ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2012

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 3-18.

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

А. АЛЕКСАНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *hayk.aleksanyan@gmail.com*

Аннотация. В работе изучается сходимость гриди (жадного) алгоритма по перенормированной тригонометрической системе. Получено необходимое и достаточное условие на нормировку системы, обеспечивающее сходимость гриди алгоритма почти всюду и по норме пространства $L^p(\mathbb{T})$, при $1 < p < \infty$, где $\mathbb{T}$ – одномерный тор. Также установлено несуществование нормировки, которая обеспечивает сходимость почти всюду для функций из $L^1(\mathbb{T})$ или равномерную сходимость для непрерывных функций.

MSC2010 number: 42A10, 41A65.

Ключевые слова: Нелинейная аппроксимация; гриди (жадный) алгоритм; тригонометрическая система.

1. Введение

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$– базис в банаховом пространстве X и $\inf\limits_n ||\varphi_n||_X > 0$. Тогда любой элемент $f \in$ X единственным образом разлагается в ряд по системе Φ, который сходится к f по норме пространства X:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\varphi_n,$$

где $c_n(f)$ коэффициенты разложения, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

Обозначим через Λ_N множество из N индексов с условием

$$\min_{k\in\Lambda_N} |c_k(f)| \geq \max_{k\notin\Lambda_N} |c_k(f)|.$$

Тогда сумма

$$\mathrm{G}_N(f) := \mathrm{G}_N(f, \Phi) := \sum_{k\in\Lambda_N} c_k(f)\varphi_k$$

называется N-тым *гриди* (*жадным*) аппроксимантом элемента f по системе Φ. Этот метод приближения называется *гриди* алгоритмом.

Базис Φ называется *квази-гриди* базисом, если существует константа C такая, что для любого $f \in \mathrm{X}$

$$||\mathrm{G}_N(f,\Phi)||_X \le C||f||_X,\ \ N = 1,2...$$

В работе [3] Войтащик доказал, что базис Φ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \mathrm{G}_N(f,\Phi)||_X = 0.$$

Сходимость гриди алгоритма для конкретных систем была рассмотрена многими авторами. Т. Корнер, ответив на вопрос поставленный Л. Карлесоном и Р. Койфманом, построил в [4] функцию из $L^2(\mathbb{T})$, а затем в [5] непрерывную функцию, гриди алгоритм которых по тригонометрической системе расходится почти всюду.

В работе [7] В. Темлякова доказано существование функции из L^p, $1 \le p < 2$, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится по мере, и непрерывной фукнции, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится в L^p, $p > 2$. С другой стороны в работе [8] С. В. Конягина и В. Н. Темлякова были получены достаточные условия для сходимости гриди алгоритма. Аналогичные результаты о сходимости и расходимости гриди алгоритма по системе Уолша были получены Г. Амирханяном (см. [15]).

М. Григоряном и А. Саргсяном в работе [17] был построен пример непрерывной функции, гриди алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится по мере.

В работе [11] С. Костюковский и А. Олевский построили ортонормированный базис для $L^2(0,1)$, состоящий из равномерно ограниченных функций, такой что для любой функции из $L^2(0,1)$ гриди алгоритм по этой системе сходится почти всюду, а в работе [12] М.Нильсена была построена равномерно ограниченная ортонормированная система, которая является квази-гриди базисом в $L^p(0,1)$ при всех $1 < p < \infty$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ - убывающая последовательность положительных чисел. Для $f \in \mathrm{X}$ рассмотрим убывающую по модулю перестановку ненулевых коэффициентов с весом γ_n:

$$|\gamma_{\sigma(0)}c_{\sigma(0)}(f)| \ge |\gamma_{\sigma(1)}c_{\sigma(1)}(f)| \ge ...|\gamma_{\sigma(n)}c_{\sigma(n)}(f)| \ge ..., \tag{1.1}$$

и определим гриди аппроксимант с весом Γ:

$$\mathrm{G}_N(f) := \mathrm{G}_N(f,\Phi) := G_N(f,\Phi,\Gamma) := \sum_{n=0}^{N} c_{\sigma(n)}(f)\varphi_{\sigma(n)},\ N=1,2,... \tag{1.2}$$

Множество перестановок σ с условием (1.1) обозначим через $D(f,\Phi,\Gamma)$. Легко видеть, что (1.2) совпадает с гриди аппроксимантом по перенормированной системе Φ:

$$G_N(f,\Phi,\Gamma) = G_N\left(f, \left\{\frac{1}{\gamma_n}\varphi_n\right\}\right),\ N=1,2,... \tag{1.3}$$

Гриди алгоритм с весом для общих систем был рассмотрен в работах С. Конягина и В. Темлякова [14] и [19]. В [18] были описаны все веса, обеспечивающие сходимость гриди алгоритма по системе Хаара в пространстве L^1. В работе [13] была рассмотрена сходимость почти всюду подобного алгоритма для вейвлет систем и системы Хаара. Описание весовых гриди алгоритмов, гарантирующих равномерную сходимость для непрерывных функций и сходимость почти всюду для интегрируемых функций для системы Хаара получено в [6] и [20], а для классической системы Франклина - в [21].

В работе [14] доказано, что для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X, при $\Gamma = \{2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - G_N(f,\Phi,\Gamma)||_{\mathrm{X}} = 0.$$

Для последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$ обозначим

$$\omega(\Gamma) = \sup_{m>n\geq 0}\left\{m-n:\ \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq 2\right\}. \tag{1.4}$$

Пример 1. *Очевидно, что $\omega(\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$ для любого положительного $\alpha < 1$, тогда как $\omega(\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}) = \infty$.*

Замечание 1.1. *Легко видеть, что условие $\omega(\Gamma) < \infty$ эквивалентно условию*

$$\sup_{m>n}\left\{m-n:\ \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq \alpha\right\} < \infty,\ \textit{для любого}\ \alpha > 1.$$

Замечание 1.2. *С учетом замечания* 1.1 *легко видеть, что при условии $\omega(\Gamma) = \infty$ для любых чисел $\alpha > 1$, L и S существуют натуральные числа $B > A$ с условиями*

$$B > A > S,\ B - A > L\ \textit{и}\ \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \leq \alpha.$$

Обозначим через $\mathcal{T} = \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрическую систему в нумерации $\psi_0 = 1$, $\psi_{2n-1} = e^{inx}$, $\psi_{2n} = e^{-inx}$, для $n = 1, 2, ...$, и пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – одномерный тор. Как известно в указанной нумерации система $\mathcal{T}$ является базисом в $L^p(\mathbb{T})$, при $1 < p < \infty$.

В случае тригонометрической системы перестановка имеет вид $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, т.е. для $f \in L^1(\mathbb{T})$ рассматривается последовательность

$$|c_0(f)\gamma_0|,\ |c_1(f)\gamma_1|,\ |c_{-1}(f)\gamma_2|,\ |c_2(f)\gamma_3|,\ |c_{-2}(f)\gamma_4|, ...,$$

где $c_n(f)$ – коэффициенты Фурье функции f, и σ переставляет ее по убыванию.

Целью данной работы является исследование сходимости по норме или почти всюду гриди алгоритма с весом по тригонометрической системе. Но сначала мы докажем следующую теорему:

Теорема 1.1. *Пусть* Φ *– нормированный базис в банаховом пространстве* X *и пусть последовательность* Γ *удовлетворяет условию* $\omega(\Gamma) < \infty$. *Тогда для любых* $f \in \mathrm{X}$ *и* $\sigma \in D(f, \Phi, \Gamma)$,

$$\lim_{N\to\infty} ||f - G_N(f, \Phi, \Gamma)||_{\mathrm{X}} = 0.$$

Поскольку $\omega(\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$, то вышеуказанная теорема С. Конягина и В. Темлякова вытекает из теоремы 1.1, а из доказанной ниже теоремы 1.3 следует, что в классе всех базисов условие $\omega(\Gamma) < \infty$ окончательно.

Для тригонометрической системы мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega(\Gamma) < \infty$ *и* $1 < p < \infty$. *Тогда для любых* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *и* $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$:

1) $\lim\limits_{N\to\infty} ||f - G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)||_p = 0$,
2) $\lim\limits_{N\to\infty} G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)(x) = f(x)$ *п.в. для* $x \in \mathbb{T}$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\omega(\Gamma) = \infty$. *Тогда:*

1) *существует функция* $f \in \bigcap\limits_{1\le p<2} L^p(\mathbb{T})$ *для которой последовательность* $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ *расходится по мере при любой* $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$,
2) *существует функция* $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ *для которой последовательность* $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ *расходится по норме* $||\cdot||_p$, *для любого* $2 < p < \infty$ *при любой* $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

Для непрерывных функций верно следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть последовательность* Γ *фиксирована. Тогда*

1) *при* $\omega(\Gamma) = \infty$ *существует функция* $f \in C(\mathbb{T})$*, для которой последовательность* $\{G_N(f, \mathfrak{T}, \Gamma)\}$ *неограниченно расходится п.в. при любой* $\sigma \in D(f, \mathfrak{T}, \Gamma)$*,*
2) *при* $\omega(\Gamma) < \infty$ *существует функция* $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$*, для которой последовательность* $\{G_N(f, \mathfrak{T}, \Gamma)\}$ *расходится в некоторой точке при любой* $\sigma \in D(f, \mathfrak{T}, \Gamma)$*.*

В следующей теореме рассматривается сходимость почти всюду гриди алгоритма функций из $L^1(\mathbb{T})$.

Теорема 1.5. *Для любой последовательности* Γ *существует функция* $f \in L^1(\mathbb{T})$*, такая, что последовательность* $\{G_N(f, \mathfrak{T}, \Gamma)\}$ *неограниченно расходится почти всюду при любой* $\sigma \in D(f, \mathfrak{T}, \Gamma)$*.*

2. Доказательства теорем 1.2 – 1.4

Ниже в доказательствах через C мы обозначаем абсолютные константы, которые могут быть разные в разных формулах. Для $f \in L^1(\mathbb{T})$ через $\mathrm{sp}f$ обозначим спектр ряда Фурье функции f по тригонометрической системе

$$\mathrm{sp}f = \{n \in \mathbb{Z} : \ c_n(f) \neq 0\}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $f \in \mathrm{X}$ и число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Обозначим

$$T_\varepsilon(f) := \sum_{n:\ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f)\,\varphi_n$$

и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq N\}.$$

Тогда

$$\{n \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{0, 1, ..., N(\varepsilon)\}, \tag{2.1}$$

и

$$\frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}(f)| \to 0, \ \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{2.2}$$

Оценим следующую разность

$$||S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{X}} = \left\| \sum_{n \leq N(\varepsilon),\ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon} c_n(f)\varphi_n \right\|_{\mathrm{X}} \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{\gamma_n}. \tag{2.3}$$

Обозначим $H := \omega(\Gamma) + 1$, тогда из определения (1.4) и условия $\omega(\Gamma) < \infty$, имеем

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_m} > 2, \text{ где } m - n \geq H.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{r=0}^{H-1} \sum_{n \equiv r (mod\ H)} \frac{1}{\gamma_n} \leq$$

$$\sum_{r=0}^{H-1} \left(\frac{1}{2^{i_r}} + \frac{1}{2^{i_r - 1}} + ... + 1 \right) \frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq C \frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}}, \tag{2.4}$$

где i_r, $r = 0, 1, ..., H-1$ – некоторые индексы. Из (2.3), (2.4) и (2.2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{X}} = 0. \tag{2.5}$$

Если множество $D(f, \Phi, \Gamma)$ состоит из одного элемента, то для любого $N \in \mathbb{N}$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$, для которого $G_N(f) \equiv T_\varepsilon(f)$ и следовательно,

$$\lim_{N \to \infty} ||f - G_N(f)||_{\mathrm{X}} = 0.$$

В случае $\#D(f, \Phi, \Gamma) > 1$ обозначим

$$\Omega_0 = \emptyset,\ \Omega_n = \{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus (\Omega_1 \cup ... \cup \Omega_{n-1}) :\ |\gamma_k c_k(f)| = |\gamma_n c_n(f)|\},\ n = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

и если $\Omega_n \neq \emptyset$, то положим $\omega_n = \max \Omega_n$. Теперь, если $\#\Omega_n > 1$, то теми же рассуждениями как и при доказательстве оценки (2.4), получим

$$\sum_{k \in \Omega_n} ||c_k(f)\varphi_k||_{\mathrm{X}} = |\gamma_{\omega_n} c_{\omega_n}(f)| \sum_{k \in \Omega_n} \frac{1}{\gamma_k} \leq$$

$$|\gamma_{\omega_n} c_{\omega_n}(f)| \sum_{k=0}^{\omega_n} \frac{1}{\gamma_k} \leq C|c_{\omega_n}(f)|, \tag{2.7}$$

что вместе с (2.5) доказывает теорему. $\square$.

Доказательство теоремы 1.2. Как видно из доказательства теоремы 1.1 (см. (2.3) и (2.7)), при условии $\omega(\Gamma) < \infty$ аппроксиманты $G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)$, $N = 1, 2, ...$ функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ равномерно равносходятся с некоторой подпоследовательностью частных сумм ряда Фурье функции f. Следовательно, первый пункт теоремы вытекает из базисности тригонометрической системы в пространствах $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, а второй - из знаменитой теоремы Карлесона-Ханта (см. [1]). Теорема 1.2 доказана. $\square$

Пусть

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx},\ N = 0, 1, 2, ...,$$

ядро Дирихле для тригонометрической системы, а

$$V_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{2N} D_n(x),\ N = 1, 2, ...$$

ядро Валле-Пуссена. Справедлива следующая лемма

Лемма 2.1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $1 \le p \le \infty$ имеет место*

$$||V_N||_p \le CN^{1-1/p}.$$

Доказательство. Как известно $||V_N||_1 \le C$ (см. [22], стр. 125), а также легко видеть, что $||V_N||_2 \le CN^{1/2}$ и $||V_N||_\infty \le CN$, для любого $N \ge 1$.
Для $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ из неравенства Гелдера получим

$$||f||_p \le ||f||_q^{\lambda} ||f||_r^{1-\lambda}, \tag{2.8}$$

где

$$1 \le p, q, r \le \infty,\ \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{r} = \frac{1}{p} \text{ и } \lambda \in [0, 1].$$

Теперь используя отмеченные оценки для норм ядра Валле-Пуссена и неравенство (2.8) для $(p, q, r) = (p, 1, 2)$ в случае $1 < p < 2$ и $(p, q, r) = (p, 2, \infty)$ в случае $2 < p < \infty$ получим требуемую оценку. Лемма доказана. □

Рассмотрим мажоранты аппроксимантов (1.2) для системы $\mathcal{T}$:

$$G_N^*(f, \sigma, x) := G_N^*(f, x) := \max_{0 \le n \le N} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_{\sigma(k)}(f) e^{i\sigma(k)x} \right|,\ x \in \mathbb{T},\ N = 1, 2, ..., \tag{2.9}$$

и если P тригонометрический полином, обозначим

$$G^*(P, \sigma, x) := G^*(P, x) := \max_{n \ge 0} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_{\sigma(k)}(P) e^{i\sigma(k)x} \right|,\ x \in \mathbb{T}. \tag{2.10}$$

Нам понадобится следующая лемма из замечательной работы Кернера (см. [5], лемма 7), которую мы перефразируем в несколько ином виде.

Лемма 2.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $K > 1$ существует тригонометрический полином P и измеримое множество $E \subset \mathbb{T}$ такие, что*

(i) $||P||_\infty \le \varepsilon$,

(ii) $G^*(P, \sigma, x) > K,\ \ x \notin E$, *для любой перестановки* $\sigma \in D(P, \mathcal{T}, \{1\}_{n \in \mathbb{Z}})$,

(iii) $\mu(E) \le \varepsilon$,

(iv) *модули всех ненулевых коэффициентов P различны и если $|c_n(P)| > |c_m(P)| > 0$, то $|c_n(P)| > 2|c_m(P)|$.*

Доказательство. Пункты (i) – (iii) соответствуют пунктам (i) – (iii) леммы 7 из [5]. Пункт (iv) в свою очередь вытекает из доказательства леммы 14 указанной работы [5]. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Для доказательства теоремы мы используем метод из [7].

1. Рассмотрим полиномы Рудина-Шапиро (см. [22], стр. 146, Теорема 11)

$$R_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{inx},\ \varepsilon_k = \pm 1,\ x \in \mathbb{T},$$

которые удовлетворяют условию

$$||R_N||_\infty \le CN^{1/2},\ N = 1, 2, ... \tag{2.11}$$

Поскольку тригонометрическая система ортонормирована, из (2.11) следует, что

$$||R_N||_1 \ge CN^{1/2},\ N = 1, 2, ... \tag{2.12}$$

Для $s = \pm 1$ обозначим

$$\Lambda_s := \Lambda_s(N) := \{k :\ c_k(R_N) = s\},$$

и пусть

$$D_\Lambda := \sum_{k\in\Lambda} e^{ikx}.$$

Тогда

$$R_N = D_{\Lambda_1} - D_{\Lambda_{-1}}.$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что

$$\mu\{x \in \mathbb{T} :\ |R_N(x)| > cN^{1/2}\} > c,$$

где $c \in (0, 1)$ – абсолютная константа. Следовательно, для одного из значений $s = \pm 1$ справедливо неравенство

$$\mu\{x \in \mathbb{T} :\ |D_{\Lambda_s(N)}(x)| > \frac{c}{2} N^{1/2}\} > c. \tag{2.13}$$

Рассмотрим следующий тригонометрический полином:

$$g_k(x) := 2^{-k/2}\left(V_{2^k}(x) + s2^{-2k}R_{2^k}(x) - 2^{-2k}\sum_{n=-2^k}^{-1} e^{inx}\right),\ \ x \in \mathbb{T}, \tag{2.14}$$

где $s = \pm 1$ выбрано так, чтобы выполнялось (2.13). Заметим, что

$$2^{k/2} g_k = (1 + 2^{-2k}) \sum_{n \in \Lambda_s(2^k)} e^{inx} + \sum_{n \notin \Lambda_s(2^k),\ |n| \le 2^{k+1}} \alpha_n e^{inx}, \tag{2.15}$$

где $0 < \alpha_n \le 1 - 2^{-2k}$, для всех n. Фиксируем k и пусть p_0 произвольное натуральное число. С учетом замечания 1.2 выберем натуральные числа $B > A > p_0 + 2^{k+1}$ с условиями

$$B - A > 2^{k+2} \text{ и } \frac{\gamma_A}{\gamma_B} < \frac{1 + 2^{-2k}}{1 - 2^{-2k}} \tag{2.16}$$

и обозначим $f_k(x) := e^{i(A+2^{k+1})x} g_k(x)$. В итоге имеем, что первый ненулевой коэффициент полинома f_k может иметь сколь угодно большой номер, а так же ясно, что $\mathrm{sp} f_k \subset [A, B]$. Далее, если обозначим $\gamma_{-1} := \gamma_0$, то с учетом (2.15), (2.16) и монотонности последовательности Γ получим

$$\min_{n \in \Lambda_s(2^k) + A + 2^{k+1}} |c_n(f_k)\gamma_{2n-1}| > \max_{n \notin \Lambda_s(2^k) + A + 2^{k+1}} |c_n(f_k)\gamma_{2n-1}|. \tag{2.17}$$

Заметим также, что из леммы 2.1 вытекает неравенство

$$||f_k||_p \le C 2^{k(1/2 - 1/p)}. \tag{2.18}$$

Теперь выберем возрастающую последовательность натуральных чисел k_n так, чтобы каждый коэффициент в полиноме $g_{k_{n+1}}$ был меньше, чем наименьший коэффициент в g_{k_n}. Потом, исходя из g_{k_n} построим f_{k_n} так, чтобы наименьший из индексов ненулевых коэффициентов $f_{k_{n+1}}$ был больше, чем наибольший из индексов ненулевых коэффициентов f_{k_n}. Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_n}.$$

Из (2.18) следует, что $f \in L^p(\mathbb{T})$ для любого $p < 2$. Возьмем произвольную перестановку $\sigma \in D(f, \mathfrak{T}, \Gamma)$. Из построения f и (2.17) следует, что если выбрать натуральные числа $m_1^{(n)}$ и $m_2^{(n)}$ подходящим образом, получим, что

$$G_{m_1^{(n)}}(f, \mathfrak{T}, \Gamma) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathfrak{T}, \Gamma) = 2^{-k_n/2}(1 + 2^{-2k_n}) e^{i(A_n + 2^{k_n})x} D_{\Lambda_s(2^{k_n})}.$$

Отсюда, с учетом (2.13) вытекает, что

$$\mu\{x \in \mathbb{T} :\ |G_{m_1^{(n)}}(f, \mathfrak{T}, \Gamma)(x) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathfrak{T}, \Gamma)(x)| > \frac{1}{2}c\} > c,$$

а это означает расходимость по мере последовательности $\{G_N(f, \mathfrak{T}, \Gamma)\}_{N=1}^{\infty}$.

2. Пользуясь обозначениями первого пункта, выберем $s = \pm 1$ так, чтобы выполнялось $|\Lambda_s| \geq |\Lambda_{-s}|$ и положим

$$g_k := \frac{2^{-k/2}}{k^2}(R_{2^k} + s2^{-k}D_{2^k}). \tag{2.19}$$

Как и в пункте 1, с учетом замечания 1.2, для данного числа p_0 выберем натуральные числа $B > A > p_0 + 2^k$ с условием

$$B - A > 2^{k+1} \text{ и } \frac{\gamma_A}{\gamma_B} < \frac{1+2^{-k}}{1-2^{-k}} \tag{2.20}$$

и обозначим $f_k(x) := e^{i(A+2^k)x}g_k(x)$. Тогда $\mathrm{sp} f_k \subset [A, B]$, и индекс наименьшего ненулевого коэффициента полинома f_k будет больше наперед заданного числа. Из (2.19), (2.20) и монотонности последовательности Γ получаем, что

$$h_k := G_{|\Lambda_s(2^k)|}(f_k, \mathcal{T}, \Gamma) = \frac{2^{-k/2}}{k^2}(1 + 2^{-k})D_{\Lambda_s(2^k)}. \tag{2.21}$$

Заметим, что $||h_k||_\infty \geq |h_k(0)| \geq Ck^{-2}2^{k/2}$, следовательно, из неравенства С. Никольского для тригонометрических полиномов (см. [16], стр. 256) получим, что

$$||h_k||_p \geq C\frac{2^{-k/p}}{k^2}||h_k||_\infty \geq C\frac{1}{k^2}2^{k(1/2-1/p)}. \tag{2.22}$$

Отметим еще, что в силу (2.11),

$$||f_k||_\infty \leq C\frac{1}{k^2}. \tag{2.23}$$

Теперь построение требуемой функции из полиномов f_k ведется аналогично пункту 1. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел k_n так, чтобы каждый коэффициент в полиноме $g_{k_{n+1}}$ был меньше, чем наименьший коэффициент в g_{k_n}. Потом, исходя из g_{k_n} построим f_{k_n} так, чтобы наименьший из индексов ненулевых коэффициентов $f_{k_{n+1}}$ был больше, чем наибольший из индексов ненулевых коэффициентов f_{k_n}. Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_n}.$$

Из (2.23) имеем, что $f \in C(\mathbb{T})$. Для произвольной перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$ из построения f и (2.21) следует, что существуют последовательности $m_1^{(n)}$ и $m_2^{(n)}$, для которых

$$G_{m_1^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) = h_{k_n}.$$

Из последнего, в силу (2.22) следует утверждение теоремы. Теорема 1.3 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.4. Пункт **1.** Имеем $\omega(\Gamma) = \infty$. Из леммы 2.2 следует, что существуют тригонометрические полиномы P_n и измеримые множества $E_n \subset \mathbb{T}$, $n = 1, 2, ...$, удовлетворяющие условиям:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||P_n||_\infty < \infty$,

b) $\mu(E_n) \to 0$,

c) $G^*(P_n, \sigma, x) > n, \ x \notin E_n$, для любой перестановки $\sigma \in D(P_n, \mathcal{T}, \{1\}_{m\in\mathbb{Z}})$,

d) если $m, k \in \mathrm{sp}P_n$ и $|c_m(P_n)| > |c_k(P_n)|$, то $|c_m(P_n)| > 2|c_k(P_n)|$,

e) $\min\limits_{m\in \mathrm{sp}P_n} |c_m(P_n)| > \max\limits_{m\in \mathrm{sp}P_{n+1}} |c_m(P_{n+1})|$.

