

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2012

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, А. Р. АЙРАПЕТЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *hhayrapet@gmail.com*

Аннотация. В статье исследуется граничная задача типа Шварца для полианалитических функций, когда граничные функции принадлежат весовому пространству $L^1(\rho)$.

MSC2010 number: 35J40, 35J67, 35J30; 35Q15, 31B10

Ключевые слова: Неправильная эллиптичность; краевая задача; весовые пространства; задача Дирихле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть B_0 -класс функций U , определенных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и удовлетворяющих условию

$$|U(z)| < A |z|^N, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0,$$

где A —постоянная зависящая от y_0 , N — целое число, зависящее только от U , а $L^1(\rho)$ — пространство действительных функций на $(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L^1(\rho)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\rho(x)| dx < \infty,$$

где

$$(1.1) \quad \rho(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}$$

и α — действительное число. Для уравнения

$$(1.2) \quad \frac{\partial^n U(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad z \in \Pi^+,$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

исследуется следующая граничная задача типа Шварца:

Задача Р. Пусть f_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – действительнoзначные функции, определенные на $(-\infty, \infty)$, такие, что $f_k^{(n-k-1)} \in L^1(\rho)$. Определить функцию $U \in B_0$ удовлетворяющую уравнению (1.2) и граничным условиям

$$(1.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} - f_k(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Задача **Р** в классической постановке в классах Гельдера исследована в работах [1] - [5]. В работах [6], [7] исследованы задачи Шварца и Дирихле для неоднородного уравнения (1.2) и получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач, когда граничные функции непрерывны на границе. В работе [8] исследована задача типа Римана-Гильберта для уравнения (1.2) в единичном круге, когда граничные условия понимаются в $L^1(T)$, где T – единичная окружность. В $L^1(\rho)$ при $n = 2$ эта задача исследована в [9].

В настоящей работе исследуется задача **Р**. Устанавливается, что она имеет решение для любых функций $f_k(x)$ при $\alpha \geq 0$. Если $\alpha < 0$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи.

2. ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим следующие две граничные задачи типа Шварца.

Задача Р₁. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Определить аналитическую в Π^+ функцию $\varphi \in B_0$ по граничному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re} \varphi(x + iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где ρ – весовая функция вида (1.1). Пусть A_0 –класс аналитических функций $\phi(z)$ в $\Pi^+ \cup \Pi^-$, $\Pi^- = \{z; \operatorname{Im} z < 0\}$ удовлетворяющих условию

$$|\phi(z)| < A |z|^N, \quad |\operatorname{Im} z| > y_0 > 0,$$

где N – целое число, зависящее от ϕ , а A – постоянная, зависящая от y_0 .

Рассмотрим также следующую задачу (задача о скачке).

Задача Р₂. Пусть $f \in L^1(\rho)$ – комплекснозначная функция. Определить функцию $\phi \in A_0$ по граничному условию

$$(2.1) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|\phi^+(x + iy) - \phi^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $\phi^\pm$ – сужения функции ϕ на $\Pi^\pm$ соответственно.

Если ϕ – произвольная аналитическая функция в $\Pi^+ \cup \Pi^-$, то следуя [10] положим

$$\phi_*(z) = -\overline{\phi(\bar{z})}.$$

Лемма 2.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$ – действительнoзначная функция, тогда общее решение задачи $\mathbf{P}_1$ можно представить в виде

$$(2.2) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}(\phi(z) + \phi_*(z)),$$

где $\phi(z)$ – общее решение задачи P_2 .

Доказательство. Пусть $\phi(z)$ – некоторое решение задачи $\mathbf{P}_2$. Так как f – действительнoзначная функция, то $\phi_*(z)$ также решение этой задачи, т.е.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\phi_*^+(x + iy) - \phi_*^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Ясно, что функция

$$\psi(z) = \frac{\phi(z) + \phi_*(z)}{2}.$$

решение задачи P_2 и

$$\psi_*(z) = \psi(z).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(x + iy) &= \frac{\phi(x + iy) + \overline{\phi(x + iy)}}{2} - \frac{\overline{\phi(x - iy)} + \phi(x - iy)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(\phi(x + iy) - \phi(x - iy)) + \frac{1}{2}(\overline{\phi(x + iy)} - \overline{\phi(x - iy)}), \end{aligned}$$

то заключаем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re} \psi(x + iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

