=1}^{\nu}E_k,\ g_{\nu+1}(x)\geq 2L \ \text{ если } x\in\Delta\setminus\bigcup_{k=1}^{\nu}E_k, \tag{2.14}$$

если для некоторых $n\in[N_{\nu-1},N_\nu-1], x_0\in(0,1)$ и для некоторой перестановки $\lambda^\nu(k)$ чисел $\overline{N_{\nu-1},N_\nu-1}$ выполняется следующее: $\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^{\nu}_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)>0$, то $x_0\in E_\nu$ и $\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^{\nu}_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x_0)=g_\nu(x_0)$. Теперь определим полином Q и множество E, полагая

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{\nu^0}E_\nu; \tag{2.15}$$

$$Q(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu^0}Q_\nu(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu^0}\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}a^\nu_k\varphi_k(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x). \tag{2.16}$$

Очевидно, что $|a_k|<\delta_1$.

Согласно (2.13) имеем $|\Delta\setminus\bigcup_{\nu=1}^{\nu^0}E_k|\leq\frac{(2}{3)^{\nu^0}}|\Delta|<\varepsilon|\Delta|$ и, следовательно,

$$|E|>(1-\varepsilon)|\Delta|.$$

Из (2.14) вытекает, что

$$Q(x)=\begin{cases}L, & \text{если } x\in E,\\ 0, & \text{если } x\notin\Delta,\end{cases}\qquad Q(x)<-L,\ \text{если } x\in\Delta\setminus E.$$

Так как $\int_0^1Q(t)dt=0$, то $\int_+|Q(t)|dt=\int_-|Q(t)|dt$, (где $\int_\pm|Q(t)|dt$ – интеграл по множествам, где $Q(x)$ соответственно положителен, отрицателен). Следовательно, имеем

$$L|\Delta|\leq\int_0^1|Q(t)|dt=\int_+|Q(t)|dt+\int_-|Q(t)|dt=2\int_+|Q(t)|dt\leq 2L|\Delta|.$$

Осталось проверить выполнение условия 5). Члены полинома $Q(x)$ переставим так, чтобы

$$|a_{\sigma(N^0)}|\geq|a_{\sigma(N^0+1)}|\geq...\geq|a_{\sigma(N)}|\geq 0.$$

С учетом, (2.12), (2.14) и (2.16) получим

$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)=\begin{cases}Q(x), & \text{если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)=0,\\ L, & \text{если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)>0,\end{cases}$$

$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)<0,\ \text{ если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)<0.$$

Следовательно, сумма $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)$ либо отрицательна, либо равна L. Из этого сразу вытекают условия 5). Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. *Для любых чисел $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и полинома f(x) по общей системе Хаара существуют функция $g(x) \in L^1(0,1)$, полином $Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} b_k\varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, множество $E \subset (0,1)$ и перестановка $\sigma(k)$ чисел $\overline{N_0, N}$ такие, что*

(1) $0 < |b_{k_1}| < \delta$, *и* $|b_{k_1}| \neq |b_{k_2}|$, *если* $k_1, k_2 \in \overline{N_0, N}, k_1 \neq k_2$;

(2) $|E| > (1-\varepsilon)$;

(3) $g(x) = f(x)$ *для всех* $x \in E$;

(4) $||f|| \leq ||g|| \leq 2||f||$;

(5) $||g - Q|| < \delta$;

(6) $|b_{\sigma(N_0)}| > |b_{\sigma(N_0+1)}| > |b_{\sigma(N_0+2)}| > ... > |b_{\sigma(N)}| > 0$;

(7) $\max_{N_0 < n \leq N} ||\sum_{k=N_0}^{n} b_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}|| < 3||f||$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum_{r=1}^{R} L_r\chi_{\Delta_{l_r}}$, где $L_r \neq 0$ и $\Delta_{l_r}, r = 1, 2, ..., R$ - непересекающиеся множества из множеств $\{A_k^{(n)}\}$.