С учетом замечания 1.2 выберем натуральные числа B_n и A_n, $n = 1, 2, ...$ такие, что

$$A_n < B_n < A_{n+1}, \ B_n - A_n > 4|\mathrm{sp}P_n| \text{ и } \frac{\gamma_{A_n}}{\gamma_{B_n}} \le 2, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.24}$$

Положим теперь $Q_n(x) = \exp[i(A_n + |\mathrm{sp}P_n|)x]P_n(x)$, $n = 1, 2, ...$ и заметим, что спектры полиномов Q_n не пересекаются. Докажем, что функция $f := \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ удовлетворяет условиям первого пункта теоремы. Непрерывность функции f следует из a). Далее, для произвольной перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$ из условия d), (2.24) и монотонности Γ следует, что

$$\sigma\,|_{\mathrm{sp}Q_n} \in D(Q_n, \mathcal{T}, \{1\}_{m\in\mathbb{Z}}), \ n = 1, 2, ... \tag{2.25}$$

Из e), (2.24) и монотонности Γ следует, что

$$\min_{k\in \mathrm{sp}Q_n} |c_k(Q_n)\gamma_{2k-1}| > \max_{k\in \mathrm{sp}Q_{n+1}} |c_k(Q_{n+1})\gamma_{2k-1}|, \ n = 1, 2, ... \tag{2.26}$$

Из (2.26), (2.25) и условия c) получим, что существует последовательность индексов a_n с условием:

$$G^*_{a_n}(f, \sigma, x) \ge \frac{1}{2} G^*(Q_n, x) \ge \frac{1}{2} n, \ x \notin E_n,$$

откуда, с учетом b), вытекает, что последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится почти всюду, что и доказывает первый пункт теоремы.

Пункт **2**. Д. Е. Меньшов показал, что существует непрерывная функция, у которой в ряде Фурье любая подпоследовательность частных сумм расходится хотя бы в одной точке (см. [23], стр. 327). Как было отмечено в доказательстве теоремы 1.2, при условии $\omega(\Gamma) < \infty$ аппроксиманты $G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)$, $N = 1, 2, ...$

функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ равномерно равносходятся с некоторой подпоследовательностью частных сумм ряда Фурье функции f. Из последнего следует, что функция из указанной работы Меньшова, удовлетворяет условиям пункта 2 теоремы. Теорема 1.4 полностью доказана. □

3. Пространство $L^1(\mathbb{T})$. Доказательство теоремы 1.5

Для функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ через

$$S_N(f,x) := \sum_{|k|\leq N} c_k(f)e^{ikx}, \ N = 1, 2, ...$$

обозначим N-тую частную сумму ряда Фурье. Доказательство теоремы 1.5 приводится методом Ш.В. Хеладзе (см. [9], [10]). Следующая лемма доказана в [9].

Лемма 3.1. *Пусть*

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n-j}\cos(n+j)x - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\cos(2n+j)x, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) $S_{2n-1}(Q_n, x) \geq \frac{1}{2}\ln n$ *для любого* $x \in [0, \pi/(6n)]$,
2) $|Q_n(x)| \leq 2(\pi + 1)$ *для любого* $x \in \mathbb{T}$.

Основной леммой настоящего параграфа является следующее утверждение.

Лемма 3.2. *При условии* $\omega(\Gamma) < \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ *и* $K > 1$ *существуют вещественный тригонометрический полином* P *и множество* $E \subset \mathbb{T}$ *такие, что*

1) $P(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{T}$,
2) $\int\limits_{\mathbb{T}} P(x)dx = 2\pi$,
3) $c_u(P) = 0, \ 0 < |u| < N$,
4) $G^*(P, \sigma, x) \geq K, \ x \in E$, *для любой перестановки* $\sigma \in D(P, \mathfrak{T}, \Gamma)$,
5) $\mu(E) \geq 2\pi - \varepsilon$.

Доказательство. Поскольку $\omega(\Gamma) < \infty$, то для $H := \omega(\Gamma) + 1$ имеем $\gamma_n > 2\gamma_m$, при любом $m, n \in \mathbb{N}$, если $m - n \geq H$. Следовательно, для любых натуральных чисел $a < b$,

$$\gamma_a > 2^l \gamma_b, \ \text{где } l = \left[\frac{b-a}{H}\right]. \tag{3.1}$$

Пусть Q_n - полином, определенный в лемме 3.1. Для $k = 0, 1, 2, ...$ положим

$$Q_{n,k} := \frac{1}{2(\pi+1)} Q_n \left(Hx - \frac{\pi k}{6n} \right),$$

и

$$\Delta_{n,k} := \left[\frac{\pi k}{6nH};\ \frac{\pi(k+1)}{6nH} \right].$$

Из полиномов $Q_{n,k}$ построим требуемый полином следующим образом:

$$P(x) := f_n(x) := \prod_{k=0}^{12nH-1} \left[1 + \cos(\lambda_k x) Q_{n,k}(x) \right], \tag{3.2}$$

где натуральные числа n и λ_k будут выбраны позже. Сразу заметим, что в силу второго пункта леммы 3.1, всякий полином вида (3.2) удовлетворяет условию 1) данной леммы. С другой стороны легко видеть, что если подобрать последовательность λ_k удовлетворяющую условиям

$$\lambda_0 > N + 220n^2H^2, \qquad \lambda_k > 3(\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_{k-1}), \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.3}$$

то частоты гармоник, получающиеся при раскрытии скобок в произведении (3.2), будут отличны от нуля, и условия 2) и 3) данной леммы будут справедливы для всякого полинома вида (3.2). В дальнейшем будем предполагать, что для λ_k выполняется (3.3).

Сначала рассмотрим одночлены в произведении (3.2), а именно полиномы $P_{n,k} := \cos(\lambda_k x) Q_{n,k}(x)$. Из определения $Q_{n,k}$ видно, что спектр полинома $P_{n,k}$ есть множество

$$\{\pm\lambda_k \pm (n+j)H,\ j = 0, 1, ..., n-1\} \cup \{\pm\lambda_k \pm (2n+j)H,\ j = 1, 2, ..., n\},$$

а для соответствующих коэффициентов имеем

$$|c_{\pm\lambda_k \pm (n+j)H}(P_{n,k})| = \frac{1}{8(\pi+1)} \cdot \frac{1}{n-j}, \qquad j = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.4}$$

и

$$|c_{\pm\lambda_k \pm (2n+j)H}(P_{n,k})| = \frac{1}{8(\pi+1)} \cdot \frac{1}{j}, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $\sigma \in D(P_{n,k}, \mathcal{T}, \Gamma)$. Из (3.4), (3.5), (3.1) и монотонности последовательности Γ следует, что если $u, v \in \mathrm{sp} P_{n,k}$ и $|u| > |v|$, то $\sigma(u) > \sigma(v)$. Из последнего, в силу условия 2) леммы 3.1, имеем, что

$$G^*(P_{n,k}, \sigma, x) \geq c(\ln n)^{1/2}, \qquad x \in E_{n,k} \cap \Delta_{n,k}, \tag{3.6}$$

где

$$E_{n,k} := \{x \in \mathbb{T} :\ |\cos(\lambda_k x)| \geq (\ln n)^{-1/2}\}.$$

Теперь если взять λ_k делящимся на $12nH$, то простыми вычислениями можно показать, что множества $E_{n,k}$ при любом $k = 0, 1, 2, ...$ удовлетворяют условию

$$\mu(E_{n,k} \cap \Delta_{n,k}) > \mu(\Delta_{n,k}) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}}\right). \tag{3.7}$$

Остается доказать, что подходящим подбором λ_k можно сделать мажоранту f_n близким по значению к мажорантам одночленов на множествах $E_{n,k} \cap \Delta_{n,k}$.

Заметим, что для любого $u \in \mathrm{sp}P_{n,k}$ имеем $||u| - \lambda_k| \leq 3nH$. После раскрытия скобок в (3.2) рассмотрим получившиеся отличные от одночленов полиномы общий вид которых таков:

$$P_{k_0,k_1,...,k_m} := \cos(\lambda_{k_0} x)\cos(\lambda_{k_1} x)\cdot...\cdot\cos(\lambda_{k_m} x) Q_{n,k_0}(x) Q_{n,k_1}(x)\cdot...\cdot Q_{n,k_m}(x), \tag{3.8}$$

где $0 \leq k_0 < k_1 < ... < k_m \leq 12nH - 1$. Ясно, что если $u \in \mathrm{sp}P_{k_0,k_1,...,k_m}$, то $u = \pm\lambda_{k_0} \pm \lambda_{k_1} \pm ... \pm \lambda_{k_m} + O(1)$, где $O(1)$ величина, по модулю не превышающая $36H^2n^2$, так как количество множителей $Q_{n,k}$ в произведении (3.8) не превышает $12nH$, а наибольший по модулю элемент спектра каждого полинома $Q_{n,k}$ есть $3nH$. Из условия (3.3) получим, что

$$\frac{1}{2}\lambda_{k_{m-1}} \leq ||u| - \lambda_{k_m}| \leq 2\lambda_{k_{m-1}}, \tag{3.9}$$

т.е. каждый элемент спектра полинома $P_{k_0,k_1,...,k_m}$ находится на расстоянии порядка $\lambda_{k_{m-1}}$ от λ_{k_m}, а наименьшее из таких расстояний не меньше $0.5\lambda_0$.

С другой стороны ясно, что наименьший модуль коэффициентов полиномов вида (3.8) не меньше $a_0 := [8n(\pi + 1)]^{-(12nH-1)}$. С помощью (3.1) фиксируем λ_0 настолько большим, что $a_0\gamma_j > \gamma_{j+0.5\lambda_0-3nH}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что из выбора последовательности λ_k и условия (3.9) следует, что $\sigma\ |_{\mathrm{sp}P_{n,k}} \in D(P_{n,k}, \mathcal{T}, \Gamma)$ и

$$G^*(f_n, \sigma, x) \geq \frac{1}{2} G^*(P_{n,k}, \sigma, x), \qquad k = 0, 1, ..., 12nH - 1. \tag{3.10}$$

Обозначим $E_n = \bigcup\limits_{k=0}^{12nH-1} (E_{n,k} \cap \Delta_{n,k})$. Из (3.7) имеем, что

$$\mu(E_n) \geq 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}}\right), \tag{3.11}$$

а из (3.10) и (3.6) получим:

$$G^*(f_n, \sigma, x) \geq c(\ln n)^{1/2}, \qquad x \in E_n. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что если выбрать n достаточно большим, то сконструированный полином вида (3.2) будет удовлетворять условиям леммы. Лемма 3.2 доказана. □

Доказательство теоремы 1.5. Из леммы 3.2 следует, что существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов P_n и измеримых множеств $E_n \subset \mathbb{T}$, $n = 1, 2, ...$ для которых

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||P_n||_1 < \infty$,
2) $G^*(P_n, \sigma, x) > n$, $x \in E_n$ для любой перестановки $\sigma \in D(P_n, \mathfrak{T}, \Gamma)$,
3) $\mu(E_n) \to 2\pi$,
4) $(\mathrm{sp}P_n \cap \mathrm{sp}P_m) \setminus \{0\} = \emptyset$, $m \neq n$
5) $\min\limits_{k\in \mathrm{sp}P_n} |c_k(P_n)\gamma_{2|k|+1}| > \max\limits_{k\in \mathrm{sp}P_{n+1}} |c_k(P_{n+1})\gamma_{2|k|}|$.

Положим $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Из 1) имеем, что $f \in L^1(\mathbb{T})$. Из 4) и 5) следует, что $\sigma |_{\mathrm{sp}P_n} \in D(P_n, \mathfrak{T}, \Gamma)$ для любой перестановки $\sigma \in D(f, \mathfrak{T}, \Gamma)$, и существует последовательнось a_n, для которой $G^*_{a_n}(f, \sigma, x) > \frac{1}{2} G^*(P_n, \sigma, x)$. Это, в силу 2) и 3), влечет расходимость почти всюду последовательности гриди аппроксимантов с весом Γ функции f. Теорема 1.5 доказана. □

Автор выражает благодарность профессору А. Саакяну, под руководством которого была выполнена данная работа, а так же С. Гогяну, указавшему более простой путь доказательства леммы 3.2.

Abstract. We study the convergence of greedy algorithm with regard to renormalized trigonometric system. Necessary and sufficient conditions are found for system's normalization to guarantee almost everywhere convergence, and convergence in $L^p(\mathbb{T})$ for $1 < p < \infty$ of the greedy algorithm, where $\mathbb{T}$ is the unit torus. Also the nonexistence is proved for normalization which guarantees convergence almost everywhere for functions from $L^1(\mathbb{T})$, or uniform convergence for continuous functions.

Список литературы

[1] R. Hunt, "On the convergence of Fourier series", Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., pp. 235 – 255 (1968).

[2] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx. **5**, 1 – 15 (1999).

[3] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory **107**, 293 – 314 (2000).

[4] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics **144**, 167 – 180 (1996).

[5] T.W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications **5**, 1 – 19 (1999).

[6] T. W. Körner, "Hard summation, Olevskii, Tao and Walsh", Bull. London Math. Soc. **38**, 705 – 729 (2006).

[7] V. N. Temlyakov, “Nonlinear methods of approximation”, Foundations of Computational Mathematics **3** (1), 33 – 107 (2003).
[8] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Convergence of greedy approximation I. The Trigonomeric System”, Studia Math. **159** (2), 161 – 184 (2003).
[9] Ш. В. Хеладзе, “О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L_\varphi(L)$”, Тр. Тбил. мат. ин-та. **89**, 51 – 59 (1988).
[10] С. В. Конягин, “О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье” , Теория Функций, Сборник Научных трудов, Тр. ИММ **11** (2), 112 – 119 (2005).
[11] S. Kostyukovsky, A. Olevskii, “Note on decreasing rearrangement of Fourier series”, J. of Applied Analysis **3** (1), 137 – 142 (1997).
[12] M. Nielsen, “An example of an almost greedy uniformly bounded orthonormal basis for $L_p(0,1)$”, J. Approx. Theory, **149** (2), 188 – 192 (2007).
[13] T. Tao, “On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods”, Applied and Computational Harmonic Analysis, 384 – 387 (1996).
[14] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Convergence of greedy approximation I. General Systems”, Studia Math. **159** (1), 143 – 160 (2003).
[15] Г. Амирханян, “О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в простpвранствах L_p”, Изв. НАН Армении, Математика **43** (3), 3 – 12 (2008).
[16] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, Тр. МИАН СССР, **38**, 244 – 278 (1951).
[17] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, “Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера”, Математический сборник, 199:5, 3 – 26 (2008).
[18] С. Гогян, “О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по подсистемам ситемы Хаара и о ω-квази-гриди базисах”, Мат. заметки, **88**, (1), 18-29, (2010).
[19] G. Kerkacharian, D. Picard, V. N. Temlyakov, “Some inequalities for the tensor product of greedy bases and weight-greedy bases”, East J. on Approx., **12** (1), 103-118 (2006).
[20] А. Алексанян, “О жадном алгоритме по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, Математика **45** (3), 11-24 (2010).
[21] H. Aleksanyan, “On Greedy Algorithm By Renormed Franklin System”, East J. on Approx. **16** (3), 193-216 (2010).
[22] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, “Ортогональные ряды”, Москва, Наука (1999).
[23] Н.К. Бари, "Тригонометрические ряды Москва (1961).

Поступила 26 января 2012

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 19-30.

МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА

Р. Г. АРАМЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
Институт Математики Национальной Академии Наук Армении [1]
E-mail: *rafikaramyan@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе найдены два представления (т.н. флаг-представления) для меры плоскостей пересекающих выпуклое тело, которые получаются путем стохастической аппроксимации выпуклого тела. Результаты получаются в терминах нормальных кривизн поверхности тела. Случайные многогранники аппроксимирующие выпуклое тело зависят от некоторого распределения P на поверхности тела. Здесь, также, доказывается что получаемые флаг-представления не зависят от плотности распределения P.

MSC2010 number: 53C65, 62L20.

Ключевые слова: Интегральная геометрия; выпуклые тела; стохастическая аппроксимация; флаговая плотность.

1. Введение

Через $\mathbf{E}$ обозначим пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Мы рассматриваем локально-конечные, знакопеременные меры μ в пространстве $\mathbf{E}$, обладающие плотностями относительно инвариантной относительно евклидовых движений меры, т.е.

$$\mu(de) = h(e)\, de. \tag{1.1}$$

Здесь de - элемент инвариантной меры, который можно представить в виде

$$de = dp \cdot d\xi,$$

где (p, ξ) обычная параметризация плоскости e: p - расстояние e от начала координат O; $\xi \in \mathrm{S}^2$ - направление нормали к e, $d\xi$ - элемент меры Лебега на единичной сфере S^2. Также мы будем использовать запись $h(e) = h(p, \xi)$.

Ниже будем рассматривать понятие флага в $\mathbb{R}^3$ естественным образом возникшее в комбинаторной интегральной геометрии (см. [2]). Приведем определение флага:

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1a359

Определение 1.1. *Флагом в $\mathbb{R}^3$ называется тройка $f = (P, g, e)$, где P – точка в $\mathbb{R}^3$, g – прямая, проходящая через эту точку, а e – плоскость, содержащая прямую g.*

Имеются два эквивалентных представления флага (см. [2]):

$$f = (P, \Omega, \Phi) \text{ и } f = (P, \omega, \varphi),$$

где Ω - пространственное направление прямой g в $\mathbb{R}^3$, Φ - угол поворота плоскости e вокруг прямой g, ω - направление нормали к e, φ - направление прямой g, лежащей в плоскости e. Области изменения Ω и ω двумерное эллиптическое пространство $\mathcal{E}_2$, которое получается из единичной сферы путем идентификации противоположных точек, а Φ и φ являются элементами $\mathcal{E}_1$.
Используя меру μ, определим в пространстве флагов следующую (флаговую) функцию (см.[10], [5])

$$\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi) = \frac{1}{2}\int_{S^2} \cos^2(\varphi - \psi)\, h_{[P]}(\xi)\, d\xi. \tag{1.2}$$

Здесь $[P]$ - пучок плоскостей, содержащих точку $P \in \mathbb{R}^3$, $h_{[P]}(\xi)$ сужение h на $[P]$, ψ - направление проекции ξ на плоскость флага f. Обозначение $h_{[P]}(\xi)$ корректно, поскольку нормальное направление ξ однозначно определяет плоскость из $[P]$. Заметим, что интеграл (1.2) не зависит от выбора точки отсчета на плоскости флага f.

Определение 1.2. *Функцию ρ, заданную в пространстве флагов $\mathcal{F}$ с помощью* (1.2)*, будем называть флаговой плотностью меры μ.*

Понятие флаговой плотности было определено и систематически развито Р. В. Амбарцумяном в работах [2], [1].
Заметим, что в [5] (см. также [6], [4], [12]) (1.2) было рассмотрено как интегральное уравнение и с помощью методов интегральной геометрии восстановлена h по заданной ρ.
Пусть $\mathbf{B}$ выпуклое тело с границей $\partial\mathbf{B}$, обладающее непрерывной и положительной гауссовой кривизной в каждой точке $\partial\mathbf{B}$. Через $[\mathbf{B}]$ обозначим множество плоскостей из $\mathbf{E}$, пересекающихся с $\mathbf{B}$. Пусть $s(\omega)$ точка на $\partial\mathbf{B}$ с внешней нормалью ω. Через $k_1(\omega), k_2(\omega)$ обозначим главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке

$s(\omega) \in \partial\mathbf{B}$, а через $k(\omega, \varphi)$ - нормальную кривизну $\partial\mathbf{B}$ в точке $s(\omega)$ в направлении φ, здесь φ измеряем от первого главного направления.

Основной результат статьи сформулирован в следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве $\mathbf{E}$ с непрерывной плотностью h относительно инвариантной меры de, а $\mathbf{B}$ - достаточно гладкое выпуклое тело. Имеет место следующее представление:*

$$\mu([\mathbf{B}]) = (2\pi^2)^{-1} \int_{\mathrm{S}^2} \int_0^{2\pi} \rho(s(\omega), \omega, \varphi) \frac{\sqrt{k_1(\omega)k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)} d\varphi \, d\omega, \tag{1.3}$$

где ρ – флаговая плотность меры μ, определяемая формулой (1.2).

Заметим что, формула (1.3) с помощью стохастической аппроксимации с равномерным распределением, впервые найдена в [7].

Обозначим через $\mathbf{B}(\omega, \xi)$ проекцию выпуклого тела $\mathbf{B}$ на плоскость, проходящую через начало координат и натянутую на векторы $\omega \in \mathbf{S}^2$ и $\xi \in \mathbf{S}^2$. Пусть $R(\omega, \xi)$ есть радиус кривизны границы $\partial\mathbf{B}(\omega, \xi)$ в точке с нормалью ω.

Следствие 1.1.

$$\mu([\mathbf{B}]) = (4\pi)^{-1} \int_{\mathrm{S}^2} \int_{\mathbf{S}^2} R(\omega, \xi) \, h_{[P]}(\xi) \, d\xi \, d\omega, \tag{1.4}$$

где $R(\omega, \xi)$ - радиус проекционной кривизны $\partial\mathbf{B}$, P - точка на $\partial\mathbf{B}$ с внешней нормалью ω.

Теперь пусть $k_1(s), k_2(s)$ - главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке $s \in \partial\mathbf{B}$, а $f_i = (s, g_i, t)$, $i = 1, 2$ - флаг, где t касательная плоскость к $\partial\mathbf{B}$ в точке s, g_i есть i-тое главное направление в $s \in \partial\mathbf{B}$.

Теорема 1.2. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве $\mathbf{E}$ с плотностью h относительно инвариантной меры de, а $\mathbf{B}$ достаточно гладкое выпуклое тело. Тогда имеет место следующее представление:*

$$\mu([\mathbf{B}]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial\mathbf{B}} [k_1(s)\rho(f_2) + k_2(s)\rho(f_1)] \, ds, \tag{1.5}$$

где ρ флаговая плотность меры μ задаваемая формулой (1.2).

Заметим, что в случае когда μ трансляционно-инвариантная мера в $\mathbf{E}$ ($d\mu = dp \times m(d\xi)$) представление (1.5), где

$$\rho(f) = \rho(\omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{S}^2} \cos^2(\varphi - \psi)\, m(d\xi). \tag{1.6}$$

впервые найдено в [9].

2. Предварительные сведения

В [1] было установлено существование т. н. *флаг-представления* для функции ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ используя некоторое стандартное флаг-представление для функции ширины выпуклых многогранников.

