ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2012

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Гармонический анализ и приближения имеют прочные традиции в Армении, и нам приятно сообщить о непрекращающейся активности в этих областях. Отметим четыре международные конференции по этой теме, которые состоялись в Армении: в Нор Амберде, 18 – 24 сентября 1998 года и 11 – 18 сентября 2001 года, а также в Цахкадзоре, 20 - 27 сентября 2005 года, 19 - 26 сентября 2008 года.

Настоящий номер и два последующих номера журнала содержат статьи, представленные на пятой международной конференции "Гармонической анализ и приближения", посвященной 75-летнему юбилею академика Норайра Аракеляна и состоявшейся в Цахкадзоре, 10 - 17 сентября 2011 года.

Организаторами пятой конференции были Институт математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный Комитет:

Н. Аракелян (Армения), З. Чисельский (Польша), П. Готье (Канада), Б. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), Н. Никольский (Франция), А. Олевский (Израиль), А. Талалян (Армения), В. Темляков (США).

Организационный Комитет:

Г. Геворкян, А. Саакян, А. Акопян, М. Погосян.

В конференции приняли участие около 90 математиков из 17 стран.

Пленарными докладами выступили:

Н. Аракелян (Институт математики НАН Армении), П. Войтащик (Варшавский университет, Польша), П. Готье (Монреальский университет, Канада), Д. Дразин (университет Пурду, США), В. Лу (Трирский университет, Германия), С. Майборода (университет Пурду, США), Ю. Мюллер (Трирский университет, Германия), Н. Никольский (университет Бордо, Франция), К. Осколков (Математический Институт им. Стеклова РАН, Москва), А. Шадрин (Кембриджский университет, Англия), В. Зикель (университет г. Йена, Германия), В. Плесняк (Йагелонский университет, Польша), А. Талалян (Институт математики НАН Армении), В. Темляков (Южно-Каролинский университет, США), В. Тотик (Сегетский университет, Венгрия),

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2012, стр. 5-34.

ЭФФЕКТИВНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДОВ ЛАПЛАСА

Н. У. АРАКЕЛЯН

Институт Математики НАН Армении, Ереван, Армения
E-mail: *arakelian@instmath.sci.am*

Аннотация. Понятия аналитический элемент (степенной ряд в $\mathbb{C}$, сходящийся в некотором круге) и его аналитическое продолжение являются основными в теории аналитических функций К. Вейерштрасса. Некоторые проблемы об эффективности аналитического продолжения, поставленные последователями Вейерштрасса (Ж.Адамар, Г. Миттаг-Леффлер и другие) были обсуждены в статье [1]. В частности, было получено описание областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, где восстановление аналитического продолжения аналитического элемента с фиксированным центром в Ω возможен с помощью универсальных (независимых от элемента) одношаговых матричных методов суммирования. Целью этой статьи является решение аналогичной проблемы описания областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где восстановление гармонического продолжения гармонических элементов (рядов однородных гармонических многочленов - рядов Лапласа, сходящихся в некотором шаре в $\mathbb{R}^n$ с фиксированным центром) возможен средствами универсальных полунепрерывных матричных методов суммирования.

MSC2010 number: 31B05, 40C05.

Ключевые слова: Гармоническая функция; ряды Лапласа; матричное суммирование.

1. Предварительные понятия

1.1. **Некоторые обозначения и понятия.** В этой статье будут использованы следующие обозначения.

1°. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$. (a) Буквы $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будут обозначать соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел с известной алгебраической структурой и топологией, и пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Далее, пусть $\mathbb{R}^n$ для $n \geq 1$ с $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ есть n - мерное евклидово векторное пространство с типичной точкой (вектором) $x = (x_1, \dots, x_n)$, представленной своими координатами $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, где $0 = (0, \dots, 0)$ есть нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$. Внутреннее произведение двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ есть число

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

и в случае $x \cdot y = 0$ они называются ортогональными, $x \perp y$. Норма $x \in \mathbb{R}^n$ есть число $|x| := (x \cdot x)^{1/2} \geq 0$, и топология в $\mathbb{R}^n$ (включая понятия замкнутых, открытых, связных множеств и областей в $\mathbb{R}^n$) определяются как в метрических пространствах. Неравенство Коши-Шварца $|x \cdot y| \leq |x|\,|y|$ позволяет определить угол $\varphi = \varphi_{x,y} \in [0, \pi]$ между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{R}^n$ формулой $\cos\varphi := (x \cdot y)/\,|x|\,|y|$.

Для нас будет удобным отождествлять евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, обозначив $i = (0, 1)$ (мнимая единица), удовлетворяющая $i^2 = -1$. Тогда $z = (x, y) = x + iy$ с $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ есть типичная точка $\mathbb{C}$ с комплексной сопряженной $\overline{z} = x - iy$ и $|z|^2 = z\overline{z}$.

(b) Некоторые подмножества $\mathbb{R}^n$. Множества $\overline{E}$, E^o, ∂E и E^c для $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначают соответственно замыкание, внутренность, границу и дополнение E в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим также для $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ следующие множества в $\mathbb{R}^n$:

$[a, b] := \{x = a + t(b - a) : 0 \leq t \leq 1\}$ - отрезок с концами a и b;

$[a, \infty) := \{x = ta \in \mathbb{R}^n : 1 \leq t < +\infty\}$ for $a \neq 0$ - луч с начальной точкой a;

$B_n(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ - открытый шар с центром a и радиуса r;

$B_n(r) := B_n(0, r)$;

$S_n(a, r) := \partial B_n(a, r)$ - сфера с центром a и радиуса r; $S_n(r) := S_n(0, r)$;

$B_n = B_n(1)$ - единичный шар; $S_n := S_n(1)$ - единичная сфера.

(c) Пусть $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ есть одноточечная (Александрова) компактификация $\mathbb{R}^n$ с помощью стереографической проекции, гомеоморфной единичной сфере S_{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1}$ (сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{R}^3$ для $n = 2$), с $|\infty| = +\infty$. Приведенные выше понятия замыкание, внутренность, граница и дополнение будут естественным образом использованы также для множеств $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Рассмотрим в $\overline{\mathbb{R}^n}$ множества:

$[a, \infty] = [a, \infty) \cup \{\infty\}$ для $a \neq 0$;

$B_n(\infty, r) := \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : r\,|x| > 1\}$ - шар с центром ∞ и радиуса $r > 0$;

$S_n(\infty, r) := \partial B_n(\infty, r) = S_n(r^{-1})$.

Отметим, что $0 \notin B_n(\infty, r)$ и $B_n(\infty, r_1) \subset B_n(\infty, r_2)$ для $r_2 > r_1 > 0$.

(d) Область Ω в $\mathbb{R}^n$ (в $\overline{\mathbb{R}^n}$) называется односвязной, если любой замкнутый путь γ в Ω (т.е. непрерывное отображение $\gamma : S_2 \to \Omega$) есть ноль гомотопичный, т.е. γ может быть непрерывно деформирован в Ω в точку Ω. Область Ω в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (в $\overline{\mathbb{C}}$) будет односвязной тогда и только тогда, если $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ связна; в случае $n \geq 3$ дополнение $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega$ односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть несвязной.

(e) Инверсия на $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно единичной сферы S_n есть взаимно однозначное отображение $x \to x^*$, определяемое формулой

$$x^* = \begin{cases} |x|^{-2} x & \text{если } \ x \neq 0, \infty, \\ 0 & \text{если } \ x = \infty, \\ \infty & \text{если } \ x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Полагая $E^* = \{x^* : x \in E\}$ для $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, имеем, что $E^{**} = E$, $S_n^* = S_n$ и $B_n^*(\infty, r) = B_n(r)$.

(f) Звездные множества в $\mathbb{R}^n$ и в $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}$. 1) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется звездой (звездообразным множеством) с центром $a \in E$, если $[a, x] \subset E$ для каждой $x \in E$. Эквивалентно, $E \subset \mathbb{R}^n$ является звездой с центром $0 \in E$, если либо $E = \mathbb{R}^n$, или $x \in E^c$ влечет $[x, \infty) \in E^c$. Последнее условие может быть интерпретировано как звездообразность множества $E^c \cup \{\infty\}$ с центром ∞; фактически говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}$ есть звезда с центром $\infty \in E$, если $[x, \infty] \subset E$ для каждого $x \in E$, или эквивалентно - если множество $E^c = \overline{\mathbb{R}^n} \backslash E$ -звезда с центром 0, т.е. если $[0, x] \subset E^c$ для каждого $x \in E^c$. 2) Множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}$ будет звездой с центром $\infty \in E$, тогда и только тогда, если его инверсия $E^* \subset \mathbb{R}^n$ является звездой с центром 0. Очевидно, звездная область Ω в $\mathbb{R}^n$ или в $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}$ односвязна. 3) Для множества $E \subset \mathbb{C}$ с $a \in E$ и для числа $\alpha \in \mathbb{R}$ говорят, что E есть (спиральной) α- звездой с центром a , если $a + (z - a)t^{1+i\alpha} \in E$ для всех $(z, t) \in E \times [0, 1]$. α -звезда станет обычной звездой при $\alpha = 0$.

(g) Некоторые пространства функций и нормы. Лебегова n-мерная мера объема на $\mathbb{R}^n$ обозначается через $v = v_n$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, пусть $\sigma = \sigma_n$ есть поверхностная мера площади на $\partial\Omega$. Отметим, что

$$\sigma(S_n) = nv(B_n) = 2\pi^{n/2} / \Gamma\left(n/2\right), \tag{1.2}$$

где Γ есть Эйлера гамма функция (см. [2], Appendix A).

Как обычно, $C(E)$ для $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ это класс комплекснозначных непрерывных функций на E с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, E} = \sup\{|f(x)| : x \in E\}.$$

Положим также для $q \geq 1$

$$\|f\|_q = \|f\|_{q,S_n} = \left[\frac{1}{\sigma(S_n)} \int_{S_n} |f(\zeta)|^q \, d\sigma_n\right]^{1/q} \quad \text{для} \quad f \in C(S_n).$$

(h) Мульти-индекс в $\mathbb{R}^n$ есть вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ с абсолютным значением $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Формальная степень x^α для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ определяется как $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Пусть $C^k(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$ есть класс k раз непрерывно дифференцируемых комплексных функций на Ω, и $C^\infty(\Omega)$ есть множество функций в Ω, принадлежащие к $C^k(\Omega)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Для $f \in C^k(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ с $|\alpha| \leq k$ смешанная частная производная $\partial^\alpha f$ порядка α определяется как $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$, где $\partial_m^{\alpha_m} f = \partial^{\alpha_m} f / \partial x_m^{\alpha_m}$ для $m = 1, ..., n$, с $\partial_m f = \partial_m^1 f$ и $\partial_m^0 f = f$.

Для $f \in C^1(\Omega)$ вектор-функция $\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$ есть градиент функции f в Ω. Для $\nu \in S_n$ производная f в направлении ν формально определяется как $\partial_\nu f = (\nabla f) \cdot \nu$. Если Ω звездообразна с центром 0, тогда полагая $x = r\zeta \in \Omega$ (с $r = |x|$ и $\zeta \in S_n$) и $\partial / \partial r = \partial_r$, можно проверить тождества

$$(\nabla f)(x) \equiv (\partial f / \partial r)(x) \zeta \text{ и } (\partial_\nu f)(x) = (\partial f / \partial r)(x) \cos \varphi_{x,\nu}. \tag{1.3}$$

1.2. **Гармонические функции в** $\mathbb{R}^n$ **(**$n \geq 2$**).** (a) Пусть $\mathcal{H}(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) есть класс комплекснозначных гармонических функций u в Ω, т.е. функций $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в Ω, где Δ является оператором Лапласа:

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2 = \nabla^2.$$

Говорят, что $u \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$, если $u \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ для некоторой области $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ с $x \neq y$ функция

$$h_n(x - y) = \begin{cases} \log |x - y|^{-1} & \text{если } n = 2, \\ |x - y|^{2-n} & \text{если } n \geq 3, \end{cases} \tag{1.4}$$

является (как функция от x) фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ с полюсом в y.

(b) Интеграл Пуассона $P_f \in \mathcal{H}(B_n)$ для $f \in C(S_n)$ определяется формулой

$$P_f(x) = \frac{1}{\sigma(S_n)} \int_{S_n} f(\zeta) P_n(x, \zeta) d\sigma_n \text{ для } x \in B_n, \tag{1.5}$$

с ядром Пуассона

$$P_n(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|\zeta - x|^n} \quad \text{для} \quad x \in B_n,\ \zeta \in S_n.$$

Нам будет нужна для P_f следующая оценка, легко вытекающая из (1.5):

$$|P_f(x)| \leq (1-|x|)^{-n}\,\|f\|_\infty \quad \text{для} \quad |x| < 1. \tag{1.6}$$

Пусть G область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно - гладкой границей ∂G. Тогда формула Грина утверждает для $u \in \mathcal{H}(\overline{G})$, что

$$u(x) = k_n^{-1} \int\limits_{\partial G} \left[h_n(x-y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu h_n(x-y)u(y)\right] d\sigma_n \tag{1.7}$$

для $x \in G$, где $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ означает дифференцирование по направлению внешней единичной нормали ν на ∂G, $k_2 = 2\pi$ и $k_n = (n-2)\sigma(S_n)$ для $n \geq 3$ (см. (1.2)).

(c) Хорошо известно, что каждая функция $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ в $\mathbb{R}^n$ вещественно аналитическая, т.е. $u \in C^\infty(\Omega)$ и кроме того, u локально разлагается в абсолютно сходящийся степенной (Тейлора) ряд в Ω, так что $\partial^\alpha u \in \mathcal{H}(\Omega)$ для каждого мульти-индекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Замечание 1.1. *Пусть Ω звездная область в $\mathbb{R}^n$ с центром 0 и $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ вещественнозначна. Тогда для $x = r\zeta \in \Omega$ с $r = |x|$ и $\zeta \in S_n$ формула*

$$\mathrm{v}(x) = (\nabla u)(x) \cdot x = r(\partial_r u)(x) \tag{1.8}$$

определяет функцию $\mathrm{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$ (см. тождества (1.3)).

Класс $\mathcal{H}(\Omega)$ для $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ тесно связан с классом $H(\Omega)$ голоморфных функций. Для $g \in H(\Omega)$ следует, что $g, \overline{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$, где $\overline{g}$ (называемой иногда антиголоморфной) есть комплексная сопряженная g, т.е. $\overline{g}(z) = \overline{g(z)}$ для $z \in \Omega$.

Замечание 1.2. *В обратном направлении, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является односвязной областью. Тогда для $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ существуют $f, g \in H(\Omega)$, так что $u = f + \overline{g}$ в Ω, где f и g определяются единственным образом, если $f(z_0) = u(z_0)$ для некоторой точки $z_0 \in \Omega$.*

1.2.1. *Преобразование Кельвина.* Это преобразование K_u (см. [2], Гл. 4) функции $u : E \to \mathbb{C}$ для $E \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ определяется на инверсии E^* множества E относительно S_n (см. 1.1) формулой

$$K_u(x) = |x|^{2-n}\, u(x^*) \text{ для } x \in E^*, \tag{1.9}$$

и K_u является своим обратным, т.е. $K_v = u$ for $v = K_u$. Его наиболее важным свойством является сохранение гармонических функций: для $u : \Omega \to \mathbb{C}$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ следует, что $u \in \mathcal{H}(\Omega) \iff K_u \in \mathcal{H}(\Omega^*)$ (см. [2], Теорему 4.7).

Это свойство позволяет естественным образом расширить класс $\mathcal{H}(\Omega)$ также для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ с $\infty \in \Omega$ следующим образом: $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, если $u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\infty\})$ и преобразование $K_u \in \mathcal{H}(\Omega^* \setminus \{0\})$ имеет (изолированную) устранимую особенность в начале координат. Существование конечного предела

$$\lim_{x \to \infty} |x|^{n-2}\, u(x) = c \in \mathbb{C} \tag{1.10}$$

очевидно необходимо для этого, имея следствием $u(x) \to c$ когда $x \to \infty$ с $c = 0$ для $n > 2$, что также достаточно для K_u иметь устранимую особенность в начале координат (см. [2], Теоремы 4.8 и 4.9). Таким образом, класс $\mathcal{H}(\Omega)$ для области $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ с $\infty \in \Omega$ может быть определен как множество функций $u \in C(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\infty\})$ с $u(\infty) = 0$ для $n > 2$. В частности, для фундаментального решения (1.4) имеем, что $h_n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{\zeta\})$ для $n > 2$. Свойство $u \in \mathcal{H}(\Omega) \iff K_u \in \mathcal{H}(\Omega^*)$ становится теперь справедливой для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$; но отметим, что если $u \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}^n})$, тогда $u \equiv const$ для $n = 2$ и $u \equiv 0$ для $n > 2$ по теореме Лиувилля (см.[2], Теорему 2.1). По этой причине мы будем рассматривать ниже гармонические функции на собственных подобластях $\Omega \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

1.2.2. *Сферические Гармоники.* Многочлен p в $\mathbb{R}^n$ есть функция вида

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha x^\alpha, \tag{1.11}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}_0$, $c_\alpha = c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathbb{C}$ и $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ для мульти-индекса $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$; тогда $p(x) \equiv 0$ для всех $c_\alpha = 0$ есть нулевой многочлен. Степень ненулевого многочлена p это число $m_p = \max|\alpha| \le m$ с $c_\alpha \ne 0$.

Пусть $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ для $m \in \mathbb{N}_0$ есть класс комплекснозначных многочленов p в $\mathbb{R}^n$, которые однородны степени m, т.е. удовлетворяют условию

$$p(tx) = t^m p(x) \text{ для } t \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

По (1.11)-(1.12), многочлен p в $\mathbb{R}^n$ принадлежит к $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, если p есть сумма вида

$$p(x) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha x^\alpha \text{ для } x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда и из (1.11) следует, что: 1) $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow p \equiv const$; 2) $p \equiv 0 \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$; 3) $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ есть многочлен в точности порядка m, исключая случай $p \equiv 0$.

Дифференцируя (1.12) по параметру t и затем полагая $t = 1$, мы приходим к тождеству Эйлера

$$(1.13) \qquad (\nabla p_m)(x) \cdot x = \sum_{k=1}^{n} x_k (\partial_k p_m)(x) = m p_m(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим теперь для $m \in \mathbb{N}_0$ класс однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени m :

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) := \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^n),$$

и класс сужений многочленов $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ на единичной сфере S_n :

$$\mathcal{H}_m(S_n) := \{Y = (p \mid S_n) : p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Исторически многочлены $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ называются твердыми сферическими гармониками в $\mathbb{R}^n$ порядка m, а их сужения $Y \in \mathcal{H}_m(S_n)$ - сферическими гармониками Лапласа степени m (см. [3], Гл.4 и [2]); отметим, что Y определяет соответствующий p однозначно по (1.12):

$$(1.12') \qquad p(x) = r^m Y(\zeta) \text{ для } x = r\zeta \in \mathbb{R}^n,\ r = |x|\,,\ \zeta \in S_n.$$

Пример 1.1. *Твердые и Лапласа сферические гармоники в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ имеют довольно компактный вид (см. [2], Гл. 5):*

$$p(z) = az^m + \overline{bz^m} \text{ для } z \in \mathbb{C},$$

с постоянными $a, b \in \mathbb{C}$, так что $p(z) = r^m Y(\zeta)$ для $z = r\zeta$ с $r = |z| \geq 0$, $\zeta = e^{i\theta}$ и

$$Y(\zeta) = ae^{im\theta} + \bar{b}e^{-im\theta} \text{ для } \theta \in [0, 2\pi],$$

где Y имеет на S_2 L_2 - норму

$$\|Y\|_2 = (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}.$$

2. Разложение Лапласа гармонических функций

1^o. Разложение Лапласа с конечным центром. Следующее предложение важно для дальнейшего обсуждения (см. [2], Следствие 5.34):

Предложение 2.1. *Если $u \in \mathcal{H}(B)$ для $B = B_n(a, r_0)$ с $a \neq \infty$, то тогда существует (единственная) последовательность $\{u_m\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, такая, что*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x-a) \text{ для } x \in B, \tag{2.1}$$

где ряд сходится абсолютно и локально-равномерно в B.

Очевидно, u вещественнозначна тогда и только тогда, если многочлены u_m в (2.1) вещественнозначны для $m \in \mathbb{N}_0$.

Ряды вида (2.1) называются рядами Лапласа (с центром a). Они могут быть представлены также в терминах сферических гармоник $Y_m \in \mathcal{H}_m(S_n)$, называемые коэффициентами Лапласа. Полагая в (2.1) $x = a + r\zeta$ с $r = |x-a|$ и $\zeta \in S_n$, мы получим по (1.12') разложение

$$u(x) = u(a + r\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\zeta) r^m \text{ для } x \in B, \tag{2.1'}$$

сходящийся абсолютно и равномерно, если $(r, \zeta) \in [0, r'] \times S_n$ для каждого $r' \in [0, r_0)$.

Следующий пример следует из Замечания 1.1 и Примера 1.1.

Пример 2.1. *Разложения (2.1)-(2.1') для $u \in B_2(r_0)$ имеют вид:*

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (f_m z^m + \overline{g_m z^m}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m (f_m e^{im\theta} + \overline{g}_m e^{-im\theta}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

для $z = re^{i\theta}$ с $r \in [0, r_0)$ и $\theta \in [-\pi, \pi]$, где f_m, $g_m \in \mathbb{C}$.

Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда для $u \in \mathcal{H}(B)$ в Предложении 2.1 следует, что также $\partial^\alpha u \in \mathcal{H}(B)$, и из (2.1) следует, что

$$(\partial^\alpha u)(x) = \sum_{m=|\alpha|}^{\infty} (\partial^\alpha u_m)(x-a) \text{ для } x \in B,$$

где $\partial^\alpha u_m \in \mathcal{H}_{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ и ряд сходится абсолютно и локально-равномерно в B.

Следствие 2.1. *Пусть $u \in \mathcal{H}(B)$ с $B = B_n(r_0)$ вещественнозначна с разложением (2.1) для $a = 0$. Тогда полагая*

$$\mathrm{v}(x) = (\nabla u)(x) \cdot x \text{ для } x \in B,$$

имеем по (1,13), Замечания 2.1 и Предложения 2.1, что $v \in \mathcal{H}(B)$ и локально-равномерно в B

$$\mathtt{v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m u_m(x) \text{ для } x \in B.$$

2^o. Разложение Лапласа с центром в ∞. Пусть $u \in \mathcal{H}(B)$ для $B = B_n(\infty, r_0)$, так что $0 \notin B$. Тогда $K_u \in \mathcal{H}(B^*)$ с инверсией $B^* = B_n(r_0)$ шара B, и по (2.1), существует (единственная) последовательность $\{p_m\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$K_u(x^*) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x^*) \text{ для } x^* \in B^*,$$

где ряд сходится абсолютно и локально-равномерно в B^*. Умножая здесь обе части на $|x|^{2-n}$ для $x \in B$, мы приходим для u к разложению

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{u_m}(x) = |x|^{2-n} \sum_{m=0}^{\infty} u_m\left(|x|^{-2} x\right) \text{ для } x \in B, \tag{2.3}$$

сходящийся абсолютно и локально-равномерно в B, где $K_{u_m} \in \mathcal{H}_m(\overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\})$. Наконец, полагая $x = r\zeta$ в (2.3), мы получим для $u \in \mathcal{H}(B)$ разложение

$$u(r\zeta) = r^{2-n} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\zeta) r^{-m} \text{ для } rr_0 > 1,\ \zeta \in S_n, \tag{2.3'}$$

сходящийся абсолютно и равномерно, если $\zeta \in S_n$ and $rr' \geq 1$ для каждого $r' \in (0, r_0)$.

3^o. Нормальная сходимость рядов Лапласа. Отметим теперь, что абсолютная и локально-равномерная сходимость рядов (2.1) и (2.1') в $B = B_n(a, r_0)$ с $a \neq \infty$ формально равносильна более строгому условию - сходимости мажорирующих степенных рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_m\|_{\infty} r^m < +\infty \text{ для } r \in [0, r_0). \tag{2.4}$$

Отметим для этого, что по тождеству Грина для единичного шара, $Y_m \perp Y_k$ на S_n для $m \neq k$, приводящем для (2.1') с $u_r(\zeta) := u(a + r\zeta)$ к тождеству Парсеваля

$$\|u_r\|_2^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|Y_m\|_2^2 r^{2m} < +\infty \text{ для } r \in [0, r_0). \tag{2.5}$$

По формуле Коши-Адамара, радиус сходимости $\rho \geq r_0 > 0$ ряда (2.5) определяется формулой

$$\rho = \begin{cases} 1/\Lambda, & \text{если} \quad \Lambda \neq 0, \\ \infty, & \text{если} \quad \Lambda = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$\Lambda := \limsup_{m\to\infty} \|Y_m\|_2^{1/m} < +\infty. \tag{2.7}$$

Очевидно, мы имеем по (2.6)-(2.7) тот же радиус сходимости $\rho \geq r_0$ также для степенного ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_m\|_2 \, r^m < +\infty \text{ для } r \in [0, \rho). \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. *Фактически разложение(2.1') вместе с (2.7) означает для каждого* $q \in [1, +\infty)$, *что*

$$\Lambda = \limsup_{m\to\infty} \|Y_m\|_\infty^{1/m} = \limsup_{m\to\infty} \|Y_m\|_q^{1/m}, \tag{2.9}$$

предоставляя формулу (2.6) вместе с (2.9) для радиуса сходимости ρ.

Пусть для этого $Y_m = p_m \mid S_n$ с $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, выберем $\zeta_m \in S_n$ так, что $\|Y_m\|_\infty = |Y_m(\zeta_m)|$, и положим $x_m = r\zeta_m$ с $r \in [0, 1)$. По неравенству Йенсена (см. [4], Теорему 3.3), функция $f = |p_m|^q$ для $q \geq 1$ удовлетворяет неравенству о среднем значении и субгармонична в $\mathbb{R}^n$. Из оценки (1.6) интеграла Пуассона (1.5) функции f для $x = x_m$ следует, что

$$r^{qm} \|Y_m\|_\infty^q = |p(x_m)|^q \leq P_f(x_m) \leq (1-r)^{-n} \|Y_m\|_q^q.$$

Учитывая теперь, что $\|Y_m\|_q \leq \|Y_m\|_\infty$ для всех $q \geq 1$, мы получим, что

$$c_r \|Y_m\|_\infty^{1/m} \leq \|Y_m\|_q^{1/m} \leq \|Y_m\|_\infty^{1/m} \text{ с } c_r = r(1-r)^{n/(qm)}.$$

Полагая здесь $r = r_m = 1 - 1/m$, мы видим, что $c_{r_m} \to 1$ когда $m \to \infty$, доказывая (2.9) по (2.6)-(2.7).

Отметим в частности, что в случае $n = 2$ и $a = 0$ условие (2.4) получает по Примеру 1.1 вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} (|f_m| + |g_m|) \, r^m < +\infty \text{ для } r < r_0. \tag{2.10}$$

Можно показать как выше, что абсолютная и локально-равномерная сходимости рядов (2.3)-(2.3') для разложения функции $u \in \mathcal{H}(B)$ в $B = B_n(\infty, r_0)$ равносильны сходимости мажорирующего степенного ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_m\|_\infty \, r^{2-n-m} < +\infty \text{ для } rr_0 > 1, \tag{2.11}$$

радиус сходимости которого $\rho \geq r_0 > 0$ опять определяется по (2.6) и (2.9), гарантируя сходимость для $r\rho > 1$, т.е. в максимальном шаре $B_n(\infty, \rho)$.

