

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2012

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ $\mathbb{R}^n$

К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am*, *etonyan@ysu.am*

Аннотация. В статье установлены непрерывные вложения в пространствах гармонических функций со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{R}^n$. Этим обобщены некоторые вложения Харди-Литтлвуда для аналогичных пространств голоморфных функций в единичном круге. Выявлены различия в индексах между пространствами гармонических и голоморфных функций. В качестве следствия получен аналог известного неравенства Фейера-Рисса. Установлены также вложения в специальном случае систем Рисса.

MSC2010 number: 31B05.

Ключевые слова: гармоническая функция; единичный шар в $\mathbb{R}^n$; пространство со смешанной нормой; пространство Харди; вложения; неравенство Фейера-Рисса; система Рисса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $B = B_n$ ($n \geq 2$) — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p гармонической функции $u(x) = u(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(u; r) = \|u(r \cdot)\|_{L^p(S; d\sigma)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ — $(n-1)$ -мерная поверхностная лебегова мера на S , нормированная условием $\sigma(S) = 1$. Множество всех гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$. Класс гармонических функций $u \in h(B)$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(u; r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди $h^p(B)$ в единичном шаре B .

Определим пространство $h(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$) со смешанной нормой как пространство гармонических функций $u \in h(B)$, для которых конечна

квазиорма

$$\|u\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u;r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{0 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Если $(1-r)^\alpha M_p(u;r) = o(1)$ при $r \rightarrow 1^-$, то говорят, что гармоническая функция $u(x)$ принадлежит малому пространству $h_0(p, \infty, \alpha)$. При $p = q < \infty$ пространства $h(p, q, \alpha)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их обычно называют весовыми пространствами Харди.

Много работ посвящено пространствам $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плоригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1], [2]. Вложения с разными индексами и связи с обычными классами Харди $H^p(B_2)$ были первыми результатами, для этих классов. Часть этих результатов изложена в монографии [3]. Флетт [4], [5] значительно обобщил и усилил многие оригинальные результаты Харди и Литтлвуда и упростил их доказательства. В дальнейшем были получены многомерные обобщения результатов Харди, Литтлвуда, Флетта в областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Пространства $h(p, p, \alpha)$, $h(p, q, \alpha)$ в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [6-11], см. также содержащиеся там ссылки. Пространства $h(p, q, \alpha)$, состоящие из n -гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, изучались в статьях [12], [13]. Известно, что при $0 < p < 1$ классы Харди $h^p(B_n)$ имеют сложную структуру и сильно отличаются от классов Харди $h^p(B_n)$ с $p \geq 1$, см. [14]. Подобное наблюдается и в случае пространств $h(p, q, \alpha)$. Если $1 \leq p, q \leq \infty$, то $h(p, q, \alpha)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$. Если $0 < p < 1$ либо $0 < q < 1$, то $h(p, q, \alpha)$ — полные метрические пространства с инвариантной метрикой $d(u, v) = \|u - v\|_{p,q,\alpha}^{\min\{p,q\}}$ и квазинормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$.

В настоящей статье устанавливаются непрерывные вложения типа Харди-Литтлвуда для пространств $h(p, q, \alpha)$ в шаре из $\mathbb{R}^n$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ следующие вложения непрерывны:

- (i) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q, \beta)$, $\beta > \alpha$,
- (ii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \alpha)$, $0 < p_0 < p \leq \infty$,
- (iii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \alpha)$, $0 < q < q_0 \leq \infty$,
- (iv) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \beta)$, $\beta \geq \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $p \leq p_0 \leq \infty$,
- (v) $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha + \frac{n-1}{p}$, $0 < q_0 \leq \infty$,
- (vi) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha$, $0 < q_0 \leq \infty$,
- (vii) $h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$, $0 < p < p_0 \leq \infty$,
- (viii) $h^p \subset h\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$, $1 < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$,
- (ix) $h^p \subset h(p_0, q, \beta)$, $\beta > \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $0 < p < p_0 \leq \infty$,
- (x) Если $u \in h(p, q, \alpha)$, $0 < q < \infty$, то $u \in h_0(p, \infty, \alpha)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства Теоремы 1.1 нам потребуется несколько лемм.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Символ $A \approx B$ для $A, B > 0$ означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , независимые от участвующих функций и переменных, такие, что $c_1 A \leq B \leq c_2 A$. Для любого p , $1 \leq p \leq \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряженный индекс (полагая также $1/\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$).

Лемма 2.1. Обозначим шар с центром в точке $x = r\zeta \in B$ и радиусом $\frac{1-r}{2}$ через

$$(2.1) \quad B_x = \left\{ y = \rho\xi \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \frac{1-|x|}{2} \right\} \subset B.$$

Тогда

$$1 - |x| < |\xi - \rho x| < 3(1 - |x|) \quad \text{для всех } y = \rho\xi \in B_x.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Зафиксируем произвольную точку $x = r\zeta \in B$. Если $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$, то искомое неравенство очевидно, так как $|\xi - \rho x| < 2$ и $1 - r \geq \frac{2}{3}$. Положим $\frac{1}{3} < r < 1$. Заметим, что начало координат лежит вне шара B_x , и

$\frac{1}{2}(1-r) < 1 - |y| < \frac{3}{2}(1-r)$, $\rho'' - \rho' = 1 - r$, $0 < \rho' < |y| < \rho''$, $y = \rho\xi \in B_x$, где

$$(2.2) \quad \rho' = r - \frac{1-r}{2} = \frac{3r-1}{2}, \quad \rho'' = r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2}.$$

Через $\theta \in (0, \pi/2)$ обозначим угол между векторами ζ и ξ . Легко видеть, что

$$\cos \frac{\theta}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} < \frac{\sin^2 \theta}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1-r}{2r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\xi - \rho x|^2 &= 1 + \rho r - 2\rho r \cos \theta = (1 - \rho r)^2 + 4\rho r \sin^2 \frac{\theta}{2} < \\ &< (1 - \rho' r)^2 + 2\rho r \left(\frac{1-r}{2r} \right)^2 = \left(1 - \frac{3r-1}{2} r \right)^2 + \frac{\rho}{2r} (1-r)^2 = \\ &= (1-r)^2 (1 + 3r/2)^2 + \frac{\rho}{2r} (1-r)^2 < \frac{31}{4} (1-r)^2 < 9(1-r)^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. Каждая функция $u \in h^p(B)$ с $0 < p \leq \infty$ допускает оценку

$$|u(x)| \leq C(p, n) \|u\|_{h^p} (1 - |x|)^{-(n-1)/p}, \quad x \in B,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h \left(\infty, \infty, \frac{n-1}{p} \right)$.

Доказательство. Для фиксированной точки $x \in B$ и шара B_x , см. (2.1), запишем неравенство Фейффермана–Стейна [15] ($0 < p < \infty$), используя обозначения (2.2),

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{B_x} |u(y)|^p dy \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho' < |y| < \rho''} |u(y)|^p \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi) \leq \\ &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Если $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$, то

$$|u(x)|^p \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_0^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \sup_{0 < \rho < 2/3} M_p^p(u; \rho) \leq C(p, n) \|u\|_{h^p}^p,$$

что очевидно влечет искомое неравенство.

Если же $\frac{1}{2} < r < 1$, то поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, можем оценить

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq \\ &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} (\rho'' - \rho') \sup_{\rho' < \rho < \rho''} M_p^p(u; \rho) \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^{n-1}} \|u\|_{h^p}^p. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.3. Если $u \in h^p(B)$ и $0 < p < p_0 \leq \infty$, то

$$M_{p_0}(u; r) \leq C(p, p_0, n) \|u\|_{h^p} (1-r)^{-(n-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)}, \quad 0 \leq r < 1,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$.

Доказательство. Заметим, что при $p_0 = \infty$ лемма сводится к Лемме 2.2. Поэтому положим $0 < p < p_0 < \infty$. Тогда по Лемме 2.2

$$\begin{aligned} M_{p_0}^{p_0}(u; r) &= \int_S |u(r\zeta)|^{p_0-p} |u(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \leq M_{\infty}^{p_0-p}(u; \rho) M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, p_0, n) \left[\|u\|_{h^p} (1-r)^{-(n-1)/p} \right]^{p_0-p} M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, p_0, n) \|u\|_{h^p}^{p_0} (1-r)^{-(n-1)p_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)}. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.4. Справедливы следующие интегральные оценки:

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - x|^{\alpha+n-1}} \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-|x|)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha < 0, \\ \log \frac{e}{1-|x|}, & \alpha = 0, \end{cases} \quad x \in B,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, & \beta > \alpha, \\ 1, & \beta < \alpha, \\ \log \frac{e}{1-r}, & \beta = \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq r < 1, \alpha > 0.$$

Во всех оценках неявно участвующие постоянные зависят лишь от α, β, n .

Доказательства оценок можно найти в [7], [9], [16].

Следующая лемма показывает, что поведение гармонической функции $u(x)$ в окрестности начала координат в сущности не влияет на значение ее квазинормы $\|u\|_{p,q,\alpha}$ с точностью до эквивалентности.

Лемма 2.5. Для любых $0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ и всех $u \in h(B)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{p,q,\alpha} \leq C(p, q, \alpha, n) \left(\int_{1/2}^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \right)^{1/q}, \quad \text{если } 0 < q < \infty,$$

$$\|u\|_{p,\infty,\alpha} \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r), \quad \text{если } q = \infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать усеченные неравенства

$$\int_0^{1/2} (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr, \quad \text{при } 0 < q < \infty,$$

$$\sup_{0 < r < 1/2} (1-r)^\alpha M_p(u; r) \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r), \quad \text{при } q = \infty.$$

Если $1 \leq p < \infty$, то функция $|u|^p$ субгармонична, а интегральные средние $M_p(u; r)$ монотонно возрастают по r (при $1 \leq p \leq \infty$). Поэтому в этом случае доказательство элементарно. Положим $0 < p < 1$ и рассмотрим теперь три случая.

Случай $0 < p < 1, q = \infty$. Возьмем произвольную точку $x, |x| = 3/4$, и шар $B_{1/8}(x)$ с центром в точке x и радиусом $1/8$. По неравенству Феффермана-Стейна [15]

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1/8)^n} \int_{B_{1/8}(x)} |u(y)|^p dy \leq C(p, n) \int_{5/8 < |y| < 7/8} |u(y)|^p dy \leq \\ &\leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \sup_{5/8 < \rho < 7/8} M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < \rho < 1} (1-\rho)^{\alpha p} M_p^p(u; \rho), \quad |x| = 3/4. \end{aligned}$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \rho < 1/2} (1-\rho)^\alpha M_p(u; \rho) &\leq \sup_{0 < \rho < 3/4} M_p(u; \rho) \leq \sup_{|z| < 3/4} |u(z)| = \\ &= \max_{|z|=3/4} |u(z)| \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < \rho < 1} (1-\rho)^\alpha M_p(u; \rho). \end{aligned}$$

Случай $0 < p < 1, 0 < p \leq q < \infty$. Воспользуемся уже доказанным неравенством

$$(2.3) \quad |u(x)|^p \leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho, \quad |x| = 3/4.$$

Затем применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)'$,

$$|u(x)|^p \leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, q, n) \left(\int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{p/q}.$$

Следовательно, для любой точки x , $|x| = 3/4$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x)|^q &\leq C(p, q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq C(p, q, \alpha, n) \int_{5/8}^{7/8} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq \\ &\leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho &\leq C(q, \alpha) \sup_{0 < r < 1/2} M_p^q(u; \rho) \leq C(q, \alpha) \sup_{|x| < 1/2} |u(x)|^q \leq \\ &\leq C(q, \alpha) \sup_{|x| < 3/4} |u(x)|^q = C(q, \alpha) \max_{|x| = 3/4} |u(x)|^q \leq \\ (2.4) \quad &\leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай $0 < q \leq p < 1$. Вновь воспользуемся неравенством (2.3), но с заменой p на q ,

$$|u(x)|^q \leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_q^q(u; \rho) d\rho, \quad |x| = 3/4.$$

Применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{p}{q}$ и $\left(\frac{p}{q}\right)'$,

$$\begin{aligned} |u(x)|^q &\leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} \int_S |u(\rho\xi)|^q d\sigma(\xi) d\rho \leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} \left(\int_S |u(\rho\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{q/p} d\rho = \\ &= C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq C(q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства выполняется как в (2.4). $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Ввиду Леммы 2.5 все неравенства с нормами и квазинормами достаточно доказать вне некоторой окрестности начала координат.

Доказательства вложений (i) и (ii) очевидны. Вложение (ii) очевидно ввиду монотонного возрастания средних $M_p(u; r)$ по p .

(iii) Доказательство вложения начнем со случая $q_0 = \infty$, т.е. $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$.

Заметим, что при $1 \leq p \leq \infty$ интегральные средние $M_p(u; r)$ возрастают по r .

Доказательство вложения $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$ в этом случае элементарно:

$$\|u\|_{p,q,\alpha}^q \geq \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \geq C(\alpha, q) M_p^q(u; \rho) (1-\rho)^{\alpha q}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Положим $0 < p < 1$. Достаточно доказать неравенство

$$\sup_{1/3 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r) \leq C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Зафиксируем точку $x, \frac{1}{3} < |x| < 1$. Как и в доказательстве Леммы 2.2 неравенство Фейффермана-Стейна [15] для шара B_x (2.1), а также Лемма 2.1 приводят к

$$(3.1) \quad |u(x)|^p \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{B_x} |u(y)|^p dy \leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^p}{|\xi - \rho x|^n} dy.$$

Интегрирование и оценка Леммы 2.4 с тождеством $|\xi - \rho r \zeta| = |\zeta - \rho r \xi|$ влекут

$$\begin{aligned} M_p^p(u; r) &\leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} |u(y)|^p \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|\xi - \rho r \zeta|^n} \right) dy \leq \\ &\leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^p}{1-\rho r} dy \leq \frac{C(p, n)}{1-r} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Случай $p < q < \infty$. По неравенству Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{1}{1-p/q}$,

$$(1-r) M_p^p(u; r) \leq C(p, n) \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{p/q} (\rho'' - \rho')^{1-p/q}.$$

Отсюда

$$M_p(u; r) \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^{1/q}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{3} < r < 1.$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, то

$$M_p(u; r) \leq \frac{C(p, q, \alpha, n)}{(1-r)^{1/q} (1-r)^{(\alpha q-1)/q}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1-\rho)^{\alpha q-1} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q} \leq \frac{C \|u\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^\alpha},$$

что и требовалось показать.

Случай $q \leq p < 1$. Запишем неравенство (3.1) с q вместо p ,

$$|u(x)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^q}{|\xi - \rho x|^n} dy.$$

Заменяем x на Qx , где Q — произвольное ортогональное линейное преобразование

$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $|Qx| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Вспомним, что поверхностная

мера σ инвариантна при вращениях, что значит $\sigma(Q(G)) = \sigma(G)$ для каждого борелевского множества $G \subset S$ и каждого ортогонального преобразования Q .
Получаем

$$|u(Qx)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho\xi)|^q}{|\xi - \rho Qx|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Произведя в интеграле замену $\xi \mapsto Q\xi$, получим

$$|u(Qx)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho Q\xi)|^q}{|\xi - \rho x|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Применяя неравенство Минковского с индексом $\frac{q}{q-1} \geq 1$ и тождество с интегралом по ортогональной группе

$$M_p(F; |z|) = \left(\int |F(Qx)|^p dQ \right)^{1/p}, \quad z \in B,$$

находим, используя также оценки Леммы 2.4,

$$\begin{aligned} M_p^q(u; r) &\leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \rho x|^n} d\rho \leq \\ &\leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{M_p^q(u; \rho)}{1 - \rho r} d\rho \leq \frac{C(q, n)}{1 - r} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho, \quad \frac{1}{3} < r < 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1 - r) < 1 - \rho < \frac{3}{2}(1 - r)$, то как и в предыдущем случае получаем

$$(3.2) \quad (1 - r)^\alpha M_p(u; r) \leq C \left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q} \leq C \|u\|_{p, q, \alpha}.$$

Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$ полностью доказано. Теперь общий случай $0 < q < q_0 < \infty$ с конечным q_0 сводится к доказанному простой оценкой:

$$\|u\|_{p, q_0, \alpha}^{q_0} \leq \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0 - q} \|u\|_{p, q, \alpha}^q \leq C \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0 - q} \|u\|_{p, q, \alpha}^q = C \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0}.$$

(iv) Вначале докажем случай $p_0 = \infty$, т.е. вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q, \alpha + \frac{n-1}{p})$.

В случае $0 < p < q < \infty$, как и в Лемме 2.2 и (iii) имеем неравенство

$$M_\infty^p(u; r) \leq \frac{C(p, n)}{(1 - r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq \frac{C(p, n)}{(1 - r)^{n-1}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho},$$

По неравенству Гельдера с индексами q/p и $(q/p)'$

$$\begin{aligned} M_\infty^q(u; r) &\leq \frac{C(p, q, n)}{(1 - r)^{(n-1)q/p}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho} \right)^{q/p} \leq \\ &\leq \frac{C(p, q, n)}{(1 - r)^{(n-1)q/p}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем с весом и затем применим теорему Фубини

$$\begin{aligned}\|u\|_{\infty, q, \alpha + (n-1)/p}^q &= \int_0^1 (1-r)^{(\alpha + \frac{n-1}{p})q-1} M_\infty^q(u; r) dr \leq \\ &\leq C(p, q, n) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\int_{r'}^{r''} M_p^q(u; \rho) \frac{d\rho}{1-\rho} \right) dr = \\ &= C(p, q, n) \int_0^1 M_p^q(u; \rho) \left(\int_{2\rho-1}^{(2\rho+1)/3} (1-r)^{\alpha q-1} dr \right) \frac{d\rho}{1-\rho} = \\ &= C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{p, q, \alpha}^q.\end{aligned}$$

В случае $0 < p < q = \infty$ доказательство опускаем, поскольку оно проще и схоже с тем, что в Лемме 2.2.

В случае $0 < q \leq p \leq \infty$ доказательство аналогично. Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q, \alpha + \frac{n-1}{p})$ доказано. Итак, искомое вложение

$$h(p, q, \alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 0 < p \leq p_0 \leq \infty,$$

доказано в крайнем случае $p_0 = \infty$, а для $p_0 = p$ — очевидно. Согласно версии интерполяционной теоремы Рисса–Торина для квазинормированных пространств (см. [17], [18], [19]), отсюда получаем справедливость искомого вложения для всех $0 < p \leq p_0 \leq \infty$.