Пусть $\mathbf{B}$ выпуклое тело и $H(\xi)$ его функция ширины в направлении ξ. Тогда существует мера m в $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2$ такая, что для каждого $\xi \in \mathrm{S}^2$ (см. [1])

$$H(\xi) = \int_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \Phi)\, m(d\Omega, d\Phi), \tag{2.1}$$

где α - угол между направлением $\Omega \in \mathrm{S}^2$ и следом плоскости e_ξ на плоскость флага $f = (\Omega, \Phi)$, которую обозначим через $e(\Omega, \Phi)$. Отметим, что представление (2.1) не единственно (существует много мер m для данного H).

Заметим, что в случае когда μ трансляционно-инвариантная мера на $\mathbf{E}$ с элементом $d\mu = dp \times \delta_\xi$, где δ_ξ - дельта мера сконцентрированная на направлении ξ, имеем $H(\xi) = \mu([\mathbf{B}])$.

Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый многогранник и $e \in [\mathbf{K}] \subset \mathbf{E}$. Вершинами выпуклого многоугольника $e \cap \mathbf{K}$ служат точки пересечения e с ребрами $\mathbf{K}$. Ребра $\mathbf{K}$ обозначим через L_i. Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника $e \cap \mathbf{K}$ равна 2π, имеем:

$$\sum_i \alpha_i(e)\, I_{[L_i]}(e) = 2\pi I_{[\mathbf{K}]}. \tag{2.2}$$

Здесь $\alpha_i(e)$ - внешний угол соответствующий вершине $e \cap L_i$ многоугольника $e \cap \mathbf{K}$, сумма берется по всем ребрам $\mathbf{K}$.

В [1], интегрированием (2.2) относительно трансляционно - инвариантной меры $d\mu = dp \times m(d\xi)$, найдено некоторое стандартное флаг-представление для функции ширины выпуклого многогранника $\mathbf{K}$. В [7], используя аппроксимацию выпуклого тела многогранниками, было найдено новое представление для функции ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$. В [3], используя стохастическую аппроксимацию гладкого выпуклого тела многогранниками (аппроксимация Вороного), было найдено представление (1.3) для трансляционно-инвариантных мер.

Здесь мы интегрируем выражение (2.2) относительно меры $\mu(de) = h(e)de$, где h - непрерывная функция определенная на $\mathbf{E}$. Имеем

$$\begin{aligned}(2.3)\quad 2\pi\mu([\mathbf{K}]) &= \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e)\, h(e)\, de = \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e)\, h(p,\xi)\, dp\, d\xi \\ &= \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e) h(x,\xi) \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid dx d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{L_i} \int_{\mathrm{S}^2} \alpha_i(e) h(x,\xi) \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid d\xi dx.\end{aligned}$$

Здесь $\widehat{\xi,\Omega_i}$ угол между ξ и Ω_i, где Ω_i - направление ребра L_i. Здесь, также мы использовали хорошо известный факт из интегральной геометрии

$$de = dp\, d\xi = \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid \; dx\, d\xi,$$

где x - точка пересечения $e \cap L_i$ а dx мера Лебега на L_i.

Из теоремы синусов сферической геометрии (см. [1]) следует что

$$(2.4)\qquad \alpha_i(e) \; \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid = \int_{A_i} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_i, \Phi)\, d\Phi,$$

где A_i - внешний двугранный угол ребра L_i. Подставляя (2.4) в (2.3) получим

$$(2.5)\qquad 4\pi\mu([\mathbf{K}]) = \sum_i \int_{L_i} \int_{A_i} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_i, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, d\Phi\, dx.$$

3. Стохастическая аппроксимация

Пусть $\mathbf{B}$ - достаточно гладкое выпуклое тело (с 3 раза непрерывно дифференцируемой поверхностью) в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что во всех точках $\partial\mathbf{B}$ гауссова кривизна положительна. Тогда сферическое (гауссовское) отображение поверхности $\partial\mathbf{B}$ на единичную сферу S^2 является гомеоморфизмом.

Мы рассмотрим следующую стохастическую аппроксимацию выпуклого тела $\mathbf{B}$. Независимо друг от друга бросим n точек $P_1, \ldots, P_n$ на S^2 с одним и тем же распределением P. Пусть это распределение имеет непрерывную плотность $d\mathrm{P} = f(\omega)d\omega$ с $f(\omega) > 0$, $d\omega$ элемент меры Лебега на S^2. Точкам $P_1, \ldots, P_n$ по отображению обратному к сферическому соответствуют точки $P_1^*, \ldots, P_n^*$ на $\partial\mathbf{B}$.

Через $\mathbf{K_n}(P_1^*, \ldots, P_n^*)$ обозначим выпуклую оболочку точек $P_1^*, \ldots, P_n^*$. Согласно (2.5), $\mu([\mathbf{K_n}(P_1^*, \ldots, P_n^*)])$ представима в виде

$$(3.1) \quad 4\pi\mu([\mathbf{K_n}]) = \sum_{i<j \ i,j=1}^{n} I_D(i,j) \int_{L_{ij}} \int_{A_{ij}} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{ij}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, d\Phi\, dx.$$

Здесь Ω_{ij} - направление $\overrightarrow{P_i^* P_j^*}$, L_{ij} - ребро $P_i^* P_j^*$, A_{ij} внешний двугранный угол ребра $P_i^* P_j^*$, D - множество всех пар (i,j) которым соответствуют ребра. Усредним (3.1) по последовательности $(P_1, \ldots, P_n)$. Так как $f(\omega) > 0$, в пределе $(n \to \infty)$ в левой части получим $\mu([\mathbf{B}])$. Из соображений симметрии получим

$$(3.2) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)^2} \left[\int_{(\mathrm{S}^2)^{n-2}} I_D(1,2) \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{L_{12}} \int_{A_{12}} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{12}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, d\Phi\, dx \right] dP_3 \cdots dP_n \right] dP_1\, dP_2.$$

Принимая точку P_1 за полюс, точку P_2 можно описать как сферическими координатами (ν, φ) относительно P_1, так и координатами (l, φ), где $l = |P_1 P_2|$. Имеем

$$dP_2 = f(\omega)\, d\omega = f(\nu, \varphi)\, \sin\nu\, d\nu\, d\varphi = f(l, \varphi)\, l\, dl\, d\varphi.$$

Пусть $e(\Omega_{l\varphi}, \Phi)$ - плоскость, проходящая через P_1^*, P_2^* и повернутая вокруг $\Omega_{l\varphi} = \overrightarrow{P_1^* P_2^*}$ на угол Φ. За $e(\Omega_{l\varphi}, 0)$ примем плоскость проходящую через P_1^*, которая перпендикулярна плоскости проходящей через ω and $\Omega_{l\varphi}$. Через L^* обозначим сегмент $P_1^* P_2^*$ и пусть $l^* = |P_1^* P_2^*|$.

Сперва мы рассмотрим случай, когда P_i имеют равномерное распределение, т.е. $f(\omega) = (S_o C(\omega))^{-1}$, где S_o - площадь $\partial\mathbf{B}$, $C(\omega)$ - гауссова кривизна в точке на $\partial\mathbf{B}$ с нормалью ω. Плоскость $e(\Omega_{l\varphi}, \Phi)$ разбивает $\partial\mathbf{B}$ на две части. Пусть $S(\Phi, l)$ площадь малой (по площади) части $\partial\mathbf{B}_1(\Phi, l)$. Применяя теорему Фубини к внутренним интегралам (3.2), получим

$$(3.3) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\left(1 - \frac{S(\Phi,l)}{S_o}\right)^{n-2} + \left(\frac{S(\Phi,l)}{S_o}\right)^{n-2}] \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, dx \right] d\Phi \right] \frac{l\, dl\, d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega) C(l,\varphi)}.$$

В больших скобках (3.3) записана вероятность того, что $P_1^* P_2^*$ будет ребром и $e(\Omega_{l\varphi}, \Phi)$ принадлежит внешнему двухгранному углу этого ребра
Поскольку $\frac{S(\Phi,l)}{S_o} \leq \frac{1}{2}$, то

$$(3.4) \quad \lim_{n\to\infty} | \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{S(\Phi,l)}{S_o} \right)^{n-2} \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi) \right.\right.$$
$$\times h(x,\xi) d\xi\, dx] \, d\Phi] \, \frac{l\, dl\, d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega) C(l,\varphi)} \, | \leq \lim_{n\to\infty} A \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} = 0,$$

где A - константа. Аналогичным образом можно доказать что область изменения Φ и l можно взять сколь угодно малой. Таким образом

$$(3.5) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_0} \int_{-\Phi_0}^{\Phi_0} \left(1 - \frac{S(\Phi,l)}{S_o} \right)^{n-2} \times$$
$$\times \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi) \, h(x,\xi) d\xi\, dx \right] l\, d\Phi\, dl \frac{d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega) C(l,\varphi)},$$

где l_0 и Φ_0 сколь угодно малые фиксированные числа. Из условий гладкости поверхности $\partial\mathbf{B}$ имеем разложение Тейлора

$$(3.6) \quad S(\Phi,l) = l\, S_l'(0,0) + \Phi S_\Phi'(0,0) + \frac{l^2}{2} S_{ll}''(0,0) + l\Phi S_{l\Phi}''(0,0) + \frac{\Phi^2}{2} S_{\Phi\Phi}''(0,0) + r,$$

где $r(\Phi,l) = o(l^2 + \Phi^2)$. Здесь все функции непрерывно зависят как от l и Φ, так и от ω и φ. Ниже мы увидим, что $S_l'(0,0) = S_\Phi'(0,0) = 0$.
Используя теорему о среднем значении, получаем

$$(3.7) \quad \int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi) \, h(x,\xi) d\xi\, dx = l^* \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi) \, h(x_0,\xi) d\xi,$$

где x_0 - точка из L^* и $l^* = |L^*|$.
Подставляя (3.7) в (3.5) и проводя замену переменных $u = l\sqrt{n}$, $v = \Phi\sqrt{n}$ получим

$$(3.8) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{l_0\sqrt{n}} \int_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}} \left(1 - \frac{S(\frac{v}{\sqrt{n}}, \frac{u}{\sqrt{n}})}{S_o} \right)^{n-2} \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi}, \frac{v}{\sqrt{n}}) \, h(x_0,\xi) d\xi \right] \frac{u(u \cdot b(\omega,\varphi)) du\, dv}{n^2 C(\frac{v}{\sqrt{n}}, \varphi)} \right] \frac{d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega)},$$

где $l^* = l \cdot b(\omega,\varphi) + o(l)$.

Можно поменять предел и интегралы местами. Подставляя (3.6) в (3.8) и учитывая

$$\int_{S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi}, \frac{v}{\sqrt{n}})\, h(x_0, \xi) d\xi \to \int_{S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_1)\, h_{[P^*(\omega)]}(\xi) d\xi \tag{3.9}$$

почти всегда когда $n \to \infty$, где $\alpha(\xi, \omega, \varphi_1)$ - угол между направлением φ_1 на плоскости e_ω и пересечением $e_\xi \cap e_\omega$, $[P^*(\omega)]$ - пучок плоскостей содержащих точку $P^*(\omega) \in \partial\mathbf{B}$ с нормалью ω, получим

$$\begin{aligned} 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \int_{(S^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2} S''_{ll}(0,0) - uv S''_{l\Phi}(0,0) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{v^2}{2} S''_{\Phi\Phi}(0,0) \right) u^2 du\, dv \right] \left[\int_{S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi_1)\, h_{[P^*(\omega)]}(\xi) d\xi \right] \frac{b(\omega,\varphi)}{2C(\omega)} d\varphi\, d\omega, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $b(\omega, \varphi) = \lim_{l \to 0} \frac{l^*}{l}$.

Заметим что, случай равномерного распределения, т.е. $f(\omega) = (S_o C(\omega))^{-1}$, был рассмотрен в [7]

4. Стохастическая аппроксимация с распределением P

Теорема 4.1. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве* $\mathbf{E}$. *Предельная мера $\mu([B])$, получаемая с помощью стохастической аппроксимации гладкого выпуклого тела B, не зависит от плотности распределения $dP = f(s)ds$, т.е. от f.*

Доказательство. Во внутреннем интеграле (3.2), применяя теорему Фубини, получим

$$\begin{aligned} 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{(S^2)^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 - \mathrm{P}(\Phi, l))^{n-2} + (\mathrm{P}(\Phi, l))^{n-2} \right] \right. \\ \left. \times \left[\int_{L^*} \int_{S^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x, \xi) d\xi\, dx \right] d\Phi \right] dP_1\, dP_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathrm{P}(\Phi, l)$ есть вероятность того, что P^* попадет в $\partial\mathbf{B}_1(\Phi, l)$ (здесь $\partial\mathbf{B}_1$ это часть куда точка попадает с вероятностью меньшей чем 1/2). Как и в случае равномерного распределения, можно доказать, что

$$(4.2)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_0} \int_{-\Phi_0}^{\Phi_0} (1-\mathrm{P}(\Phi,l))^{n-2} \times \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, dx \right] dP_1\, dP_2,$$

где l_0 и Φ_0 сколь угодно малые положительные числа.

Используя теорему о среднем значении получаем

$$(4.3)\qquad \mathrm{P}(\Phi,l) = S(\Phi,l) f_1(\omega_{\Phi,l}),$$

где $f_1(\omega) = f(\omega)C(\omega)$ ($C(\omega)$ - гауссова кривизна) а $\omega_{\Phi,l}$ - точка на сферическом образе $\partial\mathbf{B}_1(\Phi,l)$. Так как $f(\omega) = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}$, имеем $dP_1 = f(\omega)d\omega = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}d\omega$ и $dP_2 = f(\omega)d\omega = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}d\omega = \frac{f_1(l,\varphi)}{C(l,\varphi)} l\, dl\, d\varphi$.

Подставляя (4.3) в (4.2), учитывая (3.7) и проводя замену переменных $u = l\sqrt{n}$, $v = \Phi\sqrt{n}$, получаем

$$(4.4)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{l_0\sqrt{n}} \int_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}} \left(1 - f_1(\omega_{\frac{v}{\sqrt{n}}\frac{u}{\sqrt{n}}}) S(\frac{v}{\sqrt{n}}, \frac{u}{\sqrt{n}})\right)^{n-2} \left[\int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi}, \frac{v}{\sqrt{n}})\, h(x_0,\xi) d\xi \right] \times \frac{u(u\cdot b(\omega,\varphi)) f_1(\frac{u}{\sqrt{n}},\varphi)\, du\, dv}{n^2 C(\frac{u}{\sqrt{n}},\varphi)} \right] \frac{f_1(\omega) d\varphi\, d\omega}{C(\omega)},$$

где $l^* = l\cdot b(\omega,\varphi) + o(l)$.

Поменяв предел и интегралы местами в (4.4) и учитывая, что при $n\to\infty$

$$f_1(\omega_{\frac{v}{\sqrt{n}}\frac{u}{\sqrt{n}}}) \to f_1(\omega)$$

получаем

$$(4.5)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{f_1(\omega)u^2}{2} S''_{ll}(0,0) - f_1(\omega) uv S''_{l\Phi}(0,0) - \frac{f_1(\omega)v^2}{2} S''_{\Phi\Phi}(0,0) \right) \times u^2 du\, dv \right] \left[\int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi_1)\, h_{[P^*(\omega)]}(\xi) d\xi \right] \frac{f_1^2(\omega) b(\omega,\varphi)}{2C(\omega)} d\varphi\, d\omega,$$

где $b(\omega,\varphi) = \lim_{l\to 0} \frac{l^*}{l}$. Проводя замену переменных $\sqrt{f_1(\omega)}u = u_1$ и $\sqrt{f_1(\omega)}v = v_1$ в (4.5) получим (3.10). $\square$

5. Флаговые представления для выпуклых тел

Из (3.10) видно, что предельное представление для $\mu([\mathbf{B}])$ зависит от значений $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ которые являются функциями от ω и φ. Следовательно, нужно выразить $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ в терминах нормальных кривизн $\partial\mathbf{B}$ в точке $P^*(\omega)$ (точка с нормалью ω на $\partial\mathbf{B}$).

В [3] доказано, что: $S'_l(0,0)$, $S'_\Phi(0,0)$, $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ *зависят только от значений производных не выше второго порядка поверхности $\partial\mathbf{B}$ в точке P^* с внешней нормалью ω.*

Так как $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ зависят только от значений производных не выше второго порядка то достаточно их вычислить для соприкасающегося параболоида U поверхности $\partial\mathbf{B}$ в точке P^* с внешней нормалью ω.

В [3] найдены следующие выражения для этих производных в терминах нормальных кривизн $\partial\mathbf{B}$ в точке $P^*(\omega)$:

$$S'_l(0,0)=0,\ S'_\Phi(0,0)=0,\ S''_{ll}(0,0)=\frac{\pi\sqrt{k_1k_2}\,r^2(\varphi)(k_2^3\cos^2\varphi+k_1^3\sin^2\varphi)}{2A^4},$$
$$S''_{l\Phi}(0,0)=\frac{\pi\sqrt{k_1k_2}\sin 2\varphi(k_2-k_1)}{2A^3},\quad S''_{\Phi\Phi}(0,0)=\frac{2\pi\sqrt{k_1k_2}\,r(\varphi)}{A^2}, \tag{5.1}$$

где k_i, $i=1,2$ – главные нормальные кривизны,
$r(\varphi)=k_1^{-1}\cos^2\varphi+k_2^{-1}\sin^2\varphi$ радиус проекционной кривизны $\partial\mathbf{B}$ в направлении φ в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$. и $A=\sqrt{k_2^2\cos^2\varphi+k_1^2\sin^2\varphi}$. Также в [3] получено

$$b(\omega,\varphi)=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}}\quad\text{and}\quad \tan\varphi_1=\tan\varphi\,\frac{k_1}{k_2}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в (3.10) и вычисляя интеграл получаем

$$4\pi^2\mu([\mathbf{B}])=\int_{(\mathrm{S}^2)}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)\,h_{[P^*(\omega)]}(\xi)d\xi\right]\frac{\sqrt{k_1k_2}}{k^2(\omega,\varphi)}d\varphi\,d\omega, \tag{5.3}$$

где $k(\omega,\varphi)$ - нормальная кривизна в направлении φ в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$. Учитывая, что

$$\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)=\cos^2(\varphi-\psi),$$

где ψ – направление проекции ξ на плоскость с нормалью ω, we come to (1.6). Теорема 1.1 доказана.

Поменяв порядок интегрирования в (5.3), и интегрируя по $d\varphi$ получаем (см также [3])

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi)\, \frac{\sqrt{k_1(\omega)k_2(\omega)}}{k^2(\omega,\varphi)}\, d\varphi = \pi \left(\frac{\cos^2\psi}{k_1(\omega)} + \frac{\sin^2\psi}{k_2(\omega)} \right), \tag{5.4}$$

где φ измеряем от первого главного направления в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$, ψ - это направление проекции ξ на плоскость с нормалью ω (плоскость флага). Заметим, что в больших скобках в (5.4) написан $R(\omega,\xi) = R(\omega,\psi)$ радиус кривизны проекции $\partial\mathbf{B}$ ([8])

$$R(\omega,\xi) = R(\omega,\psi) = \frac{\cos^2\psi}{k_1(\omega)} + \frac{\sin^2\psi}{k_2(\omega)}. \tag{5.5}$$

Из (5.3),(5.4) и (5.5) получим следствие 1.1.

Теперь пусть $k_1(s), k_2(s)$ – главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке $s \in \partial\mathbf{B}$, а $f_i = (s, g_i, t)$, $i = 1, 2$ - флаг, где t касательная плоскость к $\partial\mathbf{B}$ в точке s, g_i есть i-тое главное направление в $s \in \partial\mathbf{B}$.

Подставляя (5.4) в (5.3) и учитывая, что $ds = (k_1(\omega)k_2(\omega))^{-1}\, d\omega$ мы получаем (1.5). Теорема 1.2 доказана.

Следствие 5.1. *В случае* $h(e) \equiv 1$ *(случай инвариантной меры* μ_{inv}*) из* (1.5) *получаем формулу Минковского (см.* [11]*)*

$$\mu_{inv}([\mathbf{B}]) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{k_1(\omega)} + \frac{1}{k_2(\omega)} \right) d\omega.$$

Abstract. The present paper gives two representations (so-called flag representations) for the measure of planes intersecting a convex body. These representations are obtained by means of a stochastic approximation of a convex body depending on a distribution P that are defined on the surface of the body. Also it is proved that the flag representations do not depend on the density of P.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, “Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids”, Acta Appl. Math., **9**, 3 – 27 (1987).

[2] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press (1990).

[3] Р. Г. Арамян, “О стохастической аппроксимации выпуклых тел”, Изв. АН Арм.ССР, Математика, **22**, no. 5, 385 – 438 (1987).

[4] Р. Г. Арамян, "Восстановление розы направлений по флаговым плотностям в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, Математика, **27**, no. 5, 22 – 35 (1992).
[5] Р. Г. Арамян, "Порождение меры в пространстве плоскостей и сферический функционал Эйлера", Изв. АН Армении, Математика, **29**, no. 4, 64 – 90 (1994).
[6] Р. Г. Арамян, "Решение одного интегрального уравнения на сфере методами интегральной геометрии", Доклады Российской Академии Наук, **426**, no. 2, 1 – 5 (2009).
[7] R. Aramyan, "Measure of planes intersecting a convex body", Sutra: Inter. J. of Math. Science, **3**, no. 1, 1 – 7 (2010).
[8] В. Бляшке, Круг и Шар, Москва, Наука (1967).
[9] Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно инвариантные меры", Записки научных сем. ЛОМИ, **157**, 143 – 152 (1986).
[10] Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Изв. НАН Армении. Математика, **29**, no. 4, 3 – 51 (1994).
[11] Л. А. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, Москва, Наука (1983).
[12] R. H. Aramyan, "Reconstruction of measures in the space of planes", Lobachevskii Journal of Mathematics, **32** (4), 241 – 246 (2011).

Поступила 30 марта 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 31-44.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

А. Г. КАМАЛЯН, А. Г. СТЕПАНЯН, Г. М. ТОПИКЯН

Ереванский Государственный Университет
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *kamalyan_ armen@yahoo.com*, *anush.stepanyan.h@gmail.com*
E-mail: *gevorg.topikyan@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматривается интегральное уравнение с ядром Гильберта и с коэффициентами из L_∞. Известно, что задача разрешимости этого уравнения сводится к факторизации некоторой матрицы-функции. Построена явная факторизация этой матрицы-функции. Дано описание ядра и коядра соответствующего интегрального оператора.

MSC2010 number: 45E99, 45F15.

Ключевые слова: Интегральное уравнение; ядро Гильберта; факторизация.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию интегрального уравнения $Ay = g$ в пространстве $L_p[0, 2\pi]$ $(1 < p < \infty)$, где

$$(Ay)(x) = a(x)\, y(x) + \frac{b(x)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ctg \frac{s-x}{2} y(s)\, ds, (a, b \in L_\infty[0, 2\pi]). \tag{1.1}$$

Интеграл в правой части (1.1) понимается в смысле главного значения.