3. Гармоническое продолжение

3.1. **Гармонические (функции) элементы и их продолжения.** Понятие аналитической (функции) элемента, т.е. степенного ряда, сходящегося в круге из $\mathbb{C}$, является основным в теории аналитических функций по Карлу Вейерштрассу. Для теории гармонических функций в $\mathbb{R}^n$ или в $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$ $(n \geq 2)$ аналогичную роль будут играть ряды Лапласа вида (2.1)-(2.1') или (2.3)-(2.3') в качестве локальных разложений гармонических функций. Таким образом, понятие гармонической (функции) элемента или гармонического элемента может быть формализован следующим образом.

Определение 3.1. *1) Гармонической элемент в* $\mathbb{R}^n$ *с центром* a *это упорядоченная пара* (u, B), *где* B *есть открытый шар в* $\mathbb{R}^n$ *с центром* a *и* $u \in \mathcal{H}(B)$, *представленная рядом Лапласа вида (2.1)-(2.1'), удовлетворяющим условию (2.4).*

2) Гармонической элемент в $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$ *с центром* ∞ *это упорядоченная пара* (u, B), *где* B *открытый шар с центром* ∞ *и* $u \in \mathcal{H}(B)$, *представленная рядом Лапласа вида (2.3)-(2.3'), удовлетворяющим (2.11).*

3) Скажем, что гармонический элемент (u, B) *канонический, если* B *есть шар сходимости соответствующего ряда Лапласа и с конечным радиусом сходимости* $\rho < +\infty$ *(определенный по формулам (2.6) и (2.9) для обеих рядов (2.1)-(2.1'), и (2.3)-(2.3')).*

Концепция гармонического продолжения как части теории гармонических функций может быть развит с использованием приведенного выше понятия гармонического элемента (в $\mathbb{R}^n$ или в $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$) и теоремы единственности для гармонических функций. Это может быть сделано как прямой аналог концепции аналитического продолжения с помощью аналитических элементов -сходящихся степенных рядов, начатый Карлом Вейерштрассом (см. [4], Глава 16). Очевидно, проблема гармонического продолжения уместна для гармонических элементов с конечным радиусом сходимости.

Следуя Вейерштрассу будем говорить, что два гармонических элемента (u_0, B_0) и (u_1, B_1) являются прямым гармоническим продолжением каждый другого, и писать $(u_0, B_0) \sim (u_1, B_1)$, если $B_0 \cap B_1 \neq \varnothing$ и $u_0 = u_1$ в $B_1 \cap B_0$.

Пусть для данного гармонического элемента (u_0, B_0) имеется для некоторого $m \in \mathbb{N}$ цепь шаров

$$\mathcal{C} = \{B_0, B_1, \dots, B_m\},$$

такая что $B_{k-1} \cap B_k \neq \varnothing$ для $k = 1, \dots, m$, с соответствующими гармоническими элементами (u_k, B_k), удовлетворяющими

$$(u_0, B_0) \sim (u_1, B_1) \sim \cdots \sim (u_m, B_m). \tag{3.1}$$

Тогда (u_m, B_m) есть гармоническое продолжение (u_0, B_0) вдоль цепи $\mathcal{C}$. Это продолжение определяется единственным образом по цепи $\mathcal{C}$.

Замечание 3.1. *Гармонический элемент (u_m, B_m) не обязан быть прямым гармоническим продолжением элемента (u_0, B_0), даже если $B_m \cap B_0 \neq \varnothing$; но для $m = 2$ (для трех шаров) дополнительное предположение $B_2 \cap B_1 \cap B_0 \neq \varnothing$ влечет $(u_0, B_0) \sim (u_2, B_2)$, поскольку тогда $u_2 = u_1 = u_0$ в $B_2 \cap B_1 \cap B_0$ и $u_2 = u_0$ в $B_2 \cap B_0$ по теореме единственности.*

Далее, пусть γ есть кривая в $\overline{\mathbb{R}^n}$, т.е. непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда $\gamma(0)$ есть начальная точка и $\gamma(1)$ - конечная точка γ. Говорят, что цепь шаров $\mathcal{C}$ покрывает γ, если есть разбиение $[0,1]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1,$$

такое, что $\gamma(0)$ это центр B_0, $\gamma(1)$ есть центр B_m и $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$ для $k = 1, 2, \dots, m$. Если гармонический элемент (u_0, B_0) может быть продолжен вдоль цепи шаров $\mathcal{C}$ как в (3.1), тогда (u_m, B_m) называется гармоническим продолжением (u_0, B_0) вдоль γ. Это продолжение единственное, используя Замечание 3.1 и индукцию по m (ср. [4], Теорему 16.11).

Определение 3.2. *Пусть Ω есть область в $\mathbb{R}^n$ (в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$) и (u, B) - гармонический элемент с центром $a \in \Omega$ (с центром ∞). Скажем, что (u, B) имеет однозначное гармоническое продолжение на Ω, если фактически $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, представленная в B рядом Лапласа вида (2.1)-(2.1') (вида (2.3)-(2.3')). Множество таких гармонических элементов (u, B) обозначим через $\mathcal{H}_a(\Omega)$.*

Мы не будем обсуждать здесь вопрос о продолжении гармонических элементов на соответствующие n - мерные аналоги поверхностей Римана. В рамках определения 3.2, следующие две основные проблемы возникают среди прочих:

1. Проблема о возможности однозначного гармонического продолжения гармонического элемента (u, B) в область $\Omega \supset B$;

2. Проблема о восстановлении гармонического продолжения элемента (u, B) в Ω в проблеме 1, если ее возможность известна каким-то образом.

В этой статье мы будем обсуждать в основном вторую проблему.

Конечно, если $(u, B) \in \mathcal{H}_a(\Omega)$, тогда (u, B) определенно имеет гармоническое продолжение вдоль каждой кривой в Ω с начальной точкой a, но обратное, вообще говоря, неверно. Следующий аналог теоремы Вейерштрасса о Монодромии (ср. [4], Теорему 16.16) для случая гармонического продолжения может быть полезным при обсуждении отмеченных двух основных проблем, и может быть доказан как в [4], используя Замечание 3.1.

Предложение 3.1. *Пусть Ω односвязная область в $\mathbb{R}^n$ (в $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\{0\}$) и (u, B) есть гармонический элемент с центром $a \in \Omega$ (с центром $a = \infty$), имеющий гармоническое продолжение вдоль каждой кривой в Ω с начальной точкой a. Тогда (u, B) имеет однозначное гармоническое продолжение на Ω, т.е. $(u, B) \in \mathcal{H}_a(\Omega)$.*

Определение 3.3. *Пусть (u, B) есть канонический гармонический элемент с центром $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Мы скажем, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}\setminus\{0\}$ для $a = \infty$) с $B \subset \Omega$ есть звезда Миттаг Леффлера для (u, B), если Ω является максимальной звездной областью с центром a, так что (u, B) имеет гармоническое продолжение вдоль каждого отрезка $[a, x]$ ($[x, \infty]$ для $a = \infty$) с $x \in \Omega$.*

3.2. **Матричные методы суммирования.** Метод Вейерштрасса переразложения для построения аналитического продолжения некоторого аналитического элемента (степенного ряда) был полезен в исследовании проблемы о локализации особенностей степенных рядов на границе круга сходимости (в терминах их коэффициентов; см. [5] результаты Адамара, Фабри и других авторов в этом направлении). Но как это было отмечено последователями Вейерштрасса (см. [6], Гл.2) многократное применение метода переразложения оказалось менее полезной в исследовании отмеченных выше двух проблем о возможности продолжения и о восстановлении этого продолжения в случае аналитических элементов; попытки приспособить метод переразложения для гармонического продолжения представляется непродуктивным даже для одноразового применения. По этой причине, как и в случае аналитического продолжения аналитических элементов, мы будем рассматривать методы матричного суммирования как основные методы для решения отмеченной выше проблемы о восстановлении гармонического продолжения гармонических элементов.

(a). Матричное суммирование аналитических элементов. Пусть I есть бесконечное множество (в некотором топологическом пространстве) с предельной точкой τ_0. Рассмотрим последовательность комплексных чисел

$$\mathcal{C} = \{c_m(\tau)\}_{m=0}^{\infty}, \tag{3.2}$$

зависящих от параметра $\tau \in I$. В случае $I = \mathbb{N}$ или $I = \mathbb{N}_0$ с $\tau_0 = \infty$ последовательности $\mathcal{C}$ фактически являются бесконечными матрицами, термин, используемый иногда также в случае общих бесконечных множеств I. Говорят, что бесконечная матрица $\mathcal{C}$ вещественная (соотв. положительная), если $c_m(\tau) \in \mathbb{R}$ (соотв. если $c_m(\tau) \geq 0$) для $(m, \tau) \in \mathbb{N}_0 \times I$.

Бесконечные матрицы $\mathcal{C}$ вида (3.2), подчиненные условию

$$\limsup_{m\to\infty} |c_m(\tau)|^{1/m} = 0 \quad \text{для всех} \quad \tau \in I \tag{3.3}$$

составляют семейство так называемых полунепрерывных методов суммирования, получивших плодотворные применения в задачах суммирования степенных рядов вне их круга сходимости, как основное средство для восстановления их аналитического продолжения.

Матрица $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3) порождает целую функцию

$$C_\tau(w) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\tau) w^m \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.4}$$

зависящую от параметра $\tau \in I$.

Пусть теперь $H_a(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ есть множество аналитических элементов (степенных рядов) с центром $a \in \Omega$:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m (z-a)^m \quad \text{для} \quad |z-a| < r, \tag{3.5}$$

имеющих однозначное аналитическое продолжение в Ω. Тогда матрица $\mathcal{C}$ порождает целую функцию $C_\tau * f = f_\tau$, Адамара композицию рядов (3.4) и(3.5) с $w = z{-}a$, зависящую от параметра $\tau \in I$:

$$f_\tau(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\tau) f_m (z{-}a)^m \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Матрица (3.2)-(3.3) называется эффективной для $H_a(\Omega)$, если для каждого элемента $f \in H_a(\Omega)$ условие

$$\lim_{\tau \to \tau_0} (C_\tau * f)(z) = f(z) \quad \text{для} \quad z \in \Omega \tag{3.6}$$

выполняется локально-равномерно в Ω.

В случае существования такой матрицы $\mathcal{C}$ называют $\Omega \subset \mathbb{C}$ областью эффективной суммируемости для $H_a(\Omega)$. Решение классической проблемы восстановления аналитического продолжения в Ω аналитических элементов $H_a(\Omega)$ с помощью фиксированного метода матричного суммирования был начат Е. Борелем (см.[7]) и продолжен Миттаг-Леффлером (в пределах “звезды Миттаг-Леффлера” аналитического элемента, см. [8]), Е. ЛеРуа (см. [9]), и Е. Линделефом (в “спирально-звездных областях”, см. [10]) и другими (см. [11]-[14]). Описание соответствующих “областей эффективной суммируемости” для $H_a(\Omega)$ см. [1], Теорема 2.1, утверждающая, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ есть область эффективной суммируемости для $H_a(\Omega)$, тогда и только тогда, если Ω является (спиральной) α-звездий с центром a для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ (как это определено в подсекции 1.1, пункт (f)).

(b) Матричное суммирование гармонических элементов. В этой статье мы будем использовать матрицы типа (3.2)-(3.3) для суммирования - на этот раз гармонических элементов вида (2.1)-(2.1’) или (2.3)-(2.3’) - вне их шаров сходимости как средство их гармонического продолжения. Рассмотрим для этого преобразование $C_\tau * u = u_\tau$ (для $\tau \in I$) ряда Лапласа (2.1):

$$u_\tau(x) := \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\tau) p_m(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.7}$$

представляющая собой функцию $u_\tau \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ для $\tau \in I$, аналог композиции Адамара для двух степенных рядов; фактически, условие (3.3) вместе с (2.4) и (2.11) будет обеспечивать локально-равномерную сходимость и гармоничность для всех $\tau \in I$ ряда (3.7) в $\mathbb{R}^n$. Соответственно преобразование $C_\tau * u = u_\tau$ (для

$\tau \in I$) ряда Лапласа вида (2.3):

$$u_\tau(x) := |x|^{2-n} \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\tau) u_m\left(|x|^{-2}\, x\right) \text{ для } x \in \overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}, \tag{3.8}$$

представляет собой функцию $u_\tau \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\})$ для $\tau \in I$.

Определение 3.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть область с $a \in \Omega$ (с $a = \infty$ для $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$). Назовем Ω областью эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_a(\Omega)$, если существует положительная бесконечная матрица $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3) такая, что для каждого гармонического элемента $(u, B) \in \mathcal{H}_a(\Omega)$ условие*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} (C_\tau * u)(x) = u(x) \text{ для } x \in \Omega \tag{3.9}$$

выполняется локально-равномерно в Ω. Тогда назовем $\mathcal{C}$ эффективной матрицей для $\mathcal{H}_a(\Omega)$.

Замечание 3.2. *Очевидно, области $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$ и $\Omega = B_n(a, r_0)$ с $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ являются областями эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_a(\Omega)$, с положительной эффективной матрицей $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3), где $I = \mathbb{N}$ с предельной точкой $+\infty$, $c_m(k) = 1$ для $m \le k$ и $c_m(k) = 0$ для $m > k$, $k \in \mathbb{N}$, так что $u_k(x)$ есть k-тая частная сумма разложения Лапласа (2.1), (2.3) функции u.*

Следующее замечание аргументирует в некотором смысле необходимость рассмотрения для гармонического продолжения бесконечных матриц, которые вещественны и положительны.

Замечание 3.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с $a \in \Omega$ (с $a = \infty$ для $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$) есть область эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_a(\Omega)$ с эффективной матрицей $\mathcal{C}$. Тогда: (a) $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\Omega$ должно быть связным; (b) можно считать, что матрица $\mathcal{C}$ вещественна; (c) для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ следует, что $c_m(\tau) \to 1$ когда $\tau \to \tau_0$, так что $c_m(\tau) \ge 0$ для τ вблизи τ_0.*

Отметим для (a), что если $\overline{\mathbb{R}}\backslash\Omega$ имеет компактную компоненту K (в $\mathbb{R}^n$ или в $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$), тогда $K \subset G$, где $\overline{G}$ есть компактное множество с $\partial G \subset \Omega$, и по (3.9), равномерная сходимость u_τ (когда $\tau \to \tau_0$) на ∂G приводит к равномерной сходимости u_τ также на K, что невозможно для элементов $u \in \mathcal{H}_a(\Omega)$, имеющих особенность на K (см. фундаментальное решение $x \to h_n(x - \zeta)$ с $\zeta \in K$). Отметим для (b), что если $u \in \mathcal{H}_a(\Omega)$, тогда также $\overline{u} \in \mathcal{H}_a(\Omega)$, и из (3.9) следует, что сопряженная матрица $\overline{\mathcal{C}}$ также эффективна для $\mathcal{H}_a(\Omega)$ вместе с матрицей $\mathcal{C}$. Тогда имеем, что вещественная матрица $\operatorname{Re}\mathcal{C} = \{\operatorname{Re} c_m(\tau)\}_{m=0}^{\infty}$, $\tau \in I$ также эффективна для $H_a(\Omega)$. Далее, если $u = p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ для $m \in \mathbb{N}_0$ и p_m ненулевой, то тогда по (3.9) для $x \in \Omega$ с $p_m(x) \neq 0$, следует, что $u_\tau(x) = c_m(\tau)p_m(x) \to p_m(x)$ когда $\tau \to \tau_0$, влекая (c).

4. Основные результаты

Основные результаты этой статьи связаны с проблемами: описания областей в $\overline{\mathbb{R}^n}$ эффективной суммируемости для рядов Лапласа вне шара их сходимости; описания соответствующих эффективных матричных методов суммирования. Они представлены в следующих двух теоремах.

Теорема 4.1. *Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с $a \in \Omega$ есть область эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_a(\Omega)$ (см. определение 3.3) тогда и только тогда, если Ω является звездной областью с центром в a. Это утверждение верно и для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}\backslash\{0\}$ с центром в $a = \infty$.*

В частности, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является областью эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_a(\Omega)$ с произвольным центром $a \in \Omega$ тогда и только тогда, если Ω является выпуклой областью.

Теорема 4.1 показывает, что гармонические функции в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ менее гибки, чем аналитические функции в $\mathbb{C}$, где α-звездные области также являются областями эффективной суммируемости для степенных рядов (см. [1]); ситуация похожая также в $\mathbb{C}^m$ для $m \geq 2$ при суммировании однородных степенных рядов (см. [15]).

Отметим, что доказательство Теоремы 4.1 для какого-нибудь $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ можно легко свести (параллельным переносом или преобразованием Кельвина) к случаю $a = 0$. Мы также исключаем тривиальные случаи, отмеченные в замечании 3.4.

Теорема 4.2. *Для всех звездных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с центром $a \in \Omega$ существуют универсальные (т.е. независимые от конкретного Ω, от a и $n \geq 2$) положительные матрицы $\mathcal{C}$ типа (3.2)-(3.3), которые эффективны для $\mathcal{H}_a(\Omega)$. Эти матрицы характеризуются следующим свойством: целые функции C_τ для*

$\tau \in I$, порожденные по (3.4), удовлетворяют локально-равномерно условию

$$\lim_{\tau \to \tau_0} C_\tau(w) = (1-w)^{-1} \text{ для } w \in \mathbb{C} \backslash [1, +\infty). \tag{4.1}$$

Это утверждение верно также для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n} \backslash \{0\}$ с центром $a = \infty$.

Очевидно, условие (4.1) необходимо, поскольку геометрический ряд

$$(1-w)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} w^m \quad \text{для} \quad |w| < 1 \tag{4.2}$$

представляет аналитический, а также гармонический элемент в единичном круге $B_2 \subset \mathbb{C}$, определяющий аналитическую (гармоническую) функцию в звездной области $\mathbb{C} \backslash [1, +\infty)$ с центром 0. Таким образом остается доказать часть достаточности Теоремы 4.2 об универсальности матриц вида (3.2)-(3.3), удовлетворяющих (4.1).

Доказательство Теорем 4.1 и 4.2 состоит из нескольких шагов.

4.1. **Доказательство Теорем 4.1 и 4.2 для** $n = 2$. 1^o. Перед доказательством Теоремы 4.1 для $n = 2$ нам нужны некоторые вспомогательные результаты.

Пусть Ω есть область в $\mathbb{C}$ с $\Omega^c \neq \varnothing$ и $B = B_n(r_0) \subset \Omega$. Описание таких областей Ω эффективной суммируемости для $H_0(\Omega)$ (голоморфный случай) был обсужден в [1], §2, где через $\mathfrak{M}_0(\Omega) \neq \varnothing$ обозначено множество (возможных) бесконечных матриц $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3), которые эффективны для $H_0(\Omega)$, т.е. матриц, которые порождают согласно (3.4) семейство целых функций C_τ, $\tau \in I$, удовлетворяющих условию (3.6). Напомним, что условие $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}_0(\Omega)$ фактически равносильно возможности суммирования по $\mathcal{C}$ геометрического ряда (4.2) в подходящих областях, зависящих от Ω и содержащих единичный круг B_2.

Положим для этого

$$\Omega_* := \bigcup_{\zeta \in \Omega^c} \Omega_\zeta \text{ с } \Omega_\zeta = \{w = z/\zeta : z \in \Omega\}, \tag{4.3}$$

и пусть Ω_*^c есть дополнение Ω_*, так что $1 \in \Omega_*^c$. Поскольку Ω_ζ есть область для каждого $\zeta \in \Omega^c$ и $0 \in \Omega_\zeta$, имеем, что Ω_* также область в $\mathbb{C}$, с $B_2 \subset \Omega_*$. Легко видеть, что фактически Ω_*^c является моноидом в $\mathbb{C}$, т.е. (дополнительно к $1 \in \Omega_*^c$) имеем, что $ab \in \Omega_*^c$ для всех $a, b \in \Omega_*^c$. Следующая лемма является частью Леммы 2.3 из [1]:

Лемма 4.1. *Матрица $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3) эффективна для $H_0(\Omega)$ (т.е. $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}_0(\Omega)$) тогда и только тогда, если целые функции C_τ для $\tau \in I$, порожденные по $\mathcal{C}$ в*

(3.4), удовлетворяют локально-равномерно в Ω_* условию

$$\lim_{\tau\to\tau_0} C_\tau(w) = (1-w)^{-1} \text{ для } w \in \Omega_*. \tag{4.4}$$

Другими словами, условие (4.4) равносильно условию (3.6).

Рассмотрим теперь вместе с Ω область

$$\widetilde{\Omega} := \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in \Omega\}, \tag{4.5}$$

симметричную к Ω относительно оси $\mathbb{R}$, и соответствующую область для Ω_* :

$$\widetilde{\Omega}_* := \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in \Omega_*\}. \tag{4.3'}$$

Из Леммы 4.1 следует следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Вещественная матрица $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3) эффективна для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, тогда и только тогда, если целые функции C_τ для $\tau \in I$, порожденные по $\mathcal{C}$ в (3.4), удовлетворяют локально-равномерно условию (4.4) в области Ω_*, определенной по (4.3).*

Доказательство. Если $\mathcal{C}$ эффективна для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, тогда поскольку $H(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$, то $\mathcal{C}$ эффективна также для $H_0(\Omega)$ и по Лемме 4.1, $\mathcal{C}$ должна удовлетворять условию (4.4). Обратно, пусть вещественная матрица $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3) удовлетворяет (4.4). Тогда по Лемме 4.1 мы имеем сначала, что $\mathcal{C}$ эффективна для $H_0(\Omega)$, и по Замечанию 3.1 (a), что $\mathbb{C}\backslash\Omega$ связно. Далее, каждая $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ имеет по Замечанию 1.1 представление $u = f + \overline{g}$ в Ω, где $f, g \in H(\Omega)$ и $\overline{g}$ комплексная сопряженная g, а формула

$$\widehat{g}(w) := \overline{g}(\overline{w}) \text{ для } w \in \widetilde{\Omega}$$

определяет функцию $\widehat{g} \in H(\widetilde{\Omega})$.

Отметим теперь, что поскольку целые функции C_τ для $\tau \in I$ имеют вещественные коэффициенты, тогда из (4.4) для $w \in \Omega$ следует, что (4.4) должна выполняться также для $\overline{w} \in \Omega$, т.е. для $w \in \widetilde{\Omega}$. Это по Лемме 4.1 влечет, что матрица $\mathcal{C}$ эффективна также для $H_0(\widetilde{\Omega})$, так что по (3.6) условие

$$\lim_{\tau\to\tau_0} (C_\tau * \widehat{g})(w) = \widehat{g}(w) \text{ для } w \in \widetilde{\Omega} \tag{4.6}$$

удовлетворяется локально-равномерно в $\widetilde{\Omega}$. Полагая в (4.6) $w = \overline{z}$ с $z \in \Omega$, мы получим, что $\mathcal{C}$ эффективна также для анти-голоморфных функций $\overline{g}$ в Ω и таким образом для всех $u = f + \overline{g} \in H_0(\Omega)$. □

2^o. Доказательство Теоремы 4.1 для $n=2$. (a) Необходимость. Пусть Ω есть область в $\mathbb{C}$ с $B = B_2(r_0) \subset \Omega$ эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, с эффективной вещественной бесконечной матрицей $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3). Тогда по Лемме 4.2 целые функции C_τ для $\tau \in I$, порожденные по $\mathcal{C}$ в (3.4), должны удовлетворять условию (4.4) локально-равномерно в Ω_*, и поскольку коэффициенты C_τ вещественны, то условие (4.4) должен выполняться локально-равномерно также для $w \in G := \Omega_* \cup \widetilde{\Omega}_*$ (см. (4.3)-(4.3')).

Таким образом, $G \subset \mathbb{C}$ есть область, симметричная относительно вещественной оси $\mathbb{R}$, с $B_2 \subset G$ и $1 \in G^c$. Поскольку C_τ целая функция для каждого $\tau \in I$, тогда чтобы удовлетворялась (4.6), необходимо условие $[1, +\infty) \subset G^c$. В противном случае существует точка $t_0 > 1$ с $t_0 \in G$ такая, что $t_0 \in \Omega_* \cap \widetilde{\Omega}_*$. Это влечет существование ломанной дуги $\gamma_1 \subset \Omega_*$, соединяющей точки 0 и t_0. Обозначим через γ_2 дугу, симметричную с γ_1 относительно $\mathbb{R}$, так что $\gamma_2 \subset \widetilde{\Omega}_*$ вновь соединяет точки 0 и t_0. Тогда замкнутая ломанная кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ в G будет изолировать точку 1 от ∞. По (4.4) имеем, что

$$\lim_{\tau \to \tau_0} (1-w) C_\tau(w) = 1$$

равномерно для $w \in \gamma$, и следовательно -также на ограниченной компоненте γ^c, содержащую точку $w = 1$, что очевидно невозможно для $w = 1$. Это доказывает, что $[1, +\infty) \subset G^c \subset \Omega_*^c$.

Отметим теперь, что по определению (4.3) области Ω_*, для любого $\eta \in \Omega_*^c$ и $\zeta \in \Omega^c$, следует, что по необходимости $\eta\zeta \in \Omega^c$. Поскольку $[1, +\infty) \subset \Omega^c$, тогда $t\zeta \in \Omega^c$ для всех $t \in [1, +\infty)$, означающее, что $\Omega^c \cup \{\infty\}$ есть звезда с центром ∞, или что равносильно - Ω есть звезда с центром 0, что завершает доказательство необходимой части.

(b) Достаточность. Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{C}$ с $\Omega^c \neq \varnothing$ есть звездная область с центром $0 \in \Omega$. Тогда $tz \in \Omega$ для каждого $z \in \Omega$ и $t \in [0, 1]$, что по (4.3) влечет $tw \in \Omega_*$ для каждой $w \in \Omega_*$ и $t \in [0, 1]$. Это означает, что Ω_* также звездная область с центром 0, или что равносильно - множество $\Omega_*^c \cup \{\infty\}$ есть звезда с центром ∞. Тогда поскольку $1 \in \Omega_*^c$, имеем, что $t \in \Omega_*^c$ для всех $t \geq 1$, т.е. $[1, +\infty) \subset \Omega_*^c$.

Отметим, что введенные выше множества $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Omega}_*$, которые симметричны к Ω и Ω_* соответственно относительно $\mathbb{R}$, также будут звездными областями с центром 0, так что $[1, +\infty) \subset G^c$ для $G := \Omega_* \cup \widetilde{\Omega}_*$. Теперь для существования матрицы $\mathcal{C}$

эффективной для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, достаточно по Лемме 4.2 отметить существование положительной матрицы $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3), для которой семейство целых функций C_τ, $\tau \in I$, определенное по (3.4), удовлетворяет локально-равномерно условию (4.4), или более строгому условию (4.1), гарантирующую универсальность $\mathcal{C}$ для всех звездных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ с центром $0 \in \Omega$. Представленные ниже в точке 3^0 исторические примеры положительных универсальных матриц, предложенные Е. Леруа, Э. Линделефом и Г. Миттаг-Леффлером, которые эффективны для всех звездных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, завершают доказательство Теоремы 4.1 для $n = 2$.