т.е. $\psi(z)$ есть решение задачи $\mathbf{P}_1$. Верно и обратное: каждое решение задачи $\mathbf{P}_1$ представимо в виде (2.2). Действительно, пусть $\varphi(z)$ – произвольное решение задачи $\mathbf{P}_1$. Положим

$$\phi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \Pi^+ \\ -\overline{\varphi(\bar{z})}, & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\phi(z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$, $\phi_*(z) = \phi(z)$ и, следовательно, $\varphi(z)$ представима в виде (2.2). $\square$

Пусть $m = [\alpha]$ и $f \in L^1(\rho)$. Положим

$$K(m, f, z) = \frac{(z+i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^+ \cup \Pi^-.$$

Ясно, что при $m \geq 0$ функция $K(m, f, z)$ голоморфна на $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и $K(m, f, z) \in B_0$ при $z \in \Pi^+$. Если же $m < 0$, то $K(m, f, z)$ голоморфна на $\Pi^+ \cup \Pi^-$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t+i)^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m-1,$$

или

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m-1.$$

Лемма 2.2. *Имеет место оценка*

$$\|K_m(f, x+iy) - K_m(f, x-iy)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}, \quad y \in (0, 2^{-1}),$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y .

Доказательство. Так как

$$K_m(f, x+iy) - K_m(f, x-iy) = I_1(x, y) + I_2(x, y),$$

где

$$I_1(x, y) = \frac{(x+iy+i)^m - (x-iy+i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{dt}{t-x-iy},$$

$$I_2(x, y) = \frac{(x+iy+i)^m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t+i)^m} \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2}.$$

то достаточно установить, что

$$\|I_j(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}, \quad j = 1, 2.$$

Учитывая, что $|(x+iy+i)^m - (x-iy+i)^m| \leq C_1(1+|x|)^{m-1}y$, где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от x и y , получаем

$$\begin{aligned} & \|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^\alpha} (1+|t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha\}}|t-x-iy|} dt. \end{aligned}$$

где C_2 – постоянная, не зависящая от f и y , а $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α .

Поскольку (см. [11])

$$\sup_{-\infty < t < \infty} (1+|t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha\}}|t-x-iy|} < \infty,$$

то

$$\|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая, что [11]

$$\sup_{-\infty < t < \infty} (1 + |t|)^{\{\alpha\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\{\alpha\}}((t - x)^2 + y^2)} < \infty,$$

получаем $\|I_2(x, y)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}$. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $f(x)$ – финитная функция из класса Гельдера. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то

$$(2.4) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

б) Если $\alpha < 0$ и функция f удовлетворяет условиям (2.3), то $K(m, f, z)$ удовлетворяет соотношению (2.4).

Доказательство. Существует $R > 0$ такое, что $K(m, f, z)$ аналитична в $|z| > R$.

При $|z| > 2R$ будем иметь $|K(m, f, z)| < A|z|^{m-1}$. Поэтому

$$|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy)| < Ay|x|^{m-2}$$

и

$$\int_{|x| > 2R} |K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy)| \rho(x) dx < Ay \int_{|x| > 2R} \frac{dx}{(1 + |x|)^{2+\{\alpha\}}}.$$

Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > 2R} |K_m(f, x + iy) - K_m(f, x - iy)| \rho(x) dx = 0.$$

Так как в силу формулы Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| < 2R} |\operatorname{Re} K(m, f, x + iy) - f(x)| \rho(x) dx = 0,$$

получаем доказательство утверждения а).

Если теперь $\alpha < 0$, то при условии (2.3) функция $K(m, f, z)$ голоморфна в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и обращается в нуль порядка $-m+1$ при $z = \infty$. Аналогично устанавливается, что $K(m, f, z)$ удовлетворяет (2.4). $\square$

Лемма 2.4. Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$. Справедливы следующие утверждения:

- а) Если $\alpha \geq 0$, то функция $K(m, f, z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$.
- б) Если $\alpha < 0$ и функция f удовлетворяет условиям (2.3), то функция $K(m, f, z)$ – решение задачи $\mathbf{P}_2$.

Доказательство. Пусть $\alpha \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и $f_\varepsilon(x)$ произвольная финитная функция из класса Гельдера такая, что

$$(2.5) \quad \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} < \varepsilon.$$

В силу леммы 2.2

$$\begin{aligned} & \|K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq \|K(m, f - f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f - f_\varepsilon, x - iy)\|_{L^1(\rho)} + \\ & + \|K(m, f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f_\varepsilon, x - iy) - f_\varepsilon(x)\|_{L^1(\rho)} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq \|K(m, f_\varepsilon, x + iy) - K(m, f_\varepsilon, x - iy) - f_\varepsilon(x)\|_{L^1(\rho)} + C\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Учитывая лемму 2.3, получаем доказательство утверждения а) леммы.