Впервые интегральное уравнение с ядром Гильберта $ctg\frac{s-x}{2}$ рассматривалось в работе [1]. Теория этого уравнения в гельдеровых пространствах построена в работах [2], [3]. В работе [6] (см. стр. 141-145) доказывается, что оператор A подобен действующему в пространстве $L_p(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$- единичная окружность комплексной плоскости) оператору $A_0 - K$, где A_0 является характеристическим сингулярным интегральным оператором

$$(A_0 y)(t) = a_0(t)\, y(t) + \frac{b_0(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{y(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

а K- одномерным оператором определяемым по формуле

$$(Ky)(t) = \frac{b_0(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau.$$

А именно, имеет место равенство

$$M^{-1}AM = A_0 - K, \tag{1.2}$$

где оператор $M : L_p(\mathbb{T}) \to L_p[0, 2\pi]$ и функции a_0, b_0 определяются равенствами

$$(M\varphi)(x) = \varphi\left(e^{ix}\right), \quad a_0 = M^{-1}a, \quad b_0 = M^{-1}b.$$

Из последнего факта в силу известных результатов теории сингулярных интегральных операторов (см. [6], гл. 8, теорема 4) следует , что оператор A фредгольмов тогда и только тогда когда

$$\underset{0\leq x\leq 2\pi}{ess\inf}\left|a^2(x) - b^2(x)\right| > 0, \tag{1.3}$$

и функция $c(t) = \frac{a_0(t)+b_0(t)}{a_0(t)-b_0(t)}$ допускает обобщенную факторизацию в пространстве L_p

$$c(t) = c_-(t)\, t^{\varkappa} c_+^{-1}(t)\,. \tag{1.4}$$

В работе [7] (см. §6) исследование фредгольмового оператора A сводится к построению обобщенной факторизации (определение см. в п. 2) матрицы-функции G_0 определенной равенством

$$G_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ \frac{c(t)-1}{2}t & \frac{c(t)+1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

В [7] факторизация этой матрицы-функции построена в случаях $\varkappa = indc = 0$ и $\varkappa = indc = -1$. В данной работе мы строим явную факторизацию матрицы-функции G_0 при произвольном $\varkappa$. Предложенный здесь метод факторизации основан на свойствах ядер теплицевых операторов с символом $t^{-j}G_0(t)$ (см. [9, 10]). Факторизация G_0 на основе результатов работы [7] позволяет дать явное описание ядра и коядра оператора A при всех $\varkappa$.

2. Общая схема факторизации

Пусть Г-карлесонов контур ограничивающий многосвязную область комплексной плоскости содержащую нулевую точку. Сингулярный интегральный оператор S_Γ определяемый по формуле

$$(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\tau - t}\varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in \Gamma$$

является ограниченным оператором в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ (см. [8]). Определим проекторы $P_\Gamma^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma)$ и классы функций $L_p^+(\Gamma) = ImP_\Gamma^+$, $L_p^-(\Gamma) = ImP_\Gamma^- \dot{+} \mathbb{C}$. Ниже через τ_k $(k \in \mathbb{Z})$ обозначается функция определенная равенством $\tau_k(t) = t^k$, через Ξ_φ оператор умножения на функцию (матрицу-функцию) φ, а через X^n $(X^{n\times n})$ множество n-мерных вектор-столбцов (матриц порядка $n \times n$) с координатами (компонентами) из линеала X.

Под факторизацией (см. [11, 12]) матрицы-функции $G \in (L_\infty(\Gamma))^{2\times 2}$ в пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ мы понимаем представление

$$G = G_-\Lambda G_+^{-1},$$

где $G_\pm \in \left(L_p^{\pm}(\Gamma)\right)^{2\times 2}$, $G_\pm^{-1} \in \left(L_q^{\pm}(\Gamma)\right)^{2\times 2}$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, $\Lambda = diag(\tau_{\varkappa_1}, \tau_{\varkappa_2})$, $\varkappa_1 \leq \varkappa_2$, $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{Z}$. Целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2$ называются частными индексами матрицы-функции G. Факторизация называется обобщенной если оператор $\Xi_{G_-} S_\Gamma \Xi_{G_-^{-1}}$ ограничен в $(L_p(\Gamma))^n$.

Рассмотрим матрицу-функцию

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \frac{\tau_N p_-}{q_1} G_{11} + \frac{p_+}{q_2} G_{22} - \frac{\tau_N p_- p_+}{q_1 q_2} G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $G_{11}, G_{12}, G_{22} \in L_\infty(\Gamma)$, $p_\pm \in L_\infty^{\pm}(\Gamma)$, многочлены q_1, q_2 и натуральное число N такие, что нули q_1 находятся в Γ_-, нули q_2 находятся в Γ_+, $q_2(0) \neq 0$, а $\deg q_1 \leq N$.

Определим функции

$$V_1 = (q_2 G_{11} - p_+ G_{12}) \frac{\tau_N}{q_1 q_2}, \quad V_2 = (\tau_{-N} q_1 G_{22} - p_- G_{12}) \frac{\tau_N}{q_1 q_2}. \tag{2.2}$$

Далее, будем предполагать, что функции $V_i, i = 1, 2$, допускают факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma)$: $V_i = V_i^- \tau_{\chi_i} \left(V_i^+\right)^{-1}$, $i = 1, 2$. Эти условия достаточны для существования факторизации G. Определим также функции

$$V_i^- = \exp P_\Gamma^- \left(\ln\left(\tau_{-\chi_i} V_i\right)\right), \left(V_i^+\right)^{-1} = \exp P_\Gamma^+ \left(\ln\left(\tau_{-\chi_i} V_i\right)\right), i = 1, 2,$$

$$V_{12}^- = V_1^- P_\Gamma^- \left(\frac{\tau_{N-\chi_1} G_{12}}{V_1^- \left(V_2^+\right)^{-1} q_1 q_2}\right), V_{12}^+ = \left(V_2^+\right)^{-1} P_\Gamma^+ \left(\frac{\tau_{N-\chi_1} G_{12}}{V_1^- \left(V_2^+\right)^{-1} q_1 q_2}\right),$$

и матрицы-функции

$$V_- = \begin{pmatrix} V_1^- & V_{12}^- \\ 0 & V_2^- \end{pmatrix}, V_+^{-1} = \begin{pmatrix} \left(V_1^+\right)^{-1} & V_{12}^+ \\ 0 & \left(V_2^+\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

$A=\begin{pmatrix} \frac{q_1}{\tau_N} & 0 \\ p_- & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_{\chi_1-\chi_0} & 0 \\ 0 & \tau_{\chi_2-\chi_0} \end{pmatrix}V_-,\ B=V_+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_+ & q_2 \end{pmatrix},$
где $\chi_0=\max\{\chi_1,\chi_2\}$.

Для $j\in\mathbb{Z}$ и матрицы-функции Φ мы пользуемся следующими обозначениями: $j^{\pm}=\frac{1}{2}\left(j\pm|j|\right)$ и

$$\langle\Phi\rangle_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi\left(t\right)t^{-k-1}dt, k\in\mathbb{Z}.$$

Введем числа $\nu_-=N+|\chi_1-\chi_2|$, $\nu_+=\deg q_2$, функцию $U=\tau_{\nu_-}P_\Gamma^-\left(\tau_{-\nu_-}B^{-1}\right)P_\Gamma^+\left(\tau_{-\nu_-}A^{-1}\right)$ и для $j>-\nu_-$ определим матрицы B_j, U_j , K_j порядка $2\left(\nu_+-j^-+1\right)\times2\left(\nu_-+j^+\right)$, матрицу A_j порядка $2\left(\nu_-+j^+\right)\times 2\left(\nu_-+j^+\right)$ и матрицу $K_j^{/}$ порядка $2\times2\left(\nu_-+j^+\right)$:

$$B_j=\begin{pmatrix} \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-1-j^-} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-2-j^-} & \dots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_--j} \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-2-j^-} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-3-j^-} & \dots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_--j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_+-1} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_+-2} & \dots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-(\nu_++\nu_-)-j^+} \end{pmatrix},$$

$$A_j=\begin{pmatrix} 0 & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--1} & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--2} & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{1-j^+} \\ 0 & 0 & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--1} & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{2-j^+} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_j=\begin{pmatrix} \langle U\rangle_{-1-j^-} & \langle U\rangle_{-2-j^-} & \dots & \langle U\rangle_{-\nu_--j} \\ \langle U\rangle_{-2-j^-} & \langle U\rangle_{-3-j^-} & \dots & \langle U\rangle_{-\nu_--j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle U\rangle_{-\nu_+-1} & \langle U\rangle_{-\nu_+-2} & \dots & \langle U\rangle_{-(\nu_++\nu_-)-j^+} \end{pmatrix},$$

$$K_j=U_j+B_jA_j, K_j^{/}=\left[\left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--j^-},\dots,\left\langle A^{-1}\right\rangle_{1-j}\right].$$

Числа ξ_1,ξ_2 , в случае когда матрица-функция G определенная равенством (2.1) факторизуема и имеет частные индексы равные $\varkappa_1,\varkappa_2$, определим равенствами: $\xi_i=\varkappa_i+1-\chi_0$, $i=1,2$. Векторы $h_1\in\mathbb{C}^{2\left(\nu_-+\xi_1^+\right)}$, $h_2\in\mathbb{C}^{2\left(\nu_-+\xi_2^+\right)}$ назовем факторизационной парой матрицы-функции G, если $h_i\in\ker K_{\xi_i}$, а векторы $K_{\xi_1}^{/}h_1, K_{\xi_2}^{/}h_2$ линейно независимы. Обозначим $\theta_j=1$ при $j>0$ и $\theta_j=0$, при $j\leq 0 (j\in\mathbb{Z})$, $r_{-\nu_-}=\nu_-$, $r_{\nu_+}=\nu_+$, $r_j=rangK_j(j>-\nu_-)$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть функции V_1 и V_2 определяемые равенствами (2.2) допускают факторизацию в пространстве L_p. Тогда:*

а) матрица-функция G определяемая равенством (2.1) *также допускает факторизацию в пространстве L_p. Если дополнительно факторизации функций V_1 и V_2 являются обобщенными, то факторизация G также является обобщенной. Частные индексы матрицы-функции G могут быть вычислены по формулам:*

$$\varkappa_1 = -\nu_- + \nu_0 + \chi_0, \varkappa_2 = \nu_+ - \nu_0 + \chi_0, \tag{2.3}$$

где $\nu_0 = 0$ если $\nu_- + \nu_+ = 1$ и $\nu_0 = card\{\, r_j = 2\theta_j + r_{j-1}; j = -\nu_- + 1, \ldots, \nu_+\}$ если $\nu_- + \nu_+ \geq 2$.

б) Матрица-функция G обладает факторизационной парой. Если векторы

$$h_i = \left(h^t_{i,-\left(\nu_- + \xi_i^+\right)}, \ldots, h^t_{i,-1}\right)^t, \quad h_{i,k} \in \mathbb{C}^2, \quad i = 1, 2; \quad k = -\left(\nu_- + \xi_i^+\right), \ldots, -1$$

являются факторизационной парой, а функции φ_1, φ_2 и матрицы-функции G_+, Λ, G_- определены равенствами

$$\varphi_i(t) = t^{\xi_i^-} B^{-1}(t) P_\Gamma^+ \left(t^{\xi_i^+} A^{-1}(t) \sum_{k=-\left(\nu_- + \xi_i^+\right)}^{-1} h_{i,k} t^k \right), \tag{2.4}$$

$$G_+ = (\varphi_1, \varphi_2), \Lambda = diag\left(\tau_{\varkappa_1}, \tau_{\varkappa_2}\right), G_- = G G_+ \Lambda^{-1} \tag{2.5}$$

то представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является факторизацией G в L_p.

Мы здесь не останавливаемся на доказательстве этой теоремы. В случае когда $\Gamma = \mathbb{T}$, а компоненты матрицы-функции G принадлежат винеровской алгебре (т.е. разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье) теорема доказана в [13, 14](см. также [15]). С помощью техники предложенной в [16] нетрудно убедиться что она справедлива и в предложенном варианте.

При $\nu_+ = 0$, $\nu_- > 1$ и $j > -\nu_-$ матрицы K_j допускают представление (см. [15])

$$K_j = B_j A_j^{(1)},$$

где

$$A_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \left\langle A^{-1} \right\rangle_{\nu_-} & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{\nu_- - 1} & \ldots & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{1-j^+} \\ \left\langle A^{-1} \right\rangle_{\nu_- + 1} & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{\nu_-} & \ldots & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{2-j^+} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left\langle A^{-1} \right\rangle_{2\nu_- - 1 + j^+} & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{2\nu_- - 2 + j^+} & \ldots & \left\langle A^{-1} \right\rangle_{\nu_-} \end{pmatrix}.$$

При $\nu_+ = 0$ и $-\nu_- < j < 0$ матрица K_j имеет вид

$$K_j = \begin{pmatrix} \tilde{K}_j \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{K}_j$ матрица порядка $-2j \times 2\nu_-$.

Очевидно, что $\ker \tilde{K}_j = \ker K_j$ и $rang\tilde{K}_j = rangK_j$. Кроме того матрица $\tilde{K}_j$ в свою очередь допускает представление

$$\tilde{K}_j = \tilde{B}_j \tilde{A}_j,$$

где

$$\tilde{B}_j = \begin{pmatrix} \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-1-j} & \dots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_1 & \left\langle B^{-1}\right\rangle_0 \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-2-j} & \dots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(2.6)

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_-} & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_- -1} & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_1 \\ \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_- +1} & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_-} & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_- -j-1} & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_- -j-2} & \dots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{-j} \end{pmatrix}.$$

При $j \geq 0$ матрица K_j является нулевой матрицой порядка $2 \times 2\,(\nu_- + j)$. Поскольку при $\nu_+ = 0$, имеем $q_2 = const \neq 0$ и $B^{-1} \in \left(L_p^+\right)^{2\times 2}(\Gamma)$, то $\det \tilde{B}_j \neq 0$ и потому $rang\tilde{K}_j = rang\tilde{A}_j$, $\ker \tilde{K}_j = \ker \tilde{A}_j$. Заметим, что при $\nu_+ = 0$ факторизация матрицы-функции G по существу сводится к факторизации матрицы-функции $A \in \left(L_p^-\right)^{2\times 2}(\Gamma)$ (см. [17] и [18]).

3. Факторизация матрицы-функции G_0

Ниже предполагаем, что выполнено условие (1.3), а представление (1.4) является факторизацией функции c. Взяв $G_{11} = 1$, $G_{12} = -\tau^{-1}$, $G_{22} = \frac{c+1}{2}$, $p_+ = \tau$, $p_- = -1$, $q_- = 1$, $q_+ = 2$, $N = 1$, получим представление G_0 в виде (2.1). Из теоремы 2.1 следует, что матрица-функция G_0 допускает факторизацию

(3.1)
$$G_0 = (G_0)_- \,\Lambda\, (G_0)_+^{-1},$$

где $\Lambda = diag\,(\tau_{\varkappa_1}, \tau_{\varkappa_2})$.

Если факторизация (1.4) является обобщенной, то факторизация (3.1) также является обобщенной. Из (2.2) имеем $V_1 = \tau$, $V_2 = \frac{c}{2}$, и соответственно

$$V_1^+ = V_1^- = 1,\ V_2^+ = 2c_+,\ V_2^- = c_-,\ \chi_1 = 1,\ \chi_2 = \varkappa,$$

$$\chi_0 = \max\{1, \varkappa\},\ \nu_+ = 0,\ \nu_- = 1 + |1 - \varkappa|\,.$$

Условимся далее обозначать:

$$\alpha_j = \langle c_+ \rangle_j, \beta_j = \left\langle c_-^{-1} \right\rangle_j, (j \in \mathbb{Z}),$$

$$(G_0)_+ = \left(g_{ij}^+\right)_{i,j=1}^2, (G_0)_-^{-1} = \left(g_{ij}^-\right)_{i,j=1}^2.$$

Очевидно, что $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Учитывая, что $P_{\mathbb{T}}^+\left(\tau^{-1}c_+\right) = \tau^{-1}\left(c_+ - \alpha_0\right)$, $P_{\mathbb{T}}^-\left(\tau^{-1}c_+\right) = \alpha_0\tau^{-1}$, нетрудно убедиться в равенствах

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1}\left(c_+ - \alpha_0\right) \\ -\tau & c_+ + \alpha_0 \end{pmatrix},$$

(3.2)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^{\chi_0} + \frac{1}{2}\alpha_0\tau^{\chi_0-\varkappa}c_-^{-1} & \alpha_0\tau^{\chi_0-\varkappa-1}c_-^{-1} \\ \frac{1}{2}c_-^{-1}\tau^{\chi_0-\varkappa+1} & c_-^{-1}\tau^{\chi_0-\varkappa} \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к построению факторизации матрицы-функции G_0.

Теорема 3.1. *Пусть $\varkappa > 1$. Тогда факторизация матрицы-функции G_0 восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1 = 1, \varkappa_2 = \varkappa - 1, \tag{3.3}$$

$$\begin{matrix} g_{11}^+ = \frac{1}{2},\ g_{12}^+ = \frac{\tau_{k-1}}{2} + \frac{\beta_0(c_+-\alpha_0)}{2}\tau_{-1}, \\ g_{21}^+ = -\frac{\tau}{2},\ g_{22}^+ = -\frac{\tau_k}{2} + \frac{\alpha_0\beta_0}{2} + \frac{c_+\beta_0}{2} \end{matrix}, \tag{3.4}$$

$$\begin{matrix} g_{11}^- = \tau - \frac{\tau}{\beta_0 c_-} + \frac{\alpha_0}{c_-}\tau_{-k+1},\ g_{21}^- = \frac{1}{\beta_0 c_-}, \\ g_{12}^- = -\frac{2}{\beta_0 c_-} + \frac{2\alpha_0\tau_{-k}}{c_-},\ g_{22}^- = \frac{2}{\beta_0 c_-}\tau_{-1} \end{matrix} \tag{3.5}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $\chi_0 = \varkappa$, $\nu_- = \varkappa$. Из формулы (3.2) следует, что

$$\left\langle A^{-1}\right\rangle_\varkappa = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\langle A^{-1}\right\rangle_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta_0}{2} & 0 \end{pmatrix}, \left\langle A^{-1}\right\rangle_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ j \in \mathbb{N}\setminus\{1, \varkappa\}.$$

Из (2.6) имеем, что $rangK_j = rang\tilde{A}_j = -j+1$, $(j = -\nu_- + 1, \ldots, -1)$, и потому равенство $r_j = r_{j-1}$, $(j = -\nu_- + 1, \ldots, -1)$ имеет место лишь при $j = -\nu_- + 1$. Таким образом $\nu_0 = 1$ и (3.3) следует из (2.3). В силу своего определения $\xi_1 = 2 - \varkappa$, а $\xi_2 = 0$. Определим векторы $h_{i,k} \in (\mathbb{C})^2$ $(i = 1, 2;\ k = -\varkappa, \ldots, -1)$ следующим образом:

$$h_{1,-\varkappa} = \ldots = h_{1,-3} = h_{1,-1} = h_{2,-\varkappa} = \ldots = h_{2,-2} = 0,\ h_{1,-2} = h_{2,-1} = (1,0)^t.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться что, векторы

$$h_i = (h^t_{i,-\varkappa}, \dots, h^t_{i,-1})^t, \quad i = 1, 2$$

являются факторизационной парой для G_0. Из формул (2.4), (2.5) следует формулы (3.4), (3.5). Теорема доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть* $\varkappa = 1$. *Тогда факторизация матрицы-функции* G_0 *восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1 = 0, \ \varkappa_2 = 1, \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{l} g^+_{11} = \frac{1}{2} + \frac{\beta_0(c_+ - \alpha_0)}{2}\tau_{-1}, \ g^+_{21} = \frac{\alpha_0\beta_0}{2} - \frac{\tau}{2} + \frac{\beta_0 c_+}{2} \\ g^+_{12} = \beta_0\left(c_+ - \alpha_0\right)\tau_{-1}, \, g^+_{22} = \alpha_0\beta_0 + \beta_0 c_+ \end{array}, \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{l} g^-_{11} = 1 + \frac{\alpha_0}{c_-}\tau_{-1}, \quad g^-_{12} = \frac{2\alpha_0\beta_0\tau_{-2}}{c_-} \\ g^-_{21} = -\frac{\beta_0 c_- - 1}{2\beta_0 c_-}\tau - \frac{\alpha_0}{2c_-}, \, g^-_{22} = \frac{1}{\beta_0 c_-} - \frac{\alpha_0}{c_-}\tau_{-1} \end{array} \tag{3.8}$$

Доказательство. В данном случае $\chi_0 = 1$, $\nu_- = 1$. Так как $\nu_- + \nu_+ = 1$, то $\nu_0 = 0$ и (3.6) следует из (2.3). Легко видеть, что матрицы K_0 и K_1 нулевые, а $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Также нетрудно убедиться что, векторы $h_1 = (1,0)^t$ и $h_2 = (0,0,0,1)^t$ являются факторизационной парой для G_0. Из формул (2.4), (2.5) следуют формулы (3.7), (3.8). Теорема доказана. □

Теорема 3.3. *Пусть* $\varkappa = 0$ *и* $\alpha_0\beta_0 + 1 \neq 0$. *Тогда факторизация матрицы-функции* G_0 *восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1 = 0, \varkappa_2 = 0, \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{l} g^+_{11} = \frac{1}{2}\left(\alpha_0\beta_0 + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\beta_{-1} + \beta_0\tau\right)\left(c_+ - \alpha_0\right)\tau_{-1}, \ g^+_{12} = \beta_0\left(c_+ - \alpha_0\right)\tau_{-1} \\ g^+_{21} = -\frac{1}{2}\left(\alpha_0\beta_0 + 1\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\beta_{-1} + \beta_0\tau\right)\left(c_+ + \alpha_0\right), g^+_{22} = \beta_0\left(c_+ + \alpha_0\right) \end{array} \tag{3.10}$$

$$\begin{array}{l} g^-_{11} = \frac{c_- + \alpha_0}{c_-(\alpha_0\beta_0+1)}, g^-_{21} = -\frac{\beta_0 c_- - 1}{2\beta_0 c_-(\alpha_0\beta_0+1)}\tau - \frac{\beta_{-1}(\alpha_0 + c_-)}{2\beta_0 c_-(\alpha_0\beta_0+1)} \\ g^-_{12} = \frac{2\alpha_0\tau_{-1}}{c_-(\alpha_0\beta_0+1)}, g^-_{22} = \frac{1}{\beta_0 c_-(\alpha_0\beta_0+1)} - \frac{\alpha_0\beta_{-1}}{\beta_0 c_-(\alpha_0\beta_0+1)}\tau_{-1}. \end{array} \tag{3.11}$$