Последовательно применяя Лемму 2.2, можно определить множества $E_r \subset \Delta_{l_r}$, полином $Q_r(x) = \sum_{k=N_{r-1}}^{N_r-1} a_k^r\varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие что

(2.17)

$$|a_k^r| < \delta_r, \quad \text{где } \delta_r = \begin{cases} \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad r = 1 \\ \min\{\frac{\delta}{2},\ \min_{N_{r-2} \leq n < N_{r-1}}\{|a_n^{r-1}| : a_n^{r-1} \neq 0\}\ \} \quad \text{при } r > 1, \end{cases}$$

для любого $k \in spec\{Q_1(x)\}$.

$$|E_r| > (1-\varepsilon)|\Delta_{l_r}|; \tag{2.18}$$

$$Q_r(x) = \begin{cases} L_r, \text{ если } x \in E_r, \\ 0, \text{ если } x \notin \Delta_{l_r}, \end{cases} ; \tag{2.19}$$

$$|L_r||\Delta_{l_r}| \leq ||Q_r|| \leq 2|L_r||\Delta_{l_r}|. \tag{2.20}$$

Пусть $\sigma_r(k)$ – такая перестановка ненулевых чисел $\{a_k^r\}_{k=N_{r-1}}^{N_r}$, что $|a_{\sigma_r(k)}^r| \geq |a_{\sigma_r(k+1)}^r|$ для всех $N_{r-1} \leq k < N_r - 1$. Тогда верно следующее

$$\max_{N_{r-1} < n < N_r} ||\sum_{k=N_{r-1}}^{n} a_{\sigma_r(k)}^r\chi_{\sigma_r(k)}|| \leq 2|L_r||\Delta_{l_r}|. \tag{2.21}$$

Обозначим $E=\bigcup_{r=1}^{R} E_r$ и

$$g(x)=\sum_{r=1}^{R} Q_r(x)=\sum_{r=1}^{R}\sum_{k=N_{r-1}}^{N_r-1} a_k^r\varphi_k(x)=\sum_{k=N_0}^{N} a_k\varphi_k(x), \tag{2.22}$$

где $N=N_R-1$.

Учитывая (2.18)-(2.20), получаем, что пункты 2–4 леммы 2.3 уже выполнены. Возьмем

$$0<\alpha<\min\left\{\frac{\delta}{2},\ ||f||,\ \frac{1}{3}\min_{|a_{k_1}|\neq|a_{k_2}|}\{||a_{k_1}|-|a_{k_2}||\},\ \frac{\delta}{||\sum_{k=N_0}^{N}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||},\right.$$

$$\left.\frac{||f||}{2\max_{N_0\le n\le N}||\sum_{k=N_0}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||}\right\}, \tag{2.23}$$

и для него рассмотрим следующий полином

$$Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N} b_k\varphi_k(x), \quad \text{где}\ \ b_k=a_k+\frac{\alpha}{2^k}, \quad k\in[N_0,N], \tag{2.24}$$

Учитывая (2.17) и (2.22)-(2.24), получим

$$0<|b_{k_1}|\neq|b_{k_2}|<\delta \text{ для всех } k_1,k_2\in[N_0,N], k_1\neq k_2.$$

$$||g-Q||=\alpha||\sum_{k=N_0}^{N}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||<\delta.$$

Пусть $\sigma(k)$ такая перестановка чисел $\overline{N_0,N}$, что

$$|b_{\sigma(N_0)}|>|b_{\sigma(N_0+1)}|>|b_{\sigma(N_0+2)}|>...>|b_{\sigma(N)}|>0.$$

Из (2.23),(2.24) вытекает, что

$$|a_{\sigma(N_0)}|\ge|a_{\sigma(N_0+1)}|\ge|a_{\sigma(N_0+2)}|\ge...\ge|a_{\sigma(N^*)}|>0.$$

Здесь неравенство написано до некоторого N^*, поскольку некоторые a_k могут равняться 0.