2^0. Доказательство Теоремы 4.2 для $n = 2$. Пусть теперь положительная матрица C вида (3.2)-(3.3) удовлетворяет условию (4.1). Тогда автоматически условие (4.4) Леммы 4.2 также будет выполнено, и матрица $\mathcal{C}$ будет эффективна для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, где Ω любая звездная область в $\mathbb{C}$ с центром 0. Это завершает доказательство нетривиальной части достаточности Теоремы 4.2 для $n = 2$.

3^0. Некоторые замечания. Из Леммы 4.2 следует, что положительная матрица $\mathcal{C}$ вида (4.2)-(4.3) универсально эффективна для всех $\mathcal{H}_a(\Omega)$, где Ω есть любая звездная область в $\mathbb{C}$ с центром a тогда и только тогда, если условие (4.1) выполнено для целых функций C_τ, порожденные по $\mathcal{C}$ согласно (3.4). Для применений существенно иметь для звездных областей Ω универсальные эффективные матрицы $\mathcal{C}$ по возможности более простого и конкретного вида. Отметим в этой связи исторические примеры (см. [11] – [14]) таких матриц $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{C}\backslash[1, +\infty))$ вида (3.2)-(3.3), $\mathcal{C} = \{c_m(\tau)\}_{m=0}^{\infty}$ для $\tau \in I$ с предельной точкой τ_0, предложенные:

(a) E. LeRoy (1900): $c_m(\tau) = \Gamma(1 + \tau m)/\Gamma(1 + m)$ для $0 < \tau < 1 := \tau_0$;

(b) E. Lindelöf (1903): $c_m(\tau) = m^{-\tau m}$ (с $c_0(\tau) \equiv 1$) для $\tau > 0 := \tau_0$;

(c) G. Mittag-Leffler (1908): $c_m(\tau) = 1/\Gamma(1 + \tau m)$ для $\tau > 0 := \tau_0$.

Пусть теперь $\Pi^o = \{z \in C : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ правая открытая полуплоскость. Следующая схема (см. [1], Теорему 2.2) позволяет построить семейство эффективных универсальных матриц, что может быть важным в исследовании скорости суммирования (в некотором смысле) разными эффективными матрицами.

Пример 4.1. *Пусть функция $\varphi \in H(\Pi^o)$ ограничена в $\Delta\backslash\{0\}$ для каждого замкнутого угла $\Delta \subset \Pi^o \cup \{0\}$ и удовлетворяющая*

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)|^{1/t} = 0, \quad \lim_{t\to+0} \varphi(t) = 1 := \varphi(0)$$

для $t \in (0, +\infty)$. Тогда бесконечная матрица

$$\mathcal{C} = \{\varphi(\tau m)\}_{m=0}^{\infty} \text{ для } \tau > 0 := \tau_0$$

эффективна для $\mathcal{H}_0(\mathbb{C}\backslash[1,+\infty))$ и, следовательно, для любого $\mathcal{H}_a(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{C}$ есть звездная область с центром в a.

В частности, легко проверить, что для любого $\delta > 0$ формула

$$\varphi(z) = \exp\left(-z \log^{\delta}(z+1)\right) \text{ для } z \in \Pi,$$

с главной частью логарифма на Π (так что $\log 1 = 0$) определяет функцию $\varphi \in H(\Pi)$, удовлетворяющую условиям Примера 4.1 с положительной матрицей $\mathcal{C}$, универсально эффективной для всех звездных областей в $\mathbb{C}$.

4.2. **Доказательство Теорем 4.1 и 4.2 для $n \geq 3$.**

1^o. Вспомогательные результаты. (a) Рассмотрим в $\mathbb{C}$ луч

$$l_\psi = [e^{i\psi}, \infty) = \{z = te^{i\psi} : t \geq 1\}$$

в направлении $e^{i\psi}$ для $\psi \in [-\pi, \pi]$, так что $l_0 = [1, +\infty)$ и $l_\pi = l_{-\pi} = (-\infty, -1]$. Тогда для $\varphi \in [0, \pi]$ область

$$\Omega_\varphi := \mathbb{C}\backslash(l_\varphi \cup l_{-\varphi}) \tag{4.7}$$

есть звезда с центром в начале координат, содержащая единичный круг B_2.

Пусть теперь $\alpha > 0$, $c > 0$ и $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда формула

$$f_\varphi(z) := c(1 - e^{i\varphi}z)^{-\alpha}(1 - e^{-i\varphi}z)^{-\alpha} \text{ для } z \in \Omega_\varphi \tag{4.8}$$

с $f_\varphi(1) = 1$ определяет функцию $f_\varphi \in H(\Omega_\varphi)$, положительную на $(-1, 1)$. Чтобы получить разложение в степенной ряд функции f_φ в B_2 с центром $z = 0$, можем использовать для $\psi \in [-\pi, \pi]$ биномиальную формулу Ньютона

$$(1 - e^{i\psi}z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\alpha)(e^{i\psi}z)^k \text{ для } z \in B_2, \tag{4.9}$$

где

$$b_k(\alpha) = \Gamma(\alpha + k)/[\Gamma(\alpha)k!] > 0 \text{ для } k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.10}$$

и ряд (4.9) сходится абсолютно и локально-равномерно в B_2.

Теперь разложение в степенной ряд функции f_φ в B_2 получается как произведение Коши двух степенных рядов вида (4.9) с $\psi = \pm\varphi$:

$$f_\varphi(z) = c\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\varphi) z^m \text{ для } z \in B_2, \tag{4.11}$$

где

$$a_m(\varphi) = \sum_{k=0}^{m} b_k(\alpha) b_{m-k}(\alpha)\cos[(m-2k)\varphi], \tag{4.12}$$

учитывая, что сужение f_φ на $(-1,1)$ вещественнозначно и даже положительно.

(b) Для аналитического продолжения степенного ряда (4.11) с коэффициентами (4.12), (4.10) из B_2 в область Ω_φ можно использовать, как в подсекции 4.1, методы (положительных) матриц суммирования вида (3.2)-(3.3), которые универсально эффективны для всех звездных областей в $\mathbb{C}$, т.е. удовлетворяют условию (4.1) Теоремы 4.2 (в доказанном выше случае $n = 2$). Фиксируя некоторую такую матрицу $\mathcal{C}$, имеем по (3.6), что локально-равномерно в Ω_φ

$$\lim_{\tau\to 0}(C_\tau * f_\varphi)(z) = f_\varphi(z), \quad z \in \Omega_\varphi,$$

для любого фиксированного $\varphi \in [0,\pi]$. В частности, имеем, что

$$\lim_{\tau\to 0}(C_\tau * f_\varphi)(r) = f_\varphi(r) \tag{4.13}$$

локально-равномерно для $r \in [0,1)$, если $r \in [0,\pi]$, и для $r \in [0,+\infty)$, если $\varphi \in (0,\pi]$. Следующая лемма несколько усиливает это утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{C}$ положительная матрица вида (3.2)-(3.3), удовлетворяющая условию (4.1). Тогда для каждого $\delta \in (0,1/2]$ условие (4.13) выполняется равномерно для $(r,\varphi) \in I_{1,\delta} \times [0,\pi]$ с $I_{1,\delta} = [0, 1-\delta]$ и для $(r,\varphi) \in I_{2,\delta} \times [\delta,\pi]$ с $I_{2,\delta} = [0, 1/\delta]$.*

Доказательство. Положим $G_{1,\delta} := B_2(1-\delta/2)$, с $I'_\delta \subset G_\delta$ и

$$G_{2,\delta} = B_2(1-\delta/2) \cup \{B_2(2/\delta) \cap \Delta_\delta\},$$

где

$$\Delta_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg\zeta| \le \delta/2\},$$

так что $I_{2,\delta} \subset G_\delta$. Таким образом, во всех случаях $\overline{G}_{k,\delta}$ для $k = 1,2$ есть компактное подмножество Ω_φ вместе с положительно ориентированной границей $L_{k,\delta}$.

Рассмотрим теперь два компактных подмножества $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$: $K_{1,\delta} = \overline{B}_2(1-\delta/2)$ и

$$K_{2,\delta} = \overline{B}_2(1/2) \cup \{\overline{B}_2(2/\delta)\backslash\Delta^o_\delta\}.$$

Можно легко проверить, что $w = r\zeta^{-1} \in K_{k,\delta}$ для $r \in I_{k,\delta}$ и $\zeta \in L_{k,\delta}$. Тогда из (4.1) следует для $k = 1, 2$, что равномерно

$$\lim_{\tau\to\tau_0} C_\tau\left(r\zeta^{-1}\right) = (1 - r\zeta^{-1})^{-1} \text{ для } (r,\zeta) \in I_{k,\delta} \times L_{k,\delta}. \tag{4.14}$$

Оценим теперь $|f_\varphi(\zeta)|$ для $\zeta \in L_{k,\delta}$. Очевидно, $\left|\zeta - e^{\pm i\varphi}\right| \geq \delta/2$, если $|\zeta| = 1-\delta/2$ для $k = 1$, или если $|\zeta| = 2/\delta$ для $k = 2$. В противном случае $\arg\zeta = \pm\delta/2$ (для $k = 2$) и

$$\left|\zeta - e^{\pm i\varphi}\right| \geq \left|e^{i\delta/2} - e^{i\varphi}\right| \geq \left|e^{i\delta/2} - 1\right| = 2\sin(\delta/4) > \delta/4.$$

Таким образом, всегда $\left|\zeta - e^{\pm i\varphi}\right| > \delta/4$, и по (4.8) имеем оценку

$$\left|f_\varphi(\zeta)\zeta^{-1}\right| < 2c(4/\delta)^{2\alpha} \text{ для } \zeta \in L_{k,\delta}, \tag{4.15}$$

которая имеет место для всех $\varphi \in [0,\pi]$ в случае $k = 1$ и для $\varphi \in [\delta,\pi]$ в случае $k = 2$.

Теперь мы будем использовать для $r \in I_{k,\delta}$ интегральное представление композиции Адамара $C_\tau * f_\varphi$ (см. [16]):

$$(C_\tau * f_\varphi)(r) = (2\pi i)^{-1}\int_{L_{k,\delta}} f_\varphi(\zeta)\zeta^{-1}C_\tau\left(r\zeta^{-1}\right)d\zeta$$

вместе с формулой Коши для f_φ, в силу которой и (4.15),

$$|(C_\tau * f_\varphi)(r) - f_\varphi(r)| < c(4/\delta)^{2\alpha}\int_{L_{k,\delta}}\left|C_\tau\left(r\zeta^{-1}\right) - (1 - r\zeta^{-1})^{-1}\right||d\zeta|.$$

Теперь утверждение Леммы 4.2 следует из (4.14) и последней оценки. □

(c) Суммирование рядов Лапласа функции $h_n(x-y)$ для $n \geq 3$. Полагая в (1.4) для $x \neq y$

$$h_y(x) = h_n(x-y) = |x-y|^{2-n} = h_x(y), \tag{4.16}$$

можем считать, что $h_y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n\backslash\{y\})$ и $h_x \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n\backslash\{x\})$. Это при $0 < |x|/|y| < 1$ означает, в частности, что $h_y \in \mathcal{H}(B_y)$ с $B_y = B_n(|y|)$ и $h_x \in \mathcal{H}(B_x)$ с

$$B_x = B_n(\infty, 1/|x|) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y|/|x| > 1\}.$$

Полагая также $x = |x|\zeta$ и $y = |y|\eta$ с $\zeta,\eta \in S_n$, отметим, что $\varphi_{x,y} = \varphi_{\zeta,\eta} \in [0,\pi]$.

Положим теперь в (4.8) $c = |y|^{-2\alpha}$ с $2\alpha = n-2$, $r = |x|/|y|$ и $\varphi = \varphi_{x,y}$. Тогда мы получим для $x \in\mathbb{R}^n\backslash\{y\}$, что

$$h_y(x) = c\left|1 - re^{i\varphi}\right|^{-2\alpha} = f_\varphi(r).$$

Теперь разложение Лапласа h_y в $B_y := B_n(|y|)$ (с центром 0) может быть получено из разложения в степенной ряд (4.11)-(4.12) функции f_φ :

$$h_y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x,y) \text{ для } x \in B_y, \tag{4.17}$$

где

$$h_m(x,y) = |y|^{2-n} \left(|x| \,/\, |y|\right)^m a_m(\varphi) \tag{4.18}$$

и

$$a_m(\varphi) = \sum_{k=0}^{m} b_k(\alpha) b_{m-k}(\alpha) \cos[(m-2k)\varphi]$$

для $2\alpha = n-2$ и $\varphi = \varphi_{x,y}$, полагая по (4.10), что $b_k(\alpha) = \Gamma(\alpha+k)/[\Gamma(\alpha)k!]$.

Отметим, что разложение (4.17)-(4.18) можно одновременно интерпретировать как разложение вида (2.3)-(2.3') с центром ∞ на этот раз для функции $h_x \in \mathcal{H}(B_x)$, со сферическими гармониками (коэффициентами Лапласа) $Y_m(x,\eta) = |x|^m a_m(\varphi)$, тогда как $Y_m(\zeta,y) := |y|^{2-n} a_m(\varphi)$ являются сферическими гармониками функции h_y. Отметим также, что для $\zeta, \eta \in S_n$ функция $Y_m(\zeta,\eta) = Y_m(\zeta,\eta) = a_m(\varphi)$ есть зональная гармоника соответственно с полюсом в $\eta \in S_n$ или в $\zeta \in S_n$ (см. [2], Гл. 5), т.е. инвариантна при вращении с центром 0 и фиксированного полюса, принимая постоянные значения на каждой параллели на S_n, ортогональной к полюсу, поскольку тогда для $\varphi = \varphi_{\zeta,\eta}$

$$\varphi = \varphi_{\zeta,\eta} = const \Longleftrightarrow |\zeta - \eta| = 2\sin(\varphi/2) = const.$$

Рассмотрим теперь для $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ звездную область $\mathbb{R}^n_y = \mathbb{R}^n \backslash [y,\infty)$ с центром 0, так что $h_y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n_y)$ и гармонический элемент $(h_y, \mathbb{R}^n_y) \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n_y)$ представлен рядом Лапласа (4.17)-(4.18). Из Леммы 4.3 и из сказанного выше мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.4. *Пусть* C *есть положительная матрица вида (3.2)-(3.3), удовлетворяющая условию (4.1). Тогда гармонический элемент* $(h_y, B_y) \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n_y)$ *удовлетворяет для каждого* $\delta \in (0, 1/2]$ *условию*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} (C_\tau * h_y)(x) = h_y(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^n_y \tag{4.19}$$

равномерно для $|x| \,/\, |y| \in [0, 1-\delta]$, *и для* $|x| \,/\, |y| \in [1-\delta, 1/\delta]$, *если* $\varphi_{x,y} \in [\delta, \pi]$.

Фактически Лемма 4.4 утверждает, что (4.19) выполняется равномерно для $|x| \,/\, |y|$, если $x \in K_{y,\delta}$:

$$K_{y,\delta} = \overline{B_n}((1-\delta)|y|) \cup B_n(\delta^{-1}|y|) \backslash \Lambda_{y,\delta} \tag{4.20}$$

с

$$\Lambda_{y,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ угол } \varphi_{x,y} < \delta\},$$

так что $K_{y,\delta}$ компактная звезда с центром 0.

d) Производная по направлению функции $h_n(x-y)$ для $n \geq 3$. Из (4.18) для $m \in \mathbb{N}_0$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ следует,что

$$-\left|y\right| \partial_{|y|} h_m(x,y) = (m+n-2) h_m(x,y).$$

Полагая теперь

$$\mathtt{v}_y(x) = (\nabla h_y)(x) \cdot x + (n-2) h_y(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^n_y,$$

мы получим из (4.17)-(4.18), Замечания 1.1 и Следствия 2.1, что $\mathtt{v}_y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n_y)$ с локально-равномерно сходящимся рядом Лапласа при $|x| / |y| < 1$:

$$\mathtt{v}_y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+n-2) h_m(x,y) = -\left|y\right| \partial_{|y|} h_y(x),$$

откуда следует равенство

$$\mathtt{v}_y(x) = -\left|y\right| \partial_{|y|} h_y(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_y. \tag{4.21}$$

Это доказывает, что $\partial_{|y|} h_y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n_y)$ с рядом Лапласа в B_y :

$$\partial_{|y|} h_y(x) = -\left|y\right|^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n-2) h_m(x,y), \quad x \in B_y. \tag{4.22}$$

Замечание 4.1. *Очевидно, Лемма 4.4 и равномерное при $|x| / |y|$ условие (4.19) для $x \in K_{\delta,y}$ (см. (4.20)) имеет место также для частных производных h_y, а также для $\mathtt{v}_y$. Тогда по (4.21) мы можем заменить в Лемме 4.4 h_y через $\partial_{|y|} h_y$ с гармоническим элементом $(\partial_{|y|} h_y, B_y) \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n_y)$, представленном рядом Лапласа (4.22). Отметим также для $\nu \in S_n$, что по (1.3),*

$$\partial_\nu h_x(y) = \partial_{|y|} h_y(x) (\eta \cdot \nu) = \partial_{|y|} h_y(x) \left|y\right|^{-1} \cos \varphi_{y,\nu}. \tag{4.23}$$

2^o. Доказательство Теорем 4.1 и 4.2 для $n \geq 3$. Для доказательства Теорем 4.1 и 4.2 (при $n \geq 3$) достаточно сначала доказать необходимость Теоремы 4.1 (см. далее (а)), затем доказать Теорему 4.2 для $n \geq 3$ (см.(в)), содержащую достаточность Теоремы 4.1.

(а) Необходимость Теоремы 4.1 для $n \geq 3$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с $0 \in \Omega$ и $\Omega^c \neq \varnothing$ есть область эффективной суммируемости для $\mathcal{H}_0(\Omega)$ с эффективной положительной матрицей $\mathcal{C}$ вида (3.2)-(3.3). Тогда по Замечанию 3.3 (а) следует, что $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega$ связно.

Предположим теперь, что Ω не есть звездная область с центром в 0. Это означает существование точек $x_0 \in \Omega$ и $y_0 \in \Omega^c$, так что $x_0 = \rho y_0$ с $\rho > 1$ и $y_0 \in B_n(|x_0|)$. Рассмотрим функцию $h_{y_0} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \backslash \{y_0\}) \subset \mathcal{H}(\Omega)$, определенную по (4.16) с разложением Лапласа (4.17)-(4.18). Из (4.12) имеем, что

$$|a_m(\varphi)| \leq c \sum_{k=0}^{m} b_k(\alpha) b_{m-k}(\alpha) = q_m(0),$$

и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{N}_0$ получим, что

$$|h_m(x, y_0)| \leq |x|^m a_m(0) = h_m(|x| \eta, y_0). \tag{4.24}$$

Пусть теперь $\overline{B_n}(x_0, \delta) \subset \Omega$ для некоторого $\delta > 0$. Поскольку $\mathcal{C}$ эффективная матрица для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, из (3.9) следует существование последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \in I$, $\tau_k \to \tau_0$, так что равномерно

$$\lim_{k \to \infty} (C_{\tau_k} * h_{y_0})(x) = h_{y_0}(x) \text{ для } x \in \overline{B_n}(x_0, \delta). \tag{4.25}$$

Это в частности влечет существование постоянной $M > 0$, удовлетворяющей

$$|(C_{\tau_k} * h_{y_0})(x_0)| \leq M \text{ для } k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что матрица $\mathcal{C}$ положительна, и применяя (4.19), мы получим для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ с $|x| = |x_0|$ и $k \in \mathbb{N}$ оценку

$$|(C_{\tau_k} * h_{y_0})(x)| \leq (C_{\tau_k} * h_{y_0})(x_0) \leq M.$$

Поскольку $C_{\tau_k} * h_{y_0} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначна, из принципа максимума следует, что

$$|(C_{\tau_k} * h_{y_0})(x)| \leq M \text{ для } x \in B_n(|x_0|),\ k \in \mathbb{N},$$

так что $\{C_{\tau_k} * h_{y_0}\}_{k=1}^{\infty}$ есть нормальное семейство гармонических функций в $B_n(|x_0|)$. По Теореме 2.6 из [2], Гл. 2 следует, что некоторая подпоследовательность $\{C_{\tau_k} * h_{y_0}\}_{k=1}^{\infty}$ будет сходиться в $B_n(|x_0|)$ локально-равномерно к функции $u \in \mathcal{H}(B_n(r_0))$. Но согласно (4.24) имеем, что $u(x) = h_{y_0}(x)$ для $x \in \Delta := B_n(x_0, \delta) \cap B_n(r_0)$, т.е. u есть гармоническое продолжение h_{y_0} из Δ к $B_n(|x_0|)$, что невозможно, поскольку по (4.16), h_{y_0} имеет существенную (неустранимую) особенность в точке $y_0 \in B_n(|x_0|)$. Это завершает доказательство необходимости теоремы 4.1 для $n \geq 3$.

(b) Доказательство Теоремы 4.2 для $n \geq 3$. Пусть теперь $\mathcal{C}$ есть положительная матрица вида (3.2)-(3.3), удовлетворяющая условию (4.1), и Ω звездная область в $\mathbb{R}^n$ с центром 0, содержащая максимальный шар $B = B_n(r_0)$ с центром в

0. Докажем, что $\mathcal{C}$ эффективна для $\mathcal{H}_0(\Omega)$, т.е. условие (3.9) выполняется для каждой $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ локально-равномерно в Ω.

Пусть K компакт в Ω, так что $\overline{B}_n(\lambda r_0) \subset K$ для заданного $\lambda \in (0,1)$. Тогда существует звездная область G с центром 0 и кусочно - гладкой границей ∂G, так что $K \subset G \subset \overline{G} \subset \Omega$. Кроме того, пусть $\overline{G} \subset B_n(\rho)$, и мы можем считать, что для некоторой константы $d > 0$

$$|x - y| \geq d \text{ для } x \in K,\ y \in G^c. \tag{4.26}$$

Фиксируем теперь $0 < \delta < \min\{1/2, d/2\rho\}$, и пусть $r := |x| \,/\, |y| \geq 1 - \delta$ для $y \in \partial G$ и $x \in \mathbb{R}^n$ с $\varphi_{x,y} < \delta$. Если $r \leq 1$, то тогда

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= (|x| - |y|)^2 + 4\,|x|\,|y| \sin^2(\varphi_{x,y}/2) \\ &\leq (\delta^2 + \varphi_{x,y})\,|y|^2 < (2\delta\rho)^2 \leq d^2, \end{aligned}$$

так что $|x - y| < d$ и (4.26) влечет $x \notin K$. Если $r \in [1, \rho]$, тогда $ry \in G^c$, и мы имеем,что

$$|x - ry|^2 = 4\,|x|^2 \sin^2(\varphi_{x,y}/2) < (\varphi_{x,y}\,|x|)^2 < (\delta\rho)^2 \leq d^2,$$

так что опять $|x - y| < d$, откуда следует, что $x \notin K$.

Резюме 1. *Мы имеем для фиксированного выше $\delta > 0$ и для $\lambda = 1-\delta$, что всегда $K \subset K_{y,\delta}$ (см. (4.20)) для каждой $y \in \partial G$, так что по Лемме 4.4 и Замечанию 4.1, условие (4.19) выполняется для h_y и $\partial_{|y|} h_y$ равномерно для $x \in K$ и $y \in \partial G$.*

Применим теперь формулу Грина (1.7) к $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ и к области $\overline{G}$, учитывая (4.23). Тогда для $x \in G$

$$u(x) = k_n^{-1} \int\limits_{\partial G} \left[h_y(x) \partial_{|y|} u(y) - \partial_{|y|} h_y(x) u(y) / \,|y| \right] c(y) d\sigma_n, \tag{4.27}$$

где $c(y) = \cos \varphi_{y,\nu}$ и $\nu = \nu(y)$ есть внешняя единичная нормаль к $y \in \partial G$.

Подставляя в (4.27) разложения Лапласа (4.17) функции $h_y(x)$ и (4.22) функции $\partial_{|y|} h_y(x)$, мы получим локально-равномерно сходящийся разложение Лапласа функции u в B:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) \text{ для } x \in B, \tag{4.28}$$

где $u_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ может быть определена с формулой

$$u_m(x) = k_n^{-1} \int\limits_{\partial G} h_m(x,y) u_{m,n}(y) d\sigma(y), \tag{4.29}$$

с

$$u_{m,n}(y) = [\partial_{|y|}u(y) + (m+n-2)u(y)/\,|y|]c(y).$$

Теперь для гармонического элемента (u, B), представленного по (4.28)-(4.29), имеем, что для $x \in \overline{B}_n(\lambda r_0)$

(4.30)

$$(C_\tau * u)(x) = k_n^{-1} \int\limits_{\partial G} \left[(C_\tau * h_y)(x) \partial_{|y|} u(y) - (C_\tau * \partial_{|y|} h_y)(x) u(y)/\,|y| \right] c(y) d\sigma_n.$$

Это по Резюме 1 влечет, что равномерно для каждого $\lambda \in (0,1)$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} (C_\tau * u)(x) = u(x) \text{ для } x \in \overline{B}_n(\lambda r_0), \tag{4.31}$$

так что (4.30) выполняется локально-равномерно для $x \in B$. Кроме того Резюме 1 влечет, что подынтегральная функция в (4.27) является равномерным пределом для $x \in K$ подынтегральной функции в (4.30), когда $\tau \to \tau_0$, удовлетворяя (4.31) на этот раз равномерно для $x \in K$ и локально-равномерно для $x \in \Omega$. Это завершает доказательство Теоремы 4.2.

Abstract. The notions of analytic element, i.e. a power series in $\mathbb{C}$, convergent in a disk and its analytic continuation are fundamental in the K. Weierstrass theory of analytic functions. Some problems on efficiency of analytic continuation, posed by Weierstrass' successors (J. Hadamard, G. Mittag-Leffler and others) has been discussed in paper [1]. In particular, it has been obtained the description of the domains $\Omega \subset \mathbb{C}$, where the restoration of the analytic continuation of an analytic element with fixed center $a \in \Omega$ is possible by universal (independent from an element) one step matrix summation methods. The aim of this paper is the solution of the analog problem on description of the domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, where the restoration of the harmonic continuation of harmonic elements (the series of homogeneous harmonic polynomials - the Laplace series converging in a ball in $\mathbb{R}^n$ with fixed center) is possible by means of universal semicontinuous matrix summation methods.

Список литературы

[1] Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Математический Сборник, **124(166)**, но. 1(5), 24 – 44 (1984). English transl: Math. USSR Sbornik, **52**, no. 1, 21 – 39 (1985).

[2] Sh. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic Function Theory, Second Edition, Springer, New York (2001).

[3] E. M. Stein and G.Weiss, Introduction to Furier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton (1971).

[4] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Second edition, McGrew-Hill, USA (1974).

[5] L. Biberbach, Analytische Fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin (1955).