Доказательство. Легко видеть, что $\chi_0 = 1$, $\nu_- = 2$. Из формул (3.2) и (2.6) следует, что

$$\tilde{A}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_0\beta_0+1}{2} & 0 \\ \frac{\beta_0}{2} & 0 & \frac{\beta_{-1}}{2} & \beta_0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Поскольку $rang K_{-1} = rang\tilde{A}_{-1} = 2$, то $\nu_0 = 1$ и формулы (3.9) следуют из (2.3). Учитывая, что $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, нетрудно убедиться что, векторы $h_1 = (0,0,1,0)^t$, $h_2 = (0,0,0,1)^t$ являются факторизационной парой для G_0. Из формул (2.4), (2.5) следуют формулы (3.10), (3.11). Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Пусть* $\varkappa = 0$ *и* $\alpha_0\beta_0 + 1 = 0$. *Тогда факторизация матрицы-функции* G_0 *восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1 = -1, \varkappa_2 = 1, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} &g_{11}^+ = \tfrac{\beta_0^2(c_+-\alpha_0)}{2}\tau_{-1},\ g_{12}^+ = \beta_{-1}\left(c_+ - \alpha_0\right)\tau_{-1} + \beta_0 c_+ \\ &g_{21}^+ = \tfrac{\beta_0^2(c_++\alpha_0)}{2},\ g_{22}^+ = \beta_{-1}\left(c_+ + \alpha_0\right) + \beta_0 c_+\tau \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &g_{11}^- = -\tfrac{1}{\alpha_0\beta_0^2} - \tfrac{\beta_{-1}\left(c_- - \beta_0^{-1}\right)}{\alpha_0\beta_0^3 c_-}\tau_{-1},\ g_{12}^- = \tfrac{-2\beta_{-1}\tau_{-2}}{c_-\beta_0^3} \\ &g_{21}^- = \tfrac{c_- - \beta_0^{-1}}{2\,\alpha_0\beta_0 c_-}\,\tau,\ g_{22}^- = \tfrac{1}{\beta_0 c_-}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме $\chi_0 = 1$, $\nu_- = 2$. Но в этом случае следует, что $rang K_{-1} = rang\tilde{A}_{-1} = 1$ (см. (3.12)). И потому $\nu_0 = 0$ а частные индексы определяются по формуле (3.13). Следовательно $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$. Замечая что, векторы $h_1 = (-\beta_{-1}, 0, \beta_0, 0)^t$, $h_2 = (0,0,0,0,0,1)^t$ являются факторизационной парой для G_0, из формул (2.4), (2.5) получим формулы (3.14), (3.15). Теорема доказана. □

Теорема 3.5. *Пусть* $\varkappa = -1$. *Тогда факторизация матрицы-функции* G_0 *восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1 = -1,\ \varkappa_2 = 0, \tag{3.16}$$

$$g^+_{11}=\tfrac{1}{2}\beta_0^2\left[\alpha_0\beta_0+\left(\beta_0\tau-\alpha_0^{-1}\right)(c_+-\alpha_0)\,\tau_{-1}\right],\ g^+_{12}=\tfrac{\beta_0}{2}\,(c_+-\alpha_0)\,\tau_{-1},$$
$$g^+_{21}=\tfrac{1}{2}\beta_0^2\left[-\alpha_0\beta_0\tau+\left(\beta_0\tau-\alpha_0^{-1}\right)(c_++\alpha_0)\right],\ g^+_{22}=\tfrac{\beta_0}{2}\,(c_++\alpha_0), \tag{3.17}$$

$$g^-_{11}=\tfrac{\tau_{-1}}{\alpha_0\beta_0^3}+\tfrac{1}{\beta_0^3c_-},\quad g^-_{12}=\tfrac{2\,\tau_{-1}}{c_-\beta_0^3}$$
$$g^-_{21}=\tfrac{1}{\alpha_0^2\beta_0^2}-\tfrac{c_--\beta_0^{-1}}{\alpha_0\beta_0c_-}\,\tau,\quad g^-_{22}=\tfrac{2}{\alpha_0\beta_0^2c_-}. \tag{3.18}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $\chi_0=1$, $\nu_-=3$. Из формул (3.2) и (2.6) следует, что

$$\tilde{A}_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_0\beta_0}{2} & 0 & \frac{\alpha_0\beta_{-1}+1}{2} & \alpha_0\beta_0\\ \frac{\beta_0}{2} & 0 & \frac{\beta_{-1}}{2} & \beta_0 & \frac{\beta_{-2}}{2} & \beta_{-1}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{-2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_0\beta_0}{2} & 0 & \frac{\alpha_0\beta_{-1}+1}{2} & \alpha_0\beta_0\\ \frac{\beta_0}{2} & 0 & \frac{\beta_{-1}}{2} & \beta_0 & \frac{\beta_{-2}}{2} & \beta_{-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_0\beta_0}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\beta_0}{2} & 0 & \frac{\beta_{-1}}{2} & \beta_0\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $rangK_{-1}=rang\tilde{A}_{-1}=2$, $rangK_{-2}=rang\tilde{A}_{-2}=3$. Равенство $r_j=r_{j-1}$, $(j=-2,-1)$ имеет место лишь при $j=-2$. Следовательно $\nu_0=1$ и (3.16) следует из (2.3). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\xi_1=-1$, $\xi_2=0$, а векторы

$$h_1=\left(-\beta_0\beta_{-2},0,-\beta_0\beta_{-1},\frac{1}{2}\beta_{-1}^2+\frac{\beta_{-1}}{2\alpha_0},\beta_0^2,\frac{-\beta_0}{2\alpha_0}\right)^t,\quad h_2=(1,0,0,0,0,0)^t$$

являются факторизационной парой матрицы-функции G_0. Формулы (3.17) и (3.18) следуют из формул (2.4), (2.5). Теорема доказана. □

Теорема 3.6. *Пусть $\varkappa\le-2$. Тогда факторизация матрицы-функции G_0 восстанавливается по формулам:*

$$\varkappa_1=\varkappa+1,\ \varkappa_2=-1, \tag{3.19}$$

$$g^+_{11}=-\beta_0^2c_+,\ g^+_{12}=-\alpha_0\beta_0^2c_+\textstyle\sum_{i=1}^{-\varkappa}\beta_{i+\varkappa}\tau_{i-1}+\beta_0^2\,(c_+-\alpha_0)\,\tau_{-1}$$
$$g^+_{21}=-\beta_0^2c_+\tau,\ g^+_{22}=-\alpha_0\beta_0^2c_+\textstyle\sum_{i=1}^{-\varkappa}\beta_{i+\varkappa}\tau_i+\beta_0^2\,(c_++\alpha_0), \tag{3.20}$$

$$g^-_{11}=-\tfrac{\tau_{\varkappa+1}-\alpha_0\sum_{i=\varkappa+2}^{0}\beta_{i-1}\tau_i}{2\,\alpha_0\beta_0^2}+\tfrac{\left(c_--\beta_0^{-1}\right)\tau}{2\,\beta_0c_-},\ g^-_{12}=-\tfrac{1}{\beta_0^2c_-}$$
$$g^-_{21}=-\tfrac{1}{2\,\alpha_0\beta_0^2},\ g^-_{22}=0 \tag{3.21}$$

Доказательство. Легко видеть, что $(2k+1$)-ая и $(2k+4)$-ая, $k=1,\ldots,-j-2$ строки матрицы $\tilde{A}_j$, $-\nu_- < j \leq -1$ отличаются друг от друга на множитель α_0. Строки с номерами отличными от $2k+1$, $k=1,\ldots,-j-2$ линейно независимы. Таким образом $rangK_j = rang\tilde{A}_j = 2-j$. Следовательно $\nu_0 = 2$ и из (2.3) следует (3.19). Имеем также $\xi_1 = \varkappa+1$, $\xi_2 = -1$. Определим векторы $h_{i,k} \in (\mathbb{C})^2$ $(i=1,2;\ k=-2+\varkappa,\ldots,-1)$ следующим образом :

$$h_{1,-2+\varkappa}=0, h_{1,i}=(0,c_{-i-1})^t\,, (i=-1+\varkappa,\ldots,-3)\,, h_{1,-2}=(0,\beta_{-1})^t\,,$$

$$h_{1,-1}=(0,-\beta_0)^t\,,\ h_{2,-2+\varkappa}=(-2\,\beta_{-1}-2\alpha_0\beta_{-1}\beta_\varkappa+2\alpha_0\beta_0\beta_{\varkappa-1},0)^t\,, h_{2,-1+\varkappa}=(2\,\beta_0,0)^t\,,$$

$$h_{2,-\varkappa}=(0,\alpha_0\beta_0\beta_\varkappa)^t\,, h_{2,-j}=0,\ j=-\varkappa-1,\ldots,2, h_{2,-1}=\left(-2\alpha_0\beta_0^2,0\right)^t,$$

где числа однозначным образом определяются из равенств

$$\sum_{j=0}^{m}\beta_{-j}c_{m-j}=0,\ m=1,2,\ldots,-\varkappa,\ c_0=\beta_{-1},\ c_1=-\beta_0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться что, векторы $h_i=\left(h^t_{i,-\varkappa},\ldots,h^t_{i,-1}\right)^t$ являются факторизационной парой G_0. Из формул (2.4), (2.5) следуют формулы (3.20), (3.21). Теорема доказана. □

4. Описание ядра и коядра оператора A

Наряду с оператором A будем рассматривать характеристический матричный сингулярный оператор $\tilde{A}=\Xi_C P^+_{\mathbb{T}}+\Xi_D P^-_{\mathbb{T}} : L^2_p(\mathbb{T})\to L^2_p(\mathbb{T})$, где

$$C=\begin{pmatrix}1 & -\tau_{-1}\\ \frac{1}{2}\tau b_0 & a_0+\frac{1}{2}b_0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -\tau_{-1}\\ -\frac{1}{2}\tau b_0 & a_0-\frac{1}{2}b_0\end{pmatrix}.$$

Для оператора $\tilde{A}$ (с учетом (1.2)) справедливо тождество (см. [7])

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}I & 0\\ \frac{1}{2}\Xi_{\tau b_0}S_{\mathbb{T}} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & M^{-1}AM\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -\Xi_{\tau_{-1}}\\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Из этого тождества следует, что функция y принадлежит $\ker A$ тогда и только тогда когда вектор-функция $\left(\tau_{-1}M^{-1}y, M^{-1}y\right)^t$ принадлежит $\ker\tilde{A}$. Определим матрицу

$$L_-=\begin{pmatrix}1 & \tau_{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Из (3.1) следует, что представление $L_-G_0=L_-\left(G_0\right)_-\Lambda\left(G_0\right)^{-1}_+$ является факторизацией матрицы-функции L_-G_0.

Из равенства $D^{-1}C = L_{-}G_0$ следует, что $\ker \tilde{A}$ совпадает с ядром оператора $\Xi_{L_{-}G_0} P_{\mathbb{T}}^{+} + P_{\mathbb{T}}^{-}$. Описание последнего множества в терминах факторов матрицы-функции $L_{-}G_0$ хорошо известно (см. например [11, 12]). Пользуясь этим описанием нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (1.3)*, а равенство* (1.4) *является обобщенной факторизацией функции c. Тогда*

(1) *Если $\varkappa \geq 1$ либо $\varkappa = 0$ а $\alpha_0\beta_0 + 1 \neq 0$ то ядро оператора A тривиально.*

(2) *Если $\varkappa = 0$ а $\alpha_0\beta_0 + 1 = 0$ то ядро оператора A одномерно и функция*

$$\varphi(x) = \left(1 - c\left(e^{ix}\right)\right) c_{+}\left(e^{ix}\right), \quad x \in [0, 2\pi],$$

является базисом множества $\ker A$.

(3) *Если $\varkappa = -1$, то ядро оператора A одномерно и функция*

$$\varphi_0(x) = \left(1 - c\left(e^{ix}\right)\right) c_{+}\left(e^{ix}\right)\left(1 - \alpha_0\beta_0 e^{ix}\right), \quad x \in [0, 2\pi],$$

является базисом множества $\ker A$.

(4) *Если $\varkappa \leq -2$, то* $\dim \ker A = -\varkappa$ *и функции*

$$\varphi_0(x) = \left(1 - c\left(e^{ix}\right)\right) c_{+}\left(e^{ix}\right)\left(1 - \alpha_0 \sum_{j=1}^{-\varkappa} \beta_{j+\varkappa} e^{ijx}\right),$$

$$\varphi_m(x) = \left(1 - c\left(e^{ix}\right)\right) c_{+}\left(e^{ix}\right) e^{imx}, \quad m = 1, \ldots, -\varkappa - 1, \quad x \in [0, 2\pi],$$

образуют базис множества $\ker A$.

Из тождества (4.1) следует также, что уравнение $Ay = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{f}$, где $\tilde{f} = \left(0, M^{-1}f\right)^t$. В свою очередь последнее уравнение разрешимо тогда и только тогда разрешимо уравнение $\left(\Xi_{L_{-}G_0} P_{\mathbb{T}}^{+} + P_{\mathbb{T}}^{-}\right) z = g$, где

$$g = D^{-1}\tilde{f} = \left(\left(a_0 - b_0\right)^{-1} \tau_{-1} M^{-1} f, \left(a_0 - b_0\right)^{-1} M^{-1} f\right)^t.$$

Пользуясь описанием аннулятора оператора $\Xi_{L_{-}G_0} P_{\mathbb{T}}^{+} + P_{\mathbb{T}}^{-}$ (см. [11]) нетрудно убедится в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие* (1.3)*, а равенство* (1.4) *является обобщенной факторизацией функции c. Тогда*

(1) *Если* $\varkappa > 1$, *то для разрешимости уравнения* $Ay = f$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{a(x) - b(x)} \, \frac{e^{2ix}\left(\alpha_0 e^{-i\varkappa x} - 1\right)}{c_-(e^{ix})} \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} f(x)}{a(x) - b(x)} \, \frac{e^{-imx}}{c_-(e^{ix})} \, dx = 0, \quad m = 1, \ldots, \varkappa - 1,$$

(2) *Если* $\varkappa = 1$, *то для разрешимости уравнения* $Ay = f$ *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} f(x)}{a(x) - b(x)} \, \frac{e^{ix} - \alpha_0\beta_0}{c_-(e^{ix})} \, dx = 0,$$

(3) *Если* $\varkappa = 0$ *а* $\alpha_0\beta_0 + 1 = 0$, *то для разрешимости уравнения* $Ay = f$ *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{a(x) - b(x)} \, \frac{1}{c_-(e^{ix})} \, dx = 0,$$

(4) *если* $\varkappa \leq -1$ *либо* $\varkappa = 0$ *а* $\alpha_0\beta_0 + 1 \neq 0$ *то уравнение* $Ay = f$ *разрешимо для любого* f *из* $L_p[0, 2\pi]$.

Abstract. An integral equation with Hilbert's kernel and coefficients from L_∞ is considered. It is known, that the problem of solvability of this equation comes to a factorization of some matrix-function. An explicit factorization of the above mentioned matrix-function is constructed. A description of kernel and cokernel of corresponding integral operator is provided.

Список литературы

[1] D. Hilbert, Über eine Anwendung der Integralgleichungen, Verhandl. Des III Internat. Mathematiker Kongresses, Heidelberg (1904).

[2] F. Noether, Über eine Klasse singularer Intergalgleichungen, Math. Ann. 82, 42 – 63 (1921).

[3] Ф. Д. Гахов, О новых типах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме, Проблема механ. сплошн. среды, Изд-во АН СССР, 102 – 104 (1961).

[4] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Наука, Москва (1977).

[5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. Наука, Москва (1968).

[6] I. Cohberg, N. Krupnik, One dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. 2, General Theory and Applications OT 54, Birhauser, Basel (1992).

[7] I. Feldman, I. Cohberg, N. Krupnik, "On explicit factorization and applications", IE OT 21, 430 – 459 (1995).

[8] I. Cohberg, N. Krupnik, One dimensional Linear Singular Integral Equations, vol. 1, Introduction OT 53 Birkhauser, Basel (1992).

[9] А. Г. Камалян, “Некоторые свойства ядер теплицевых операторов”, Докл. НАН Армении, **107** (4), 316-322 (2007).
[10] А. Г. Камалян, “Индексная факторизация матриц-функций”, **108** (1), 5-11 (2008).
[11] K. Clancey, I. Cohberg, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Birhauser, Verlag, Basel (1981).
[12] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable matrix Functions, Akademie-Verlag Berlin (1987).
[13] А. Г. Камалян, А. В. Саргсян, “О частных индексах одного класса матриц-функций второго порядка”, Изв. НАН Армении, Математика, **42** (3), 39-48 (2007).
[14] A. V. Sargsyan, “On factorization of a class of second order matrix-functions”, Proceedings of the YSU Phys. And Mathem. Sciences, (1), 9-15 (2010).
[15] А. В. Саргсян “Факторизация одного класса матриц-функций второго порядка”, канд. диссертация, Ереван (2011).
[16] G. M. Topikyan, “Explicit factorization of a (P,Q)-circulant matrix-functions”, Proceedings of the YSU Phys. And Mathem. Sciences, (3), 23 – 30 (2011).
[17] А. Г. Камалян, “Явная обобщенная факторизация ограниченных голоморфных функций”, Изв. НАН Армении, Математика, **32** (2), 19 – 38 (1997).
[18] Р. А. Амирджанян, А. Г. Камалян, “Факторизация мероморфных матриц-функций”, Изв. НАН Армении, Математика, **12** (6), 31-50 (2007).

Поступила 9 декабря 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 45-58.

ОБОБЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИЗВЕСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ КОРРЕКТНЫХ УЗЛОВ

Л. Р. РАФАЕЛЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *levon.rafayelyan@googlemail.com*

Аннотация. В некоторых хорошо известных конструкциях корректных узлов (Чанга-Яо, Берзолари-Радона) для двумерной интерполяции Лагранжа узлы располагаются на множествах прямых. В данной работе эти конструкции обобщаются на случай множеств прямых и коник.

MSC2010 number: 14H50.

Ключевые слова: Геометрическая характеристика; конструкция Чанга-Яо; конструкция Берзолари-Радона; интерполяция Лагранжа; максимальная прямая; корректное множество; гипотеза Гаски-Маэсту.

1. Введение

Обозначим через π_n пространство всех одномерных многочленов степени не превышающей n. Пространство всех двумерных многочленов суммарной степени не превышающей n обозначим через Π_n.

Определение 1.1. *Задача интерполяции для множества узлов* $X_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s \subset \mathbb{R}^2$ *и для* Π_n *называется корректной, если для произвольно заданных чисел* $c_1, ..., c_s$ *существует единственный многочлен* $p \in \Pi_n$ *такой, что*

$$p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, ..., s.$$

Тогда множество X_s *называется* Π_n*-корректным.*

Вышеуказанные условия дают систему s линейных уравнений с $\binom{n+2}{2}$ неизвестными - коэффициентами многочлена. Корректность означает, что эта система имеет единственное решение для всякой правой части. Ввиду последнего получаем следующее необходимое условие корректности:

$$s = N := N_n = dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Следовательно, мы рассматриваем корректность только тогда, когда это условие выполнено. В этом случае линейная система имеет единственное решение для произвольной правой части c_i тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система не имеет другого решения, кроме тривиального (нулевого).

Предложение 1.1. *Задача интерполяции для множества узлов* $X=\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$ *и* Π_n *является корректной тогда и только тогда, когда из равенств*

$$p \in \Pi_n,\ p(x_i, y_i) = 0,\ i = 1, ..., N$$

вытекает $p = 0$.

Рассмотрим множество узлов $X_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s$. Многочлен $p \in \Pi_n$ называется фундаментальным для узла $A := (x_k, y_k) \in X_s$ и Π_n, если

$$p \in \Pi_n,\ p(x_k, y_k) \neq 0,\ p(x_i, y_i) = 0,\ 1 \leq i \leq s,\ i \neq k.$$

Обозначим фундаментальный многочлен узла $A := (x_k, y_k) \in X_s$ через $p_k^* := P_{A,X_s}^*$. Заметим, что многочлен γp_k^*, где $\gamma = const \neq 0$, также является фундаментальным. Поэтому при $\gamma_k^* = 1/p_k^*(x_k, y_k)$ получаем, что

$$\gamma_k^* p_k^*(x_i, y_i) = \delta_{i,k},$$

где $\delta_{i,k}$ символ Кронекера.

Мы используем ту же букву, скажем p, для обозначения кривой степени n и многочлена $p \in \Pi_n$, для которого $p(x, y) = 0$ является уравнением p.

Определение 1.2. *Рассмотрим* Π_n*-корректное множество* X. *Скажем, что точка* $A \in X$ *использует алгебраическую кривую* p, *если* p *является множителем для фундаментального многочлена* $p_{A,X}^*$.

Определение 1.3. *Множество узлов* $X_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s$ *называется* Π_n*-независимым, если все фундаментальные многочлены* $p_i^* \in \Pi_n, i = 1, ..., s$, *существуют. Множество узлов* X_s *называется* Π_n*-зависимым, если некоторый фундаментальный многочлен* $p_{i_0}^* \in \Pi_n$, *где* $1 \leq i_0 \leq s$, *не существует, т. е.*

$$p \in \Pi_n,\ p(x_i, y_i) = 0,\ 1 \leq i \leq s,\ i \neq i_0 \Rightarrow p(x_{i_0}) = 0.$$

Следующие утверждения очевидны.

Предложение 1.2. *Допустим, что множество X является Π_n-независимым. Тогда*

(1) *Всякое непустое подмножество $Y \subset X$ является Π_n-независимым.*
(2) $\#X \leq N_n = dim\Pi_n$, *а в случае равенства множество X является Π_n-корректным.*

Для многочлена $p \in \Pi_n$ и кривой g обозначим через $p|_g$ ограничение p на g.
В дальнейшем мы будем использовать следующее хорошо известное

Предложение 1.3. *Предположим, что задана прямая l, полином $p \in \Pi_n$ и $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset l$. Тогда*

(1) $p(x_i, y_i) = 0,\ i = 0, ..., n \Rightarrow p|_l = 0,$
(2) $p|_l = 0 \Rightarrow p = lr$, *где* $r \in \Pi_{n-1}$.

Мы используем термин коника для неприводимой алгебраической кривой степени 2. Докажем аналогичное утверждение для коник.

Предложение 1.4. *Предположим, что задана коника q, $p \in \Pi_n$ и $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{2n} \subset q$. Тогда из равенств*

$$p(x_i, y_i) = 0,\ i = 0, ..., 2n$$

вытекает, что $p|_q = 0$ и $p = qr_{n-2}$, где $r_{n-2} \in \Pi_{n-2}$.

Доказательство. Рассмотрим следующие пространства многочленов:

$$P_{n,X} = \{p \in \Pi_n : p|_X = 0\},$$

$$V_{n,q} = \{qr_{n-2} : r_{n-2} \in \Pi_{n-2}\}.$$

Достаточно доказать, что эти пространства совпадают. Очевидно, что

$$V_{n,q} \subseteq P_{n,X}.$$

Множество $2n + 1$ точек является Π_n-независимым тогда и только тогда, когда в нем нет $n + 2$ точек находящихся на одной прямой (см. [6] для более общих результатов в этом направлении). От неприводимости q следует, что не более 2 точек X могут располагаться на одной прямой. Таким образом X является Π_n-независимым. Из последнего следует (см. [8]), что

$$dimP_{n,X} = dim\Pi_n - \#X.$$

Нетрудно заметить, что

$$dimV_{n,q} = dim\Pi_{n-2}.$$

Из $\#X = 2n+1$ и $dim\Pi_n = \binom{n+2}{2}$ получаем $dimV_{n,q} = dimP_{n,X}$ и, следовательно, $V_{n,q} \equiv P_{n,X}$. □

Из последних двух утверждений легко вытекает следующее

Предложение 1.5. *Предположим, что X есть Π_n-корректное множество. Тогда не более $n+1$ точек могут располагаться на одной прямой и не более $2n+1$ точек - на одной конике.*

Последнее приводит нас к следующему определению.

Определение 1.4. *Задано Π_n-корректное множество X. Прямую, содержащую $n+1$ точку из X и конику, содержащую $2n+1$ точку из X, назовем максимальной.*

Далее приведены некоторые свойства максимальных прямых и коник для Π_n-корректного множества.