(v) Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha + \frac{n-1}{p}$, $0 < q_0 \leq \infty$, вытекает из вложения $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, \infty, \alpha + \frac{n-1}{p})$ и оценки

$$|u(x)| \leq C(p, q, \alpha, n) \frac{\|u\|_{p, q, \alpha}}{(1-r)^{\alpha + \frac{n-1}{p}}}, \quad x = r\zeta \in B.$$

Действительно, при $0 < q_0 < \infty$ по Лемме 2.4 будем иметь

$$\begin{aligned}\|u\|_{\infty, q_0, \beta}^{q_0} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0-1} M_\infty^{q_0}(u; r) dr \leq \\ &\leq C\|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0-1}}{(1-r)^{\alpha q_0 + (n-1)q_0/p}} dr \leq C(p, q, \alpha, \beta, q_0, n) \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0}.\end{aligned}$$

(vi) Вложение (vi) достаточно доказать для наиболее широкого класса $h(p, \infty, \alpha)$, т.е. докажем

$$h(p, \infty, \alpha) \subset h(p, q_0, \beta), \quad \beta > \alpha, \quad 0 < q_0 \leq \infty,$$

Положим $0 < q_0 < \infty$, воспользуемся вложением (iii) и Леммой 2.4,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p, q_0, \beta}^{q_0} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0 - 1} M_p^{q_0}(u; r) dr \leq \\ &\leq C \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0 - 1}}{(1-r)^{\alpha q_0}} dr \leq C(p, \alpha, \beta, q_0, n) \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0}. \end{aligned}$$

(vii) Вложение (vii) доказано в Лемме 2.3.

(viii) В силу вложения (iii) вложение (viii) достаточно доказать для $q = p$ (т.е. для наиболее узкого класса), именно

$$(3.3) \quad h^p \subset h\left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 1 < p < p_0 \leq \infty.$$

Кроме того, случай $p_0 = \infty$ вытекает из остальных случаев с конечным $p_0 < \infty$, поскольку в силу вложения (iv)

$$h^p \subset h\left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right) \subset h\left(\infty, p, \frac{n-1}{p}\right).$$

Таким образом, остается доказать вложение (3.3) для конечных $1 < p < p_0 < \infty$.

Воспользуемся методом из [5]. Введем оператор T и меру ν ,

$$Tu(r) := (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u; r), \quad d\nu(r) := (n-1)(1-r)^{n-2} dr.$$

Поскольку $T(u_1 + u_2)(r) \leq T(u_1)(r) + T(u_2)(r)$, то T — сублинейный оператор. Согласно Лемме 2.3 найдется положительная постоянная $C_0 = C_0(p, p_0, n)$ такая, что

$$Tu(r) = (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u; r) \leq C_0 (1-r)^{-(n-1)/p} \|u\|_{h^p}, \quad 0 < r < 1.$$

Отсюда для любого фиксированного $s > 0$ получим

$$\begin{aligned} \{0 < r < 1; Tu(r) > s\} &\subset \{0 < r < 1; C_0 (1-r)^{-(n-1)/p} \|u\|_{h^p} > s\} = \\ &= \left\{0 < r < 1; 1 - \left(C_0 s^{-1} \|u\|_{h^p}\right)^{p/(n-1)} < r\right\} \subset (\lambda, 1), \end{aligned}$$

где $\lambda = \max \left\{0; 1 - \left(C_0 s^{-1} \|u\|_{h^p}\right)^{p/(n-1)}\right\}$. Ясно, что при малых $s > 0$ имеем $\lambda = 0$, а при всех достаточно больших $s > 0$ получаем

$$\nu(\{0 < r < 1; Tu(r) > s\}) \leq \nu(\lambda, 1) = C_0^p s^{-p} \|u\|_{h^p}^p.$$

Это означает, что функция $Tu(r)$ принадлежит слабому пространству $L_{weak}^p(d\nu)$, т.е. T — оператор слабого типа (p, p) для всех $1 < p < \infty$. По интерполяционной

теореме Марцинкевича (см., например, [18], [19]) T — оператор сильного типа (p, p) для всех $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned} C \|u\|_{h^p}^p &\geq \|Tu\|_{L^p(d\nu)}^p = (n-1) \int_0^1 |Tu(r)|^p (1-r)^{n-2} dr = \\ &= (n-1) \int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M_{p_0}^p(u; r) dr = (n-1) \|u\|_{p_0, p, (n-1)(1/p-1/p_0)}^p, \end{aligned}$$

что завершает доказательство вложения (viii). В качестве дополнения отметим, что в предельном случае $p = 1$ вложение (viii)

$$h^1 \subset h(p_0, 1, (n-1)(1-1/p_0)), \quad 1 < p_0 \leq \infty,$$

ложно. Соответствующим контрпримером служит ядро Пуассона.

(ix) Вложение (ix) есть комбинация вложений (vi) и (iv). Действительно, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$h^p \subset h(p, q, \alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

(x) Утверждение (x) немедленно получается из неравенства (3.2), если устремить $r \rightarrow 1^-$.

Теорема 1.1 полностью доказана.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1.1

Рассмотрим гармонические векторы $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B , где $u_j(x) \in h(B)$ являются градиентами некоторой гармонической функции.

Обозначим через $\mathcal{H}(B)$ множество систем Рисса в шаре B , т.е. класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в B , для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla h$ в B .

Классы Харди, состоящие из вектор-функций $U \in \mathcal{H}(B)$, обозначим через $\mathcal{H}^p(B)$. Если же для вектор-функции $U \in \mathcal{H}(B)$ конечна смешанная "норма" $\|U\|_{p, q, \alpha} < +\infty$, то будем писать $U \in \mathcal{H}(p, q, \alpha)$.

Определим класс $S^p = S^p(B)$ субгармонических функций $w(x)$ в шаре B , удовлетворяющих условию Харди

$$\|w\|_{S^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_S |w(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Как показал контрпример ядра Пуассона, вложение (viii) Теоремы 1.1 для гармонических функций нельзя распространить на $p = 1$. Между тем, вложение (viii) Теоремы 1.1 справедливо при всех $0 < p < \infty$ для голоморфных функций в единичном круге, см. [1], [3, Теор.5.11], также как и для голоморфных функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, см. [13].

Введенные выше системы Рисса $U \in \mathcal{H}(B)$ в $\mathbb{R}^n$ в некоторой степени замещают голоморфные функции на $\mathbb{R}^2$. Для систем Рисса доказанные в Теореме 1.1 вложения в некоторых случаях имеют более широкие области допустимых значений параметров.

Следствие 4.1. При $\frac{n-2}{n-1} < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

Доказательство. Случай $p > 1$ вытекает из такого же вложения (viii) для скалярнозначных гармонических функций. Положим $\frac{n-2}{n-1} < p = q \leq 1$ и пусть $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{H}^p(B)$. Обозначим $\lambda = \lambda_n := \frac{n-2}{n-1}$. Тогда согласно результату Стейна и Вейса ([18], [19]) $W := |U|^\lambda$ и $W^{p/\lambda} = |U|^p$ являются субгармоническими функциями. Отсюда

$$M_{p/\lambda}^{p/\lambda}(W; r) = M_p^p(U; r), \quad M_{p_0/\lambda}^{1/\lambda}(W; r) = M_{p_0}(U; r), \quad p_0 > \lambda.$$

Поскольку W – субгармоническая функция класса Харди $S^{p/\lambda}$, то W имеет гармоническую мажоранту $v(x) \in h^{p/\lambda}$ в B с эквивалентными нормами Харди (см. [4]):

$$W(x) \leq v(x), \quad x \in B, \quad \|v\|_{h^{p/\lambda}} \leq \|W\|_{S^{p/\lambda}}.$$

Отсюда, обозначая $p_1 = \frac{p}{\lambda} > 1$, $p_{01} = \frac{p_0}{\lambda} > 1$, используя уже доказанный случай, выводим

$$\begin{aligned} \|U\|_{p_0, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^p &= \int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M_{p_0}^p(U; r) dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{p_1(n-1)(1/p_1-1/p_{01})-1} M_{p_{01}}^{p_1}(W; r) dr = \\ &= \|W\|_{p_{01}, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^{p_1} \leq \|v\|_{p_{01}, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^{p_1} \leq \\ &\leq \|v\|_{h^{p_1}}^{p_1} \leq C \|W\|_{S^{p_1}}^{p_1} = C \|U\|_{\mathcal{H}^p}^p. \end{aligned}$$

□

Системы Рисса можно обобщить следующим образом. Для некоторой достаточно гладкой функции $v(x)$ ее градиент $\nabla^m v$ порядка $m \in \mathbb{N}$ определяется как вектор-функция, компоненты которой частные производные $\partial^\gamma v$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, порядка $|\gamma| = m$ в некотором фиксированном порядке. Обозначим через $\mathcal{H}_m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B , для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla^m h$ в B . Пространства Харди и со смешанной нормой, состоящие из функций $U \in \mathcal{H}_m(B)$, будем обозначать через $\mathcal{H}_m^p$ и $\mathcal{H}_m(p, q, \alpha)$, соответственно.

Следствие 4.2. При $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$\mathcal{H}_m^p \subset \mathcal{H}_m \left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0} \right).$$

Доказательство. выводится вполне аналогичным образом как в Следствии 4.1.

Нужно лишь вместо λ_n определить $\lambda = \lambda_{m,n} := \frac{n-2}{m+n-2}$ и воспользоваться субгармоничностью функции $|U|^\lambda$, $U \in \mathcal{H}_m(B)$, согласно результату Кальдерона и Зигмунда [20]. □

Вложение (viii) в частном случае $p_0 = \infty$, $1 < p = q < \infty$ приводит к усиленному варианту известного неравенства Фейера–Рисса.

Следствие 4.3. Если $1 < p < \infty$, то для всех $u(x) \in h(B)$

$$(4.1) \quad \int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta \in S} |u(r\zeta)|^p dr \leq C(p, n) \|u\|_{h^p}^p,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h \left(\infty, p, \frac{n-1}{p} \right)$.

Классическое неравенство Фейера–Рисса можно найти, например, в монографии [3], а его некоторые отличные от (4.1) версии в шаре B — в статьях [21], [22], [8], [9]. Кроме того, результат Следствия 4.3 отвечает на вопрос Ставича [9, с.209].

Хотя в предельном случае $p = 1$ Следствие 4.3 ложно ввиду примера ядра Пуассона, тем не менее, как следует из Следствий 4.1 и 4.2, для систем Рисса и

более специальных гармонических векторов неравенство (4.1) оказывается верным и для некоторых $p \leq 1$.

Следствие 4.4. Если $\frac{n-2}{n-1} < p < \infty$, то для всех $U \in \mathcal{H}(B)$

$$(4.2) \quad \int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta \in S} |U(r\zeta)|^p dr \leq C(p, n) \|U\|_{\mathcal{H}^p}^p,$$

или в терминах вложения $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}(\infty, p, \frac{n-1}{p})$.

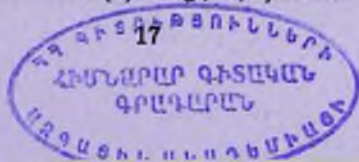
Следствие 4.5. Если $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < \infty$, то для всех $U \in \mathcal{H}_m(B)$ справедливо неравенство (4.2) и соответствующее вложение $\mathcal{H}_m^p \subset \mathcal{H}_m(\infty, p, \frac{n-1}{p})$.

Наиболее примечательной разницей между пространствами $h(p, q, \alpha)$ в $\mathbb{R}^n$ и такими же пространствами голоморфных функций в единичном круге является тот факт, что при некоторых $\alpha \leq 0$, $0 < p < 1$ гармонические пространства $h(p, q, \alpha)$ нетривиальны, т.е. содержат ненулевые функции. Это явление обсуждалось в [14], [13].

Нашей следующей задачей будет нахождение точных условий на индексы, при которых пространства $h(p, q, \alpha)$ тривиальны. Заметим, что хорошим примером нетривиальной функции пространства $h(p, q, \alpha)$ при подходящих $\alpha \leq 0$, $0 < p < 1$ является ядро Пуассона $P(x) = P(x, \xi) = \frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}$, $x \in B$, $\xi \in S$. В следующей лемме найдены точные условия принадлежности ядра Пуассона пространствам $h(p, q, \alpha)$.

Лемма 4.1. При $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

- (a) Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, то $P(x) \in h(p, q, \alpha) \iff \alpha > -1$;
 $P(x) \in h(p, \infty, \alpha) \iff \alpha \geq -1$;
 $P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) \iff \alpha > -1$;
- (b) Если $\frac{n-1}{n} < p \leq \infty$, то $P(x) \in h(p, q, \alpha) \iff \alpha > (n-1)(1-1/p)$;
 $P(x) \in h(p, \infty, \alpha) \iff \alpha \geq (n-1)(1-1/p)$;



$$\begin{aligned}
 P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > (n-1)(1-1/p); \\
 (c) \text{ Если } p = \frac{n-1}{n}, \text{ то } P(x) \in h(p, q, \alpha) &\iff \alpha > -1; \\
 P(x) \in h(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > -1; \\
 P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > -1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. следует из Леммы 2.4 и точных оценок ядра Пуассона

$$M_p(P; r) \approx \begin{cases} 1-r, & \text{при } 0 < p < \frac{n-1}{n}, \\ (1-r)^{-(n-1)(1-1/p)}, & \text{при } \frac{n-1}{n} < p \leq \infty, \\ (1-r) \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{1/p}, & \text{при } p = \frac{n-1}{n}, \end{cases} \quad 0 \leq r < 1.$$

□

В следующей теореме выявлены точные условия тривиальности пространств $h(p, q, \alpha)$, т.е. когда они состоят только из нулевой функции.

Теорема 4.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- Если $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq 0$;
- Если $1 \leq p \leq \infty$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < 0$;
- Если $1 \leq p \leq \infty$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq 0$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < -1$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$;
- Если $\frac{n-1}{n} \leq p < 1$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq (n-1)(1-1/p)$;
- Если $\frac{n-1}{n} < p < 1$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < (n-1)(1-1/p)$;
- Если $\frac{n-1}{n} \leq p < 1$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq (n-1)(1-1/p)$;
- Если $p = \frac{n-1}{n}$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$.

Доказательство. При $1 \leq p \leq \infty$ результат следует из монотонности интегральных средних $M_p(u; r)$ по r . Утверждения для классов $h_0(p, \infty, \alpha)$ доказаны в Теореме 2.11 из [14]. В остальных случаях $0 < p < 1$, воспользовавшись вложениями

(iii), (vi), (x) Теоремы 1 $h(p, q, \alpha) \subset h_0(p, \infty, \alpha)$, доказательство сводим к [14] и Лемме 4.1. □

Основные результаты настоящей статьи докладывались на международной конференции Harmonic Analysis and Approximations, V, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, посвященной 75-летию академика Н. У. Аракеляна.

Abstract. In this paper continuous embeddings in harmonic mixed norm spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ are established, generalizing some Hardy-Littlewood embeddings for similar spaces of holomorphic functions in the unit disc. Differences in indices between the spaces of harmonic and holomorphic spaces are revealed. As a consequence an analogue of classical Fejér-Riesz inequality is obtained. Embeddings in the special case of Riesz systems are also established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", *Math. Z.*, **34**, 403 – 439 (1932).
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", *Quart. J. Math. (Oxford)*, **12**, 221 – 256 (1941).
- [3] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, London (1970).
- [4] T. M. Flett, "Inequalities for the p th mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \leq 1$ ", *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 249 – 275 (1970).
- [5] T. M. Flett, "On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions", *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 749 – 768 (1970).
- [6] M. Pavlović, "Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **215**, 499 – 509 (1997).
- [7] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ", *Acta Math. Hungar.*, **85**, 81 – 96 (1999).
- [8] S. Stević, "On harmonic Hardy spaces and area integrals", *J. Math. Soc. Japan*, **55**, 339 – 347 (2004).
- [9] S. Stević, "On harmonic function spaces. II", *J. Comput. Anal. Appl.*, **10**, 205 – 228 (2008).
- [10] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", *Complex Variables Theory Appl.*, **50**, 953 – 966 (2005).
- [11] A. I. Petrosyan, "On weighted harmonic Bergman spaces", *Demonstratio Math.*, **41**, 73 – 83 (2008).
- [12] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n -harmonic mixed norm spaces on the polydisc", *J. Math. Anal. Appl.*, **291**, 727 – 740 (2004).
- [13] K. Avetisyan, "Weighted integrals and Bloch spaces of n -harmonic functions on the polydisc", *Potential Analysis*, **29**, 49 – 63 (2008).
- [14] A. B. Aleksandrov, "On boundary decay in the mean of harmonic functions", *St. Petersburg Math. J.*, **7**, 507 – 542 (1996).
- [15] C. Fefferman and E. M. Stein, " H^p spaces of several variables", *Acta Math.*, **129**, 137 – 193 (1972).
- [16] C. W. Liu and J. H. Shi, "Invariant mean-value property and $\mathcal{M}$ -harmonicity in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", *Acta Math. Sinica*, **19**, 187 – 200 (2003).
- [17] T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", *Math. Scand.*, **26**, 177 – 199 (1970).

- [18] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1970).
- [19] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1971).
- [20] A. P. Calderon and A. Zygmund, "On higher gradients of harmonic functions", *Studia Math.*, **24**, 211 – 226 (1964).
- [21] N. Du Plessis, "Spherical Fejér-Riesz theorems", *J. London Math. Soc.*, **31**, 386 – 391 (1956).
- [22] Y. Sagher, "On the Fejér-F. Riesz inequality in L^p ", *Studia Math.*, **61**, 269 – 278 (1977).

Поступила 20 декабря 2011

ON THE CONVERGENCE OF MULTIPLE WALSH-FOURIER
SERIES OF FUNCTIONS OF BOUNDED GENERALIZED
VARIATION

U. GOGINAVA AND A. A. SAHAKIAN

*Institute of Mathematics, Faculty of Exact and Natural Sciences, Tbilisi, Georgia
Yerevan State University, Armenia*

E-mails: *zazagoginava@gmail.com sart@ysu.am*

Abstract. The convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation is investigated. The sufficient and necessary conditions on the sequence $\Lambda = \{\lambda_n\}$ are found for the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded partial Λ -variation.

MSC2000 numbers: 42C10.

Keywords: Walsh-Fourier series; generalized variation; Λ -variation.

1. CLASSES OF FUNCTIONS OF BOUNDED GENERALIZED VARIATION

In 1881 Jordan [13] introduced the class of functions of bounded variation and applied it to the theory of Fourier series. Hereafter this notion was generalized by many authors (quadratic variation, Φ -variation, Λ -variation etc., see [13, 22, 21, 14]). In two dimensional case the class BV of functions of bounded variation was introduced by Hardy [12].

Let $I := [0, 1)$ and

$$J^k = (a^k, b^k) \subset I, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Consider a measurable function $f(x)$ defined on R^d and 1-periodic with respect to each variable. For $d = 1$ we set

$$f(J^1) := f(b^1) - f(a^1).$$

If for a function of $d-1$ variables the expression $f(J^1 \times \dots \times J^{d-1})$ is already defined, then for a function of d variables the *mixed difference* is defined as follows:

$$f(J^1 \times \dots \times J^d) := f(J^1 \times \dots \times J^{d-1}, b^d) - f(J^1 \times \dots \times J^{d-1}, a^d).$$

Let $E = \{J_k\}$ be a collection of nonoverlapping intervals from I ordered in arbitrary way and let Ω be the set of all such collections E .