[6] J. Hadamard, La série de Taylor et son prologement analytique, Scientia: Phis.Math. no.12, Gauthier-Villars, Paris (1901).
[7] E. Borel, “Memoire sur les séries divergentes, Ann. scient”, Ecole norm. super., ser. 3, **16**, 9 – 136 (1899).
[8] G. Mittag-Leffler, “Sur la representation d’une branche uniforme d’une fonction monogene” 1-5, Acta Math.: **23** (1900), 43-62; **24** (1901), 183-204; **24** (1901), 205-244; **26** (1902), 353-391; **29**, 101 – 182 (1905).
[9] E. LeRoy, “Sur les séries divergentes et les functions défines par un dévelopement de Taylor”, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (**2**) 2, 317 – 430 (1990).
[10] E. Lindelöf, “Sur l’application de la thérie des residues au prolomgement analytique des séries de Taylor”, J. Math. Pures Appl. (**5**) 9, 213 – 221 (1903).
[11] P. Dienes, The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of Complex Variable, Clarendon Press, Oxford (1931); reprint: Dover, New York (1957).
[12] G. H. Hardy, Divergent Series. Clarendon Press, Oxford (1949).
[13] R. G. Cooke, Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmillan (1950).
[14] A. Peyerimhoff, Lectures on Summability, Lecture Notes in Math., Springer Verlag (1970).
[15] Е. С. Мкртчян, “Описание областей однородной суммируемости степенного ряда в C^n”, Известия АН Арм. ССР, серия Математика, **23**, но. 4, 336 – 342 (1988).
[16] C. A. Dell’ Agnola, “Estimatione di un teorema di Hadamard”, Ven.ist.Atti 58, 525 – 539, 669-677 (1898).

Поступила 26 марта 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2012, стр. 35-54.

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКАХ $L_p,\ p>1$ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША

Л. Н. ГАЛОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *lev.nik.galoyan@gmail.com*

Аннотация. В данной работе исследуется сходимость в метриках $L_p,\ p>1$ средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье по системе Уолша с монотонными коэффициентами. Описываются классы рядов, средние которых неограниченно расходятся по любым подпоследовательностям на множествах положительной меры.

MSC2010 number: 40G05, 40A05

Ключевые слова: Средние Чезаро отрицательного порядка; неограниченная расходимость; слабо меняющаяся функция; регулярный метод суммирования.

1. Введение

Сходимость средних Чезаро (в смысле поточечной и в метриках $L_p,\ p>1$) рядов Фурье по тригонометрической системе и системе Уолша изучались в ряде работ (см. [4] - [13]). В частности, в работе [5] доказано, что средние Чезаро положительного порядка ряда Фурье-Уолша каждой интегрируемой функции сходятся почти всюду (аналог теоремы Фейера-Лебега для тригонометрической системы). В работе [6] установлены максимальные оценки средних Чезаро рядов Фурье-Уолша функций из $L_p,\ p>1$, в частности, доказан сильный (p,p) тип максимальных операторов положительных средних Чезаро. Более сильные результаты в этом направлении приведены в работах [7] - [10].

В данной работе мы займемся исследованием сходимости в метриках L_p, $p>1$ отрицательных средних Чезаро рядов Фурье-Уолша, в частности, нас будет интересовать следующий естественный вопрос: будут ли сходится в метриках L_p,

$p>$ 1 отрицательные средние Чезаро ряда Фурье функции из $L_p,\ p>1$, если потребовать неотрицательность и монотонность коэффициентов Фурье-Уолша этой функции? В связи с этим вопросом нами получен следующий результат (см. §2, теоремы 2.1, 2.2).

Если коэффициенты Фурье-Уолша функции $L_p,\ p>1$ неотрицательны и монотонно убывают, то средние Чезаро порядка $-\alpha$ ряда Фурье-Уолша этой функции сходятся в метриках $L_p,\ p>1$ при любом $\alpha<1-1/p$, при этом, показатель $1-1/p$ является граничным в смысле сходимости в этих метриках.

Как известно, для частичных сумм $S_n(x,f)$ рядов Фурье-Уолша (а также для тригонометрических рядов Фурье) суммируемых функций $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |S_n(x,f)-f(x)|^p dx=0, \quad \text{при всех} \ \ p\in(0,1).$$

Отсюда в частности следует, что у всякого ряда Фурье по тригонометрической системе или системе Уолша существует подпоследовательность частичных сумм, сходящаяся почти всюду. В связи с этим Д. Е. Меньшов в работе [4] для тригонометрической системы поставил следующий вопрос: будет ли верным последнее утверждение если заменить обычную сходимость на методы суммирования Чезаро отрицательного порядка? Иначе говоря, обязана ли для любой суммируемой функции существовать сходящаяся почти всюду подпоследовательность отрицательных средних Чезаро ее ряда Фурье? В той же работе им была доказана следующая теорема.

Теорема A (Д. Е. Меньшов). *Если*

$$0\le\rho<1, \quad \varepsilon>0, \quad -1<\alpha<\rho,$$

то всякая подпоследовательность, содержащаяся в последовательности чезаровских средних порядка α ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\rho \ln^\varepsilon n}$$

расходится на множестве положительной меры.

Д. Е. Меньшов подчеркнул (см. [4]), что пример суммируемой функции, дающий отрицательный ответ на его вышеуказанный вопрос, получится, если положить в этой теореме $\rho = 0$, $\varepsilon = 1$, а если положить в ней $\rho = 1/2$, $\varepsilon = 1$, то получится пример функции суммируемой с квадратом, для которой средние Чезаро порядка α неограниченно расходятся по любым подпоследовательностям для всех $\alpha < -1/2$.

Замечание 1.1. *При доказательстве Теоремы A, следить за множествами расходимости для любых подпоследовательностей средних Чезаро не возможно. Рассуждения Меньшова лишь позволяют обеспечить положительность мер этих множеств. В данной статье, в частности, доказывается (см. §3) аналог Теоремы A для системе Уолша, при этом получается результат немного более сильный, чем Теорема A: с одной стороны мы расширим класс рядов "с плохими" средними Чезаро, с другой нам удастся дать некоторую геометрическую характеристику множеств расходимости для каждой подпоследовательности средних Чезаро этих рядов.*

2. Основные определения и формулировка результатов

Напомним определение методов суммирования Чезаро и чезаровских средних для произвольных числовых рядов.

Пусть числа $\{A_n^\delta\}_{n=0}^\infty$ определяются как тейлоровские коэффициенты разложения в степенной ряд следующей функции

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\delta z^n, \quad |z| < 1, \quad \delta \neq -1, -2, \dots \tag{2.1}$$

Хорошо известно, что

$$A_0^\delta = 1, \quad A_n^\delta = \frac{(\delta+1)(\delta+2)...(\delta+n)}{n!}, \quad n \geq 1. \tag{2.2}$$

Последовательность $\{A_n^\delta\}_{n=0}^\infty$ называют числами Чезаро. Приведем некоторые свойства этих чисел вытекающие из формулы (2.2) (см. [2], стр. 130 – 133 и [3], стр. 125 – 127).

$$A_n^\delta \sim \frac{n^\delta}{\Gamma(\delta+1)} \quad , \quad \delta \neq -1,-2,..., \tag{2.3}$$

Если $\delta \in (-l-1,-l)$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, то

$$(-1)^l A_n^\delta > 0, \quad n \geq l. \tag{2.4}$$

Кроме того,

$$A_n^{\delta+1} - A_{n-1}^{\delta+1} = A_n^\delta, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$(\delta+1)A_n^{\delta+1} = (n+\delta+1)A_n^\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^{(-)}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

$$nA_n^\delta = (n+\delta)A_{n-1}^\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^{(-)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

$$\{|A_n^\delta|\}_{n=1}^\infty \searrow 0 \quad \text{при} \quad \delta < 0 \quad \text{и} \quad \{A_n^\delta\}_{n=1}^\infty \nearrow \infty \quad \text{при} \quad \delta > 0, \tag{2.8}$$

Пусть дан ряд $\sum a_n$ и пусть $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$, $n = 0,1,...$ частичные суммы этого ряда. Линейные средние

$$\sigma_n^\delta = \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\delta-1} S_k = \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\delta a_k \tag{2.9}$$

называют средними Чезаро порядка δ ряда $\sum a_n$. Говорят, что последовательность S_n суммируема методом Чезаро порядка δ или методом (C,δ) к числу S если

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\delta = S.$$

Отметим, что методы Чезаро положительного порядка регулярны, то есть любая сходящаяся последовательность суммируется этими методами к их обычному пределу. В книге [3], стр. 157 для средних Чезаро доказано следующее полезное равенство (см. (2.9))

$$\sigma_j^r - \sigma_j^{r+1} = \frac{1}{(r+1)A_j^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^j A_{j-\nu}^r \nu a_\nu, \quad r \overline{\in} Z^{(-)}. \tag{2.10}$$

Теперь приведем определение системы Уолша.

$$w_0(x) = 1, \quad w_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > ... > m_s, \tag{2.11}$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Радемахера:

$$r_0(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2});\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1).\end{cases}$$

$$r_0(x+1)=r_0(x),\quad r_k(x)=r_0(2^k x),\quad k=1,2,...$$

Через $\Delta_k^{(m)}$ будем обозначать двоичные интервалы вида $[k\cdot 2^{-m},(k+1)\cdot 2^{-m})$. При доказательстве основных результатов настоящей статьи мы будем пользоваться следующими неравенствами, доказательство которых приведено в [1] (стр. 161 – 162).

$$\sup_{M\geq\nu}\left|\sum_{j=\nu}^{M}a_j w_j(x)\right|\leq 9\cdot\sum_{j=\nu}^{\nu+s-1}a_j,\quad M>\nu,\quad x\in\left(\frac{1}{s+1},\frac{1}{s}\right],\tag{2.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{k=1}^{\nu}a_{k+m-1}\right)^p\leq C_p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+m-1}^p k^{p-2},\quad m\in N,\ p>1.\tag{2.13}$$

где (2.12) справедливо для любых невозрастающих $\{a_j\geq 0\}_{j\geq 0}$, а (2.13) - для всех неотрицательных $\{a_j\}_{j\geq 0}$ удовлетворяющих условию $\sum_{s\geq 1}a_s^p s^{p-2}<+\infty$. Для формулировки некоторых результатов нам понадобится следующее (см. [2], стр. 299) хорошо известное определение.

Определение 2.1. *Положительная функция $b(u)$, определенная для $u>u_0$, называется слабо меняющийся, если при любом $\eta>0$ функция $b(u)u^{\eta}$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\eta}$ убывает.*

Слабо меняющийся функция (с.м.ф.) обладает (см. [2], стр. 299) следующими свойствами.

$$\forall\epsilon,k>0:\quad\lim_{u\to\infty}b(u)u^{\epsilon}=\infty,\quad\lim_{u\to\infty}b(ku)/b(u)=1.\tag{2.14}$$

Через B обозначим класс слабо меняющихся функций, определенных на $[1,\infty)$. Пусть далее $B^*=\{b(u)\in B,\ b(u)\searrow 0 \text{ при } u\to+\infty\}$.

Рассмотрим следующие семейства рядов по системе Уолша.

$$M_p=\left\{\sum_{s=1}^{\infty}a_s w_s(x):\{a_s\geq 0\}_{s=1}^{\infty}\searrow,\ \sum_{s=1}^{\infty}a_s^p s^{p-2}<+\infty\right\},\ 1<p<\infty,\tag{2.15}$$

$$\Omega_\beta = \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} c_s w_s(x) : c_s = \frac{b(s)}{s^\beta}, \text{ где } b(u) \in B \right\}, \ \beta \in (0,1), \tag{2.16}$$

$$M\Omega_0 = \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} b(s) w_s(x) : \text{ где } b(u) \in B^* \right\}. \tag{2.17}$$

В дальнейшем условимся под выражением M_p-ряд, $\Omega_\beta-$ряд или $M\Omega_0-$ряд понимать ряды из соответствующих семейств.

Хорошо известно (см. [1], теорема 7.3.2), что любой M_p-ряд является рядом Фурье-Уолша некоторой функции $f \in L_p[0,1]$. Далее нетрудно проверить, что

$$M_p \cap \Omega_\beta = \emptyset, \text{ при } \beta < 1 - 1/p. \tag{2.18}$$

Имеет место следующий результат:

Для любого $p > 1$ ***и*** $0 < \alpha < 1 - 1/p$ ***средние Чезаро порядка*** $-\alpha$ $\boldsymbol{M_p}$***-ряда сходятся по*** $L_p[0,1]$ ***норме.***

В следующей теореме это утверждение сформулировано в эквивалентной формулировке.

Теорема 2.1. *Если коэффициенты Фурье-Уолша функции $f(x) \in L_p[0,1]$, $p > 1$ монотонно убывают, то средние Чезаро порядка $-\alpha$ ряда Фурье-Уолша этой функции сходятся в метрике L_p при любом $\alpha \in (0, 1-1/p)$.*

Следующая теорема показывает, что предыдущий результат окончательный.

Теорема 2.2. *Для любого $p_0 > 1$ и $\alpha_0 > 1 - 1/p_0$ найдется M_{p_0}-ряд, такой, что средние Чезаро порядка $-\alpha_0$ этого ряда расходятся по $L_{p_0}[0,1]$ норме.*

Замечание 2.1. *Подчеркнем, что теоремы 2.1 и 2.2 справедливы и для тригонометрической системы.*

Следующие результаты проясняют поведение подпоследовательностей отрицательных средних Чезаро рядов Фурье-Уолша с медленно колеблющимися коэффициентами и позволяют построить примеры суммируемых функций с расходящимися подпоследовательностями отрицательных средних Чезаро.

Теорема 2.3. *Пусть* $0 < \beta < \alpha < 1$ *и пусть* $\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)$ *средние Чезаро порядка* $-\alpha$ *некоторого* $\Omega_\beta-$*ряда, тогда для любой возрастающей последовательности* $M = \{m_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \infty$ *существует множество* $G_{\alpha,\beta}(M)$ *положительной меры такое, что*

(a) $mes\left\{G_{\alpha,\beta}(M) \cap \Delta_1^{(i)}\right\} > 0$ *для любого* $i \geq 1$,

(b) $\limsup\limits_{k\to+\infty} \left|\sigma_{m_k}^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)\right| = +\infty$ *для любого* $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$.

Теорема 2.4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и пусть* $\sigma_n^{-\alpha}(x, M\Omega_0)$ *средние Чезаро порядка* $-\alpha$ *некоторого* $M\Omega_0-$*ряда, тогда для любой возрастающей последовательности* $Q = \{q_j\}_{j=1}^{\infty} \nearrow \infty$ *существует множество* $F_\alpha(Q)$ *положительной меры такое, что*

(a) $mes\left\{F_\alpha(Q) \cap \Delta_1^{(i)}\right\} > 0$ *для любого* $i \geq 1$,

(b) $\limsup\limits_{j\to\infty} \left|\sigma_{q_j}^{-\alpha}(x, M\Omega_0)\right| = +\infty$ *для любого* $x \in F_\alpha(Q)$.

3. Вспомогательные леммы

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3.1. *Последовательность*

$$\gamma_p = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=p-\lambda+1}^{p} A_j^{-\alpha} = 2A_{p-\lambda}^{1-\alpha} - A_{p-2\lambda}^{1-\alpha} - A_p^{1-\alpha}, \quad \lambda \in N, p > 2\lambda, \quad \alpha \in (0,1)$$

положительна и монотонно убывает.

Доказательство. Положительность следует из равенства

$$\gamma_p = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} (A_j^{-\alpha} - A_{j+\lambda}^{-\alpha})$$

и из свойств (2.4) и (2.8). Далее учитывая свойство (2.5) имеем

$$\gamma_p - \gamma_{p+1} = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} (|A_{j+1}^{-1-\alpha}| - |A_{j+\lambda+1}^{-1-\alpha}|).$$

Отсюда и из свойств (2.4) и (2.8) следует утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана. □

Следствие 3.1. *При всех натуральных q справедливо неравенство и $\alpha \in (0,1)$*

$$2A_{3\cdot 2^{q-1}}^{1-\alpha} - A_{2^q}^{1-\alpha} - A_{2^{q+1}}^{1-\alpha} > 0.$$

В дальнейшем через $C_{\alpha,\beta}^{1}, C_{\alpha,\beta}^{2}, \ldots$ и $C_{p,\alpha}^{(1)}, C_{p,\alpha}^{(2)}, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие разве лишь от указанных в индексах параметров.

Лемма 3.2. *Пусть даны $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,\alpha)$, натуральное $i \geq 1$ и некоторый $\Omega_\beta-$ ряд вида $\sum_{j\geq 1} c_j w_j(x)$, где $c_j = b(j)/j^\beta$, $j \geq 1, b(u) \in B$. Тогда существуют натуральное число $n_{\alpha,\beta}^{i}$, положительные числа $\gamma_{\alpha,\beta}^{(i)}, \eta_{\alpha,\beta}^{(i)}$ такие, что при $n \geq n_{\alpha,\beta}^{i}$ для средних Чезаро порядка $-\alpha$ данного ряда выполняется неравенство*

$$mes\left\{x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}\right\} \geq \eta_{\alpha,\beta}^{(i)}.$$

Доказательство. Ясно, что (см. определение 2.1) коэффициенты любого $\Omega_\beta-$ ряда начиная с некоторого номера $n(\beta)$ монотонно убывают. Пусть $\lambda_s = [s^{\beta'/\alpha}],\ s = 1, 2, ..$ ([a]-целая часть a), где $\beta' \in (\beta,\alpha)$. Очевидно, что при $s \to \infty$

$$\lambda_s \to \infty, \quad (s-\lambda_s)/s \to 1. \tag{3.1}$$

Учитывая, что функция $ub(u) : u \geq 1$ для достаточно больших u возрастает, подберем натуральное $s_0(\alpha,\beta) \geq n(\beta)$ настолько большим, чтобы при $s \geq s_0(\alpha,\beta)$ выполнялись неравенства

$$s-\lambda_s \geq \max\{3, n(\beta)\}, \quad b(s-\lambda_s) < \frac{s}{s-\lambda_s} b(s). \tag{3.2}$$

Далее согласно (2.14) можем выбрать $n_i(\alpha,\beta)$ настолько большим, чтобы при $n \geq n_i(\alpha,\beta)$ выполнялось неравенство

$$\frac{|c_n - c_{n-2^{i+1}}|}{c_n} \leq \frac{|2A_{3\cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}|}{2^{i+1}}. \tag{3.3}$$

(число фигурирующее в правой части неравенства (3.3) отлично от нуля в силу следствия 3.1). Положим $n_{\alpha,\beta}^{i} = max\{n_i(\alpha,\beta); s_0(\alpha,\beta); 2^{i+1}\}$. Пусть $n \geq n_{\alpha,\beta}^{i}$. С учетом (2.5) и (2.9) средние Чезаро данного $\Omega_\beta-$ряда могут быть записаны следующим образом

(3.4)

$$\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha-1}S_\nu(x)=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu^{-\alpha-1}S_{n-\nu}(x)$$
$$=\frac{S_n(x)}{A_n^{-\alpha}}+\frac{S_n(x)}{A_n^{-\alpha}}\sum_{\nu=1}^{n-1}A_\nu^{-\alpha-1}+\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\sum_{\nu=1}^{n-1}A_\nu^{-\alpha-1}(S_{n-\nu}(x)-S_n(x))$$
$$=\frac{A_{n-1}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}}S_n(x)+\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda_n}+\sum_{\nu=\lambda_n+1}^{n-1}A_\nu^{-\alpha-1}(S_{n-\nu}(x)-S_n(x))\right\}=\sum_{l=1}^{3}Q_{n,l}(x),$$

где $S_\nu(x)=\sum_{j=1}^{\nu}c_jw_j(x),\ \nu=1,2,...$ частичные суммы исследуемого ряда. Оценим $Q_{n,l}(x),\ 1\le l\le 3$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства, при всех $x\in(0,1)$ имеем $|Q_{n,1}(x)|\le\sup_n|S_n(x)|<C^1_{\alpha,\beta}/x$. Далее, учитывая (2.1), (2.4), (2.5), используя лемму Абеля и условия (3.1), (3.2) получим

$$|Q_{n,2}(x)|=\frac{1}{A_n^{-\alpha}}\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda_n}A_\nu^{-\alpha-1}\sum_{j=n-\nu+1}^{n}c_jw_j(x)\right|\le\frac{2}{x}\frac{c_{n-\lambda_n}}{A_n^{-\alpha}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|A_\nu^{-\alpha-1}\right|$$
$$\le\frac{2c_n}{A_n^{-\alpha}x}\left(\frac{n}{n-\lambda_n}\right)^{\beta+1}\le\frac{C^2_{\alpha,\beta}}{x}\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}},\quad n\ge n^i_{\alpha,\beta}. \tag{3.5}$$

Далее (см. (2.1), (2.4))

$$|Q_{n,3}(x)|\le\frac{C^3_{\alpha,\beta}}{A_n^{-\alpha}x}\sum_{\nu=\lambda_n+1}^{\infty}\left|A_\nu^{-\alpha-1}\right|=\frac{C^3_{\alpha,\beta}}{x}\frac{A_{\lambda_n}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}}\le\frac{C^4_{\alpha,\beta}}{A_n^{-\alpha}x}\frac{1}{\lambda_n^{\alpha}}$$
$$\le\frac{C^5_{\alpha,\beta}}{A_n^{-\alpha}n^{\beta'}x}=\frac{C^5_{\alpha,\beta}}{x}\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}\frac{1}{b(n)n^{\beta'-\beta}}\le\frac{C^6_{\alpha,\beta}}{x}\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}. \tag{3.6}$$

Окончательно для всех $x\in(0,1)$ имеем (см. (3.5) и (3.6))

$$|\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)|\le\frac{C^7_{\alpha,\beta}}{x}\cdot\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}};\quad n\ge n^i_{\alpha,\beta}. \tag{3.7}$$

Ясно, что двоичное разложение любого $x\in(0,2^{-i})$ имеет вид $x=\sum_{j=i}^{\infty}x_j2^{-j-1}$, следовательно справедливо равенство $x\oplus 2^{-i}=x+2^{-i}$ (где $\oplus$ - сложение по модулю 2). Пользуясь этим для любого натурального k такого, что $2^N\le k<2^{N+1}$ получим

$$\int_{\Delta_1^{(i)}}w_k(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2^i}}w_k\left(x\oplus\frac{1}{2^i}\right)dx=$$
$$=w_k\left(\frac{1}{2^i}\right)\int_0^{\frac{1}{2^i}}w_k(x)dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad N\ge i\\ 2^{-i} & \text{при}\quad N<i-1\\ -2^{-i} & \text{при}\quad N=i-1\end{cases}.$$

Согласно этой формуле, характеристическая функция интервала $\Delta_1^{(i)}$ при любом $i \geq 1$ имеет вид

$$\chi_{\Delta_1^{(i)}}(x) = \sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_j(x) \quad \text{где} \quad b_j^{(i)} = \begin{cases} |\Delta_1^{(i)}| & \text{при} \quad 0 \leq j < 2^{i-1}, \\ -|\Delta_1^{(i)}| & \text{при} \quad 2^{i-1} \leq j < 2^i. \end{cases} . \tag{3.8}$$

Не трудно проверить, что для любых натуральных i и $n \geq 2^{i+1}$ мы можем выбрать натуральное $p(n,i)$ удовлетворяющее условиям:

(i) двоичное разложение числа $p(n,i)$ не содержит ни какую из степеней 2^q $(q = 0, 1, \dots i-1)$,

(ii) $n - 2^{i+1} < p(n,i) \leq n - 2^i$.

Рассмотрим функцию $P_{n,i}(x) = -w_{p(n,i)}(x) \cdot \chi_{\Delta_1^{(i)}}(x)$. Очевидно, что $||P_{n,i}(x)||_\infty = 1$ и $suppP_{n,i}(x) = \Delta_1^{(i)}$. Далее, в силу условия 1) и представления (3.8) имеем

$$P_{n,i}(x) = -\sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_{j \oplus p(n,i)}(x) = -\sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_{j+p(n,i)}(x). \tag{3.9}$$

В силу (2.9), (3.4) и (3.9) получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1^{(i)}} \left|\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)\right| dx &\geq \int_{\Delta_1^{(i)}} \sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta) P_{n,i}(x) dx \\ &= \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} c_\nu \int_0^1 P_{n,i}(x) w_\nu(x) dx = \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} c_\nu \widehat{P}_{n,i}^{\nu}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\hat{P}^{\nu}_{n,i}-$ есть $\nu-$ий коэффициент Фурье-Уолша полинома $P_{n,i}(x)$. Учитывая разложение (3.9) можем написать (см. (3.10))

$$\begin{aligned}
(3.11)\qquad \int_{\Delta_1^{(i)}} \left|\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)\right| dx &\geq -\frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} c_{j+p(n,i)} b_j^{(i)} \\
&= -\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} b_j^{(i)} \\
&\quad + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} (c_n - c_{j+p(n,i)}) b_j^{(i)} \\
&= \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^i-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} - \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A^{-\alpha}_{n-(j+p(n,i))} \left(c_n - c_{j+p(n,i)}\right) b_j^{(i)} = \sigma^{(1)}_{n,i} + \sigma^{(2)}_{n,i}.
\end{aligned}$$

Пользуясь леммой 3.1 и условием 2) получим оценку (см. (3.11))

$$\begin{aligned}
(3.12)\qquad \sigma^{(1)}_{n,i} &= \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=n-p(n,i)-2^i+1}^{n-p(n,i)-2^{i-1}} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=n-p(n,i)-2^{i-1}+1}^{n-p(n,i)} A_j^{-\alpha} \right\} \\
&> \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=2^i+1}^{3\cdot 2^{i-1}} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=3\cdot 2^{i-1}+1}^{2^{i+1}} A_j^{-\alpha} \right\} \\
&= \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left(2A^{1-\alpha}_{3\cdot 2^{i-1}} - A^{1-\alpha}_{2^i} - A^{1-\alpha}_{2^{i+1}}\right).
\end{aligned}$$

Пользуясь свойством (2.8) и (3.3), для второй суммы правой части (3.11) получим такую оценку

$$(3.13)\qquad |\sigma^{(2)}_{n,i}| \leq \frac{2^i}{A_n^{-\alpha}} \cdot \frac{1}{2^i} \cdot \max_{0\leq j<2^i-1} |c_n - c_{j+p(n,i)}| < \frac{c_n - c_{n-2^{i+1}}}{A_n^{-\alpha}}.$$

С учетом (3.2), (3.11) – (3.13) при $n \geq n^i_{\alpha,\beta}$ получаем

$$(3.14)\qquad \int_{\Delta_1^{(i)}} |\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)| dx \geq \frac{c_n}{2^{i+1} A_n^{-\alpha}} \cdot \left(2A^{1-\alpha}_{3\cdot 2^{i-1}} - A^{1-\alpha}_{2^i} - A^{1-\alpha}_{2^{i+1}}\right).$$

Положим $\gamma^{(i)}_{\alpha,\beta} = 1/4 \cdot \left(2A^{1-\alpha}_{3\cdot 2^{i-1}} - A^{1-\alpha}_{2^i} - A^{1-\alpha}_{2^{i+1}}\right)$. Это число положительно в силу следствия 3.1. Пусть

$$E^{\alpha,\beta}_{n,i} = \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)| \geq \gamma^{(i)}_{\alpha,\beta} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \right\}.$$

Учитывая (3.7) можем написать

$$\int_{\Delta_1^{(i)}} \left|\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)\right| dx = \int_{E_{n,i}^{\alpha,\beta}} \left|\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)\right| dx + \int_{\Delta_1^{(i)}/E_{n,i}^{\alpha,\beta}} \left|\sigma_n^{-\alpha}(x,\Omega_\beta)\right| dx$$
$$\leq C_{\alpha,\beta}^7 \frac{2^i c_n}{A_n^{-\alpha}} mes\, E_{n,i}^{\alpha,\beta} + \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}},$$

