

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2012

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

**HILBERT TRANSFORM OF A WAVELET SYSTEM:
BOUNDEDNESS OF ORTHOGONAL PROJECTIONS IN THE
UNIFORM NORM**

G. G. GEVORKYAN, A. KAMONT

Yerevan State University
Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Poland
E-mails: *ggg@ysu.am*; *A.Kamont@impan.gda.pl*

Abstract. Let ψ be a wavelet associated with a scaling function φ , and let $\tilde{\psi}$ be the Hilbert transform of ψ . Under some natural conditions on the smoothness and decay of φ , we show that the orthogonal projections onto the spaces generated by $\tilde{\psi}$ are bounded in the uniform norm.

MSC2010 number: 42C40

Keywords: Wavelet, Hilbert transform, orthogonal projection, L^∞ -boundedness.

1. INTRODUCTION

A wavelet on R is a function $\psi \in L^2(R)$ such that the system $\Psi = \{\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k) : j, k \in Z\}$ is an orthonormal basis in $L^2(R)$. It is well known that under some mild conditions on decay of ψ , the system Ψ is an unconditional basis in $L^p(R)$, $1 < p < \infty$, see e.g. P. Wojtaszczyk [10]. More precisely, P. Wojtaszczyk proves unconditionality of Ψ in $L^p(R)$, $1 < p < \infty$ under the condition that $|\psi(x)| \leq M(|x|)$, with M bounded, nonincreasing on $[0, \infty)$, and $\int_0^\infty M(x) \ln(1+x) dx < \infty$. Moreover, the decay of the form $\ln(2+|x|)\psi(x) \in L^1(R)$ implies also a convolution type bound on the Dirichlet kernel of the orthogonal projection onto $V_0 = \text{span}_{L^2(R)}\{\psi_{j,k} : j \leq 0, k \in Z\}$ and uniform boundedness of the corresponding Lebesgue functions, see S. Kelly, M. Kon, L. Raphael [7], [8]. This means that the orthogonal projection operator can be extended to $L^1(R)$ and $C(R)$, the latter meaning the space of continuous and bounded functions on R .

¹Part of this work was done while G. G. Gevorkyan was visiting Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences in Sopot in October 2009.

In the current note, we are interested in Hilbert transform of a wavelet. By Hilbert transform we mean the operator defined as

$$Hf(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_R \frac{f(x-s)}{s} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|s|>\epsilon} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Hilbert transform is an isometry on $L^2(R)$ and an isomorphism of $L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Moreover, $(H\psi)_{j,k} = H(\psi_{j,k})$. Therefore, a Hilbert transform of a wavelet is again a wavelet, and several good properties – like basis and unconditional basis property on $L^p(R)$, $1 < p < \infty$, are preserved.

Here, we are interested in the question of the boundedness in the uniform norm on R of the orthogonal projection associated to the Hilbert transform of a wavelet. That is, in the uniform boundedness of the Lebesgue functions associated to the Hilbert transform of a wavelet, provided that the initial wavelet satisfies certain regularity and decay conditions.

The question is motivated by S. V. Bochkarev's papers [1], [2] (see also [3]). In 1974, S. V. Bochkarev [1] constructed a basis in disk algebra. His construction was based on the use of the Franklin system. Later, in paper [2], he showed that the trigonometric conjugate to the periodic Franklin system is a basis in the space of periodic continuous functions. A part of the proof was the boundedness of the Lebesgue functions for the conjugate of the Franklin system. For that, Bochkarev proved pointwise estimates of the Dirichlet kernel for the conjugate system.

S. V. Bochkarev was using the classical Franklin system, i.e. a complete orthonormal system consisting of piecewise linear functions with dyadic knots. In a series of papers, we have studied properties of general Franklin systems, i.e. orthonormal complete systems consisting of piecewise linear functions with arbitrary knots. In particular, we have studied the following question: under what conditions on the sequence of knots, the trigonometric conjugate of the corresponding general Franklin system is a basis in the space of continuous functions, see [6]. This contains a question on the uniform boundedness of the Lebesgue functions of the conjugate system. We have been able to get it without getting precise pointwise estimates of the Dirichlet kernel of the conjugate system. Now, we apply the same method to get the uniform boundedness of Lebesgue functions for the Dirichlet kernel of orthogonal projection onto the space generated by the Hilbert transform of the wavelet.

When the results of this paper have been already obtained, we have found the paper K. N. Chaudhury, M. Unser [4]. In that paper the authors study the relation between

the decay, regularity and moment conditions for a wavelet ψ and $H\psi$. Combination of their results with [8] implies the convolution bound on the Dirichlet kernel of orthogonal projection of the transformed system and uniform boundedness of the corresponding Lebesgue functions. However, our conditions on decay and regularity of the starting wavelet are weaker than conditions needed in [4].

2. THE FORMULATION OF THE MAIN RESULT

We use the standard wavelet terminology. By a wavelet we mean a function $\psi \in L^2(R)$ such that the system $\Psi = \{\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{j/2}\psi(2^j\cdot - k) : j, k \in Z\}$ is an orthonormal basis in $L^2(R)$. We assume that the wavelet ψ is associated with a scaling function φ . We denote

$$V_0 = \text{span}_{L^2(R)}\{\psi_{j,k} : j \leq 0, k \in Z\} = \text{span}_{L^2(R)}\{\varphi(\cdot - k) : k \in Z\}.$$

We assume that φ and ψ satisfy the following decay and regularity conditions: there exist a constant $C > 0$ and positive exponents $\alpha, \eta, \delta > 0$ such that

$$(2.1) \quad |\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\delta}}, \quad |\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\delta}},$$

and for $|h| \leq 1$

$$(2.2) \quad |\varphi(x) - \varphi(x + h)| \leq \frac{C|h|^\alpha}{(1 + |x|)^{1+\eta}}, \quad |\psi(x) - \psi(x + h)| \leq \frac{C|h|^\alpha}{(1 + |x|)^{1+\eta}}.$$

Moreover

$$(2.3) \quad \int_R \varphi(x) dx = 1 \quad \text{and} \quad \int_R \psi(x) dx = 0.$$

The Dirichlet kernel of the orthogonal projection onto V_0 is given by

$$P_0(x, y) = \sum_{k \in Z} \varphi(x - k) \varphi(y - k) = \sum_{j \leq 0, k \in Z} \psi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(y).$$

We consider also the orthogonal projection onto the space

$$V_{0,m} = \text{span}_{L^2(R)}\left(\{\psi_{j,k} : j \leq 0, k \in Z\} \cup \{\psi_{1,k} : k \leq m\}\right).$$

The Dirichlet kernel of this projection is given by

$$P_{0,m}(x, y) = P_0(x, y) + \sum_{k \leq m} \psi_{1,k}(x) \psi_{1,k}(y).$$

It follows by (2.1) - (2.3) that for $K = P_0$ or $K = P_{0,m}$ there is

$$(2.4) \quad |K(x, y)| \leq \frac{C}{(1 + |x - y|)^{1+\delta}},$$

$$(2.5) \quad |K(x+h, y) - K(x-h, y)| \leq \frac{C|h|^\alpha}{(1+|x-y|)^{1+\eta}}, \quad |h| \leq 1.$$

$$(2.6) \quad |\Delta_{h,s}| \leq \frac{C|h|^\alpha |s|^\alpha}{(1+|x-y|)^{1+\eta}}, \quad |h|, |s| \leq 1$$

where $\Delta_{h,s}K(x, y) = K(x+h, y+s) - K(x+h, y-s) - K(x-h, y+s) + K(x-h, y-s)$,

$$(2.7) \quad K(x, y) = K(y, x), \quad \int_R K(x, y) dy = 1.$$

We denote $\tilde{\varphi} = H\varphi$ and $\tilde{\psi} = H\psi$. Then $\tilde{\psi}$ is associated with the scaling function $\tilde{\varphi}$, and the Dirichlet kernel of the orthogonal projection onto $\tilde{V}_0$ is given by

$$\tilde{P}_0(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}(x-k) \tilde{\varphi}(y-k) = \sum_{j \leq 0, k \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_{j,k}(x) \tilde{\psi}_{j,k}(y).$$

The Dirichlet kernel of the projection onto $\tilde{V}_{0,m}$ is given by

$$\tilde{P}_{0,m}(x, y) = \tilde{P}_0(x, y) + \sum_{k \leq m} \tilde{\psi}_{1,k}(x) \tilde{\psi}_{1,k}(y).$$

However, the decay of $\tilde{\varphi}$ is worse than the decay of φ – it can be checked that $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x\tilde{\varphi}(x)| > 0$. Therefore, the standard argument showing that (2.1) implies (2.4) cannot be applied. Nevertheless, we are able to show the following statement.

Theorem 2.1. *Let φ, ψ satisfy (2.1) – (2.3). Then there is a constant $M > 0$ such that*

$$\int_R |\tilde{P}_0(x, y)| dx \leq M, \quad \int_R |\tilde{P}_{0,m}(x, y)| dy \leq M.$$

Remark. K. N. Chaudhury, M. Unser [4] considered a wavelet ψ on R satisfying the following conditions: ψ is differentiable, it has n vanishing moments (i.e. $\int_R x^k \psi(x) dx = 0$ for $k = 0, \dots, n-1$) and satisfies $\|\psi\|_{1,\infty}, \|x^{n+1}\psi(\cdot)\|_{1,\infty}, \|x^n \psi\|_1 < \infty$, where $\|g\|_{1,\infty} = \|g\|_1 + \|g'\|_\infty$. Under these assumptions, there is $H\psi(x) \leq \frac{C}{1+|x|^{n+1}}$ and $H\psi$ has n vanishing moments. Then, an application of [8] implies

$$|\tilde{P}_0(x, y)|, |\tilde{P}_{0,m}(x, y)| \leq S(|x-y|),$$

where $S \in L^1(R)$. Note that the proof in [8] uses the completeness of the system $\Psi = \{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ in $L^2(R)$. In the proof of Theorem 2.1, we assume less on decay and smoothness of ψ than is needed in [4]. Moreover, the proof does not use the completeness of the wavelet system under consideration in $L^2(R)$. Instead of this, it is based on regularity and decay properties of the kernels $P_0, P_{0,m}$.

The main idea of the proof. Let K be any kernel satisfying (2.4) – (2.6). Then for each x, y there is

$$(2.8) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty |\Delta_{u,v} K(x, y)| \frac{1}{u} \frac{1}{v} du dv < \infty.$$

It follows that for $P_0, P_{0,m}$ there is

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta_{u,v} P_0(x, y) \frac{1}{u} \frac{1}{v} du dv, \\ \tilde{P}_{0,m}(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta_{u,v} P_{0,m}(x, y) \frac{1}{u} \frac{1}{v} du dv. \end{aligned}$$

Therefore, Theorem 2.1 is an immediate consequence of the following assertion.

Theorem 2.2. *Let K be a kernel satisfying (2.4) – (2.7). Let*

$$\tilde{K}(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta_{u,v} K(x, y) \frac{1}{u} \frac{1}{v} du dv.$$

Then there is a constant $M = M(C, \delta, \alpha, \eta)$ such that for each $x \in R$

$$\int_R |\tilde{K}(x, y)| dy \leq M.$$

Proof. The proof follows the basic idea of Bochkarev, with the modifications as in [6]. By (2.8), the function $\tilde{K}$ is well defined.

Let

$$\Lambda_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}, & \text{if } |u| \leq 1, \\ 0, & \text{if } |u| > 1, \end{cases} \quad \Lambda_2(u) = \begin{cases} 0, & \text{if } |u| \leq 1, \\ \frac{1}{u}, & \text{if } |u| > 1. \end{cases}$$

Denote

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= \tilde{K}(x, y) - \int_0^\infty (\Lambda_2(x - y + v) - \Lambda_2(x - y - v)) \frac{1}{v} dv, \\ V_2(x, y) &= \int_0^\infty (\Lambda_2(x - y + v) - \Lambda_2(x - y - v)) \frac{1}{v} dv. \end{aligned}$$

First we treat the term $V_2(x, y)$. Observe that $V_2(x, y) = A(x - y)$, where

$$A(s) = \int_0^\infty (\Lambda_2(s + v) - \Lambda_2(s - v)) \frac{1}{v} dv.$$

We show that

$$\int_R |A(s)| ds < \infty.$$

The function A is even, so it is enough to consider $s > 0$. First, let $0 < s \leq 1$. Then

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_{1-s}^{1+s} \frac{dv}{(s+v)v} + \int_{s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+v} - \frac{1}{s-v} \right) \frac{dv}{v} \\ &= \int_{1-s}^{1+s} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{s+v} \right) dv + 2 \int_{s+1}^{\infty} \frac{dv}{v^2 - s^2} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \ln \frac{s+1}{(1-s)(2s+1)} + 2 \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2 + 2us}. \end{aligned}$$

This means that for $0 < s \leq 1$

$$0 \leq A(s) \leq 2 + \frac{1}{s} \cdot \ln \frac{1}{1-s}.$$

As $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \ln \left(\frac{1}{1-s} \right) = 1$ and $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} dx < \infty$, it follows that $\int_0^1 A(s) ds < \infty$.

Next, let $s > 1$. Then we write $A(s) = A_1(s) + A_2(s) + A_3(s)$, where

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \int_0^{s-1} \left(\frac{1}{s+v} - \frac{1}{s-v} \right) \frac{dv}{v}, \\ A_2(s) &= \int_{s-1}^{s+1} \frac{dv}{v(s+v)}, \\ A_3(s) &= \int_{s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+v} - \frac{1}{s-v} \right) \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

By a change of variables ($v = sx$) we find

$$A_1(s) = -2 \int_0^{s-1} \frac{dv}{s^2 - v^2} = \frac{-2}{s} \int_0^{1-\frac{1}{s}} \frac{dx}{1-x^2}.$$

Similarly, by two consecutive changes of variables (first $v = sy$, then $y = \frac{1}{x}$) we get

$$A_3(s) = -2 \int_{s+1}^{\infty} \frac{dv}{s^2 - v^2} = \frac{-2}{s} \int_{1+\frac{1}{s}}^{\infty} \frac{dy}{1-y^2} = \frac{2}{s} \int_0^{1-\frac{1}{s+1}} \frac{dx}{1-x^2}.$$

Thus

$$A_1(s) + A_3(s) = \frac{2}{s} \int_{1-\frac{1}{s}}^{1-\frac{1}{s+1}} \frac{dx}{(1-x)(1+x)} \leq 2 \frac{s+1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) = \frac{2}{s^2},$$

and consequently

$$\int_1^{\infty} (A_1(s) + A_3(s)) ds < \infty.$$

It remains to estimate $A_2(s)$. We have

$$0 \leq A_2(s) \leq \frac{1}{s} \int_{s-1}^{s+1} \frac{dv}{v} = \frac{1}{s} (\ln(s+1) - \ln s).$$

Since $\lim_{s \rightarrow \infty} s(\ln(s+1) - \ln s) = 1$, it follows that $\int_1^{\infty} A_2(s) ds < \infty$. Consequently, $\int_1^{\infty} A(s) ds < \infty$, and finally $\int_0^{\infty} A(s) ds < \infty$.

Now, we turn to the part corresponding to $V_1(x, y)$. Observe that $V_1(x, y) = \tilde{\Phi}_x(y)$, where

$$\Phi_x(y) = \int_0^\infty \frac{K(x-u, y) - K(x+u, y)}{u} du - \Lambda_2(x-y).$$

We show that $\Phi_x \in ReH^1(R)$, with $\|\Phi_x\|_{ReH^1(R)} \leq C$, with C independent of $x \in R$. Since $\|\Phi_x\|_{ReH^1(R)} \sim \|\Phi_x\|_1 + \|\tilde{\Phi}_x\|_1$, this implies $\int_R |V_1(x, y)| dy = \int_R |\tilde{\Phi}_x(y)| dy \leq C$. To get $\|\Phi_x\|_{ReH^1(R)} \leq C$, we show that

$$(2.9) \quad |\Phi_x(y)| \leq C \max \left(\frac{1}{(1+|x-y|)^{1+\eta}}, \frac{\max(1, \ln|x-y|)}{(1+|x-y|)^{1+\delta}} \right)$$

and

$$(2.10) \quad \int_R \Phi_x(y) dy = 0.$$

To complete the proof, we recall the notion of H^1 -molecule.¹ Let $s > 1$; a function $m : R \rightarrow R$ is called an s -molecule centered at $x_0 \in R$ and width d if $(\int_R |m(x)|^2 (1 + \frac{|x-x_0|}{d})^s dx)^{1/2} \leq d^{-1/2}$ and $\int_R m(x) dx = 0$. It is known that there is a constant $C(s)$, depending only on s , such that for every m – an s -molecule with center x_0 and width d , there is $\|m\|_{ReH^1(R)} \leq C(s)$; for details see e.g. Chapter 5.5 of [9].

Note that (2.9)-(2.10) imply that for each $1 < s < 1 + 2 \min(\eta, \delta)$, there is a constant $a(s)$, independent of $x \in R$, such that for each x , the function $a(s)\Phi_x$ is an s -molecule centered at x and with width $d = 1$. This implies the required bound for $\|\Phi_x\|_{ReH^1(R)}$. It remains to prove (2.9) and (2.10). Now we decompose $\Phi_x(y) = B_1(y) + B_2(y)$, where

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \int_0^\infty (K(x-u, y) - K(x+u, y)) \Lambda_1(u) du, \\ B_2(y) &= \int_R K(x-u, y) \Lambda_2(u) du - \Lambda_2(x-y). \end{aligned}$$

First we treat the term B_1 . Observe that, by the assumption (2.5) on K we get

$$\begin{aligned} |B_1(y)| &\leq \int_0^1 |K(x-u, y) - K(x+u, y)| \frac{du}{u} \\ &\leq \int_0^1 \frac{C_2 u^\alpha}{(1+|x-y|)^{1+\eta}} \frac{du}{u} = \frac{C_2}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1+|x-y|)^{1+\eta}}. \end{aligned}$$

In particular, this implies that we can combine Fubini's theorem and assumption (2.7) on K to get

$$\int_R B_1(y) dy = \int_0^1 \left(\int_R (K(x-u, y) - K(x+u, y)) dy \right) \frac{du}{u} = 0.$$

¹The notion of a molecule was introduced by R.R Coifman and G. Weiss [5], and it was widely used since then. Here we follow Chapter 5.5 of Y. Meyer [9].

To treat the term $B_2(y)$, note that a change of variables ($x-y+t = u$) and assumption (2.7) give

$$B_2(y) = \int_R K(y-t, y)(\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt.$$

Since $|\Lambda_2(\cdot)| \leq 1$, it follows by assumption (2.4) that there is a constant $C = C(C_1, \delta)$ such that $|B_2(y)| \leq 2 \int_R |K(y-t, y)| dt \leq C$; we use this estimate for $|x-y| \leq 2$.

For $|x-y| > 2$, we write

$$B_2(y) = B_{2,1}(y) + B_{2,2}(y) + B_{2,3}(y) + B_{2,4}(y),$$

with

$$\begin{aligned} B_{2,1}(y) &= \int_{t: |x-y+t| \leq 1} K(y-t, y)(\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt, \\ B_{2,2}(y) &= \int_{t: |x-y+t| > 1, |t| > 2|x-y|} K(y-t, y)(\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt, \\ B_{2,3}(y) &= \int_{t: |x-y+t| > 1, |t| \leq \frac{|x-y|}{2}} K(y-t, y)(\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt, \\ B_{2,4}(y) &= \int_{t: |x-y+t| > 1, \frac{|x-y|}{2} < |t| \leq 2|x-y|} K(y-t, y)(\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt. \end{aligned}$$

If $|x-y+t| \leq 1$ then $\Lambda_2(x-y+t) = 0$.

Moreover, since $|x-y| \geq 2$ and $||t| - |x-y|| \leq |x-y-t| \leq 1$, it follows by (2.4) that $|K(y-t, y)| \leq \frac{C_1}{(1+|t|)^{1+\delta}} \leq \frac{C'_1}{|x-y|^{1+\delta}}$. Consequently, we get

$$|B_{2,1}(y)| \leq \int_{|t|-|x-y| \leq 1} \frac{|K(y-t, y)|}{|x-y|} dt \leq \frac{C''_1}{|x-y|^{1+\delta}}.$$

If $|x-y+t| > 1$, then $\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y) = \frac{1}{x-y} \cdot \frac{-t}{x-y+t}$. For $|t| > 2|x-y|$ we have $|t+x-y| > \frac{|t|}{2}$, so applying (2.4) we get

$$\begin{aligned} |B_{2,2}(y)| &\leq \frac{1}{|x-y|} \int_{|t| > 2|x-y|} |K(y-t, y)| \frac{|t|}{|x-y+t|} dt \\ &\leq \frac{2}{|x-y|} \int_{|t| > 2|x-y|} \frac{C_1}{(1+|t|)^{1+\delta}} dt \leq \frac{C'_1}{|x-y|^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

If $|t| \leq \frac{|x-y|}{2}$ then $|x-y+t| \geq \frac{|x-y|}{2}$ which gives

$$\begin{aligned} |B_{2,3}(y)| &\leq \frac{2}{|x-y|^2} \int_{|t| \leq \frac{|x-y|}{2}} |K(y-t, y)| \cdot |t| dt \\ &\leq \frac{2}{|x-y|^2} \int_{|t| \leq \frac{|x-y|}{2}} \frac{C_1|t|}{(1+|t|)^{1+\delta}} dt \leq \frac{C'_1}{|x-y|^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned}
 |B_{2,4}(y)| &\leq \frac{1}{|x-y|} \int_{|x-y+t|>1, \frac{|x-y|}{2} \leq |t| \leq 2|x-y|} \frac{|K(y-t, y)| \cdot |t|}{|x-y+t|} dt \\
 &\leq \frac{1}{|x-y|} \int_{|x-y+t|>1, \frac{|x-y|}{2} \leq |t| \leq 2|x-y|} \frac{C_1 |t|}{(1+|t|)^{1+\delta} \cdot |x-y+t|} dt \\
 &\leq \frac{C_1}{|x-y|^{1+\delta}} \int_{1 \leq |x-y+t| \leq 3|x-y|} \frac{dt}{|x-y+t|} \leq \frac{C'_1 \ln |x-y|}{|x-y|^{1+\delta}}.
 \end{aligned}$$

Summarizing, we get

$$|B_2(y)| \leq C \frac{\max(1, \ln |x-y|)}{(1+|x-y|)^{1+\delta}}.$$

It remains to check $\int_R B_2(y) dy = 0$. The preceding calculations show in fact that

$$\int_R \int_R |K(y-t, y)| |\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)| dt dy < \infty.$$

Put

$$w(t) = \int_R K(y-t, y) (\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dy.$$

Note that $\int_R |w(t)| dt < \infty$ and

$$\int_R B_2(y) dy = \int_R \int_R K(y-t, y) (\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dt dy = \int_R w(t) dt.$$

We show that w is odd – this will imply $\int_R B_2(y) dy = 0$. Applying change of variables ($z = y - t$) and symmetry of the kernel K we get

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \int_R K(y-t, y) (\Lambda_2(x-y+t) - \Lambda_2(x-y)) dy \\
 &= \int_R K(z, z+t) (\Lambda_2(x-z) - \Lambda_2(x-z-t)) dz \\
 &= - \int_R K(z+t, z) (\Lambda_2(x-z-t) - \Lambda_2(x-z)) dz = -w(-t).
 \end{aligned}$$

Theorem is proved. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Bochkarev, “Existence of a basis in the space of functions analytic in the disc and some properties of the Franklin system” [in Russian], Mat. Sb. **95**, 3 – 18 (1974).
- [2] S. V. Bochkarev, “Conjugate Franklin system – basis in the space of continuous functions” [in Russian], Dokl. Akad. Nauk USSR **285**, 521 – 526 (1985).
- [3] S. V. Bochkarev, “Bases in function spaces and the Franklin system” [in Russian], Trudy Inst. Steklova CXС, 22 – 39 (1989).
- [4] K. N. Chaudhury, M. Unser, “On the Hilbert transform of wavelets”, IEEE Trans. Signal Process, **59** no. 4, 1890 – 1894 (2011) arXiv:1107.4619.
- [5] R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, no. 4, 569 – 645 (1977).
- [6] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “On the trigonometric conjugate to the general Franklin system”, Studia Math., **193**, no. 3, 203 – 239 (2009).