Предложение 1.6. *Предположим, что X есть Π_n-корректное множество. Тогда*

(1) *Если g - максимальная прямая или коника в X, то $Y := X \backslash g$ является $\Pi_{n-\sigma}$-корректным при $\sigma := deg(g)$. Более того, все точки Y используют g.*

(2) *Если g_1 и g_2 являются максимальными прямыми и/или кониками в X, то $\#Z = \sigma_1\sigma_2$, где $Z := g_1 \cap g_2 \cap X$ и $\sigma_i = deg(g_i)$, $i = 1, 2$.*

(3) *Если g_1 и g_2 являются максимальными прямыми и/или кониками в X, то g_2 максимальна в $Y_1 := X \backslash g_1$.*

(4) *Если g_1, g_2 и g_3 являются максимальными прямыми и/или кониками в X, то $T := g_1 \cap g_2 \cap g_3 = \emptyset$.*

(5) *Если в X существуют m максимальных прямых и k максимальных коник, то $m + 2k \leq n + 2$. В частности, существуют не более $n + 2$ максимальных прямых в X.*

Доказательство. Из корректности X получаем, что для каждого узла $A \in X$ существует фундаментальный многочлен $p^*_{A,X}$.

(1) Сперва заметим, что из утверждений 1.3 и 1.4 следует, что каждый узел множества Y использует g в X. Тогда каждый узел $A \in Y$ имеет фундаментальный многочлен степени $n - \sigma$, заданный уравнением

$$P^*_{A,Y} = \frac{P^*_{A,X}}{g} \in \Pi_{n-\sigma}.$$

Следовательно, Y является $\Pi_{n-\sigma}$-независимым. Далее, из определения 1.4 получаем, что $\#Y = dim\Pi_{n-\sigma}$. Согласно утверждению 1.2, это означает, что Y является $\Pi_{n-\sigma}$-корректным.

(2) Предположим, наоборот, что $\#Z < \sigma_1\sigma_2$. Из пункта 1 получаем, что $Y_1 := X\backslash g_1$ является $\Pi_{n-\sigma_1}$-корректным. Но тогда g_2 проходит через $> \sigma_2(n - \sigma_1) + 1$ узлов Y_1, что противоречит утверждению 1.5.

(3) Поскольку g_i максимальна в X, то она содержит $\sigma_i n+1$ узлов множества X при $\sigma_i = deg(g_i)$, $i = 1, 2$. Из пункта 1 получаем, что $Y_1 := X\backslash g_1$ $\Pi_{n-\sigma_1}$-корректно. Так как g_1 и g_2 пересекаются в $\sigma_1\sigma_2$ узлах множества X (см. пункт 2), тогда g_2 содержит $\sigma_2 n+1-\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2(n-\sigma_1)+1$ узлов множества Y_1. Согласно определению 1.4 g_2 максимальна в Y_1.

(4) Предположим, наоборот, что $T \neq \emptyset$. Из пункта 2 легко получаем, что $T \subset X$. Принимая во внимание пункт 1, получаем, что $Y_1 := X\backslash g_1$ есть $\Pi_{n-\sigma_1}$-корректное множество, где $\sigma_1 = deg(g_1)$. Из пункта 3 получаем, что g_2 и g_3 максимальны в Y_1. Пусть $A \in T$. Тогда g_2 и g_3 пересекаются в узле A, и $A \notin Y_1$, что является противоречием.

(5) Предположим $m+2k = n+2$. Каждая максимальная прямая пересекается с остальными максималами в $(m - 1) + 2k = n + 1$ точках. Поскольку каждая пара максималов пересекаются в узлах множества X, тогда все узлы максимальной прямой являются точками пересечения с другими максималами. Каждая максимальная коника пересекается с остальными максималами в $2m + 4(k - 1) = 2n$ точках. Следовательно, узлами максимальной коники являются $2n$ точки пересечения с остальными максималами и один дополнительный узел, который не находиться ни на одной

из остальных максималов. Затем, не трудно заметить, что

$$\#Y = \binom{m}{2} + 2mk + 4\binom{k}{2} + k = \binom{n+2}{2},$$

где Y состоит из всех точек пересечения всех максималов и k дополнительных узлов на кониках. Из корректности X получаем, что $\#X = \binom{n+2}{2}$. Следовательно, суммарная степень максимальных прямых и коник множества X не может превышать $n+2$, что и требовалось доказать.

□

2. Некоторые конструкции корректных узлов

В этом параграфе мы приводим некоторые известные конструкции корректных узлов, расположенных на прямых, которые позже обобщаем с использованием коник и прямых.

Конструкция Берзолари-Радона ([1], [9]). Эта конструкция использует $n+1$ прямых.

Предложение 2.1. *Предположим, что X является множеством $N = 1+2+ \ldots + (n+1)$ узлов, удовлетворяющих следующему свойству. Задано $n+1$ прямых l_i, $i = 1, 2, ..., n+1$ так, что*

(2.1) $n+2-s$ *узлов множества* X *расположены на* $l_s \setminus \cup_{i=1}^{s-1} l_i$, $s = 1, ..., n+1$.

Тогда X является Π_n-корректным.

Множество X, удовлетворяющее вышесказанным условиям, назовем B-R множеством.

Далее мы приводим обобщение множества B-R, где узлы располагаются на прямых и кониках. Предположим X множество $N = \binom{n+2}{2}$ узлов. Для последовательности кривых $g_1, ..., g_m$ обозначим $n_1 = n$, $n_s = n - deg(g_1) - \ldots - deg(g_{s-1})$, $s = 1, ..., m$. Также обозначим

$$\nu_s = \begin{cases} n_s + 1, & \text{если } deg(g_s) = 1, \\ 2n_s + 1, & \text{если } deg(g_s) = 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Предложение 2.2. *Предположим, что $X, \#X = N$, удовлетворяет следующему свойству. Задана последовательность k прямых и p коник $g_1, ..., g_{k+p}$ так,* *что* $k + 2p = n + 1$ *и*

$$\nu_s \text{ узлов множества } X \text{ расположены на } g_s \setminus \cup_{i=1}^{s-1} g_i, \; s = 1, ..., k+p.$$

Тогда X *является* Π_n*-корректным.*

Множество X, удовлетворяющее вышесказанным условиям, назовем B-R(2) множеством.

Доказательство. Следуя утверждению 1.1, допустим, что $p \in \Pi_n$ обращается в нуль во всех узлах X. Рассмотрим ν_1 узлов g_1. Согласно утверждениям 1.3 и 1.4 получаем $p = g_1 r_{n_2}$, где $r_{n_2} \in \Pi_{n_2}$. Далее, p обращается в нуль во всех ν_2 узлах g_2, в то время как в силу условия поставленного на точках, g_1 не обращается в нуль. Следовательно, r_{n_2} обращается в нуль во всех этих ν_2 узлах и следовательно, $p = g_1 g_2 r_{n_3}$, где $r_{n_3} \in \Pi_{n_3}$. Продолжая таким образом, мы приходим к

$$p = \prod_{i=1}^{k+p-1} g_i r_{n_{k+p}},$$

где $r_{n_{k+p}} \in \Pi_{n_{k+p}}$. Теперь, используя тот факт, что p обращается в нуль в последних ν_{k+p} точках, получаем, что $r_{n_{k+p}} = 0$, поскольку множители не обращаются в нуль. Таким образом получаем, что $p = 0$. □

Конструкция Чанга-Яо. Чанг и Яо [4] ввели условие геометрической характеристики (GC), которое гарантирует существование всех фундаментальных многочленов в виде произведения линейных множителей.

Определение 2.1. *Множество узлов* $X, \#X = N$*, называется удовлетворяющим геометрической характеристике для* Π_n*, или кратко* GC_n*, если для каждого фиксированного узла существуют не более, чем* n *прямых содержащих все узлы* X*, кроме фиксированного.*

Фиксируем узел $A \in X$ и пусть $l_1, ..., l_\nu$, $\nu \leq n$, выше описанные прямые. Тогда условие GC_n в точности означает, что

$$P_A^* = l_1 ... l_\nu.$$

Таким образом узел A использует прямые l_i.

Стоит отметить, что в силу единственности фундаментальных многочленов легко получаем, что для каждого фиксированного узла множества GC_n существует единственное множество n прямых содержащее все остальные узлы, кроме фиксированного. Более того, каждая из этих прямых проходит через минимум 2 узла.

Натуральная сеть Чанга и Яо(NL_n) [4]**.** Эта конструкция использует $n+2$ прямых, $l_i, i=1,...,n+2$, удовлетворяющих следующему условию: каждая пара прямых пересекается, и каждая тройка прямых имеет пустое пересечение. Множество X состоит из всех точек пересечения этих прямых. Тогда нетрудно заметить, что $\#X = N$ и X удовлетворяет условию GC_n. Действительно, пусть $A \in X$, $A = l_i \cap l_j$, где $1 \le i \ne j \le n+2$. Тогда получаем

$$P_A^* = \prod_{k=1, k\ne i,j}^{n+2} l_k.$$

Нетрудно заметить, что натуральная сеть является частным случаем множества B-R. Также, каждая прямая l_i максимальна в NL_n. Более того, имеет место (это следует из доказательства утверждения 1.6(5)) следующее хорошо известное

Предложение 2.3. *Предположим, что X есть Π_n-корректное множество. Тогда в X существуют $n+2$ максимальных прямых тогда и только тогда, когда X является натуральной сетью Чанга и Яо.*

Далее мы приводим обобщение натуральной сети Чанга и Яо.

Определение 2.2. *Скажем, что множество X, $\#X = N$, удовлетворяет обобщенной геометрической характеристике для Π_n, или кратко $GC_n(2)$, если для каждого фиксированного узла существуют k прямых и p коник, $k+2p \le n$, содержащих все узлы X, кроме фиксированного, другими словами, если фундаментальный многочлен каждого узла множества X является произведением прямых и/или коник.*

Пусть $A \in X$ и $g_1, ..., g_{k+p}$, $k+2p \le n$, вышеуказанные прямые и коники. Тогда условие $GC_n(2)$ означает, что

$$P_A^* = g_1 ... g_{k+p}.$$

Таким образом узел A использует прямые и коники g_i.

Лемма 2.1. *Предположим $X, \#X = N$, удовлетворяет свойству $GC_n(2)$. Тогда для каждого фиксированного узла существует единственное множество k прямых и p коник, $k + 2p = n$, содержащее все остальные узлы, кроме фиксированного. Более того, каждая из этих прямых проходит через минимум 2 узла, а каждая из этих коник проходит через минимум 5 узлов.*

Доказательство. Поскольку фундаментальные многочлены существуют для всех узлов множества X, тогда из утверждения 1.2 получаем, что X является Π_n-корректным. Следовательно, фундаментальные многочлены единственны с точностью до постоянного множителя. Следовательно, для каждой $A \in X$, существует единственное множество прямых и коник составляющих p_A^*, и их общая степень равняется n, поскольку, в противном случае, степень p_A^* будет меньше, чем n, и умножая этот многочлен прямой или коникой не содержащей узел A, получим другой p_A^*. Также, каждая прямая и коника должны содержать не менее 2 и 5 узлов, соответственно, поскольку, в противном случае, заменяя их другими прямой и коникой, соответственно, опять получим другой p_A^*. □

Далее приводим сеть удовлетворяющий $GC_n(2)$.

Обобщение натуральной сети ($NL_n(2)$). Задано k прямых $l_1, ..., l_k$ и p коник $q_1, ..., q_p$ с $n + 2 = k + 2p$ так, что

(1) Каждая пара прямых имеет точку пересечения,
(2) Каждые прямая и коника пересекаются в двух точках,
(3) Каждая пара коник пересекается в четырех точках,
(4) Каждая тройка прямых и/или коник имеет пустое пересечение.

Все точки пересечения назовем черными. Добавим по одной точке на каждой конике, отличную от черных точек, и назовем их белыми. Обозначим через X множество состоящее из всех этих черных и белых точек. Его назовем $NL_n(2)$ множеством.

Из доказательства утверждения 1.6 (5) следует, что каждая l_i и коника q_j максимальны в X и $\#X = \binom{n+2}{2}$.

Предложение 2.4. *Любое $NL_n(2)$ множество X является Π_n-корректным.*

Действительно, нетрудно заметить, что множество $NL_n(2)$ является частным случаем множества B-R(2). Следовательно, согласно утверждению 2.2, X является Π_n-корректным.

Предложение 2.5. *Любое* $NL_n(2)$ *множество* X *удовлетворяет условию* $GC_n(2)$.

Доказательство. Согласно определению 2.2, достаточно проверить, что фундаментальный многочлен каждого узла множества X является произведением прямых и/или коник. Рассмотрим любой узел $A \in X$.

(1) Пусть $A = l_i \cap l_j$, где $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$. Тогда

$$P_A^* = \prod_{\nu=1,\nu\neq i,j}^{k} l_\nu \prod_{\mu=1}^{p} q_\mu.$$

(2) Пусть $A = l_i \cap q_j$, где $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq p$. Тогда

$$P_A^* = l \prod_{\nu=1,\nu\neq i}^{k} l_\nu \prod_{\mu=1,\mu\neq j}^{p} q_\mu,$$

где l прямая, проходящая через два оставшихся узла.

(3) Пусть $A = q_i \cap q_j$, где $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq p$. Тогда

$$P_A^* = q \prod_{\nu=1}^{k} l_\nu \prod_{\mu=1,\mu\neq i,j}^{p} q_\mu,$$

где q коника, проходящая через пять оставшихся узлов.

(4) Пусть $A \in q_j$ белый узел, где $1 \leq j \leq p$. Тогда

$$P_A^* = \prod_{\nu=1}^{k} l_\nu \prod_{\mu=1,\mu\neq j}^{p} q_\mu.$$

□

Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.6. *Предположим, что* X *есть* Π_n*-корректное множество. Тогда в* X *существуют максимальные прямые и/или коники суммарной степени* $n+2$ *тогда и только тогда, когда* X *является множеством* $NL_n(2)$.

Действительно, это следует из доказательства утверждения 1.6 (5).

3. Гипотеза Гаски-Маэсту

Гипотеза 3.1. *(Гаска, Маэсту* [5]*) Пусть X удовлетворяет свойству GC_n. Тогда существует прямая проходящая через $n+1$ точек X, т. е. максимальная прямая.*

До настоящего времени это подтверждено только для степеней $n \leq 4$. Доказательства очевидны в случаях степеней $n \leq 3$. В случае $n = 4$ известны три доказательства (см. [2], [3], [7]).

Гипотеза означает, что каждое GC_n множество в то же время является B-R множеством в Π_n. Действительно, предположим, что гипотеза верна, X удовлетворяет свойству GC_n и l_1 прямая проходящая через $n+1$ узла X. Тогда, чтобы найти прямую l_2 с n узлами вне l_1 достаточно проверить, что множество $X^{'} := X \backslash l_1$, $\#X^{'} = N_{n-1}$, удовлетворяет свойству GC_{n-1}. Это следует из того, что все узлы $X^{'}$ используют l_1. Действительно, тогда каждый узел $A \in X^{'}$ имеет фундаментальный многочлен с линейными множителями:

$$P^*_{A,X'} = P^*_{A,X}/l_1 \in \Pi_{n-1}.$$

Продолжая таким образом, находим следующие прямые $l_2, ..., l_{n+1}$. Далее приводим аналогичную гипотезу для $GC_n(2)$ множества.

Гипотеза 3.2. *Пусть X удовлетворяет свойству $GC_n(2)$. Тогда существует прямая, проходящая через $n+1$ точек X и/или коника, проходящая через $2n+1$ точек X, т. е. максимальная прямая и/или коника.*

Это очевидно имеет место в случае $n = 2$. Подобным образом, эта гипотеза означает, что каждое $GC_n(2)$ множество в то же время является B-R(2) множеством в Π_n.

В конце мы обобщаем один полезный результат Карникера и Гаски - утверждение 3 из [3] (см. также теорему 3.2 из [7]).

Теорема 3.1. *Предположим $X, \#X = N$, удовлетворяет свойству $GC_n(2)$. Пусть $N_{l_1,...,l_k,q_1,...,q_p}$ множество всех узлов X, которые не находятся на прямых l_i и коник q_j, и не используют по крайней мере одну из них. Обозначим $s := k + 2p$. Тогда*

(1) *Множество* $N_{l_1,...,l_k,q_1,...,q_p}$ *является* Π_{n-s}*-зависимым, если оно не пусто. Более того, оно не имеет ни одного фундаментального многочлена.*

(2) $N_{l_1,...,l_k,q_1,...,q_p} = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда множество* $X^{'} = X \backslash ((\cup_{i=1}^{k} l_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} q_j))$ *удовлетворяет свойству* $GC_{n-s}(2)$*. Более того, имеет место следующее:*

$$p \in \Pi_n,\ p|_{X \backslash X'} = 0 \Rightarrow p = l_1...l_k q_1...q_p r,\ r \in \Pi_{n-s}, \tag{3.1}$$

$$\# X^{'} = N_{n-s}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $Y := N_{l_1,...,l_k,q_1,...,q_p} = \emptyset$. Тогда каждый узел множества $X^{'} = X \backslash ((\cup_{i=1}^{k} l_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} q_j))$ использует все прямые l_i и коники q_j, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., p$. Но тогда каждый узел $A \in X^{'}$ имеет фундаментальный многочлен степени $n - s$ заданный формулой

$$P^{*}_{A,X'} = \frac{P^{*}_{A,X}}{l_1...l_k q_1...q_p} \in \Pi_{n-s}. \tag{3.3}$$

Таким образом $X^{'}$ является Π_{n-s}-независимым. С другой стороны, для каждого $A \in X^{'}$, если $P^{*}_{A,X'}$ является фундаментальным многочленом степени $n-s$ в $X^{'}$, тогда $l_1...l_k q_1...q_p P^{*}_{A,X'}$ - фундаментальный многочлен степени n в X, что означает, что фундаментальные многочлены для каждого $A \in X^{'}$ единственны. Таким образом, $X^{'}$ является Π_{n-s}-корректным и в частности, имеет место (3.2). Кроме того, в силу (3.3), оно удовлетворяет свойству $GC_n(2)$. Далее предположим, что $Y \neq \emptyset$ и $A \in Y$ имеет фундаментальный многочлен $P^{*}_{A,Y} \in \Pi_{n-s}$. Рассмотрим следующий многочлен:

$$p = P^{*}_{A,X} - \gamma l_1...l_k q_1...q_p P^{*}_{A,Y} \in \Pi_n, \tag{3.4}$$

где γ выбрана так, что $p(A) = 0$. Таким образом p обращается в нуль на Y и, следовательно, и на $X \cap ((\cup_{i=1}^{k} l_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} q_j))$. Согласно формуле Лагранжа, оно является линейной комбинацией фундаментальных многочленов тех узлов, где p не обращается в нуль. Таким образом получаем

$$p = \sum_{B \in Z} \alpha_i P^{*}_{B,X}, \tag{3.5}$$

где $Z = X \backslash (Y \cup (\cup_{i=1}^{k} l_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} q_j))$. Нетрудно заметить, что фундаментальные многочлены в правой части являются именно теми, которые используют все прямые и коники $l_i,\ q_j,\ i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., p$. Таким образом p, и следовательно, в силу (3.4), $P^*_{A,X}$ использует все эти l_i, q_j, что противоречит определению множества Y. Наконец отметим, что в случае $Y = \emptyset$ получаем, что $Z = X'$. Следовательно, $p \in \Pi_n$, $p|_{X \setminus X'} = 0$ влечет (3.5), таким образом установливая (3.1). $\square$

Следствие 3.1. *Пусть X, $\#X = N$, удовлетворяет свойству $GC_n(2)$ и N_l - множество всех узлов X, которые не находятся на прямой l и не используют ее. Тогда*

(1) *N_l - непустое Π_{n-1}-зависимое множество, если прямая l проходит через $\leq n$ узлов. Более того, N_l не имеет ни одного фундаментального многочлена.*

(2) *$N_l = \emptyset$, если прямая l проходит через $n+1$ узлов.*

Следствие 3.2. *Пусть X, $\#X = N$, удовлетворяет свойству $GC_n(2)$ и N_q - множество всех узлов X, которые не находятся на конике q и не используют ее. Тогда*

(1) *N_q - непустое Π_{n-2}-зависимое множество, если коника q проходит через $\leq 2n$ узлов. Более того, N_q не имеет ни одного фундаментального многочлена.*

(2) *$N_q = \emptyset$, если коника q проходит через $2n+1$ узлов.*

Abstract. The well-known constructions of correct knots for the Lagrange two-dimensional interpolation, as those of Chung-Yao and Berzolari-Radon, the knots lie on some sets of straight lines. The paper generalizes these constructions to the case of sets of straight lines and conics.

Список литературы

[1] L. Berzolari, "Sulla determinazione di una curva o di una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione", Rendiconti del R. Instituto Lombardo, Series (2), **47**, 24 (1914).

[2] J. R. Busch, "A note on Lagrange interpolation in $\mathbb{R}$", Revista de la Union Matematica Argentina, **36**, 33 – 38 (1990).

[3] J. M. Carnicer, M. Gasca, "A conjecture on multivariate polynomial interpolation", RACSAM, **95**, 145 – 153 (2001).

[4] K. C. Chung and T. H. Yao, "On latticies admitting unique Lagrange representations", SIAM J. Numer. Anal., **14**, 735 – 753 (1977).

[5] M. Gasca, J. I. Maeztu, "On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$", Numer. Math., **39**, 1 – 14 (1982).

[6] H. Hakopian, "On a class of Hermite interpolation problems", Adv. Comput. Math., **12** 303 – 309 (2000).

[7] H. A. Hakopian, Kurt Jetter, Georg Zimmermann: "A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$", Journal of Approximation Theory 159(2): 224 – 242 (2009).
[8] H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, "Vandermonde matrices for intersection points of curves", Jaen J. Approx., **1** (1), 67 – 81 (2009).
[9] J. Radon, "Zur mechanischen kubatur", Monatsh. Math., **52**, no. 4, 286 – 300 (1948).

Поступила 13 мая 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 59-70.

ON A SUBCLASS OF THE CLASS OF GENERALIZED DOUGLAS-WEYL METRICS

A. TAYEBI, E. PEYGHAN

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Qom, Qom, Iran
Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, Arak, Iran
E-mails: *akbar.tayebi@gmail.com*; *epeyghan@gmail.com*

Abstract. We study the class of Finsler metrics whose Douglas curvature is constant along any Finslerian geodesics. This class of Finsler metrics is a subclass of the class of generalized Douglas-Weyl metrics and contains the class of Douglas metrics as a special case. We find a condition under which this class of Finsler metrics reduces to the class of Landsberg metrics. Then we show this class of Landsberg metrics contains the class of R-quadratic metrics.

MSC2010 number: 53C60, 53C25.
Keywords: Douglas space; Landsberg metric; R-quadratic metric.

1. Introduction

In Finsler geometry, every Finsler metric F on a manifold M induces a spray $\mathbf{G} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ which determines the geodesics, where $G^i = G^i(x,y)$ are called the spray coefficients of $\mathbf{G}$. A Finsler metric F is called a Berwald metric if $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k$ are quadratic in $y \in T_xM$ for any $x \in M$ (see [17], [18], [11]). Let

$$D^i{}_{jkl} := \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left(G^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}y^i\right).$$

It is easy to verify that $\mathcal{D} := D^i{}_{jkl}\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$ is a well-defined tensor on slit tangent bundle TM_0. We call $\mathcal{D}$ the Douglas tensor. The Douglas tensor $\mathcal{D}$ is a non-Riemannian projective invariant, namely, if two Finsler metrics F and $\bar{F}$ are projectively equivalent, $G^i = \bar{G}^i + Py^i$, where $P = P(x,y)$ is positively y-homogeneous of degree one, then the Douglas tensor of F is the same as that of $\bar{F}$ (see [9]). Finsler metrics with vanishing Douglas tensor are called Douglas metrics. The notion of Douglas curvature was proposed by B*á*cs*ó* and Matsumoto as a generalization of Berwald curvature [3].