откуда с учетом (3.14) получаем

$$C_{\alpha,\beta}^7 \frac{2^i c_n}{A_n^{-\alpha}} mes\, E_{n,i}^{\alpha,\beta} \geq \frac{c_n}{2^{i+1} A_n^{-\alpha}} \left(2A_{3\cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}\right) - \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}}$$
$$= \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$mes\, E_{n,i}^{\alpha,\beta} \geq \frac{\gamma_{\alpha,\beta}^{(i)}}{4^i C_{\alpha,\beta}^7}.$$

Для завершения доказательства остается положить $\eta_{\alpha,\beta}^{(i)} = \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)}/4^i C_{\alpha,\beta}^7$. Лемма 3.2 доказана. □

Точно так же доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть даны $\alpha \in (0,1)$ и некоторый $M\Omega_0-$ ряд вида $\sum_{j\geq 1} b(j)w_j(x)$, $b(u) \in B^*$. Тогда существуют натуральное число N_α^i, положительные числа $\gamma_\alpha^{(i)}, \eta_\alpha^{(i)}$ такие, что при $n \geq N_\alpha^i$ для средних Чезаро порядка $-\alpha$ данного ряда выполняется неравенство*

$$mes\left\{x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, M\Omega_0)| \geq \gamma_\alpha^{(i)} b(n) n^\alpha\right\} \geq \eta_\alpha^{(i)}.$$

Лемма 3.4. *Пусть n и j_1, j_2 натуральные числа, такие, что $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Тогда при любом $\alpha \in (0,1)$ существует положительная постоянная B_α, такая, что при всех $x \in (0,1]$ справедлива равномерная по j_1, j_2 оценка:*

$$\left|\sum_{\nu=j_1}^{j_2} A_{n-\nu}^{-\alpha} w_\nu(x)\right| \leq \frac{B_\alpha}{x^{1-\alpha}}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Ясно, что лемма будет доказана если мы покажем, что оценка (3.15) справедлива для сумм вида (равномерно по j)

$$\sigma_{n,j}(x) =: \left|\sum_{\nu=j}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} w_\nu(x)\right|, \qquad \text{где} \quad 0 \leq j \leq n. \tag{3.16}$$

Пусть сначала $x\in(0,1/n]$. С учетом свойства (2.5) получим

$$|\sigma_{n,j}(x)|\le\sum_{\nu=j}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}\le\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}=A_n^{1-\alpha}\le C_{\alpha,\beta}^{8}n^{1-\alpha}\le\frac{C_{\alpha,\beta}^{8}}{x^{1-\alpha}},$$

т.е. утверждение леммы в этом случае верна. Допустим, что $x\in(1/n,1]$. Если $n-[1/x]\le j\le n$, то выражение (3.16) оценим следующим образом.

$$|\sigma_{n,j}(x)|\le\sum_{\nu=n-[1/x]}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}=\sum_{\nu=0}^{[1/x]}A_{\nu}^{-\alpha}=A_{[1/x]}^{1-\alpha}\le\frac{C_{\alpha,\beta}^{9}}{x^{1-\alpha}}.$$

Для завершения доказательства остается оценить (3.16) в случае $j\le n-[1/x]$, где $x\in(1/n,1]$. Пусть натуральное m такое, что $2^{m-1}\le n\le 2^m-1$. Имеем

$$\begin{aligned}(3.17)\quad |\sigma_{n,j}(x)|&=|\sigma_{n,j}(x)w_{2^m-1}(x)|=\left|\sum_{\nu=j}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}w_{2^m-1\oplus\nu}(x)\right|\\
&=\left|\sum_{\nu=j}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}w_{2^m-1-\nu}(x)\right|=\left|\sum_{\nu=2^m-1-n}^{2^m-1-j}A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha}w_{\nu}(x)\right|\\
&\le\left|\sum_{\nu=2^m-n+[1/x]}^{\infty}A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha}w_{\nu}(x)\right|\\
&+\left|\sum_{\nu=2^m-1-n}^{2^m-1-n+[1/x]}A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha}w_{\nu}(x)\right|+\left|\sum_{\nu=2^m-j}^{\infty}A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha}w_{\nu}(x)\right|,\end{aligned}$$

где ряды в последнем равенстве сходятся при всех $x\in(0,1]$, поскольку $\{A_s^{-\alpha}\}_{s\ge0}\searrow 0$. Далее, пользуясь леммой Абеля, выражение (3.17) оценим следующим образом (см. свойства (2.3) – (2.5), (2.8))

$$|\sigma_{n,j}(x)|\le\sum_{\nu=0}^{[1/x]}A_{\nu}^{-\alpha}+\frac{2A_{[1/x]+1}^{-\alpha}}{x}+\frac{2A_{n-j}^{-\alpha}}{x}\le\frac{C_{\alpha,\beta}^{10}}{x^{1-\alpha}}.$$

Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}\searrow$ убывающая последовательность положительных чисел такая, что $b_j=o(j^{1/p-1})$ для некоторого $p>1$. Тогда для любого $\alpha\in(0,1-1/p)$ справедливо соотношение*

$$(3.18)\qquad \left\|\sum_{\nu=[n/2]}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}b_\nu w_\nu(x)\right\|_{L_p(0,1)}=o(n^{-\alpha}),\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Пользуясь условиями леммы, преобразованием Абеля, неравенством Минковского а также леммой 3.4, получим

$$\left(\int_{1/n}^{1}\left|\sum_{\nu=[n/2]}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} b_\nu w_\nu(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leq \left(\int_{1/n}^{1}\left|\sum_{\nu=[n/2]}^{n-1} \Delta^{(1)} b_\nu \sum_{s=[n/2]}^{\nu} A_{n-s}^{-\alpha} w_s(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$+ b_n \left(\int_{1/n}^{1}\left|\sum_{s=[n/2]}^{n} A_{n-s}^{-\alpha} w_s(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leq C_{\alpha,\beta}^{11} b_{[n/2]} \left(\int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x^{p(1-\alpha)}}\right)^{1/p} + C_{\alpha,\beta}^{12} b_n \left(\int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x^{p(1-\alpha)}}\right)^{1/p} = o(n^{-\alpha}).$$

Далее (см. (2.5))

$$\left(\int_{0}^{1/n}\left|\sum_{\nu=[n/2]}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} b_\nu w_\nu(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{b_{[n/2]}}{n^{1/p}} \sum_{\nu=[n/2]}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} = O\left(b_{[n/2]} n^{1-\alpha-1/p}\right) = o(n^{-\alpha}).$$

Справедливость леммы 3.5 сразу же следует из полученных оценок. Лемма 3.5 доказана. □

4. Доказательство теорем

Доказательство Теоремы 2.1. Для фиксированного $p > 1$ рассмотрим произвольный M_p- ряд вида

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w_\nu(x), \tag{4.1}$$

где согласно определению M_p-ряда,

$$a_s \searrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty. \tag{4.2}$$

Известно, что (см. [1], 7.3.3) условия (4.2) гарантируют сходимость ряда (4.1) в пространстве $L_p[0,1], (p > 1)$ к некоторой функции $f(x) \in L_p[0,1]$, при этом (4.1) является рядом Фурье-Уолша этой функции. Далее известно (см. [5] – [8]), что для любого $\gamma > 0$ средние $\sigma_n^\gamma(x,f)$ сходятся к $f(x)$ по L_p норме. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Пользуясь неравенством Минковского получим

$$\|\sigma_n^{-\alpha}(x,f) - f(x)\|_p \le \|\sigma_n^{-\alpha}(x,f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x,f)\|_p +$$

$$+ \|\sigma_n^{1-\alpha}(x,f) - f(x)\|_p = I_p + o(1) \tag{4.3}$$

где

$$I_p = \|\sigma_n^{-\alpha}(x,f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x,f)\|_{L_p}. \tag{4.4}$$

Пользуясь свойством (2.10) можем написать

$$\sigma_n^{-\alpha}(x,f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x,f) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{A_n^{1-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x).$$

Откуда

$$I_p \le C_{p,\alpha}^{(1)} n^{\alpha-1} \cdot \|\sigma_{n,\alpha}(x)\|_p, \qquad \text{где} \qquad \sigma_{n,\alpha}(x) =: \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x). \tag{4.5}$$

Пусть ε произвольное положительное число и $N < n/2$ натуральное число которое мы подберем позже. Представим выражение для $\sigma_{n,\alpha}(x)$ в следующем виде (см. (4.5))

$$\sigma_{n,\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} + \sum_{\nu=N}^{n} = \sigma_{n,1}(x) + \sigma_{n,2}(x). \tag{4.6}$$

Обозначим через $S_m(x), m = 0, 1, ...$ частичные суммы рада (4.1). Применяя преобразование Абеля и пользуясь свойствами (2.5) – (2.7) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,2}(x) &= \sum_{\nu=N}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x) \\
&= \sum_{\nu=N}^{n-1} \Delta^{(1)}(A_{n-\nu}^{-\alpha}\nu) S_\nu(x) + n S_n(x) - N A_{n-N}^{-\alpha} S_{N-1}(x) \\
&= \sum_{\nu=N}^{n-1} \Delta^{(1)}(A_{n-\nu}^{-\alpha}\nu)[S_\nu(x) - S_n(x)] + N A_{n-N}^{-\alpha}[S_n(x) - S_{N-1}(x)] \\
&= \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha}\nu[S_\nu(x) - S_n(x)] - \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{-\alpha}[S_\nu(x) - S_n(x)] \\
&\quad + N A_{n-N}^{-\alpha}[S_n(x) - S_{N-1}(x)] = n \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha}[S_\nu(x) - S_n(x)]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$-(1-\alpha)\sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{-\alpha}[S_\nu(x)-S_n(x)]+NA_{n-N}^{-\alpha}[S_n(x)-S_{N-1}(x)]$$
$$=\sum_{l=1}^{3}\sigma_{n,2}^{l}(x).$$

Учитывая ограниченность L_p- норм частичных сумм ряда (4.1) и свойство (2.4), получим оценку

$$\|\sigma_{n,2}^{3}(x)\|_p \le C_{p,\alpha}^{(2)}\frac{N}{(n-N)^\alpha}. \tag{4.8}$$

Для оценки суммы $\sigma_{n,2}^{2}(x)$ положим

$$B_k^\alpha=\sum_{\nu=N+1}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha}a_{k+\nu-1}.$$

В силу условий теоремы имеем $\{B_k^\alpha\}_{k\ge1}\searrow 0$. Согласно (2.12) при любом $x\in\left(\frac{1}{s+1},\frac{1}{s}\right]$ справедливо неравенство

$$|\sigma_{n,2}^{2}(x)|=\left|\sum_{\nu=N+1}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}\sum_{j=\nu}^{n}a_jw_j(x)\right|\le$$
$$\le 9\cdot\sum_{\nu=N+1}^{n}A_{n-\nu}^{-\alpha}\sum_{j=1}^{s}a_{j+\nu-1}=9\cdot\sum_{j=1}^{s}B_j^\alpha. \tag{4.9}$$

Пользуясь неравенствами (2.13), (4.9) и неравенством Гельдера приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}\left\|\sigma_{n,2}^{2}(x)\right\|_p^p &\le 9^p\sum_{s=1}^{\infty}\int_{1/(s+1)}^{1/s}\left(\sum_{j=1}^{s}B_j^\alpha\right)^p dx \\ &\le 9^p\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}\left(\sum_{j=1}^{s}B_j^\alpha\right)^p\le C_{p,\alpha}^{(3)}\sum_{k=1}^{\infty}(B_k^\alpha)^pk^{p-2} \\ &= C_{p,\alpha}^{(3)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\nu=N+1}^{n}\left(A_{n-\nu}^{-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}\left[\sum_{\nu=N+1}^{n}a_{k+\nu-1}^p\right]k^{p-2} \\ &= 9^pC_p\left[\sum_{\nu=N+1}^{n}\left(A_{n-\nu}^{-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}\sum_{\nu=N+1}^{n}\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k^p(k-\nu+1)^{p-2}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

В силу условия $\alpha<1-1/p$ и свойства (2.4) имеем

$$\left[\sum_{\nu=N+1}^{n}\left(A_{n-\nu}^{-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}=O\left(\sum_{\nu=1}^{n-N-1}\frac{1}{\nu^{\frac{\alpha p}{p-1}}}\right)^{p-1}=O((n-N-1)^{p-1-\alpha p}), \tag{4.11}$$

Следовательно при $p\geq 2$ выражение (4.10) меньше чем $C^{(4)}_{p,\alpha}\cdot(n-N)^{p(1-\alpha)}R_N$, где R_N N-ий остаток ряда (4.2).

Пусть теперь $p\in(1,2)$, тогда

$$\left\|\sigma^2_{n,2}(x)\right\|^p_p \leq C^{(5)}_{p,\alpha}(n-N)^{p(1-\alpha)-1}\sum_{\nu=N+1}^{n}\left[\sum_{k=\nu}^{2\nu-1}+\sum_{k=2\nu}^{\infty}\right] \tag{4.12}$$

$$\leq C^{(6)}_{p,\alpha}(n-N)^{p(1-\alpha)-1}\sum_{\nu=N+1}^{n}(a^p_\nu\nu^{p-1}+R_{2\nu})$$

$$\leq C^{(7)}_{p,\alpha}(n-N)^{p(1-\alpha)-1}(n-N)R_{N+1}\leq C^{(7)}_{p,\alpha}n^{p(1-\alpha)}R_N.$$

Окончательно получаем оценку $\|\sigma^2_{n,2}(x)\|_p\leq C^{(8)}_{p,\alpha}n^{1-\alpha}R^{1/p}_N$. Далее снова применяя преобразования Абеля представим $\sigma^1_{n,2}(x)$ в следующем виде (см. (4.7)).

$$\sigma^1_{n,2}(x)=n\sum_{\nu=N}^{[n/2]-1}A^{-1-\alpha}_{n-\nu}[S_\nu(x)-S_n(x)] \tag{4.13}$$

$$+n\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}A^{-\alpha}_{n-\nu}a_\nu w_\nu(x)-nA^{-\alpha}_{n-[n/2]}\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}a_\nu w_\nu(x)=\sum_{l=1}^{3}\sigma^{1,l}_{n,2}(x).$$

Поскольку ряд $\sum a^p_n n^{p-2}$, $(p>1)$ сходится, то $a_j=o(j^{1/p-1})$. Пользуясь леммой 3.4 с $a_j=b_j, j\geq 1$ получим

$$\|\sigma^{1,2}_{n,2}(x)\|_p=o(n^{1-\alpha}),\ \text{при}\ \alpha\in(0,1-1/p). \tag{4.14}$$

В силу условий теоремы ряд $\sum a_\nu w_\nu(x)$ сходится по L_p- норме, следовательно

$$\|\sigma^{1,3}_{n,2}(x)\|_p=o(n^{1-\alpha}), \text{при любом}\ \ \alpha. \tag{4.15}$$

Для $\sigma^{1,1}_{n,2}(x)$ при любом $x\in\left(\frac{1}{s+1},\frac{1}{s}\right]$ имеем оценку (см. (2.12))

$$|\sigma^{1,1}_{n,2}(x)|=n\cdot\left|\sum_{\nu=N+1}^{[n/2]-1}A^{-1-\alpha}_{n-\nu}\sum_{j=\nu+1}^{n}a_jw_j(x)\right|\leq 9n\cdot\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]-1}|A^{-1-\alpha}_{n-\nu}|\sum_{j=1}^{s}a_{j+\nu-1}.$$

Рассуждая также как и в (4.9) – (4.12) получим

$$\left\|\sigma^{1,1}_{n,2}(x)\right\|^p_p\leq C^{(9)}_{p,\alpha}n^p\left[\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]}\left|A^{-1-\alpha}_{n-\nu}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]}\sum_{k=\nu}^{\infty}a^p_k(k-\nu+1)^{p-2}$$

$$\leq C^{(10)}_{p,\alpha}n^p\left[\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]}n^{-\frac{p(1+\alpha)}{p-1}}\right]^{p-1}o(n)=o\left(n^{p(1-\alpha)}\right),$$

т.е.

$$\left\|\sigma_{n,2}^{1,1}(x)\right\|_p = o\left(n^{1-\alpha}\right).$$

Учитывая (4.13) – (4.15), с помощью неравенства Минковского получаем

$$\|\sigma_{n,2}^{1}(x)\|_p = o(n^{1-\alpha}). \tag{4.16}$$

Окончательно имеем (см. (4.7), (4.8), (4.16))

$$\|\sigma_{n,2}(x)\|_p = \sum_{l=1}^{3} \|\sigma_{n,2}^{l}(x)\|_p \le C_{p,\alpha}^{(6)} n^{1-\alpha} R_N^{1/p} + C_{p,\alpha}^{(7)} \frac{N}{(n-N)^\alpha} + o(n^{1-\alpha}). \tag{4.17}$$

Выберем натуральное $N(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $m \ge N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $C_{p,\alpha}^{(8)} R_m^{1/p} \le \varepsilon$, это возможно в силу сходимости ряда (4.2). После этого зафиксируем некоторое $N \ge N(\varepsilon)$ и возьмем натуральное $n > 2N$ настолько большим, чтобы последние две слагаемые в выражении (4.17) оставались меньше чем $\varepsilon n^{1-\alpha}$. После чего получаем $\|\sigma_{n,2}(x)\|_p < 2\varepsilon n^{1-\alpha}$. Далее оценим $\sigma_{n,1}(x)$ (см. (2.5))

$$|\sigma_{n,1}(x)| = |\sum_{\nu=0}^{N-1} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x)| \le C_{p,\alpha}^{(11)} \frac{N^2}{(n-N)^\alpha} = o(1), \quad n \to \infty$$

Следовательно при достаточно больших n имеем оценку $\left\|\sigma_{n,\alpha}(x)\right\|_p < 3\varepsilon$, откуда с учетом (2.4) получим $I_p < C_{p,\alpha}^{(12)} \varepsilon$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 2.3. Пусть $0 < \beta < \alpha < 1$ и пусть $\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)$ средние Чезаро порядка $-\alpha$ некоторого Ω_β-ряда. Зафиксируем любую возрастающую последовательность натуральных чисел $M = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть далее

$$G_{n,i}^{\alpha,\beta} = \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| \ge \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \right\} \tag{4.18}$$

Согласно лемме 2.2 имеем $mesG_{n,i}^{\alpha,\beta} \ge \eta_{\alpha,\beta}^{(i)} > 0$. Положим

$$G_{\alpha,\beta}^{i}(M) = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{n=q}^{\infty} G_{m_n,i}^{\alpha,\beta}, \quad G_{\alpha,\beta}(M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha,\beta}^{i}(M)$$

Ясно, что $mes\{G_{\alpha,\beta}(M) \cap \Delta_1^{(i)}\} > 0$ и (см. (4.18))

$$mesG_{\alpha,\beta}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{q\to\infty} mes\left(\bigcup_{n=q}^{\infty} G_{m_n,i}^{\alpha,\beta} \right) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{q\to\infty} mesG_{m_q,i}^{\alpha,\beta} > 0,$$

Покажем, что для любого $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$

$$\limsup_{k\to\infty} |\sigma_{m_k}^{-\alpha}(x, S_\beta)| = +\infty$$

Если $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$, то очевидно существуют натуральные числа $k_0(x), i(x) \geq 1$ и последовательность $n_k =: n_k(x)$, такие, что $x \in G^{\alpha,\beta}_{m_{n_k},i(x)}$, $\quad k \geq k_0(x)$, но тогда (см. (4.18))

$$|\sigma_{m_{n_k}}^{-\alpha}(x, S_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_{m_{n_k}}}{A_{m_{n_k}}^{-\alpha}}, \quad k \geq k_0(x)$$

Откуда $\lim |\sigma_{m_{n_k}}^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| = +\infty$. Теорема 4.3 доказана. □

Доказательство Теоремы 2.4 проводится аналогичным образом, только вместо леммы 2.2 нужно использовать лемму 2.3.

Доказательство Теоремы 2.2. Возьмем произвольное $p_0 > 1$ и $\alpha_0 > 1 - 1/p_0$. Выберем число $\beta' \in (1-1/p_0, \alpha_0)$ и положим $c_j = b(j)/j^{\beta'}$, $j = 1, 2, ...,$ где $b(u) \in B$ выберем так, чтобы оказалось $\{c_j\}_{j=1}^{\infty} \searrow$. Покажем, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j(x)$ является M_{p_0}-рядом. Действительно коэффициенты этого ряда монотонно убывают и в силу определения с.к.ф. имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{p_0} j^{p_0-2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b(j)^{p_0}}{j^{2-p_0+p_0\beta'}} < +\infty$$

С другой стороны средние Чезаро порядка $-\alpha_0$ ряда $\sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j(x)$ не могут сходиться по L_{p_0}-норме, поскольку этот ряд будучи являясь $\Omega_{\beta'}$-рядом согласно теореме 4.3 при $\alpha_0 > \beta'$ не содержит сходящихся подпоследовательностей средних Чезаро порядка $-\alpha_0$. Теорема 2.2 доказана. □

Автор выражает благодарность М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper investigates the convergence of the negative order Cesaro means of the Fourier series in Walsh system with monotone coefficients. It is given a description of the classes of the mentioned type series, the Cesaro means of which over all subsequences unbounded diverge on the sets of positive measure.

Список литературы

[1] Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша , Москва, Наука (1987).

[2] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **1**, Мир, Москва, (1965).

[3] Г. Харди, Расходящиеся ряды, Москва, (1951).

[4] Д. Е. Меньшов, "Применение методов суммирования Чезаро отрицательного порядка к тригонометрическим рядам Фурье от суммируемых функций и от функций с суммируемым квадратом", Мат. сборник, **93(135)**, но. 4, 494 – 511 (1974).

[5] J. Fine, "Cesaro summability of Walsh-Fourier series", Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, 588 – 591 (1955).

[6] S. Yano, "Cesaro summability of Walsh-Fourier series", Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 267 – 272 (1957).

[7] U. Goginava, "The maximal operator of the (C; α) means of the Walsh-Fourier series", Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput., **26**, 127 -Џ 135 (2006).

[8] N. J. Fujii, "Cesaro summability of Walsh-Fourier series", Proc. Amer. Math. Soc., **77**, 111 – 116 (1979).

[9] F. Weisz, "Cesaro summability of one and two-dimensional Walsh-Fourier series", Anal. Math., **22**, 229 – 242 (1996).

[10] F. Weisz, "(C; α) summability of Walsh-Fourier series", Anal. Math., **27**, 141 – 156 (2001).

[11] Л. В. Жижиашвили, "О сходимости и суммируемости тригонометрических рядов Фурье", Мат. заметки, **19**, no. 6, 887 -Ч 898 (1976).

[12] А. И. Григорьев, "О сходимости Чезаровских средних тригонометрических рядов Фурье", Мат. Заметки, **34**, no. 4 (1983).

[13] Л. Н. Галоян, "Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу (C, α, β)", Известия НАН Армении, Математика, **46**, но. 5, 25 – 40 (2012).

Поступила 28 ноября 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2012, стр. 55-66.

ON THE INSTABILITY OF THE RIEMANN HYPOTHESIS FOR VARIETIES OVER FINITE FIELDS

F. DONZELLI AND P. M. GAUTHIER

Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Canada
Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, Canada
E-mails: *fabrizio@math.sunysb.edu; gauthier@dms.umontreal.ca*

Abstract. There exist perturbations of a rational function which remove zeroes and poles from a prescribed region as well as perturbations which add zeroes and poles to a prescribed region. We employ this to show the instability of the Riemann Hypothesis for zeta-functions of smooth projective varieties over finite fields.[1]

MSC2010 number: 11M99; 30K99, 30E10.

Keywords: zeta-function.

Dedicated to Academician Norair Arakelian with profound admiration

1. Introduction

Various examples have been given of functions sharing many properties of the Riemann zeta-function and, in particular, satisfying a *similar* functional equation, but failing to satisfy the analogue of the Riemann hypothesis (see, for example [1, Remark 5, page 3]).

L. D. Pustil'nikov [7] innovated in two ways by showing the existence of such functions which satisfy the *same* functional equation as $\zeta(s)$ and moreover approximate $\zeta(s)$ arbitrarily well. The initiative of Pustil'nikov was refined by others and extended to other zeta functions. In [3], it is shown that zeta functions of curves over finite fields can be approximated by functions satisfying the same functional equation but failing to satisfy the analogue of the Riemann hypothesis. In the present paper, for zeta-functions of varieties over finite fields, we show that such approximations can even be obtained as *continuous perturbations* of the zeta-functions.

Deligne obtained the Fields Medal for proving the Riemann Hypothesis for zeta functions of varieties over finite fields. In the direction opposite to that of the previous paragraph, we show the existence of small perturbations of these zeta-functions which satisfy the same functional equation and continue to satisfy the analogue of the Riemann hypothesis.

[1]Supported by the Engineering Research Council of Canada

This paper contains no new results in number theory. Number theorists have worked hard to show that zeta-functions over finite fields are merely rational functions of a very explicit form. In the next section, we present this explicit form and thereafter study meromorphic functions having a similar form, with no subsequent reference to number theory. Our approach is rather from the viewpoint of complex approximation theory.

2. Analytic properties and symmetries

The following results can be found, for example, in [5]. For p prime, let $V = V(\mathbb{F}_p)$ be a smooth projective variety over the field $\mathbb{F}_p$ having p elements. The Zeta function $\zeta_V(s)$ associated to V was defined by Weil by the equations

$$\zeta_V(s) = Z_V(p^{-s}), \qquad Z_V(u) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{u^m}{m}\right), \tag{2.1}$$

where N_m is the number of points of $V(\mathbb{F}_{p^m})$.
Of course, this definition a priori only makes sense for u in the disc of convergence of the power series or, equivalently, for s in the half-plane of convergence of the corresponding Dirichlet series, and it is a nontrivial result that Z_V is a rational function and hence ζ_V extends meromorphically to all of $\mathbb{C}$. More precisely,

$$Z_V(u) = \frac{P_1(u)\cdots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)\dots P_{2d}(u)}, \tag{2.2}$$

where $d = \dim V$ and $P_j(u) \in \mathbb{Z}[u]$. Moreover, we have the functional equations

$$\overline{Z_V(\overline{u})} = Z_V(u), \qquad Z_V\left(\frac{1}{p^d u}\right) = \pm u^{\chi} p^{d\chi/2} Z_V(u), \tag{2.3}$$

where χ is the self-intersection number of the diagonal in $V \times V$. The Riemann hypothesis for all smooth projective varieties over finite fields was proven in full generality by Deligne, and it amounts to the equations

$$P_j(u) = \prod(1 - \alpha_{jk}u), \qquad |\alpha_{jk}| = p^{j/2}. \tag{2.4}$$

Hence the zeroes of the zeta-function $\zeta(V, s)$ lie on the lines

$$\Re(s) = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{2d-1}{2}$$

and the poles on the lines

$$\Re(s) = 0, 1, 2, \cdots, d.$$

Let Z_j denote the divisor of the zeroes of the polynomial P_j. It follows from (2.4) that the support of Z_j is contained in the circle C_j of radius $p^{\frac{-j}{2}}$. We call C_d the central circle and for j odd, we call the circles C_j critical circles. The second equation in (2.3) implies that

$$Z_j = \frac{1}{p^d Z_{2d-j}}. \tag{2.5}$$

Therefore, the zeroes of P_j are the reflection of the zeroes of P_{2d-j} with respect to the central circle C_d. More precisely, from (2.4) we obtain the equations

$$\frac{1}{\alpha_{(2j-d)k}} = \frac{\alpha_{jk}}{p^d}. \tag{2.6}$$

It follows that the polynomials that make up the factors of the zeta functions satisfy the functional equation

$$P_{2d-j}(u) = (-1)^{N_j} A_j^{-1} p^{N_j d} u^{N_j} P_j(\frac{1}{p^d u}), \tag{2.7}$$

where $A_j = \prod_k \alpha_{jk}$, and N_j is the number of zeroes of P_j, counting multiplicity.