For sequences of positive numbers $\Lambda^j = \{\lambda_n^j\}_{n=1}^\infty$, $j = 1, 2, \dots, d$, the $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^d)$ -variation of f with respect to the index set

$$D := \{1, 2, \dots, d\}$$

is defined as follows:

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}^D(f) := \sup_{\{J_s^j\}_{s=1}^{k_j} \in \Omega} \sum_{i_1, \dots, i_d} \frac{|f(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_d}^d)|}{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_d}}.$$

For an index set $\alpha = \{j_1, \dots, j_p\} \subset D$ and any $x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$ we set $\tilde{\alpha} := D \setminus \alpha$ and denote by x_α the vector of R^p consisting of components x_j , $j \in \alpha$, i.e.

$$x_\alpha = (x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \in R^p.$$

By $V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^\alpha(f, x_{\tilde{\alpha}})$ and $f(J_{i_{j_1}}^1 \times \dots \times J_{i_{j_p}}^p, x_{\tilde{\alpha}})$ we denote respectively the $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -variation and the mixed difference of f as a function of variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$ over the p -dimensional cube I^p with fixed values $x_{\tilde{\alpha}}$ of other variables. The $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -variation of f with respect to index set α is defined as follows:

$$V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^\alpha(f) = \sup_{x_{\tilde{\alpha}} \in I^{d-p}} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^\alpha(f, x_{\tilde{\alpha}}),$$

where $I^p := [0, 1]^p$.

Definition 1.1. We say that the function f has Bounded total $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^d)$ -variation on I^d and write

$$f \in BV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d} := BV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}(T^d),$$

if

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}(f) := \sum_{\alpha \subset D} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^\alpha(f) < \infty.$$

Definition 1.2. We say that the function f is continuous in $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^d)$ -variation on I^d and write

$$f \in CV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d} := CV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}(T^d),$$

if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}^\alpha(f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

for any $\alpha \subset D$, $\alpha := \{j_1, \dots, j_p\}$, where $\Lambda_n^{j_k} := \{\lambda_s^{j_k}\}_{s=n}^\infty$.

Definition 1.3. We say that the function f has Bounded Partial $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^d)$ -variation and write

$$f \in PBV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d} := PBV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}(T^d),$$

if

$$PV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}(f) := \sum_{i=1}^d V_{\Lambda^i}^{\{i\}}(f) < \infty.$$

In the case $\Lambda^1 = \dots = \Lambda^d = \Lambda$ we denote

$$BV_{\Lambda} := BV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}, \quad CV_{\Lambda} := CV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d},$$

and

$$PBV_{\Lambda} := PBV_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^d}.$$

If $\lambda_n \equiv 1$ (or if $0 < c < \lambda_n < C < \infty$, $n = 1, 2, \dots$) the classes BV_{Λ} and PBV_{Λ} coincide with the Hardy class BV and PBV respectively. Hence it is reasonable to assume that $\lambda_n \rightarrow \infty$, and since the intervals in the collection $E = \{J_i\}$ are ordered arbitrarily, we suppose, without loss of generality, that the sequence $\{\lambda_n\}$ is increasing. Thus,

$$(1.1) \quad 1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

When $\lambda_n = n$ for all $n = 1, 2, \dots$ we say *Harmonic Variation* instead of Λ -variation and write H instead of Λ (BV_H , PBV_H , CV_H , etc).

Remark 1.1. *The notion of Λ -variation was introduced by Waterman [21] in one dimensional case, by Sahakian [19] in two dimensional case and by Sablin [18] in the case of higher dimensions. The notion of bounded partial variation (class PBV) was introduced by Goginava in [7]. These classes of functions of generalized bounded variation play an important role in the theory Fourier series.*

Observe, that the number of variations in Definition 1.1 of total variation is $2^d - 1$, while the number of variations in Definition 1.3 of partial variation is only d .

The statements of the following theorem are known.

Theorem A. 1) (Dragoshanski [5]) *If $d = 2$, then $BV_H = CV_H$.*

2) (Bakhvalov [1]) *For any $d \geq 2$,*

$$CV_H = \bigcup_{\Gamma} BV_{\Gamma},$$

where the union is taken over all sequences $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\gamma_n = o(n)$ as $n \rightarrow \infty$.

The main result of this section is the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $d \geq 2$. If*

$$(1.2) \quad \frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \log^{d-2} n}{n^2} < \infty,$$

then there exists a sequence $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ with

$$(1.3) \quad \gamma_n = o(n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

such that $PBV_\Lambda \subset BV_\Gamma$.

Proof of Theorem 1.1. Choosing the sequence $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ such that

$$(1.4) \quad A_n \uparrow \infty, \quad \frac{\lambda_n A_n}{n} \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n \log^{d-2} n A_n^d}{n^2} < \infty,$$

we set

$$(1.5) \quad \gamma_n = \frac{n}{A_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

We prove that there is a constant $C > 0$ such that

$$(1.6) \quad \sum_{i_1, \dots, i_p} \frac{\left| f \left(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_p}^p, x^{\tilde{\alpha}} \right) \right|}{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_p}} < C \cdot PV_\Lambda(f),$$

for any $f \in PBV_\Lambda$, $\{J_{i_j}^j\}_{i_j=1}^{k_j} \in \Omega$, $j = 1, 2, \dots, d$, and $\alpha := \{i_1, \dots, i_p\} \subset D$.

To prove (1.6) observe, that

$$(1.7) \quad \begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_p} \frac{\left| f \left(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_p}^p, x^{\tilde{\alpha}} \right) \right|}{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_p}} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{i_{\sigma(1)} \leq \dots \leq i_{\sigma(p)}} \frac{\left| f \left(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_p}^p, x^{\tilde{\alpha}} \right) \right|}{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_p}} < \infty, \end{aligned}$$

where the sum is taken over all rearrangements $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^p$ of the set $\{1, 2, \dots, p\}$.

Denoting $M = PV_\Lambda(f)$ and using (1.5), (1.4) and (1.2) we obtain:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p} \frac{\left| f \left(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_p}^p, x^{\tilde{\alpha}} \right) \right|}{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_p}} \\ &= \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{p-1}} \frac{A_{i_1} \dots A_{i_{p-1}}}{i_1 \dots i_{p-1}} \sum_{i_p \geq i_{p-1}} \frac{\left| f \left(J_{i_1}^1 \times \dots \times J_{i_p}^p, x^{\tilde{\alpha}} \right) \right|}{\lambda_{i_p}} \cdot \frac{\lambda_{i_p} A_{i_p}}{i_p} \\ &\leq M \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{p-1}} \frac{A_{i_{p-1}}^p \lambda_{i_{p-1}}}{i_{p-1}^2} \cdot \frac{1}{i_1 \dots i_{p-2}} \\ &= M \sum_{i_{p-1}=1}^\infty \frac{A_{i_{p-1}}^p \lambda_{i_{p-1}}}{i_{p-1}^2} \sum_{i_{p-2}=1}^{i_{p-1}} \frac{1}{i_{p-2}} \sum_{i_{p-3}=1}^{i_{p-2}} \frac{1}{i_{p-3}} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \frac{1}{i_1} \\ &\leq M \sum_{i_{p-1}=1}^\infty \frac{A_{i_{p-1}}^p \lambda_{i_{p-1}}}{i_{p-1}^2} \left(\sum_{i=1}^{i_{p-1}} \frac{1}{i} \right)^{p-2} \leq C \cdot M \sum_{n=1}^\infty \frac{A_n^p \lambda_n \log^{d-2} n}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Similarly we can prove that all other summands in the right hand side of (1.7) are finite. Theorem 1.1 is proved. $\square$

2. WALSH FUNCTIONS

We denote the set of all non-negative integers by $\mathbf{N}$, the set of all integers by $\mathbf{Z}$ and the set of dyadic rational numbers in the unit interval $I := [0, 1)$ by $\mathbf{Q}$. Each element of $\mathbf{Q}$ has the form $\frac{p}{2^n}$ for some $p, n \in \mathbf{N}$, $0 \leq p < 2^n$.

By a dyadic interval in I we mean an interval $I_N^l := [l2^{-N}, (l+1)2^{-N})$ for some $l \in \mathbf{N}$, $0 \leq l < 2^N$. Given $N \in \mathbf{N}$ and $x \in I$, we denote by $I_N(x)$ the dyadic interval of length 2^{-N} that contains x . We denote $I_N := [0, 2^{-N})$.

Let $r_0(x)$ be the function defined on the real line by

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0, 1/2) \\ -1, & \text{if } x \in [1/2, 1) \end{cases}, \quad r_0(x+1) = r_0(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

The Rademacher system is defined by

$$r_n(x) = r_0(2^n x), \quad x \in I, \quad n = 0, 1, \dots$$

Let $w_0, w_1, \dots$ represent the Walsh functions, i.e. $w_0(x) \equiv 1$ and if $n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_s}$ is a positive integer with $n_1 > n_2 > \dots > n_s$ then

$$w_n(x) = r_{n_1}(x) \cdots r_{n_s}(x), \quad x \in I.$$

The Walsh-Dirichlet kernel is defined by

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x).$$

Recall that (see [20, 11]):

$$(2.1) \quad D_n(t) = w_n(t) \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j w_{2^j}(t) D_{2^j}(t),$$

where $n = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j 2^j$, $\delta_j = 0$ or 1 .

$$(2.2) \quad D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{if } x \in [0, 2^{-n}) \\ 0, & \text{if } x \in [2^{-n}, 1) \end{cases}$$

$$(2.3) \quad |D_n(x)| \leq \min\left(n, \frac{1}{x}\right), \quad x \in (0, 1),$$

$$(2.4) \quad |D_{m_A}(x)| \geq \frac{1}{4x}, \quad 2^{-2A-1} \leq x < 1,$$

where

$$(2.5) \quad m_A := 2^{2A-2} + 2^{2A-4} + \dots + 2^2 + 2^0.$$

Given $x \in I$, the expansion

$$(2.6) \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-(k+1)},$$

where $x_k = 0$ or 1 , is called the dyadic expansion of x . If $x \in I \setminus \mathbf{Q}$, then (2.6) is uniquely determined. For the dyadic expansion of $x \in \mathbf{Q}$ we choose the one with $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

The dyadic sum of $x, y \in I$ in terms of the dyadic expansion of x and y is defined by

$$x \dot{+} y = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-(k+1)}.$$

We consider the multiple Walsh system

$$w_{n_1}(x_1) \times \cdots \times w_{n_d}(x_d), \quad n_i \in \mathbf{N}, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

on the d -dimensional unit cube $I^d = [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$.

If $f \in L^1(I^d)$, then

$$\hat{f}(n_1, \dots, n_d) = \int_{I^d} f(x_1, \dots, x_d) w_{n_1}(x_1) \cdots w_{n_d}(x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

is the $(n_1, \dots, n_d)$ -th Walsh-Fourier coefficient of f .

The rectangular partial sums of d -dimensional Fourier series with respect to the Walsh system are defined by

$$S_{m_1, \dots, m_d} f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{n_d=0}^{m_d-1} \hat{f}(n_1, \dots, n_d) w_{n_1}(x_1) \cdots w_{n_d}(x_d).$$

Denoting

$$h_{\{i\}} := (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^d$$

and

$$\Theta(f, x, h_{\{i\}}) := f(x + h_{\{i\}}) - f(x), \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

the symbols $\Theta(f, x, h_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}})$ will stand for the expression which can be obtained by consecutive applying of Θ to the arguments with indices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

We denote by $C(I^d)$ the space of continuous, 1-periodic with respect to each variable functions defined on $\mathbf{R}^d$ with the norm

$$\|f\|_C := \sup_{x \in I^d} |f(x)|.$$

For $f \in C(I^d)$ the expressions

$$\omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(\delta_{\alpha_1}, \dots, \delta_{\alpha_p}; f)_C := \sup_{|h_{\alpha_i}| \leq \delta_{\alpha_i}, i=1, \dots, p} \|\Theta(f, \cdot, h_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}})\|_C$$

are called moduli of continuity of function f .

3. CONVERGENCE OF d -DIMENSIONAL WALSH-FOURIER SERIES

In this paper we consider convergence of **only rectangular partial sums** (convergence in the sense of Pringsheim) of d -dimensional Walsh-Fourier series.

We say that $f(x_1, \dots, x_d)$ is continuous at $(x_1, \dots, x_d)$ if

$$(3.1) \quad \lim_{h_i \rightarrow 0+, i=1, \dots, d} f(x_1 + h_1, \dots, x_d + h_d) = f(x_1, \dots, x_d).$$

The well known Dirichlet-Jordan theorem (see [23]) states that the Fourier series of a function $f(x)$, $x \in T$ of bounded variation converges at every point x to the value $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.

Hardy [12] generalized the Dirichlet-Jordan theorem to the double Fourier series. He proved that if function $f(x, y)$ has bounded variation in the sense of Hardy ($f \in BV$), then $S[f]$ converges at any point (x, y) to the value $\frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0)$.

Convergence of d -dimensional trigonometric Fourier series of functions of bounded Λ -variation was investigated in details by Sahakian [19], Dyachenko [2, 3, 4], Bakhvalov [1], Sablin [18], Goginava, Sahakian [10].

For the d -dimensional Walsh-Fourier series the convergence of partial sums of functions Harmonic bounded fluctuation and other bounded generalized variation were studied by Moricz [15, 16], Onnewer, Waterman [17], Goginava [8, 9].

For two-dimensional functions of bounded Harmonic variation Sargsyan [24] has proved the following

Theorem S. [Sargsyan [24]] *If $f \in BV_H(I^2)$, then the 2-dimensional Walsh-Fourier series of f converges to $f(x_1, x_2)$ at any point $(x_1, x_2) \in I^2$, where f is continuous.*

Now we formulate the main results of this paper.

Theorem 3.1. *Let $f \in CV_H(I^d)$, $d \geq 2$. Then the d -dimensional Walsh-Fourier series of f converges to $f(x)$ at any point $x \in I^d$, where the function f is continuous.*

The next theorem shows that Theorem S is not true for $d > 2$.

Theorem 3.2. *Let $d > 2$. Then there exists a continuous function $f \in BV_H(I^d)$ such that the d -dimensional Walsh-Fourier cubic partial sums of f diverge at some point.*

Note that similar results for the trigonometric system were proved by Bakhvalov [1].

In the next theorem we consider the behavior of the multidimensional Walsh-Fourier series of functions of bounded partial Λ -variation.

Theorem 3.3. *Let $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $d \geq 2$.*

a) If

$$(3.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \log^{d-2} n}{n^2} < \infty,$$

then the d -dimensional Walsh-Fourier series of a function $f \in PBV_{\Lambda}(I^d)$ converges to $f(x)$ at any point $x \in I^d$, where f is continuous.

b) If

$$(3.3) \quad \frac{\lambda_n}{n} = O\left(\frac{\lambda_{[n^{\delta}]}}{[n^{\delta}]}\right)$$

for some $\delta > 1$, and

$$(3.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \log^{d-2} n}{n^2} = \infty,$$

then there exists a continuous function $f \in PBV_{\Lambda}(I^d)$ such that the d -dimensional cubic partial sums of its Walsh-Fourier series diverge at some point.

Theorem 3.3 implies

Corollary 3.1. *a) If $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ with*

$$\lambda_n = \frac{n}{\log^{d-1+\varepsilon} n}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad d \geq 2,$$

for some $\varepsilon > 0$, then the d -dimensional Walsh-Fourier series of a function $f \in PBV_{\Lambda}(I^d)$ converges to $f(x)$ at any point x , where f is continuous.

b) If $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ with

$$\lambda_n = \frac{n}{\log^{d-1} n}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad d \geq 2,$$

then there exists a continuous function $f \in PBV_{\Lambda}(I^d)$ such that the d -dimensional cubic partial sums of its Walsh-Fourier series diverge at some point.

4. PROOFS OF MAIN RESULTS

Proof of Theorem 3.1. Let $n_i := 2^{N_i} + n'_i$, $0 \leq n'_i < 2^{N_i}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Since

$$D_{2^{N_i}+n'_i} = D_{2^{N_i}} + w_{2^{N_i}} D_{n'_i}$$

we can write

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & S_{n_1, \dots, n_d} f(x_1, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_d) \\ &= \int_{I^d} [f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)] \prod_{j=1}^d D_{n_j}(s_j) ds_1 \cdots ds_d \\ &= \sum_{\alpha \subset D} \int_{I^d} [f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)] \\ &\quad \times \prod_{r \in D \setminus \alpha} D_{2^{N_r}}(s_r) \prod_{l \in \alpha} w_{2^{N_l}}(s_l) D_{n'_l}(s_l) ds_1 \cdots ds_d =: \sum_{\alpha \subset D} A_\alpha. \end{aligned}$$

If $\alpha = \emptyset$, then from (2.2) we have

$$(4.2) \quad A_\alpha = o(1), \quad \text{as} \quad \min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty.$$

If $\alpha = D$, then we can write

$$\begin{aligned} A_D &= \sum_{i_1=0}^{2^{N_1}-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{2^{N_d}-1} \int_{I_{N_1}^{i_1} \times \cdots \times I_{N_d}^{i_d}} [f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)] \\ &\quad \times \prod_{l=1}^d w_{2^{N_l}}(s_l) D_{n'_l}(s_l) ds_1 \cdots ds_d \\ &= \sum_{i_1=0}^{2^{N_1}-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{2^{N_d}-1} \prod_{r=1}^d D_{n'_r} \left(\frac{i_r}{2^{N_r}} \right) \\ &\quad \times \int_{I_{N_1}^{i_1} \times \cdots \times I_{N_d}^{i_d}} [f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)] \\ &\quad \times \prod_{l=1}^d w_{2^{N_l}}(s_l) ds_1 \cdots ds_d. \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}
 & \int_{I_{N_1}^{i_1} \times \dots \times I_{N_d}^{i_d}} [f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)] \\
 & \times \prod_{l=1}^d w_{2^{N_l}}(s_l) ds_1 \cdots ds_d. \\
 = & \int_{I_{N_1+1}^{2^{i_1}}} \int_{I_{N_2}^{i_2} \times \dots \times I_{N_d}^{i_d}} \Delta^{N_1+1} f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) \prod_{l=2}^d w_{2^{N_l}}(s_l) ds_1 \cdots ds_d \\
 = & \dots \\
 = & \int_{I_{N_1+1}^{2^{i_1}} \times \dots \times I_{N_d+1}^{2^{i_d}}} \Delta^{N_d+1} (\Delta^{N_{d-1}+1} \dots \Delta^{N_1+1} \\
 & f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d)_1 \cdots)_d ds_1 \cdots ds_d,
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 \Delta^N f(x_1, \dots, x_d)_j & : = f(x_1, \dots, x_d) \\
 & - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j \dot{+} 2^{-N}, x_{j+1}, \dots, x_d).
 \end{aligned}$$

From (2.3) we have

$$\begin{aligned}
 |A_D| & \leq c \prod_{r=1}^d 2^{N_r} \int_{I_{N_1+1} \times \dots \times I_{N_d+1}} \sum_{i_1=0}^{2^{N_1}-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{2^{N_d}-1} \prod_{r=1}^d \frac{1}{i_r + 1} \\
 & \times \left| \Delta^{N_d+1} (\dots \Delta^{N_1+1} \right. \\
 & \left. f\left(x_1 \dot{+} s_1 \dot{+} \frac{i_1}{2^{N_1}}, \dots, x_d \dot{+} s_d \dot{+} \frac{i_d}{2^{N_d}}\right)_1 \cdots \right)_d \Big| ds_1 \cdots ds_d
 \end{aligned}$$

Set

$$\tau(N_1, \dots, N_d) := \left[\min \left\{ N_1 - 2, \dots, N_d - 2, (\theta(N_1, \dots, N_d))^{-1} \right\} \right],$$

where

$$\begin{aligned}
 & \theta(N_1, \dots, N_d) \\
 & = \sup_{0 < s_i < N_i 2^{-N_i}, i=1, \dots, d} |f(x_1 \dot{+} s_1, \dots, x_d \dot{+} s_d) - f(x_1, \dots, x_d)|.
 \end{aligned}$$

Then we can write

$$\begin{aligned}
 |A_D| &\leq c \prod_{r=1}^d 2^{N_r} \int_{I_{N_1+1} \times \dots \times I_{N_d+1}} \sum_{i_1, \dots, i_d=0}^{\tau(N_1, \dots, N_d)} \prod_{r=1}^d \frac{1}{i_r + 1} \\
 &\times \left| \Delta^{N_d+1} \left(\dots \Delta^{N_1+1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. f \left(x_1 + s_1 + \frac{i_1}{2^{N_1}}, \dots, x_d + s_d + \frac{i_d}{2^{N_d}} \right)_1 \dots \right) \right|_d ds_1 \dots ds_d \\
 &+ c \prod_{r=1}^d 2^{N_r} \sum_{l=1}^d \int_{I_{N_1+1}^{2^{i_1}} \times \dots \times I_{N_d+1}^{2^{i_d}}} \sum_{i_1=0}^{2^{N_1}-1} \dots \sum_{i_{l-1}=0}^{2^{N_{l-1}}-1} \\
 &\sum_{i_l=\tau(N_1, \dots, N_d)}^{2^{N_l}-1} \sum_{i_{l+1}=0}^{2^{N_{l+1}}-1} \dots \sum_{i_d=0}^{2^{N_d}-1} \prod_{r=1}^d \frac{1}{i_r + 1} \\
 &\times \left| \Delta^{N_d+1} \left(\dots \Delta^{N_1+1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. f \left(x_1 + s_1 + \frac{i_1}{2^{N_1}}, \dots, x_d + s_d + \frac{i_d}{2^{N_d}} \right)_1 \dots \right) \right|_d ds_1 \dots ds_d \\
 &\leq c \theta(N_1, \dots, N_d) \log^d \left(\frac{1}{\theta(N_1, \dots, N_d)} \right) \\
 &+ c \sum_{l=1}^d V_{\{i_1\} \dots \{i_{l-1}\} \{i_l + \tau(N_1, \dots, N_d)\} \{i_{l+1}\} \dots \{i_d\}}^D(f) = o(1),
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

as $\min(n_1, \dots, n_d) \rightarrow \infty$.