Учитывая вышесказанное и (2.17), (2.20), (2.21), (2.23), (2.24), получаем, что для любого $N_0\le n\le N$ существует r_0 такое, что $N_{r_0-1}\le n<N_{r_0}$ и

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n} b_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx=\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx+$$

$$\alpha\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n}\frac{\varphi_{\sigma(k)}(x)}{2^k}\right|dx\le 3||f||.$$

Лемма 2.3 доказана. $\square$

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.1. Пусть заданы $0 < \varepsilon < 1$ и $\{\varphi_k\} = \chi_{\mathcal{S}}$ (см.(1.3)). Обозначим через

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по общей системе Хаара с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.3. Тогда получим последовательности функций $\{\overline{g}_n\}$, множества E_n, полиномы

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n-1} b_k\varphi_k(x),\ N_0 = 1, \tag{3.2}$$

и перестановки $\{\sigma_n(k)\}$ чисел $\overline{N_{n-1}, N_n - 1}$ такие, что

$$|E_n| > (1 - \varepsilon 2^{-n}); \tag{3.3}$$

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x) \text{ для всех } x \in E_n; \tag{3.4}$$

$$||f_n|| \le ||\overline{g}_n|| \le 2||f_n||; \tag{3.5}$$

$$||\overline{g}_n - \overline{Q}_n|| < \delta_n = \min\{\ 4^{-6(n+1)},\ \min_{k<N_{n-1}} \{|b_k|\}\ \}; \tag{3.6}$$

$$0 < |b_{k_1}| < \delta_n,\ \text{ и } |b_{k_1}| \ne |b_{k_2}| \text{ если } k_1, k_2 \in \overline{N_{n-1}, N_n - 1}, k_1 \ne k_2; \tag{3.7}$$

$$|b_{\sigma_n(N_{n-1})}| > |b_{\sigma_n(N_{n-1}+1)}| > |b_{\sigma_n(N_{n-1}+2)}| > ... > |b_{\sigma_n(N_n-1)}| > 0; \tag{3.8}$$

$$\max_{N_{n-1}<m<N_n} ||\sum_{k=N_{n-1}}^{m} b_{\sigma_n(k)}\varphi_{\sigma_n(k)}|| < 3||f_n||. \tag{3.9}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \text{ (из (3.3) следует, что } |E| > 1 - \varepsilon). \tag{3.10}$$

Пусть $f \in L^1(0,1)$ и $\overline{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{2},\ \int_E |f(x)|dx\}$. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\delta_{n_1} < \overline{\varepsilon} \cdot 4^{-12}$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N} f_{n_k}(x) - f(x)\right| dx = 0\ ; \tag{3.11}$$

$$\int_0^1 |f_{n_k}(x)|\,dx \le \overline{\varepsilon}\cdot 4^{-4(k+2)}, \quad k\ge 2. \tag{3.12}$$

Очевидно, что

$$||f-f_{n_1}||<\frac{\overline{\varepsilon}}{4}. \tag{3.13}$$

Положим $\nu_1=n_1$, $g_1=\overline{g}_{n_1}$ и

$$Q_1=\overline{Q}_{n_1}+\sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1}\frac{\alpha_1}{2^k}\varphi_k(x)=\sum_{k=N_{n_1-1}}^{N_{n_1}-1}b_k\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1}\frac{\alpha_1}{2^k}\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{N_{n_1}-1}a_k\varphi_k(x)$$

где

$$0<\alpha_1<\min\left\{\min_{N_{n_1-1}\le k<N_{n_1}}|b_k|,\overline{\varepsilon}\ 4^{-12},\ \frac{||f_{n_1}||}{2}\right\}. \tag{3.14}$$