Пусть теперь $\alpha < 0$ и $f \in L^1(\rho)$ удовлетворяет условиям (2.3). Выберем финитную функцию $f_\varepsilon(x)$ из класса Гельдера так, чтобы имели место (2.3) и (2.5). Аналогичными рассуждениями получаем доказательство утверждения б) теоремы. $\square$

Лемма 2.5. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $\phi(z) \in A_0$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда

- а) Если $\alpha \geq 0$ и α – нецелое, то $\phi(z)$ представима в виде

$$(2.6) \quad \phi(z) = K(m, f, z) + P(z)$$

где $P(z)$ – полином порядка m .

- б) Если $\alpha \geq 0$ и α – целое, то $\phi(z)$ представима в виде (2.6), где $P(z)$ – полином порядка $m - 1$.

- в) Если $\alpha < 0$, то f удовлетворяет условиям (2.3) и $\phi(z)$ представима в виде (2.6), где $P(z) = \text{const}$.

Доказательство. Из (2.1) получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\phi^+(x + iy)}{(x + i)^m} - \frac{\phi^-(x - iy)}{(x + i)^m} - \frac{f(x)}{(x + i)^m} \right| \rho_1(x) dx = 0,$$

где $\rho_1(x) = (1 + |x|)^{-1}$. Положим

$$\frac{\phi^+(x + iy)}{(x + i)^m} - \frac{\phi^-(x - iy)}{(x + i)^m} = f_y(x).$$

Ясно, что $f_y(x) \in L^1(\rho_1)$ и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| f_y(x) - \frac{f(x)}{(x + i)^m} \right\|_{L^1(\rho_1)} = 0.$$

Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда функция $\phi^-(x - iy)(z + i)^{-m}$ имеет полюс порядка m в точке $z = -i$. Если

$$R_m(z) = \frac{A_1(y)}{(z + i)} + \frac{A_2(y)}{(z + i)^2} + \dots + \frac{A_m(y)}{(z + i)^m}$$

главная часть разложения Лорана этой функции в точке $z = -i$, то получаем

$$\psi_y^+(x) - \psi_y^-(x) + R_{my}(x) = f_y(x) + R_{my}(x),$$

где

$$\psi_y^\pm(z) = \begin{cases} \frac{\phi^+(z + iy)}{(z + i)^m}, & z \in \Pi^+, \\ \frac{\phi^-(z - iy)}{(z + i)^m}, & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Так как $\psi_y(z)$ имеет полиномиальный рост, то

$$\psi_y^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_y(t)dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{my}(t)dt}{t - z} + P_y(z).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{my}(t)dt}{t - z} = \begin{cases} R_{my}(z), & z \in \Pi^+, \\ 0, & z \in \Pi^-, \end{cases}$$

то, переходя к пределу при $y \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\phi(z)}{(z + i)^m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{t - z} + P(z),$$

где $P(z)$ - некоторый полином. Окончательно

$$(2.7) \quad \phi(z) = K(m, f, z) + P_1(z),$$

где $P_1(z) = (z + i)^m P(z)$. В силу леммы 4

$$K(m, f, x + iy) - K(m, f, x - iy) \rightarrow f(x),$$

в $L^1(\rho)$ при $y \rightarrow 0$. Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Если N_1 порядок полинома $P_1(z)$, то

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O(1 + |x|)^{N_1 - 1}$$

и $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$, тогда и только тогда, когда $\alpha - N_1 + 1 > 1$ т. е. $N_1 < \alpha$. Получаем $N_1 \leq m$ при α нецелом и $N_1 < m$ при α целом. Утверждения а) и б) леммы доказаны.