- [7] S. Kelly, M. Kon, L. Raphael, "Pointwise convergence of wavelet expansions", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **30**, no. 1, 87 – 94 (1994).
- [8] S. Kelly, M. Kon, L. Raphael, "Local convergence for wavelet expansions", J. Funct. Anal., **126**, no. 1, 102 – 138 (1994).
- [9] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs I (in French). Hermann, Paris (1990). English translation: Wavelets and operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37. Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [10] P. Wojtaszczyk, "Wavelets as unconditional bases in $L_p(\mathbf{R})$ ", J. Fourier Anal. Appl., **5**, no. 1, 73 – 85 (1999).

Поступила 28 декабря 2011

UNIVERSAL PADÉ APPROXIMANTS WITH RESPECT TO THE CHORDAL METRIC

V. NESTORIDIS

University of Athens, Greece
E-mail: *vnestor@math.uoa.gr*

Abstract. The use of the chordal distance does not change the notion of Universal Taylor series. However, it changes the notion of Universal Padé approximants. Using Padé approximants of meromorphic or holomorphic functions we can approximate all rational functions on compact sets of arbitrary connectivity.

MSC2010 number: 41A21; 30K05; 30B10; 30E10; 30K99; 41A10.

Keywords: Universality; Baire's theorem; Padé approximants; chordal metric; meromorphic functions; holomorphic functions; spherical approximation.

1. INTRODUCTION

Universality is a generic phenomenon of chaotic behavior of approximation ([11], [10], [3]). Roughly speaking a universal series is a series of functions so extremely divergent that subsequences of its partial sums approximate lots of functions. A basic example is that of universal Taylor series. In this case the approximation is done by polynomials, the partial sums of the universal power series. For every compact set K disjoint from the open unit disc with connected complement, and every polynomial h , a subsequence of the partial sums of the universal Taylor series converges uniformly on K to h with respect to the Euclidean metric in $\mathbb{C}$ ([15], see also [13], [5], [3]).

Uniform approximation with respect to the chordal metric χ on each compact subset of a domain goes back at least to Caratheodory. Approximation uniform with respect to the chordal metric χ on one compact set was considered more recently [4], [9], [14], [16] – [19], [1]. If we replace the uniform convergence towards h with respect to the Euclidean metric with that with respect to χ , then the class of universal Taylor series does not change. The reason is that when we have

$$\sup_{z \in K} \chi(S_{\lambda_n}(z), h(z)) \rightarrow 0$$

for the subsequence S_{λ_n} of partial sums, then we automatically have

$$\sup_{z \in K} |S_{\lambda_n}(z) - h(z)| \rightarrow 0,$$

because $h(K)$ is a compact subset of $\mathbb{C}$ and the Euclidean metric is uniformly equivalent to χ when we restrict our attention to a compact subset of $\mathbb{C}$. Thus, the use of the chordal distance does not change the notion of universal Taylor series ([19]). However, if the approximation is by rational functions and not polynomials, then the use of the chordal metric χ on $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ instead of the Euclidean one on $\mathbb{C}$ does change the notion of universality. This is the case of universal Padé approximants ([6] - [8]). Firstly instead of approximating polynomials we can approximate all rational functions. Secondly the same subsequence of Padé approximants can approximate inside the domain of definition a meromorphic function; thus we can consider universal meromorphic functions instead of holomorphic. Finally with the use of Padé approximants we can approximate on arbitrary compact sets K and not only on those with connected complement.

In the present article we present two theorems, one in the meromorphic case and one in the holomorphic case, showing that the use of the chordal metric χ is natural in the case of Padé approximants even in the holomorphic case. We show that in the open unit disc, as well as in a half-plane the class of holomorphic functions with a specific family of universal Padé approximants (approaching all rational functions) is different than the class of universal Taylor series.

Extensions to the case of smooth holomorphic functions of the class $A^\infty(\Omega)$ where every order's derivative is continuously extendable to $\overline{\Omega}$, as well as to the case of formal power series with zero radius of convergence are possible, but are not included in the present paper.

After this paper was written, Christos Papadimitropoulos brought to my attention reference [14]. In [14] there are no Padé approximants, but there is approximation on arbitrary compact sets of meromorphic or holomorphic functions by rational functions uniformly with respect to the chordal metric. It is shown that every meromorphic function on a domain G can be written as a series of rational functions whose partial sums have universality properties in G^c . Thus, the universal approximation is carried out by rational functions. The difference with our results is that in our case the rational functions are Padé approximants of one function.

2. PRELIMINARIES

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be open; then the space $H(\Omega)$ of holomorphic functions on Ω endowed with the topology of uniform convergence on compacta is a complete metrizable space, in fact a Fréchet space. The uniform convergence above is with respect to the Euclidean metric in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. If we consider the one-point compactification $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ of $\mathbb{C}$, then a well known metric is the chordal metric χ :

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{1 + |\alpha|^2} \sqrt{1 + |\beta|^2}} \quad \text{for } \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

and

$$\chi(\alpha, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}} \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{and } \chi(\infty, \infty) = 0.$$

If we consider any other metric on $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ giving the same topology, then it is uniformly equivalent to χ because $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is compact. Therefore we restrict our attention to the metric χ , but most of our results are valid more generally. Since

$$\chi(\alpha, \beta) \leq |\alpha - \beta|,$$

it follows that uniform convergence with respect to the Euclidean metric in $\mathbb{C}$ implies uniform convergence with respect to χ . On the other hand, on a compact subset of $\mathbb{C}$, the Euclidean metric and the metric χ are uniformly equivalent. Therefore, if the complex functions f_n are uniformly bounded on a set E and converge to f uniformly with respect to χ , it follows that

$$\sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Even, if

$$\sup_{z \in E} \chi(f_n(z), f(z)) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

and $f(E)$ is bounded in $\mathbb{C}$, then $\sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$.

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set. We consider the set

$$Z(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}\},$$

endowed with the topology of uniform convergence with respect to χ on each compact subset of Ω . Then $Z(\Omega)$ is a complete metric space. We denote by $\mathbf{M}(\Omega)$ the closure in $Z(\Omega)$ of the set of rational functions. Obviously $\mathbf{M}(\Omega)$ is a complete metric space because it is closed in $Z(\Omega)$. The set of rational functions is dense in $\mathbf{M}(\Omega)$. We have the following description of $\mathbf{M}(\Omega)$ (see also [4], [14]).

Proposition 2.1. *A function $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ belongs to $\mathbf{M}(\Omega)$, if and only if, it is continuous on Ω and the following holds: For every component V of Ω either $f|_V \equiv \infty$ or $f|_V$ is meromorphic in V .*

Proof. One direction is well known. We only prove that if $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is continuous and in each component of Ω it is either meromorphic or constant equal to ∞ , then f can be approximated by a rational function uniformly with respect to χ on each compact set $K \subset \Omega$. We may assume that each component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ contains one component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$ ([20]; Th.13.3). The set K is contained in a finite union of components

$$V_1, \dots, V_N \quad \text{of } \Omega .$$

If in someone of these components f is constant equal to ∞ , then in this component it can be approximated by a constant function equal to a complex number. Thus we may assume that f is meromorphic in $V_1 \cup \dots \cup V_N$. On the compact set K there is only a finite number of poles. Let μ be the sum of the principal parts of f on each one of these poles. Then $f - \mu$ is holomorphic in a neighborhood of K and by Runge's theorem it can be approximated by a rational function q . The approximation is uniform on K with respect to the Euclidean metric. It follows that the rational function $\mu + q$ approximates f uniformly on K with respect to the metric χ . $\square$

Proposition 2.2. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact set and $q = \frac{A}{B}$ a rational function, where the polynomials A and B do not have any common zero in $\mathbb{C}$. Then there is a sequence $q_j = \frac{A_j}{B_j}$, where the polynomials A_j and B_j have coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ and do not have any common zeros in $\mathbb{C}$ for each j , such that*

$$\sup_{z \in K} \chi(q_j(z), q(z)) \rightarrow 0, \quad \text{as } j \rightarrow +\infty .$$

It follows that the sequence of all rational functions

$$f_m(z) = \frac{A_m(z)}{B_m(z)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

where the polynomials A_m, B_m have coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ and do not have any common zero in $\mathbb{C}$ for each m , is dense in $\mathbf{M}(\Omega)$ for every open set $\Omega \subset \mathbb{C}$.

The above proposition is well known; we include a proof for the sake of completeness; see also [14].

Proof. Let $L \subset \mathbb{C}$ be a compact set such that L° contains K and all zeros of B . Then, there exists $\delta > 0$ such that

$$|A(z)|^2 + |B(z)|^2 > \delta$$

for all $z \in L$. We keep $\deg A = \deg A_j$ and $\deg B = \deg B_j$ for all $j = 1, 2, \dots$ and the coefficients of A_j, B_j are chosen from $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ and approximate the corresponding coefficients of A and B . Thus, there exists j_0 such that

$$|A_j(z)|^2 + |B_j(z)|^2 > \frac{\delta}{2}$$

for all $j \geq j_0$ and $z \in L$. We have

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{A(z)}{B(z)}, \frac{A_j(z)}{B_j(z)}\right) &= \frac{|A(z)B_j(z) - A_j(z)B(z)|}{\sqrt{|B(z)|^2 + |A(z)|^2} \sqrt{|B_j(z)|^2 + |A_j(z)|^2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\delta} |A(z)B_j(z) - A_j(z)B(z)| \end{aligned}$$

for all $z \in L, j \geq j_0$. It follows easily that

$$\sup_{z \in L} \chi(q_j(z), q(z)) \rightarrow 0, \text{ as } j \rightarrow +\infty.$$

By Rouché's theorem all the zeros of $B_j, j \geq j_1 \geq j_0$ are in L . Since

$$|A_j(z)|^2 + |B_j(z)|^2 > \frac{\delta}{2} > 0$$

for all $z \in L$, it follows that A_j and B_j do not have any common zero in $\mathbb{C}$, for all $j \geq j_1$. $\square$

Let $\zeta \in \mathbb{C}$ be fixed and

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \zeta)^n$$

be a formal power series ($a_n = a_n(f, \zeta)$). Often this power series is the Taylor development of a holomorphic function f in a neighborhood of ζ . Let p and q be two non negative integers. The Padé approximant $[f; p/q]_\zeta(z)$ is defined to be a rational function ϕ regular at ζ whose Taylor development with center ζ ,

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \zeta)^n,$$

satisfies $b_n = a_n$ for all $0 \leq n \leq p + q$ and $\phi(z) = A(z)/B(z)$, where the polynomials A and B satisfy

$$\deg A \leq p, \deg B \leq q \text{ and } B(\zeta) \neq 0.$$

It is not always true that such a rational function ϕ exists. And if it exists it is not always unique. For $q = 0$, we always have such a unique ϕ which is

$$[f; p/q]_{\zeta}(z) = \sum_{n=0}^p a_n (z - \zeta)^n .$$

For $q \geq 1$ the necessary and sufficient condition for existence and uniqueness is that the following $q \times q$ Hankel determinant is non-zero ([2])

$$\begin{vmatrix} a_{p-q+1} & a_{p-q+2} & \cdot & \cdot & a_p \\ a_{p-q+2} & a_{p-q+3} & \cdot & \cdot & a_{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p & a_{p+1} & \cdot & \cdot & a_{p+q-1} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

where $a_i = 0$ for $i < 0$. If this is satisfied we write $f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$. For $f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ the Padé approximant

$$[f; p/q]_{\zeta}(z) = \frac{A(f, \zeta)(z)}{B(f, \zeta)(z)}$$

is given by the following Jacobi formula

$$A(f, \zeta)(z) = \begin{vmatrix} (z - \zeta)^q S_{p-q}(f, \zeta)(z) & (z - \zeta)^{q-1} S_{p-q+1}(f, \zeta)(z) & \cdot & \cdot & S_p(f, \zeta)(z) \\ a_{p-q+1} & a_{p-q+2} & \cdot & \cdot & a_{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p & a_{p+1} & \cdot & \cdot & a_{p+q} \end{vmatrix} ,$$

$$B(f, \zeta)(z) = \begin{vmatrix} (z - \zeta)^q & (z - \zeta)^{q-1} & \cdot & \cdot & 1 \\ a_{p-q+1} & a_{p-q+2} & \cdot & \cdot & a_{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p & a_{p+1} & \cdot & \cdot & a_{p+q} \end{vmatrix} ,$$

with (see [2])

$$S_k(f, \zeta)(z) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^k a_{\nu} (z - \zeta)^{\nu}, & \text{if } k \geq 0 \\ 0, & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

If $A(f, \zeta)(z)$ and $B(f, \zeta)(z)$ are given by the previous Jacobi formula and they do not have a common zero in a set K we write $f \in E_{p,q,\zeta}(K)$. Equivalently

$$|A(f, \zeta)(z)|^2 + |B(f, \zeta)(z)|^2 \neq 0$$

for all $z \in K$. For K compact this is equivalent to the existence of a $\delta > 0$ such that

$$|A(f, \zeta)(z)|^2 + |B(f, \zeta)(z)|^2 > \delta$$

for all $z \in K$. We will also use the following ([2] Th. 1.4.4 page 30).

Proposition 2.3. *Let $\phi(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ be a rational function, where the polynomials A and B do not have any common zero in $\mathbb{C}$. Let $\deg A(z) = k$ and $\deg B(z) = \lambda$. Then for every $\zeta \in \mathbb{C}$ such that $B(\zeta) \neq 0$ we have the following:*

$$\phi \in \mathcal{D}_{k,\lambda}(\zeta) ,$$

$$\phi \in \mathcal{D}_{p,\lambda}(\zeta) \text{ for all } p > k ,$$

$$\phi \in \mathcal{D}_{k,q}(\zeta) \text{ for all } q > \lambda .$$

In all these cases ϕ coincides with its corresponding Padé approximant, that is, $[\phi; k/\lambda]_{\zeta}(z) \equiv \phi(z)$ and $[\phi; p/\lambda]_{\zeta}(z) \equiv \phi(z)$ for all $p > k$ and $[\phi; k/q]_{\zeta}(z) \equiv \phi(z)$ for $q > \lambda$.

3. THE MEROMORPHIC CASE

In this section we prove the following statement.

Theorem 3.1. *Let $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ be a set containing a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$ with $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and $\zeta \in \Omega$ be fixed. Then there exists $f \in \mathbf{M}(\Omega)$, with $f(\zeta) \neq \infty$, such that the following hold:*

For every compact sets $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ and $L \subset \Omega$ and every rational function h there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that $f \in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta)$, $f \in E_{p_n, q_n, \zeta}(K \cup L)$ and

$$[f; p_n/q_n]_{\zeta}(z) \rightarrow h(z) \text{ as } n \rightarrow +\infty ,$$

uniformly on K with respect to the metric χ , and

$$[f; p_n/q_n]_{\zeta}(z) \rightarrow f(z) \text{ as } n \rightarrow +\infty ,$$

uniformly on L with respect to χ .

The set of such functions $f \in \mathbf{M}(\Omega)$ is dense and G_{δ} in $\mathbf{M}(\Omega)$.

Proof. We fix two compact sets K and L ; then the class of functions $f \in \mathbf{M}(\Omega)$, $f(\zeta) \neq \infty$, satisfying the conclusion of Theorem 3.1 can be described as follows:

$$X(\Omega, \zeta, L, K) = \bigcap_{j,s=1}^{\infty} \bigcup_{(p,q) \in F} [G(\Omega, L, \zeta, p, q, s) \cap F(\Omega, K, \zeta, p, q, j, s)] ,$$

where

$$G(\Omega, L, \zeta, p, q, s) = \left\{ f \in \mathbf{M}(\Omega), f(\zeta) \neq \infty; f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta), f \in E_{p,q,\zeta}(L) \text{ with } \sup_{z \in L} \chi \left([f; p/q]_{\zeta}(z), f(z) \right) < \frac{1}{s} \right\} ,$$

$$F(\Omega, K, \zeta, p, q, j, s) = \{f \in \mathbf{M}(\Omega), f(\zeta) \neq \infty; f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta), f \in E_{p,q,\zeta}(K) \text{ with}$$

$$\sup_{z \in K} \chi \left([f; p/q]_{\zeta}(z), f_j(z) \right) < \frac{1}{s} \Big\} ,$$

and f_j is an enumeration of all rational functions with coefficients of the numerator and denominator in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. In order to see that

$$G(\Omega, L, \zeta, p, q, s) \text{ and } F(\Omega, K, \zeta, p, q, j, s) \text{ are open in } \mathbf{M}(\Omega) ,$$

the essential point is that, if f belongs to each one of these sets and $g \in \mathbf{M}(\Omega)$ is close to f in chordal distance in a small closed disc with center ζ , then, since $f(\zeta) \neq \infty$, they are close in Euclidean metric. Cauchy estimates allow us to control any finite set of Taylor coefficients of g with center ζ ; they are close to the corresponding coefficients of f . Since $f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ and the Hankel determinant defining $\mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ varies continuously with respect to the Taylor coefficients, it follows that $g \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$. Let

$$[f; p/q]_{\zeta}(z) = \frac{A(f)(z)}{B(f)(z)}$$

and

$$[g; p/q]_{\zeta}(z) = \frac{A(g)(z)}{B(g)(z)}$$

where the polynomials $A(f), B(f), A(g), B(g)$ are given by the Jacobi formula. Since $f \in E_{p,q,\zeta}(L)$, it follows that

$$\min_{z \in L} (|A(f)(z)|^2 + |B(f)(z)|^2) > 0 .$$

By continuity we get that

$$\min_{z \in L} (|A(g)(z)|^2 + |B(g)(z)|^2) > 0$$

and $g \in E_{p,q,\zeta}(L)$. We also have

$$\chi \left([f; p/q]_{\zeta}(z), [g; p/q]_{\zeta}(z) \right) = \frac{|A(f)(z)B(g)(z) - A(g)(z)B(f)(z)|}{\sqrt{|B(f)(z)|^2 + |A(f)(z)|^2} \sqrt{|B(g)(z)|^2 + |A(g)(z)|^2}} .$$

We have seen that the denominator is uniformly far away from zero, because $f, g \in E_{p,q,\zeta}(L)$. The numerator can easily be controlled; thus,

$$\chi \left([f; p/q]_{\zeta}(z), [g; p/q]_{\zeta}(z) \right)$$

is small provided that g is close to f in chordal distance on some disc with center ζ and

$$f \in G(\Omega, L, \zeta, p, q, s) .$$

It follows that $g \in G(\Omega, L, \zeta, p, q, s)$ and the set $G(\Omega, L, \zeta, p, q, s)$ is open in $\mathbf{M}(\Omega)$. A similar argument shows that $F(\Omega, K, \zeta, p, q, j, s)$ is open. The above show that $X(\Omega, \zeta, L, K)$ is G_δ in $\mathbf{M}(\Omega)$.

To prove that $X(\Omega, \zeta, L, K)$ is dense in $\mathbf{M}(\Omega)$ we use Baire's Category theorem. It suffices to show that the set

$$T = \bigcup_{(p,q) \in F} [G(\Omega, L, \zeta, p, q, s) \cap F(\Omega, K, \zeta, p, q, j, s)]$$

is dense in $\mathbf{M}(\Omega)$.

Rational functions are dense in $\mathbf{M}(\Omega)$ (Proposition 2.2) and every rational function ϕ can be approximated uniformly in each compact set with respect to the chordal metric χ by its translations $\phi_a(z) = \phi(z - a)$. Thus, the rational functions ϕ with $\phi(\zeta) \neq \infty$ are dense in $\mathbf{M}(\Omega)$. Hence, it suffices to prove that T meets every neighborhood of every rational function ϕ with $\phi(\zeta) \neq \infty$.

Let ϕ be such a function, $L' \subset \Omega$ a compact subset of Ω and $\epsilon > 0$. Without loss of generality we may assume that $\zeta \in (L')^\circ$. We are looking for a function $g \in \mathbf{M}(\Omega)$ and a pair $(p, q) \in F$ such that the following hold:

$$g(\zeta) \neq \infty, \quad g \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta), \quad g \in E_{p,q,\zeta}(L \cup K),$$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in L'} \chi(g(z), \phi(z)) &< \epsilon, \\ \sup_{z \in L} \chi([g; p/q]_\zeta(z), g(z)) &< \frac{1}{s} \quad \text{and} \\ \sup_{z \in K} \chi([g; p/q]_\zeta(z), f_j(z)) &< \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

The compact sets L', K are disjoint. We consider the function

$$\omega(z) = \begin{cases} \phi(z), & \text{if } z \in L' \\ f_j(z), & \text{if } z \in K. \end{cases}$$

On $L' \cup K$ there is a finite number of poles. Let μ denote the sum of the principal parts of ω on these poles. Then $\omega - \mu$ is holomorphic in a neighborhood of $L' \cup K$. It can be approximated by a quotient of two polynomials

$$\frac{\tilde{A}(z)}{\tilde{B}(z)}, \quad \tilde{B} \neq 0,$$

where the zeros of $\tilde{B}$ are outside $L' \cup K$ and $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ do not have any common zeros. The approximation is uniform on $L' \cup K$ with respect to the Euclidean metric. Then

$$\frac{\tilde{A}(z)}{\tilde{B}(z)} + \mu(z) \equiv \frac{A(z)}{B(z)}$$

approximates ω uniformly on $L' \cup K$ with respect to χ . We can also have that the polynomials A and B do not have any common zeros.

Our assumption on F allows us to find $(p, q) \in F$ such that $p > \max(\deg A, \deg B)$ and $q > \deg B$. We set $\tau = p - \deg B$. We consider the function

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau \equiv \frac{A(z) + dz^\tau B(z)}{B(z)} .$$

For every value of $d \in \mathbb{C}$ the polynomials $B(z)$ and $A(z) + dz^\tau B(z)$ do not have any common zero in $\mathbb{C}$, because $A(z)$ and $B(z)$ do not. If the parameter d is close to zero, then $\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$ and $\omega(z)$ are close on $L' \cup K$ with respect to χ . In particular they are close on L' with respect to χ .

Since, for $d \neq 0$, $\deg B < q$ and $\deg A(z) + dz^\tau B(z) = p$, it follows ([2]) that

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau &\in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta) \quad \text{and} \\ \left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z) &\equiv \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau . \end{aligned}$$

Thus,

$$\sup_{z \in L} \chi \left(\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z), \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau \right) = 0 < \frac{1}{s}$$

and

$$\sup_{z \in K} \chi \left(\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z), f_j(z) \right) = \sup_{z \in K} \chi \left(\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau, \omega(z) \right)$$

is small. Since the polynomials $A(z) + dz^\tau B(z)$ and $B(z)$ do not have any common zeros, we have

$$\min_{z \in L \cup K} (|A(z) + dz^\tau B(z)|^2 + |B(z)|^2) > 0 ;$$

One can also easily see that these polynomials are the polynomials given by the Jacobi formula for

$$\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z) .$$

The function $\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$ is a rational function and belongs to $\mathbf{M}(\Omega)$. We set

$$g(z) \equiv \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$$

and the proof of the fact that $X(\Omega, \zeta, L, K)$ is dense and G_δ is complete.