If $\alpha \subset D$, $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq D$, then we can prove similarly, that

$$A_\alpha = o(1) \text{ as } \min(n_1, \dots, n_d) \rightarrow \infty. \tag{4.4}$$

Combining (4.1)-(4.4) we complete the proof of Theorem 3.1. $\square$

Proof of Theorem 3.2. Let $\{A_k : k \geq 1\}$ be an increasing sequence of positive integers, satisfying

$$A_k > 2A_{k-1}, \tag{4.5}$$

$$\frac{A_k 2^{2dA_{k-1}}}{2^{A_k}} < \frac{1}{k^2}, \tag{4.6}$$

$$\frac{A_{k-1}^d}{A_k} < \frac{1}{k}. \tag{4.7}$$

Set

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 2(2^{2A_k}x - j), & \text{if } x \in [j2^{-2A_k}, (2j+1)2^{-2A_k-1}) \\ -2(2^{2A_k}x - j - 1), & \text{if } x \in [(2j+1)2^{-2A_k-1}, (j+1)2^{-2A_k}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\psi_k(x) := \begin{cases} 2(2^{2A_k}x - 1), & \text{if } x \in [2^{-2A_k}, 3 \cdot 2^{-2A_k-1}) \\ -2(2^{2A_k}x - 2), & \text{if } x \in [3 \cdot 2^{-2A_k-1}, 2^{-2A_k+1}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Let

$$g_k(x) := \varphi_k(x) \operatorname{sgn}(D_{m_{A_k}}(x)), \quad g_k(x+l) = g_k(x), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$h_k(x) := \psi_k(x) \operatorname{sgn}(D_{m_{A_k}}(x)), \quad h_k(x+l) = h_k(x), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Consider the function f defined by

$$(4.8) \quad f(x_1, \dots, x_d) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_1, \dots, x_d), \quad f(0, \dots, 0) = 0,$$

where

$$f_k(x_1, \dots, x_d) := \frac{g_k(x_1)}{A_k} \prod_{j=2}^d h_k(x_j).$$

First, we prove that $f \in BV_H$. We consider several cases:

a) If $\alpha := \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subset D \setminus \{1\}$ then by the construction of f we can write

$$(4.9) \quad V_H^\alpha(f) \leq \frac{c}{A_k} \sum_{i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_p}} \frac{|h_k(I_{i_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \dots, I_{i_{\alpha_p}}^{\alpha_p})|}{i_{\alpha_1} \cdots i_{\alpha_p}} \leq c < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

b) If $\alpha := \{1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\} \subset D$ and $p < d - 1$, then we have

$$(4.10) \quad V_H^\alpha(f) \leq \frac{c}{A_k} \sum_{i_1, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_p}} \frac{|g_k(I_{i_1}^1)|}{i_1} \frac{|h_k(I_{i_{\alpha_2}}^{\alpha_2}, \dots, I_{i_{\alpha_p}}^{\alpha_p})|}{i_{\alpha_2} \cdots i_{\alpha_p}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

On the other hand,

$$(4.11) \quad \sum_{i_1} \frac{|g_k(I_{i_1}^1)|}{i_1} \leq cA_k$$

and

$$(4.12) \quad \sum_{i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_p}} \frac{|h_k(I_{i_{\alpha_2}}^{\alpha_2}, \dots, I_{i_{\alpha_p}}^{\alpha_p})|}{i_{\alpha_2} \cdots i_{\alpha_p}} \leq c < \infty.$$

From (4.10) – (4.12) we obtain

$$(4.13) \quad V_H^\alpha(f) \leq c < \infty.$$

c) Let $\alpha = D$. Then by the construction of f we get

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad V_H^\alpha(f) &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A_k} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} \frac{|g_k(I_{i_1}^1)|}{i_1} \frac{|h_k(I_{i_2}^2, \dots, I_{i_d}^d)|}{i_2 \cdots i_d} \\
 &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A_k} \frac{1}{k^{d-1}} \sum_{i_1=1}^{2^{2A_k-2A_{k-1}}} \frac{1}{i_1} \\
 &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{d-1}} < \infty, \quad d > 2.
 \end{aligned}$$

Combining (4.9), (4.13) and (4.14) we conclude that $f \in BV_H$.

Now, we prove that the d -dimensional cubic partial sums of Walsh-Fourier series of f diverge at the point $(0, \dots, 0)$. By (4.8) we can write

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f(0, \dots, 0) &= S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_k(0, \dots, 0) \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_i(0, \dots, 0) + \sum_{i=k+1}^{\infty} S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_i(0, \dots, 0) \\
 &= J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned}$$

Since

$$\left| S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_i(0, \dots, 0) \right| \leq \|f_i\|_C (\log m_{A_k})^d \leq \frac{c A_k^d}{A_i},$$

by (4.5) and (4.7) for J_3 we obtain

$$(4.16) \quad J_3 \leq c A_k^d \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{A_i} \leq \frac{c A_k^d}{A_{k+1}} = o(1) \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

It is well-known [6] that

$$\begin{aligned}
 &\left\| S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_i - f_i \right\|_C \\
 &\leq c \sum_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subset D} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \left(\frac{1}{2^{2A_k}}, \dots, \frac{1}{2^{2A_k}}; f_i \right)_C A_k^p.
 \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \left(\frac{1}{2^{2A_k}}, \dots, \frac{1}{2^{2A_k}}; f_i \right)_C \leq c \left(\frac{2^{2A_i}}{2^{2A_k}} \right)^p.$$

Consequently, taking into account (4.6) and the equality $f_i(0, \dots, 0) = 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad J_2 &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left| S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_i(0, \dots, 0) \right| \\
 &\leq \frac{c A_k}{2^{2A_k}} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{2dA_i} \leq \frac{c A_k 2^{2dA_{k-1}}}{2^{2A_k}} = o(1), \quad \text{as } k \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Finally, by (2.4) we have

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad & \left| S_{m_{A_k}, \dots, m_{A_k}} f_k(0, \dots, 0) \right| \\
 &= \frac{1}{A_k} \left| \int_{I^d} f_k(x_1, \dots, x_d) \prod_{j=1}^d D_{m_{A_k}}(x_j) dx_1 \cdots dx_d \right| \\
 &= \frac{1}{A_k} \left| \int_I g_k(x_1) D_{m_{A_k}}(x_1) dx_1 \right| \\
 &\quad \times \left| \int_{I^{d-1}} \prod_{j=2}^d h_k(x_j) D_{m_{A_k}}(x_j) dx_2 \cdots dx_d \right| \\
 &= \frac{1}{A_k} \int_I \varphi_k(x_1) \left| D_{m_{A_k}}(x_1) \right| dx_1 \\
 &\quad \times \prod_{j=2}^d \int_I \psi_k(x_j) \left| D_{m_{A_k}}(x_j) \right| dx_j \\
 &= \frac{1}{A_k} \sum_{j=0}^{2^{2A_k-2A_{k-1}-1}} \int_{j \cdot 2^{-2A_k}}^{(j+1)2^{-2A_k}} \varphi_k(x_1) \left| D_{m_{A_k}}(x_1) \right| dx_1 \\
 &\quad \times \prod_{j=2}^d \int_{2^{-2A_k}}^{2^{-2A_k+1}} \psi_k(x_j) \left| D_{m_{A_k}}(x_j) \right| dx_j \\
 &\geq \frac{1}{16A_k} \sum_{j=0}^{2^{2A_k-2A_{k-1}-1}} \int_{j \cdot 2^{-2A_k}}^{(j+1)2^{-2A_k}} \frac{\varphi_k(x_1)}{x_1} dx_1 \prod_{j=2}^d \int_{2^{-2A_k}}^{2^{-2A_k+1}} \frac{\psi_k(x_j)}{x_j} dx_j \\
 &\geq \frac{1}{16A_k} \sum_{j=0}^{2^{2A_k-2A_{k-1}-1}} \frac{2^{2A_k}}{j+1} \int_{j \cdot 2^{-2A_k}}^{(j+1)2^{-2A_k}} \varphi_k(x_1) dx_1 \\
 &\quad \times (2^{2A_k-1})^{d-1} \prod_{j=2}^d \int_{2^{-2A_k}}^{2^{-2A_k+1}} \psi_k(x_j) dx_j \\
 &= \frac{1}{16A_k} \sum_{j=0}^{2^{2A_k-2A_{k-1}-1}} \frac{2^{2A_k}}{j+1} \frac{2^{(2A_k-1)(d-1)}}{2^{2A_k+1}} \left(\frac{1}{2^{2A_k+1}} \right)^{d-1} \geq c > 0.
 \end{aligned}$$

Combining (4.15)-(4.18) completes the proof of Theorem 3.2. $\square$

Proof of Theorem 3.3. Part a) immediately follows from Theorem 1.1, Theorem 3.1 and Theorem A.

To prove part b) we denote

$$A_{i_1, \dots, i_d} := \left[\frac{i_1}{2^{2N}}, \frac{i_1+1}{2^{2N}} \right) \times \dots \times \left[\frac{i_d}{2^{2N}}, \frac{i_d+1}{2^{2N}} \right),$$

$$W := \{(i_1, \dots, i_d) : i_d < i_s < i_d + m_{i_d}, \ 1 \leq s < d, \ 1 \leq i_d \leq N_\delta\},$$

$$N_\delta = \left[4^{(N-1)/(\delta+1)} \right], \quad t_j := \left(\sum_{i=1}^{s_j} \frac{1}{\lambda_i} \right)^{-1}, \quad s_j := [j^{1+\delta}],$$

where $[x]$ is the integer part of x .

It is not hard to see, that for any sequence $\Lambda = \{\lambda_n\}$ satisfying (1.1) the class $C(I^d) \cap PBV_\Lambda(I^d)$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{PBV_\Lambda} := \|f\|_C + PV_\Lambda(f).$$

For $N \in \mathbb{N}$ consider the following function

$$f_N(x_1, \dots, x_d) := \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in W} t_{i_d} 1_{A_{i_1, \dots, i_d}}(x_1, \dots, x_d) \prod_{s=1}^d \xi_N(x_s) \operatorname{sgn}(D_{m_N}(x_s)),$$

where $1_A(x_1, \dots, x_d)$ is the characteristic function of the set $A \subset T^d$, m_a is defined by (2.5) and

$$\xi_N(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x = (2j+1)2^{-(2N+1)}, \ j = 1, 2, \dots, 2^{2N}-1 \\ 0, & \text{if } x \in [0, 2^{-2N}), \ x = j \cdot 2^{-2N}, \ j = 1, 2, \dots, 2^{2N} \\ \text{linear and continuous on } [j2^{-(2N+1)}, (j+1)2^{-(2N+1)}], \ j = 2, 3, \dots, 2^{2N} \end{cases},$$

$$\xi_N(x+l) = \xi_N(x), \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots$$

First we show that the norms $\|f_N\|_{PBV_\Lambda}$ are uniformly bounded.

Let $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_d)$ be fixed, where $k = 1, \dots, d-1$. Then it is easy to show that

$$V_\Lambda^{\{k\}}(f_N) \leq C \cdot t_{i_d} \left(\sum_{i_k=i_d+1}^{i_d+m_{i_d}} \frac{1}{\lambda_{i_k-i_d}} \right) \leq C \cdot t_{i_d} \left(\sum_{i_k=1}^{m_{i_d}} \frac{1}{\lambda_{i_k}} \right) \leq C < \infty.$$

If $(i_1, \dots, i_{d-1})$ is fixed, the condition $(i_1, \dots, i_d) \in W$ implies

$$\max \{i_d(i_s) : 1 \leq s \leq d-1\} < i_d < \min \{i_s : 1 \leq s \leq d-1\},$$

where

$$i_d(i_s) := \min \{i_d : i_d + m_{i_d} > i_s\}.$$

Consequently, by the definition of the function f_N we obtain that for any $s = 1, \dots, d-1$

$$\begin{aligned} V_{\Lambda}^{\{d\}}(f_N) &\leq C \sum_{i_d=i_d(i_s)+1}^{i_s} \frac{t_{i_d}}{\lambda_{i_d-i_d(i_s)}} \\ &\leq C \cdot t_{i_d(i_s)} \sum_{i_d=i_d(i_s)+1}^{i_s} \frac{1}{\lambda_{i_d-i_d(i_s)}} \\ &= C \cdot t_{i_d(i_s)} \sum_{i_d=1}^{i_s-i_d(i_s)} \frac{1}{\lambda_{i_d}} \leq C \cdot t_{i_d(i_s)} \sum_{i_d=1}^{m_{i_d(i_s)}} \frac{1}{\lambda_{i_d}} = C < \infty. \end{aligned}$$

Hence $f_N \in PBV_{\Lambda}$ and

$$(4.19) \quad \|f_N\|_{PV_{\Lambda}} \leq C, \quad N = 1, 2, \dots$$

Observe, that by (3.3) we have

$$\frac{1}{t_j} = \sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{\lambda_i} \leq C \frac{m_j}{\lambda_{m_j}} \log m_j \leq C \frac{j \log j}{\lambda_j}.$$

Hence

$$t_j \log j \geq c \frac{\lambda_j}{j}.$$

Consequently,

$$\begin{aligned} (4.20) \quad & S_{m_N, \dots, m_N} q_N(0, \dots, 0) \\ &= \int_{I^d} q_N(x_1, \dots, x_d) \prod_{s=1}^d D_{m_N}(x_s) dx_1 \cdots dx_d \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in W} t_{i_d} \int_{A_{i_1, \dots, i_d}} \prod_{s=1}^d |\xi N(x_s) D_{m_N}(x_s)| dx_1 \cdots dx_d \\ &\geq c \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in W} t_{i_d} \int_{A_{i_1, \dots, i_d}} \frac{dx_1 \cdots dx_d}{x_1 \cdots x_d} \geq c \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in W} t_{i_d} \frac{1}{i_1 \cdots i_d} \\ &\geq c \sum_{i_d=1}^{N_{\delta}} \frac{t_{i_d}}{i_d} \sum_{i_1=i_d}^{i_d+m_{i_d}} \cdots \sum_{i_{d-1}=i_d}^{i_d+m_{i_d}} \frac{1}{i_1 \cdots i_{d-1}} \\ &\geq c \sum_{i_d=1}^{N_{\delta}} \frac{t_{i_d}}{i_d} \log^{d-1} \left(\frac{i_d + m_{i_d}}{i_d} \right) \geq c(\delta) \sum_{i_d=1}^{N_{\delta}} \frac{t_{i_d} \log i_d}{i_d} \log^{d-2} i_d \\ &\geq c(\delta) \sum_{n=1}^{N_{\delta}} \frac{\lambda_n \log^{d-2} n}{n^2} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

as $N \rightarrow \infty$, according to (3.4).

Applying the Banach-Steinhaus theorem, from (4.19) and (4.20) we obtain that there exists a continuous function $f \in PBV_{\Lambda}(I^d)$ such that

$$\sup_N |S_{N,\dots,N} f(0, \dots, 0)| = \infty.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. N. Bakhvalov, "Continuity in Λ -variation of functions of several variables and the convergence of multiple Fourier series *Mat. Sb.* **193**, no. 12, 3–20 (2002).
- [2] M. I. Dyachenko, "Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series *Anal. Math.* **21**, 3 – 21 (1995).
- [3] M. I. Dyachenko, "Two-dimensional Waterman classes and u -convergence of Fourier series *Mat. Sb.*, **190**, no. 7, 23–40 (1999).
- [4] M. I. Dyachenko, D. Waterman, "Convergence of double Fourier series and W-classes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**, 397 – 407 (2005).
- [5] O. S. Dragoshanskiĭ, "Continuity in Λ -variation of functions of several variables", *Mat. Sb.* **194**, no. 7, 57 – 82 (2003).
- [6] R. Getsadze, "On the convergence and divergence of multiple Fourier series with respect to the Walsh-Paley system in the spaces C and L ", *Anal. Math.* **13**, no. 1, 29–39 (1987).
- [7] U. Goginava, "On the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series", *East J. Approx.*, **3**, no. 5, 253 – 266 (1999).
- [8] U. Goginava, "Uniform convergence of Cesàro means of negative order of double Walsh-Fourier series", *J. Approx. Theory* **124**, no. 1, 96–108 (2003).
- [9] U. Goginava, "On the uniform convergence of Walsh-Fourier series", *Acta Math. Hungar.*, **93**, no. 1-2, 59–70 (2001).
- [10] U. Goginava, A. A. Sahakian, "On the convergence of double Fourier series of functions of bounded partial generalized variation", *East J. Approx.*, **16**, no. 2, 109 – 121 (2010).
- [11] B. I. Golubov, A. V. Efimov, V. A. Skvortsov, "Series and transformations of Walsh", [in Russian], Moscow (1987); English translation Kluwer Academic, Dordrecht (1991).
- [12] G. H. Hardy, "On double Fourier series and especially which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters", *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **37**, 53-79 (1906).
- [13] C. Jordan, "Sur la series de Fourier", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **92**, 228 – 230 (1881).
- [14] Marcinkiewicz J., On a class of functions and their Fourier series. *Compt. Rend. Soc. Sci. Warsawie*, 26 (1934), 71-77.
- [15] F. Moricz, "Rate of convergence for double Walsh-Fourier series of functions of bounded fluctuation", *Arch. Math. (Basel)* **60**, no. 3, 256–265 (1993).
- [16] F. Moricz, "On the uniform convergence and L^1 -convergence of double Walsh-Fourier series", *Studia Math.*, **102**, no. 3, 225–237 (1992).
- [17] C. W. Onneweer, D. Waterman, "Fourier series of functions of harmonic bounded fluctuation on groups", *J. Analyse Math.*, **27**, 79–83 (1974).
- [18] A. I. Sablin, " Λ -variation and Fourier series", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, **10**, 66–68 (1987).
- [19] A. A. Sahakian, "On the convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation, *Izv. Akad. Nauk Arm.SSR, Ser. Mat.*, **21**, no. 6, 517 – 529 (1986).
- [20] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pol, *Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*. Adam Hilger, Bristol, New York (1990).
- [21] D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", *Studia Math.*, **44**, no. 1, 107 – 117 (1972).
- [22] Wiener N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Massachusetts J. Math.*, 3 (1924), 72-94.
- [23] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).