Пусть $\alpha < 0$. Так как $\psi_y(z)$ аналитическая функция на $\Pi^+ \cup \Pi^-$, получаем представление (2.7), где $P_1(z)$ имеет вид

$$P_1(z) = \frac{B_1}{z + i} + \frac{B_2}{(z + i)^2} + \dots + \frac{B_{|m|}}{(z + i)^{|m|}} + \tilde{P}_1(z),$$

$\tilde{P}_1(z)$ — некоторый полином. Учитывая, что $\phi(z)$ аналитическая функция в точке $z = -i$ получаем

$$(2.8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t + i)^k dt + B_{|m| - k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |m| - 1.$$

Так как

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O(1 + |x|)^{n_1 - 1}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где n_1 — порядок полинома $\tilde{P}_1(z)$, то $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{P}_1(z) = \text{const}$. Далее, пусть B_k первый коэффициент, отличный от нуля, тогда в окрестности $z = \infty$ будем иметь

$$|P_1(x + iy) - P_1(x - iy)| = O\left(\frac{1}{|x|^{k+1}}\right)$$

и $P_1(x + iy) - P_1(x - iy) \in L^1(\rho)$ при $k + 1 - |m| > 1$ т. е. $k > |m|$. Следовательно, $B_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, |m|$ и, учитывая (2.8), f удовлетворяет условиям (2.3). $\square$

Из лемм 2.4 и 2.5 непосредственно следует:

Теорема 2.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то задача $\mathbf{P}_2$ имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде (2.6), где $P(z)$ — произвольный полином порядка $\tilde{m}$:

$$\tilde{m} = \begin{cases} m, & \{\alpha\} \neq 0 \\ m - 1, & \{\alpha\} = 0. \end{cases}$$

б) Если $\alpha < 0$, то задача $\mathbf{P}_2$ имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (2.3). Решение представимо в виде (2.6), где $P(z) = \text{const}$.

Теорема 2.2. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\alpha \geq 0$, то задача $\mathbf{P}_1$ имеет решение для любой действительнзначной функции $f \in L^1(\rho)$ и общее решение представимо в виде

$$(2.9) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + P_{\tilde{m}}(z),$$

где $P_{\tilde{m}}(z)$ произвольный полином порядка $\tilde{m}$ вида

$$P_{\tilde{m}}(z) = iA_0 + iA_1z + \dots + iA_{\tilde{m}}z^{\tilde{m}},$$

причем A_k , $k = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа.

б) Если $\alpha < 0$, то задача $\mathbf{P}_1$ имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (2.3). Решение представимо в виде (2.9), где $P_{\tilde{m}}(z) = iA_0$, A_0 – произвольное действительное число.

Доказательство. Пусть $\alpha \geq 0$ и $\phi(z)$ – общее решение задачи $\mathbf{P}_2$. В силу леммы 2.1 и теоремы 2.1, оно представимо в виде (2.9), где $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$ полином порядка m . Тогда

$$P_*(z) = -\bar{a}_0 - \bar{a}_1z - \dots - \bar{a}_mz^m$$

и

$$\frac{1}{2}(P(z) + P_*(z)) = \frac{a_0 - \bar{a}_0}{2} + \frac{(a_1 - \bar{a}_1)z}{2} + \dots + \frac{(a_m - \bar{a}_m)z^m}{2}.$$

Положив $A_k = a_k - \bar{a}_k$ и учитывая формулу (2.2) получаем (2.9). Аналогично устанавливается утверждение б). Теорема доказана. $\square$

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 3.1. Общее решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$(3.1) \quad U(z) = \varphi_0(z) + y\varphi_1(z) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(z),$$

где $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – аналитические функции в Π^+ .

Доказательство. Хорошо известно [12], что общее решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$(3.2) \quad U(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1}\phi_{n-1}(z),$$

где $\phi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – аналитические функции в Π^+ . Поскольку $\bar{z} = z - 2iy$, то получаем представление (3.1), где

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varphi_0(z) &= \phi_0(z) + z\phi_1(z) + \dots + z^{n-1}\phi_{n-1}(z), \\ \varphi_k(z) &= 2^k(-i)^k(\phi_k(z) + C_{k+1}^k z\phi_{k+1}(z) + \dots + C_{n-1}^k z^{n-1-k}\phi_{n-1}(z)), \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$. □

Лемма 3.2. Пусть полианалитическая функция $U \in B_0$ представима в виде (3.2). Тогда $\phi_k(z) \in B_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Пусть $y_0 > 0$ и $z = x + iy$, $y > y_0$. По условию леммы имеем $|U(z)| < M|z|^N$, $\operatorname{Im} z > y_0$. Поэтому функция

$$U(z) = \frac{\phi_0(z)}{(z+i)^N} + \bar{z} \frac{\phi_1(z)}{(z+i)^N} + \dots + \bar{z}^{n-1} \frac{\phi_{n-1}(z)}{(z+i)^N}$$