Let (L_n) , $n \in \mathbb{N}$, be an exhausting family of compact sets of Ω and

$$K_m = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq m\} , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Then, by Baire's theorem, we get that

$$\bigcap_{m,n=1}^{\infty} X(\Omega, \zeta, L_n, K_m)$$

is G_δ and dense in $\mathbf{M}(\Omega)$. This proves Theorem 3.1 .

Remark 3.2. Using Baire's theorem we see that in Theorem 3.1 it is equivalent to say the following: *For every compact set $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ and every rational function h there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ with the following properties*

$$f \in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta) , \quad f \in E_{p_n, q_n, \zeta}(K) ,$$

$$[f; p_n/q_n]_\zeta(z) \rightarrow h(z) , \quad \text{as } n \rightarrow +\infty ,$$

uniformly on K with respect to χ , and for every compact set $L \subset \Omega$ there exists $n(L) \in \mathbb{N}$ such that

$$f \in E_{p_n, q_n, \zeta}(L)$$

for all $n \geq n(L)$ and

$$[f; p_n/q_n]_\zeta(z) \rightarrow f(z) , \quad \text{as } n \rightarrow +\infty ,$$

uniformly on L with respect to χ . Further, since every rational function is defined on $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, the sequence (p_n, q_n) , $n = 1, 2, \dots$ may be independent of the compact set K and can depend only on the rational function h . However, if we fix the compact set K we may also approximate any uniform limit of rational functions on K ; such a limit may be non extendable and the indices $(p_n, q_n) \in F$ realizing the approximation are not good for all other compact sets.

Remark 3.3. A corollary of Theorem 3.1 is that in any domain $\Omega \subset \mathbb{C}$, generically all meromorphic functions f can be approximated uniformly on compacta with respect to the metric χ by their Padé approximants $[f; p/q]_\zeta(z)$, $(p, q) \in F$, provided that F contains a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$. In particular this holds when F is any infinite subset of $\{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Remark 3.4. It can be easily seen that any function f given by Theorem 3.1 is not a rational function. Further let μ be a σ -finite Borel measure on $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Since the sequences $[f; p_n/q_n]_\zeta$, $n = 1, 2, \dots$ uniformly approximate any continuous function $h : K \rightarrow \mathbb{C}$ on any compact set $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ with $K^o = \emptyset$ and K^c connected, combining with the result of [12] we obtain the following:

For every μ -measurable function $h : \mathbb{C} \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ with $f \in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta)$ and

$$[f; p_n/q_n]_\zeta(z) \rightarrow h(z) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty ,$$

μ - almost everywhere.

4. THE HOLOMORPHIC CASE

In this section we start with the following assertion.

Theorem 4.1. *Let F be a subset of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ containing a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ with $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and L and L' two compact subsets of Ω . Let $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ be another compact set. Then there exists a holomorphic function $f \in H(\Omega)$ such that for every rational function h there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that the following hold:*

$$f \in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta) \quad \text{and} \quad f \in E_{p_n, q_n, \zeta}(L' \cup K) \quad \text{for every } n \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \zeta \in L ,$$

$$\sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left([f; p_n/q_n]_\zeta(z), h(z) \right) \rightarrow 0 , \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

and

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [f; p_n/q_n]_\zeta(z) - f(z) \right| \rightarrow 0 , \quad \text{as } n \rightarrow +\infty .$$

The set of such functions $f \in H(\Omega)$ is dense and G_δ in $H(\Omega)$.

Proof. Let f_j , $j = 1, 2, \dots$ be an enumeration of all rational functions where the coefficients of the numerator and the denominator are in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. The set of functions $f \in H(\Omega)$ satisfying Theorem 4.1 can be described as follows:

$$Y(\Omega, L', L, K) = \bigcap_{j, s=1}^{\infty} \bigcup_{(p, q) \in F} [G(\Omega, L', L, p, q, s) \cap F(\Omega, K, L, p, q, j, s)] ,$$

where

$$G(\Omega, L', L, p, q, s) = \{f \in H(\Omega) : f \in \mathcal{D}_{p, q}(\zeta) \quad \text{and} \quad f \in E_{p, q, \zeta}(L') \quad \text{for all } \zeta \in L ,$$

$$\text{and } \sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [f; p/q]_{\zeta}(z) - f(z) \right| < \frac{1}{s} \Bigg\}$$

and

$$F(\Omega, K, L, p, q, j, s) = \{f \in H(\Omega) : f \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta) \text{ and } f \in E_{p,q,\zeta}(K) \text{ for all } \zeta \in L ,$$

$$\text{and } \sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left([f; p/q]_{\zeta}(z), f_j(z) \right) < \frac{1}{s} \Bigg\} .$$

We show that the sets $G(\Omega, L', L, p, q, s)$ and $F(\Omega, K, L, p, q, j, s)$ are open in $H(\Omega)$; this will imply that $Y(\Omega, L', L, K)$ is G_{δ} in $H(\Omega)$.

Let $f \in G(\Omega, L', L, p, q, s)$. Let $\tilde{L} \subset \Omega$ be a compact set such that $L \cup L' \subset (\tilde{L})^o$; thus, there exists $r > 0$ such that for every $\zeta \in L$ we have

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \leq r\} \subset (\tilde{L})^o .$$

We consider $\alpha > 0$ small and a function $g \in H(\Omega)$ satisfying

$$\sup_{z \in \tilde{L}} |f(z) - g(z)| < \alpha .$$

We will see that if α is small enough, then $g \in G(\Omega, L', L, p, q, s)$.

By Cauchy estimates we can uniformly control any finite set of Taylor coefficients of g with center $\zeta \in L$, to be close to the corresponding coefficients of f .

The Hankel determinants determining $\mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ for f depend continuously on $\zeta \in L$; thus, their absolute values are greater than $\delta > 0$. If we choose $\alpha > 0$ small enough, then the absolute values of the Hankel determinants determining $\mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ for g will be greater than $\frac{\delta}{2}$ for all $\zeta \in L$. Therefore $g \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta)$ for all $\zeta \in L$. We now consider the Padé approximants of f and g

$$(4.1) \quad [f; p/q]_{\zeta}(z) = \frac{A(f, \zeta)(z)}{B(f, \zeta)(z)} ,$$

$$(4.2) \quad [g; p/q]_{\zeta}(z) = \frac{A(g, \zeta)(z)}{B(g, \zeta)(z)} .$$

The polynomials $A(f, \zeta)(z)$ and $B(f, \zeta)(z)$ are given by the Jacobi formula and therefore their coefficients vary continuously with $\zeta \in L$. Since $f \in E_{p,q,\zeta}(L')$ for all $\zeta \in L$, there exists $\delta' > 0$ such that

$$(4.3) \quad |A(f, \zeta)(z)|^2 + |B(f, \zeta)(z)|^2 > \delta'$$

for all $\zeta \in L$ and $z \in L'$. If $\alpha > 0$ is small enough, then

$$|A(g, \zeta)(z)|^2 + |B(g, \zeta)(z)|^2 > \frac{\delta'}{2}$$

for all $\zeta \in L$ and $z \in L'$. Thus,

$$g \in E_{p,q,\zeta}(L') \quad \text{for all } \zeta \in L .$$

We set

$$(4.4) \quad \gamma = \frac{1}{s} - \sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [f; p/q]_{\zeta}(z) - f(z) \right| .$$

We notice that $\gamma > 0$. If $\alpha > 0$ is sufficiently small, we have that

$$(4.5) \quad \sup_{z \in L'} |f(z) - g(z)| < \frac{\gamma}{2} .$$

Since $[f; p/q]_{\zeta}(z)$ takes complex values for $\zeta \in L, z \in L'$, it is uniformly bounded by a constant, say $M < +\infty$. It follows by (4.1) and (4.3) that

$$\frac{\delta'}{|B(f, \zeta)(z)|^2} < M^2 + 1 ,$$

for all $\zeta \in L, z \in L'$. Hence $B(f, \zeta)(z)$ is uniformly away from 0. Thus, there exists $\delta'' > 0$ so that

$$(4.6) \quad \delta'' < |B(f, \zeta)(z)| \quad \text{for all } \zeta \in L, z \in L' .$$

By continuity, if $\alpha > 0$ is small, we have

$$(4.7) \quad \frac{\delta''}{2} < |B(g, \zeta)(z)| \quad \text{for all } \zeta \in L, z \in L' .$$

Equations (4.1), (4.2), (4.6) and (4.7) give us that

$$(4.8) \quad \sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [g; p/q]_{\zeta}(z) - [f; p/q]_{\zeta}(z) \right| < \frac{\gamma}{2}$$

provided that $\alpha > 0$ is sufficiently small.

By (4.4), (4.5) and (4.8), together with triangular inequality, it follows that

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [g; p/q]_{\zeta}(z) - g(z) \right| < \frac{1}{s} .$$

This shows that the set $G(\Omega, L', L, p, q, s)$ is open in $H(\Omega)$.

Next we prove that the set $F(\Omega, K, L, p, q, j, s)$ is open in $H(\Omega)$. Let

$$f \in F(\Omega, K, L, p, q, j, s)$$

and $\tilde{L} \subset \Omega$ be a compact set such that $L \subset (\tilde{L})^{\circ}$. We consider $\alpha > 0$ small and a function $g \in H(\Omega)$ satisfying

$$\sup_{z \in \tilde{L}} |f(z) - g(z)| < \alpha .$$

We will see that if α is small enough, then $g \in F(\Omega, K, L, p, q, j, s)$.

By Cauchy estimates we can uniformly control any finite set of Taylor coefficients of g with center $\zeta \in L$, to be close to the corresponding coefficients of f . The proofs that

$$g \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta) \quad \text{and} \quad g \in E_{p,q,\zeta}(K)$$

for all $\zeta \in L$ are similar to the previous ones and are omitted. It remains to control

$$\sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left([g; p/q]_{\zeta}(z), [f; p/q]_{\zeta}(z) \right) .$$

Keeping the same notation as in equations (4.1) and (4.2), we get

$$(4.9) \quad \chi \left([g; p/q]_{\zeta}(z), [f; p/q]_{\zeta}(z) \right) = \frac{|A(g, \zeta)(z)B(f, \zeta)(z) - A(f, \zeta)(z)B(g, \zeta)(z)|}{\sqrt{|B(g, \zeta)(z)|^2 + |A(g, \zeta)(z)|^2} \sqrt{|B(f, \zeta)(z)|^2 + |A(f, \zeta)(z)|^2}} .$$

Furthermore, by the same argument as in the case of $G(\Omega, L', L, p, q, s)$, we have that

$$|A(f, \zeta)(z)|^2 + |B(f, \zeta)(z)|^2 > \delta$$

and

$$|A(g, \zeta)(z)|^2 + |B(g, \zeta)(z)|^2 > \frac{\delta}{2}$$

for all $\zeta \in L$ and $z \in K$. Hence the quantity in (4.9) is less than

$$\frac{\sqrt{2}}{\delta} |A(g, \zeta)(z)B(f, \zeta)(z) - A(f, \zeta)(z)B(g, \zeta)(z)|$$

and the result easily follows. Thus, the set $F(\Omega, K, L, p, q, j, s)$ is open.

It remains to prove that the set

$$\bigcup_{(p,q) \in F} [G(\Omega, L', L, p, q, s) \cap F(\Omega, K, L, p, q, j, s)]$$

is dense in $H(\Omega)$.

Let $L'' \subset \Omega$ be a compact set, $\phi \in H(\Omega)$ and $\epsilon > 0$. We are looking for a $g \in H(\Omega)$ and $(p, q) \in F$ such that

$$g \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta) \quad \text{and} \quad g \in E_{p,q,\zeta}(L' \cup K) \quad \text{for all} \quad \zeta \in L ,$$

$$\sup_{z \in L''} |g(z) - \phi(z)| < \epsilon ,$$

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [g; p/q]_{\zeta}(z) - g(z) \right| < \frac{1}{s}$$

and

$$\sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left([g; p/q]_{\zeta}, f_j(z) \right) < \frac{1}{s} .$$

Without loss of generality we assume that $L \cup L' \subset (L'')^o$ and every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus L''$ contains a component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$.

We consider the function

$$\omega(z) = \begin{cases} f_j(z), & \text{if } z \in K \\ \phi(z), & \text{if } z \in L''. \end{cases}$$

The set of poles of f_j on K is finite; let μ denote the sum of the principal parts of f_j on these poles. Then the function $\omega - \mu$ is holomorphic on a neighborhood of $L'' \cup K$ and can be approximated by a rational function $\tilde{A}(z)/\tilde{B}(z)$ uniformly on $L'' \cup K$ with respect to the Euclidean distance. Polynomials $\tilde{A}(z)$ and $\tilde{B}(z)$ have no common zero in $\mathbb{C}$ and $\tilde{B}(z)$ does not vanish on $L'' \cup K$. The function

$$\mu(z) + \frac{\tilde{A}(z)}{\tilde{B}(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

approximates the function f_j uniformly on K with respect to the metric χ and the function ϕ uniformly on L'' with respect to the Euclidean metric. We notice that $A(z)$ and $B(z)$ are polynomials without common zero in $\mathbb{C}$ and $B(z) \neq 0$ on L'' .

Our assumption on F allows us to find $(p, q) \in F$ such that

$$p > \max(\deg A, \deg B) \quad \text{and} \quad q > \deg B.$$

We set $\tau = p - \deg B$ and we consider the function

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau = \frac{A(z) + dz^\tau B(z)}{B(z)}.$$

For every value of $d \in \mathbb{C}$, polynomials $B(z)$ and $A(z) + dz^\tau B(z)$ do not have any common zero in $\mathbb{C}$ because $A(z)$ and $B(z)$ do not. If the parameter d is close to zero, then

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau \quad \text{and} \quad \omega(z)$$

are uniformly close on K with respect to χ and on L'' with respect to the Euclidean metric. Since $\deg B < q$, and for $d \neq 0$

$$\deg(A(z) + dz^\tau B(z)) = p,$$

it follows ([2]) that

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau \in \mathcal{D}_{p,q}(\zeta),$$

and

$$\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z) = \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$$

for all $\zeta \in \mathbb{C}$ such that $B(\zeta) \neq 0$; in particular this holds for all $\zeta \in L$. Thus

$$\sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left(\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta (z), f_j(z) \right)$$

is small. Moreover

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| \left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta (z) - \frac{A(z)}{B(z)} - dz^\tau \right| = 0 < \frac{1}{s}.$$

We also have that

$$\sup_{z \in L''} \left| \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau - \phi(z) \right|$$

is small.

Since the polynomials $A(z) + dz^\tau$ and $B(z)$ have no common zero, we have that

$$\min_{z \in L' \cup K} \left(|A(z) + dz^\tau B(z)|^2 + |B(z)|^2 \right) > 0;$$

one can also easily see that these polynomials are the ones given by the Jacobi formula for

$$\left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta (z)$$

for any $\zeta \in \mathbb{C}$ with $B(\zeta) \neq 0$.

If $B(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$, then we can set

$$g(z) \equiv \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau \in H(\Omega)$$

and we are done; however, in general the polynomial $B(z)$ may have zeros in $\Omega \setminus L''$. Since every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus L''$ contains a component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$, every zero of $B(z)$ in $\Omega \setminus L''$ lies in the same component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus L''$ with a point in $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$. Therefore we may approximate

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$$

by a function $g \in H(\Omega)$. The approximation is uniform on L'' with respect to the Euclidean distance. Since $L \subset (L'')^o$, there exists $r > 0$ so that

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \leq r\} \subset (L'')^o \quad \text{for all } \zeta \in L.$$

Now Cauchy estimates allow us to show that a finite number of Taylor coefficients of g with center $\zeta \in L$ are uniformly close to the corresponding coefficients of

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau.$$

It is now easy to see that g satisfies all requirements; the only difference of g from

$$\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau$$

is that it is not true that $[g; p/q]_\zeta(z) = g(z)$, but

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [g; p/q]_\zeta(z) - g(z) \right| \leq \sup_{\zeta \in L, z \in L'} \left| [g; p/q]_\zeta(z) - \left[\frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau; p/q \right]_\zeta(z) \right| + \sup_{z \in L'} \left| \frac{A(z)}{B(z)} + dz^\tau - g(z) \right| ,$$

where the last two terms are small because p, q are already fixed and thus we know which set of Taylor coefficients we should control. Baire's theorem completes the proof. $\square$

If we set $K = \emptyset$ and $L' = L = L_n$ to vary in an exhausting sequence of compact subsets of Ω and we apply Baire's theorem once more, then we obtain a result of [8] assuring that generically every holomorphic function f on an open set Ω can be approximated by its Padé approximants

$$[f; p_n/q_n]_\zeta(z) , \quad (p_n, q_n) \in F ,$$

provided that $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contains a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$.

If we set $L = \{\zeta\}$ to be a singleton,

$$K = K_m = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq m\} ,$$

and $L' = L'_n$ to vary in an exhausting sequence of compact sets of Ω , then applying Baire's theorem we obtain the following statement.

Theorem 4.2. *Let F be a subset of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ containing a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ with $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set and $\zeta \in \Omega$ be fixed. Then there exists a holomorphic function $f \in H(\Omega)$ such that for every rational function h and compact set $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that the following hold:*

$$f \in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} ,$$

$$\sup_{z \in K} \chi \left([f; p_n/q_n]_\zeta(z), h(z) \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty ,$$

and for every compact set $L' \subset \Omega$ there exists $n(L') \in \mathbb{N}$ such that

$$f \in E_{p_n, q_n, \zeta}(K \cup L') \quad \text{for all } n \geq n(L')$$

and

$$\sup_{z \in L'} \left| [f; p_n/q_n]_{\zeta}(z) - f(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty .$$

The set of such functions $f \in H(\Omega)$ is dense and G_{δ} in $H(\Omega)$.

If we set $L = L' = L_n$ to be an exhausting sequence of compact subsets of Ω and

$$K = K_m = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq m\} ,$$

and we apply Baire's theorem once more we obtain the following.

Theorem 4.3. *Let F be a subset of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ containing a sequence $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ with $\widetilde{p}_n \rightarrow +\infty$ and $\widetilde{q}_n \rightarrow +\infty$. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set. Then there exists a holomorphic function $f \in H(\Omega)$ satisfying the following. For every compact set $K \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ and every rational function h there exists a sequence $(p_n, q_n) \in F$, $n = 1, 2, \dots$ such that the following hold: For every compact set $L \subset \Omega$ there exists $n(L) \in \mathbb{N}$ such that*

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{D}_{p_n, q_n}(\zeta) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } \zeta \in L , \\ f &\in E_{p_n, q_n, \zeta}(K \cup L) \quad \text{for all } n \geq n(L) \text{ and } \zeta \in L \end{aligned}$$

and

$$\sup_{\zeta \in L, z \in K} \chi \left([f; p_n/q_n]_{\zeta}(z), h(z) \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty ,$$

and

$$\sup_{\zeta \in L, z \in L} \left| [f; p_n/q_n]_{\zeta}(z) - f(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty .$$

The set of such functions $f \in H(\Omega)$ is dense and G_{δ} in $H(\Omega)$.

Remark 4.4. Similarly to Theorem 3.1 we see that any function f given by Theorem 4.3 cannot be rational and its Padé approximants approximate almost everywhere any measurable complex function with respect to any σ -finite Borel measure μ on $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

5. COMPARISON OF TWO NOTIONS OF UNIVERSALITY

In this section we show that the notion of universality presented in this paper is a new one. More precisely we compare it with the notion of universality in [6] where we have approximation by Padé approximants of functions taking only finite complex values. It is easy to see that the notion of universality given by Theorem 4.1 implies that of [6]. Our aim is to construct a universal function f in the sense of [6] which does not satisfy the requirements of Theorem 4.1.

It suffices that for a compact set K disjoint from Ω , containing a disc

$$D(b, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < r\} \ , \quad r > 0 \ ,$$

the Padé approximants $[f; p/q]_\zeta$, $(p, q) \in F$, do not have any pole in $D(b, r)$. Then they cannot approximate the rational function

$$\frac{1}{z - b} \quad \text{on } K \ .$$

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a simply connected domain containing $\zeta = 0$ and $K \subset \mathbb{C}$ a compact set disjoint from Ω , having connected complement. We assume that $D(b, r) \subset K$. Let f_j , $j = 1, 2, \dots$ be an enumeration of all polynomials with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Let L_j , $j = 1, 2, \dots$ be an exhausting family of compact sets of Ω . Without loss of generality we may assume that L_j^ζ is connected.

Suppose that we have constructed an initial part P of a power series with center 0. We continue inductively. Let $\lambda_j > 2 \deg P$. Using Runge's theorem we find a polynomial Q_j such that

$$\sup_{z \in L_j} |z^{\lambda_j} Q_j(z)| < \frac{1}{2^j}$$

and

$$\sup_{z \in K} |P(z) + z^{\lambda_j} Q_j(z) - f_j(z)| < \frac{1}{j} \ .$$

We continue in this way taking

$$\lambda_{j+1} > 2 \deg (P(z) + z^{\lambda_j} Q_j(z)) \ .$$

We set

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{\lambda_j} Q_j(z) \ ,$$

where $\lambda_0 = 0$ and $Q_0 \equiv 0$. Then $f \in H(\Omega)$ and its Taylor series with center $\zeta = 0$ is a universal Taylor series on K . If

$$n = n(N) = \deg \left(\sum_{j=0}^N z^{\lambda_j} Q_j(z) \right) \ ,$$

then $f \in \mathcal{D}_{n,n}(0)$ and

$$[f; n/n]_0(z) = \sum_{j=0}^N z^{\lambda_j} Q_j(z)$$

is a polynomial; We set $F = \{(n(N), n(N)) : N = 0, 1, 2, \dots\}$. Then $[f; p/q]_0(z)$, being a polynomial for every $(p, q) \in F$, cannot uniformly approximate the function

$$\frac{1}{z - b} \quad \text{on } K$$

with respect to the chordal metric χ . Therefore f is not universal in the sense of Theorem 4.1 while it is in the sense of [6].

We can extend the previous construction replacing the compact set K by a sequence of compact sets

$$K_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (K_m \cap \Omega = \emptyset, \quad K_m^c \text{ connected})$$

absorbing all compact sets $K \subset \mathbb{C}$, $K \cap \Omega = \emptyset$, K^c connected ([3], [15]). Thus, f is a universal Taylor series in Ω , it is a universal function in the sense of [6] but not in the sense of Theorem 4.1, provided that Ω^c has non-empty interior.