Пусть $\{\omega_1(k)\}$ – такая перестановка чисел $\overline{1,N_{n_1}-1}$, что

$$|a_{\omega_1(1)}|>|a_{\omega_1(2)}|>\ \ ...>|a_{\omega_1(N_{n_1}-1)}|>0.$$

Тогда

$$\max_{1\le m<N_{n_1}}\int_0^1|\sum_{k=1}^m a_{\omega_1(k)}\varphi_{\omega_1(k)}(x)|<3.5||f_{n_1}||. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.11) и (3.14), будем иметь

$$||Q_1-g_1||\le||\overline{g}_{n_1}-\overline{Q}_{n_1}||+\alpha_1\left\|\sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}\right\|<\overline{\varepsilon}\ 4^{-10}.$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1<\nu_2<...<\nu_{q-1}$, функции $g_p(x), f_{\nu_p}(x)$ и полиномы

$$Q_p(x)=\sum_{k=N_{\nu_{p-1}}}^{N_{\nu_p}-1}a_k\varphi_k(x),\qquad 1\le p<q,$$

удовлетворяющие условиям

$$g_p(x)=f_{n_p}(x),\qquad x\in E_{\nu_p},\quad 1\le p<q, \tag{3.16}$$

$$\int_0^1|g_p(x)|dx\le\overline{\varepsilon}\ 4^{-4p},\quad 1<p<q,$$

$$0<|a_k|<\min_{t<N_{\nu_{p-1}}}\{|a_t|\},\qquad 1<p<q,\quad N_{\nu_{p-1}}\le k<N_{\nu_p}, \tag{3.17}$$

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^p(Q_k(x)-g_k(x))\right|dx\le\overline{\varepsilon}\ 4^{-5(p+1)},\qquad 1\le p<q. \tag{3.18}$$

Если $\omega_p(k)$ – такая перестановка чисел $\overline{N_{\nu_{p-1}}, N_{\nu_p}-1}$, что $|a_{\omega_p(N_{\nu_{p-1}})}| > |a_{\omega_p(N_{\nu_{p-1}}+1)}| > ... > |a_{\omega_p(N_{\nu_p}-1)}| > 0$, то

$$\max_{N_{\nu_{p-1}} \le m < N_{\nu_p}} \int_0^1 |\sum_{k=N_{\nu_{p-1}}}^{m} a_{\omega_p(k)}\varphi_{\omega_p(k)}(x)| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4p}, \qquad 1 < p < q\ .$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что $\nu_q > \nu_{q-1}$, $\delta_{\nu_q} < \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+2)}$,

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{n_q} - \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k(x) - g_k(x)) \right) \right\| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-8(q+1)}, \tag{3.19}$$

и (см. (3.7))

$$|b_k| < \min_{t < N_{\nu_{q-1}}} \{|a_t|\},\ N_{\nu_q - 1} \le k < N_{\nu_q}. \tag{3.20}$$

Из (3.12),(3.18) и вышесказанного следует, что

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4(q+1)}. \tag{3.21}$$

Обозначим

$$Q_q = \overline{Q}_{\nu_q} + \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_{q-1}}-1} \frac{\alpha_q}{2^k}\varphi_k(x) = \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_q}-1} a_k\varphi_k(x) \tag{3.22}$$

где

$$0 < \alpha_q < \min\left\{ \min_{N_{\nu_q - 1} \le k < N_{\nu_q}} |b_k|,\ \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+3)} \right\}. \tag{3.23}$$

Положим

$$g_q(x) = f_{n_q}(x) - (f_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)). \tag{3.24}$$

Очевидно, что

$$g_q(x) = f_{n_q}(x), \qquad x \in E_{\nu_q}. \tag{3.25}$$

Из (3.7), (3.17), (3.20) и (3.23) вытекает, что

$$0 < |a_k| < \min_{t < N_{\nu_{q-1}}} \{|a_t|\}, \qquad N_{\nu_{q-1}} \le k < N_{\nu_q}. \tag{3.26}$$

Учитывая (3.5), (3.18), (3.19), (3.21) и (3.24), получим, что

$$\int_0^1 |g_q(x)| dx \le \left\| f_{\nu_q} - (f_{n_q} - \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k - g_k)) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k - g_k)) \right\| + ||\overline{g}_{\nu_q}|| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4q}. \tag{3.27}$$

В силу (3.6), (3.19), (3.22) – (3.24) будем иметь

$$\left\|\sum_{k=1}^{q}(Q_k - g_k)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{q-1}(Q_k - g_k) - f_{n_q} + f_{\nu_q} + Q_q - \overline{g}_{\nu_q}\right\| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+1)}. \tag{3.28}$$