Remark 2.1. *If we compare the relations* (2.3) *and* (2.7) *we obtain the interesting formula:*

$$\chi = N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + N_{2d}.$$

In fact the number χ has the interpretation as the Euler characteristic of a complex variety associated to V (see [4]*, Appendix C).*

For a positive number x and a positive integer j, the expression $x^{j/2}$ represents the positive determination of the square root of x^j. For a function $f : E \to \mathbb{C}$ defined on a set $E \subset \mathbb{C}$, we set

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|,$$

if f omits the value ∞ on E. Otherwise, we put $\|f\|_E = +\infty$. Moreover, we denote by $\mathcal{M}$ and $\mathcal{O}$ respectively the spaces of meromorphic and holomorphic functions on $\mathbb{C}$, and by $\mathcal{O}(E)$ the space of holomorphic functions defined on some open neighborhood of E. The following construction provides a metric d on $\mathcal{M}$ whose topology coincides with the topology of uniform convergence on compacta. Given an exhaustion of $\mathbb{C}$ by closed disks D_n, define

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \min(1, \|f - g\|_{D_n}).$$

We observe in particular that $\mathcal{O}$ is a locally convex space.

3. Approximation by Zeta functions

The first theorem does not rely on the functional equations of a zeta function Z_V, but on the fact [5, p.159] that $s = 0$ is a simple pole of ζ_V.

Theorem 3.1. *For a compact K, let $f \in \mathcal{O}(K)$. Then for any positive ϵ, there exist numbers a_k, b_k, λ_k, $k = 1, 2, \ldots n$, such that*

$$|f(s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \zeta_V(a_k s + b_k)| < \epsilon \quad \forall s \in K.$$

Proof. Let O be a bounded open set containing K such that f is holomorphic on O. After replacing f by $\chi_1 f$, where χ_1 is a smooth function supported in O such that $\chi_1(s) = 1$ on an open subset of O that contains K, we can assume that f extends smoothly on $\mathbb{C}$.
Let O'' be a bounded open set containing the closure of the set $O' = O \cup (O - O)$. Choose r_o so small that $\zeta_V(z)$ has no poles, other than 0, in the disc $D_o = (|z| < r_o)$ and choose t_o so small that the closure of O'' is contained in the disc $D_1 = (|s| < r_o/t_o)$. Fix t with $0 < t < t_o$. Then the poles of $\zeta_V(ts)$ other than zero lie outside the disc D_1 and hence outside the set O''. Since the pole at 0 of ζ_V is simple, setting $a_o = \pi \cdot res(\zeta_V, 0)$ and $a = a_o\pi/t$, all the poles of the meromorphic function

$$h(s) = \zeta_V(ts) - \frac{a}{\pi s}$$

lie outside the closure of O'.

Let χ_2 be a smooth function with support in O'' such that $\chi_2(s) = 1$ on a neighborhood of $\overline{O'}$: then $\widetilde{h} = \chi_2 h$ is a smooth function on $\mathbb{C}$ with compact support, and we can treat

$$\widetilde{\zeta}(s) = \frac{a}{\pi s} + \widetilde{h}(s)$$

as a distribution. Since $\psi(s) = \frac{1}{\pi s}$ is a fundamental solution for the $\overline{\partial}$-operator, and f is locally integrable and continuous, we have the following equalities:

$$f(s) = (f * \delta)(s) = (f * \overline{\partial}\psi)(s) = (\overline{\partial} f * \psi)(s) = \int\int (\overline{\partial} f)(z)\psi(s - z)dxdy =$$
$$a^{-1} \int\int (\overline{\partial} f)(z)\widetilde{\zeta}(s - z)dxdy - a^{-1} \int\int (\overline{\partial} f(z))\widetilde{h}(s - z)dxdy.$$

Since $f = 0$ off O, $s \in K \subset O$ and $\overline{\partial}_z \widetilde{h}(s - z) = 0$ on $O \times O$, integration by parts shows that

$$\int\int (\overline{\partial} f)(z)\widetilde{h}(s - z)dxdy = -\int\int f(z)\overline{\partial}_z \widetilde{h}(s - z)dxdy =$$
$$-\int\int_O f(z)\overline{\partial}_z \widetilde{h}(s - z)dxdy = 0. \tag{3.1}$$

Therefore if $s \in O$,

$$f(s) = a^{-1} \int\int (\overline{\partial} f)(z)\widetilde{\zeta}(s-z)dxdy = a^{-1} \int\int_{supp(\overline{\partial} f)} (\overline{\partial} f)(z)\widetilde{\zeta}(s-z)dxdy =$$

$$a^{-1} \int\int_{supp(\overline{\partial} f)} (\overline{\partial} f)(z)\zeta_V(t(s-z))dxdy, \tag{3.2}$$

where the last equality holds since $\zeta_V(ts) = \widetilde{\zeta}(s)$ for $s \in O'$. Since the integrand in (3.2) is smooth and uniformly continuous, we can approximate it uniformly by Riemann sums, and the result follows. □

4. Instability theorems

In this section we shall show two instability properties of the Riemann hypothesis. First, we prove that the functional equations (2.3) are not sufficient to characterize the zeta function of a variety. Indeed, we approximate the zeta function by functions which satisfy the same functional equation but fail to satisfy the analogue of the Riemann hypothesis, in that they have nontrivial zeroes off the critical axes. It is interesting to compare this with Hamburger's theorem which asserts more or less that the Riemann zeta function is characterized by its functional equation. Secondly, we shall construct functions, close (but not equal) to a given zeta function that satisfy the same functional equations (1) and have the same zeroes. Thus, among small perturbations of the zeta function satisfying the same functional equation, some do not and some do satisfy the analogue of the Riemann hypothesis. In this sense, the Riemann hypothesis is unstable.

Definition 4.1. *Let V be a smooth projective variety over $\mathbb{F}_p$ and $Z_V(u) = \zeta_V(s)$ the corresponding zeta function (where $u = p^{-s}$). Let $\mathcal{M}_V \subset \mathcal{M}$ be the subset of the meromorphic functions that can be written as*

$$f(s) = Z_f(u) = \frac{Q_1(u)Q_3(u)\dots Q_{2d-1}(u)}{Q_0(u)Q_2(u)\dots Q_{2d}(u)}, \tag{4.1}$$

where Q_j are holomorphic functions $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ that satisfy the following properties:

1. *for j even, $Q_j = P_j$; for $i-j$ odd, Q_i and Q_j have no common zeroes;*
2. *if $\hat{u}$ is a pole of Z_f of order m, then $\hat{u}$ is a zero of order at least m for $Q_k - P_k$, for all k;*
3. *Q_j satisfy the same functional equations as the Zeta-function Z_V:*

$$Q_j(u) = \overline{Q_j(\overline{u})}, \qquad Q_{2d-j}(u) = (-1)^{N_j} A_j^{-1} p^{N_j d} u^{N_j} Q_j(\frac{1}{p^d u}), \tag{4.2}$$

where as in Section 1, A_j is the product of the inverses of the zeroes of P_j, and N_j denotes the number of zeroes of P_j.

We denote by $\mathcal{R}_V$ the class of rational functions in $\mathcal{M}_V$.

Remark 4.1. *With Definition 4.1 we have selected a class of functions that resemble the zeta-function* ζ_V*, since:*

(1) *if* $f \in \mathcal{M}_V$*, then* Z_f *satisfies the same functional equation (2.3) as the zeta-function* Z_V*;*
(2) *if* $f \in \mathcal{M}_V$*, then* Z_f *and* Z_V *have the same poles and moreover, at each pole they have the same principal part in the Laurent expansion; in particular,* $Z_V - Z_f$ *is holomorphic on* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*;*

The following theorem shows that every function in $\mathcal{M}_V$ has continuous perturbations which fail to satisfy the analog of the Riemann hypothesis.

Theorem 4.1. *The class* $\mathcal{M}_V^-$ *of functions in* $\mathcal{M}_V$ *which fail the "Riemann hypothesis" is an open dense subset of* $\mathcal{M}_V$ *(*$\mathcal{M}_V$ *endowed with the induced topology from* $\mathcal{M}$*). Moreover, for each* $f \in \mathcal{M}_V$*, there is a continuous curve* $f_t \in \mathcal{M}_V^-, t \in (0,1]$*, such that* $f_t \to f$ *in* $\mathcal{M}_V$*, as* $t \to 0$*. If* $f \in \mathcal{R}_V$*, we may suppose* $f_t \in \mathcal{R}_V^-, t \in (0,1]$*.*

In particular, we can approximate the zeta function ζ_V by continuous perturbations thereof which strongly resemble ζ_V but fail to satisfy the analogue of the Riemann hypothesis. The proof of Theorem 4.1 will be given after the introduction of the following technical lemma.

Lemma 4.1. *Let* $f \in \mathcal{M}_V$*. For* j *odd,* $0 < j < 2d$*, consider functions* μ_j *holomorphic on* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *such that: (a)* $\mu_j(\overline{u}) = \overline{\mu_j(u)}$*, (b)* $\mu_{2d-j}(u) = \mu_j(\frac{1}{p^d u})$*, (c) if* $\hat{u}$ *is a pole of* Z_V *of order* m*, then* $\mu_j - 1$ *vanishes at* $\hat{u}$ *with order at least* m*. Then the functions* $\widetilde{Q}_j(u) = \mu_j(u) Q_j(u)$ *are holomorphic for all* $u \neq 0$ *and satisfy the functional equations (4.2). Hence the function* $\widetilde{f}$*, which is defined by*

$$\widetilde{f}(s) = \widetilde{Z}(u) = \frac{\widetilde{Q}_1(u)\widetilde{Q}_3(u)\ldots\widetilde{Q}_{2d-1}(u)}{Q_0(u)Q_2(u)\ldots Q_{2d}(u)}, \tag{4.3}$$

belongs to $\mathcal{M}_V$*. If* μ *is rational and* $f \in \mathcal{R}_V$*, then* $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_V$*.*

Proof. It is simple to check that $\widetilde{Z}$ satisfies the functional equations (4.2). Then condition (c) guarantees that $\widetilde{Q}_k - P_k$ vanishes of order at least m at $\hat{u}$, if $\hat{u}$ is a pole of order m. □

We may now prove Theorem 4.1.

Proof. The fact that $\mathcal{M}_V^-$ is open follows immediately from Rouché's theorem . We give a proof of the Theorem for varieties of dimension $d \geq 2$, leaving to the reader to adjust the proof to the one-dimensional case. Given $f \in \mathcal{M}_V$, write as usual

$$f(s) = Z_f(u) = \frac{Q_1(u)Q_3(u)\ldots Q_{2d-1}(u)}{Q_0(u)Q_2(u)\ldots Q_{2d}(u)}.$$

Let P be the set of poles of $Z_f(u)$ and m_a be the order of a pole a of Z_f. From the functional equations (4.2) we deduce that, for all $a \in P$, $m_a = m_{1/a} = m_{\overline{a}}$. Consider the functions

$$\mu_{1,t}(u) = 1 + t\prod_{a\in P}(u-a)^{2m_a} \quad \text{and} \quad \mu_{2d-1,t}(u) = \mu_{1,t}(1/p^d u).$$

Since $P = \overline{P}$, the pair $\{\mu_{2d-1}, \mu_1\}$ satisfies condition (a) of Lemma 4.1, while (b) and (c) of the same lemma follow by definition. Hence, we set

$$Q_{1,t}(u) = \mu_{1,t}(u)Q_1(u) \quad \text{and} \quad Q_{2d-1,t}(u) = \mu_{2d-1,t}(u)Q_1(u)$$

and consider the family of function $f_t \in \mathcal{M}_V$

$$f_t(s) = Z_f(u) = \frac{Q_{1,t}(u)Q_3(u)\dots Q_{2d-3}(u)Q_{2d-1,t}(u)}{Q_0(u)Q_2(u)\dots Q_{2d}(u)}.$$

Now we show that there exists a positive ϵ such that if $t \in (0, \epsilon]$, then f_t has non-trivial zeroes outside the critical circles. Given $M > 0$, there exists $\epsilon > 0$ such that if $|t| < \epsilon$ and u is a zero of $\mu_{1,t}$, then $|u| > M$: in fact, since $\mu_{1,t}$ converges uniformly to 1 on compacta, the zero locus is pushed to infinity as t approaches zero. This shows in particular that for t sufficiently small the zeroes of $\mu_{1,t}$ do not belong to any of the critical circles. We are left to prove that $\mu_{1,t}$ has non-real zeroes for t sufficiently small. Denote by P^+ the set of poles of Z_f with positive imaginary part, by P' the set of real poles with absolute value greater than $p^{-d/2}$ and by P^d the set of real poles with absolute value equal to $p^{-d/2}$. Then,

$$\mu_{1,t}(u) = 1+t\prod_{a\in P^+}(u-a)^{2m_a}(u-\overline{a})^{2m_a}\prod_{a\in P'}(u-a)^{2m_a}(u-1/p^d a)^{2m_a}\prod_{a\in P^d}(u-a)^{2m_a}.$$

From this expression for $\mu_{1,t}$ it is easy to see that if t is positive and real, $\mu_{1,t}$ can not have a real zero. Therefore, if $t \in (0, \epsilon]$, then $f_t \in \mathcal{M}_V^-$, and $f_t \in \mathcal{R}_V^-$ whenever $f_0 = f \in \mathcal{R}_V$. The fact that $f_t, t \in [0, \epsilon]$, depends continuously on t (that is, f_t is a continuous curve in $\mathcal{M}_V$) follows from the fact that $\mu_{1,t}$ and $\mu_{2d-1,t}$ converge to 1 uniformly on compacta and assume the value 1 at poles of Z_f. Of course, the curve $f_t, t \in (0, \epsilon]$ can be parameterized on the interval $(0, 1]$ rather than $(0, \epsilon]$. □ The next theorem is in the opposite direction of Theorem 4.1, namely we show that we can perturb elements in $\mathcal{M}_V$ while eliminating non-real zeroes off the critical circles.

Theorem 4.2. *Let $f \in \mathcal{M}_V$. Then, there exists an exhaustion of $\mathbb{C}$ by closed subsets $E_1 \subset E_2 \dots \subset E_n \subset \dots$ and a sequence of functions $f_n \in \mathcal{M}_V$ different from f satisfying the following properties:*

(1) f_n have the same zeroes as f on the critical axes (with the same multiplicity) and on the real axis and no other zeroes;

(2) $\lim ||f_n - f||_{E_n} = 0$; in particular the sequence f_n converges to f pointwise.

In particular, we can take as f the zeta function ζ_V itself. Each f_n resembles the zeta function ζ_V (because it is in $\mathcal{M}_V$) and f_n does satisfy the analogue of the

Riemann hypothesis, since it has no non-trivial zeroes off the critical axes. Let us start once again with the preparatory material.

Definition 4.2. *By a hole of a set $A \subset \mathbb{C}$, we mean any bounded component of $\mathbb{C} \setminus A$. A closed subset E without holes is said to be an Arakelian set if, for any closed disk D, the union of the holes of $D \cup E$ is a bounded set or, equivalently, if $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ is connected and locally connected, where $\widehat{\mathbb{C}}$ denotes the Riemann sphere containing $\mathbb{C}$.*

Arakelian sets are extremely important in complex approximation. Given a function $f : E \to \mathbb{C}$ on a set $E \subset \mathbb{C}$, suppose we wish to approximate f uniformly by entire functions. Then, f must be continuous on E and holomorphic on the interior of E. Moreover, if a sequence f_n of entire functions converges uniformly to f on E, then this sequence is uniformly Cauchy on E and hence also on $\overline{E}$, so there is no loss of generality in assuming that E is closed. A famous theorem of N. U. Arakelian (see [8]) states that a necessary and sufficient condition on a closed set E, in order that each function continuous on E and holomorphic on the interior of E can be uniformly approximated by entire functions, is that $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ be connected and locally connected. This theorem completely solves the problem of uniform approximation by entire functions.

For a divisor $D = \sum n_P(P)$ we define the conjugate divisor $\overline{D} = \sum n_{\overline{P}}(P)$. Also, we denote the support of D by $[D]$. Let $f \in \mathcal{M}_V$ be given. For all k odd, let W_k^+ (resp. W_k^-) denote the divisor of the zeroes of Q_k off the critical circles, outside (resp. inside) the central circle C_d and above the real axis, and let

$$W^+ = \sum_k W_k^+ \quad , \quad W^- = \sum_k W_k^-$$

$$W_k = W_k^+ + \overline{W_k^+} + W_k^- + \overline{W_k^-}.$$

The divisor W of non-trivial zeroes of Z_f off the critical circles is given by

$$W = \sum_k W_k = W^+ + \overline{W^+} + W^- + \overline{W^-}$$

and the set of non-trivial zeroes of Z_f off the critical circles is $[W]$.

Remark 4.2. *There is no relation between W_k^+ and W_k^- (unless $k = d$), but the functional equations (4.2) imply that*

$$\frac{1}{p^d W_{2d-k}^+} = \overline{W_k^-} \quad \textit{and} \quad \frac{1}{p^d W_{2d-k}^-} = \overline{W_k^+}. \tag{4.4}$$

Lemma 4.2. *For each $u \in [W^+]$ and each $n = 1, 2, \ldots$, there exists an unbounded domain (open connected set) $U_{n,u}$ whose boundary consists of two disjoint arcs, each of which goes monotonically from 0 to ∞, having the following properties:*

(1) *for each $u \in [W^+]$ and each n, we have $u \in U_{n,u}$;*

(2) *for each fixed* n, *the sets* $\mathrm{cl}(U_{n,u})$, *with* $u \in [W^+]$, *are disjoint;*
(3) *for each* $u \in [W^+]$ *and each* n, *we have* $U_{n,u} = 1/p^d \overline{U}_{n,u}$;
(4) *for each* $u \in [W^+]$, *the sets* $U_{n,u}$ *are decreasing and*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{n,u} = \{u, 1/p^d \overline{u}\};$$

(5) *for each* $u \in [W^+]$, *the sets* $U_{n,u}$ *are in the upper half-plane and uniformly bounded away from the polar set of* Z_f.
(6) *for each* n,

$$meas \bigcup_{u \in [W^+]} U_{n,u} < 1/n.$$

For each odd value of k, we consider the following sets:

$$U_{n,k} = \bigcup_{u \in [W_k^+]} U_{n,u} \tag{4.5}$$

$$A_{n,k} = \mathbb{C} \setminus \left(U_{n,k} \cup \overline{U}_{n,k} \right). \tag{4.6}$$

Remark 4.3. (1) *If* $u \in W_k$ *for some* k, *then* u *is not a pole of* Z_f.
(2) *It follows from condition (4) of Lemma 4.2 that*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{u \in [W_k^+]} U_{u,n} = \bigcup_{u \in [W_k^+]} \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{u,n} = [W_k^+] \cup [W_{2d-k}^-].$$

The proof of Theorem 4.2 relies on an approximation-interpolation lemma, which is similar to Theorem 40 in [2], but the statement we provide here is stronger.

Lemma 4.3. *Let* X *be an Arakelian set,* $\epsilon > 0, m \in \mathbb{Z}^+$ *and the following data be given:*

(1) *a possibly finite sequence* Λ *in* $\mathbb{C} \setminus X$ *without limit points in* $\mathbb{C}$ *and for each* $\lambda \in \Lambda$ *an integer* $\nu(\lambda) > 0$ *and a non-zero complex number* β_λ;
(2) *a finite sequence* $\{b_1, b_2, \cdots, b_k \in X^o\}$.

Then there exists an entire function H *such that* $||1 - H||_X < \epsilon$, H *has zeroes only at the* λ'*s with order* $\nu(\lambda)$, $H^{(\nu(\lambda)}(\lambda) = \beta_\lambda$, *and* $H - 1$ *has a zero of order at least* m *at* $b_j, j = 1, \cdots, k$.

Proof. Let F be an entire function whose zeroes are precisely the points of $\lambda \in \Lambda$, with order $\nu(\lambda)$ and with $F^{(\nu(\lambda))}(\lambda) = \beta_\lambda$. Then, on X we may write $F = e^{-f}$, with $f \in \mathcal{O}(X)$. Set $E = X \cup \Lambda$ and put $f = 0$ on Λ. Then, E is again an Arakelian set and $f \in A(E)$. It follows from [6] that there is an entire function g such that $|f - g| < \min\{1, \epsilon/e\}$ on E, and $g(\lambda) = 0$, for each $\lambda \in \Lambda$. Moreover, we may stipulate that $g^{(\nu)}(b_j) = f^{(\nu)}(b_j), \nu = 0, 1, \cdots, m$, for each $j = 1, 2, \cdots, k$.

Set $G = e^g$ and $H = GF$. Then, on X we have

$$|H - 1| = |e^{g-f} - 1| \leq |g - f| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g - f|^{n-1}}{n!} \leq |g - f| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \epsilon.$$

The only zeros of H are those of F, that is, the points $\lambda \in \Lambda$. Near such a λ, we have

$$H(z) = G(z)F(z) = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (z - \lambda)^j\right) \left(\frac{\beta_\lambda}{\nu(\lambda)!}(z - \lambda)^{\nu(\lambda)} + \cdots\right).$$

Hence, these zeros are still of order $\nu(\lambda)$ and $H^{(\nu(\lambda))}(\lambda) = \beta_\lambda$.

At each $b_j, j = 1, 2, \cdots, k$, the function $g - f$ has a zero of order at least m and, since the exponential function is a local homeomorphism, at each such b_j, the function $H = e^{g-f}$ assumes the value 1 with multiplicity at least m. □

Proof of Theorem 4.2. Let

$$A_n = \bigcap_k A_{n,k} = \mathbb{C} \setminus \bigcup_k (U_{n,k} \cup \overline{U}_{n,k}),$$

where k runs over odd values. Choose an unbounded increasing sequence $\{r_n\}$ of positive numbers, with $r_1 > p^{-d}$ such that all poles in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ are in the annulus $\{1/(r_1 p^d) < |u| < r_1\}$. Then, there are no poles on the boundaries of the compact subsets

$$K_n = \{1/(p^d r_n) \leq |u| \leq r_n\} \cap A_n.$$

We define the finite set

$$\mathcal{W}_n = \{1/(p^d r_n) \leq |u| \leq r_n\} \cap [W]$$

and set

$$Y_{n,k} = A_n \cup (\mathcal{W}_n \setminus [W_k^+]).$$

Let $\delta_n > 0$; for each odd k we can apply Lemma 4.3, with $X = Y_{n,k}$ to construct a non-constant entire function $h_{n,k}$ such that

a) the zero divisor of $h_{n,k}$ equals W_k^+ and

$$\frac{Q_k(u)}{h_{n,k}(u)} = \delta_n, \quad \forall u \in [W_k^+]; \tag{4.7}$$

$$h_{n,k}(u) = 1, \quad \forall u \in \mathcal{W}_n \setminus [W_k^+]; \tag{4.8}$$

b) $||h_{n,k} - 1||_{Y_{n,k}} < \delta_n$;

c) if u is a pole of multiplicity m, then $h_{n,k}(u) - 1$ vanishes to order at least m at u.

For each k let

$$F_{n,k}(u) = h_{n,k}(u)\overline{h_{n,k}(\overline{u})}h_{n,2d-k}(1/p^d u)\overline{h_{n,2d-k}(1/p^d \overline{u})}. \tag{4.9}$$

Then the zero divisor of $F_{n,k}$ clearly coincides with W_k; moreover, since the polar divisor of Z_f is symmetric with respect to the real axis and the central circle C_d, the functions $F_{n,k}$ satisfy condition c) above. Hence, if we set

$$\widetilde{Q}_{n,k} = \frac{Q_k}{F_{n,k}} \tag{4.10}$$

and

$$Z_{f_n} = \frac{\widetilde{Q}_{n,1}\widetilde{Q}_{n,3}\ldots\widetilde{Q}_{n,2d-1}}{Q_0Q_2\ldots Q_{2d}}, \tag{4.11}$$

then the function f_n defined by $f_n(s) = Z_{f_n}(u)$ belongs to the class $\mathcal{M}_V$ and satisfies condition (1) of Theorem 4.2.

The validity of condition (2) of Theorem 4.2 follows from the following fact: for any $\epsilon_n > 0$, then there exists $\delta_n > 0$ such that if $h_{n,k}$ are defined by a) b) and c) as above, then

$$||Z_{f_n} - Z_f||_{K_n \cup \mathcal{W}_n} < \epsilon_n. \tag{4.12}$$

Indeed, consider a sequence $\epsilon_n \to 0$ for $n \to \infty$, and the collection of closed sets

$$E_n = \{s : p^{-s} \in K_n\} \cup \{s : p^{-s} \in \mathcal{W}_n\}. \tag{4.13}$$

which clearly satisfies $\bigcup_n E_n = \mathbb{C}$. Then $f_n \neq f$, since $h_{n,k} \neq 1$, and

$$||f - f_n||_{E_n} = ||Z_f - Z_{f_n}||_{K_n \cup \mathcal{W}_n} < \epsilon_n$$

which implies that $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{E_n} = 0$, which is condition (2) of Theorem 4.2.

We prove (4.12) first on K_n, then on $\mathcal{W}_n$. Observe that K_n is symmetric with respect to the central circle C_d and the real axis; moreover, $K_n \subset Y_{n,k}$ for all k. Given a collection $h_{n,k}$ of functions satisfying a), b) and c), we therefore have

$$||h_{n,k} - 1||_{K_n} \leq ||h_{n,k} - 1||_{Y_{n,k}} < \delta_n, \quad \forall k. \tag{4.14}$$

Condition c) imposed on $h_{n,k}$ implies that Z_f and Z_{f_n} have the same poles and the same principal part at each pole. Therefore $Z_f - Z_{f_n}$ is holomorphic for all $u \neq 0$, and the maximum principle implies that

$$||Z_f - Z_{f_n}||_{K_n} \leq ||Z_f - Z_{f_n}||_{\partial K_n}.$$

Since Z_f has no poles on ∂K_n, it is bounded on ∂K_n. Since K_n is a compact set, and each $F_{n,k}$ is a finite product of $h_{n,k}$ and its conjugates, then given $\epsilon_n > 0$ there exists $\delta_n > 0$ such that

$$||1 - \Pi_k F_{n,k}^{-1}||_{\partial K_n} \leq ||1 - \Pi_k F_{n,k}^{-1}||_{K_n} \leq \frac{\epsilon_n}{||Z_f||_{\partial K_n}}.$$

Therefore we can estimate

$$||Z_f - Z_{f_n}||_{K_n} \leq ||Z_f - Z_{f_n}||_{\partial K_n} = ||Z_f||_{\partial K_n}||1 - \Pi_k F_{n,k}^{-1}||_{K_n} < \epsilon_n. \tag{4.15}$$

Next, we want to show that (4.12) holds on $\mathcal{W}_n$; since $Z_f = 0$ on $\mathcal{W}_n$, we must show that

$$||Z_{f_n}||_{\mathcal{W}_n} < \epsilon_n. \tag{4.16}$$

We first prove the estimate (4.16) for $u \in \mathcal{W}_n \cap [W^+]$. The proof for the other three cases, namely $u \in \mathcal{W}_n \cap [W^-]$, $u \in \mathcal{W}_n \cap [\overline{W^-}]$, $u \in \mathcal{W}_n \cap [\overline{W^+}]$ will follow from the functional equations (4.2).