On the other hand, there is another projective invariant in Finsler geometry, namely ${D^i}_{jkl|m}y^m = T_{jkl}y^i$ that is hold for some tensor T_{jkl}, where ${D^i}_{jkl|m}$ denotes the horizontal covariant derivatives of ${D^i}_{jkl}$ with respect to the Berwald connection of Finsler metric F. This equation implies that the rate of change of the Douglas curvature along a geodesic is tangent to the geodesic [7]. It is known that this class is closed under projective change and all metrics with vanishing Douglas curvature or vanishing Weyl curvature belong to it. Thus Finsler metrics in this class are called generalized Douglas-Weyl metrics [4].

In this paper, we study the class of Finsler metrics whose Douglas curvature satisfies

$$ {D^i}_{jkl|s}y^s = 0. \tag{1.1} $$

The geometric meaning of (1.1) is that on this new class of Finsler spaces, the Douglas tensor is constant along any geodesics. It is easy to see that, this class of Finsler metrics is a subclass of the class of generalized Douglas-Weyl metrics. Here, we show that this condition is not projectively invariant. To prove this let two Finsler metrics F and $\bar{F}$ are projectively equivalent, i.e. $G^i = \bar{G}^i + Py^i$, where $P = P(x,y)$ is positively y-homogeneous of degree one. Then we have

$$ G^i_j = \bar{G}^i_j + P_j y^i + P\delta^i_j, \tag{1.2} $$

$$ G^i_{jk} = \bar{G}^i_{jk} + P_{jk}y^i + P_j\delta^i_k + P_k\delta^i_j. \tag{1.3} $$

Let ${D^i}_{jkl|s}y^s = 0$. Then, we have

$$ \left[\frac{\partial {D^i}_{jkl}}{\partial x^s} - \frac{\partial {D^i}_{jkl}}{\partial y^m} G^m_s + G^i_{sm}{D^m}_{jkl} - G^m_{sj}{D^i}_{mkl} - G^m_{sk}{D^i}_{jml} - G^m_{sl}{D^i}_{jkm}\right] y^s = 0. \tag{1.4} $$

Putting (1.2) and (1.3) in (1.4) imply that

$$ \begin{aligned} \Big[\frac{\partial {D^i}_{jkl}}{\partial x^s} &- \frac{\partial {D^i}_{jkl}}{\partial y^m}(\bar{G}^m_s + P_m y^s + P\delta^m_s) + (\bar{G}^i_{sm} + P_{sm}y^i + P_s\delta^i_m + P_m\delta^i_s){D^m}_{jkl} \\ &- (\bar{G}^m_{sj} + P_{sj}y^m + P_s\delta^m_j + P_j\delta^m_s){D^i}_{mkl} \\ &- (\bar{G}^m_{sk} + P_{sk}y^m + P_s\delta^m_k + P_k\delta^m_s){D^i}_{jml} \\ &- (\bar{G}^m_{sl} + P_{sl}y^m + P_s\delta^m_l + P_l\delta^m_s){D^i}_{jkm}\Big] y^s = 0. \end{aligned} \tag{1.5} $$

Since the Douglas tensor is invariant under any projective relation, i.e., $D^i{}_{jkl} = \bar{D}^i{}_{jkl}$, then (1.5) reduces to the following equality:

$$\bar{D}^i{}_{jkl|s} y^s + P_m \bar{D}^m_{jkl} y^i = 0. \tag{1.6}$$

Thus by (1.6), we conclude that the class of Finsler metrics satisfies (1.1) is not closed under projective relations.

Other than Douglas curvature, there are several important non-Riemannian quantities: the Cartan torsion **C**, the Berwald curvature **B**, the mean Berwald curvature **E** and the Landsberg curvature **L**, etc (see [12], [14] – [16], [19]). The study shows that the above mentioned non-Riemannian quantities are closely related to the Douglas metrics, namely Bácsó-Matsumoto proved that every Douglas metric with vanishing Landsberg curvature is a Berwald metric [2]. Is there any other interesting non-Riemannian quantity with such property?

In [12], Shen find a new non-Riemannian quantity for Finsler metrics that is closely related to the **E**-curvature and call it $\bar{\mathbf{E}}$-curvature. Recall that $\bar{\mathbf{E}}$ is obtained from the mean Berwald curvature by the covariant horizontal differentiation along geodesics.

In this paper, we prove that every complete Finsler space satisfies (1.1) with bounded mean Cartan tensor and vanishing $\bar{\mathbf{E}}$-curvature is a Landsberg metric. More precisely, we prove the following statement.

Theorem 1.1. *Let (M, F) be a complete Finsler space satisfying (1.1) with bounded Cartan tensor. If $\bar{\mathbf{E}}$-curvature of F is vanishing, then F is a Landsberg metric. In particular, every compact Finsler space satisfying (1.1) with $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ is a Landsberg space.*

The converse of Theorem 1.1 is not true. See the following example.

Example 1. *Consider the following Finsler metric on the unit ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$,*

$$F(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - < x, y >^2)}}{1 - |x|^2} + \frac{< x, y >}{1 - |x|^2}, \quad y \in T_x\mathbb{B}^n = \mathbb{R}^n$$

where $|.|$ and $<, >$ denote the Euclidean norm and inner product in $\mathbb{R}^n$, respectively. F is called the Funk metric which is a positively complete Finsler metric on $\mathbb{B}^n$ with bounded Cartan tensor [12]. *The Funk metric is a Douglas metric with vanishing $\bar{\mathbf{E}}$-curvature while is not Landsbergian.*

For every weakly Berwald metric, the $\bar{\mathbf{E}}$-curvature is vanishing. Then by Theorem 1.1, we have the following result.

Corollary 1.1. *Let (M,F) be a compact Finsler space satisfying (1.1). Suppose that F is a weakly Berwald metric. Then F is a Landsberg metric.*

For a Randers metric $F=\alpha+\beta$, the Cartan tensor is bounded $\|\mathbf{C}\|\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$ (see [12]). In [6], Matsumoto showed that $F=\alpha+\beta$ is a Landsberg metric if and only if β is parallel. In [5], M. Hashiguchi and I. Ichijyō showed that for a Randers metric $F=\alpha+\beta$, if β is parallel, then F is a Berwald metric. Then by Theorem 1.1, we obtain the following corollary.

Corollary 1.2. *Let (M,F) be a Finsler space satisfying (1.1). Suppose that F is a complete Randers metric on M. Then F is a Berwald metric if and only if it is a weakly Berwald metric.*

It is known that on a Douglas manifold (M,F), the Finsler metric F is a Landsberg metric if and only if it is a Berwald metric (see [1], [2]). Hence, by Theorem 1.1, we get the following assertion.

Corollary 1.3. *Every compact Douglas metric with vanishing $\bar{\mathbf{E}}$-curvature is a Berwald metric.*

For a vector $y\in T_xM_0$, the Riemann curvature $R_y:T_xM\to T_xM$ is defined by $R_y(u):=R^i{}_k(y)u^k\frac{\partial}{\partial x^i}$, where

$$R^i{}_k(y)=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}y^j+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

The family $R:=\{R_y\}_{y\in TM_0}$ is called the Riemann curvature [10], [12]. A Finsler metric F is said to be *R-quadratic* if R_y is quadratic in $y\in T_xM$ at each point $x\in M$. In this paper, we prove the following theorem.

Theorem 1.2. *Every R-quadratic Finsler metric satisfies (1.1).*

There are many connections in Finsler geometry [13]. In this paper, we set the Berwald connection on Finsler manifolds. The h- and v- covariant derivatives of a Finsler tensor field are denoted by “ | "and “, "respectively.

2. Preliminaries

Let M be a n-dimensional C^∞ manifold. Denote by T_xM the tangent space at $x \in M$, by $TM = \cup_{x\in M} T_xM$ the tangent bundle of M, and by $TM_0 = TM \setminus \{0\}$ the slit tangent bundle on M. A Finsler metric on M is a function $F : TM \to [0, \infty)$ which has the following properties: (i) F is C^∞ on TM_0; (ii) F is positively 1-homogeneous on the fibers of tangent bundle TM, and (iii) for each $y \in T_xM$, the following quadratic form $\mathbf{g}_y$ on T_xM is positive definite,

$$\mathbf{g}_y(u, v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + su + tv)\right]|_{s,t=0}, \quad u, v \in T_xM.$$

Let $x \in M$ and $F_x := F|_{T_xM}$. To measure the non-Euclidean feature of F_x, define $\mathbf{C}_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$ by

$$\mathbf{C}_y(u, v, w) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{g}_{y+tw}(u, v)\right]|_{t=0}, \quad u, v, w \in T_xM.$$

The family $\mathbf{C} := \{\mathbf{C}_y\}_{y\in TM_0}$ is called Cartan torsion. It is well known that $\mathbf{C} = 0$ if and only if F is Riemannian.

For $y \in T_xM_0$, define $\mathbf{L}_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$ by

$$\mathbf{L}_y(u, v, w) := L_{ijk}(y)u^i v^j w^k,$$

where $L_{ijk} := C_{ijk|s}y^s$. The family $\mathbf{L} := \{\mathbf{L}_y\}_{y\in TM_0}$ is called Landsberg curvature. F is called Landsberg metric if $\mathbf{L} = 0$.

Given a Finsler manifold (M, F), a global vector field G is induced by F on TM_0, which in a standard coordinate (x^i, y^i) for TM_0 is given by $\mathbf{G} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i}$, where $G^i(y)$ are local functions on TM given by

$$G^i := \frac{1}{4}g^{il}\Big\{\frac{\partial^2[F^2]}{\partial x^k \partial y^l}y^k - \frac{\partial[F^2]}{\partial x^l}\Big\}, \quad y \in T_xM.$$

$\mathbf{G}$ is called associated spray to (M, F). The projection of an integral curve of $\mathbf{G}$ is called geodesic in M. In local coordinates, a curve $c(t)$ is a geodesic if and only if its coordinates $(c^i(t))$ satisfy $\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0$ (see [14]).

For $y \in T_xM_0$, define $\mathbf{B}_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to T_xM$ and $\mathbf{E}_y : T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$ by

$$\mathbf{B}_y(u, v, w) := B^i_{j\ kl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \quad \mathbf{E}_y(u, v) := E_{jk}(y)u^j v^k$$

where

$$B^i{}_{jkl}(y) := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y), \quad E_{jk}(y) := \frac{1}{2}B^m{}_{jkm}(y),$$

$u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ and $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ are called the Berwald curvature and mean Berwald curvature respectively. A Finsler metric is called a Berwald metric and weakly Berwald metric if $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ and $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, respectively [12].

The quantity $\mathbf{H}_y = H_{ij} dx^i \otimes dx^j$ is defined as the covariant derivative of $\mathbf{E}$ along geodesics [8]. More precisely

$$H_{ij} := E_{ij|m} y^m$$

The Riemann curvature $\mathbf{R}_y = R^i{}_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}|_x : T_xM \to T_xM$ is a family of linear maps on tangent spaces, defined by

$$R^i{}_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

For a flag $P = \mathrm{span}\{y, u\} \subset T_xM$ with flagpole y, the flag curvature $\mathbf{K} = \mathbf{K}(P, y)$ is defined by

$$\mathbf{K}(P, y) := \frac{\mathbf{g}_y(u, \mathbf{R}_y(u))}{\mathbf{g}_y(y, y)\mathbf{g}_y(u, u) - \mathbf{g}_y(y, u)^2},$$

where $\mathbf{g}_y = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$. We say that a Finsler metric F is of scalar curvature if for any $y \in T_xM$, the flag curvature $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x, y)$ is a scalar function on the slit tangent bundle TM_0. If $\mathbf{K} = constant$, then F is said to be of constant flag curvature. A Finsler metric F is said to be *R-quadratic* if R_y is quadratic in $y \in T_xM$ at each point $x \in M$. Let

$$R^i{}_{jkl}(x, y) := \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y^j}\left\{\frac{\partial R^i_k}{\partial y^l} - \frac{\partial R^i_l}{\partial y^k}\right\},$$

where $R^i{}_{jkl}$ is the Riemann curvature of Berwald connection. Then we have $R^i_k = R^i_{j\ kl}(x, y) y^j y^l$. Therefore R^i_k is quadratic in $y \in T_xM$ if and only if $R^i_{j\ kl}$ are functions of position alone. Indeed a Finsler metric is R-quadratic if and only if the h-curvature of Berwald connection depends on position only in the sense of B*á*cs*ó*-Matsumoto [3]. By means of $\mathbf{E}$-curvature, we can define $\bar{\mathbf{E}}_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$ by

$$\bar{\mathbf{E}}_y(u, v, w) := \bar{E}_{jkl}(y) u^i v^j w^k,$$

where $\bar{E}_{ijk} := E_{ij|k}$. We call it $\bar{\mathbf{E}}$-curvature. From a Bianchi identity, we have

$$B^i{}_{jml|k} - B^i{}_{jkm|l} = R^i{}_{jkl.m}$$

where R^i_{jkl} is the Riemannian curvature of Berwald connection [12]. This implies that $\bar{E}_{jlk} - \bar{E}_{jkl} = 2R^m_{jkl,m}$. Then $\bar{E}_{ijk}$ is not totally symmetric in all three of its indices. It is easy to see that, on R-quadratic Finsler metrics, $\bar{E}_{ijk} = \bar{E}_{ikj}$ holds. By definition, if $\bar{\mathbf{E}} = 0$, then $\mathbf{E}$-curvature is covariantly constant along all horizontal directions on TM_0.

3. Proof of Theorem 1.1

To prove Theorem 1.1, we need to prove that every complete Finsler metric with $L_{ijk|m}y^m = 0$ and bounded Cartan torsion must be a Landsberg metric. First, we remark the following.

Remark 1. *Let (M, F) be a Finsler space and $c : [a, b] \to M$ be a geodesic. For a parallel vector field $V(t)$ along c,*

$$g_{\dot{c}}(V(t), V(t)) = constant. \tag{3.1}$$

Now, we consider the Finsler metrics with Landsberg curvatures satisfying $L_{ijk|m}y^m = 0$.

Lemma 3.1. *Let (M, F) be a complete Finsler space with bounded Cartan tensor. Suppose that the Landsberg curvature of F satisfies*

$$L_{ijk|s}y^s = 0. \tag{3.2}$$

Then F is a Landsberg space.

Proof. Take an arbitrary unit vector $y \in T_xM$ and an arbitrary vector $v \in T_xM$. Let $c(t)$ be the geodesic with $\dot{c}(0) = y$ and $V(t)$ be the parallel vector field along c with $V(0) = v$. Define $\mathbf{C}(t)$ and $\mathbf{L}(t)$ as following

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_{\dot{c}}(V(t), V(t), V(t)), \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_{\dot{c}}(V(t), V(t), V(t)).$$

By definition of $\mathbf{L}_y$, we get:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{C}^{'}(t).$$

It follows from (3.2) that:

$$\mathbf{L}^{'}(t) = 0. \tag{3.3}$$

The equation (3.3) implies:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(0).$$

Then we have

$$\mathbf{C}(t) = t\,\mathbf{L}(0) + \mathbf{C}(0).$$

Suppose that $\mathbf{C}_y$ is bounded, i.e., there is a constant $Q < \infty$ such that

$$||\mathbf{C}||_x := \sup_{y\in T_xM_0} \sup_{v\in T_xM} \frac{\mathbf{C}_y(v,v,v)}{[g_y(v,v)]^{\frac{3}{2}}} \le Q.$$

By (3.1), $T := g_{\dot{c}}(V(t),V(t)) = \textit{constant}$ is positive constant. Thus

$$|\mathbf{C}(t)| \le QT^{\frac{3}{2}} < \infty,$$

and $\mathbf{C}(t)$ is a bounded function on $[0,\infty)$. This implies

$$\mathbf{L}_y(v,v,v) = \mathbf{L}(0) = 0.$$

Therefore $\mathbf{L} = 0$ and F is a Landsberg metric. □

Lemma 3.2. *Let (M,F) be a Finsler space satisfies (1.1) with $\bar{\mathbf{E}} = 0$. Then the Landsberg curvature of F satisfies (3.2).*

Proof.

$$D^i{}_{jkl} = B^i{}_{jkl} - \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i{}_l + E_{kl}\delta^i{}_j + E_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l}y^i\}.$$

Then

$$D^i{}_{jkl|m}y^m = B^i{}_{jkl|m}y^m - \frac{2}{n+1}\{H_{jk}\delta^i{}_l + H_{kl}\delta^i{}_j + H_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l|m}y^m y^i\}. \tag{3.4}$$

On the other hand, the following Ricci identity for E_{ij} holds:

$$E_{jk,l|k} - E_{ij|k,l} = E_{pj}B^p{}_{ikl} + E_{ip}B^p{}_{jkl}. \tag{3.5}$$

It follows from (3.5) that:

$$E_{jk,l|m}y^m = E_{jk|m,l}y^m = [E_{jk|m}y^m]_{,l} - E_{jk|l}.$$

This yield that:

$$E_{jk,l|m}y^m = H_{jk,l} - \bar{E}_{jkl}. \tag{3.6}$$

By (3.4) and (3.6), we get:

$$B^i{}_{jkl|m}y^m = \frac{2}{n+1}\{H_{jk}\delta^i{}_l + H_{kl}\delta^i{}_j + H_{lj}\delta^i{}_k + H_{jk,l}y^i - \bar{E}_{jkl}y^i\}. \tag{3.7}$$

From the assumption, we have:

$$B^i{}_{jkl|m}y^m = 0. \tag{3.8}$$

(3.8) with y_i implies that F satisfies (3.2). □

Proof of Theorem 1.1: By the Lemmas 3.1 and 3.2, we get the proof. □

Corollary 3.1. *Let (M,F) be a compact Finsler space satisfying (1.1). Then $\bar{\mathbf{E}}=0$ if and only if $\mathbf{L}=0$ and $\mathbf{H}=0$.*

Proof. By definition, if $\bar{\mathbf{E}}=0$ then $\mathbf{H}=0$ and by Theorem 1.1, every compact Finsler metric satisfying (1.1) with $\bar{\mathbf{E}}=0$ is a Landsberg metric. Conversely, let F be a Finsler metric satisfying (1.1) with $\mathbf{H}=0$ and $\mathbf{L}=0$. By (3.7), we have

$$B^i{}_{jkl|m}y^m=\frac{2}{n+1}\{H_{jk}\delta^i{}_l+H_{kl}\delta^i{}_j+H_{lj}\delta^i{}_k+H_{jk,l}y^i-\bar{E}_{jkl}y^i\},$$

which implies

$$B^i{}_{jkl|m}y^m=\frac{-2}{n+1}\bar{E}_{jkl}y^i. \tag{3.9}$$

Contacting (3.9) with y_i and using $y_{i|m}=0$ and $y_iB^i{}_{jkl}=-2L_{jkl}$ yields

$$L_{jkl|m}y^m=\frac{F^2}{n+1}\bar{E}_{jkl}.$$

Since $\mathbf{L}=0$ then $\bar{\mathbf{E}}=0$. □

4. Proof of Theorem 1.2

In this section, we prove that every R-quadratic metric is a Finsler metric satisfies (1.1). To prove this, we need the following.

Lemma 4.1. *Let (M,F) be a Finsler manifold and F is R-quadratic. Then the Berwald curvature of F is constant along any geodesics.*

Proof. The curvature form of Berwald connection is:

$$\Omega^i{}_j=d\omega^i{}_j-\omega^k{}_j\wedge\omega^i{}_k=\frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l-B^i{}_{jkl}\omega^k\wedge\omega^{n+l}. \tag{4.1}$$

For the Berwald connection, we have the following structure equation:

$$dg_{ij}-g_{jk}\Omega^k{}_i-g_{ik}\Omega^k{}_j=-2L_{ijk}\omega^k+2C_{ijk}\omega^{n+k}. \tag{4.2}$$

Differentiating (4.2) yields the following Ricci identity:

$$\begin{aligned}g_{pj}\Omega^p{}_i-g_{pi}\Omega^p{}_j=-\ &2L_{ijk|l}\omega^k\wedge\omega^l-2L_{ijk,l}\omega^k\wedge\omega^{n+l}-2C_{ijl|k}\omega^k\wedge\omega^{n+l}\\ -\ &2C_{ijl,k}\omega^{n+k}\wedge\omega^{n+l}-2C_{ijp}\Omega^p{}_ly^l.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Differentiating of (4.1) yields:

$$d\Omega_i{}^j-\omega_i{}^k\wedge\Omega_k{}^j+\omega_k{}^j\wedge\Omega_i{}^k=0. \tag{4.4}$$

Define $B^i_{j\ kl|m}$ and $B^i_{j\ kl,m}$ by:

(4.5) $dB^i_{jkl} - B^i_{mkl}\omega^m_i - B^i_{jml}\omega^m_k - B^i_{jkm}\omega^m_l + B^i_{jkl}\omega^i_m = B^i_{jkl|m}\omega^m + B^i_{jkl,m}\omega^{n+m}.$

Similarly, we define $R^i{}_{jkl|m}$ and $R^i{}_{jkl,m}$ by:

(4.6) $dR^i_{jkl} - R^i_{mkl}\omega^m_i - B^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l + R^i_{jkl}\omega^i_m = R^i_{jkl|m}\omega^m + R^i_{jkl,m}\omega^{n+m}.$

From (4.3) – (4.6) we obtain

$$\begin{aligned}
&R^i{}_{jkl|m} + R^i{}_{jlm|k} + R^i{}_{jmk|l} = B^i{}_{jku}R^u{}_{lm} + B^i{}_{jlu}R^u{}_{km} + B^i{}_{klu}R^u{}_{jm},\\
&B^i{}_{jml|k} - B^i{}_{jkm|l} = R^i{}_{jkl,m},\\
&B^i{}_{jkl,m} = B^i{}_{jkm,l}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

By assumption and (4.7) we have:

$$B^i{}_{jkl|m} = B^i{}_{jmk|l},$$

which contacting with y^m, we conclude that:

$$B^i{}_{jkl|m}y^m = 0.$$

This means that the Berwald curvature of F is constant along any geodesics. □

By Lemma 4.1, we have the following result.

Corollary 4.1. *Let (M, F) be a Finsler manifold. If F is R-quadratic then* $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Proof of Theorem 1.2:

$$D^i{}_{jkl} = B^i{}_{jkl} - \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i{}_l + E_{kl}\delta^i{}_j + E_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l}y^i\}.$$

Then

$$D^i{}_{jkl|m}y^m = B^i{}_{jkl|m}y^m - \frac{2}{n+1}\{E_{jk|m}y^m\delta^i{}_l + E_{kl|m}y^m\delta^i{}_j + E_{lj|m}y^m\delta^i{}_k + E_{jk,l|m}y^m y^i\}.$$

It follows from (4.7) that

$$B^i{}_{jkl|m}y^m = R^i{}_{jml,k}y^m.$$

Then we have

$$E_{jk|m}y^m = R^p{}_{jmp,k}y^m.$$

Therefore, we get

$$D^\alpha{}_{jkl|m}y^m = R^\alpha{}_{jml,k}y^m - \frac{2}{n+1}\{R^p{}_{jmp,k}y^m\delta^\alpha_l + R^p{}_{lmp,j}y^m\delta^\alpha_k + R^p{}_{kmp,l}y^m\delta^\alpha_j\}.$$

F is R-quadratic, then we have:

$$D^{\alpha}{}_{jkl|m}y^m = 0.$$

This implies that F satisfies (1.1). □

Hence, on R-quadratic metrics, for any linearly parallel vector fields $U = U(t)$, $V = V(t)$ and $W = W(t)$ along a geodesic $c(t)$, we have

$$\frac{d}{dt}[D_{\dot{c}}(U, V, W)] = 0.$$

The geometric meaning of the above identity is that on R-quadratic metrics the Douglas curvature along a geodesic is constant.