полианалитическая и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} z > y_0$, т.е. $|U(z)| < C$, где C – постоянная, зависящая от y_0 . Пусть теперь z – произвольная точка $\operatorname{Im} z > y_0$. Известно (см. [13]), что если $U(z)$ полианалитическая ограниченная функция в круге $D = \{z : |z - z_0| < R\}$, то

$$\left| \frac{\partial^k U(z_0)}{\partial \bar{z}^k} \right| \leq \frac{M}{R^k}, \quad M = \sup_{z \in D} |u(z)|, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Применив это неравенство для круга $D = \left\{ w : |w - z| < y - \frac{y_0}{2} \right\}$, получаем

$$\frac{|\phi_{n-k}(z)|}{|z+i|^N} < A \frac{|z|^{k-1}}{y_0^{n-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \operatorname{Im} z > y_0,$$

или

$$|\phi_k(z)| \leq A \frac{|z|^{N+n-k-1}}{y_0^{n-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где A – некоторая постоянная. Следовательно $\phi_k \in B_0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.3. Пусть полианалитическая функция $u(z) \in B_0$ и представима в виде (3.1). Тогда $\varphi_k(z) \in B_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Непосредственно следует из (3.3). $\square$

Лемма 3.4. Пусть $\alpha \geq 0$, $\varphi(z) \in B_0$, $f(x) = \operatorname{Re} \varphi(x) \in L^1(\rho)$, $x \in (-\infty, \infty)$, и $\operatorname{Re} \varphi(x + iy) \in L^1(\rho)$ при $y = y_0 > 0$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} iA_k z^k,$$

где A_k – действительные числа.

Доказательство. Рассмотрим граничную задачу

$$f(x) = \operatorname{Re} \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где $\varphi \in B_0$. Общее решение этой задачи представимо в виде (2.2), где $\phi \in A_0$ – решение граничной задачи

$$\phi^+(x) - \phi^-(x) = 2f(x).$$

Разделив это равенство на $(z + i)^m$ получаем

$$\psi^+(x) - \psi^-(x) = \frac{2f(x)}{(x + i)^m}$$

где

$$\psi^+(z) = \frac{\phi^+(z)}{(z + i)^m}, \quad \psi^-(z) = \frac{\phi^-(z)}{(z + i)^m}$$

Функция $\psi^+(z)$ аналитична в Π^+ , а $\psi^-(z)$ в Π^- за исключением точки $z = -i$.

Если

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{(z + i)^k}$$

главная часть разложения Лорана функции $\psi^-(z)$ в точке $z = -i$, то получаем

$$\psi^+(x) - (\psi^-(x) - R(x)) = \frac{2f(x)}{(x + i)^m} + R(x).$$

Следовательно

$$\psi^\pm(z) = \frac{(z + i)^m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{t - z} + \tilde{P}(z),$$

где $\tilde{P}(z) = a_0 + a_1(z) + \dots + a_{n_0} z^{n_0}$ – некоторый полином. Поскольку

$$\tilde{P}_*(z) = - \sum_{k=1}^{n_0} \bar{a}_k z^k,$$

то применяя формулу (2.2), получаем соответствующее представление. Так как в силу леммы 2.2

$$\operatorname{Re}(K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy)) \in L^1(\rho),$$

при $y > 0$, то $\tilde{P}(x + iy) + \tilde{P}_*(x + iy) \in L^1(\rho)$, что возможно лишь при $n_0 \leq \tilde{m}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $\alpha < 0$, $\varphi \in B_0$, $f(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) \in L^1(\rho)$. Тогда, если $\operatorname{Re}\varphi(x + iy_0) \in L^1(\rho)$, $y_0 > 0$, то f удовлетворяет условиям (2.3), а $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(K(m, f, z) + K_*(m, f, z)) + iA_0,$$

где A_0 – действительное число.

Доказательство. По аналогии с предыдущей леммой имеем

$$\varphi^+(x)(x+i)^{|m|} - \varphi^-(x)(x+i)^{|m|} = 2f(x)(x+i)^{|m|}.$$

и следовательно

$$\varphi^\pm(z)(z+i)^{|m|} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t+i)^{|m|}}{t-z} dt + P(z),$$

где $P(z) = A_0 + A_1(z+i) + \dots + A_N(z+i)^N$ – некоторый полином порядка N , $N \geq m$. Так как левая часть имеет нуль порядка m в точке $z = -i$, то получаем

$$(3.4) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(t+i)^{|m|-k} dt + A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |m|.$$

Далее имеем

$$\varphi(z) = \frac{(z+i)^{-|m|}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t+i)^{|m|}}{t-z} dt + \sum_{k=1}^{|m|} \frac{A_k}{(z+i)^k} + \tilde{P}_1(z)$$