Similar results, but with more complicated justifications can be obtained in the case where

$$\Omega = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad , \quad \zeta = 0 \quad ,$$

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq |z| \leq \beta\} \quad , \quad 1 \leq \alpha < \beta < +\infty \quad ,$$

or for a sequence $K_m \subset \mathbb{C}$ of compact sets disjoint with D of arbitrary connectivity, provided that there exists a disc $D(b, r)$ contained in some K_{m_0} and such that for each m every component of $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K_m$ contains a point not belonging to $D(b, r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Androulakis and V. Nestoridis, “Extensions of the disc algebra and of Mergelyan’s theorem”, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **349**, no. 13 – 14, 745 – 748 (2011).
- [2] G. A. Baker, Jr. and P. R. Graves-Morris, Padé Approximants, **1** and **2** (Encyclopedia of Math. and Applications), Cambridge Un. Press (2010).
- [3] F. Bayart, K.-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis and C. Papadimitropoulos, “Abstract theory of universal series and applications”, Proc. London Math. Soc., **96**, Issue 3, no. 2, 417 – 463 (2008).
- [4] L. Brown, P. M. Gauthier and W. Hergartner, “Continuous boundary behavior for functions defined in the open unit disc”, Nagoya Math. J., **57**, 49 – 58 (1975).
- [5] C. Chui and M. N. Parnes, “Approximation by overconvergence of power series”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **36**, 693 – 696 (1971).
- [6] N. Daras and V. Nestoridis, Universal Padé Approximation, Arxiv 1102.4782 .
- [7] N. Daras, G. Fournodavlos and V. Nestoridis, Universal Padé Approximation, In preparation.
- [8] G. Fournodavlos and V. Nestoridis, Generic approximation of functions by their Padé approximants, Arxiv 1106.0169 .
- [9] P. M. Gauthier, A. Roth and J. L. Walsh, Possibility of uniform rational approximation in Spherical metric, Can. J. Math., **XXVIII**, no. 1, 112 – 115 (1976).
- [10] K.-G. Grosse-Erdmann, “Universal families and hypercyclic operators”, Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 345 – 381 (1999).
- [11] J.-P. Kahane, “Baire’s Category theorem and trigonometric series”, J. Anal. Math. **80**, 143 – 182 (2000).
- [12] G. Koumoullis, W. Luh and V. Nestoridis, “Universal functions are automatically universal in the sense of Menchoff”, Complex Var. Elliptic Equ., **52**, no. 4, 307 – 314 (2007).
- [13] W. Luh, “Approximation analytischer Funktionen durch uberkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten”, Mitt. Math. Sem. Giessen., **88**, 1 – 56 (1970).

- [14] T. Meyrath, “Universal Rational Expansions of Meromorphic Functions”, CMFT, **11**, no. 1, 317 – 324 (2011).
- [15] V. Nestoridis, “Universal Taylor series” Annales de l’ Institut Fourier, **46**, 1293 – 1306 (1996).
- [16] V. Nestoridis, “An extension of the disc algebra”, I, Bull. Lond. Math. Soc., to appear.
- [17] V. Nestoridis and N. Papadatos, “Another extension of the disc algebra”. Arxiv 1012.3674.
- [18] V. Nestoridis and I. Papadoperakis, “A remark on two extensions of the disc algebra and Mergelyan’s theorem”, Arxiv 1104.0833.
- [19] V. Nestoridis, “Compactifications of the plane and extensions of the disc algebra”, Submitted.
- [20] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York (1966).

Поступила 25 ноября 2011

МАРТИНГАЛЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. А. ТАЛАЛЯН

Институт Математики НАН Армении, Ереван, Армения

E-mail: sart@ysu.am

Аннотация. Применением мартингалных свойств последовательностей кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара, устанавливаются признаки интегрируемости кратных тригонометрических рядов. Часть этих теорем является усилением и распространением на кратные тригонометрические ряды классических теорем об интегрируемости одномерных тригонометрических рядов, доказательства которых были получены применением принципа выбора Хелли.

MSC2010 number: 42A16.

Ключевые слова: Тригонометрический ряд; система Хаара; мартингал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Всюду ниже R_m — m -мерное пространство, $n = (n_1, \dots, n_m) \in R_m$, векторы с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_m)$; $t = (t_1, \dots, t_m)$ элементы из R_m ; $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ векторы с $\nu_j = 1, 2, \dots, \mu_j = 1, 2, \dots$; $n \cdot x = \sum_{j=1}^m n_j \cdot x_j$, $\|x\| = (\sum_{j=1}^m x_j^2)^{1/2}$, $|E|$ — мера Лебега измеримого множества $E \subset R_m$. $\Delta_k^{p_j} = [(p_j - 1)/2^k, p_j/2^k]$, p_j — целые числа. Будем обозначать

$$\Delta_k^p = \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j}, \quad p = (p_1, \dots, p_m)$$

$\Delta_k^p(t)$ сдвиг куба Δ_k^p на вектор $t = (t_1, \dots, t_m)$. Если $\Delta = \prod_{j=1}^m \Delta_j$, где $\Delta_j = [a_j^1, a_j^2]$ и $F(x)$ определена на вершинах Δ , обозначим через ΔF смешанную разность функции $F(x)$ относительно Δ , т.е. $\Delta F = \Delta_m(\Delta_{m-1} \dots (\Delta_1 F(x)))$, где

$$(1.1) \quad \Delta_j g(x) = g(x_1, \dots, a_j^2, \dots, x_m) - g(x_1, \dots, a_j^1, \dots, x_m).$$

Известно, что

$$(1.2) \quad \Delta F = \sum_{i_j=1,2; j=1,2,\dots,m} (-1)^{i_1+\dots+i_m} F(a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_m^{i_m}).$$

Если $F(x+t)$ определена для всех x , являющихся вершинами Δ , обозначим через $\Delta F(x+t) = \Delta(t)F$ смешанную разность функции $F(x+t)$ по переменной x относительно Δ .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Напомним определение системы Хаара

$$\chi_1(\xi) \equiv 1, \xi \in [0, 1], \quad \chi_2(\xi) = \begin{cases} 1; & \xi \in [0, 1/2) \\ -1; & \xi \in [1/2, 1] \end{cases},$$

при $j = 2^{k-1} + \alpha$, $1 \leq \alpha \leq 2^{k-1}$ полагаем

$$\chi_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2^{k-1}}; & \text{если } \xi \in \left(\frac{2\alpha-2}{2^k}, \frac{2\alpha-1}{2^k}\right) \\ -\sqrt{2^{k-1}}; & \text{если } \xi \in \left(\frac{2\alpha-1}{2^k}, \frac{2\alpha}{2^k}\right) \\ 0; & \text{если } \xi \notin \left[\frac{\alpha-1}{2^{k-1}}, \frac{\alpha}{2^{k-1}}\right] \end{cases}.$$

В остальных точках разрыва полагается $\chi_j(\xi)$ равной среднему арифметическому односторонних пределов этой функции.

Кратная система Хаара $\chi_\mu(x)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_j = 1, 2, \dots$ определяется равенством $\chi_\mu(x) = \chi_{\mu_1}(x_1) \cdot \chi_{\mu_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \chi_{\mu_m}(x_m)$.

Определение 2.1. Функция $F(x)$ определенная во всех точках $(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, \dots, p_m/2^{k_m})$, $k_j = 1, 2, \dots, p_j$ - целые называется локально абсолютно непрерывной по Витали на двоичной сети, если для любой ограниченной области $Q \subset R_m$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\Delta_i \subset Q$, $1 \leq j \leq n$, конечное число попарно непересекающихся сегментов с вершинами из $\{(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, \dots, p_m/2^{k_m})\}$ и $\sum |\Delta_i| < \delta$, то $\sum |\Delta_i F| < \varepsilon$.

Заметим, что в силу аддитивности функции сегмента ΔF , функция $F(x)$ будет локально абсолютно непрерывной по Витали, если требовать, что в определении 2.1 все Δ_i имеют вид $\Delta_i = \Delta_k^{p(i)}$, $k = 1, 2, \dots$, $p(i) = (p_1(i), \dots, p_m(i))$, $p_m(i)$ - целые числа.

Определение 2.2. Функция $F(x)$ определенная почти всюду на R_m называется локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали, если для любой конечной области $Q \subset R_m$ существует множество $G \subset Q$, $|G| = |Q|$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию:

если Δ_i , $1 \leq i \leq n$, конечное число попарно непересекающихся сегментов, вершины которых принадлежат множеству G и $\sum |\Delta_i| < \delta$, то $\sum |\Delta_i F| < \varepsilon$.

Теорема 2.1. Пусть $F(x)$ почти всюду конечная измеримая функция, определенная почти всюду на R_m и для каждой точки $t \in E$, где E измеримое множество положительной меры, функция $F(x+t)$, как функция от x , локально абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети $\{(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, \dots, p_m/2^{k_m})\}$. Тогда $F(x)$ локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали.

Доказательство. Условие теоремы эквивалентно тому, что $F(x)$ локально абсолютно непрерывна по Витали на сети $\{t + (p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, \dots, p_m/2^{k_m})\}$ для каждого $t \in E$. Пусть G множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$. Известно, что (см. [1], стр. 199) $|R_m \setminus G| = 0$. Из измеримости функции $F(x)$ и из условия теоремы следует, что для любой ограниченной области $Q \subset R_m$ существует множество $E' \subset E$, такое, что $|E'| > 0$ и для каждого $t \in E'$ функция $F(x+t)$ абсолютно непрерывна по Витали на Q относительно двоичной сети.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для натурального p обозначим через E_p множество тех точек $t \in E'$ для которых выполнено условие:

Если $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ конечное число сегментов $\Delta_i \cap \Delta_j, i \neq j$, вершины которых имеют двоично рациональные координаты, $\Delta_i \subset Q$ и

$$\sum |\Delta_i| < 1/p, \text{ то } \sum |\Delta_i F(x+t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $|E'| > 0$ и $E' = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$, $E_p \subset E_{p+1}, \forall p$, то для некоторого p_0 имеем $|E_{p_0}| > 0$. Обозначив $E_{p_0} = E_0$ и $1/p_0 = \delta$ будем иметь:

Для каждого конечного семейства сегментов Δ_i , $\Delta_i \cap \Delta_{i'} = \emptyset, i \neq i', \Delta_i \subset Q$, вершины которых имеют двоично рациональные координаты, если

$$(2.1) \quad \sum |\Delta_i| < \delta, \text{ то } \sum |\Delta_i F(x+t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } t \in E_0, |E_0| > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что начало координат является точкой плотности для E_0 . Пусть $I_1, I_2, \dots, I_n$ попарно непересекающиеся сегменты, вершины которых принадлежат множеству $G \cap Q$ и

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n |I_i| < \delta.$$

Обозначим через $V_{i\nu}, 1 \leq \nu \leq 2^m$, вершины сегмента $I_i, i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим куб $\Delta_\eta = [0, \eta]^m$ и заметим, что

$$(2.3) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|\Delta_\eta \cap E_0|}{|\Delta_\eta|} = 1.$$

Рассмотрим кубы $B_{i\nu}$ с центрами $V_{i\nu}$ и длинами сторон равными 2η . Обозначим $\delta_{i\nu} = B_{i\nu} \cap I_i$. Если η достаточно мало, то для каждого $i, \delta_{i\nu}, 1 \leq \nu \leq 2^m$, попарно не пересекаются. Так как точки $V_{i\nu}$ являются точками аппроксимативной

непрерывности функции $F(x)$, то для некоторых множеств $Q_{i\nu}$, для которых $V_{i\nu}$ являются точками плотности, имеем

$$(2.4) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|Q_{i\nu} \cap \delta_{i\nu}|}{|\delta_{i\nu}|} = 1, \quad \lim_{x \in Q_{i\nu}, x \rightarrow V_{i\nu}} F(x) = F(V_{i\nu}).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$, если η достаточно мало, выполняется

$$|F(V_{i\nu}) - F(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in Q_{i\nu} \cap \delta_{i\nu}.$$

Рассмотрим сегменты $\Delta_i \subset I_i$ с вершинами $w_{i\nu}$, координаты которых двоично рациональные числа. Обозначим

$$(2.5) \quad \Delta_{i\nu} = \Delta_\eta + w_{i\nu}, 1 \leq \nu \leq 2^m, i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая (1.8) – (1.10), легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ и множества $E_{i\nu} \subset \Delta_{i\nu}$ такие, что выполняются условия

$$(2.6) \quad |\Delta_\eta \cap E_0| > |\Delta_\eta| \cdot \frac{1}{2} = \frac{\eta^m}{2},$$

$$(2.7) \quad \Delta_{i\nu} \subset I_i, 1 \leq \nu \leq 2^m,$$

$$(2.8) \quad |E_{i\nu}| > (1 - \frac{1}{n2^{m+1}}) \cdot \eta^m,$$

$$(2.9) \quad |F(V_{i\nu}) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{n2^{m+1}} \quad \forall x \in E_{i\nu}.$$

Заметим, что по определению $\Delta_{i\nu}$, имеем для всех $t \in \Delta_\eta \cap E_0$,

$$t + w_{i\nu} \in \Delta_{i\nu}, i = 1, 2, \dots, n, 1 \leq \nu \leq 2^m.$$

Обозначим $A_{i\nu} = \{t : t \in \Delta_\eta \cap E_0, t + w_{i\nu} \in E_{i\nu}\}$. Очевидно, имеем

$$(2.10) \quad |A_{i\nu}| = |(E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu}|.$$

Также имеем

$$\begin{aligned} & \left| (E_0 \cap \Delta_\eta) \setminus \bigcap_{i\nu} A_{i\nu} \right| = \left| \bigcup_{i\nu} (E_0 \cap \Delta_\eta \setminus A_{i\nu}) \right| \leq \sum_{i\nu} |(E_0 \cap \Delta_\eta) \setminus A_{i\nu}| = \\ & = \sum_{i\nu} (|E_0 \cap \Delta_\eta| - |A_{i\nu}|) = \sum_{i\nu} (|E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}| - |(E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu}|) = \\ (2.11) \quad & = \sum_{i\nu} |(E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \setminus (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu}|. \end{aligned}$$

Но

$$E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu} = (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu} \cup (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap (\Delta_{i\nu} \setminus E_{i\nu}).$$

Следовательно

$$(2.12) \quad (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \setminus (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu} = (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap (\Delta_{i\nu} \setminus E_{i\nu}).$$

Поэтому согласно (2.7)

$$\begin{aligned} & |(E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \setminus (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu}| \leq |\Delta_{i\nu} \setminus E_{i\nu}| = \\ & = |\Delta_{i\nu}| - |E_{i\nu}| = \eta^m - |E_{i\nu}| < \eta^m - \eta^m \cdot \left(1 - \frac{1}{n2^{m+1}}\right) = \eta^m \cdot \frac{1}{n2^{m+1}} = \frac{\eta^m}{2} \cdot \frac{1}{n2^m}. \end{aligned}$$

Из (2.5) и (2.11) следует

$$(2.13) \quad \left| (E_0 \cap \Delta_\eta) \setminus \bigcap_{i\nu} A_{i\nu} \right| \leq \sum_{i\nu} \frac{\eta^m}{2} \cdot \frac{1}{n2^m} < \frac{\eta^m}{2}.$$

Итак, получаем

$$\left| (E_0 \cap \Delta_\eta) \setminus \bigcap_{i\nu} A_{i\nu} \right| = |E_0 \cap \Delta_\eta| - \left| \bigcap_{i\nu} A_{i\nu} \right| \leq \frac{\eta^m}{2}.$$

Следовательно, согласно (2.6) имеем

$$\left| \bigcap_{i\nu} A_{i\nu} \right| > |E_0 \cap \Delta_\eta| - \frac{\eta^m}{2} > \frac{\eta^m}{2} - \frac{\eta^m}{2} = 0,$$

откуда следует существование такого $t \in E_0 \cap \Delta_\eta$, что $t + w_{i\nu} \in E_{i\nu}$, для любых $i\nu$. Поэтому сегменты $t + \Delta_i = \Delta'_i$ с вершинами $t + w_{i\nu}$, согласно (2.6) – (2.9) будут обладать свойством

$$(2.14) \quad t + \Delta_i \subset I_i, \quad |F(V_{i\nu}) - F(t + w_{i\nu})| < \frac{\varepsilon}{n2^{m+1}}.$$

Так как $\Delta'_i \subset I_i$, $1 \leq i \leq n$, то $\Delta'_i \cap \Delta'_j = 0$, $i \neq j$ и согласно (2.2)

$$\sum_{i=1}^n |\Delta'_i| \leq \sum_{i=1}^n |I_i| < \delta.$$

Поэтому согласно (1.7) имеем

$$(2.15) \quad \sum |\Delta'_i F(x + t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (2.14) следует, что

$$\sum_{i=1}^n |I_i F(x + t)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2. Пусть $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция на R_m , которая локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали. Тогда для любого $A > 0$ существуют точка $a = (a_1, \dots, a_m)$, куб $T_a = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + A]$, $a \in G \cap T_a$, $|G \cap T_a| = |T_a|$, и функция сегмента $\tilde{F}(\Delta)$ определенная для всех $\Delta \subset T_a$ такие, что

1) $\tilde{F}(\Delta) = \Delta F$, если вершины Δ принадлежат множеству $G \cap T_a$

2) $\tilde{F}(\Delta)$ абсолютно непрерывна и аддитивна.

Доказательство. Для ясности изложения теорему докажем при $m = 2$. Пусть $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Легко видеть, что для любого $A > 0$ существуют точка $a = (a_1, a_2)$ и множества E_1, E_2 , $E_1 \subset \{(x, a_2), a_1 \leq x \leq a_1 + A\}$, $E_2 \subset \{(a_1, y), a_2 \leq y \leq a_2 + A\}$ такие, что $(a_1, a_2) \in G \cap T_a$, $T_a = [a_1, a_1 + A] \times [a_2, a_2 + A]$, $|E_1| = |E_2| = A$, и если $x \in E_1$, то $|\{(x, y), a_2 \leq y \leq a_2 + A\} \cap G| = A$, если $y \in E_2$, то $|\{(x, y), a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap G| = A$. Без ограничения общности можно считать, что точка $a = (a_1, a_2)$ является началом координат, т.е. $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Обозначим $T = [0 \leq x \leq A] \times [0 \leq y \leq A]$. Имеем $|T \cap G| = A^2$, $E_1 \subset \{(x, 0), 0 \leq x \leq A\}$, $E_2 \subset \{(0, y), 0 \leq y \leq A\}$, $|E_1| = |E_2| = A$, для всех $x \in E_1$, $|\{(x, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G| = A$, для всех $y \in E_2$, $|\{(x, y), 0 \leq x \leq A\} \cap G| = A$. Для $x \in E_1$ и $y \in E_2$ обозначим через E_x и E_y (соответственно) ортогональные проекции множеств $\{(x, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G$, $\{(x, y), 0 \leq x \leq A\} \cap G$ соответственно на $\{(0, y), 0 \leq y \leq A\}$ и на $\{(x, 0), 0 \leq x \leq A\}$. Очевидно

$$(2.16) \quad |E_x| = A \quad \forall x \in E_1, \quad |E_y| = A \quad \forall y \in E_2.$$

В доказательстве теоремы используются следующие определение и лемма.

Определение 2.3. Пара прямоугольников $\Delta' \subset T$ и $\Delta'' \subset T$ называется *правильной парой*, если их вершины принадлежат множеству G и если содержащие эти вершины горизонтальные и вертикальные отрезки длины A пересекаются в точках, принадлежащих множеству $G \cap T$.

Последовательность прямоугольников $\{\Delta_i\}$, $\Delta_i \subset T$, называется *правильной последовательностью*, если все пары Δ_i и Δ_j являются "правильными" парами.

Лемма 2.1. Пусть $\Delta_0 = [x_1^0, x_2^0] \times [y_1^0, y_2^0]$, $\Delta_0 \subset T$ и прямоугольники $\Delta_i = [x_1^i, x_2^i] \times [y_1^i, y_2^i]$, $\Delta_i \subset T$, $1 \leq i \leq n$, такие, что все пары Δ_i, Δ_j являются правильными. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует прямоугольник $\Delta_{n+1} = [x_1^{n+1}, x_2^{n+1}] \times [y_1^{n+1}, y_2^{n+1}]$, $\Delta_{n+1} \subset T$ такой, что $|x_1^0 - x_1^{n+1}| < \varepsilon$, $|x_2^0 - x_2^{n+1}| < \varepsilon$, $|y_1^0 - y_1^{n+1}| < \varepsilon$, $|y_2^0 - y_2^{n+1}| < \varepsilon$ и все пары Δ_i, Δ_{n+1} , $1 \leq i \leq n$, являются правильными.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$F_1 = E_2 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (E_{x_1^i} \cap E_{x_2^i}) \right), \quad F_2 = E_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (E_{y_1^i} \cap E_{y_2^i}) \right).$$

Из (2.15) следует

$$(2.17) \quad |F_1| = A, \quad |F_2| = A.$$

Из определения множества F_2 следует, что для всех $x \in E_2$ отрезки $\{(x, y), 0 \leq y \leq A\}$ пересекаются с отрезками $\{(x, y_1^i), 0 \leq x \leq A\}$ и $\{(x, y_2^i), 0 \leq x \leq A\}$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Поэтому в силу второго равенства (2.16) существуют $x_1^{n+1} \in F_2, x_2^{n+1} \in F_2$, такие, что

$$|x_1^{n+1} - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_2^{n+1} - x_2^0| < \varepsilon$$

и, при этом, отрезки $\{(x_1^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\}, \{(x_2^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\}$ пересекаются со всеми отрезками $\{(x, y_1^i), 0 \leq x \leq A\}, \{(x, y_2^i), 0 \leq x \leq A\}, 1 \leq i \leq n$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Кроме того,

$$|\{(x_1^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G| = A, \quad |\{(x_2^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G| = A.$$

Ортогональные проекции $E_{x_1^{n+1}}, E_{x_2^{n+1}}$ этих множеств на $\{(0, y), 0 \leq y \leq A\}$ тоже имеют меры

$$|E_{x_1^{n+1}}| = A, \quad |E_{x_2^{n+1}}| = A.$$

Поэтому в силу первого равенства (2.16) имеем

$$(2.18) \quad |(E_{x_1^{n+1}} \cap E_{x_2^{n+1}}) \cap F_1| = A.$$

Для всех $y \in (E_{x_1^{n+1}} \cap E_{x_2^{n+1}}) \cap F_1$ отрезки $\{(x, y), 0 \leq x \leq A\}$ пересекаются с отрезками $\{(x_1^i, y), 0 \leq y \leq A\}, \{(x_2^i, y), 0 \leq y \leq A\}, 1 \leq i \leq n$, и с отрезками $\{(x_1^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\}, \{(x_2^{n+1}, y), 0 \leq y \leq A\}$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Тогда в силу (2.17) существуют y_1^{n+1}, y_2^{n+1} такие, что $|y_1^{n+1} - y_1^0| < \varepsilon, |y_2^{n+1} - y_2^0| < \varepsilon$ и отрезки $\{(x, y_1^{n+1}), 0 \leq x \leq A\}, \{(x, y_2^{n+1}), 0 \leq x \leq A\}$ пересекаются со всеми отрезками $\{(x_1^i, y), 0 \leq y \leq A\}, \{(x_2^i, y), 0 \leq y \leq A\}, 1 \leq i \leq n+1$, в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Таким образом прямоугольник $\Delta_{n+1} = [x_1^{n+1}, x_2^{n+1}] \times [y_1^{n+1}, y_2^{n+1}]$, удовлетворяет требованиям леммы. $\square$

Доказательство Теоремы 2.2. Заметим, что если прямоугольники Δ' и Δ'' составляют правильную пару, то вершины каждого из минимального числа треугольников, объединение которых совпадает с симметрической разностью $(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta')$, принадлежат множеству $G \cap T$. Расстоянием прямоугольников Δ' и Δ'' считаем величину

$$\rho_1(\Delta', \Delta'') = |(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta')|.$$

Расстояние $\rho_2(\Delta'F, \Delta''F)$ смешанных разностей $\Delta'F, \Delta''F$ определяется следующим образом: если $(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta') = \cup \Delta_j$, где Δ_j конечное число попарно непересекающиеся прямоугольники с вершинами, принадлежащими множеству $G \cap T$, полагаем $\rho_2(\Delta'F, \Delta''F) = |\sum \Delta_j F|$. Последовательным применением

леммы 2.1 получим, что для любой последовательности $\varepsilon_n \searrow 0$ и для любого прямоугольника $\Delta \subset T$, $\Delta = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ существует правильная последовательность прямоугольников $\Delta_i \subset T$, $\Delta_i = [x_1^i, x_2^i] \times [y_1^i, y_2^i]$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_1(\Delta, \Delta_i) = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho_1(\Delta_i, \Delta_j) \rightarrow 0$ при $i, j \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $\{\Delta_i\}$ фундаментальна в метрике ρ_1 .