- [24] O. G. Sargsyan, “On convergence and the Gibbs phenomenon of double Fourier-Walsh series of functions of bounded harmonic variation Izv. NAN Armenii, Mat., **30**, no. 5, 41–59 (1995).

Поступила 10 декабря 2011

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ БАЗИСАМ

Д. А. КАРАГУЛЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: davidkar89@yahoo.com

Аннотация. В работе доказываются теоремы, дающие полные характеристики множеств точек расходимости общих рядов по ортонормированным базисам со свойством локализации.

MSC2010 number: 42A20.

Ключевые слова: системы со свойством локализации; множества расходимости; множества типа G_δ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Для функционального ряда

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

множество $E \subset [0, 1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0, 1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1). Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [7], [1]): для того чтобы $E \subset [0, 1]$ стало множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ). Характеризации множеств точек расходимости рядов по разным ортонормированным системам посвящено много работ. При этом рассматриваются как ряды Фурье так и общие ряды. Множества точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов описаны Целлером в работе [9], в которой доказывается, для того чтобы множество было множеством неограниченной расходимости необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ . Аналогичную

теорему для рядов по системе Хаара доказывается М. А. Луниной в работе [6]. Ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\bar{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\bar{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. Множества точек обычной расходимости рядов Фурье по система Хаара и Франклина полностью охарактеризована Г. А. Карагуляном в работах [2] и [4]. При этом отметим, что в работах [3] и [4] установлены общие теоремы, дающие полные характеристики множеств расходимости последовательностей операторов со свойством локализации. В настоящей работе рассматривается вопрос о характеристизации множество точек неограниченной расходимости общих рядов по ортонормированным базисам со свойством локализации.

Пусть

$$(1.2) \quad \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

есть ортонормальный базис в $C[0, 1]$. Через $S_n(x, f)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ по системе (1.2). Через $M[0, 1]$ обозначим пространство ограниченных функций. Рассматриваются ортонормированные системы (1.2), которые обладают свойством локализации, т.е. для любой кусочно-линейной и непрерывной функции $f \in M[0, 1]$ на (α, β) , имеем

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) = f(x), x \in (\alpha, \beta),$$

причем сходимость равномерна в любом замкнутом множестве интервала (α, β) . Множество A назовем множеством типа G_δ , если

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k суть открытые множества. При этом очевидно можно предполагать, что $G_k \supseteq G_{k+1}$ для всех $k \in N$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2.1. *Если ортонормированная система непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, обладает свойством локализации, то для любого множества E типа*

G_δ существует ряд

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x),$$

который неограниченно расходится в любой точке $x \in E$ и сходится при $x \notin E$.

Так как члены ряда (2.1) суть непрерывные функции, то согласно теореме Хана-Серпинского множество его неограниченной расходимости имеет тип G_δ . Отсюда, с учетом результата теоремы 2.1 мы получим

Следствие 2.1. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированная система непрерывных функций со свойством локализации. Для того, чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости некоторого ряда (2.1), необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .

Замечание 2.1. Примером системы, удовлетворяющей вышеупомянутым свойствам является общая система Франклина. Таким образом, следствием 2.1 полностью характеризуются множества неограниченной расходимости для общих систем Франклина.

Воспользуемся системой Радемахера

$$r_n(x) = \text{sign} [\sin(2^n \pi x)] \quad x \in [0, 1]$$

и обозначим

$$(2.2) \quad \beta_I^k(x) = \begin{cases} r_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

где $I = [a, b]$. В силу теоремы Фейера (см. [8], стр. 77), имеем

$$(2.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \beta_I^k(x) f(x) dx = 0,$$

для любой непрерывной функции f .

Функция

$$(2.4) \quad \phi(u) = \sup_{n \in N} \sup_{x \in [0, 1]} \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |S_n(x, f(t) I_{\{t: |t-x| > u\}}(t))|, \quad 0 < u < 1,$$

была определена в работе Карагуляна [4] и играет важную роль в вопросах характеристики множеств точек расходимости. В [4] устанавливается, что

$$\phi(u) < \infty, \quad u \in (0, 1],$$

и для любой функции $f \in L^1[0, 1]$, с $\text{supp } f \subset A$ имеет место неравенство

$$(2.5) \quad |S_n(x, f)| \leq \phi(\text{dist}(x, A)) \|f\|_{L^1}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{dist}(x, A) > 0.$$

Лемма 2.1. Пусть $J = (a, b) \subset [0, 1]$, тогда для любого $\epsilon > 0$ и $d > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого интервала $I = [c, e] \subset J$, с $\text{dist}(J^c, I) > d$ и любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, с $\text{supp } f \subset I$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, имеет место

$$(2.6) \quad |S_k(x, f)| < \epsilon, \quad \text{при } x \in J^c \text{ и всех } k \in \mathbb{N},$$

как только $|I| < \delta$.

Доказательство. Из (2.4) легко видеть, что $\phi(x)$ монотонно убывающая функция. Тогда, с учетом (2.5) и условия $\text{dist}(J^c, I) > d$, получим

$$|S_n(x, f)| \leq \phi(\text{dist}(x, A)) \|f\|_{L^1} \leq \phi(d) \|f\|_{L^1} \leq \phi(d) |I|, \quad \text{при } x \in J^c.$$

Следовательно, при $|I| < \delta = \frac{\epsilon}{\phi(d)}$ получим (2.6) и лемма 2.1 доказана $\square$

Из леммы 2 работы [4] следует

Лемма 2.2. Пусть $J = (a, b) \subset [0, 1]$, $I = [c, d] \subset J$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует число $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, с $\text{supp } f \subset I$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, имеем

$$(2.7) \quad |S_k(x, f)| < \epsilon, \quad \text{при } x \in J^c \text{ и } k > n.$$

Лемма 2.3. Пусть $J \subset [0, 1]$ — открытый интервал, а $I = [a, b] \subset J$. Тогда для любых чисел $p \in \mathbb{N}$ и $\epsilon > 0$, существует полином по системе (1.2)

$$(2.8) \quad \sum_{k=p}^q a_k \psi_k(x),$$

такой, что

$$(2.9) \quad \max_{p \leq n \leq q} \left| \sum_{k=p}^n a_k \psi_k(x) \right| < \epsilon, \quad \text{при } x \in J^c,$$

$$(2.10) \quad \max_{p \leq n \leq q} \left| \sum_{k=p}^n a_k \psi_k(x) \right| \geq 1, \quad \text{при } x \in I.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, существует натуральное число n_0 такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, с условиями $\|f\|_\infty \leq 1$ и $\text{supp } f \subset I$, имеет место неравенство

$$(2.11) \quad |S_r(x, f)| = \left| \sum_{k=1}^r (\psi_k, f) \psi_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{при } x \in J^c, \text{ и } r > n_0.$$

Отсюда следует, что

$$(2.12) \quad \left| \sum_{k=1}^r (\psi_k, \beta_I^m) \psi_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{8}, \text{ при } x \in J^c, \text{ и } r > \tau,$$

где $\beta_I^m(x)$ есть функции, определенные в (2.2) и $\tau = \max\{p, n_0\}$. Согласно (2.3), можно зафиксировать число $m \in \mathbb{N}$, такое, что

$$(2.13) \quad |(\psi_k, \beta_I^m)| \leq \frac{\varepsilon}{8\tau}, \text{ для } k = 1, 2, \dots, \tau.$$

Функция β_I^m имеет конечное число точек разрыва. Пусть $A = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ множество этих точек. Для любой точки $\xi \in A$ рассмотрим следующую функцию

$$(2.14) \quad T_{\delta, \xi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } t = \xi, \\ 0, & \text{при } t \notin (\xi - \delta, \xi + \delta), \\ \text{линейна и непрерывна,} & \text{на } [\xi - \delta, \xi] \text{ и } [\xi, \xi + \delta], \end{cases}$$

где $(\delta < |I|/2s)$. Так как (2.14) непрерывная функция, то его ряд Фурье по системе (1.2) будет сходиться к нему равномерно на $[0, 1]$. Согласно лемме 2.1, при достаточно малом δ и для любой точки $\xi \in A$ имеет место

$$(2.15) \quad |S_n(x, T_{\delta, \xi})| < \frac{\varepsilon}{8s}, \text{ при } x \notin \left(\xi - \frac{|I|}{2s}, \xi + \frac{|I|}{2s} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

При малом δ обеспечивается также условие

$$(2.16) \quad |(\psi_k, T_{\delta, \xi})| \leq \frac{\varepsilon}{8\tau s}, \text{ при } k \leq \tau.$$

Пусть

$$(2.17) \quad \gamma_r = \begin{cases} 1, & \text{если } \limsup_{l \rightarrow \infty} S_l(\xi_r, \beta_I^m) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \limsup_{l \rightarrow \infty} S_l(\xi_r, \beta_I^m) < 0. \end{cases}$$

Определим функцию

$$F(x) = \beta_I^m(x) + \sum_{r=1}^s \gamma_r T_{\delta, \xi_r}(x).$$

Из (2.14) и (2.17) легко следует, что

$$(2.18) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n(\xi_r, F)| \geq \frac{1}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

Отсюда, с учетом непрерывности функции $S_n(x, F)$, найдется число $\delta > 0$, такое, что выполняются неравенства

$$(2.19) \quad |S_{\nu_k}(x, F)| \geq \frac{1}{3} \text{ для } x \in (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta),$$

для некоторых натуральных чисел $\nu_k = \nu_k(\xi_k)$. Далее имеем

$$(2.20) \quad |F(x)| \geq |\beta_I^m(x)| - \left| \sum_{r=1}^s \gamma_r T_{\delta, \xi_r}(x) \right| \geq \frac{1}{2} \text{ для } x \in I \setminus A,$$

а из свойства локализации следует, что $S_n(x, F)$ сходится равномерно на множестве

$$I \setminus \bigcup (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta).$$

Отсюда, с учетом (2.20), можно найти число ν , такое, что

$$(2.21) \quad |S_\nu(x, F)| \geq \frac{1}{3}, \quad x \in I \setminus \bigcup (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k).$$

Из (2.16) и (2.13) следует

$$(2.22) \quad |(\psi_k, F)| \leq |(\psi_k, \beta_I^n)| + \sum_{r=1}^s |(\psi_k, T_{\delta, \xi_k})| \leq \frac{\varepsilon}{4\tau}, \quad \text{при } k \leq \tau.$$

Определим

$$q = \max_{1 \leq j \leq i} \{\nu_j, \nu\},$$

и пусть

$$a_k = 4 \int_0^1 F(x) \psi_k(x) dx, \quad k = p, p+1, \dots, q.$$

Из (2.19) и (2.22) для $x \in (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta)$ получаем

$$\left| \sum_{i=p}^{\nu_k} a_i \psi_i(x) \right| \geq 4|S_{\nu_k}(x, F)| - 4|S_p(x, F)| \geq \frac{4}{3} - 4p \frac{\varepsilon}{4\tau} \geq \frac{4}{3} - \varepsilon,$$

аналогичным образом из (2.21) и (2.19) следует

$$\left| \sum_{i=p}^{\nu} a_i \psi_i(x) \right| \geq 4|S_\nu(x, F)| - 4|S_p(x, F)| \geq \frac{4}{3} - \varepsilon,$$

при $x \in I \setminus \bigcup (\xi_k - \delta, \xi_k + \delta)$. А из (2.12) и (2.15)

$$\left| \sum_{i=p}^n a_i \psi_i(x) \right| \leq 4|S_n(x, \beta_I^n)| + 4 \sum_{r=1}^s |S_n(x, T_{\delta, \xi_r})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4s \frac{\varepsilon}{8s} \leq \varepsilon,$$

при $x \in J^c$ и $p \leq n \leq q$. Следовательно при $\varepsilon < \frac{1}{3}$ получим (2.9) и (2.10). Lemma 2.3 доказана. $\square$

Пусть G открытое множество. Скажем, что система замкнутых двоичных интервалов $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ является разбиением для G , если $(\omega_i)^o \cap (\omega_j)^o = \emptyset$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^\infty \omega_k = G$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\omega_k, G^c) = 0.$$

Обозначим через ω_k^* объединение ω_k с его двумя соседними интервалами. Легко заметить, что любое открытое множество обладает таким разбиением.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть A есть множество типа G_δ . Имеем

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k -открытые множества и $G_k \supseteq G_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Каждое из множеств G_k обладает некоторым разбиением на двоичные интервалы. Пусть $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая нумерация всех этих интервалов. Легко заметить, что имеет место соотношение

$$(2.23) \quad x \in A \Leftrightarrow x \in \omega_k \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N},$$

$$(2.24) \quad \Leftrightarrow x \in \omega_k^* \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N},$$

С каждым интервалом ω_k будем связывать некоторый многочлен по системе (1.2)

$$(2.25) \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i \psi_k(x)$$

с условиями

$$(2.26) \quad \max_{n_{k-1} < n \leq n_k} \left| \sum_{i=n_{k-1}+1}^n a_i \psi_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^k} \quad x \notin \omega_k^*,$$

$$(2.27) \quad \max_{n_{k-1} < n \leq n_k} \left| \sum_{i=n_{k-1}+1}^n a_i \psi_k(x) \right| \geq k, \quad x \in \omega_k,$$

где $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ есть некоторая последовательность номеров. Сделаем это по индукции. Применив лемму 3, при $J = \omega_1^*$, $I = \omega_1$, $p = 1$, $\varepsilon = 1$, получим полином (2.25), с условиями (2.26) и (2.27) в случае $k = 1$. Далее предположим, что условия (2.26) и (2.27) выполняются для некоторых полиномов (2.25) при $k = 1, 2, \dots, t$. Обозначим

$$M_{t+1} = \max_{x \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n_t} a_i \psi_k(x) \right| + (t+1).$$

Вновь применив лемму 3, с $J = \omega_{t+1}^*$, $I = \omega_{t+1}$, $n = n_t$, $\varepsilon = 1/(M_{k+1}2^k)$, получим полином вида (2.25), удовлетворяющий условиям (2.26) и (2.27) при $k = t+1$. Итак, завершая индукцию, в конце концов мы получим некоторый ряд

$$(2.28) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_k(x)$$

удовлетворяющий условиям (2.26) и (2.27). Пусть $x \in A$. Тогда, согласно (2.23), существует бесконечная последовательность интервалов ω_k , содержащих точку

x . Это значит, что в точке x для бесконечного числа значений k выполняется (2.27). Отсюда следует расходимость ряда (2.28) в точке x . Если же $x \notin A$, то существуют лишь конечное число интервалов ω_k^* , содержащие x . Это значит, что (2.26) может не выполняться только для конечного числа индексов k , откуда получаем, что ряд (2.28) сходится. Теорема 2.1 доказана. $\square$

3. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема частично показывает, что условие локализации, налагаемое на систему (1.2), играет важную роль.

Теорема 3.1. *Существует ортонормированная и замкнутая в $C[0, 1]$ система непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и непустое множество $E \subset [0, 1]$ типа G_δ , которое не является множеством неограниченной расходимости для любого ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_{\sigma(k)}(x),$$

где $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ биективное отображение.

Доказательство. Очевидно, что достаточно построить ортогональную (необязательно нормированную) систему с теми же условиями. Пусть $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ классическая система Франклина. Согласно экспоненциальным оценкам функций Франклина (см [5], теорема 6.8), существуют точки $x_0, y_0 \in [0, 1]$, $x_0 \neq y_0$ и некоторую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |F_{n_k}(y_0)| = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |F_{n_k}(x_0)| = 0.$$

Используя это, можно найти числа $\{\alpha_k\}$, удовлетворяющие условиям

$$(3.1) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k F_k(y_0)| = \infty \text{ и } |\alpha_n F_n(x_0)| \leq 1, \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Для краткости обозначим $\alpha_n F_n(x) = \psi_n(x)$, для $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} < \infty.$$

Из условия (3.1) очевидно, что систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно переставить таким образом, чтоб вновь полученная система $\{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяла условиям

$$(3.3) \quad |\psi'_{2k-1}(y_0) + \psi'_{2k}(y_0)| > \gamma_{2k-1} \text{ и } |\psi'_{2k-1}(y_0) - \psi'_{2k}(y_0)| > \gamma_{2k},$$

где $k = 1, 2, \dots$. Тогда систему $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ определим

$$\phi_{2k-1} = \psi'_{2k-1}(x) + \psi'_{2k}(x), \phi_{2k} = -\psi'_{2k-1}(x) + \psi'_{2k}(x),$$

для всех k . Полученная таким образом система $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ будет ортогональной и замкнутой в $C[0, 1]$, и согласно (3.3)

$$(3.4) \quad |\phi_k(y_0)| > \gamma_k, \text{ для } k \in \mathbb{N},$$

а в силу (3.1)

$$(3.5) \quad |\phi_k(x_0)| \leq 1 + 1 = 2, \text{ для } k \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что полученная система удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть теперь $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая последовательность и $\{\phi_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая перестановка системы $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что ряд

$$(3.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_{\sigma(k)}$$

сходится в точке y_0 . Тогда, при больших k

$$|a_k \phi_{\sigma(k)}(y_0)| < 1,$$

а с учетом (3.4)

$$|a_k| < \frac{1}{|\phi_{\sigma(k)}(y_0)|} < \frac{1}{\gamma_{\sigma(k)}}.$$

Отсюда, согласно (3.2) и (3.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \phi_{\sigma(k)}(x_0)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\sigma(k)}} < \infty.$$

Следовательно из сходимости ряда (3.6) в точке y_0 следует его сходимость в точке x_0 , следовательно множество $E = [0, 1] \setminus \{y_0\}$ удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

В заключении выражаю благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. In this paper we establish a number of theorems providing complete characterizations of divergence sets of general series in orthogonal bases with a localization property.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Hahn, "Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge", Arch. d. Math. u. Phys., 28, 34 – 45 (1919).
- [2] Г. А. Карагулян, "Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара", Известия НАН Армении, 46, no. 6, 33 – 50 (2010).
- [3] G. A. Karagulyan, "Divergence of general localized operators on the sets of measure zero", Colloq. Math., 121, no. 1, 113 – 119 (2010).
- [4] Г. А. Карагулян, "О характеристиках множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации, Мат. Сборник, 202, no. 1, 11 – 36 (2011).
- [5] Б. С. Кашия, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука (1984).
- [6] М. А. Лунина, "О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара", Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мат., no. 4, 13 – 20 (1976).
- [7] W. Sierpinski, "Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues", Fund. Math., no. 2, 41 – 49 (1921).
- [8] Н. К. Варн, Тригонометрические ряды, Физматгиз (1961).
- [9] K. Zeller, Über Konvergenzmengen von Fourierreihen, Arch. Math., 6, 335-340 (1955).