В силу леммы 2.5 заключаем, что $A_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, |m|$, $\tilde{P}_1(z) = \operatorname{const}$. Учитывая теперь (3.4), получаем доказательство леммы. $\square$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ **P**

Задачу **P** будем называть однородной, если $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 4.1. Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда общее решение однородной задачи **P** можно представить в виде (3.1), где

$$(4.1) \quad \varphi_0(z) = iA_{00} + iA_{01}z + \dots + iA_{0\tilde{m}}z^{\tilde{m}},$$

$$(4.2) \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{k!}(iA_{k0} + iA_{k1}z + \dots + iA_{k\tilde{m}}z^{\tilde{m}} - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j j! i^{k-j} \varphi_j^{(k-j)}(z))$$

причем A_{kj} , $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа.

Доказательство. При $k = 0$ из (1.3), получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x + iy))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Обозначим

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x + iy)) = f_{0y}(x).$$

В силу леммы 3.4

$$\begin{aligned} & \varphi_0(z + iy) + y\varphi_1(z + iy) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(z + iy) = \\ & = K(m, f_{0y}, z) + K_*(m, f_{0y}, z) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} iA_{0k}(y)z^k \end{aligned}$$

где $A_{0k}(y)$, $k = 0, 1, \dots, \tilde{m}$ – действительные числа. Переходя к пределу, при $y \rightarrow 0$ получаем представление (4.1) функции $\varphi_0(z)$. Далее при $k = 1$ из (1.3) имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(i\varphi_0'(z) + \varphi_1(z) + yi\varphi_1'(z) + \dots)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где остальные слагаемые содержат y как множитель. Обозначив

$$i\varphi_0'(x + iy) + \varphi_1(x + iy) + yi\varphi_1'(x + iy) + \dots = f_{1y}(x),$$

в силу леммы 3.4 получаем

$$\begin{aligned} & i\varphi_0'(z + iy) + \varphi_1(z + iy) + yi\varphi_1'(z + iy) + \dots = \\ & = K(m, f_{1y}, z) + K_*(m, f_{1y}, z) + iA_{10}(y) + iA_{11}(y)z + \dots + iA_{1\tilde{m}}(y)z^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, при $y \rightarrow 0$ получаем

$$\varphi_1(z) = -i\varphi_0'(z) + iA_{10} + iA_{11}z + \dots + iA_{1N_1}z^{N_1},$$

т.е. формулу (4.2) при $k = 1$. Аналогичными рассуждениями получаем (4.2) при $k > 1$.

Докажем, что функция $U(z)$ определяемая по формуле (3.1), где $\varphi_k(z)$ определяются по формулам (4.2), удовлетворяет условиям (1.3). Для этого заметим, что при фиксированном $y > 0$

$$|\operatorname{Re} U(x + iy)| = O(|x|^{\tilde{m}-1})$$

и поэтому $\operatorname{Re} U(x + iy) \in L^1(\rho)$

Каждая функция $\varphi_k(z)$ – полином порядка $\tilde{m}$ и

$$\frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} = \varphi_k(z) + yP(y, z),$$

где $P(y, z)$ полином относительно z порядка меньше чем $\tilde{m} - 1$. Поэтому при $y \in (0, 1)$ и $x \in (-\infty, \infty)$

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} \right| < Ay(1 + |x|)^{\tilde{m}-1}$$

где A – постоянная, не зависящая от x . Из последнего неравенства следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(z)}{\partial y^k} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Теорема доказана. □

По аналогии устанавливается

Теорема 4.2. Пусть $\alpha < 0$. Тогда общее решение однородной задачи **P** представимо в виде

$$U(z) = iA_0 + iA_1y + \dots + iA_{n-1}y^{n-1},$$

где A_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – действительные числа.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ **P**

Рассмотрим следующую задачу:

Задача $\tilde{\mathbf{P}}_k$. Пусть даны k , $0 \leq k \leq n-1$, и $f^{(s)} \in L^1(\rho)$, $s = 0, 1, \dots, n-k-1$. Определить решение уравнения (1.2) так, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^j U(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j \neq k, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Лемма 5.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $p \geq s > 0$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^p \|(K(m, f, z))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Утверждение леммы верно, если f бесконечно дифференцируемая финитная функция. Поэтому, учитывая что этот класс всюду плотен в $L^1(\rho)$, достаточно установить оценку

$$y^p \|(K(m, f, x + iy))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y . Имеем

$$(K(m, f, z))^{(s)} = \sum_{j=0}^s A_j \frac{(x + iy + i)^{m-j}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^m} \frac{dt}{(t - x - iy)^{s-j+1}},$$