Из абсолютной непрерывности функции $F(x, y)$ на множестве $G \cap T$, следует

$$\rho_2(\Delta_i F, \Delta_j F) \rightarrow 0, \text{ при } i, j \rightarrow \infty$$

и существование предела $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i F = \tilde{F}(\Delta)$. Этот предел единственный. Действительно, если $\{\Delta_i^1\}$ и $\{\Delta_i^2\}$ правильные последовательности и $\rho_1(\Delta_i^1, \Delta) \rightarrow 0$, $\rho_1(\Delta_i^2, \Delta) \rightarrow 0$, то последовательным применением леммы 2.1 найдем правильную последовательность Δ_i^3 , такую, что $\rho_1(\Delta_i^3, \Delta) \rightarrow 0$, и все пары Δ_i^1, Δ_i^3 , Δ_i^2, Δ_i^3 являются правильными. Тогда $\rho_1(\Delta_i^1, \Delta_i^3) \rightarrow 0$, $\rho_1(\Delta_i^2, \Delta_i^3) \rightarrow 0$. Из абсолютной непрерывности $F(x, y)$ на $G \cap T$, следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_2(\Delta_i^1 F, \Delta_i^3 F) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_2(\Delta_i^2 F, \Delta_i^3 F) = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i^1 F = \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i^3 F = \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i^2 F$$

и для любого $\Delta \subset T$ величина $\tilde{F}(\Delta)$ определяется единственным образом. Если вершины прямоугольника Δ принадлежат множеству $G \cap T$, то $\tilde{F}(\Delta) = \Delta F$, ибо в качестве последовательности $\{\Delta_i\}$ можно взять последовательность $\Delta_i = \Delta$, $\forall i$. Из определения функции сегмента $\tilde{F}(\Delta)$ немедленно следует, что она абсолютно непрерывна. Проверим аддитивность этой функции. Пусть

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, i \neq j.$$

Для $\varepsilon > 0$, применяя лемму 2.1, выберем прямоугольники $\Delta'_i \subset \Delta_i$, $1 \leq i \leq n$ такие, что все пары Δ'_i, Δ'_j правильные и

$$(2.19) \quad \rho_1(\Delta_i, \Delta'_i) < \frac{\varepsilon}{n}, \quad \rho_2(\tilde{F}(\Delta_i), \Delta'_i F) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Затем выберем прямоугольник Δ' с вершинами из $G \cap T$, такой, что

$$(2.20) \quad \bigcup_{i=1}^n \Delta'_i \subset \Delta', \quad \rho_2(\tilde{F}(\Delta), \Delta' F) < \varepsilon$$

и, при этом, все пары Δ', Δ'_i правильны. Тогда имеем

$$(2.21) \quad \rho_2(\Delta' F, \sum_{i=1}^n \Delta'_i F) < \varepsilon.$$

Из (2.18) – (2.20) следует

$$\rho_2(\tilde{F}(\Delta), \sum_{i=1}^n \tilde{F}(\Delta_i)) < 3\varepsilon.$$

Итак

$$\rho_2(\tilde{F}(\Delta), \sum \tilde{F}(\Delta_i)) = 0, \text{ и } \tilde{F}(\Delta) = \sum_{i=1}^n \tilde{F}(\Delta_i).$$

Теорема 2.2 доказана для $m = 2$. Аналогичными, но технически более сложными рассуждениями, можно установить справедливость утверждения теоремы в общем случае. $\square$

Замечание 2.1. Обозначим

$$\Delta_x = \prod_{j=1}^m [a_j, x_j], \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + A] = T, \quad a = (a_1, \dots, a_m) \in G.$$

Легко проверить, что для почти всех x все вершины прямоугольника Δ_x будут принадлежать множеству $T \cap G$. При $m = 2$ это следует из того, что согласно выбору множеств E_1 и E_2 , $|E_1| = A$, $|E_2| = A$,

$$(2.22) \quad |\{(x, y), a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap G| = A \text{ и } |\{(x, y), a_2 \leq y \leq a_2 + A\} \cap G| = A$$

для всех $y \in E_2$ и всех $x \in E_1$ соответственно.

Обозначим $F_1 = \{(x, y), x \in E_1, a_2 \leq y \leq a_2 + A\} \cap G$. Имеем $|F_1| = A^2$, следовательно, для почти всех $y \in E_2$ имеем $|\{(x, y), a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap G| = A$. Следовательно, для некоторого множества $E'_2 \subset E_2$, $|E'_2| = A$ выполняется

$$(2.23) \quad |\{(x, y), y \in E'_2, a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap F_1| = A^2.$$

Если $(x, y) \in \{(x, y), a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap F_1$, то $(x, 0) \in E_1$ и $(0, y) \in E_2$. Следовательно, для почти всех (x, y) все вершины прямоугольника $[a_1, x] \times [a_2, y]$ будут принадлежать множеству G . Напомним, что $(a_1, a_2) \in G$. Таким образом, для почти всех (x, y) имеем $\tilde{F}(\Delta_{xy}) = \Delta_{xy} F$, $a_1 \leq x \leq a_1 + A$, $a_2 \leq y \leq a_2 + A$.

Итак в общем случае имеем

$$\tilde{F}(\Delta_x) = \Delta_x F \quad \text{для почти всех } x = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + A].$$

Теорема 2.3. Пусть $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция определена на R_m , такая, что для каждого $t \in E_0$, где E_0 некоторое измеримое множество положительной меры, функция $F(x+t)$, как функция от x локально абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети $\{(p_1 \cdot 2^{-k_1}, p_2 \cdot 2^{-k_2}, \dots, p_m \cdot 2^{-k_m})\}$. Пусть далее G множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$. Тогда для любого натурального N существуют точка $a = (a_1, \dots, a_m) \in G$ и функция сегмента $\tilde{F}(\Delta)$ определенная для всех $\Delta \subset T_a = \prod [a_j, a_j + N]$, такие, что

1) $\tilde{F}(\Delta)$, аддитивна и абсолютно непрерывна

2) $\tilde{F}(\Delta) = \Delta F$, если вершины Δ принадлежат множеству $G \cap T_a$

3) $\tilde{F}(\Delta_x) = \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_m}^{x_m} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 \dots du_m$ для всех $x = (x_1, \dots, x_m) \in T_a$, где $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ интегрируемая на T_a функция.

Доказательство. По теореме 2.1 функция $F(x)$ будет абсолютно непрерывной по Витали на множестве $G \cap T_a$, а по теореме 2.2 существует функция сегмента $\tilde{F}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Докажем выполнение условия 3).

Для простоты обозначений будем считать, что $a = (a_1, \dots, a_m)$ совпадает с началом координат. Для данного натурального k куб $[0, N]^m$ представляется как объединение попарно непересекающихся кубов $\Delta_k(\nu)$, $1 \leq \nu \leq N \cdot 2^{km}$

$$[0, N]^m = \bigcup_{\nu=1}^{N \cdot 2^{km}} \Delta_k(\nu), \quad |\Delta_k(\nu)| = 1/2^{km}.$$

Определим для k кусочно постоянную на $[0, N]^m$ функцию

$$(2.24) \quad \Phi_k(x) = \frac{\tilde{F}(\Delta_k(\nu))}{|\Delta_k(\nu)|}, \quad x \in \Delta_k(\nu).$$

Из аддитивности функции $\tilde{F}(\Delta)$ и из (1.50) следует, что последовательность $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является мартингальной последовательностью, а из абсолютной непрерывности $\tilde{F}(\Delta)$ следует, что $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является равномерно абсолютно непрерывно интегрируемой мартингальной последовательностью. Поэтому [2] существует интегрируемая на $[0, N]^m$ функция $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, такая что $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\varphi(x)$ почти всюду и в метрике L_1 на $[0, N]^m$. Итак

$$(2.25) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^N \dots \int_0^N |\Phi_k(x) - \varphi(x)| dx = 0.$$

Если $x = (x_1, \dots, x_m) = (p_1/2^{k_1}, \dots, p_m/2^{k_m})$ точка с двоично рациональными координатами, то из мартингального свойства последовательности $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и из (1.51) следует, что для некоторого k_0 , если $k > k_0$, то

$$\bar{F}(\Delta_x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m.$$

В силу абсолютной непрерывности $\bar{F}(\Delta)$ имеем

$$\rho_2(\bar{F}(\Delta_x), \bar{F}(\Delta_y)) \rightarrow 0 \text{ при } |x - y| = \sum |x_j - y_j| \rightarrow 0,$$

а в силу интегрируемости $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ имеем

$$\left| \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m - \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m \right| \rightarrow 0$$

при $|x - y| \rightarrow 0$. Следовательно равенство (2.23) выполняется также для всех $x \in [0, 1]^N$, так как двоично рациональные точки всюду плотны на $[0, N]^m$. $\square$

3. ПРИЗНАКИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Приведем некоторые обозначения и вспомогательные результаты. Рассматриваются кратные тригонометрические ряды

$$(3.1) \quad \sum c_n e^{2\pi i n x},$$

где $n = (n_1, \dots, n_m)$ n_j -целые, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $t = (t_1, \dots, t_m)$ элементы R_m , $n x = \sum n_j x_j$, $c_n = \bar{c}_{-n}$. Предполагается, что выполнено одно из следующих условий

$$|c_n| \leq M \text{ при любом } n$$

или

$$A_2) \quad |c_n| \leq M \text{ при любом } n$$

и для некоторых фиксированных индексов j_ν , $j_\nu \leq m$, $1 \leq \nu \leq \nu_0 \leq m$ выполняется равенство

$$\lim_{n_{j_\nu} \rightarrow \infty} c_{n_1, \dots, n_{j_\nu-1}, n_{j_\nu}, \dots, n_m} = 0$$

для всех фиксированных n_j , $j \neq j_\nu$.

Формальным интегрированием ряда (3.1), получаем

$$(3.2) \quad F(x) = c + c_0 \prod_{j=1}^m x_j + \sum_B \prod_{j \in B} x_j \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B)x}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} + \sum_n' \frac{c_n e^{2\pi i n x}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j},$$

где $B \subset \{1, 2, \dots, m\}$ непустые подмножества, $B \neq \{1, 2, \dots, m\}$ и $n(B)$ вектор с целочисленными координатами, для которого $n_j = 0$ при $j \in B$ и $n_j \neq 0$ при $j \notin B$. Считается, что в сумме $\sum'$ все координаты вектора $n = (n_1 \dots n_m)$ отличны от нуля. Из условия $|a_n| \leq M$ при любом $n = 1, 2, \dots$, следует, что сумма $F(x)$ определена почти всюду на R_m , так как ряд (2.2) сходится в метрике L_2 на любом конечном кубе. Следовательно значения $F(x+t)$, определены для всех $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ координаты которых двоично рациональные числа, одновременно для всех t , принадлежащих некоторому множеству E , где $|R \setminus E| = 0$.

Для ограниченной области Q из R_m , содержащей одновременно n и $-n$, положим

$$S_Q(x) = \sum_{n \in Q} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Сферические частичные суммы ряда (3.1) определяются равенствами

$$S_R(x) = \sum_{\|n\| \leq R} c_n e^{2\pi i n x}, \quad \|n\|^2 = \sum |n_j|^2,$$

Если $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ где ν_j натуральные, то выражение

$$S_\nu(x) = \sum_{|n| \leq \nu} c_n e^{2\pi i n x},$$

где $|n| \leq \nu$ означает $|n_j| \leq \nu_j$, $1 \leq j \leq m$, называются прямоугольными частными суммами ряда (3.1). Когда $\nu = (N, \dots, N)$, обозначаем через

$$S_N(x) = \sum_{|n| \leq \nu = (N, \dots, N)} c_n e^{2\pi i n x}$$

кубические частичные суммы ряда (3.1).

Из (3.2) следуют

$$\begin{aligned} F(x+t) &= c + c_0 \prod_{j=1}^m (x_j + t_j) + \sum_B \left[\prod_{j \in B} (x_j + t_j) \right] \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} e^{2\pi i n(B)x} e^{2\pi i n(B)t} + \\ &+ \sum_n' \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i n t} \\ \Delta_k^p F(x+t) &= c_0 2^{-k m} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B)t}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} + \\ (3.3) \quad &+ \sum_n' \frac{c_n e^{2\pi i n t}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}, \end{aligned}$$

где

$$(3.4) \quad \Delta_k^p = \prod_{j=1}^m \left[\frac{p_j - 1}{2^k}, \frac{p_j}{2^k} \right), \quad \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} = e^{2\pi i n_j p_j 2^{-k}} - e^{2\pi i n_j (p_j - 1) 2^{-k}}.$$

Имеем

$$(3.5) \quad \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t) dx = c_0 2^{-km} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{|n(B)| \leq N} \frac{c_n(B) e^{2\pi i n(B)t}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} + \\ + \sum_{|n| \leq N} \frac{c_n e^{2\pi i n t}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}$$

В равенствах (3.3) – (3.5), $|B|$ означает число элементов множества B . Заметим также, что для почти всех t , величина $\Delta_k^p F(x+t)$ является аддитивной функцией сегмента, определенной на сегментах Δ_k^p , $k = 1, 2, \dots$; $p = (p_1 \dots p_m)$, p_j – целые. Имеем для фиксированного k $[0, 1]^m = \bigcup_p \Delta_k^p$, $1 \leq p_j \leq 2^k$.

Рассматриваются кусочно постоянные функции

$$\psi_k(x, t) = \Delta_k^p F(x+t), \quad \psi_k^{(N)}(x, t) = \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t) dx, \quad x \in \Delta_k^p$$

$$(3.6) \quad \Phi_k(x, t) = 2^{-km} \psi_k(x, t), \quad \Phi_k^{(N)}(x, t) = 2^{-km} \psi_k^{(N)}(x, t), \quad x \in \Delta_k^p.$$

Из (3.3), (3.4) и из ограниченности коэффициентов c_n следует, что для любого m -мерного куба T , $|T| = 1$ и для любого фиксированного Δ_k^p выполняются равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_T |\Phi_k^{(N)}(x, t) - \Phi_k(x, t)|^2 dt = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_T |\psi_k(x, t) - \psi_k^{(N)}(x, t)|^2 dt = 0.$$

Определение 3.1. Будем говорить, что ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t) \chi_{\mu}(x)$ по кратной системе Хаара, соответствует тригонометрическому ряду (2.1), если в метрике $L_2(T)$ выполняется условие

$$a_{\mu}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_T S_N(x+t) \chi_{\mu}(x) dx.$$

Существование предела немедленно следует из ограниченности коэффициентов c_n (см. [3]).

Следующая лемма доказана в работе [3].

Лемма 3.1. *Существует множество $E_0 \subset T$, $|E_0| = |T| = 1$ такое, что*

$$(3.7) \quad \sum_{\mu \leq 2^h} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x, t), \quad \forall t \in E_0, \quad \forall x \in \Delta_k^p \subset [0, 1]^m.$$

Отметим, что утверждение леммы немедленно следует из равенства

$$\sum_{\mu \leq 2^h} a_\mu^{(N)}(t) \chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t) dx, \quad x \in \Delta_k^p,$$

где

$$a_\mu^{(N)}(t) = \int_T S_N(x+t) \chi_\mu(x) dx,$$

переходом к пределу при $N \rightarrow \infty$ в метрике L_2 , именно

$$\sum_{\mu \leq 2^h} a_\mu(t) \chi_\mu(x) \stackrel{L_2}{\rightarrow} \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_k^{(N)}(x, t) = \Phi_k(x, t), \quad \forall x \in \Delta_k^p,$$

откуда следует (3.7).

Замечание 3.1. *Так как в формулировке леммы 3.1, T -произвольный куб, где $|T| = 1$, то можно считать, что коэффициенты $a_\mu(t)$ определены для почти всех $t \in R_m$ и что равенство (3.7) выполнено для почти всех $t \in R_m$.*

Лемма 3.2. *Пусть T , $|T| = 1$ произвольный куб и для некоторого множества $E \subset T$, $|E| = |T|$ выполнено условие: если $t \in E$, то ряд $\sum_\mu a_\mu(t) \chi_\mu(x)$, соответствующий ряду (3.1) является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $T_0 = [0, 1]^m$ функции $f_t(x)$. Тогда функция $F(x)$, определенная равенством (3.2) локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали.*

Доказательство. Из (3.7) и из условия леммы следует, что для каждого $t \in E$ имеем

$$\sum_{\mu \leq 2^h} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x, t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} f_t(u) du, \quad x \in \Delta_k^p, \quad \Delta_k^p \subset [0, 1]^m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как

$$\Phi_k(x, t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} \quad \text{и} \quad \Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f_t(u) du,$$

то функция $F(x+t)$, как функция от x абсолютно непрерывна по Витали на множестве сегментов $\{\Delta_k^p\}$.

В силу произвольности множества T , из теоремы 2.1 следует, что функция $F(x)$ будет абсолютно непрерывной на множестве $G \cap Q$, где G -множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$ и $Q \subset R_m$ любая ограниченная область. Так как $|R \setminus G| = 0$, то лемма доказана. $\square$

Замечание 3.2. Так как функция $\phi_k(x, t)$ периодична относительно t , легко видеть, что утверждение леммы верно также при предположении, что ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in [0, 1]^m$ является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f_t(x)$.

Теорема 3.1. Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье интегрируемой на $[0, 1]^m$ периодической функции $\varphi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы сумма $F(x)$ ряда (3.2) была почти всюду локально абсолютно непрерывной по Витали.

Достаточность. В силу теоремы 2.3 существуют точка $a = (a_1, \dots, a_m)$, интегрируемая на $T_a = \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + 2]$ функция $\varphi(u)$ и абсолютно непрерывная аддитивная функция сегмента $\tilde{F}(\Delta)$, $\Delta \subset \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + 2]$, такие, что $\tilde{F}(\Delta) = \Delta F(x)$, если все вершины Δ принадлежат $G \cap T_a$, $|R_m \setminus G| = 0$ и для любого $x \in [0, 2]^m$

$$\tilde{F}(\Delta_x) = \int_{\Delta_x} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m.$$

Рассмотрим кусочно постоянные на $[0, 1]^m$ функции

$$\Phi_k(x, t) = \frac{\tilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|}, \quad x \in \Delta_k^p, \quad \bigcup_p \Delta_k^p = [0, 1]^m, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где Δ_k^p попарно не пересекаются. Имеем

$$\frac{\tilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p(t)} \varphi(u) du.$$

Легко видеть, что для почти всех $t \in [0, 1]^m$, вершины кубов $\Delta_k^p(t)$ будут принадлежать множеству $G \cap [0, 2]^m$. Поэтому если $\Delta_k^p = \prod_{j=1}^m [\frac{p_j-1}{2^k}, \frac{p_j}{2^k}]$, то для почти всех $t \in [0, 1]^m$

$$\frac{\tilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|} = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\frac{p_1-1}{2^k}+t_1}^{\frac{p_1}{2^k}+t_1} \dots \int_{\frac{p_m-1}{2^k}+t_m}^{\frac{p_m}{2^k}+t_m} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 \dots du_m.$$

Следовательно для почти всех $t \in [0, 1]^m$

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x, t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} \varphi(x+t) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это означает, что соответствующий ряду (3.1) ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ для почти всех $t \in [0, 1]^m$ является рядом Фурье функции $\varphi(x+t)$. В силу теоремы 1.1 работы [3], ряд (3.1) будет рядом Фурье функции $\varphi(x)$.

Необходимость. Если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $\varphi(x)$ то согласно леммы 1.3 работы [3] для почти всех $t \in [0, 1]^m$ имеет место равенство

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} \varphi(x+t) dx, \quad x \in \Delta_k^p.$$

Таким образом, для почти всех $t \in [0, 1]^m$ функция $F(x+t)$ абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети сегментов $\{\Delta_k^p\}$. Следовательно по теореме 2.1 (см. также замечание 3.2) функция $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали. $\square$

Следующая теорема, эквивалентна теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ обладал следующим свойством: Для каждого $t \in E$ где $E \subset [0, 1]^m$ некоторое множество полной меры $|E| = |[0, 1]^m|$, этот ряд являлся рядом Фурье некоторой интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f_t(u)$.*

Доказательство. **Необходимость** следует из леммы 1.3 работы [3], согласно которой если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$ то для почти всех t

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx,$$

и следовательно, имеем

$$\sum_{\mu \leq 2^h} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} f(u+t) du, \quad x \in \Delta_k^p.$$

Это означает, что для почти всех $t \in [0, 1]^m$ ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции.

Достаточность. Пусть для каждого $t \in E$, $E \subset [0, 1]^m$, $|E| = |[0, 1]^m|$ ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f_t(u)$. Тогда для всех $t \in E$ имеем

$$\sum_{\mu \leq 2^h} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} f_t(u) du \quad \forall x \in \Delta_k^p$$

Так как

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} \quad x \in \Delta_k^p \text{ и } \Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f_t(u) du$$

то $F(x+t)$ для каждого $t \in E$ является абсолютно непрерывной функцией по Витали на двоичной сети интервалов $\{\Delta_k^p\}$. Тогда в силу теоремы 2.1 (см. также замечание 3.2), $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной функцией. Для завершения доказательства заметим, что по теореме 3.1 ряд (3.1) будет рядом Фурье. $\square$

$\square$

Теорема 3.2 является усилением следующей теоремы.

Теорема 3.3 (3). *Для того, чтобы ряд $\sum c_n e^{2\pi i n x}$, $|c_n| \leq M$ был рядом Фурье интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему ряд $\sum_{\mu} a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in [0, 1]^m$ был рядом Фурье функции $f(x+t)$.*

В доказательствах следующих теорем используются некоторые результаты работы [3]. Для полноты изложения приводим некоторые обозначения и формулировки нужных нам результатов из [3].

Для последовательности областей $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_\nu \subset \dots$, $\cup Q_\nu = R_m$, обозначим через $\Phi_k^{Q_\nu}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$; $t \in [0, 1]^m$ кусочно постоянные функции

$$\Phi_k^{Q_\nu}(x, t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{Q_\nu}(u+t) du, \quad x \in \Delta_k^p,$$

где $\bigcup_p \Delta_k^p = [0, 1]^m$ и кубы Δ_k^p попарно не пересекаются.

Заметим что для фиксированного k имеет место равенство

$$(3.8) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{T_m} |\Phi_k(x, t) - \Phi_k^{Q_\nu}(x, t)|^2 dt = 0,$$

где $\Phi_k(x, t)$ функция определенная равенством (3.6).

Каждой точке $x \in [0, 1]^m$ соответствует ограниченное число последовательностей вложенных кубов $\Delta_1^{p(1)} \supset \Delta_2^{p(2)} \supset \dots \supset \Delta_k^{p(k)} \supset \dots$ таких что $x \in \overline{\Delta_k^p} \forall k$, где $\overline{\Delta_k^p}$ замыкание куба Δ_k^p .