Пусть $\{\omega_q(k)\}$ – такая перестановка чисел $\overline{N_{\nu_{q-1}}, N_{n_q} - 1}$, что

$$|a_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}})}| > |a_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+1)}| > ... > |a_{\omega_q(N_{\nu_q}-1)}| > 0. \tag{3.29}$$

Тогда $\quad |b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}})}| > |b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+1)}| > ... > |b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+N_{\nu_q}-N_{\nu_q-1})}| > 0,$

Следовательно из (3.8), (3.9), (3.22) и (3.23) получаем

$$\max_{N_{\nu_{q-1}}\le m<N_{\nu_q}} ||\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m} a_{\omega_q(k)}\varphi_{\omega_q(k)}|| < \max_{N_{\nu_{q-1}}\le n<N_{\nu_q}} ||\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m} b_{\omega_q(k)}\varphi_{\omega_q(k)}||+$$

$$+\alpha_q < 3||f_{\nu_q}|| + \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+3)} < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4q}. \tag{3.30}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q\}_{q=1}^{\infty}$, числа $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномы $\{Q_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ удовлетворяющие условиям (3.25)-(3.30) для всех $q \ge 2$. Определим функцию $g(x)$ и ряд $Q(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \tag{3.31}$$

$$Q(x) = \sum_{q=1}^{\infty} Q_q(x) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_q}-1} a_k\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x). \tag{3.32}$$

Отсюда и из условий (3.5), (3.11), (3.15), (3.25) и (3.27) вытекает:

$$g \in L^1(0,1), \qquad g(x) = f(x),\ \text{при}\ x \in E,$$

$$||g|| \le ||\overline{g}_{n_1}|| + \sum_{k=2}^{\infty}||g_k|| \le 2||f_{n_1}|| + \overline{\varepsilon}\ 4^{-4} < 2||f|| + \overline{\varepsilon} \le 3||f||; \tag{3.33}$$

$$||g|| \ge ||\overline{g}_{n_1}|| - \sum_{k=2}^{\infty}||g_k|| \ge ||f_{n_1}|| - \overline{\varepsilon}\ 4^{-4} \ge ||f|| - \overline{\varepsilon}\ 2^{-1} \ge \frac{||f||}{2}. \tag{3.34}$$

Пусть $\sigma(k)$ – такая перестановка натуральных чисел, что

$$|a_{\sigma(1)}| > |a_{\sigma(2)}| > ... > |a_{\sigma(k)}| > ...,$$

Учитывая (3.26) и (3.29) получим, что $\sigma(k)$ определяется однозначно.

В силу (3.27)-(3.32) для любого m существует q ($N_{\nu_{q-1}} \leq m < N_{\nu_q}$) такое, что

$$||G_m(g) - g|| \leq \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{q-1} (Q_k(x) - g_k(x)) \right| dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m} a^{(q)}_{\omega_q(k)} \varphi_{\omega_q(k)}(x) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\sum_{k=q}^{\infty} g_k(x)| dx < \overline{\varepsilon}\ 4^{-3q}.$$

Из вышесказанного, (3.5),(3.13),(3.33) и (3.34) следует, что

$$||G_m(g)|| \leq 3||\overline{g}_{\nu_1}|| + \overline{\varepsilon}\ 4^{-3q} < 4||f|| < 4||g|| < 12||f||,$$

и

$$\lim_{m\to\infty} ||G_m(g) - g|| = 0.$$

Теорема 1.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Определим числа $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и множество E следующим образом

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \overline{Q}_q(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=N_{q-1}}^{N_q - 1} b_k^{(q)} \varphi_k(x),$$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

где $\{\overline{Q}_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ и E_n определены в доказательстве теоремы 1.1 (см. (3.2), (3.3), (3.10)).