где A_j – постоянные, и

$$|(K(m, f, z))^{(s)}| \leq M \sum_{j=0}^s (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^{s-j+1}},$$

где M – постоянная, не зависящая от x . Учитывая, что $y < |t - x - iy|$, получаем

$$\begin{aligned} y^p |(K(m, f, z))^{(s)}| &\leq M y^{p-s+j} \sum_{j=0}^{s-1} (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{y dx}{|t - x - iy|^2} + \\ &+ M y^p (1 + |x|)^{m-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|}, \end{aligned}$$

причем, если $m < s$, то последнее слагаемое равно нулю.

Поскольку

$$\begin{aligned} &y^{p-s+j} \left\| (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^2} \right\|_{L^1(\rho)} \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^\alpha} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx dt}{(1 + |x|)^{\alpha-m+j} |t - x - iy|^2} \end{aligned}$$

и

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\alpha-m+j} |t - x - iy|^2} < \infty,$$

получаем

$$\begin{aligned} &y^{p-s+j} \left\| (1 + |x|)^{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^m} \frac{dt}{|t - x - iy|^2} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}, \\ &j = 0, 1, \dots, s-1. \end{aligned}$$

Учитывая, что $s > 0$ будем иметь

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |t + i|^{\alpha-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(1 + |x|)^{\alpha-m+s} |t - x - iy|} < \infty$$

и поэтому

$$y^p \left\| (1 + |x|)^{m-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t+i|^m} \frac{dt}{|t-x-iy|} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Следовательно

$$y^p \|(K(m, f, z))^{(s)}\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Функция*

$$U_{k0}(x, y) = \frac{y^k}{2k!} \varphi_{k0}(x + iy),$$

где

$$(5.1) \quad \varphi_{k0}(z) = (K(m, f, z) + K_*(m, f, z))$$

удовлетворяет граничным условиям

$$(5.2) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| Re \frac{\partial^j U_{k0}(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$(5.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| Re \frac{\partial^k U_{k0}(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j U_{k0}(x, y)}{\partial y^j} &= \sum_{s=0}^j A_s y^{k-s} (K(m, f, x + iy))^{(j-s)} + \\ &+ \sum_{s=0}^j A_s y^{k-s} (K_*(m, f, x + iy))^{(j-s)}, \end{aligned}$$

где A_s – постоянные, и в силу леммы 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|(K(m, f, x + iy))^{(j-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j (y^k K(m, f, x + iy))}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Аналогично

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j (y^k K_*(m, f, x + iy))}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Утверждения (5.2) леммы доказаны. Для доказательства (5.3) заметим, что

$$\frac{\partial^k U_{k0}(x, y)}{\partial y^k} = \frac{1}{2} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy)) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-1} A_s y^{k-s} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy))^{(k-s)},$$

где A_s – постоянные. Так как

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|K(m, f, x + iy)\|_{L^1(\rho)} = \lim_{y \rightarrow 0} y^{k-s} \|K_*(m, f, x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то доказательство леммы следует из теоремы 2.1. $\square$

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_{k1}(z) &= -i(K(m, f, z) + K_*(m, f, z))', \\ U_{k1}(x, y) &= U_{k0}(x, y) + \frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy). \end{aligned}$$

Так как

$$K'_m(f, z) = \frac{m}{z+i} K(m, f, z) + K(m, \tilde{f}, z) - K(m, f', z),$$

где $\tilde{f}(t) = mf(t)(t+i)^{-1}$, то как при доказательстве леммы 5.1 устанавливается,

что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy) \right) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

При $j = k+1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} \left(U_{k0}(x, y) + \frac{y^{k+1}}{2(k+1)!} \varphi_{k1}(x + iy) \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} A_s y^{k+1-s} (K(m, f, x + iy) + K_*(m, f, x + iy))^{(k+1-s)} + \\ & \quad + \sum_{s=0}^k B_s y^{k+1-s} (\varphi_{k1}(x + iy))^{(k+1-s)}. \end{aligned}$$

А по лемме 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(K(m, f, x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(K_*(m, f, x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k+1-s} \|(\varphi_{k1}(x + iy))^{(k+1-s)}\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