Поступила 26 декабря 2011

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ПО ПОЛИЭДРАМ

О. И. КУЗНЕЦОВА

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

E-mail: kuznets@iamm.ac.donetsk.ua

Аннотация. Данная статья есть обзор результатов о сильных полиадральных средних рядах Фурье непрерывных на m -мерном торе функций, неравенствах типа неравенства Сидона для ядер Дирихле по полиэдрам, об интегрируемости и сходимости кратных тригонометрических рядов.

MSC2010 number: 42A20, 42A32, 26D15

Ключевые слова: Сильная суммируемость; тригонометрический ряд.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f \in L(T^m)$, $T^m = [-\pi, \pi]^m$, $\|f\|_L = \int_{T^m} |f(u)| du < \infty$.

Определим ее ряд Фурье

$$(1.1) \quad f(x) \sim \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad kx = k_1 x_1 + \dots + k_m x_m,$$

с коэффициентами Фурье

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} f(u) e^{-iku} du,$$

где Z^m – целочисленная решетка в R^m . В отличие от одномерного, в кратном случае нет канонического способа задания частичной суммы ряда (1.1). Пусть V – замкнутая ограниченная область в R^m , содержащая начало координат O внутри себя.

Полагаем для $n > 0$

$$S_{nV} f(x) = \sum_{k \in nV \cap Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

где $nV = \{x \in R^m : x/n \in V\}$ – гомотет V . Сумму ряда (1.1) естественно определить как предел, если он существует, при $n \rightarrow \infty$ частичных сумм $S_{nV} f$. Заметим, что

$$S_{nV} f = (2\pi)^{-m} f * D_{nV}$$

– свертка функции f и ядра Дирихле порядка n

$$D_{nV}(x) = \sum_{k \in nV \cap Z^m} e^{-ikx},$$

соответствующего множеству V .

В дальнейшем V – замкнутый ограниченный полиэдр в R^m , звездный относительно начала координат O , $O \in \text{int } V$, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через O . Множество полиэдров с указанными свойствами обозначим через W . Достаточные условия регулярности линейных методов суммирования в $C(T^m)$ по полиэдрам множества W изучены в [1], причем показано, что все условия в определении W являются необходимыми.

В данной статье исследуется поведение различных вариантов сильных полиэдральных средних рядов Фурье непрерывных на m -мерном торе функций. Приведены неулучшаемые неравенства типа неравенства Сидона для ядер Дирихле D_{nV} . Дается применение полученных результатов к вопросам интегрирования и сходимости m -кратных тригонометрических рядов.

2. Сильная суммируемость

Пусть W_b – подмножество множества W , определенное следующим образом. Набор действительных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ “плохо” приближаем (рациональными числами), если неравенство

$$(2.1) \quad \|\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_m k_m\| < a^{-m-1}, \quad a = \max_{1 \leq i \leq m} |k_i|,$$

имеет не более конечного числа решений в целых числах $k_1, \dots, k_m$ (здесь $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого).

Полиэдр V принадлежит множеству W_b , если коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей

$$\sum \alpha_i x_i - 1 = 0,$$

его определяющих, образуют наборы "плохо" приближаемых чисел. Заметим, что множество наборов α , для которых неравенство (2.1) имеет бесконечно много решений в целых числах, есть множество нулевой меры Лебега в R^m ([2], с. 36), т.е. почти все наборы α "плохо" приближаемы.

Полиэдры из множества W_b обладают следующим свойством.

Лемма 2.1. ([6]) Для любого полиэдра $V \in W_b$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что множества

$$(n + dn^{-m-1})V \setminus nV, \quad n \in N,$$

не содержат точек решетки Z^m .

W_a – подмножество полиэдров из W_b , для которых α – наборы алгебраических чисел.

В однократном случае отрезка классическим является результат Харди - Литтлвуда [3] о p -сильном суммировании ряда Фурье непрерывной периодической с периодом 2π функции: при любом $p > 0$ равномерно по $x \in T$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |f(x) - S_j f(x)|^p \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

При $m = 2, 3, \dots$ для прямоугольных частичных сумм Фурье (V – параллелепипед, симметричный относительно O , с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках решетки Z^m) аналогичный результат получил Л.Д. Гоголадзе ([4]-кубы, [5]).

При $m = 1, 2, \dots$ для частичных сумм $S_{nV} f$, $V \in W_b$, справедлив следующий результат.

Теорема 2.1. ([6]) Пусть полиэдр $V \in W_b$, $f \in L_\infty(T^m)$, $p > 0$. Тогда

$$(2.2) \quad (n+1)^{-1} \sum_{j=0}^n |S_{jV}(f, 0)|^p \leq c^p (p+1)^{mp} \|f\|_\infty^p,$$

где величина $c > 0$ зависит лишь от размерности m и полиэдра V .

При доказательстве теоремы 2.1 существенно используется следующий результат А. Н. Подкорытова [1]. Пусть V – полиэдр, звездный относительно начала

координат, являющегося его внутренней точкой. Определим масштабную функцию множества V

$$\rho(y) = \rho_V(y) = \inf \{ \rho > 0 \mid y \in \rho V \}.$$

Пусть функция $\lambda \in C([0, +\infty))$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) = 0$ при $t \geq 1$. Построим линейные средние

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f, x) = \sum_{k \in nV} \lambda\left(\frac{\rho(k)}{n}\right) c_k(f) e^{-ikx}.$$

Обозначим $d\lambda(r) = \int_0^1 e^{-irt} d\lambda(t)$.

Теорема А. ([1]) Пусть V — полидр, звездный относительно начала координат, которое является его внутренней точкой, и функция λ непрерывна на $[0, +\infty)$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) = 0 \forall t \geq 1$. Тогда:

1. Если продолжение хотя бы одной грани полидра V проходит через начало координат, то $\sup_n |\sigma_n^{(\lambda)}| = \infty$, и, следовательно, найдется функция $f \in C(T^m)$, такая что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n^{(\lambda)}(f, 0)| = \infty$.

2. Если продолжения всех граней полидра V не проходят через начало координат, то из сходимости интеграла

$$F_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |d\lambda(r)| \frac{\ln^{m-1}(2+|r|)}{1+|r|} dr$$

вытекает ограниченность $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|$ в совокупности, т.е. $\sup_n \|\sigma_n^{(\lambda)}\| \leq c(m, V) F_m(\lambda)$, и следовательно, $\sigma_n^{(\lambda)}(f) \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ для любой $f \in C(T^m)$.

Пусть Q — множество функций φ , определенных на полуоси $[0, \infty)$, неубывающих и непрерывных в нуле, $\varphi(0) = 0$. Для $f \in C(T^m)$ и $V \in W_b$ полагаем

$$h_n(f, \varphi, V, x) = (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^n \varphi(|f(x) - S_{lV} f(x)|).$$

Легко показать (см., например, [7]), что если $\varphi, \psi \in Q$ и

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} < \infty,$$

то из равенства

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f, \varphi, V, x) = 0,$$

выполняемого в некоторой точке $x_0 \in T^m$ или равномерно на множестве $E \subset T^m$, вытекает справедливость аналогичного равенства для функции ψ , соответственно в точке x_0 или равномерно на E .

При $m = 1$, $V = [-1, 1]$, $\varphi(t) = e^{at} - 1$, $a > 0$, равенство (2.3) доказано Карлеманом [8] равномерно на T . Тотик [9] показал, что для того, чтобы (2.3) выполнялось для любой $f \in C(T)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $A > 0$, такая, что

$$\varphi(t) \leq e^{At}, \quad t \in (0, \infty).$$

Теорема 2.2. ([6], [10]) Пусть полиэдр $V \in W_b$

(1) Если $\varphi \in Q$ такова, что

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) u^{-1/m} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^m)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, x) = 0.$$

(2) Если же

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) u^{-1/m} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^m)$, для которой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_n(F, \exp(\varphi) - 1, V, 0) = \infty.$$

Для параллелепипедов, симметричных относительно O , с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках с целыми координатами, теорема 2.2 доказана Л. Д. Гоголадзе [5]. Для $V \in W_a$ теорема 2.2 получена в [11].

Заметим, что утверждение (2) теоремы 2.2 справедливо для любого полиэдра V , $O \in \text{int } V$, и следует из точной по порядку оценки констант Лебега

$$\begin{aligned} c_1 \ln^m n &\leq \|S_{nV}\| = \sup_{|f| \leq 1} \|S_{nV}(f)\|_{C(T^m)} = \\ (2.4) \quad &= \sup_{|f| \leq 1} |S_{nV}(f, 0)| \leq c_2 \ln^m n, \end{aligned}$$

где $c_i = c_i(V, m) > 0$, $i = 1, 2$ ([12], оценка сверху, [13] — снизу).

Пусть $E_{nV}(f) = \inf_T \|f - T\|_{C(T^m)}$ - наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром в nV ($T(x) = \sum_{k \in nV} c_k e^{ikx}$).

Теорема 2.3. Для любых $f \in C(T^m)$, $V \in W_b$, $p > 0$ и $n > n_0 > 0$ справедливо неравенство

$$(2.5) \quad \sum_{l=n_0}^n |f(x) - S_{lV}(f, x)|^p \leq c^p (p+1)^{mp} \sum_{l=[n_0/2]}^n E_{lV}^p(f),$$

где $c = c(m, V) > 0$.

При $m = 1, V = [-1, 1]$ это результат Алексича и Кралика [14]. Для $V \in W_a$ неравенство (2.5) доказано в [11]. Заметим также, что в основе доказательства теорем 2.2, 2.3 лежит оценка (2.2) теоремы 2.1.

Из теоремы 2.2 следует, что для любых $a > 0$ и $f \in C(T^m)$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^n \exp(a |f(x) - S_{lV}f(x)|^{1/m}) - 1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

равномерно на T^m .

Лемма 2.2. ([6], [10]) Пусть полидр $V \in W_b$. Существуют постоянные $A > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^n \exp(A |S_{lV}f(0)|^{1/m}) \leq c, \quad n \in N.$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые определения. Непрерывная выпуклая функция Φ , заданная на R , называется N -функцией, если она четна и удовлетворяет условиям

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

Каждая N -функция допускает представление [16]

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

где $p(t)$ - положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция и такая, что

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty.$$

Пусть $q(s)$ – правая обратная к $p(t)$ функция,

$$\Psi(u) = \int_0^{|u|} q(s) ds.$$

Функции Φ и Ψ называются дополнительными друг к другу функциями.

L_Φ – пространство Орлича (см., например [15]) функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, определенное N -функцией Φ , с нормой

$$\|u\|_\Phi = \sup \left| \int_0^1 uv dx \right|,$$

где супремум берется по всем функциям v , удовлетворяющим условию $\int_0^1 \Psi(v) dx \leq 1$.

Для функции $f \in L_\infty(T^m)$ и полиэдра $V \in W_b$ определим следующие величины

$$(2.6) \quad I_n f(x) = \sum_{j=1}^n S_{jV}(f, x) \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1}]},$$

где χ_B – характеристическая функция множества B .

Теорема 2.4. Пусть полиэдр $V \in W_b$, $\alpha > 0$. Тогда для любой N -функции Φ , удовлетворяющей неравенству $\Phi(u) \leq ce^{\alpha|u|^{1/m}}$ при достаточно больших значениях аргумента и $c > 0$,

$$\sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(x)\|_\Phi = \sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(0)\|_\Phi \leq c(\alpha) < \infty.$$

Данная теорема следует из леммы 2.2, оценки

$$\|g\|_\Phi \leq \int_0^1 \Phi(g) dt + 1$$

и эквивалентности, при различных $\alpha > 0$, норм в пространствах L_Φ , где $\Phi(u) = e^{\alpha|u|^{1/m}}$ при $u > u_0$.

3. Сильная суммируемость с пропусками

Пусть $\{n_j\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Следуя [16], будем говорить, что $\{n_j\} \in p-SF(V)$, $0 < p < \infty$, если для любой $f \in L_\infty(T^m)$ частичные суммы $S_{n_j V}(f)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |S_{n_j V}(f, 0)|^p \leq c \|f\|_\infty^p, \quad N = 1, 2, \dots$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от f и N .

Из теоремы 2.1 следует (см. (2.2)), что если полиэдр $V \in W_b$, то последовательность $\{j\} \in p-SF(V)$.

Пусть $m = 1$. Если V – отрезок $[-1, 1]$, для того чтобы $\{n_j\} \in p-SF(V)$ необходимо, а если $\{n_j\}$ – выпукла $\{n_{j+1} - n_j \uparrow\}$, то и достаточно, чтобы

$$\log n_j \leq c j^{\min(1/2, 1/p)}, \quad c > 0.$$

При $p = 1$ необходимость этого условия доказал Салем [17], достаточность – независимо Карлесон [18] и Н. А. Загородний и Р. М. Тригуб [19], а также Лонг [16]. При $1 < p < \infty$ это результат Лонга [16].

Теорема 3.1. ([20, W_a], [6]). Пусть полиэдр $V \in W_b$, $0 < p < \infty$, $\{n_j\}$ – выпуклая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$(3.1) \quad \log n_j \leq c j^{\min(\frac{1}{pm}, \frac{1}{p-m})}, \quad c > 0.$$

Тогда $\{n_j\} \in p-SF(V)$.

Если V – единичный куб в R^m , теорема 3.1 при $p = 1$ приведена в [21].

Заметим, что условие (3.1) при $p \geq 1$ одновременно является и необходимым, при $p > 2$ следует из (2.4), причем, как и при $m = 1$, $\{n_j\}$ не обязательно выпуклая последовательность.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для любой $f \in C(T^m)$

$$(3.2) \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |f(x) - S_{n_j V}(f, x)|^p \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Более того, имеет место следующее неравенство, позволяющее оценивать скорость стремления к нулю величины (3.2).

Теорема 3.2. В условиях теоремы 3.1 для любой $f \in C(T^m)$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^N |f(x) - S_{n_j V}(f, x)|^p \leq c \sum_{j=1}^N E_{n_j V}^p(f), \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $c = c(p, m, V) > 0$.

4. НЕРАВЕНСТВА ТИПА СИДОНА. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

В одномерном случае ($m = 1$, $V = [-1, 1]$) Сидон [22] доказал следующее неравенство

$$\frac{1}{n+1} \int_T \left| \sum_{j=0}^n a_j D_j(x) \right| dx \leq c \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|,$$

где $D_j(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ — ядро Дирихле порядка n , а $c > 0$ — абсолютная константа.

В работе Фридли и Шиппа [23] установлена двойственность между сильными средними однократных рядов Фурье и неравенствами типа неравенств Сидона для одномерных ядер Дирихле.

Приведем неумлучшаемое (в шкале пространств Орлича) неравенство типа неравенства Сидона для ядер Дирихле D_{nV} , порожденных полиэдрами класса W_b .

Будем использовать введенные в [24] ступенчатые функции $I_n f(x)$ (см. (2.6))

и

$$\Gamma(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}.$$

Теорема 4.1. Пусть полиэдр $V \in W_b$, a_n — последовательность действительных чисел. Если N -функция Ψ удовлетворяет условию

$$(4.1) \quad \Psi(u) \geq cu \ln^m u,$$

при некоторых $c > 0$ и $u \geq u_0 > 0$, то

$$(4.2) \quad \frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c_1 \|\Gamma_n(a_1, \dots, a_n)\|_{\Psi}.$$

где постоянная $c_1 > 0$ зависит лишь от V и Ψ .

Замечание 4.1. Теорема 4.1 окончательна в следующем смысле. Неравенство (4.2) перестает быть верным для любого набора $\{a_n\}$, если вместо Ψ , удовлетворяющей условию (4.1), взять N -функцию Ψ_1 , такую, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(u)}{u \ln^m u} = 0.$$

Этот факт следует из двойственности между нормами сильных средних ряда Фурье и неравенствами типа неравенства Сидона и точности теоремы 2.2.

Следствие 4.1. Пусть полиэдр $V \in W_b$, $\{a_j\}$ – последовательность действительных чисел. Тогда

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c \sum_{j=1}^n |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{n^{-1} \sum_{j=1}^n |a_j|} \right)^m \right].$$

Данное неравенство при $m = 1$, $V = [-1, 1]$ доказано другим методом Фридли [25].

Следствие 4.2. Пусть полиэдр $V \in W_b$, $p > 1$. Для любого набора $\{a_n\}$ действительных чисел имеет место неравенство

$$(4.3) \quad \frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p}.$$

При $m = 1$ это неравенство, по существу содержащееся в работе Г. А. Фомина [26], доказано также Бояничем и Станоевичем [27].

В предельном случае $p = \infty$ имеем аналог неравенства Сидона

$$(4.4) \quad \frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|.$$

Теорема 4.2. ([10]) Пусть $1 < p \leq 2$, ν_n – возрастающая последовательность действительных чисел. Для того чтобы для любого набора $\{a_n\}$ имело место неравенство

$$(4.5) \quad \frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^n a_j D_{\nu_j V}(x) \right| dx \leq c \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p},$$

необходимо, а если ν_n выпукла, то и достаточно, чтобы

$$\ln \nu_n \leq c_1 n^{\frac{p-1}{pm}}.$$

5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Пусть λ_n – последовательность действительных чисел, $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. На m -мерном торе T^m рассмотрим тригонометрический ряд

$$(5.1) \quad \lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx},$$

где полиэдр $V \in W_b$. Коэффициенты данного ряда постоянны на множествах $lV \setminus (l-1)V$ ($l = 1, 2, \dots$).