Заметим, что из (3.8) следует существование последовательности $Q_{\nu_1} \subset Q_{\nu_2} \subset \dots \subset Q_{\nu_k} \subset \dots$ для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k(x, t) - \Phi_{\nu_k}^{Q_{\nu_k}}(x, t)| = 0$$

для всех $x \in [0, 1]^m$, и для каждого t принадлежащего некоторому множеству $E_0 \in [0, 1]^m$, $|E_0| = |[0, 1]^m| = |T_m|$. При этом значениями функций $\Phi_k(x, t)$ или $\Phi_k^{Q_{\nu_k}}(x, t)$ в точке x считаются значения этих функций на кубах $\Delta_k^{p(k)}$.

Следующее определение приведено в работе [3].

Определение 3.2. Будем говорить, что ряд $\sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{\mu}(x)$ по кратной системе Хаара обладает свойством A_1 относительно переменной x_j если

$A_1)$ существует последовательность $k(q) \uparrow +\infty$ при $q \uparrow +\infty$, такая, что если $2^{K(q)} \leq \mu_{j(q)} \leq 2^{K(q)+1}$ для всех $q=1, 2, \dots$, то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|a_{\mu_1, \dots, \mu_{j(q)-1}, \mu_{j(q)}, \dots, \mu_m}|}{\max_{\chi_{\mu_{j(q)}}(x_{j(q)})} |x_{j(q)}|} = 0$$

для любых фиксированных индексов $\mu_i, i \neq j(q)$.

Теорема 3.4 (3). Пусть $j_{\nu}, 1 \leq \nu < \nu_0, \nu_0 \leq m$, фиксированные индексы и ряд $\sum a_{\mu} \chi_{\mu}(x)$ удовлетворяет условию $A_1)$ относительно каждой переменной $x_{j_{\nu}}$. Пусть, далее некоторая последовательность $A_{l(q)}(x), l_q \uparrow \infty$ прямоугольных частичных сумм этого ряда сходится по мере на $[0, 1]^m$ к интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f(x)$ и

$$\sup_{l(q)} |A_{l(q)}(x)| < +\infty$$

для всех x , кроме быть может, точек принадлежащих объединению счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям $x_{j_{\nu}}, 1 \leq \nu \leq \nu_0$. Тогда этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

Теорема 3.5 (3). Если тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условию $A_2)$ для некоторой переменной x_j , то соответствующий ему ряд $\sum a_{\mu}(t) \chi_{\mu}(x)$ для каждого t принадлежащего некоторому множеству $E_0 \subset [0, 1]^m, |E_0| = |[0, 1]^m|$, обладает свойством $A_1)$ для той же переменной x_j .

Очевидно, отсюда следует:

Если тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством $A_2)$ для переменных $x_{j_{\nu}}, 1 \leq \nu \leq \nu_0$, то соответствующий ему ряд $\sum a_{\mu}(t) \chi_{\mu}(x)$ обладает свойством $A_1)$ относительно тех же переменных $x_{j_{\nu}}$ для почти всех $t \in [0, 1]^m$.

Из приведенных теорем 2.1 и 3.4 работы [3] немедленно следует утверждение.

Теорема 3.6. Пусть тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством $A_2)$ для переменных $x_{j_{\nu}}, 1 \leq \nu \leq \nu_0 \leq m$ и некоторая последовательность $\sum_{\mu \leq 2^{k_q}} a_{\mu}(t) \chi_{\mu}(x)$ где $k_q \uparrow +\infty$ при $q \rightarrow \infty$, частичных сумм соответствующего ему ряда $\sum a_{\mu}(t) \chi_{\mu}(x)$ для почти всех $t \in [0, 1]^m$ обладает свойствами

а) $\sum_{\mu \leq 2^{k_q}} a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ сходится по мере при $q \rightarrow \infty$ к некоторой интегрируемой на $[0, 1]^m$ функции $f_t(x)$

б) $\sup_q |\sum_{\mu \leq 2^{k_q}} a_\mu(t) \chi_\mu(x)| < \infty$ для всех x не принадлежащих объединению E_t счетного числа гиперплоскостей, ортогональных осям x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$.

Тогда ряд $\sum_\mu a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функции $f_t(x)$ для каждого $t \in E_0$, где $E_0 \subset [0, 1]^m$, $|E_0| = |[0, 1]^m|$.

В доказательствах последующих теорем пользуемся теоремами 3.2, 3.3 и мартингальными свойствами кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара.

Теорема 3.7. Пусть тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством A_2) и некоторая последовательность $S_{Q_\nu}(x)$, где $Q_1 \subset \dots \subset Q_\nu \subset \dots \cup Q_\nu = R_m$, этого ряда имеет интегрируемую нижнюю мажоранту, т.е.

$$(3.9) \quad S_{Q_\nu}(x) \geq \varphi(x), \quad \forall x, \nu,$$

где $\varphi(x)$ интегрируемая на $[0, 1]^m$ периодическая функция. Пусть, далее, некоторая последовательность $\sum_{\mu \leq 2^{k_q}} a_\mu(t) \chi_\mu(x)$, $k_q \uparrow +\infty$ при $q \uparrow +\infty$, частных сумм $\sum_\mu a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ соответствующих ряду (3.1) удовлетворяет неравенству

$$(3.10) \quad \sup_q \left| \sum_{\mu \leq 2^{k_q}} a_\mu(t) \chi_\mu(x) \right| < \infty$$

для почти всех $t \in [0, 1]^m$ и для всех x , не принадлежащих объединению E_t счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0 \leq m$. Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье.

Доказательство. Рассмотрим последовательности кусочно постоянных на $[0, 1]^m$ функций

$$B_k(x, t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} \varphi(u + t) du, \quad x \in \Delta_k^p$$

и

$$\Phi_k^{Q_\nu}(x, t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{Q_\nu}(u + t) du, \quad x \in \Delta_k^p, \nu = 1, 2, \dots$$

Из (2.28) следует, что для фиксированного k имеем, что при любых x и t

$$(3.11) \quad B_k(x, t) \leq \Phi_k^{Q_\nu}(x, t), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Из (3.8) следует, что для некоторой последовательности $Q_{\nu(l)}, \nu(l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ выполняется

$$(3.12) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_k^{Q_{\nu(l)}}(x, t) = \Phi_k(x, t)$$

для всех x , и для каждого $t \in E_0$ где $E_0 \subset T_m$ некоторое множество полной меры.

Если $\sum_{\mu} b_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ ряд Фурье по кратной системе Хаара функции $\varphi(x+t)$ и ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ соответствующий ряду (3.1) ряд по кратной системе Хаара, то из (3.10) и (3.11) следует, что для почти всех $t \in T_m$ имеем

$$(3.13) \quad \sum_{\mu \leq 2^k} b_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x) \leq \sum_{\mu \leq 2^k} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x),$$

для всех k и x . Обозначим

$$D_k(x, t) = \sum_{\mu \leq 2^k} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x) - \sum_{\mu \leq 2^k} b_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x) = \sum_{\mu \leq 2^k} (a_{\mu}(t) - b_{\mu}(t))\chi_{\mu}(x).$$

Имеем $D_k(x, t) \geq 0$ для почти всех t . Так как для почти всех x , $D_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$, является регулярной мартингальной последовательностью, то [4] или [5] стр. 24 для почти всех t существует предел

$$(3.14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x, t) = \psi_t(x) \text{ для почти всех } x \in T_m,$$

где $\psi_t(x)$ почти везде конечная на $x \in T_m$, измеримая функция.

Так как $D_k(x, t) \geq 0$ для почти всех x , и для всех $t \in E_0$, где $E_0 \subset T_m$, $|E_0| = |T_m|$ и, с другой стороны,

$$\int_{T_m} D_k(x, t) dx \leq M, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то по теореме Фату $\psi_t(x)$ интегрируема на T_m для почти всех t . Но ряд $\sum_{\mu} b_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ для почти всех $t \in T_m$, сходится к интегрируемой функции $\phi(x+t)$ для почти всех x , поэтому ряд $\sum_{\mu} a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ для почти всех t будет сходиться к некоторой интегрируемой функции $f_t(x)$ для почти всех $x \in T_m$.

Так как по условию теоремы ряд (3.1) обладает свойством A_2) относительно переменных $x_{j\nu}$, то из сформулированной выше теоремы 2.1 работы [3] следует, что ряд $\sum a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ для каждого фиксированного $t \in E_0$, $E_0 \subset T_m$, $|E_0| = |T_m|$, будет обладать свойством A_1) для тех же переменных $x_{j\nu}$.

Из условия (3.9) и из теоремы 3.3 следует, что ряд $\sum a_{\mu}(t)\chi_{\mu}(x)$ является рядом Фурье функций $f_t(x)$, для почти всех $t \in T_m$. Отсюда, согласно теореме 3.2, ряд (3.1) является рядом Фурье. $\square$

Следующее утверждение следует из теоремы 3.7.

Теорема 3.8. Пусть тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условию A_2) и для некоторой последовательности $S_{Q_{\nu}}(x)$, $Q_1 \subset \dots \subset Q_{\nu}, \dots, \cup Q_{\nu} = R_m$ его

частичных сумм выполняется

$$\varphi(x) \leq S_{Q_n}(x),$$

где $\varphi(x)$ интегрируемая на T_m периодическая функция. Пусть, далее для почти всех t выполняется условие:

для всех x не принадлежащих объединению E_k счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к осям x_j , имеет место неравенство

$$\sup_k \left| \frac{1}{|\Delta_k^{p(k)}|} \int_{\Delta_k^{p(k)}} S_{2^{\alpha m k}}(u+t) du \right| < \infty$$

где $\Delta_1^{p(1)} \supset \Delta_2^{p(2)} \supset \dots \supset \Delta_k^{p(k)} \supset \dots$ вложенные кубы $x \in \bigcap \overline{\Delta_k^{p(k)}}$ и

$$S_{2^{\alpha m k}}(x+t) = \sum_{|n| \leq 2^{\alpha m k}} c_n e^{2\pi i n(x+t)}, \alpha > 3$$

кубические частичные суммы ряда (3.1). Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье.

Доказательство. В силу ограниченности коэффициентов c_n легко посчитать, что имеет место оценка (см. [3])

$$\int_{T_m} \left| \frac{\Delta_k^p F(u+t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{2^{\alpha m k}}(u+t) du \right|^2 dt \leq C 2^{-mk} 2^{-\varepsilon m k}, \varepsilon > 0$$

Из (3.12), так как

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{\Delta_k^p}, x \in \Delta_k^p$$

следует (см. [3], стр. 95, неравенство (3.27)),

$$(3.15) \quad \int_{T_m} \left| \sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) - \Phi_k^{2^{\alpha m k}}(u+t) \right|^2 dt < C 2^{-\varepsilon m k}.$$

Отсюда следует, что для почти всех t , и для всех $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta_k^{p(k)}}$, $\Delta_k^{p(k)}$ — вложенные интервалы, имеем (см. [3], равенство (3.28))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{2^{\alpha m k}}(u+t) du \right| = 0, \alpha > 3$$

это означает, что если $\sup_k \left| \frac{1}{|\Delta_k^{p(k)}|} \int_{\Delta_k^{p(k)}} S_{2^{\alpha m k}}(u+t) dt \right| < M$, то выполняется также условие (3.9) теоремы 3.4. $\square$

Аналогичные теореме 3.8 утверждения верны также если кубические суммы $S_{2^{\alpha m k}}$ заменить сферическими или другими частичными суммами $S_{Q_k}(x)$ с соответствующими оценками возрастания диаметров областей Q_k .

4. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И УСИЛЕНИЯ ИЗВЕСТНЫХ ПРИЗНАКОВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Известны (см. [6], стр. 232, теорема 5.2 и [7], стр. 471, теорема 3.18) следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Для того, чтобы тригонометрический ряд*

$$(4.1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x)$$

был рядом Фурье необходимо и достаточно, чтобы функции

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

были равномерно абсолютно непрерывны на $[0, 2\pi]$, где $\sigma_n(t), (c, 1)$ средние ряда (4.1).

Теорема 4.2. *Для того, чтобы кратный тригонометрический ряд*

$$(4.2) \quad \sum c_n e^{inx}, n = (n_1, \dots, n_m), x = (x_1, \dots, x_m), nx = \sum n_j x_j$$

был рядом Фурье-Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{Q_0} |\sigma_n(x)| dx < M, \forall n,$$

где $Q_0 = [-\pi, \pi]^m, \sigma_n(x)$ кратные $(c, 1)$ средние ряда (4.2).

В доказательствах этих теорем использован принцип выбора Хелли, в одномерном и соответственно, в многомерном случаях. Из формулировки теоремы II легко следует, что равномерно абсолютная непрерывность функций $F_n(x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} \sigma_n(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$ достаточно для того, чтобы кратный ряд (4.2) был рядом Фурье. Отметим, однако, что доказательство теоремы 4.2 приведенное в [7] не полное, так как четко не сформулирован принцип выбора Хелли в многомерном случае и, кроме того, изложение применения этого принципа не полное.

Применение мартингалных свойств последовательностей кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара позволяет, при предположении ограниченности коэффициентов, распространить теорему 4.1 на многомерный случай в несколько усиленной формулировке.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{\nu \leq N} S_{\nu}(x), S_{\nu}(x) = \sum_{|n| < \nu} c_n e^{2\pi i n x}$$

последовательность кубических (с,1) средних ряда (3.1), где $|c_n| \leq M$. Для того, чтобы ряд (3.1) был рядом Фурье необходимо и достаточно, чтобы для некоторых последовательностей $N_k \uparrow +\infty$, $\eta_k \downarrow 0$, $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$ и некоторой последовательности множеств E_k выполнялись условия

$$(4.3) \quad i) \quad E_k \subset T_m, |E_k| > |T_m| - \eta_k, \eta_k > 0, \sum \eta_k < \infty$$

ii) Если $\Delta_k^{p(j)}$, конечное число попарно не пересекающихся кубов ранга k и $\sum_j |\Delta_k^{p(j)}| < \delta_k$, то

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} \sigma_{N_k}(x+t) dx \right| < \varepsilon_k, \forall t \in E_k.$$

В доказательстве теоремы 4.3 используется следующее утверждение.

Лемма 4.1. Если коэффициенты ряда (3.1) ограничены, то для всех Δ_k^p

$$(4.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_n(u+t) du - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0$$

и если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то

$$(4.5) \quad \Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(u+t) dt \text{ для почти всех } t \text{ и для всех } \Delta_k^p.$$

Эта лемма фактически доказана в работе [3]. Для полноты изложения приведем доказательство.

Доказательство. Известно [7], что $\sigma_\nu(x+t)$ сходятся в метрике $L_1(T_m)$ к $f(x+t)$ если ряд (3.1) является рядом Фурье этой функции. Следовательно, для всех $t \in T_m$ и для всех Δ_k^p , будем иметь

$$(4.6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx.$$

В равенстве

$$\int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{\nu \leq N} \int_{\Delta_k^p} S_\nu(x+t) dx$$

правая часть представляет (с,1) средние прямоугольных частичных сумм ряда (2.8) сумма которого в метрике L_2 на $\{t; t \in T_m\}$ равна $\Delta_k^p F(x+t)$.

Так как все прямоугольные частичные суммы этого ряда в метрике L_2 равномерно ограниченные, то, как легко видеть (см. [8]), выполняется равенство

$$(4.7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0.$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что если ряд (3.1) является рядом Фурье, то для почти всех t выполняется равенство (4.4). $\square$

Доказательство Теоремы 4.3. Необходимость. Пусть (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$. Из равенств (4.3) и (4.5) следует, что для любых последовательностей $\alpha_k \downarrow 0$, $\eta_k \downarrow 0$ таких, что

$$\alpha_k 2^{mk} \downarrow 0, k \rightarrow \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$$

можно выбрать последовательность $N_k \uparrow \infty$ и множества E_k такие, что $E_k \subset T_m$, $|E_k| > |T_m| - \eta_k$ и выполнены условия

$$(4.8) \quad \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_{N_k}(x+t) dx - \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx \right| < \alpha_k 2^{mk}$$

для всех кубов Δ_k^p ранга k и для всех $t \in E_k$. Очевидно, что если $\delta_k \downarrow 0$ и $\Delta_k^{p(j)}$, конечное число попарно не пересекающихся куба ранга k , где

$$(4.9) \quad \left| \bigcup_j \Delta_k^{p(j)} \right| < \delta_k,$$

то для некоторых $\beta_k \downarrow 0$ будем иметь

$$(4.10) \quad \left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} f(x+t) dx \right| < \beta_k$$

для всех $t \in E_k$ и для всех множеств $\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}$ удовлетворяющих условию (4.8). Из неравенств (4.7) и (4.9) следует

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} \sigma_{N_k}(x+t) dx \right| \leq \alpha_k 2^{mk} + \left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} f(x+t) dx \right| \leq \alpha_k 2^{mk} + \beta_k$$

для всех $t \in E_k$. Обозначая $\varepsilon_k = \alpha_k 2^{mk} + \beta_k$ имеем $\varepsilon_k \downarrow 0$. Последовательности $\varepsilon_k, \delta_k, \eta_k, N_k$, и E_k удовлетворяют условиям теоремы 4.3. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда из равенства (4.3) следует существование подпоследовательностей $\{\varepsilon_{k(l)}\} \subset \{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_{k(l)}\} \subset \{\delta_k\}$, $\{\eta_{k(l)}\} \subset \{\eta_k\}$, $\{\sigma_{N_{k(l)}}(x+t)\} \subset \{\sigma_{N_k}(x+t)\}$ и множеств $\{E'_{k(l)}\} \subset T_m$ таких, что выполняются условия

$$|E'_{k(l)}| > |T_m| - \eta_{k(l)}, \quad \sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)} F(x+t)| < \varepsilon_{k(l)},$$

для всех $t \in E'_{k(l)}$ и для любых конечного числа попарно не пересекающихся кубов ранга $k(l)$, для которых

$$\sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)}| < \delta_{k(l)}.$$

Обозначим $A_{k(l)} = E'_{k(l)} \cap E_k$. Имеем $A_{k(l)} \subset T_m$, $|A_{k(l)}| > |T_{k(l)}| - (\eta_{k(l)} + \eta_k)$. Следовательно, если

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} A_{k(l)}, \text{ то } E \subset T_m, |E| = T_m.$$

Тогда для любого $t \in E$ существует $l_0(t)$, такое, что для всех $l > l_0(t)$ имеем

$$\sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)} F(x+t)| < \varepsilon_{k(l)},$$

если $\Delta_{k(l)}^{p(j)}$ — конечное число попарно не пересекающихся кубов ранга $k(l)$ и $\sum |\Delta_{k(l)}^{p(j)}| < \delta_{k(l)}$.

Легко видеть, что из последних двух неравенств следует локальная абсолютная непрерывность по Витали функции $F(x+t)$ на двоичной сети кубов $\{\Delta_k^p\}$ для почти всех $t \in T_m$. Тогда по теореме 2.1 функция $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали и по теореме 3.1 ряд (3.1) будет рядом Фурье. $\square$

Утверждение теоремы верно для всех многомерных методов суммирования, обладающих тем свойством, что если все прямоугольные частичные суммы сходящегося по Прингсгейму тригонометрического ряда равномерно ограничены, то он суммируется этим методом к той же сумме. В частности верно следующее утверждение.

Теорема 4.4. Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы некоторая последовательность $\{S_{Q_k(x)}\}$ его частичных сумм, где $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots, \bigcup Q_k = R_m$, обладала следующим свойством: Существуют последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0, \delta_k \downarrow 0, \eta_k \downarrow 0$ и множества $E_k \subset T_m$ такие, что

$$|E_k| > |T_m| - \eta_k, \quad \sum \eta_k < \infty$$

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} S_{Q_k}(x+t) dx \right| < \varepsilon_k, \quad t \in E_k,$$

если $\Delta_k^{p(j)}$ конечное число попарно непересекающихся кубов ранга k и

$$\sum_j |\Delta_k^{p(j)}| < \delta_k.$$

Это утверждение доказывается дословным повторением рассуждений доказательства теоремы 4.3, с применением леммы 4.1 и равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^r} S_{Q_t}(x+t) dx - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0.$$

Abstract. Applying some martingale properties of the sequences of cubic partial sums of series in the Haar multiple system, some integrability criterions for multiple trigonometric series are established. Some of the proved theorems improve and extend to the multiple trigonometric series the classical theorems on integrability of the one-dimensional trigonometric series, the proofs of which are based on Helly's principal of choice.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Саке, Теория интеграла, Изд. иностранной литературы, Москва (1949).
- [2] J. L. Doob, Stochastic processes (1953).
- [3] А. А. Талалян, "Дифференцирование по случайным двоичным сетям и единственность кратных ортогональных рядов", Мат. Заметки, 88, вып. 1 (2010).
- [4] S. Chow, "Convergence theorems of martingales", Z. Wahrsch und ver, Geliete, 1, 340 – 348 (1962).
- [6] R. F. Gundy, "Martingale theory and pointwise convergence of orthogonal series", Trans. Amer. Math. Soc., 124, no. 2, 228 – 248 (1966).
- [6] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, Изд. Мир, Москва (1965).
- [7] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, Изд. Мир, Москва (1965).
- [8] В. Г. Чалядзе, "Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов", Изд. Тбилисского университета, Тбилиси (1977).

Поступила 20 января 2012

ОБ ϵ -ОПТИМАЛЬНЫХ ТОЧКАХ ВЫПУКЛОЙ ЗАМКНУТОЙ ФУНКЦИИ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: protectdrive@gmail.com

Аннотация. В гильбертовом пространстве оценивается расстояние от ϵ -оптимальной точки до точки минимума для выпуклой замкнутой функции, субдифференциал которой является сильно монотонным оператором в области своего определения. Оценивается также хаусдорфово расстояние между ϵ -оптимальными точками функций Тихонова в некорректных задачах математического программирования.

MSC2010 number: 49-XX

Ключевые слова: Сильная монотонность; субдифференциал; многозначное отображение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нередко, при рассмотрении практических задач, математическими моделями которых являются задачи математического программирования, исходная информация носит приближенный характер. В таких случаях существенно следующее: зависят ли непрерывно оптимальные решения этих задач от исходных данных, иначе, будут ли искомые решения устойчивыми по отношению к возмущениям от входных данных. Кроме этого на практике при численном решении этих задач оптимальные решения определяются с некоторой точностью. Поэтому естественно было бы рассматривать вопрос устойчивости не самого оптимального решения, а рассматривать этот вопрос для так называемых ϵ -оптимальных решений.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия и определения из выпуклого и нелинейного анализа (см. [2]). Пусть X – гильбертово пространство.

Пусть $M_1, M_2 \subseteq X$. Число

$$H(M_1, M_2) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \sup_{x_1 \in M_1} \inf_{x_2 \in M_2} \|x_1 - x_2\|, \sup_{x_2 \in M_2} \inf_{x_1 \in M_1} \|x_1 - x_2\| \right\}$$

называется хаусдорфовым расстоянием между множествами M_1 и M_2 . Многозначным отображением F из X в X называется отображение, которое сопоставляет каждому $x \in X$ множество $F(x) \subset X$, называемое образом точки x при отображении F . Будем обозначать это так: $F: X \rightarrow 2^X$.

Графиком многозначного отображения $F: X \rightarrow 2^X$ называется множество

$$\text{graf}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times X / y \in F(x)\}.$$

В дальнейшем $B_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x ; $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y .

Многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^X$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$H(F(x), F(x_0)) < \varepsilon \quad \text{для любого } x \in B_\delta(x_0).$$

Будем говорить, что многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^X$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $M \subseteq X$ с постоянной $L \geq 0$, если

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in M.$$

Многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^X$ называется сильно монотонным оператором с константой $\vartheta > 0$, если существует число $\vartheta > 0$ такое, что

$$\forall (x, p) \in \text{graf}(F), (y, q) \in \text{graf}(F) \quad \langle p - q, x - y \rangle \geq \vartheta\|x - y\|^2.$$

Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства X , а f — выпуклая функция, определенная на M . Рассмотрим задачу минимизации этой функции на множестве M , т.е. задачу

$$(1.1) \quad f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in M.$$

В некоторых простых случаях удается точно решить задачу (1.1). Однако, если M задается с помощью более или менее сложной системы равенств и неравенств, то эта задача решается с некоторой точностью.

Определение 1.1. [5]. Пусть $\varepsilon > 0$. Точка $x_\varepsilon \in M$ называется ε -оптимальной точкой, если

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in M} f(x) + \varepsilon.$$

Определение 1.2. [5]. Множество

$$\partial f(x_0) = \{v \in X : f(x) - f(x_0) \geq \langle v, x - x_0 \rangle \text{ для любого } x \in M\}$$

называется субдифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in M$. Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, то f называется субдифференцируемой в точке x_0 .

Вообще говоря субдифференциал выпуклой функции f существует не во всех точках множества M . Множество всех точек субдифференцируемости функции f обозначим через $\widetilde{M}$.

Во втором параграфе уточняется место расположения множества ϵ -оптимальных решений, когда субдифференциал функции f является сильно монотонным оператором в своей области определения с некоторой константой ϑ . Доказано, что множество ϵ -оптимальных решений находится внутри шара с радиусом $4\sqrt{2\epsilon/\vartheta}$ с центром в оптимальной точке x^* .

Условие сильной монотонности субдифференциала связано с условием сильной выпуклости функции. Напомним определение сильно выпуклой функции.

Определение 1.3. [1]. Функция f , определенная на выпуклом множестве $M \subseteq X$, называется сильно выпуклой на M с константой $m > 0$, если

$$(1.2) \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - m\lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$

при всех $x_1, x_2 \in M, \lambda \in [0, 1]$.

Заметим, что если x^* — точка минимума функции f на M , то сильная выпуклость с константой m тривиально приводит к оценке $f(x) - f(x^*) \geq m\|x - x^*\|^2$ для всех $x \in M$, что в свою очередь немедленно дает оценку

$$(1.3) \quad \|x_\epsilon - x^*\| \leq \sqrt{\epsilon/m} \text{ для } x_\epsilon - \text{оптимальной точки.}$$

Если функция f сильно выпукла на выпуклом множестве M с константой m , то ее субдифференциал является сильно монотонным оператором с константой $2m$ в своей области определения (см. [5], следствие 2 леммы 9.4). Конечно здесь предполагается, что $\widetilde{M} \neq \emptyset$. Обратный факт доказан в [2] (лемма 1.19.3) при дополнительном предположении субдифференцируемости функции f во всей области M , т.е. при предположении $\widetilde{M} = M$.

Если пространство X конечномерно, то выпуклая функция f субдифференцируема во всех относительно внутренних точках множества M , т.е. на множестве $\text{int } M$ (см. [1], теорема 4.1). В бесконечномерном случае, если f — выпуклая замкнутая функция и $\text{int } M \neq \emptyset$, то $\text{int } M \subseteq \widetilde{M}$. В общем случае, из фундаментального результата принадлежащего Бренстеда и Рокафеллара следует, что множество $\widetilde{M}$ всюду плотно в M .

Теорема 1.1. [4]. Пусть f — выпуклая замкнутая (полу непрерывная снизу) функция, определенная на выпуклом замкнутом множестве $M \subseteq X$. Тогда для любой точки $\bar{x} \in M$ существует такая последовательность $x_k \in M$, что

- (1) $x_k \rightarrow \bar{x}$,
- (2) $f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$,
- (3) $\partial f(x_k) \neq \emptyset$ для всех $k \geq 1$.

Следствие 1.1. а) Если $\text{int } M \neq \emptyset$, то последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая условиям 1-3 теоремы 1.1 можно выбрать из $\text{int } M$.

б) Если X — конечномерно, то последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая условиям 1-3 теоремы 1.1 можно выбрать из $\text{ri } M$.

Докажем первое утверждение. Второе доказывается аналогично. Действительно в ходе доказательства теоремы 1.1 в [4] показано, что для любой точки $\bar{x}$ существует последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая условиям:

$$(1.4) \quad \text{существует } \bar{p} \in X \text{ такой, что } f(x_k) < f(\bar{x}) - \langle \bar{p}, \bar{x} - x_k \rangle \text{ для всех } k,$$

$$(1.5) \quad \|x_k - \bar{x}\|^2 < 1/k, \quad k \geq 1,$$

$$\partial f(x_k) \neq \emptyset \text{ для всех } k.$$

Из соотношений (1.4), (1.5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер K , что

$$(1.6) \quad f(x_k) < f(\bar{x}) + \varepsilon \text{ при } k > K.$$

Отсюда, для каждого k существует такая точка $y_k \in \text{int } M$, что

$$(1.7) \quad f(y_k) < f(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Действительно, поскольку f полу непрерывна снизу на выпуклом множестве M , то она непрерывна на $\text{int } M$. Значит,

$$(1.8) \quad \text{int epi } (f) = \{(x, \alpha) / x \in \text{int } M, f(x) < \alpha\}.$$

Из (1.6) следует, что открытое полупространство $\{(x, \mu) / x \in X, \mu < f(\bar{x}) + \varepsilon\}$ пересекается с выпуклым множеством $\text{epi } (f) \equiv \{(x, \alpha) / x \in M, f(x) \leq \alpha\}$. Значит, это полупространство должно иметь пересечение и с $\text{int epi } (f)$. Следовательно, из (1.8) следует, что существует точка $y_k \in \text{int } M$, удовлетворяющая неравенству (1.7). Теперь выберем число λ_k из интервала $(0, 1)$ таким образом, что $\|\lambda_k x_k + (1 - \lambda_k)y_k - \bar{x}\| < 1/k$. Положим $z_k = \lambda_k x_k + (1 - \lambda_k)y_k$. Очевидно, что

- (1) $f(z_k) = f(\lambda_k x_k + (1 - \lambda_k)y_k) \leq \lambda_k f(x_k) + (1 - \lambda_k)f(y_k) \leq f(\bar{x}) + \epsilon,$
- (2) $\|z_k - \bar{x}\| \leq 2/k,$
- (3) $z_k \in \text{int } M.$

Из второго неравенства немедленно следует, что $z_k \rightarrow \bar{x}$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку на множестве $\text{int } M$ функция f субдифференцируема и $z_k \in \text{int } M$, то $\partial f(z_k) \neq \emptyset$. Из первого неравенства, устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем $\limsup f(z_k) \leq f(\bar{x}) + \epsilon$. Поскольку $\epsilon > 0$ — произвольно, то

$$(1.9) \quad \limsup f(z_k) \leq f(\bar{x}).$$

С другой стороны, поскольку f полунепрерывна снизу, имеем

$$(1.10) \quad \liminf f(z_k) \geq f(\bar{x}).$$

Из (1.9), (1.10) немедленно следует, что $f(z_k) \rightarrow f(\bar{x})$.

Предложение 1.1. Пусть f — выпуклая замкнутая функция, определенная на выпуклом замкнутом подмножестве $M \subseteq X$ с $\text{int } M \neq \emptyset$. Тогда если на множестве $\text{int } M$ субдифференциал ∂f является сильно монотонным оператором с константой $\vartheta > 0$, то f сильно выпукла с константой $\vartheta/2$ на M .

Доказательство. Так как $\text{int } M$ — выпуклое множество на котором субдифференциал ∂f является сильно монотонным оператором с константой $\vartheta > 0$, то по лемме 1.19.2 [2] функция f сильно выпукла на $\text{int } M$ с константой $\vartheta/2$. Пусть теперь x_1, x_2 произвольные точки из M . По следствию 1.1 из теоремы 1.1 существуют такие последовательности и $\{x_k\}, \{y_k\}$ из $\text{int } M$, что

$$(1.11) \quad x_k \rightarrow x, f(x_k) \rightarrow f(x_1),$$

$$(1.12) \quad y_k \rightarrow y_0, f(y_k) \rightarrow f(x_2).$$

Для точек x_k и y_k имеет место неравенство (1.2), т.е. для всех $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$f(\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k) \leq \lambda f(x_k) + (1 - \lambda)f(y_k) - \frac{\vartheta}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_k - y_k\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$ с учетом соотношений (1.11), (1.12), получим

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq \liminf f(\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k) \leq \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\vartheta}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

□

Аналогично в конечномерном случае можно установить, что если ∂f сильно монотонен на $\text{ri } M$, то f сильно выпукла на M .

Резюмируя сказанное, в общем случае можно поставить следующую задачу. *Задача. Пусть f — выпуклая замкнутая функция, определенная на выпуклом замкнутом подмножестве M гильбертова пространства X . Пусть далее субдифференциал ∂f является сильно монотонным оператором в своей области определения $\widetilde{M}$. Следует ли из этих предположений условие сильной выпуклости функции f ?*

На мой взгляд на данный момент нет ответа на этот вопрос. Однако это не мешает нам получить оценку (аналогично оценки (1.3) в случае сильно выпуклой функции) для погрешности ε -оптимального решения задачи (1.1) при сильной монотонности субдифференциала ∂f .

В третьем параграфе введено понятие ε -нормального решения и доказано, что нахождение этих решений в некорректных задачах математического программирования является устойчивой задачей. Точное определение устойчивости параметризованных задач оптимизации приведено в этом параграфе.

2. ε -ТОЧКИ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ ЗАМКНУТОЙ ФУНКЦИИ С СИЛЬНО МОНОТОННЫМ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

Теорема 2.1. Пусть f — выпуклая замкнутая функция на выпуклом замкнутом множестве M гильбертова пространства X , такая, что $\inf_{x \in M} f(x) > -\infty$. Пусть субдифференциал $\partial f(x)$ как многозначное отображение является сильно монотонным оператором с константой $\vartheta > 0$ в области своего определения $\widetilde{M} \subseteq M$. Тогда существует единственная точка x^* минимума функции f на M и имеет место неравенство:

$$(2.1) \quad \|x_\varepsilon - x^*\| \leq 4\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\vartheta}} \quad \text{для всех } x_\varepsilon \in M_\varepsilon,$$

где M_ε — множество ε -оптимальных точек.

Доказательство. Пусть x_ε есть ε -оптимальная точка и для положительных ε, λ рассмотрим задачу минимизации:

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - x_\varepsilon\|^2 \rightarrow \min, \quad x \in M.$$

Известно (см. [4], теорема 9), что эта задача имеет решение y_ϵ , где f субдифференцируема и имеет место включение

$$(2.2) \quad \frac{2\epsilon}{\lambda}(x_\epsilon - y_\epsilon) \in \partial f(y_\epsilon).$$

Имеем

$$f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda}\|x - x_\epsilon\|^2 \geq f(y_\epsilon) + \frac{\epsilon}{\lambda}\|y_\epsilon - x_\epsilon\|^2 \quad \text{для всех } x \in M.$$

Полагая здесь $x = x_\epsilon$, получим

$$(2.3) \quad f(x_\epsilon) \geq f(y_\epsilon) + \frac{\epsilon}{\lambda}\|y_\epsilon - x_\epsilon\|^2.$$

Значит, $f(x_\epsilon) \geq f(y_\epsilon)$. Откуда $y_\epsilon \in M_\epsilon$. Из (2.3) следует, что

$$\frac{\epsilon}{\lambda}\|y_\epsilon - x_\epsilon\|^2 \leq f(x_\epsilon) - f(y_\epsilon) \leq \inf_{x \in M} f(x) + \epsilon - \inf_{x \in M} f(x) \leq \epsilon.$$

Значит, $\|y_\epsilon - x_\epsilon\| \leq \sqrt{\lambda}$. Теперь если $\hat{x}_\epsilon$ — другая ϵ -оптимальная точка, то существует точка $\hat{y}_\epsilon$ такая, что

$$(2.4) \quad \frac{2\epsilon}{\lambda}(\hat{x}_\epsilon - \hat{y}_\epsilon) \in \partial f(\hat{y}_\epsilon).$$

Поскольку по предположению субдифференциал выпуклой функции f является сильно монотонным оператором с константой $\vartheta > 0$, то из соотношений (2.2) и (2.4) следует

$$\langle \frac{2\epsilon}{\lambda}(x_\epsilon - y_\epsilon) - \frac{2\epsilon}{\lambda}(\hat{x}_\epsilon - \hat{y}_\epsilon), y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon \rangle \geq \vartheta\|y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon\|^2.$$

Откуда получим

$$\frac{\epsilon}{\lambda} \langle x_\epsilon - \hat{x}_\epsilon + \hat{y}_\epsilon - y_\epsilon, y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon \rangle \geq \frac{\vartheta}{2}\|y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon\|^2.$$

Следовательно,

$$\|y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon\| \leq \frac{\epsilon/\lambda}{\vartheta/2 + \epsilon/\lambda} \|x_\epsilon - \hat{x}_\epsilon\|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon - \hat{x}_\epsilon\| &\leq \|\hat{x}_\epsilon - \hat{y}_\epsilon\| + \|\hat{y}_\epsilon - y_\epsilon\| + \\ &+ \|y_\epsilon - x_\epsilon\| \leq 2\sqrt{\lambda} + \|y_\epsilon - \hat{y}_\epsilon\| \leq 2\sqrt{\lambda} + \frac{\epsilon/\lambda}{\vartheta/2 + \epsilon/\lambda} \|x_\epsilon - \hat{x}_\epsilon\|. \end{aligned}$$

Откуда окончательно получим

$$\|\hat{x}_\epsilon - x_\epsilon\| \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{\vartheta/2} (\vartheta/2 + \frac{\epsilon}{\lambda}).$$

Теперь выберем параметр λ таким образом, чтобы правая часть неравенства принимала наименьшее значение. Положим

$$P(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{\lambda}}{\vartheta/2} (\vartheta/2 + \frac{\epsilon}{\lambda}) = 2\sqrt{\lambda} + \frac{4}{\vartheta} \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\min_{\lambda > 0} P(\lambda) = 4\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\vartheta}}.$$

Таким образом, показано, что

$$(2.5) \quad \text{diam}(M_\varepsilon) \leq 4\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\vartheta}}.$$

Итак, множество M_ε ограничено, выпукло и замкнуто, и поэтому оно слабо компактно в X . С другой стороны, поскольку f — полунепрерывная снизу выпуклая функция, то она слабо полунепрерывна снизу на выпуклом множестве M (см. [6], теорема 5). Следовательно, f на M_ε достигает своего минимального значения в некоторой точке $x^* \in M_\varepsilon$. Ясно, что x^* — точка минимума функции f на M . Из (2.5) следует требуемое неравенство (2.1). $\square$

3. ОБ ε -НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Остановимся еще на одном аспекте задач минимизации (1.1). Положим

$$(3.1) \quad \beta = \inf_{x \in M} f(x)$$

и обозначим через A множество решений задачи (1.1), т.е. $A = \{x \in M : \beta = f(x)\}$. Предположим, что f — выпуклая замкнутая функция, определенная на выпуклом замкнутом и ограниченном множестве M . Тогда множество A непусто. В тех случаях, когда множество A состоит более чем из одной точки, можно поставить задачу об отыскании наилучшей в некотором смысле точки этого множества. Например, можно поставить задачу определения точки $x^* \in A$, ближайшей к некоторой фиксированной точке $x_0 \in X$.

Отметим, что такой вопрос рассматривается например в задачах оперативного планирования, где x^* является оптимальным планом, элемент x_0 характеризует план предшествующего периода, существенное отклонение от которого может быть связано с организационными и технологическими перестройками и, следовательно, сопряжено с дополнительными затратами.

Определение 3.1. [6]. Пусть $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка. Точку $x^* \in A$ назовем нормальным решением задачи минимизации (1.1), если

$$\min_{x \in A} \|x - x_0\| = \|x^* - x_0\|.$$

Следует подчеркнуть, что задача определения нормального решения весьма осложняется тем, что множество A задано неявно, и оно лишь в редких случаях может быть точно описано. Одним из эффективных средств определения нормального решения является метод регуляризации, разработанный А. Н. Тихоновым [6]. Для положительного $\alpha > 0$ положим

$$T(\alpha, x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(y) + \alpha \|x - y\|^2, \text{ где } y \in M, x \in X.$$

Функция $T(\alpha, x, y)$ называется функцией Тихонова. Из общей теоремы сходимости, доказанной в [6] (теорема 2), следует, что если последовательности $\{\epsilon_k\}$, $\{x_k\}$, $\{\alpha_k\}$ таковы, что $\epsilon_k \rightarrow 0$, $x_k \rightarrow x_0$, $\alpha_k = \sqrt{\epsilon_k}$, то последовательность $\{u_k\}$, определяемая из условий

$$\inf_{y \in M} T(\alpha_k, x_k, y) \leq T(\alpha_k, x_k, u_k) \leq \inf_{y \in M} T(\alpha_k, x_k, y) + \epsilon_k$$

сходится к нормальному решению. Действительно, стабилизаторы Ω , Ω_k , ($k = 1, 2, \dots$) в теореме 2 [6] выберем следующим образом:

$$\Omega(y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x_0 - y\|^2, \Omega_k(y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x_k - y\|^2 \text{ для любого } k \geq 1.$$

Поскольку последовательность $\{x_k\}$ и множество M ограничены, то существует такая константа $C > 0$, что для каждого k имеет место неравенство:

$$|\Omega_k(y) - \Omega(y)| \leq C \|x_k - x_0\|, y \in M.$$

Положим $\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} C \|x_k - x_0\|$. Заметим теперь, что регулирующие параметры α_k , γ_k , ϵ_k согласованы между собой в следующем смысле:

$$(3.2) \quad \gamma_k + \epsilon_k / \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Условие (3.2) (условие согласованного изменения параметров) и обеспечивает сходимость последовательности u_k к нормальному решению задачи (1.1).

Пусть $V_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in M} T(\sqrt{\epsilon}, x, y)$.

Определение 3.2. Множество

$$a_\epsilon^T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in M / f(y) + \sqrt{\epsilon} \|x - y\|^2 \leq V_\epsilon(x) + \epsilon\}$$

называется множеством ϵ -нормальных решений задачи минимизации (1.1).

Покажем теперь, что задача определения ϵ -нормального решения является устойчивой задачей. Следуя работе [3], напомним точное определение устойчивости параметризованных задач оптимизации. Пусть Y — банахово пространство,

$\psi(x, y)$ — вещественная непрерывная функция на $X \times Y$, такая, что

$$f(x) = \psi(x, 0) \text{ для всех } x \in M.$$

Каждому $y \in Y$ сопоставим в соответствие возмущенную задачу

$$(3.3) \quad V(y) = \inf_{x \in M} \psi(x, y).$$

Обозначим через a^ψ многозначное отображение, сопоставляющее параметру y множество

$$a^\psi(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M / V(y) = \psi(x, y)\}.$$

При $y = 0$ получим исходную задачу (3.1), т.е. $a^\psi(0) = A$. На практике, при фиксированном параметре y , мы имеем дело с ε -оптимальными точками функции ψ . Поэтому естественно было бы рассмотреть и изучить непрерывность многозначного отображения

$$a_\varepsilon^\psi(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M / \psi(x, y) \leq V(y) + \varepsilon\} -$$

множество ε -оптимальных точек функции ψ при фиксированном x .

Определение 3.3. Задача (3.3) называется ψ -устойчивой по решению, если для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $a_\varepsilon^\psi(y)$ непрерывно в точке $0 \in Y$.

Теорема 3.1. Многозначное отображение a_ε^T удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0 : существуют такие числа $L > 0$ и $\delta > 0$, что

$$H(a_\varepsilon^T(x_1), a_\varepsilon^T(x_2)) \leq \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in B_\delta(x_0).$$

Доказательство. Известно (см. [4], предложение 4.3.12), что функция $V_\varepsilon(x)$ дифференцируема по x и

$$\nabla V_\varepsilon(x) = 2\sqrt{\varepsilon}(x - x_\varepsilon), \text{ где } x_\varepsilon - \text{точка минимума функции } T(\sqrt{\varepsilon}, x, \cdot) \text{ на } M.$$

Так как множество M ограничено, то существует число $C_1 > 0$ такое, что

$$(3.4) \quad \|\nabla V_\varepsilon(x)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}(\|x\| + \|x_\varepsilon\|) \leq 2\sqrt{\varepsilon}C_1, \text{ если } x \in B_1(x_0).$$

Пусть $D_\varepsilon(x) \in M$ — некоторая точка минимума функции $T(\sqrt{\varepsilon}, x, \cdot)$ на множестве M при фиксированном параметре x , т.е.

$$V_\varepsilon(x) = f(D_\varepsilon(x)) + \sqrt{\varepsilon}\|x - D_\varepsilon(x)\|^2.$$

Положим

$$\varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(y) + \sqrt{\varepsilon}\|x - y\|^2 - V_\varepsilon(x) - \varepsilon.$$

Заметим, что если $\varphi(x, y) \leq 0$, то $y \in a_\varepsilon^T(x)$. Далее, функция φ выпукла по y при фиксированном x и учитывая неравенство (3.4) легко установить, что она удовлетворяет условию Липшица:

$$(3.5) \quad |\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)| \leq 4\sqrt{\varepsilon}C_1\|x_1 - x_2\|, \quad y \in M.$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_1(x_0)$ и $y_1 \in a_\varepsilon^T(x_1)$, т.е. $\varphi(x_1, y_1) \leq 0$. Тогда при $\lambda \in [0, 1]$, учитывая выпуклость функции φ по y и неравенство (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda D_\varepsilon(x_2)) &\leq (1 - \lambda)\varphi(x_2, y_1) + \lambda\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2)) = \\ &= (1 - \lambda)\varphi(x_1, y_1) + (1 - \lambda)[\varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_1, y_1)] + \lambda\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2)) \leq \\ &\leq 4\sqrt{\varepsilon}C_1\|x_1 - x_2\| + \lambda\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2)). \end{aligned}$$

Положим

$$(3.6) \quad \lambda = -\frac{4\sqrt{\varepsilon}C_1}{\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2))}\|x_1 - x_2\|.$$

Если теперь норма $\|x_1 - x_2\|$ достаточно мала, то λ , определяемое формулой (3.6), лежит на промежутке $[0, 1]$. Поэтому из предыдущего неравенства вытекает неравенство $\varphi(x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda D_\varepsilon(x_2)) \leq 0$. Следовательно, любой точке $y_1 \in a_\varepsilon^T(x_1)$ можно сопоставить точку $y_2 \in a_\varepsilon^T(x_2)$ по следующей формуле:

$$(3.7) \quad y_2 = y_1 - \frac{4\sqrt{\varepsilon}C_1}{\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2))}\|x_1 - x_2\|(D_\varepsilon(x_2) - y_1).$$

Поскольку $-\varphi(x_2, D_\varepsilon(x_2)) = \varepsilon$ и множество M ограничено, то из (3.7) следует, существует такое число $C_2 > 0$, что

$$(3.8) \quad \|y_1 - y_2\| \leq \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}C_2\|x_1 - x_2\| \leq \frac{4C_2}{\sqrt{\varepsilon}}\|x_1 - x_2\|.$$

Итак, если разность $\|x_1 - x_2\|$ достаточно мала, то каждой точке $y_1 \in a_\varepsilon^T(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $y_2 \in a_\varepsilon^T(x_2)$, так, что будет выполнено неравенство (3.8). Если учесть полную равноправность x_1 и x_2 , то формула (3.8) показывает, что хаусдорфово расстояние между множествами $a_\varepsilon^T(x_1)$ и $a_\varepsilon^T(x_2)$ не превосходит $\frac{4C_2}{\sqrt{\varepsilon}}\|x_1 - x_2\|$. Таким образом найдется такое число $\delta > 0$, что

$$H(a_\varepsilon^T(x_1), a_\varepsilon^T(x_2)) \leq \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in B_\delta(x_0),$$

где $L = 4C_2$. □

Abstract. The paper gives an estimate for the Hilbert space distance from a ε -optimal point to the minimum point of a convex, closed function, the subdifferential of which is a strongly monotone operator in its definition domain. Also, the Hausdorff distance

between the ε -optimal points of the Tikhonov functions in the non-correct problems of mathematical programming is estimated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федеров, Курс Методов Оптимизации, Москва, Наука (1986).
- [2] Е. С. Половинкин, М. В. Ваташов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, Москва, Физматлит (2004).
- [3] А. Р. Хачатрян, О многозначных отображениях и ε -оптимальных решениях параметризованных задачах оптимизации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Ереван (2006).
- [4] И. Экланд, Ж. П. Обен, Прикладной нелинейный анализ, Москва, Мир (1988).
- [5] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, Недифференцируемая Оптимизация, Москва, Наука (1981).
- [6] Ф. П. Васильев, Методы Решения Экстремальных Задач, Москва, Наука (1981).