From equation (4.7), we have, with $v = 1/p^d u$ and abbreviating $h_{n,j}$ to h_j :

$$Z_{f_n}(u) = \frac{\delta_n}{h_1(\overline{u})h_{2d-1}(v)\overline{h_{2d-1}(\overline{v})}} \times \cdots \times \frac{\delta_n}{h_{2d-1}(\overline{u})h_1(v)\overline{h_1(\overline{v})}} \times \frac{1}{Q_0(u)\dots Q_{2d}(u)}.$$

If $u \in \mathcal{W}_n \cap [W^+]$, then, by (4.8), all the factors in the denominator, other than $Q_0(u), \cdots, Q_{2d}(u)$, are equal to 1 and so, for $u \in \mathcal{W}_n \cap [W^+]$,

$$Z_{f_n}(u) = \frac{\delta_n \times \cdots \times \delta_n}{Q_0(u)\dots Q_{2d}(u)}.$$

Since $Q_0(u), \cdots, Q_{2d}(u)$ are different from zero for u in the finite set $\mathcal{W}_n$, it follows that, if we choose δ_n sufficiently close to zero, we have $|Z_{f_n}(u)| < \epsilon_n$.

Suppose now that $u \in \mathcal{W}_n \cap [\overline{W^-}]$. Then, $v \in \mathcal{W}_n \cap [W^+]$ so $|Z_{f_n}(v)| < \epsilon_n$, by the previous case. Moreover, by the functional equation, $Z_{f_n}(u) = Cu^N Z_{f_n}(v)$, where N is plus or minus some N_j. Since u is restricted to the finite set $\mathcal{W}_n$, we may assume that δ_n is sufficiently small that $|Z_{f_n}(u)| < \epsilon_n$.

The remaining cases $u \in \mathcal{W}_n \cap [\overline{W^+}]$ and $u \in \mathcal{W}_n \cap [W^-]$ follow from the previous two and the functional equation $Z_{f_n}(\overline{u}) = \overline{Z_{f_n}(u)}$.

This concludes the proof of the estimate (4.16) and of Theorem 4.2. □

Список литературы

[1] J. B. Conrey, A. Ghosh, “On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees”, Duke Math. J., **72(3)**, 673 – 693 (1993).

[2] P. M. Gauthier, “Approximation of and by the Riemann zeta-function”, Comput. Methods Funct. Theory, **10**, no. 2, 603 – 638 (2010).

[3] P. M. Gauthier, N. Tarkhanov, “On the instability of the Riemann hypothesis for curves over finite fields”, J. Approx. Theory (to appear).

[4] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

[5] J. S. Milne, Elliptic Curves, Kea Books, Charleston, SC: Boosurge, LLC (2006).

[6] N. Nikolov, P. Pflug, “Simultaneous approximation and interpolation on Arakelian sets”, Can. Math. Bull., **50**, no. 1, 123 – 125 (2007).

[7] L. D. Pustyl’nikov, “Refutation of an analogue of the Riemann hypothesis about zeros for an arbitrarily sharp approximation of the zeta function satisfying the same functional equation”, Russ. Math. Surv., **58**, no. 1, 193 – 194 (2003); translation from Usp. Mat. Nauk, **58**, no. 1, 175-176 (2003).

[8] W. Rudin, J-P Rosay, “Arakelian approximation theorem”, Amer. Math. Monthly, **96**, no. 5, 432 – 434 (1989).

Поступила 22 декабря 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2012, стр. 67-84.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. НУРБЕКЯН

Университет Техаса в Остине, Остин, Техас
Высший Технический Институт, Лиссабон, Португалия
E-mail: *lnurbekyan@math.utexas.edu*

Аннотация. Цель данной работы исследовать существование, единственность и регулярность минимальных кривых одномерной задачи вариационного исчисления в гильбертовых пространствах. Доказано существование C^2 локально минимальных кривых и что функция значения является вязкостным решением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби.

MSC2010 number: 49J27, 49K27, 49L25.

Ключевые слова: Вариационное исчисление; гильбертово пространство.

1. Введение

В данной работе мы изучаем некоторые вопросы одномерного вариационного исчисления в бесконечномерных гильбертовых пространствах. В частности, мы заинтересованы в существовании и регулярности минимальных кривых для задачи оптимального управления данного типа. Результаты данной статьи являются подготовительным материалом для статьи с Д. Гомесом, где мы рассматриваем лагранжеву динамику и доказываем слабую КАМ теорему для так называемого *бесконечномерного торуса.* Полученные с Д. Гомесом результаты являются обобщениями соответствующих результатов недавно полученных Уилфридом Гангбо и Адрианом Тудораску [4, 5].

Основная сложность при рассмотрении вариационной проблемы в бесконечномерных пространствах это проблема существования минимальных кривых. В классическом случае, существование минимальных кривых можно доказать в довольно общих условиях. В бесконечномерном случае довольно сложно доказать существование минимальных кривых даже в частных задачах. Несмотря на это, некоторые общие результаты могут быть получены. Здесь мы демонстрируем часть таких результатов.

Статья организована следующим образом. В § 3 мы рассматриваем задачу оптимального управления

$$V(M,t)=\inf\left\{\int_t^T L(x(s),\dot{x}(s))ds+\Psi(x(T));\ x(t)=M,\ x\in AC^2([t,T];\mathcal{H})\right\}, \tag{1.1}$$

где $L:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ лагранжиан системы, а $\mathcal{H}$ произвольное гильбертово пространство. Мы показываем, что минимальные кривые существуют, если интервал времени довольно короткий. Далее, мы получаем необходимые и достаточные условия для минимальных кривых, такие как уравнения Эйлера-Лагранжа. Также доказано, что минимальные кривые регулярны.
В § 4 мы изучаем вариационную задачу

$$\inf\left\{\int_0^t L(x(s),\dot{x}(s))ds;\ x(0)=M_1, x(t)=M_2,\ x\in AC^2([0,t];\mathcal{H})\right\}. \tag{1.2}$$

Структура параграфа аналогична структуре § 3.
В § 5 мы показываем, что функция значения $V(M,t)$ является вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби

$$-V_t+H(M,\nabla_{\mathcal{H}}V)=0,$$

где H соответствующий гамильтониан.

2. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{H}$ - сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и внутренним произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Мы рассматриваем лагранжиан $L:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ вида

$$L(M,N)=\frac{\|N\|^2}{2}-\mathcal{U}(M), \tag{2.1}$$

где $\mathcal{U}:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ функция класса C^1 (в смысле Фреше), липшицева, ограничена, полувыпуклая и полувогнутая.
Функция $f:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке $M\in\mathcal{H}$, если существует элемент $\xi\in\mathcal{H}^*=\mathcal{H}$ такой, что $f(M+\Delta M)=f(M)+\langle\xi,\Delta M\rangle+o(\|\Delta M\|)$. Если f дифференцируема, такой элемент ξ единственный, обозначается через $\nabla_{\mathcal{H}}f(M)$ и называется градиентом f в M.
Функция $f:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ из класса C^1, если она дифференцируема во всех точках и функция $\nabla_{\mathcal{H}}f(\cdot):\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ непрерывна в топологии сильной сходимости.
Функция $f:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ называется полувыпуклой (полувогнутой), если существует постоянная C такая, что $f(M+N)+f(M-N)-2f(M)\geq -C\|N\|^2$, $(\leq C\|N\|^2)$, для всех $M,N\in\mathcal{H}$.

Не трудно доказать, что непрерывная функция f полувыпукла тогда и только тогда, когда выпукла функция $f(M) + \frac{C\|M\|^2}{2}$. Аналогичное утверждение верно и для полувогнутой функции.

Для функции $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ элемент $\xi \in \mathcal{H}$ принадлежит субдифференциалу f в точке M, если $f(M + \Delta M) \geq f(M) + \langle \xi, \Delta M \rangle + o(\|\Delta M\|)$. Субдифференциал функции f в точке M обозначается через $D^- f(M)$. Элемент $\xi \in \mathcal{H}$ принадлежит супердифференциалу функции f в точке M, если $-\xi \in D^-(-f)(M)$. Супердифференциал f в точке M обозначается через $D^+ f(M)$. Элементы субдифференциала (супердифференциала) называются субградиентами (суперградиентами).

Если в некоторой точке как субдифференциал так и супердифференциал не пусты, то в этой точке функция дифференцируема и оба, субдифференциал и супердифференциал, состоят из одного общего элемента: градиента функции в этой точке.

Для выпуклой функции $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ $\xi \in D^+ f(M)$ тогда и только тогда, когда $f(M + \Delta M) \geq f(M) + \langle \xi, \Delta M \rangle$, т.е. график функции f имеет опорную плоскость. Легко доказать, что если график функции имеет опорную плоскость в каждой точке, то она выпукла. Оказывается, что обратное утверждение тоже верно (см. [3]), т.е. график каждой выпуклой непрерывной функции имеет опорную плоскость во всех точках (в частности не пустой субдифференциал).

Из вышесказанного следует, что функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ полувыпукла тогда и только тогда, когда субдифференциал $D^- f(M)$ не пустой в каждой точке M и существует постоянная C такая, что $f(M + \Delta M) \geq f(M) + \langle \xi, \Delta M \rangle - \frac{C\|M\|^2}{2}$, для каждой точки $M \in \mathcal{H}$ и элемента $\xi \in D^- f(M)$. Аналогичное утверждение с очевидными изменениями имеет место и для полувогнутых функций.

Гамильтониан соответствующий лагранжиану определяется с помощью преобразования Лежандра

$$H(M,P) = \sup_{N \in \mathcal{H}} \{-\langle P, N \rangle - L(M,N)\}, \tag{2.2}$$

для $M, P \in \mathcal{H}$. Из уравнения (2.1) имеем, что

$$H(M,P) = \frac{\|P\|^2}{2} + \mathcal{U}(M). \tag{2.3}$$

Обозначим через $AC^2([t,T];\mathcal{H})$ пространство кривых $x : [t,T] \to \mathcal{H}$ таких, что существует функция $\beta \in L^2[t,T]$ для которой

$$\|x(s') - x(s)\| \leq \int_s^{s'} \beta(u)du, \tag{2.4}$$

для всех $t \leq s < s' \leq T$.

Можно доказать, что для каждой такой кривой предел $\dot{x}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{x(s+h)-x(s)}{h}$ существует для почти всех $s \in [t,T]$. Так из уравнения (2.4) имеем, что $\|\dot{x}(u)\| \leq \beta(u)$ п.в., следовательно, $\|\dot{x}(\cdot)\| \in L^2([t,T])$. С другой стороны, если $\|\dot{x}(\cdot)\| \in L^2([t,T])$, то неравенство (2.4) выполняется для $\beta(u) = \|\dot{x}(u)\|$. Из сказанного следует, что $x \in AC^2([t,T];\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда производная $\dot{x}$ существует $\dot{x} \in L^2([t,T];\mathcal{H})$.

3. Задача оптимального управления

В этом параграфе мы рассматриваем классическую задачу оптимального управления (1.1). Функция Ψ называется *функцией стоимости за выход* а функция V называется *функцией значения.*

3.1. **Существование минимальных кривых.**

Сначала мы докажем, что если временной интервал $[t,T]$ достаточно короткий, то задача (1.1) имеет минимум. Сначала докажем Принцип Динамического Программирования (ПДП).

Теорема 3.1. *Для каждой $r \in [t,T]$ имеем*

$$V(M,t) = \inf\left\{\int_t^r L(x,\dot{x})ds + V(x(r),r);\, x(t) = M,\, x \in AC^2(t,T;\mathcal{H})\right\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Поскольку не требуется существования оптимальных кривых, то конечномерное доказательство принципа работает и в бесконечномерном случае. Доказательство для конечномерного случая может быть найдено в [6]. $\square$

Теорема 3.2. *Если функция Ψ полувыпукла, то существует число $h(L,\Psi) > 0$ такое, что если $0 < T - t \leq h(L,\Psi)$, тогда задача (1.1) имеет минимум.*

Замечание 3.1. *Обозначение $h(L,\Psi)$ означает, что число h зависит только от лагранжиана L и от функции Ψ.*

Доказательство. Для каждой траектории x обозначим через $I[x] := \int_t^T L(x,\dot{x})ds + \Psi(x(T))$. Возьмем последовательность кривых x_n таких, что. $I[x_n] \to \inf I$. Имеем

$$\begin{aligned} & I[x_n] + I[x_m] - 2I[\frac{x_n + x_m}{2}] = \\ & \int_t^T \left[L(x_n,\dot{x}_n) + L(x_m,\dot{x}_m) - 2L(\frac{x_m + x_n}{2}, \frac{\dot{x}_m + \dot{x}_n}{2})\right] ds \\ & \qquad + \Psi(x_n(T)) + \Psi(x_m(T)) - 2\Psi(\frac{x_n(T) + x_m(T)}{2}) \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как Ψ полувыпукла,

$$\Psi(x_n(T)) + \Psi(x_m(T)) - 2\Psi(\frac{x_n(T) + x_m(T)}{2}) \geq -C\|x_n(T) - x_m(T)\|^2, \tag{3.3}$$

для некоторой постоянной C. С другой стороны из полувогнутости функции $\mathcal{U}$ имеем, что

$$\int_t^T \left[L(x_n,\dot{x}_n)+L(x_m,\dot{x}_m)-2L(\frac{x_m+x_n}{2},\frac{\dot{x}_m+\dot{x}_n}{2})\right]ds = \tag{3.4}$$

$$= \int_t^T \left(\frac{\|\dot{x}_n\|^2+\|\dot{x}_m\|^2}{2}-\frac{\|\dot{x}_n+\dot{x}_m\|^2}{4}\right) - \int_t^T \left(\mathcal{U}(x_n)+\mathcal{U}(x_m)-2\mathcal{U}(\frac{x_n+x_m}{2})\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|^2 ds - C\int_t^T \|x_n-x_m\|^2 ds.$$

Следовательно,

$$I[x_n]+I[x_m]-2I[\frac{x_n+x_m}{2}] \geq \frac{1}{4}\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|^2 ds - C\int_t^T \|x_n-x_m\|^2 ds -$$

$$- C\|x_n(T)-x_m(T)\|^2.$$

Поскольку $x_n(t)=x_m(t)=M$ имеем, что

$$\|x_n(T)-x_m(T)\|^2 = \|\int_t^T (\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t))\,ds\|^2 \leq (\int_t^T \|\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t)\|ds)^2 \leq$$

$$\leq (T-t)\int_t^T \|\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t)\|^2 ds.$$

Из неравенства Пуанкаре следует

$$\int_t^T \|x_n(t)-x_m(t)\|^2 ds \leq \frac{(T-t)^2}{2}\int_t^T \|\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t)\|^2 ds.$$

Теперь объединяя неравенства выше и беря h достаточно малым, получаем

$$I[x_n]+I[x_m]-2I[\frac{x_n+x_m}{2}] \geq \left(\frac{1}{4}-C\frac{(T-t)^2}{2}-C(T-t)\right)\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{8}\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|^2 \geq 0.$$

Поскольку x_n минимизирующая последовательность, то $\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|^2 \to 0$. Следовательно, $\int_t^T \|x_n-x_m\|^2 \to 0$, откуда имеем, что последовательность $\{x_n\} \subset AC^2((t,T);\mathcal{H})$ фундаментальна, и поэтому сходится к некоторой кривой $x \in AC^2((t,T);\mathcal{H})$. Остается показать, что кривая x минимальна. Действительно,

$$\|x_n(s)-x(s)\| \leq \sqrt{s-t}\left(\int_t^s \|\dot{x}_n-\dot{x}\|^2 d\tau\right)^{1/2} \leq \sqrt{s-t}\left(\int_t^T \|\dot{x}_n-\dot{x}\|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

следовательно $x_n(s)\to x(s)$, $s\in[t,T]$ равномерно по s, значит $\int_t^T \mathcal{U}(x_n(t))ds \to \int_t^T \mathcal{U}(x(s))ds$ и $\liminf_{n\to\infty}\Psi(x_n(T)) \geq \Psi(x(T))$. Кроме этого имеем, что

$$\int_t^T \|\dot{x}_n(s)\|^2 \to \int_t^T \|\dot{x}(s)\|^2,$$

следовательно $\liminf_{n\to\infty} I[x_n] \geq I[x]$, или кривая x минимальна. $\square$

Замечание 3.2. *Заметим, что оценка $h(L,\Psi)$ для $T-t$ зависит от Лагранжиана L и функции Ψ, но не зависит от начальной точки M.*

3.2. **Необходимые условия для минимальных кривых.** Начнем с классического уравнения Эйлера-Лагранжа.

Теорема 3.3. *Если кривая $x \in C^2([t,T];\mathcal{H})$ минимальна для задачи оптимального управления* (1.1)*, тогда она удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа в классическом смысле:*

$$\ddot{x} = -\nabla_{L^2}\mathcal{U}(x). \tag{3.5}$$

Более того, функция Ψ полувыпукла в конечной точке $x(T)$ имея субградиент $P = -D_v L(x(T),\dot{x}(T))$, то есть

$$\Psi(x(T)+N) \geq \Psi(x(T)) + \langle -D_v L(x(T),\dot{x}(T)), N\rangle - C\|N\|^2, \tag{3.6}$$

для всех $N \in \mathcal{H}$ и некоторой постоянной C.

Доказательство. Сначала докажем, что минимальная кривая удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа. Доказательство такое же как и в конечномерном случае. Возьмем любую регулярную кривую $\varphi \in C_c^\infty((t,T);\mathcal{H})$ и рассмотрим функцию $i(\varepsilon) = \int_t^T L(x+\varepsilon\varphi, \dot{x}+\varepsilon\dot{\varphi})$. Поскольку x минимальна, точка $\varepsilon = 0$ точка минимума для функции i, следовательно $i'(0) = 0$. Так как Лагранжиан L из класса C^1, мы имеем, что $i'(0) = \int_t^T \langle D_x L(x,\dot{x}), \varphi\rangle + \langle D_v L(x,\dot{x}), \dot{\varphi}\rangle dt$. Следовательно, для любой регулярной функции φ имеем

$$\int_t^T \langle D_x L(x,\dot{x}), \varphi\rangle + \langle D_v L(x,\dot{x}), \dot{\varphi}\rangle dt = 0,$$

или

$$\int_t^T -\langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), \varphi\rangle + \langle \dot{x}, \dot{\varphi}\rangle dt = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_t^T \langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x) + \ddot{x}, \varphi\rangle dt = 0.$$

Так как $x \in C^2$, то $\nabla_{L^2}\mathcal{U}(x(t)) + \ddot{x}(t) = 0$ в $[t,T]$.

Для уравнения (3.6) выберем любую $N \in \mathcal{H}$. Рассмотрим кривую $y(s) = x(s) + \varphi(s)$, где $\varphi(s) = \frac{s-t}{T-t}N$. Поскольку x минимальна, имеем

$$\int_t^T L(y,\dot{y})ds + \Psi(y(T)) \geq \int_t^T L(x,\dot{x})ds + \Psi(x(T)).$$

Следовательно, получаем

$$\Psi(x(T)+N) \geq \Psi(x(T)) + \int_t^T \left(L(x,\dot{x}) - L(x+\varphi, \dot{x}+\dot{\varphi})\right) ds.$$

Обозначим через $f(N) := \int_t^T \left(L(x+\varphi,\dot{x}+\dot{\varphi}) - L(x,\dot{x})\right) ds$. Имеем что

$$f(N) = \int_t^T \left(L(x+\varphi,\dot{x}+\dot{\varphi}) - L(x,\dot{x})\right) ds = \int_t^T \left(\frac{\|\dot{x}+\dot{\varphi}\|^2}{2} - \frac{\|\dot{x}\|^2}{2}\right) ds - \tag{3.7}$$

$$-\int_t^T (\mathcal{U}(x+\varphi) - \mathcal{U}(x))ds \leq \frac{1}{2}\int_t^T \|\dot{\varphi}\|^2 + \frac{C}{2}\int_t^T \|\varphi\|^2 + \int_t^T \left(\langle \dot{x}, \dot{\varphi}\rangle - \langle \nabla\mathcal{U}(x), \varphi\rangle\right) ds.$$

Здесь мы использовали, что $\mathcal{U}$ полувыпукла, то есть

$$\mathcal{U}(M+P) \geq \mathcal{U}(M) + \langle \nabla\mathcal{U}(M), P\rangle - \frac{C}{2}\|P\|^2, \quad \text{для всех} \quad M, P \in \mathcal{H}.$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\int_t^T \left(\langle \dot{x}, \dot{\varphi}\rangle - \langle \nabla\mathcal{U}(x), \varphi\rangle\right) ds = \langle \dot{x}(T), N\rangle - \int_t^T \langle \ddot{x} + \nabla\mathcal{U}(x), \varphi\rangle ds = \langle \dot{x}(T), N\rangle,$$

так как x решение уравнения Эйлера-Лагранжа (3.5). Следовательно, из уравнения (3.7) получаем

$$f(N) \leq \langle \dot{x}(T), N\rangle + C_1\|N\|^2,$$

где $C_1 = \frac{1}{2(T-t)} + \frac{C(T-t)}{6}$. Откуда получаем

$$\Psi(x(T)+N) \geq \Psi(x(T)) + \langle -\dot{x}(T), N\rangle - C_1\|N\|^2.$$

Заметим, что $D_v L(x,v) = v$ влечет $-\dot{x}(T) = -D_v L(x(T), \dot{x}(T))$. □

Замечание 3.3. *Постоянная C_1 в последней теореме зависит только от $T-t$ и от Лагранжиана. Она не зависит от концов минимальной траектории.*

Теорема 3.4. *Для каждой минимальной кривой $x \in C^2([t,T];\mathcal{H})$ задачи (1.1) определим сопряженную переменную p*

$$p(s) = -D_v L(x(s), \dot{x}(s)). \tag{3.8}$$

Сопряженная переменная удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = D_x H(x(s), p(s)) \\ \dot{x}(s) = -D_p H(x(s), p(s)) \end{cases} \tag{3.9}$$

с конечным условием

$$p(T) \in D_x^- \Psi(x(T)). \tag{3.10}$$

Далее имеем

$$(p(s), H(x(s), p(s))) \in D^- V(x(s), s) \tag{3.11}$$

для $t < s \leq T$ *и*

$$(p(s), H(x(s), p(s))) \in D^+V(x(s), s) \tag{3.12}$$

для $t \leq s < T$*, следовательно, градиент* $DV(x(s), s)$ *существует для всех* $t < s < T$.

Доказательство. Сначала докажем уравнение (3.9). По определению p, имеем

$$\dot{p}(s) = -\frac{d}{ds} D_v L(x(s), \dot{x}(s)) = -D_x L(x(s), \dot{x}(s)),$$

поскольку x удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа $D_x L = \frac{d}{ds} D_v L$, которое эквивалентно уравнению (3.5), когда L имеет форму (2.1). С другой стороны, из свойств преобразования Лагранжа имеем $D_x L = -D_x H$ и поэтому $\dot{p}(s) = D_x H(x(s), p(s))$. Что касается второго уравнения системы (3.9), оно следует из свойства преобразования Лежандра, которое гласит, что $-D_v L(M, \cdot)$ биективное отображение с обратным отображением $-D_p H(M, \cdot)$. Следовательно, из $p(s) = -D_v L(x(s), \dot{x}(s))$ следует $\dot{x}(s) = -D_v L(x(s), p(s))$.

Конечное условие (3.10) содержится в уравнении (3.6). Зафиксируем любую точку $s \in (t, T]$. Для каждой $M \in \mathcal{H}$ и $r \in [t, T]$ пусть y будет кривая

$$y(\tau) = x(\tau) + \frac{\tau - t}{r - t}(M - x(r)).$$

Заметим, что $y(t) = x(t)$ и $y(r) = M$. Из ПДП имеем

$$V(x(t), t) \leq \int_t^r L(y, \dot{y}) d\tau + V(M, r).$$

С другой стороны, поскольку x минимальна

$$V(x(t), t) = \int_t^s L(x, \dot{x}) d\tau + V(x(s), s),$$

то получаем

$$V(M, r) \geq V(x(s), s) + \int_t^s L(x, \dot{x}) d\tau - \int_t^r L(y, \dot{y}) d\tau. \tag{3.13}$$

Пусть

$$\Phi(M, r) = \int_t^r L(y, \dot{y}) d\tau - \int_t^s L(x, \dot{x}) d\tau.$$

Из уравнения (3.13) имеем

$$-D\Phi(x(s), s) \in D^-V(x(s), s),$$

следовательно, нам остается вычислить градиент $D\Phi(x(s), s)$. Прямой подсчет дает (подробности в [6])

$$\begin{cases} D_M \Phi(x(s), s) = D_v L(x(s), \dot{x}(s)), \\ D_r \Phi(x(s), s) = L(x(s), s) - \dot{x}(s) D_v L(x(s), \dot{x}(s)). \end{cases}$$

Поэтому

$$D\Phi(x(s), s) = (-p(s), -H(x(s), p(s))),$$

что доказывает (3.11).

Уравнение (3.12) доказывается аналогично (см. [6]). □

Следствие 3.1. *Функция $V(M,t)$ вдоль любой минимальной кривой дифференцируема и удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби*

$$-V_t + H(M, \nabla_{\mathcal{H}} V) = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Из Теоремы 3.4 имеем $(p(s), H(x(s), p(s))) \in D^- V(x(s), s)$ и $(p(s), H(x(s), p(s))) \in D^+ V(x(s), s)$, для любой минимальной кривой x. Следовательно, V дифференцируема вдоль x и $(p(s), H(x(s), p(s))) = DV(x(s), s)$, $s \in (t, T)$, т.е.

$$-V_t(x(s), s) + H(x(s), \nabla_{\mathcal{H}} V(x(s), s)) = 0, \quad s \in (t, T).$$

□

Если мы ослабим регулярность минимальной кривой, то получим

Теорема 3.5. *Пусть $x \in AC^2((t,T); \mathcal{H})$ минимальная кривая задачи (1.1). Тогда x удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа в слабом смысле, т.е.,*

$$\int_t^T \langle -\nabla_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x), \varphi \rangle + \langle \dot{x}, \dot{\varphi} \rangle ds = 0, \tag{3.15}$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty((t,T); \mathcal{H})$.