Используя рассуждения при доказательстве Теоремы 1, для любой функции $f \in L^1(0,1)$ можно выбрать последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_E |f(x) - \sum_{k=1}^{m} \overline{Q}_{\nu_k}(x)| dx = 0.$$

Тогда для полученного ряда $\{\overline{Q}_{\nu_k}(x)\}$ существуют числа $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($\delta_k = 1$ или 0) такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{Q}_{\nu_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k(x).$$

Теорема 1.2 доказана. □

Автор выражает благодарность профессору М. Г. Григоряну за руководство работой.

Abstract. We prove that for any subsystem $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ of general Haar system with $|\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\Delta_{n_k}| = 1$, where $\Delta_n = \{x \in [0,1], \chi_n(x) \neq 0\}$ and for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E_\varepsilon \subset [0,1]$, with measure $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$, such that for every integrable function $f \in L^1(0,1)$ one can find a function $g \in L^1(0,1)$,which coincides with f in E_ε, such that Greedy algorithm for modified function with respect to subsystem of general Haar system converges in $L^1(0,1)$ norm.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчесления", Мат. сборник, **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[2] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. сборник, **53**, no. 2, 67 – 96 (1942).

[3] M. G. Grigoryan, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1", Analysis Mathematica, **17**, 211 – 237 (1991).

[4] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Computational Math., **5**, 173 – 187 (1996).

[5] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Found comput. Math., **3**:1, 33 – 107 (2003).

[6] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", East Journal on Approx., **5**:1, 1 – 15(1999).

[7] P. Wojtaszczyk, "Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems", Journal of Approximation Theory, **107**, 293 – 314 (2000).

[8] T. Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Comput. Harm. Anal., 384 – 387 1996.

[9] Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян, "О почти всюду расходимости одного метода суммирования для вейвлет разложений", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **39**, no. 2, 27 – 32 (2004).

[10] S. J. Dilworth, D. Kutzarova and P. Wojtaszczyk, "On approximate l_1 systems in Banach spaces", Journal of Approx. Theory, **114**, 214 – 241 (2002).

[11] M. G. Grigorian and R. E. Zink, "Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system", Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134**:12, 3495 – 3505 (2006).

[12] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Two remarks on quasi-greedy bases in the space", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **40**, no. 1, 2 – 14 (2005).

[13] S. A. Episkoposian, "On the system which is not Quasi-Greedy basis, Isaac International Conference", Yerevan, Armenia, p. 19 (2002).

[14] M. G. Grigoyan, A. A. Sargsyan, "Non-linear approximation of continuous functions by the Faber-Schauder system", Sbornik: Mathematics, **199**:5, 629 – 653 (2008).

[15] D. L. Burkholder, "Martingale transforms", Ann. Math. Statist, **37**, 1494 – 1504 (1966).

[16] D. L. Burkholder, "Boundary value problems and sharp inequalities for martingale trasforms", Ann. Probab., **12**, 647 – 702 (1984).

[17] A. Kamont, "General Haar system and greedy approximation", Studia Math., **145**, no. 2, 165 – 184 (2001).

[18] П. Л.Ульянов, "О рядах по системе Хаара", Мат. сб., **63**, no. 3, 356 – 391 (1964).

[19] М. Г. Григорян и С. Л. Гогян, "О переставленных рядах по системе Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика, **42**, no. 2, 44 – 64 (2007).

[20] М. Г. Григорян и С. Л. Гогян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Анал. Мат., **32**, 49 – 80 (2006).

[21] К. А. Навасардян и А. А. Степанян, "О рядох по системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42**, no 4, 53 – 66 (2007).

[22] С. Л. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по регулярной системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **46**, no. 1, 3 – 16 (2011).
[23] S. Gogyan, "Greedy algorithm with regard to Haar subsystems", East J. Approx., **11**:2, 221 – 236 (2005).
[24] A. Kh. Kobelyan, "On the Fourier-Haar coefficients of functions from L_p", International Conference Harmonic Analysis and Approximations IV, 73 – 74 (2008).

Поступила 16 июня 2011

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 47

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
серия Математика

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 47

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 6, 2012

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 6, 2012

Contents