Поступила 20 декабря 2010

Переработанная версия поступила 29 апреля 2011

THE RIEMANN–HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
MATRICES ON NON-SMOOTH ARC

B. A. KATS, S. R. MIRONOVA AND A. YU. POGODINA

Kazan Federal University, Russia
Kazan State Technical University, Russia
Saratov State Technical University, Russia
E-mail: *srmironova@yandex.ru*

Abstract. We consider the Riemann–Hilbert boundary value problem for holomorphic matrices (the Fokas–Its–Kitaev version) on certain class of non-smooth arcs. The main result is sufficient condition for its solvability.

MSC2010 number: 30E25.

Keywords: Riemann–Hilbert boundary value problem; countable set of curves; non-smooth arc.

1. INTRODUCTION

Let Γ be a Jordan arc in complex plane $\mathbb{C}$. We consider boundary value problem on evaluation of holomorphic in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ matrix

$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y_{11}(z) & Y_{12}(z) \\ Y_{21}(z) & Y_{22}(z) \end{pmatrix}$$

such that

$$(1.1) \quad Y^+(t) = Y^-(t)G(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\},$$

where $Y^+(t)$ and $Y^-(t)$ stand for boundary values of matrix Y at a point $t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ from the left and from the right correspondingly, a_1 and a_2 are starting and end points of Γ , and $G(t)$ is defined on Γ triangular matrix

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & w(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In addition, the matrix Y must satisfy certain restrictions

$$(1.2) \quad Y(z) = O(|z - a_j|^{-\gamma}), \gamma = \gamma(Y) < 1, z \rightarrow a_j, j = 1, 2,$$

¹The research is partially supported by Russian Foundation for Basic Researches, grants no. 12-01-00636 and 12-01-97015-r_povolzhie_a.

on its growth near points a_1, a_2 , and condition

$$(1.3) \quad Y(z) = (I + O(z^{-1})) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, z \rightarrow \infty,$$

where I stands for unit matrix and n is fixed positive integer.

This version of the matrix Riemann–Hilbert boundary value problem was studied first by A. Fokas, A. Its and A. Kitaev [1]. It has numerous applications in theory of orthogonal polynomials, theory of rational approximations and other branches of analysis (see, for instance, [2], [3]). But all known results on this problem concern the cases of very smooth arc Γ . In the present paper we solve it on certain class of non-smooth arcs.

In the next two sections we prove auxiliary results concerning the jump problem. Then in the last section we establish a sufficient condition for solvability of the problem (1.1) on non-smooth arcs.

2. THE JUMP PROBLEM ON COUNTABLE SET OF DISJOINT CLOSED CURVES

Let D be finite measurable domain of the complex plane with boundary Γ .

Definition 2.1. *The value*

$$S_\alpha(D) = \iint_D \frac{dx dy}{(\text{dist}(z, \Gamma))^\alpha}, \quad z = x + iy,$$

is called α -size of the domain D .

Obviously, $S_0(D)$ is area of D .

Lemma 2.1. *If boundary Γ of domain D is rectifiable Jordan curve, then for $0 \leq \alpha < 1$ the α -size of D is finite, and $S_\alpha(D) \leq C \lambda(\Gamma) \omega^{1-\alpha}(\Gamma)$, where $\lambda(\Gamma)$ is length of Γ , $\omega(\Gamma)$ is diameter of the most disk lying inside D , and the constant C depends only on α .*

Proof. We consider the Whitney decomposition $W(D)$ of domain D (see, for instance, [4]). It consists of mutually disjoint dyadic squares $Q \subset D$ such that

$$\text{diam} Q \leq \text{dist}(Q, \Gamma) \leq 4 \text{diam} Q.$$

We denote by m_n the number of squares from $W(D)$ with side 2^{-n} . Then

$$S_\alpha(D) = \sum_{Q \in W(D)} \iint_Q \frac{dx dy}{(\text{dist}(z, \Gamma))^\alpha} \leq C \sum_{2^{-n} \leq \omega(D)} 2^{-n(2-\alpha)} m_n.$$

Clearly, $m_n \leq \lambda(D)2^n$. Let n_0 be the least n satisfying inequality $2^{-n} \leq \omega(D)$. Then

$$S_\alpha(D) \leq C\lambda(D) \sum_{n=n_0}^{\infty} (2^{-n})^{1-\alpha} \leq C\lambda(D)2^{-n_0(1-\alpha)} \leq C\lambda(D)\omega^{1-\alpha}(D),$$

where C stands for various constants depending only on α . $\square$

We consider contours $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ consisting of mutually disjoint rectifiable Jordan closed curves $\Gamma_j, j = 1, 2, 3, \dots$, which are boundaries of finite domains $D_j: \Gamma_j = \partial D_j, \overline{D_j} \cap \overline{D_k} = \emptyset$ for $j \neq k$. Let $L(\Gamma)$ be the set of limit points of the contour Γ , i.e.,

$$L(\Gamma) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : a = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j, z_j \in \Gamma_j\}.$$

Thus $D^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{D_j}$.

Definition 2.2. *The class $\mathfrak{F}$ consists of all contours $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ such that their limit sets $L(\Gamma)$ contain only finite number of points, and all these points are finite.*

For $\Gamma \in \mathfrak{F}$ we introduce α -size by equality

$$S_\alpha(\Gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} S_\alpha(D_j).$$

As we have shown,

$$(2.1) \quad S_\alpha(\Gamma) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) \omega^{1-\alpha}(D_j).$$

Below we denote $H_\nu(A)$ the set of all functions satisfying the Hölder condition with exponent ν on a set $A \subset \mathbb{C}$. This condition consists of the finiteness of value

$$(2.2) \quad h_\nu(g, A) := \sup \left\{ \frac{|g(t') - g(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in A, t' \neq t'' \right\} < \infty.$$

Definition 2.3. *The class $\mathfrak{H}_\nu(\Gamma)$ consists of functions $f(t)$ defined on $\Gamma \in \mathfrak{F}$ such that $f_j := f|_{\Gamma_j} \in H_\nu(\Gamma_j)$ for $j = 1, 2, \dots$, and*

$$h_\nu(f, \Gamma) := \sup \{h_\nu(f_j, \Gamma_j) : j = 1, 2, \dots\}, \|f\|_{C(\Gamma)} := \sup \{|f(t)| : t \in \Gamma\}$$

are finite.

Theorem 2.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{F}$, $f \in \mathfrak{H}_\nu(\Gamma)$ and $\nu > \frac{1}{2}$. If $S_{1-\nu}(\Gamma) < \infty$ then the series*

$$(2.3) \quad \Phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

converges in $\mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$ to holomorphic function $\Phi(z)$. This function vanishes at ∞ , and at any point $t \in \Gamma_j, j = 1, 2, \dots$ it has limit values $\Phi^+(t) := \lim_{D_j \ni z \rightarrow t} \Phi(z)$ and

$\Phi^-(t) := \lim_{D^- \ni z \rightarrow t} \Phi(z)$ related by equality

$$(2.4) \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), t \in \Gamma.$$

In addition, if $S_{p(1-\nu)}(\Gamma) < \infty$ for some $p > 2$, then Φ is bounded in the whole complex plane.

Proof. We consider the Whitney continuation f_j^w of function f_j from the curve Γ_j into the whole complex plane (see [4]). Let $\phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(z) f_j^w(z)$, where $\chi_j(z)$ is characteristic function of the set D_j . According well known properties of the Whitney extension, ϕ is differentiable in $\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}$ and $|\nabla \phi(z)| \leq h_\nu(f, \Gamma) \text{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma)$. Hence, $|\nabla \phi|^p$ is integrable in $\mathbb{C}$ if $p(1-\nu)$ -size of Γ is finite. We apply to each term of the series (2.3) the Borel–Pompeju formula (see [5]). We obtain

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(t)dt}{t-z} = \chi_j(z) f_j^w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{D_j} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \zeta = \xi + i\eta,$$

and

$$(2.5) \quad \Phi(z) = \phi(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}.$$

If $S_{1-\nu}(\Gamma) < \infty$, then $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}$ is integrable, i.e., the series converges to holomorphic in $\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}$ function. The existence of boundary values $\Phi^\pm(t)$ and relation (2.4) follow from Dynkin–Salimov theorem of continuity of the Cauchy type integral over rectifiable curve for $\nu > \frac{1}{2}$ (see [6], [7]). The equality $\Phi(\infty) = 0$ is obvious. Finally, if $S_{p(1-\nu)}(\Gamma) < \infty$ for $p > 2$, then $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}$ is integrable with power $p > 2$, and the last term of (2.5) is continuous in the whole complex plane (see [5]). Thus, under this restriction the function Φ is bounded. $\square$

This theorem gives a sufficient condition for solvability of jump boundary value problem (2.4) on countable set of closed rectifiable curves. Another sufficient conditions for its solvability can be found in [8] (see also bibliography in this book) and [9].

The inequality (2.1) immediately implies

Corollary 2.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{F}$, $f \in \mathfrak{H}_\nu(\Gamma)$ and $\nu > \frac{1}{2}$. If the series*

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) \omega^\beta(D_j)$$

converges for $\beta = \nu$, then the jump problem (2.4) is solvable, and if this series converges for some $\beta < 2\nu - 1$, then the jump problem (2.4) has a bounded solution.

For $\nu = 1$ the sizes $S_{1-\nu}(\Gamma) = S_{p(1-\nu)}(\Gamma) = S_0(\Gamma)$ are equal to the sum of areas of domains D_j , and, consequently, are finite.

We come to the following corollary.

Corollary 2.2. *If $\Gamma \in \mathfrak{F}$ and $f \in \mathfrak{H}_1(\Gamma)$, then the series (2.3) converges to a bounded solution of the jump problem (2.4).*

If all curves Γ_j are piecewise smooth, then the Cauchy type integral over this curve has continuous boundary values for any positive exponent ν (see [10], [11]).

Corollary 2.3. *Let $\Gamma \in \mathfrak{F}$ consist of piecewise-smooth curves $\Gamma_j, j = 1, 2, \dots$, and $f \in \mathfrak{H}_\nu(\Gamma)$. Then Theorem 2.1 keeps validity for any positive exponent ν .*

3. NON-SMOOTHS ARCS WITH SMOOTH SKELETON

Let us consider the following example. We put $Y(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ for $0 < x \leq 1$, $Y(0) = 0$, $\Gamma = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1, y = Y(x)\}$. The arc Γ begins at the point 0 and ends at the point 1; it loses smoothness at its starting and has infinite length. Let I be segment $[0, 1]$ with the same beginning and end points. We can represent the union $\Gamma \cup I$ in the form $\Gamma \cup I = \cup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$, where $\Gamma_j = \partial D_j$ and

$$D_j = \{z = x + iy : (j+1)^{-1} < x < j^{-1}, 0 < (-1)^j y < (-1)^j x \sin \frac{\pi}{x}\},$$

$j = 1, 2, 3, \dots$. The even curves Γ_{2j} are situated in upper half of the plane, and their intrinsic orientation is opposite to orientation of Γ . The odd curves Γ_{2j-1} are situated in lower half of the plane and directed along Γ . Obviously,

$$\int_{\Gamma} - \int_I = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Gamma_{2j-1}} - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Gamma_{2j}},$$

and both contours $\Gamma_{odd} := \{\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \dots\}$ and $\Gamma_{even} := \{\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6, \dots\}$ belong to the class $\mathfrak{F}$. Let us give general description of this phenomenon.

Definition 3.1. *Let Γ be a Jordan arc beginning at point a_1 and ending at point a_2 . We say that arc γ with the same starting and end points is its skeleton if $\overline{\Gamma \Delta \gamma} = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, where Γ^+ (correspondingly, Γ^-) is a contour of class $\mathfrak{F}$ consisting of mutually disjoint closed curves oriented positively (correspondingly, negatively) with respect to their interior domains, and $L(\Gamma^\pm) \subset \{a_1, a_2\}$. We denote by $\mathfrak{S}$ the class of all arcs with smooth skeletons.*

We introduce α -size of arc $\Gamma \in \mathfrak{S}$ by equality $S_\alpha(\Gamma) = S_\alpha(\Gamma^+) + S_\alpha(\Gamma^-)$. Generally speaking, an arc $\Gamma \in \mathfrak{S}$ has infinite length.

We consider the jump problem on arc Γ , i.e., the problem on evaluation of holomorphic function $\Phi(z)$ in $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ such that $\Phi(\infty) = 0$, and

$$(3.1) \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\},$$

$$(3.2) \quad \Phi(z) = O(|z - a_j|^{-\gamma}), \quad z \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma = \gamma(\Phi) \in [0, 1).$$

Here $\Phi^+(t)$ and $\Phi^-(t)$ stand for limit values of desired function Φ on Γ from the left and from the right correspondingly.

Let $\Gamma \in \mathfrak{S}$, γ is its smooth skeleton, $f \in H_\nu(\Gamma)$. As above, we denote by f^w the Whitney extension of f from Γ onto the whole complex plane. Obviously, $f^w|_{\Gamma \cup \gamma} \in H_\nu(\Gamma \cup \gamma)$. Then

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^w(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f^w(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{f^w(t)dt}{t-z}.$$

The first term in the right-hand side is the Cauchy type integral over smooth arc γ with density from the Hölder class $H_\nu(\gamma)$. It has jump f^w on $\gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ and logarithmic singularities at the points $a_{1,2}$ (see [10], [11]). The second and third terms are series of the Cauchy type integrals over sets of closed curves of the class $\mathfrak{F}$. If $S_{p(1-\nu)}(\Gamma) < \infty$ for some $p > 2$, then both series converge to bounded functions with jump f^w on these curves by virtue of Theorem 2.1. Thus, we proved the following assertion.

Theorem 3.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{S}$, $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > \frac{1}{2}$ and $S_{p(1-\nu)}(\Gamma) < \infty$ for some $p > 2$. Then the Cauchy type integral in the right-hand side of equality*

$$(3.3) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

converges, and the function $\Phi(z)$ is solution of the jump problem (3.1) satisfying condition (3.2).

Analog of Corollaries 2.1, 2.2, 2.3 are valid, too. We cite an analog of Corollary 2.2.

Corollary 3.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{S}$ and $f \in H_1(\Gamma)$. Then the Cauchy type integral in the right-hand side of equality (3.3) converges and gives a solution of the jump problem (3.1) satisfying condition (3.2).*

4. THE RIEMANN–HILBERT BOUNDARY PROBLEM FOR MATRICES

Now we solve the problem (1.1) in the class of holomorphic matrices satisfying conditions (1.2) and (1.3). We assume that the arc Γ has smooth skeleton, i.e., belongs

to the class $\mathfrak{S}$. The entries of desired matrix Y satisfy the following relations:

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & Y_{11}^+(t) = Y_{11}^-(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \quad Y_{11}(z) = z^n + O(z^{n-1}), \\
 & Y_{12}^+(t) = Y_{12}^-(t) + Y_{11}^-(t)w(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \quad Y_{12}(z) = O(z^{-n-1}), \\
 & Y_{21}^+(t) = Y_{21}^-(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \quad Y_{21}(z) = O(z^{n-1}), \\
 & Y_{22}^+(t) = Y_{22}^-(t) + Y_{21}^-(t)w(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \quad Y_{22}(z) = z^{-n} + O(z^{-n-1}),
 \end{aligned}$$

where the second equalities concern behavior of desired functions near infinity, and

$$(4.2) \quad Y_{k,m}(z) = O(|z - a_j|^{-\gamma}), \gamma = \gamma(Y) < 1, z \rightarrow a_j, \quad j, k, m = 1, 2.$$

The equalities (4.1) and (4.2) imply that Y_{11} is polynomial of degree n with highest term z^n , i.e.,

$$(4.3) \quad Y_{11}(z) = \pi_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n.$$

Analogously, Y_{21} is polynomial

$$(4.4) \quad Y_{21}(z) = \tilde{\pi}_{n-1}(z) = \tilde{c}_0 z^{n-1} + \tilde{c}_1 z^{n-2} + \cdots + \tilde{c}_{n-2} z + \tilde{c}_{n-1}.$$

The functions Y_{12} and Y_{22} are solutions of the jump problems

$$\begin{aligned}
 & Y_{12}^+(t) - Y_{12}^-(t) = \pi_n(t)w(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \\
 & Y_{22}^+(t) - Y_{22}^-(t) = \tilde{\pi}_{n-1}(t)w(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\},
 \end{aligned}$$

in the class (4.2). Under assumptions of Theorem 2 these problems have unique solutions

$$Y_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\pi_n(t)w(t)dt}{t-z}, \quad Y_{22}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\pi}_{n-1}(t)w(t)dt}{t-z}.$$

But $Y_{12}(z) = O(z^{-n-1})$, $Y_{22}(z) = z^{-n} + O(z^{-n-1})$ for $z \rightarrow \infty$. The convergence of the Cauchy type integrals allows us to rewrite these conditions in the form (see [2])

$$(4.5) \quad \int_{\Gamma} \pi_n(t)w(t)t^j dt = 0, 0 \leq j \leq n-1,$$

$$(4.6) \quad \int_{\Gamma} \tilde{\pi}_{n-1}(t)w(t)t^j dt = 0, 0 \leq j \leq n-2, \quad \int_{\Gamma} \tilde{\pi}_{n-1}(t)w(t)t^{n-1} dt = -2\pi i.$$

Thus, we come to the following result.

Theorem 4.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{S}$, $w \in H_{\nu}(\Gamma)$, $\nu > \frac{1}{2}$ and $S_{p(1-\nu)}(\Gamma) < \infty$ for some $p > 2$. Then the matrix Riemann-Hilbert boundary value problem (1.1) has a unique solution satisfying conditions (1.2) and (1.3) if and only if there exist polynomials (4.3) and (4.4) satisfying conditions (4.5) and (4.6) correspondingly.*

Now we describe a simple case where that polynomials exist. Assume that one of skeletons γ of the arc Γ is a segment of real axis (we can say that it has right skeleton), and function $w(t)$ is restriction on Γ of a function $w(z)$ which is holomorphic in a simply connected domain containing $\Gamma \cup \gamma$ and positive on the segment γ . Then $w \in H_1(\Gamma)$. The conditions (4.5) and (4.6) are equivalent to equalities

$$\int_{\gamma} \pi_n(t) w(t) t^j dt = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

$$\int_{\gamma} \tilde{\pi}_{n-1}(t) w(t) t^j dt = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2, \quad \int_{\gamma} \tilde{\pi}_{n-1}(t) w(t) t^{n-1} dt = -2\pi i,$$

i.e. $\pi_n(z) = P_n(z)$ and $\tilde{\pi}_{n-1}(z) = bP_{n-1}(z)$, where P_n and P_{n-1} are monic orthogonal polynomials on the segment Γ with weight $w|_{\gamma}$ of degrees n and $n-1$ correspondingly, and b is certain constant.

Corollary 4.1. *Let $\Gamma \in \mathfrak{S}$ have straight skeleton γ , and let $w(t)$ be restriction on Γ of a function $w(z)$ which is holomorphic in a simply connected domain containing $\Gamma \cup \gamma$ and positive on the segment γ . Then the matrix Riemann–Hilbert boundary value problem (1.1) has a unique solution satisfying conditions (1.2) and (1.3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. S. Fokas, A. R. Its and A. V. Kitaev, “Discrete Painleve equations and their appearance in quantum gravity”, *Comm. Math. Phys.*, **142**, no. 2, 313 – 344 (1991).
- [2] P. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann – Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes, **3**, New York University (1999).
- [3] A. I. Aptekarev, “Exact constants for rational approximations of analytic functions”, *Mathem. Sbornic*, **193**, no. 9, 3 – 72 (2002).
- [4] E. M. Stein, “Singular integrals and differential properties of functions”, Princeton University Press, Princeton (1970).
- [5] I. N. Vekua, *Generalized analytical functions*, Nauka publishers, Moscow (1988).
- [6] E. M. Dynkin, “Smoothness of the Cauchy type integral”, *Zapiski nauchn. sem. Leningr. dep. mathem. inst. AN USSR*, **92**, 115 – 133 (1979).
- [7] T. S. Salimov, “A direct estimate for a singular Cauchy integral over a closed curve”, *Azerbaidzhan. Gos. Univ. Uchen. Zap.*, no. 5 59 – 75 [in Russian] (1979).
- [8] L. I. Chibrikova, “The main boundary value problems for analytical functions”, Kazan: Publishers of Kazan University (1977).
- [9] B. A. Kats, “The Cauchy type integral and the Riemann problem on countable set of closed curves”, *Izvest. vuzov. Mathem.*, no. 3, 20 – 29 (1985).
- [10] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Nauka publishers, Moscow (1977).
- [11] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Nauka publishers, Moscow (1962).

Поступила 1 ноября 2011

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 4, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

G. G. GEVORKYAN, A. КАМОНТ, Hilbert transform of a wavelet system: boundedness of orthogonal projections in the uniform norm	3
V. NESTORIDIS, Universal Padé Approximants with respect to the chordal metric	13
A. А. ТАЛАЛЯН, Мартингалы и некоторые признаки интегрируемости кратных тригонометрических рядов	35
P. А. ХАЧАТРЯН, Об ε -оптимальных точках выпуклой замкнутой функции	61
B. А. KATS, S. R. MIRONOVA AND A. YU. POGODINA, The Riemann–Hilbert boundary value problem for matrices on non-smooth arc	73 – 80

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 4, 2012

CONTENTS

G. G. GEVORKYAN, A. КАМОНТ, Hilbert transform of a wavelet system: boundedness of orthogonal projections in the uniform norm	3
V. NESTORIDIS, Universal Padé Approximants with respect to the chordal metric	13
A. А. TALALYAN, Martingales and some integrability criteria for multiple trigonometric series	35
R. А. KHACHATRYAN, On ε -optimal points of convex, closed functions	61
B. А. KATS, S. R. MIRONOVA AND A. YU. POGODINA, The Riemann–Hilbert boundary value problem for matrices on non-smooth arc	73 – 80