Пусть

$$S_{nV}(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} -$$

частичная сумма ряда (5.1). Ряд (5.1) сходится в пространстве $L(T^m)$, если существует функция $f \in L(T^m)$ такая, что

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^m} |S_{nV}(x) - f(x)| dx = 0.$$

Приведем некоторые известные результаты об интегрируемости и сходимости однократных тригонометрических рядов ($m = 1$, $V = [-1, 1]$). В этом случае ряд (5.1) есть косинус-ряд

$$(5.3) \quad \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \cos lx.$$

В дальнейшем полагаем $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Теорема Фомина. [26] Если существует действительное число $p > 1$ такое, что коэффициенты ряда (5.3) удовлетворяют условию

$$(5.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

то ряд (5.3) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(T)$, есть ее ряд Фурье, причем соотношение (5.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \ln n = 0.$$

Предельным случаем ($p = \infty$) теоремы Фомина есть доказанная ранее теорема Сидона-Теляковского [28]. Условие (5.4) в ней заменено более жестким условием:

существуют такие числа A_k , что

$$(5.5) \quad A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \quad |\Delta\lambda_k| \leq A_k \quad \text{для всех } k.$$

Фридли [25] обобщил теорему Фомина, заменив условие (5.4) более слабым, но менее "прозрачным" условием

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\ln^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right) \right] < \infty.$$

Следующая теорема о сходимости в метрике L ряда (5.1) по полиэдрам класса W_b в частном случае отрезка $[-1, 1]$ содержит все приведенные выше результаты.

Теорема 5.1. Пусть полиэдр $V \in W_b$, а N -функция Φ такова, что при некоторых $c, u_0 > 0$

$$\Phi(u) \geq cu \ln^m u \quad \text{при } u \geq u_0.$$

Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию

$$(5.6) \quad \sum_{l=0}^{\infty} 2^l \|\Gamma(\Delta\lambda_{2^{l+1}}, \dots, \Delta\lambda_{2^{l+1}})\|_{\Phi} < \infty,$$

то ряд (5.1) есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, а равенство (5.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$(5.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \log^m n = 0.$$

Следствие 5.1. ([6], [10]) Пусть полиэдр $V \in W_b$. Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right)^m \right] < \infty,$$

то справедливы утверждения теоремы 5.1.

Следствие 5.1 есть m -кратный аналог теоремы Фридли [25]. Следует из теоремы 5.1, если в качестве N -функции Φ взять предельно возможную, эквивалентную $u \ln^m u$ при достаточно больших u , и воспользоваться неравенством (4.2) при $a_j = \Delta\lambda_j$.

Выбирая N -функцию $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $p > 1$, получим аналог теоремы Фомина.

Следствие 5.2. Если при некотором $p > 1$ коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию

$$(5.8) \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

то имеют место утверждения теоремы 5.1.

В [26] показано, что условия (5.4) и (5.8) при $p > 1$ эквивалентны. В предельном случае $p = \infty$ получаем m -кратный аналог теоремы Сидона-Теляковского [28].

Следствие 5.3. Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию

$$(5.9) \quad \sum_{l=1}^{\infty} 2^l \max_{2^{l+1} \leq j \leq 2^{l+1}} |\Delta \lambda_j| < \infty,$$

то имеют место утверждения теоремы 5.1.

Условия (5.9) и (5.5) эквивалентны.

Пусть $W_r \subset W_b$ - подмножество полиэдров с вершинами в точках, координаты которых есть рациональные числа. Следующее утверждение для полиэдров $V \in W_r$ доказано в [29] (см. также [30]).

Теорема 5.2. Пусть полиэдр $V \in W_r$, а коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Тогда ряд (5.1) сходится почти всюду на T^m к функции $f \in L(T^m)$, является ее рядом Фурье, при этом сходимость в метрике L имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.7).

Сходимость ряда (5.1) почти всюду к функции f , найденной в теореме 5.1, следует из равенства

$$S_{nV}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta \lambda_l D_{lV}(x) + \Delta \lambda_n D_{nV}(x)$$

и того факта ([31], лемма 2), что для полиэдра $V \in W_r$ последовательность $D_{nV}(x)$ ограничена почти всюду на T^m .

Пусть ν_n - возрастающая последовательность натуральных чисел, λ_n - сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел, $V \in W_b$. Рассмотрим ряд ($x \in T^m$)

$$(5.10) \quad \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k \in \nu_n V \setminus \nu_{n-1} V} e^{ikx}.$$

Если ν_n растет достаточно быстро, ряд (5.10) есть ряд с редко меняющимися коэффициентами. При $m = 1$, $V = [-1, 1]$ условия интегрируемости и сходимости в метрике L ряда

$$(5.11) \quad \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{\nu_{n-1} \leq k \leq \nu_n} \cos kx$$

изучались в [32], [33] для последовательностей ν_n , лакунарных по Адамару:

$$(5.12) \quad \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geq q > 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

В [32] доказано, что ряд (5.11), при выполнении условия (5.12) является рядом Фурье в том и только том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=n}^{\infty} (\Delta \lambda_l)^2 \right\}^{1/2} \log \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} < \infty.$$

Если ряд (5.11) есть ряд Фурье, то для его сходимости в метрике L необходимо и достаточно условие [33]

$$\lambda_n \log \nu_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Для некоторого класса последовательностей ν_n , растущих медленнее, при $m = 1, 2, \dots$ справедлив следующий результат.

Теорема 5.3. Пусть полиэдр $V \in W_b$, $p > 1$ и выпуклая последовательность ν_n ($\nu_{n+1} - \nu_n \uparrow$) удовлетворяет условию

$$\log \nu_n \leq cn^{\min\{\frac{p-1}{pm}, \frac{1}{pm}\}}.$$

Если коэффициенты ряда (5.10) стремятся к нулю и удовлетворяют условию (5.8), то данный ряд есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$ и сходится к f в метрике L тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n \log^m \nu_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Abstract. The paper is a survey of the known results related with Fourier series strong polyhedral means of functions continuous on the m -dimensional torus, Sidon type inequalities for Dirichlet kernels in polyhedrons, and integrability and convergence of multiple trigonometric series.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Подкорытов, "Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам", Вестн. Ленингр. ун-та, (1), 51 - 58 (1980).
- [2] В. Г. Спиряджук, Метрическая теория диофантовых приближений, М., Наука (1977).
- [3] G. N. Hardy, J. E. Littlewood, "Sur la serie de Fourier d'une fonction a carré sommable CR, 156, 1307-1309 (1913).

- [4] Л. Д. Гоголадзе, "О сильных средних типа Марцинкевича", Сообщ. АН ГрузССР, 102, 293 – 295 (1981).
- [5] Л. Д. Гоголадзе, "О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функций", Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Тбилиси (1984).
- [6] О. И. Кузнецова, "Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенства типа Сидона", Укр. матем. ж., 50 (12), 1630 – 1635 (1998).
- [7] Л. Д. Гоголадзе, "О сильной суммируемости почти всюду", Матем. сборник, 135 (2), 158 – 168 (1998).
- [8] T. Carleman, "A theorem concerning Fourier series", Proc. London Math. Soc., 21, 483 – 492 (1923).
- [9] V. Totik, "On the generalization of Fejer's summation theorem", Series, Functions, Operators, Proceeding of the International Conference in Budapest, 1980, 1195 – 1199 (1983).
- [10] О. И. Кузнецова, "Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенство Сидона", ДАН, 364 (5), 593 – 595 (1999).
- [11] О. И. Кузнецова, "О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов", Укр. матем. ж., 44 (2), 276 – 279 (1992).
- [12] А. Н. Подкорытов, "Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полнотрам", Вести Ленингр. ун-та, (7), 110 – 111 (1982).
- [13] В. А. Юдин, "Оценка снизу констант Лебега", Матем. заметки, 25 (1), 119 – 122 (1979).
- [14] G. Alexich, D. Krallik, "Über die approximation mit starken de la Valle-Poussinschen mitteln Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16, 43 – 49 (1965).
- [15] М. А. Красносельский, Я. В. Рутцкий, "Выпуклые функции и пространства Орлича", М., Физматгиз (1958).
- [16] J.-L. Long, "Sommes partielles de Fourier des fonctions bornées", C.R. Acad. Sc. Paris, 288, 1009 – 1011 (1979).
- [17] R. Salem, "On strong summability of Fourier series", Amer. J. Math., 77, 392 – 402 (1955).
- [18] L. Carleson, "Appendix to the paper of J.-P. Kahane and J. Katznelson", Stud. Math. Mem. Paul Turan, Budapest, 411 – 413 (1983).
- [19] Н. А. Загородний, Р. М. Тригуб, "Об одном вопросе Салема", Теория функций и отображений, (К.: Наукова думка), 97 – 101 (1979).
- [20] О. И. Кузнецова, "О частичных суммах по полнотрам рядов Фурье ограниченных функций", Anal. math., 19, 267 – 272 (1993).
- [21] О. И. Кузнецова, "Интегрируемость и сильная суммируемость кратных тригонометрических рядов", Труды МИАН, 180, 143 – 144 (1987).
- [22] S. Sidon, "Hinreichende bedingungen für den Fourier-Charakter einer trigonometrischen reihe", J. London Math. Soc., 14 (2), 158 – 166 (1939).
- [23] S. Fridli, F. Schipp, "Strong summability and Sidon type inequalities", Acta Sci. Math. (Szeged), 80, 277 – 289 (1995).
- [24] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon (with assistance P. Pal.), Walsh Series, Adam Hilder, Bristol-New York (1990).
- [25] S. Fridli, "An inverse Sidon type inequality", Studia Math., 105 (3), 283-308 (1993).
- [26] Г. А. Фокин, "Об одном классе тригонометрических рядов", Матем. заметки, 23, 213 – 222 (1978).
- [27] R. Bojanic, C. V. Stanojevic, "A class of L^1 convergence", Trans. Amer. Math. Soc., 269, 677 – 683 (1982).
- [28] С. А. Теляковский, "О достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов", Матем. заметки, 14 (3), 317 – 328 (1973).
- [29] О. И. Кузнецова, "Об интегрировании одного класса N-мерных тригонометрических рядов", Укр. матем. ж., 52 (6), 837 – 840 (2000).
- [30] О. И. Кузнецова, "Интегрируемость одного класса N-мерных тригонометрических рядов", Праці УМ НАНУ, 31, 297 – 305 (2000).
- [31] О. И. Кузнецова, "Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов", Матем. заметки, 63 (3), 402 – 405 (1998).

- [32] Л. А. Балашов, С. А. Теляковский, "Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов", Труды МИАН, 143, 32 – 41 (1977).
- [33] С. А. Теляковский, "О сходимости в метрике L тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами", Труды МИАН, 200, 322 – 326 (1991).

Поступила 18 ноября 2011

GABOR FRAMES ON A HALF-LINE

F. A. SHAH

*Department of Mathematics, University of Kashmir, Anantnag,
Jammu and Kashmir, India*

E-mail: *fashah79@gmail.com*

Abstract. The objective of this paper is to construct Gabor frame on a positive half-line. A necessary condition and two sufficient conditions for Gabor frame on a positive half-line are given in the time domain.

MSC2000 numbers: 42C15; 42C40; 42A38; 41A17.

Keywords: Frame; Gabor frame; Riesz basis; Walsh function.

1. INTRODUCTION

Frames were first introduced by Duffin and Schaeffer [7] in the context of non-harmonic Fourier series. Outside signal processing, frames did not seem to generate much interest until the seminal work by Daubechies, Grossmann, and Meyer [6]. They showed that Duffin and Schaeffer's definition is an abstraction of a concept given by Gabor [11] in 1946 for doing signal analysis. The frames introduced by Gabor now are called *Gabor frames* and have been widely used in communication theory, quantum mechanics and many other fields. For more about Gabor frames and their applications to signal and image processing, we refer to the monographs [9, 10, 13].

Gabor systems $\{M_{mb}T_{na}g(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ are generated by modulations and translations of a single function $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ and hence, can be viewed as the set of time-frequency shifts of $g(x)$ along the lattice $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}^2$. Gabor systems that form frames for $L^2(\mathbb{R})$ have a wide variety of applications. An important problem in practice is therefore to determine conditions for Gabor systems to be frames.

Many results in this area, including necessary conditions and sufficient conditions, have been established during the last two decades. For example, in 1990, Daubechies [5] proved the first result on the necessary and sufficient conditions for the Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ to be a frame for $L^2(\mathbb{R})$, Chui and Shi improved the result of Daubechies in [4], Casazza and Christenson [1, 2] established a stronger version of Daubechies sufficient condition for wavelet frames. Recently, Shi and Chen

[17] have established a set of necessary conditions for Gabor frames and showed that these conditions are also sufficient for tight frames. Li *et al.* [14] gave two sufficient conditions for Gabor frames in $L^2(\mathbb{R})$ in terms of Fourier transform and showed the conditions are better than those of Daubechies [5].

Although there are many results for Gabor frame on the real-line $\mathbb{R}$, the counterparts on positive half-line $\mathbb{R}^+$ are not yet reported. So this paper is concerned with Gabor frame on positive half-line $\mathbb{R}^+$. Concerning the construction of wavelets on a half-line, Farkov [8] has given the general construction of all compactly supported orthogonal p -wavelets in $L^2(\mathbb{R}^+)$ and proved necessary and sufficient conditions for scaling filters with p^n many terms ($p, n \geq 2$) to generate a p -MRA analysis in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Recently, Shah and Debnath [16], have constructed dyadic wavelet frames on the positive half-line $\mathbb{R}^+$ using the Walsh-Fourier transform and have established a necessary condition and a sufficient condition for the system

$$\left\{ \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x \ominus k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

to be a frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$. The objective of this paper is to prove the existence of the Gabor system $\{M_{mb}T_{na}g(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ that forms a frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$. We also establish a necessary condition and two sufficient conditions for the system $\{M_{mb}T_{na}g(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ to be a frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$.

The paper is structured as follows. In Section 1, we introduce some notations and preliminaries related to the operations on positive half-line $\mathbb{R}^+$, and some lemmas to be used throughout the paper. In Section 2, we prove the existence of the system $\{M_{mb}T_{na}g(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ that forms a frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$. In Section 3 we establish one necessary condition and two sufficient conditions for Gabor frame on the positive half-line $\mathbb{R}^+$.

As usual, let $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ and $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Denote by $[x]$ the integer part of x . Let a be a fixed natural number greater than 1. For $x \in \mathbb{R}^+$ and any positive integer j , we set

$$(1.1) \quad x_j = [a^j x](\text{mod } a), \quad x_{-j} = [a^{1-j} x](\text{mod } a).$$

We consider on $\mathbb{R}^+$ the addition defined as follows:

$$x \oplus y = \sum_{j < 0} \zeta_j a^{-j-1} + \sum_{j > 0} \zeta_j a^{-j}$$

with $\zeta_j = x_j + y_j \pmod{a}$ ($j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), where $\zeta_j \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$ and x_j, y_j are calculated by (1.1). Note that $z = x \ominus y$ if $z \oplus y = x$, where $\ominus$ denotes subtraction modulo a in $\mathbb{R}^+$.

For $x \in [0, 1)$, let $r_0(x)$ be given by

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0, 1/a) \\ \varepsilon_a^\ell, & \text{if } x \in [\ell a^{-1}, (\ell+1)a^{-1}), \quad \ell = 1, 2, \dots, a-1, \end{cases}$$

where $\varepsilon_a = \exp(2\pi i/a)$. The extension of the function r_0 to $\mathbb{R}^+$ is given by the equality $r_0(x+1) = r_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Then, the generalized Walsh functions $\{w_m(x) : m \in \mathbb{Z}^+\}$ are defined by

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_m(x) = \prod_{j=0}^k (r_0(a^j x))^{\mu_j},$$

where $m = \sum_{j=0}^k \mu_j a^j$, $\mu_j \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$, $\mu_k \neq 0$.

For $x, y \in \mathbb{R}^+$, let

$$(1.2) \quad \chi(x, y) = \exp \left(\frac{2\pi i}{a} \sum_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + x_{-j} y_j) \right),$$

where x_j, y_j are given by (1.1). Note that $\chi(x, m/a^{n-1}) = \chi(x/a^{n-1}, m) = w_m(x/a^{n-1})$ for all $x \in [0, a^{n-1})$, $m \in \mathbb{Z}^+$. If $x, y, \xi \in \mathbb{R}^+$ and $x \oplus y$ is a -adic irrational, then

$$(1.3) \quad \chi(x \oplus y, \xi) = \chi(x, \xi) \chi(y, \xi).$$

It was shown by Golubov *et al.* [12] that both the systems $\{\chi(\alpha, \cdot)\}_{\alpha=0}^{\infty}$ and $\{\chi(\cdot, \alpha)\}_{\alpha=0}^{\infty}$ are orthonormal bases in $L^2[0, 1]$.

By a -adic interval $I \subset \mathbb{R}^+$ of range n , we mean interval of the form

$$I = I_n^k = [ka^{-n}, (k+1)a^{-n}), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

The a -adic topology is generated by the collection of a -adic intervals and each a -adic interval is both open and closed under the a -adic topology (see [15]). Therefore, for each $0 \leq j, k < a^n$, the Walsh function $w_j(x)$ is piecewise constant and hence continuous. Thus $w_j(x) = 1$ for $x \in I_n^0$.

Let $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^+)$ be the space of a -adic entire functions of order n , that is, the set of all functions which are constant on all a -adic intervals of range n . Thus, for every $f \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R}^+)$, we have

$$(1.4) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} f(a^{-n}k) \chi_{I_n^k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Clearly each Walsh function of order a^{n-1} belong to $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^+)$. The set $\mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ of a -adic entire functions on $\mathbb{R}^+$ is the union of all the spaces $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^+)$. It is clear that $\mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ is dense in $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ and each function in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ is of compact support. Thus, we will consider the following set of functions:

$$(1.5) \quad \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+) = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+) : \text{supp } f \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}.$$

Definition 1.1. A function f defined on $\mathbb{R}^+$ is said to be with period a if $f(x \oplus ka) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^+$ and $k \in \mathbb{Z}^+$.

Definition 1.2. Let $\mathbb{H}$ be a separable Hilbert space. A sequence $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ in $\mathbb{H}$ is called a *frame* for $\mathbb{H}$ if there exist constants A and B with $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$(1.6) \quad A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \text{ for all } f \in \mathbb{H}.$$

The largest constant A and the smallest constant B satisfying (1.6) are called the *upper* and the *lower frame bound* respectively. The sequence $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ is called a *tight frame* for $\mathbb{H}$ if the upper frame bound A and the lower frame bound B coincide.

The sequence $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ is called a *Bessel sequence* in $\mathbb{H}$ if only the right-hand side inequality in (1.6) holds and is called *Riesz basis* for $\mathbb{H}$ if there exists a linear, bounded bijective operator $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ such that $\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{Te_k\}_{k=1}^\infty$, where $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ is an orthonormal basis for $\mathbb{H}$. For the fundamentals of frame theory and its applications we refer to [3, 13].

Let $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ be a frame in $\mathbb{H}$. The operator $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ is called a *frame operator* associated with the frame $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ if $Sf = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle f_k$. It is well known (see [3]) that S is linearly bounded, invertible, self-adjoint and positive, and the system $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ is also a frame in $\mathbb{H}$ with bounds B^{-1} , A^{-1} , which is called the *canonical dual* of the frame $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Moreover, this provides the reconstruction formula

$$(1.7) \quad f = SS^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k,$$

where both series converge unconditionally for all $f \in \mathbb{H}$. Thus, a frame $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ allows every $f \in \mathbb{H}$ to be written as a series expansion of the frame elements, which is similar to the property of basis; the main difference is that the frame coefficients $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ in (1.7) can, generally, be replaced by other coefficients. Further, it should be noted that $\{S^{-1/2}f_k\}_{k=1}^\infty$ is a tight frame with bound 1 and hence

$$(1.8) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1/2}f_k \rangle S^{-1/2}f_k.$$

In order to prove theorems to be presented in next section, we need the following lemmas whose proofs can be found in [3].