Corollary 4.2. *Let (M, F) be a R-quadratic manifold. Then $\bar{\mathbf{E}} = 0$.*

Proof.

$$D^i{}_{jkl} = B^i{}_{jkl} - \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i{}_l + E_{kl}\delta^i{}_j + E_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l}y^i\}.$$

Then

$$D^i{}_{jkl|m}y^m = B^i{}_{jkl|m}y^m - \frac{2}{n+1}\{H_{jk}\delta^i_l + H_{kl}\delta^i_j + H_{lj}\delta^i_k + E_{jk,l|m}y^m y^i\}.$$

It follows from Lemma 4.1 and Theorem 1.2 that

$$E_{jk,l|m}y^m y^i = 0,$$

and contracting with y_i yields $E_{jk,l|m}y^m = 0$. By considering (3.6), we conclude that $\bar{E}_{ijk} = 0$. This completes the proof. □

Список литературы

[1] S. Bácsó, F. Ilosvay and B. Kis, "Landsberg spaces with common geodesics", Publ. Math. Debrecen, **42**, 139 – 144 (1993).

[2] S. Bácsó and M. Matsumoto, "Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces", Publ. Math. Debrecen, **48**, 357 – 366 (1996).

[3] S. Bácsó and M. Matsumoto, "On Finsler spaces of Douglas type, A generalization of notion of Berwald space", Publ. Math. Debrecen, **51**, 385 – 406 (1997).

[4] S. Bácsó and I. Papp, "A note on a generalized Douglas space", Period. Math. Hung., **48**, 181 – 184 (2004).

[5] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, "On Some special (α, β)-metrics", Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., **8**, 39 – 46 (1975).

[6] M. Matsumoto, "On Finsler spaces with Randers metric and special forms of important tensors", J. Math. Kyoto Univ., **14**, 477 – 498 (1974).

[7] B. Najafi, Z. Shen and A. Tayebi, "On a projective class of Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen. **70**, 211 – 219 (2007).

[8] B. Najafi, Z. Shen and A. Tayebi, "Finsler metrics of scalar flag curvature with special non-Riemannian curvature properties", Geom. Dedicata., **131**, 87 – 97 (2008).

[9] B. Najafi and A. Tayebi, "Finsler Metrics of scalar flag curvature and projective invariants", Balkan. J. Geom. Appl., **15**, 90 – 99 (2010).

[10] B. Najafi, B. Bidabad and A. Tayebi, "On R-quadratic Finsler Metrics", Iran. J. Sci. Tech. Trans A, **31**, no. A4, 439 – 443 (2007).
[11] E. Peyghan and A. Tayebi, "Generalized Berwald metrics", Turk. J. Math, **35**, 1 – 10 (2011).
[12] Z. Shen, Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001).
[13] A. Tayebi, E. Azizpour and E. Esrafilian, "On a family of connections in Finsler geometry", Publ. Math. Debrecen., **72**, 1 – 15 (2008).
[14] A. Tayebi and B. Najafi, "On m-th root Finsler metrics", J. Geom. Phys., **61**, 1479 – 1484 (2011).
[15] A. Tayebi and B. Najafi , "On m-th root metrics with special curvature properties", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **349**, 691 – 693 (2011).
[16] A. Tayebi and E. Peyghan, "On Ricci tensors of Randers metrics", Journal of Geometry and Physics, **60**, 1665 – 1670 (2010).
[17] A. Tayebi and E. Peyghan, "Special Berwald metrics", Symm. Int. Geom. Meth. Appl. (SIGMA), **6**, no. 008, 9 pages (2010).
[18] A. Tayebi and E. Peyghan, "On a special class of Finsler metrics", Iran. J. Sci. Tech. Trans A, **33**, no. A2, 179 – 186 (2009).
[19] A. Tayebi and E. Peyghan, "On a class of Riemannian metrics arising from Finsler structures", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **349**, 319 – 322 (2011).

Поступила 29 июля 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 71-80.

ОБ ОДНОМ ПАРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ПОЛУКОНСЕРВАТИВНОМ СЛУЧАЕ

В. В. ТЕР-АВЕТИСЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *van88teravetisyan@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается парное интегральное уравнение на всей прямой относительно некоторой искомой функции f. Предполагается, что ядерные функции уравнения четные и представляются в виде суперпозиции экспонент. Уравнение приводится к системе интегральных уравнений на положительной полуоси относительно двух функций: $f_1(x) = f(x)$ и $f_2(x) = f(-x)$. Применяя факторизационный метод и используя решение уравнения Амбарцумяна, получается система относительно преобразований Лапласа α_1, α_2 функций f_1, f_2. В полуконсервативном случае, при некоторых условиях на свободный член доказывается теорема существования и единственности решения этой системы. Представлен процесс построения функций α_1, α_2 путем последовательных приближений. Описан метод построения решения (f_1, f_2) посредством функций α_1, α_2.

MSC2010 number: 45E10.

Ключевые слова: Парное уравнение; факторизация, уравнение Амбарцумяна; метод дискретных ординат.

1. Введение

Среди интегральных уравнений свертки важное место занимают следующие два класса уравнений на всей прямой:

а) парное уравнение

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)f(t)dt, \ x > 0, \\ f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)f(t)dt, \ x < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $K_j \in L_1(-\infty, \infty), \ j = 1, 2,$

б) уравнение с двумя ядрами

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) является сопряженным к уравнению (1.1).

Методами гармонического анализа разработана стройная теория разрешимости уравнений (1.1) и (1.2). Необходимым условием однозначной разрешимости уравнений (1.1) и (1.2) является выполнение условий не вырождения символов:

$$1-\overline{K}_j(s)\neq 0,\quad -\infty<s<+\infty,\ j=1,2, \tag{1.3}$$

где $\overline{K}_j(s)$ являются преобразованиями Фурье функций $K_j(x)$. Теория, изложенная в [1]-[3] охватывает не особые уравнения и некоторые частные случаи особых уравнений с не вырождающимися символами. В работе Л. Г. Арабаджяна [4] получены результаты по разрешимости уравнения с двумя ядрами (1.2) в некоторых так называемых консервативных или полуконсервативных случаях. В этих случаях хотя бы одно из условий (1.3) нарушается. Основным результатом работы [4] по разрешимости неоднородного уравнения (1.2) есть следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть в уравнении* (1.2) *выполняются условия*

$$g\in L_1(R),\quad 0\le K_j\in L_1(R),\ \int_{-\infty}^{\infty}K_j(t)dt=1,\ j=1,2.$$

Пусть, кроме того, существуют $\omega_j^{\pm}=\int_0^{\infty}tK_j(\pm t)dt<+\infty,\ j=1,2,$ *и имеет место одно из следующих условий:*

1) $\omega_1>0,\ \omega_2<0;$

2) $\omega_1>0,\ \omega_2\ge 0;$

3) $\omega_1\le 0,\ \omega_2<0,$

где $\omega_j=\omega_j^+-\omega_j^-,\ j=1,2.$ *Тогда это уравнение обладает локально интегрируемым на* R *решением* f*.*

Аналогичные результаты по уравнению (1.1) не известны. Предполагается, что ядерные функции $K_j\ge 0,\ j=1,2$ четные и представлены в виде суперпозиции экспонент:

$$K_j(x)=\int_a^b e^{-|x|s}d\sigma_j(s),\ j=1,2, \tag{1.4}$$

где $0\le a<b\le\infty$, а σ_1 и σ_2 - неубывающие функции на (a,b). Нами будут рассмотрены вопросы разрешимости и построения решения системы уравнений (1.1) в полуконсервативном случае, т.е. когда $\lambda_1=1,\lambda_2<1$, где

$$\lambda_j=\int_{-\infty}^{\infty}K_j(x)dx=2\int_a^b\frac{1}{s}d\sigma_j(s),\ j=1,2.$$

Запишем (1.1) в виде следующей системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x) + \int_0^\infty K_1(x-t) f_1(t) dt + \int_0^\infty K_1(x+t) f_2(t) dt \\ f_2(x) = g_2(x) + \int_0^\infty K_2(x-t) f_2(t) dt + \int_0^\infty K_2(x+t) f_1(t) dt, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

где $f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f(-x),\ x > 0$ новые искомые функции и $g_1(x) = g(x),\ g_2(x) = g(-x),\ x > 0$. Предполагается, что

$$0 \leq g_j \in L^+ \equiv L_1(0,\infty), j = 1,2. \tag{1.6}$$

2. Уравнение Винера-Хопфа

В этом параграфе приведем некоторые сведения об уравнениях Винера-Хопфа, которые будут использованы нами в дальнейшем изложении.

2.1. **О диссипативном и консервативном уравнении Винера-Хопфа.** Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt,\ x > 0, \tag{2.1}$$

где $K(x) \geq 0, \quad \lambda = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty K(x) dx \leq 1$.

Пусть $\hat{K}$ - интегральный оператор, фигурирующий в (2.1):

$$(\hat{K} f)(x) = \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt.$$

Этот оператор ограниченно действует в E^+, где E^+ - одно из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ и $C_0[0,\infty)$. В диссипативном случае $\lambda < 1$ уравнение (2.1) является уравнением со сжимающим оператором и обладает единственным решением $f \in E^+$ при $g \in E^+$. В консервативном случае $\lambda = 1$ при произвольном $g \in L^+$ существует основное решение f уравнения (2.1), которое является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением. Это решение обладает асимптотикой

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x^2), \quad x \to \infty.$$

Если свободный член имеет конечный первый момент, то есть

$$\int_0^\infty |g(t)|\, t dt < +\infty, \tag{2.2}$$

то имеет место асимптотика

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x), \quad x \to \infty.$$

2.2. **Уравнение Амбарцумяна.** Рассмотрим случай, когда ядро K представлено в виде

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s),$$

где σ - неубывающая функция на $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ и

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 2\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1.$$

Пусть I - единичный оператор. Имеет место следующая вольтерровая факторизация оператора $I - \hat{K}$ (см. [6]):

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}^-)(I - \hat{V}^+). \tag{2.3}$$

Здесь $\widehat{V}^{\pm}$ - следующие интегральные операторы:

$$(\widehat{V}^+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)f(t)dt, \ (\widehat{V}^- f)(x) = \int_x^{\infty} V(t-x)f(t)dt.$$

Ядерная функция $V \in L^+$ этих операторов определяется согласно формуле:

$$V(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi(s) d\sigma(s) \in L^+, \tag{2.4}$$

где функция $\varphi(s)$ является основным решением уравнения Амбарцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi(p) d\sigma(p). \tag{2.5}$$

Как в диссипативном случае $\lambda < 1$, так и в консервативном случае $\lambda = 1$ основное решение уравнения (2.5) является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением и обладает свойством:

$$\varphi \geq 0, \quad \gamma = \int_0^{\infty} \frac{1}{s} \varphi(s) d\sigma(s) = 1 - \sqrt{1-\lambda} \ (\leq 1). \tag{2.6}$$

2.3. **Резольвентная функция.** Для обращения операторов, фигурирующих в факторизации (2.3) необходимо построить резольвентную функцию Φ. Как при $\lambda < 1$, так и при $\lambda = 1$ функция определяется из следующего уравнения типа восстановления:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)dt.$$

Из вида (2.4) функции V следует, что резольвентная функция может быть представлена в виде (см. [7])

$$\Phi(x) = \int_0^b e^{-xp} d\omega(p) \geq 0,$$

где ω - неубывающая функция. Преобразование Лапласа функции Φ выражается через φ следующим образом:

$$\int_0^\infty \Phi(t)e^{-ts}dt = \varphi(s) - 1. \tag{2.7}$$

В диссипативном случае имеем

$$\Phi \in L_1(0,\infty), \quad \int_0^\infty \Phi(t)dt = \int_0^b \frac{1}{p}d\omega(p) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} < \infty.$$

Тогда

$$(I - \widehat{V}^{\pm})^{-1} = I + \widehat{\Phi}^{\pm}, \tag{2.8}$$

где операторы $\widehat{\Phi}^{\pm}$ определяются посредством

$$(\widehat{\Phi}^{+}f)(x) = \int_0^x \Phi(x-t)f(t)dt, \ (\widehat{\Phi}^{-}f)(x) = \int_x^\infty \Phi(t-x)f(t)dt.$$

В консервативном случае операторы $I - \widehat{V}^{\pm}$ необратимы в пространствах E^{+}. Тогда $\Phi \notin L_{+}$, имеет место асимптотика:

$$\int_0^x \Phi(t)dt = O(x), \quad x \to \infty,$$

а равенство (2.8) понимается как равенство операторов, переводящих пространство L_{+} в пространство ограниченных функций. Основное решение f уравнения (2.1) с $g \in L_{+}$ имеет вид (см. [6])

$$f = (I + \widehat{\Phi}^{+})(I + \widehat{\Phi}^{-})g, \tag{2.9}$$

то есть

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Phi(x-t)F(t)dt,$$

где

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty \Phi(t-x)g(t)dt.$$

3. Решение системы (1.1)

Пусть $M\left(\frac{1}{s}\right)$ банахово пространство функций α на (a,b) с конечной нормой, удовлетворяющие условию $\|\alpha\| = sup\ ess\,(s\,|\alpha(s)|) < \infty$. Из равенств (2.6) следует, что

$$\varphi_j \in M\left(\frac{1}{s}\right), \ j = 1,2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим вопрос существования решения системы (1.5). Введем преобразование Лапласа от функций $f_{1,2}$:

$$\alpha_j(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f_j(t)dt,\ j = 1, 2.$$

Решение системы (1.5) будет построено в классе функций (f_1, f_2) таких, что соответствующие $\alpha_{1,2}$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_j(s) \in M\left(\frac{1}{s}\right),\ j = 1, 2.$$

Из (1.5), учитывая представления (1.4) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \widehat{K}_1)f_1(x) = g_1(x) + \int_a^b e^{-xs}\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ (I - \widehat{K}_2)f_2(x) = g_2(x) + \int_a^b e^{-xs}\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array} \right. \tag{3.2}$$

где $\widehat{K}_{1,2}$ интегральные операторы Винера-Хопфа, определенные посредством:

$$\left(\widehat{K}_j f\right)(x) = \int_0^\infty K_j(x-t)f(t)dt,\ j = 1, 2.$$

Уравнения (3.2) можно рассматривать как уравнения Винера-Хопфа относительно функций f_1 и f_2. При этом правые части этих уравнении играют роль свободных членов. Используя свойство суперпозиции для основных решений, получим следующие соотношения для функций f_1 и f_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \widetilde{g}_1(x) + \int_a^b P_1(x,s)\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ f_2(x) = \widetilde{g}_2(x) + \int_a^b P_2(x,s)\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array} \right. \tag{3.3}$$

где функции P_j и $\widetilde{g}_j$ являются основными решениями следующих уравнении Винера-Хопфа:

$$P_j(x,s) = e^{-xs} + \int_0^\infty K_j(x-t)P_j(t,s)dt, \quad j = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{g}_j(x) = g_j(x) + \int_0^\infty K_j(x-t)\widetilde{g}_j(t)dt, \quad j = 1, 2.$$

В (3.4) s играет роль параметра. Из (2.9) имеем:

$$\widetilde{g}_j(x) = (I + \widetilde{\Phi}_j^+)(I + \widetilde{\Phi}_j^-)g_j, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим следующие функции

$$\widetilde{\alpha}_j(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\widetilde{g}_j(x)dx, \quad j = 1, 2. \tag{3.5}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям системы (3.3) приходим к следующей системе интегральных уравнений относительно α_1, α_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(p) = \widetilde{\alpha}_1(p) + \int_a^b U_1(p,s)\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ \alpha_2(p) = \widetilde{\alpha}_2(p) + \int_a^b U_2(p,s)\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array} \right. \tag{3.6}$$

где

$$U_j(p,s)=\int_0^\infty P_j(x,s)e^{-xp}dx,\quad j=1,2. \tag{3.7}$$

Используя формулы (3.5), для функции $\widetilde{\alpha}_j$ получим следующее представление:

$$\widetilde{\alpha}_j(s)=\left(1+\int_0^\infty \Phi_j(x)e^{-sx}dx\right)\beta_j(s),\quad j=1,2,$$

где

$$\beta_j(s)=\int_0^\infty e^{-xs}\left[g_j(x)+\int_0^\infty \Phi_j(t)g_j(x+t)dt\right]dx,\quad j=1,2. \tag{3.8}$$

Из формулы (2.7) имеем:

$$1+\int_0^\infty \Phi_j(x)e^{-sx}dx=\varphi_j(s),\quad j=1,2.$$

Следовательно имеют место равенства

$$\widetilde{\alpha}_j(s)=\varphi_j(s)\beta_j(s),\quad j=1,2. \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены* (1.6) *и* (2.2). *Тогда*

$$\widetilde{\alpha}_j(s)\in M\left(\frac{1}{s}\right),\quad j=1,2. \tag{3.10}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_j(s)\in M\left(\frac{1}{s}\right)$ (см. (3.1)), то согласно представлению (3.9) достаточно показать, что функции $\beta_j(s)$ ограничены. Как в диссипативном, так и в полуконсервативном случае (учитывая условие (2.2)) имеем

$$g_j(x)+\int_0^\infty \Phi_j(t)g_j(x+t)dt\in L^+.$$

Из представления (3.8) получим, что функции $\beta_j(s)$ ограничены. □

4. О разрешимости (3.6)

Запишем систему (3.6) в операторной форме:

$$\begin{cases}\alpha_1=\widetilde{\alpha}_1+\widehat{U}_1\alpha_2\\ \alpha_2=\widetilde{\alpha}_2+\widehat{U}_2\alpha_1,\end{cases} \tag{4.1}$$

где операторы $\widehat{U}_j$ определяются следующим образом:

$$\left(\widehat{U}_1\alpha\right)(p)=\int_a^b U_1(p,s)\alpha(s)d\sigma_1(s),$$

$$\left(\widehat{U}_2\alpha\right)(p)=\int_a^b U_2(p,s)\alpha(s)d\sigma_2(s).$$

Покажем, что операторы $\widehat{U}_j$ переводят пространство $M\left(\frac{1}{s}\right)$ в себя.

Для этого воспользуемся следующими оценками для решений уравнений (3.4) (см. [6]):

$$\int_a^b P_1(x,s)\frac{1}{s}d\sigma_1(s) = \lambda_1, \tag{4.2}$$

$$\int_a^b P_2(x,s)\frac{1}{s}d\sigma_2(s) \le \lambda_2.$$

Отметим что в соотношении (4.2) имеет место равенство в силу $\lambda_1 = 1$.

Умножая обе части равенств (3.7) на $\frac{1}{s}$ и интегрируя по мере $\sigma_j(s)$ на (a,b) получим

$$\int_a^b U_j(p,s)\frac{1}{s}d\sigma_j(s) \le \frac{\lambda_j}{p}, \quad j = 1,2. \tag{4.3}$$

Пусть $\alpha(s) \in M\left(\frac{1}{s}\right)$. Тогда существует число A такое, что $\alpha(s) \le \frac{A}{s}$. Имеем

$$\left(\widehat{U}_j\alpha\right)(p) = \int_a^b U_j(p,s)\alpha(s)d\sigma_j(s) \le \tag{4.4}$$

$$\le \int_a^b U_j(p,s)\frac{A}{s}d\sigma_j(s) \le \frac{A\lambda_j}{p},$$

что означает, что $\left(\widehat{U}_j\alpha\right)(p) \in M\left(\frac{1}{p}\right)$. Из оценок (4.3) и (4.4) следует также, что $\left\|\widehat{U}_j\right\| \le \lambda_j$. Операторы $\widehat{U}_1\widehat{U}_2$ и $\widehat{U}_2\widehat{U}_1$ действуют в пространстве $M\left(\frac{1}{s}\right)$ и для норм этих операторов имеют место оценки:

$$\left\|\widehat{U}_1\widehat{U}_2\right\| \le q, \quad \left\|\widehat{U}_2\widehat{U}_1\right\| \le q,$$

где

$$q = \lambda_1\lambda_2 < 1.$$

Из этих оценок легко следует разрешимость системы (3.6). Можно, например, исключить α_2 из (4.1) и получить следующее уравнение со сжимающим оператором относительно α_1:

$$\alpha_1 = (\widetilde{\alpha}_1 + \widehat{U}_1\widetilde{\alpha}_2) + (\widehat{U}_1\widehat{U}_2)\alpha_1.$$

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для системы (4.1), определенных посредством

$$\alpha_1^{(n)} = \widetilde{\alpha}_1 + \widehat{U}_1\alpha_2^{(n)}$$

$$\alpha_2^{(n+1)} = \widetilde{\alpha}_2 + \widehat{U}_2\alpha_1^{(n)}, \quad n = 0,1,2,...$$

$$\alpha_2^{(0)} = 0.$$

Эти приближения сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Нами доказан следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены* (1.6) *и* (2.2). *Тогда система* (4.1) *имеет единственное решение в пространстве* $M\left(\frac{1}{s}\right) \times M\left(\frac{1}{s}\right)$.

Покажем, что если пара (α_1, α_2) является решением системы (3.6), то функции $f_{1,2}$ определенные посредством (3.3) являются решением системы (1.1). Действительно, подставляя представления (3.5) и (3.7) функций α_j и U_j в (3.6), получим систему (3.3). Отсюда непосредственно следует, что функции $f_{1,2}$ являются решением системы (1.1).

Преимущество системы (4.1) относительно (1.1) является то, что ее легко можно алгебраизировать. Для этого нужно заменить функции $\sigma_{1,2}$ на кусочно постоянные функции с конечным числом скачков, после чего система (4.1) приводится к конечной алгебраической системе. Также можно дискретизировать уравнение Амбарцумяна (2.5) и упростить построение резольвентных функций $\Phi_{1,2}$(см. [8]).

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Abstract. A dual integral equations on the whole real axis with an unknown function f is considered. It is supposed that the kernel functions of the equations are even and representable as superposition of exponents. The equation is transferred to a system of integral equations on the positive semi-axis with two unknown functions: $f_1(x) = f(x)$ and $f_2(x) = f(-x)$. Applying a factorization method and using the solution of Ambartsumian equation, a system of Laplace transforms α_1, α_2 of functions f_1, f_2 is obtained. Under some conditions on the free term, the existence and uniqueness of the solution of that system is proved in the semiconservative case. A construction of the functions α_1, α_2 is given by means of successive approximations, and a construction method of the solution (f_1, f_2) by α_1, α_2 is described.

Список литературы

[1] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. Уравнения типа свертки. Москва, Наука (1978).

[2] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения свертки и проекционные методы их решения. Москва, Наука, 1971.

[3] З. Пресдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва, Мир (1979) (РЖМат, 1980, 4Б533).

[4] Л. Г. Арабаджян, “О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами”, Матем. Заметки, **62** (3), 323-331, (1997).

[5] M. Mashreghi. On solution of dual equations. Третье Российско-Армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Ереван, 118-120, (2010).
[6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ. Москва, ВИНИТИ АН СССР **22**, 175-244, (1984).
[7] Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян. "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Матем. заметки, **47** (6), 23-30 (1990).
[8] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян. "О методе дискретных ординат", ДАН СССР, **292** (2), 322-326 (1985).

Поступила 25 августа 2011

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 2, 2012

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 2, 2012

Contents