Доказательство. Как и для Теоремы 3.3. □

Замечание 3.4. *Очевидно, что любое классическое решение является и решением в слабом смысле.*

Утверждение 3.1. *Пусть $x \in AC^2((t,T); \mathcal{H})$ удовлетворяет уравнению (3.15) для всех $\varphi \in C_c^\infty((t,T); \mathcal{H})$. Тогда x удовлетворяет уравнению (3.15) для всех $\varphi \in AC^2((t,T); \mathcal{H})$ таких, что $\varphi(t) = \varphi(T) = 0$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{A}(\varphi) := \int_t^T -\langle \nabla_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x), \varphi \rangle + \langle \dot{x}, \dot{\varphi} \rangle ds, \varphi \in AC^2((t,T); \mathcal{H}).$$

Используя неравенство Коши-Шварца имеем

$$|\mathcal{A}(\varphi)| \leq \left(\int_t^T \|\nabla_{HH} \mathcal{U}(x)\|^2 + \|\dot{x}\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_t^T \|\varphi\|^2 + \|\dot{\varphi}\|^2 ds \right)^{1/2} = C\|\varphi\|_{AC^2},$$

откуда следует, что линейный оператор $\mathcal{A}$ ограничен. Пусть $\{e_k\}_k^\infty$ ортонормальный базис пространства $\mathcal{H}$. Пусть E_k - множество функций $\varphi \in AC^2((t,T);L^2)$ таких, что

$$\varphi(s) \in span\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, s \in [t,T] \tag{3.16}$$

или эквивалентно $\varphi(s) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(s)e_j$, где $\varphi_j(s)$ функции из пространства $H_0^1(t,T)$. Поскольку $\{e_k\}_k^\infty$ базис в $\mathcal{H}$, то $AC^2((t,T);\mathcal{H}) = \overline{\bigcup_{k=1}^\infty E_k}$. Так как оператор $\mathcal{A}$ ограничен, если мы докажем, что $\mathcal{A}(\varphi) = 0$ для $\varphi \in E_k$, для всех $k \in \mathbb{N}$, мы будем иметь, что $\mathcal{A}(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in AC^2((t,T);\mathcal{H})$. Зафиксируем некоторое k и функцию $\varphi \in E_k$. Тогда $\varphi(s) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(t)e_j$, где $\varphi_j(s) \in H_0^1(t,T)$. Все функции $\varphi_j(s)$ могут быть приближены функциями из $C_c^\infty(t,T)$. Следовательно, функция $\varphi(s)$ может быть приближена функциями из $C_c^\infty((t,T);\mathcal{H})$. Но мы имеем, что оператор $\mathcal{A}$ равен нулю на таких функциях, следовательно, из ограниченности оператора $\mathcal{A}$, вытекает, что $\mathcal{A}(\varphi) = 0$. $\square$

3.3. **Достаточные условия для минимальных кривых.** Здесь мы показываем, что некоторые из выше доказанных необходимых условий для минимальных кривых в некоторых случаях являются достаточными.

Теорема 3.6. *Предположим, что функция Ψ полувыпукла. Тогда существует число $h(L,\Psi) > 0$ такое, что если $0 < T - t \le h(L,\Psi)$ и кривая $x \in C^2([t,T];\mathcal{H})$ с начальным условием $x(t) = M$ и конечным условием*

$$-D_vL(x(T),\dot{x}(T)) \in D_x^-\Psi(x(T)), \tag{3.17}$$

является решением уравнения Эйлера-Лагранжа (3.5)*, то кривая x является единственным минимумом задачи* (1.1).

Доказательство. Возьмем любую кривую $y \in AC^2((t,T);\mathcal{H})$ такую, что $y(t) = M$. Обозначим через $I[x] := \int_t^T L(x,\dot{x})ds + \Psi(x(T))$. Тогда

$$I[y] - I[x] = \int_t^T (L(y,\dot{y}) - L(x,\dot{x}))\,ds + \Psi(y(T)) - \Psi(x(T)).$$

Поскольку Ψ полувыпукла и $-D_vL(x(T),\dot{x}(T)) \in D_x^-\Psi(x(T))$, то получаем

$$\Psi(y(T)) - \Psi(x(T)) \ge -\langle D_vL(x(T),\dot{x}(T)), y(T) - x(T)\rangle - C\|y(T) - x(T)\|^2,$$

для некоторой постоянной C. С другой стороны

$$L(y,\dot{y}) - L(x,\dot{x}) = \frac{\|\dot{y}\|^2}{2} - \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} - \mathcal{U}(y) + \mathcal{U}(x).$$

Из полувогнутости функции $\mathcal{U}$ имеем $\mathcal{U}(y) \le \mathcal{U}(x) + \langle\nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y - x\rangle + C\|y - x\|^2$, для некоторой постоянной C. Следовательно

$$L(y,\dot{y}) - L(x,\dot{x}) \ge \langle\dot{x},\dot{y} - \dot{x}\rangle + \frac{\|\dot{y} - \dot{x}\|^2}{2} - \langle\nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y - x\rangle - C\|y - x\|^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}
I[y]-I[x] \geq & \int_t^T \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot{x}, \dot{y}-\dot{x}\rangle\right) ds \\
& + \frac{1}{2}\int_t^T \|\dot{y}-\dot{x}\|^2 ds - C\int_t^T \|x-y\|^2 ds \\
& - \langle D_v L(x(T),\dot{x}(T)), y(T)-x(T)\rangle - C\|y(T)-x(T)\|^2 \\
& \geq \int_t^T \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot{x}, \dot{y}-\dot{x}\rangle\right) ds \\
& + \langle -D_v L(x(T),\dot{x}(T)), y(T)-x(T)\rangle \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{C(T-t)^2}{2} - C(T-t)\right)\int_t^T \|\dot{y}-\dot{x}\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Так как x является решением уравнения Эйлера-Лагранжа, то из Замечания 3.1 получаем

$$\int_t^T \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot{x}, \dot{y}-\dot{x}\rangle\right) ds + \langle -D_v L(x(T),\dot{x}(T)), y(T)-x(T)\rangle = 0,$$

Таким образом, если h достаточно мало, мы имеем

$$I[y]-I[x] \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{C(T-t)^2}{2} - C(T-t)\right)\int_t^T \|\dot{y}-\dot{x}\|^2 ds \geq \frac{1}{4}\int_t^T \|\dot{x}-\dot{y}\|^2 ds,$$

то есть x единственный минимум. □

3.4. **Регулярность минимальных кривых.** Из Теоремы 3.2 следует, что для полувыпуклой функции Ψ, когда временной интервал достаточно мал, задача (1.1) имеет минимум в пространстве $AC^2((0,T);\mathcal{H})$. Далее, из Теоремы 3.5 следует, что каждая минимальная кривая является слабым решением Эйлера-Лагранжа т.е. имеет место (3.15). В конечномерном случае можно доказать, что каждое слабое решение уравнения Эйлера-Лагранжа из пространства $W^{1,2}$ на самом деле имеет регулярность C^2 и, следовательно, является классическим решением. Мы докажем, что тоже имеет место и в нашем случае.

Теорема 3.7. *Пусть* $x \in AC^2((0,T);\mathcal{H})$ *слабое решение уравнения* (3.15). *Тогда* $x \in C^2([0,T];\mathcal{H})$ *и, следовательно, является классическим решением, т.е. имеет место равенство* (3.5).

Доказательство. Рассмотрим функцию $p(s) = p_0 + \int_s^T D_x L(x,\dot{x})$. Возьмем любую $\varphi \in C_c^\infty([t,T];\mathcal{H})$ с условиями $\varphi(t) = \varphi(T) = 0$. Тогда

$$\int_t^T \frac{d}{ds}\langle p, \varphi\rangle = \langle p, \varphi\rangle \,|_t^T = 0.$$

Следовательно, имеем

$$\int_t^T \langle -D_xL(x,\dot{x}),\varphi\rangle + \langle p,\dot{\varphi}\rangle ds = 0.$$

Теперь используя, что x решает уравнения Эйлера-Лагранжа, получаем

$$\int_t^T \langle D_vL(x,\dot{x}) + p,\dot{\varphi}\rangle ds = 0,$$

для каждой функции $\varphi \in C_c^\infty([t,T];\mathcal{H})$ с условиями $\varphi(t) = \varphi(T) = 0$. Следовательно, функция $D_vL(x,\dot{x})+p$ постоянна. Выбирая p_0 нужным образом, получаем

$$p = -D_vL(x,\dot{x}).$$

По свойствам преобразования Лежандра это эквивалентно условию $\dot{x} = -D_pL(x,p)$. Так как p непрерывна, величина $\dot{x}$ тоже непрерывна и поэтому x принадлежит классу C^1. С другой стороны имеем $\dot{p} = -D_xL(x,\dot{x}) = D_xH(x,p)$, откуда следует, что функция $\dot{p}$ непрерывна или p принадлежит классу C^1. Поскольку $\dot{x} = -D_pL(x,p)$, то $\dot{x}$ из класса C^1 или x из класса C^2. Интегрируя по частям уравнение

$$\int_t^T \langle D_xL(x,\dot{x}),\varphi\rangle + \langle D_vL(x,\dot{x}),\dot{\varphi}\rangle ds = 0$$

получаем равенство

$$\int_t^T \langle D_xL(x,\dot{x}) - \frac{d}{ds}D_vL(x,\dot{x}),\varphi\rangle ds = 0.$$

Так как функция $D_xL(x,\dot{x}) - \frac{d}{ds}D_vL(x,\dot{x})$ непрерывна, она должна тождественно равняться нулю, т.е.

$$D_xL(x,\dot{x}) - \frac{d}{ds}D_vL(x,\dot{x}) = 0.$$

□

Объединяя Теоремы 3.2, 3.7 и Замечание 4.3 получаем следующий результат.

Теорема 3.8. *Если* Ψ *полувыпукла, существует число* $h(L,\Psi) > 0$ *такое, что если* $0 < T - t \leq h(L,\Psi)$, *тогда задача* (1.1) *имеет единственный минимум из класса* C^2, *которое решает уравнение Эйлера-Лагранжа* (3.5) *в классическом смысле.*

4. Задача с фиксированными концами

При данном Лагранжиане (2.1) рассмотрим задачу (1.1) Как и в §3 мы будем рассматривать существование, необходимые и достаточные условия и регулярность минимальных кривых этой задачи.

Замечание 4.1. *Задача* (1.2) *может быть рассмотрена как задача оптимального управления* (1.1)*, где* Ψ *выбрана подходящим образом. Для фиксированной* $M_2 \in \mathcal{H}$ *выберем* Ψ *следующим образом:* $\Psi(M_2) = 0$ *и* $\Psi(M) = \infty$ *для* $M \neq M_2$*.*

Сначала докажем, что для достаточно малого временного интервала задача (1.2) имеет минимум.

Теорема 4.1. *Существует число* $h(L) > 0$ *такое, что если* $0 < t \leq h(L)$*, тогда задача* (1.2) *имеет минимум при любых конечных точках* $M_1, M_2 \in \mathcal{H}$*.*

Замечание 4.2. *Обозначение* $h(L)$ *означает, что число* h *зависит только от Лагранжиана* L *и не зависит от конечных точек* M_1, M_2*.*

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 3.2, только здесь ситуация проще, поскольку нет функции Ψ. □

Теорема 4.2. *Если кривая* $x \in C^2([0,t];\mathcal{H})$ *минимальна для задачи* (1.2)*, то она удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа* (3.5)*. Если минимальная кривая из пространства* $AC^2([0,t];\mathcal{H})$*, тогда она является решением уравнения Эйлера Лагранжа в слабом смысле, т.е. имеет место равенство* (3.15)*.*

Доказательство. Аналогично доказательству для Теорем 3.3 и 3.5. □

Оказывается, что и в случае задачи с фиксированными концами необходимые условия являются и достаточными (локально).

Теорема 4.3. *Существует число* $h(L) > 0$ *такое, что если* $0 < t \leq h(L)$ *и кривая* $x \in C^2([0,t];\mathcal{H})$ *удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа* (3.5) *с конечными условиями* $x(t) = M_1, x(T) = M_2$*, тогда* x *является единственным минимумом задачи* (1.2)*.*

Доказательство. Следует из Теоремы 4.4. □

Теорема 4.4. *Существует число* $h > 0$ *такое, что если* $0 < T - t \leq h(L)$ *и кривая* $x \in AC^2((t,T);\mathcal{H})$ *удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа* (3.15) *с конечными условиями* $x(t) = M_1, x(T) = M_2$*, тогда* x *является единственным минимумом задачи* (1.2)*.*

Доказательство. Возьмем любую кривую $y \in AC^2((t,T);\mathcal{H})$ с $y(0) = x(0) = M_1$ и $y(t) = x(t) = M_2$. Пусть $I[x] := \int_0^t L(x,\dot{x})ds$. Тогда

$$I[y] - I[x] = \int_0^t (L(y,\dot{y}) - L(x,\dot{x}))\, ds.$$

Но

$$L(y,\dot y) - L(x,\dot x) = \frac{\|\dot y\|^2}{2} - \frac{\|\dot x\|^2}{2} - \mathcal{U}(y) + \mathcal{U}(x).$$

Так как $\mathcal{U}$ полувогнута, мы имеем неравенство $\mathcal{U}(y) \le \mathcal{U}(x) + \langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y-x\rangle + C\|y-x\|^2$, для некоторой постоянной C. Следовательно

$$L(y,\dot y) - L(x,\dot x) \ge \langle \dot x, \dot y - \dot x\rangle + \frac{\|\dot y - \dot x\|^2}{2} - \langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y-x\rangle - C\|y-x\|^2,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} I[y]-I[x] &\ge \int_0^t \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot x, \dot y - \dot x\rangle\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot y - \dot x\|^2 ds - C\int_0^t \|x-y\|^2 ds \\ &\ge \int_0^t \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot x, \dot y - \dot x\rangle\right) ds \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{Ct^2}{2}\right)\int_0^t \|\dot y - \dot x\|^2 ds. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали одномерное неравенство Пуанкаре. Далее, так как x слабое решение уравнения Эйлера-Лагранжа (3.15), то используя Замечание 3.1, получаем равенство

$$\int_0^t \left(-\langle \nabla_{\mathcal{H}}\mathcal{U}(x), y-x\rangle + \langle \dot x, \dot y - \dot x\rangle\right) ds = 0.$$

Следовательно, имеем

$$I[y]-I[x] \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{Ct^2}{2}\right)\int_0^t \|\dot y - \dot x\|^2 dt \ge \frac{1}{4}\int_0^t \|\dot y - \dot x\|^2 dt \ge 0$$

если h достаточно мало. Значит x единственный минимум. □

Замечание 4.3. *Объединяя Теоремы 3.5, 3.7, 4.1, 4.4 получаем, что существует число $h(L) > 0$ такое, что если $0 < t \le h(L)$, тогда задача* (1.2) *имеет минимум из класса C^2, который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа* (3.5) *в классическом смысле.*

5. Уравнение Гамильтона-Якоби

В этом параграфе мы докажем, что функция V решает уравнение Гамильтона-Якоби (3.14) в вязкостном смысле.

Определение 5.1. *Непрерывная функция $V : \mathcal{H} \times (-\infty, T) \to \mathbb{R}$ является вязкостным субрешением уравнения Гамильтона-Якоби* (3.14)*, если*

$$-q + H(M,Q) \le 0, \tag{5.1}$$

для всех $(M,t) \in (-\infty, T)$ *и* $(Q,q) \in D^+V(M,s)$. *Оно является вязкостным суперрешением, если*

$$-q + H(M,Q) \geq 0, \tag{5.2}$$

для всех $(M,t) \in (-\infty, T)$ *и* $(Q,q) \in D^-V(M,s)$. *Оно вязкостное решение, если оно и субрешение и суперрешение.*

Предположим, что функция Ψ ограничена и Липшицева. Начнем с предварительной леммы.

Лемма 5.1. *Функция* V *удовлетворяет неравенствам*

$$\|V(\cdot,t)\|_\infty \leq (T-t)\|\mathcal{U}\|_\infty + \|\Psi\|_\infty. \tag{5.3}$$

Доказательство. Для любой $M \in \mathcal{H}$ и $t < T$ имеем, что

$$V(M,t) = \inf\left\{\int_t^T L(x,\dot{x})\,ds + \Psi(x(T)); \quad x(t) = M\right\},$$

следовательно

$$V(M,t) \leq \int_t^T L(x^*,\dot{x}^*)ds + \Psi(x^*(T)),$$

где $x^*(s) \equiv M$. Далее, $L(x^*,\dot{x}^*) = L(M,0) = -\mathcal{U}(M) \leq \|\mathcal{U}\|_\infty$ и $\Psi(x^*(T)) = \Psi(M) \leq \|\Psi\|_\infty$, откуда следует

$$V(M,t) \leq (T-t)\|\mathcal{U}\|_\infty + \|\Psi\|_\infty.$$

Чтобы получить нижнюю оценку, заметим, что для каждой кривой x имеем $L(x,\dot{x}) = \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} - \mathcal{U}(x(t)) \geq -\|\mathcal{U}\|_\infty$ и $\Psi(x(T)) \geq -\|\Psi\|_\infty$. Следовательно,

$$V(M,t) \geq -(T-t)\|\mathcal{U}\|_\infty - \|\Psi\|_\infty.$$

□

Теорема 5.1. *Функция* V *решает уравнение Гамильтона-Якоби* (3.14) *в вязкостном смысле.*

Доказательство. Субрешение. Зафиксируем $(M,t) \in \mathcal{H} \times (-\infty, T)$ и $(Q,q) \in D^+V(M,t)$. Для каждой $N \in \mathcal{H}$ по ПДП (3.1) мы имеем, что для любой $r > t$

$$V(M,t) \leq \int_t^r L(x^*,\dot{x}^*)ds + V(x^*(r),r), \tag{5.4}$$

где $x^*(s) = M + (s-t)N$. Так как $(Q,q) \in D^+V(M,t)$ и $x^*(r) - M = (r-t)N$, имеет место неравенство

$$V(x(r),r) \leq V(M,t) + \langle Q, M\rangle + q(r-t) + o(r-t), \tag{5.5}$$

что влечет

$$0 \le \int_t^r L(x^*, \dot{x}^*)ds + \langle Q, x^*(r) - M\rangle + q(r-t) + o(r-t). \tag{5.6}$$

Деля обе части неравенства на $r-t$, получаем

$$0 \le \frac{1}{r-t}\int_t^r L(x^*, \dot{x}^*)ds + \langle Q, N\rangle + q + o(1). \tag{5.7}$$

Переходя к пределу когда $r \to t$, имеем

$$-q - \langle Q, N\rangle - L(M, N) \le 0. \tag{5.8}$$

Беря супремум по всем $N \in \mathcal{H}$ получаем $-q + H(M, Q) \le 0$, т.е. V субрешение.

Суперрешение. Опять зафиксируем произвольные точки $(M, t) \in \mathcal{H} \times (-\infty, T)$ и $(Q, q) \in D^-V(M, t)$. Выберем $t_n > t$ и $\varepsilon_n > 0$ такие, что $t_n \to t$ и $\varepsilon_n = o(t_n - t)$. Возьмем r такую, что $t < r < T$ и $r - t < h(L)$, где $h(L)$ число из Замечания 4.3. Из ПДП можно выбрать последовательность кривых x_n таких, что

$$\int_t^r L(x_n, \dot{x}_n)ds + V(x_n(r), r) \le V(M, t) + \varepsilon_n.$$

Если $r - t < h(L)$, то для любого n (см. Замечание 4.3) вариационная задача

$$\inf\{\int_t^r L(y, \dot{y})ds; \quad y(t) = M, y(r) = x_n(r), \quad y \in AC^2((t, r); \mathcal{H})\} \tag{5.9}$$

имеет единственный минимум $y_n \in C^2([t, r]; \mathcal{H})$ который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа (3.5), т.е.

$$\ddot{y}_n(s) = -\nabla \mathcal{U}(y_n(s)), \quad s \in [t, r]. \tag{5.10}$$

Поскольку y_n минимум задачи (5.9), то имеем

$$\int_t^r L(y_n, \dot{y}_n)ds + V(y_n(r), r) \le \int_t^r L(x_n, \dot{x}_n)ds + V(x_n(r), r),$$

откуда получаем

$$\int_t^r L(y_n, \dot{y}_n)ds + V(y_n(r), r) \le V(M, t) + \varepsilon_n. \tag{5.11}$$

Так как $t_n \to t$, то мы можем предположить, что $t_n < r$ для всех n. Из ПДП имеем

$$\int_t^{t_n} L(y_n, \dot{y}_n)ds + V(y_n(t_n), t_n) \le \int_t^r L(y_n, \dot{y}_n)ds + V(y_n(r), r), \tag{5.12}$$

следовательно, из неравенства (5.11) получаем

$$\int_t^{t_n} L(y_n, \dot{y}_n)ds + V(y_n(t_n), t_n) \le V(M, t) + \varepsilon_n. \tag{5.13}$$

Переставляя члены и деля неравенство на $t_n - t$, имеем, что

$$\frac{V(y_n(t_n), t_n) - V(M, t)}{t_n - t} \le -\frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} L(y_n, \dot{y}_n)ds + \frac{\varepsilon_n}{t_n - t}. \tag{5.14}$$

Но $(Q,q)\in D^-V(M,t)$ и $y_n(t)=M$, что означает

$$V(y_n(t_n),t_n)\ge V(M,t)+\langle Q,y_n(t_n)-y_n(t)\rangle+q(t_n-t)$$
$$+(\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+|t_n-t|)\omega\Big(\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+|t_n-t|\Big),$$

где $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$. Поэтому из неравенства (5.14) получаем

$$q+\langle Q,\frac{y_n(t_n)-y_n(t)}{t_n-t}\rangle+\frac{\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+|t_n-t|}{t_n-t}\omega\Big(\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+|t_n-t|\Big)$$
$$\le -\frac{1}{t_n-t}\int_t^{t_n}L(y_n,\dot y_n)ds+\frac{\varepsilon_n}{t_n-t}. \tag{5.15}$$

Так как $\mathcal{U}$ Липшицева, из уравнения (5.10) имеем, что $\sup_{s\in[t,r]}\|\ddot y_n(s)\|\le Lip(\mathcal{U})$ для всех n, где $Lip(\mathcal{U})$ постоянная Липшица $\mathcal{U}$. Отсюда, из неравенства (5.11), и оценки Леммы 5.1 и равенства (5.10), вытекает

$$\sup_{s\in[t,r]}\|y_n(s)\|,\ \sup_{s\in[t,r]}\|\dot y_n(s)\|,\ \sup_{s\in[t,r]}\|\ddot y_n(s)\|\le C \tag{5.16}$$

для всех n и некоторой постоянной C зависящей только от Лагранжиана L и чисел t и r.

Пусть A и B обозначения, для, соответственно, левой и правых сторон неравенства (5.15). Тогда $A=q+\langle Q,\dot y_n(t)\rangle+A_n+B_n$, где

$$\begin{cases}A_n=\langle Q,\frac{y_n(t_n)-y(t)}{t_n-t}-\dot y_n(t)\rangle,\\ B_n=\frac{\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+(t_n-t)}{t_n-t}\omega\Big(\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+(t_n-t)\Big).\end{cases} \tag{5.17}$$

Далее, $B=-L(y_n(t),\dot y_n(t))+C_n+D_n+\frac{\varepsilon_n}{t_n-t}$, где

$$\begin{cases}C_n=-\frac{1}{2(t_n-t)}\int_t^{t_n}(\|\dot y_n(s)\|^2-\|\dot y_n(t)\|^2)ds,\\ D_n=\frac{1}{t_n-t}\int_t^{t_n}(\mathcal{U}(y_n(s))-\mathcal{U}(y_n(t)))ds.\end{cases} \tag{5.18}$$

Утверждение 5.1. $A_n,B_n,C_n,D_n\to 0$.

Доказательство. Пусть C постоянная из неравенства (5.16).

1) Мы имеем

$$|A_n|\le\|Q\|\left\|\frac{y_n(t_n)-y_n(t)}{t_n-t}-\dot y_n(t)\right\|=\|Q\|\frac{\|y_n(t_n)-y_n(t)-\dot y_n(t)(t_n-t)\|}{t_n-t}$$
$$\le\|Q\|\frac{\sup_{s\in[t,t_n]}\|\ddot y_n(t)\|(t_n-t)^2}{2(t_n-t)}\le\frac{C\|Q\|(t_n-t)}{2},$$

где $\theta_n\in(t,t_n)$, т. е. $A_n\to 0$.

2) Заметим, что $\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+(t_n-t)\le(C+1)(t_n-t)$ влечет $\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+(t_n-t)\to 0$ и $|B_n|\le(C+1)\omega\Big(\|y_n(t_n)-y_n(t)\|+(t_n-t)\Big)$. Следовательно $B_n\to 0$.

3) Для C_n, имеем

$$|C_n| \leq \frac{1}{2(t_n - t)} \int_t^{t_n} \Big(\|\dot{y}_n(s)\| + \|\dot{y}_n(t)\| \Big) \|\dot{y}_n(s) - \dot{y}_n(t)\| ds$$
$$\leq \frac{C^2}{t_n - t} \int_t^{t_n} (s-t) ds = \frac{C^2(t_n - t)}{2},$$

что означает $C_n \to 0$.

4) Теперь рассмотрим D_n.

$$|D_n| \leq \frac{1}{t_n - t} \int_t^{t_n} |\mathcal{U}(y_n(s)) - \mathcal{U}(y_n(t))| ds \leq \frac{Lip(\mathcal{U})}{t_n - t} \int_t^{t_n} \|y_n(s) - y_n(t)\| ds$$
$$\leq \frac{Lip(\mathcal{U}) \cdot C}{t_n - t} \int_t^{t_n} (s-t) ds = \frac{Lip(\mathcal{U}) \cdot C(t_n - t)}{2},$$

следовательно $D_n \to 0$. Утверждение полностью доказано.

Используя утверждение, получаем $A = q + \langle Q, \dot{y}_n(t) + o(1)$ и $B = -L(y_n(t), \dot{y}_n(t)) + o(1)$, т.е. из неравенства (5.15) следует

$$-q - \langle Q, \dot{y}_n(t) \rangle - L(y_n(t), \dot{y}_n(t)) \geq o(1),$$

но $H(M, Q) \geq -\langle Q, \dot{y}_n(t) \rangle - L(M, \dot{y}_n(t)) = -\langle Q, \dot{y}_n(t) \rangle - L(y_n(t), \dot{y}_n(t))$, следовательно

$$-q + H(M, Q) \geq o(1).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем $-q + H(M, Q) \geq 0$, т.е. V суперрешение.

□

Abstract. The objective of this paper is to discuss existence, uniqueness and regularity issues of minimizers of one dimensional variational problems in Hilbert spaces. We obtain existence of C^2 local minimizers and prove that the value function of an optimal control problem solves corresponding Hamilton-Jacobi equation in a viscosity sense.

Список литературы

[1] A. Edgar, "Fréchet differentiability of convex functions", Acta Math., **121**, 31 – 47 (1968).

[2] G. J. Minty, "On the monotonicity of the gradient of a convex function", Pacific J. Math., **14**, 243 – 247 (1964).

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionelle; theorie et applications*, Masson, Paris (1983).

[4] W. Ganghbo, A. Tudorascu, "Lagrangian Dynamics on an infinite-dimensional torus; a Weak KAM theorem", Adv. Math., **224**, no. 1, 260 – 292 (2010).

[5] W. Ganghbo, A. Tudorascu, "A Weak KAM theorem; from finite to infinite dimensions", Optimal transportation, geometry and functional inequalities, CRM Series, 11, Ed. Norm., Pisa, 45 – 72, (2010).

[6] D. Gomes "Hamilton Jacobi Equations, Viscosity Solutions and Asymptotics of Hamiltonian Systems", PhD Dissertation, University of California at Berkeley (2000).

Поступила 25 января 2012

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 3, 2012

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 3, 2012

Contents