Lemma 1.3. Let $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ be a frame for a Hilbert space $\mathbb{H}$. Then $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ is a Riesz basis for $\mathbb{H}$ if and only if $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ is complete in $\mathbb{H}$, and there exist constants $A, B > 0$ such that for every finite scalar sequence $\{c_k\}$,

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2.$$

Lemma 1.4. Let $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ be a Bessel sequence with bound B for a Hilbert space $\mathbb{H}$. Then

- (i) $\|f_k\|^2 \leq B$, $k = 1, 2, \dots$
- (ii) $\langle f_j, f_k \rangle = 0$, $j \neq k$, whenever $\|f_k\|^2 = B$, for some k .

Lemma 1.5. Suppose that $\mathbb{H}$ is a Hilbert space. Let $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ be a bounded operator, and assume that $\langle Tx, x \rangle = 0$, for all $x \in \mathbb{H}$. If $\mathbb{H}$ is a complex Hilbert space, then $T = 0$; if $\mathbb{H}$ is a real Hilbert space and T is self-adjoint, then $T = 0$.

2. EXISTENCE OF A GABOR FRAME IN $L^2(\mathbb{R}^+)$

Let p and q be two given positive real numbers. For any fixed function $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, the family of functions of the form

$$(2.1) \quad \{M_{mq}T_{np}g(x) = w_{mq}(x)g(x \ominus np), \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+\}$$

is called a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$ if there exist constants A and B , $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$(2.2) \quad A\|f\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{R}^+),$$

where $M_{mq}f(x) = w_{mq}f(x)$ and $T_{np}f(x) = f(x \ominus np)$ are the modulation and translation operators defined on $L^2(\mathbb{R}^+)$, respectively.

We first show that the operator S associated with the Gabor frame $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is commutative, i.e.,

$$(2.3) \quad SM_{mq}T_{np} = M_{mq}T_{np}S.$$

Indeed, since $M_qT_p f(x) = w_q(x)f(x \ominus p)$ and $T_pM_q f(x) = \overline{w_q(x)}M_qT_p f(x)$, we have

$$\begin{aligned} SM_{mq}T_{np}f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \langle M_{mq}T_{np}f, M_{kq}T_{\ell p}g \rangle M_{kq}T_{\ell p}g \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \langle f, w_{(k-m)pqn}M_{(k-m)kq}T_{(\ell-n)p}g \rangle M_{kq}T_{\ell p}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \overline{w_{k p q n}} \langle f, M_{k q} T_{\ell p} g \rangle M_{(k+m) q} T_{(\ell+n) p} g \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \langle f, M_{k q} T_{\ell p} g \rangle M_{m q} T_{n p} M_{k q} T_{\ell p} g = M_{m q} T_{n p} S f.
\end{aligned}$$

This commutative property of S implies that S^{-1} commutes with the operator $M_{m q} T_{n p}$. Consequently, $S^{-1/2}$ also commutes with $M_{m q} T_{n p}$ and as a consequence, we have the following theorem.

Theorem 2.1. Let $\{M_{m q} T_{n p} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}^+}$ be a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$. Then, Gabor structure of the canonical dual is given by $\{M_{m q} T_{n p} S^{-1} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}^+}$, where $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ and $p, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Moreover, the canonical tight frame associated with $\{M_{m q} T_{n p} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}^+}$ is $\{M_{m q} T_{n p} S^{-1/2} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}^+}$.

First we prove two lemmas, which will be used in the proofs of the main results.

Lemma 2.2. Let $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $p, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z}^+$ be given. Then the series

$$(2.4) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} f(x \ominus n p) \overline{g(x \ominus n p \ominus q^{-1} k)}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

converges absolutely for almost all $x \in \mathbb{R}^+$. Furthermore, for any $m \in \mathbb{Z}^+$, we have

$$(2.5) \quad \langle f, M_{m q} T_{n p} g \rangle = \int_0^p G_n(x) \overline{w_{m q}(x)} dx,$$

where

$$(2.6) \quad G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} f(x \ominus q^{-1} k) \overline{g(x \ominus n p \ominus q^{-1} k)}.$$

Proof. Since $f, T_{q^{-1} k} g(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, we have $f, \overline{T_{q^{-1} k} g(x)} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Thus

$$\int_0^p \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |f(x \ominus n p) \overline{g(x \ominus n p \ominus q^{-1} k)}| dx = \int_{\mathbb{R}^+} |f(x) \overline{g(x \ominus q^{-1} k)}| dx < \infty,$$

and hence

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |f(x \ominus n p) \overline{g(x \ominus n p \ominus q^{-1} k)}| < \infty, \quad \text{for almost all } x \in [0, p).$$

Since the series in (2.4) converges a.e. on $[0, p)$, therefore, it converges absolutely a.e. on $x \in \mathbb{R}^+$ and by the Definition 1.1, it defines a function with period p . Further, we have

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{m q} T_{n p} g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^+} f(x) \overline{g(x \ominus n p)} \cdot \overline{w_{m q}(x)} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \int_0^{q^{-1}} f(x \ominus q^{-1} k) \overline{g(x \ominus n p \ominus q^{-1} k)} \cdot \overline{w_{m q}(x)} dx = \int_0^{q^{-1}} G_n(x) \overline{w_{m q}(x)} dx.
\end{aligned}$$

This completes the proof.

To prove the existence of the system (2.1) that forms a Gabor frame in $L^2(\mathbb{R}^+)$, we set

$$(2.7) \quad D(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |g(x \ominus np)|^2, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$(2.8) \quad E_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} g(x \ominus np) \overline{g(x \ominus np \ominus q^{-1}k)}, \quad x \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Note that $D(x)$ and $E_k(x)$ are bounded functions with period p and $D(x) = E_0(x)$.

Lemma 2.3. Let f be in $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+)$ and g be in $L^2(\mathbb{R}^+)$ with $p, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Then

$$(2.9) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle|^2 = \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 D(x) dx + R_g(f),$$

where

$$(2.10) \quad R_g(f) = \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} f(x \ominus q^{-1}k) E_k(x) dx.$$

Proof. Since $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+)$, the function $f(x \ominus q^{-1}k)$ can be non-zero only for finitely many values of k . The number of values of k , for which $f(x \ominus q^{-1}k) \neq 0$ is uniformly bounded. Consequently, each $G_n(x)$ defined by (2.6) is bounded, and hence $G_n \in L^1[0, q^{-1}) \cap L^2[0, q^{-1})$. By Lemma 1.2, for all $m, n \in \mathbb{Z}^+$, we have

$$(2.11) \quad \langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle = \int_0^{q^{-1}} G_n(x) \overline{w_{mq}(x)} dx.$$

Applying Parseval's theorem and using the fact that $\{q^{1/2} w_{mq}(x)\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ forms an orthonormal basis for $L^2[0, q^{-1})$, we obtain

$$(2.12) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \left| \int_0^{q^{-1}} G_n(x) \overline{w_{mq}(x)} dx \right|^2 = \frac{1}{|q|} \int_0^{q^{-1}} |G_n(x)|^2 dx.$$

By virtue of (2.11) and (2.12), we get

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \left| \int_0^{q^{-1}} G_n(x) \overline{w_{mq}(x)} dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_0^{q^{-1}} |G_n(x)|^2 dx = \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_0^{q^{-1}} G_n(x) \overline{G_n(x)} dx \\ &= \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_0^{q^{-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \overline{f(x \ominus q^{-1}k)} g(x \ominus np \ominus q^{-1}k) G_n(x) dx \\ &= \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} g(x \ominus np) G_n(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} g(x \ominus np) \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} f(x \ominus q^{-1}k) \overline{g(x \ominus np \ominus q^{-1}k)} dx \\
&= \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |g(x \ominus np)|^2 dx \\
&+ \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} f(x \ominus q^{-1}k) \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} g(x \ominus np) \overline{g(x \ominus np \ominus q^{-1}k)} \\
&= \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 D(x) dx + \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} f(x \ominus q^{-1}k) E_k(x) dx.
\end{aligned}$$

This completes the proof.

Theorem 2.4 (*Existence*). Let $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ and $p, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ be given. Then the following holds:

- (i). If $|pq| > 1$, then $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is not a frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$.
- (ii). If $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a frame, then $|pq| = 1$ if and only if $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Riesz basis.

Proof. Suppose that $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$ and let

$\{M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ be the canonical tight frame associated with

$\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$. Then, by Lemma 2.3, we have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 dx &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |S^{-1/2}g(x \ominus np)|^2 dx
\end{aligned}$$

Thus, this gives that $\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |S^{-1/2}g(x \ominus np)|^2 = |q|$, a.e. on $x \in \mathbb{R}^+$ and consequently, we have

$$\|S^{-1/2}g\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} |S^{-1/2}g|^2 dx = \int_0^p \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |S^{-1/2}g(x \ominus np)|^2 dx = |pq|.$$

Now, to prove (i), it is sufficient to prove that $|pq| \leq 1$ for given frame $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$.

Since $\{M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a tight frame with bound 1, therefore, it follows by Lemma 1.4 that $\|S^{-1/2}g\|^2 = |pq| \leq 1$, and the result follows.

To prove (ii), we first assume that $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Riesz basis. Then by Lemma 2.3, $\{M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is also a Riesz basis with bounds $A = B = 1$. This implies that $\|S^{-1/2}g\|^2 = |pq| = 1$.

Now, assume that $|pq| = 1$, which implies that $\|S^{-1/2}g\|^2 = \|M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g\|^2 = 1$, for all $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Using Lemma 1.4(ii), we conclude that $\{M_{mq}T_{np}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R}^+)$ and hence, by Definition 1.2, it follows that $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Riesz basis. This completes the proof.

3. NECESSARY CONDITION AND SUFFICIENT CONDITIONS

In this section, we first establish a necessary condition for the system (2.1), i.e. $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ to be a frame in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Theorem 3.1. Suppose that $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$ with bounds A and B , then

$$(3.1) \quad |q|A \leq D(x) \leq |q|B, \quad \text{a.e. on } x \in \mathbb{R}^+,$$

where $D(x)$ is defined by (2.7).

Proof. We use the contradiction method. Assume that the second inequality in (3.1) is not true. Then, there exists a measurable set $\Omega \subseteq \mathbb{R}^+$ with $\text{meas}(\Omega) > 0$ such that $D(x) > |q|B$ on Ω . Suppose that Ω is contained in $[0, q^{-1})$ with diameter of $|q|^{-1}$ and let $\Omega_0 = \{x \in \Omega : D(x) \geq 1 + |q|B\}$. Further, for each $k \in \mathbb{N}$, we define the sets Ω_k as

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{1+k} + |q|B \leq D(x) < \frac{1}{k} + |q|B \right\}.$$

Clearly, $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forms a sequence of mutually disjoint measurable sets such that $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$. Therefore, there exist atleast one set say Ω_ℓ with property that $\text{meas}(\Omega_\ell) > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$. Let $f = \chi_{\Omega_\ell}$ be the characteristic function on Ω_ℓ . Then, clearly each $f \cdot T_{np}g$ has a compact support in Ω_ℓ . Since Ω_ℓ is contained in an interval of length $|q|^{-1}$ and $\{q^{1/2}w_{mq}(x)\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ constitutes an orthonormal basis for $L^2[0, q^{-1})$, we have

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} |\langle f \overline{T_{np}g}, M_{mq} \rangle|^2 = \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |g(x \ominus np)|^2 dx.$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2 &= \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |g(x \ominus np)|^2 dx \\ &= \frac{1}{|q|} \int_{\Omega_\ell} |f(x)|^2 D(x) dx \geq \left(B + \frac{1}{|q|(\ell+1)} \right) \|f\|^2. \end{aligned}$$

Consequently, B can not be an upper frame bound for $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$. A similar arguments can be used to show that if the first inequality in (4.1) is violated, then A cannot be a lower frame bound for $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$. The proof is completed.

Now, we are going to derive two sufficient conditions of a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$. The first sufficient condition is given in the next theorem.

Theorem 3.2. Let f be in $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+)$ and g be in $L^2(\mathbb{R}^+)$ with $p, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Suppose that there are constants $A, B > 0$ such that

$$(3.2) \quad A \leq D(x) \leq B, \quad \text{a.e. on } x \in \mathbb{R}^+$$

and

$$(3.3) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty < A.$$

Then $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Proof. By Lemma 2.3, we have

$$\begin{aligned} |R_g(f)| &= \left| \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} f(x \ominus q^{-1}k) E_k(x) dx \right| \leq \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)| \cdot |f(x \ominus q^{-1}k)| |E_k(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x \ominus q^{-1}k)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{|q|} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right] dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x \ominus q^{-1}k)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right] dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{|q|} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right] dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x \oplus q^{-1}k)| \right] dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{|q|} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right] dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right] dx \right\}^{1/2} \\ (3.4) \quad &\leq \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |E_k(x)| dx \leq \frac{1}{|q|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty \|f\|^2. \end{aligned}$$

It follows from (2.9) and (3.4) that

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2 \leq \frac{1}{|q|} \|f\|^2 \left\{ \|D\|_\infty + \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty \right\}$$

and

$$\frac{1}{|q|} \|f\|^2 \left\{ \|D\|_\infty - \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty \right\} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2.$$

Taking into account (3.2) and (3.3), we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{|q|} \|f\|^2 \left\{ A - \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty \right\} &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq}T_{np}g \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{|q|} \|f\|^2 \left\{ B + \sum_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Hence $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Now we establish the second sufficient condition for Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Theorem 3.3. Let $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ be such that

$$(3.5) \quad A_g = \frac{1}{|q|} \inf_{x \in [0, p)} \left\{ D(x) - \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right\} > 0,$$

and

$$(3.6) \quad B_g = \frac{1}{|q|} \sup_{x \in [0, p)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} |E_k(x)| < +\infty.$$

Then $\{M_{mq}T_{np}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}^+}$ is a Gabor frame for $L^2(\mathbb{R}^+)$ with bounds A_g and B_g .

Proof. Using (2.8), we have

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |T_{-q^{-1}k} E_k(x)| &= \sum_{k \in \mathbb{N}} |T_{-q^{-1}k} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} g(x \ominus np) \overline{g(x \ominus np \ominus q^{-1}k)}| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} |T_{-q^{-1}k} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} T_{np} g(x) \overline{T_{np+q^{-1}k} g(x)}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} T_{np-q^{-1}k} g(x) \overline{T_{np} g(x)} \right| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} T_{np+q^{-1}k} g(x) \overline{T_{np} g(x)} \right| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{T_{np+q^{-1}k} g(x)} T_{np} g(x) \right| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)|. \end{aligned}$$

We now estimate the term $R_g(f)$ given by (2.10), using Cauchy-Schwartz's inequality

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} f(x \ominus q^{-1}k) E_k(x) dx \right| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \overline{f(x)} T_{q^{-1}k} f(x) E_k(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)| |T_{q^{-1}k} f(x)| |E_k(x)| dx \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |T_{q^{-1}k} f(x)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |T_{q^{-1}k} f(x)|^2 |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |T_{q^{-1}k} f(x)|^2 \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| dx \right\}^{1/2} \\ (3.7) \quad &= \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 dx \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)|. \end{aligned}$$

Combining (3.7) and (2.9), we get

$$(3.8) \quad \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left\{ D(x) - \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right\} dx \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle|^2$$

and

$$(3.9) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle|^2 \leq \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 \left\{ D(x) + \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k(x)| \right\} dx.$$

Taking infimum in (3.8) and supremum in (3.9), respectively, we obtain

$$A_g \|f\|_2^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |\langle f, M_{mq} T_{np} g \rangle|^2 \leq B_g \|f\|_2^2,$$

which holds for all $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^+)$, where A_g and B_g are given by (3.5) and (3.6), respectively. This completes the proof of the theorem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. G. Casazza and O. Christensen, "Weyl-Heisenberg frames for subspaces of $L^2(\mathbb{R})$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**, 145 – 154 (2001).
- [2] O. Christensen, "Frames, Riesz bases, and discrete Gabor/wavelet expansions", *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, **38**, no. 3, 273-291 (2001).
- [3] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston (2003).
- [4] C. K. Chui and X. L. Shi, "Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets", *SIAM J. Math. Anal.*, **24**, 263 – 277 (1993).
- [5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conferences in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia (1992).
- [6] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, "Painless non-orthogonal expansions", *J. Math. Phys.*, **27**, no. 5, 1271 – 1283 (1986).
- [7] R. J. Duffin and A. C. Shaeffer, "A class of nonharmonic Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**, 341 – 366 (1952).
- [8] Yu. A. Farkov, "On wavelets related to Walsh series", *J. Approx. Theory*, **161**, no. 1, 259 – 279 (2009).
- [9] H. G. Feichtinger and T. Strohmer, *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston (1998).
- [10] H. G. Feichtinger and T. Strohmer, *Advances in Gabor Analysis*, Birkhäuser, Boston (2003).
- [11] D. Gabor, "Theory of communications", *J. Inst. Elect. Engn.*, **93**, 429 – 457 (1946).
- [12] B. I. Golubov, A. V. Efimov and V. A. Skvortsov, *Walsh Series and Transforms: Theory and Applications*, Kluwer, Dordrecht (1991).
- [13] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston (2001).
- [14] D. F. Li, G. Wu and X. Zhang, "Two sufficient conditions in frequency domain for Gabor frames", *Appl. Math. Lett.*, **24**, 506 – 511 (2011).
- [15] F. Schipp, W. R. Wade and P. Simon, *Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol and New York (1990).
- [16] F. A. Shah and L. Debnath, "Dyadic wavelet frames on a half-line using the Walsh-Fourier transform", *Integ. Transf. Spec. Funct.*, **22**, no. 7, 477 – 486 (2011).
- [17] X. L. Shi and F. Chen, "Necessary conditions for Gabor frames", *Science in China: Series A*, **50**, no. 2, 276 – 284 (2007).

Поступила 24 ноября 2011

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 5, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

К. Аветисян, Е. Тоноян, Непрерывные вложения в гармонических пространствах со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$	3
U. GOGINAVA AND A. SAHAKIAN, On the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation	21
Д. А. КАРАГУЛЯН, О множествах точек неограниченной расходимости рядов по ортонормированным базисам	39
О. И. КУЗНЕЦОВА, Сильная суммируемость и сходимость кратных тригонометрических рядов по полиэдрам	49
F. A. SHAN, Gabor frames on a half-line	65 – 76

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 5, 2012

CONTENTS

K. AVETISYAN AND Y. TONUYAN, Continuous embeddings in harmonic mixed norm spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$	3
U. GOGINAVA AND A. SAHAKIAN, On the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation	21
D. A. KARAGULYAN, On unbounded divergence sets of series in orthonormal bases	39
O. I. KUZNETSOVA, Strong summability and convergence of multiple trigonometric series over polyhedrons	49
F. A. SHAN, Gabor frames on a half-line	65 – 76