Поэтому функция $U_{k1}(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^j U_{k1}(x, y)}{\partial y^j} \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k+1, \quad j \neq k.$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U_{k1}(x, y)}{\partial y^k} - f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

Аналогично доказывается следующая

Теорема 5.1. *Функция*

$$U_k(z) = y^k \varphi_{k0}(z) + y^{k+1} \varphi_{k1}(z) + \dots + y^{n-1} \varphi_{k,n-1-k}(z),$$

где $\varphi_{k0}(z)$ определяется формулой (5.1), а

$$\varphi_{kj}(z) = -\frac{1}{(k+1)!} (C_{k+j}^k k! i^j \varphi_{k0}^{(j)}(z) + \dots + C_{k+j}^{k+j-1} (k+j-1)! i \varphi'_{k,j-1}(z)),$$

$j = 0, 1, \dots, n-k-1$, является решением задачи $\tilde{\mathbf{P}}_k$.

Из этой теоремы и из теоремы 4.1 непосредственно следует:

Теорема 5.2. *Пусть $\alpha \geq 0$. Задача P имеет решение для любых функций $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$, $f_k^{(j)} \in L^1(\rho)$, $j = 0, 1, \dots, n-1-k$. Общее решение можно представить в виде*

$$U(z) = \tilde{U}_0(z) + \tilde{U}_1(z),$$

где $\tilde{U}_0(z)$ – общее решение однородной задачи, а

$$\tilde{U}_1(z) = U_0(z) + U_1(z) + \dots + U_{n-1}(z),$$

где $U_k(z)$ – решения задачи $\tilde{\mathbf{P}}_k$.

Теорема 5.3. *Пусть $\alpha < 0$, $f_k^{(j)}(x) \in L^1(\rho)$, $j = 0, 1, \dots, n-1-k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для того, чтобы задача $\mathbf{P}$ имела решение необходимо и достаточно чтобы функции f_k удовлетворяли условиям (2.3).*

Доказательство. Для простоты изложения приведем доказательство при $m = 3$.

Тогда общее решение уравнения (1.2) представимо в виде

$$(5.4) \quad U(z) = \varphi_0(z) + y \varphi_1(z) + y^2 \varphi_2(z)$$

Граничные условия (1.3) представимы в виде

$$(5.5) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial^k U(x, y)}{\partial y^k} - f_k(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $f_k^{(j)}(x) \in L^1(\rho)$, $k = 0, 1, 2$, $j = 0, 2-k$. Из (5.5), при $k = 0$ получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y \varphi_1(x + iy) + y^2 \varphi_2(x + iy)) - f_0(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Положим

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(x + iy) + y \varphi_1(x + iy) + y^2 \varphi_2(x + iy)) = f_{0y}(x).$$

В силу леммы 3.5

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x + iy) + y\varphi_1(x + iy) + y^2\varphi_2(x + iy) = \\ & = \frac{1}{2}(K(m, f_{0y}, z) + K_*(m, f_{0y}, z)) + iA_{0y}, \end{aligned}$$

где A_{0y} действительное число, а f_{0y} удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{0y}(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -m - 1.$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow 0$ получаем

$$(5.6) \quad \varphi_0(z) = \frac{1}{2}(K(m, f_0, z) + K_*(m, f_0, z)) + iA_0$$

и f_0 удовлетворяет условиям (2.3). Далее имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0} \|\operatorname{Re}(i\varphi'_0(x + iy) + \varphi_1(x + iy) + y\varphi'_1(x + iy) + \\ & + 2y\varphi_2(x + iy) + y^2\varphi'_2(x + iy)) - f_1(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.5 будем иметь

$$(5.7) \quad \varphi_1(z) = -i\varphi'_0(z) + \frac{1}{2}(K(m, f_1, z) + K_*(m, f_1, z)) + iA_1$$

где A_1 действительное число. По аналогии получаем

$$(5.8) \quad \varphi_2(z) = \frac{i^2}{2}\varphi''_0(z) + \frac{i}{2}\varphi'_1(z) + \frac{1}{4}(K(m, f_1, z) + K_*(m, f_1, z)) + iA_2,$$

где A_2 действительное число. Поскольку в силу леммы 5.1

$$\lim_{y \rightarrow 0} y\|\varphi_1(x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^2\|\varphi_2(x + iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

заключаем, что функция (5.4), где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ определяются формулами (5.6) – (5.8) удовлетворяет условиям (5.5). Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper investigates the Schwarz type boundary value problem for polyanalytic functions when the boundary functions belong to weighted space $L^1(\rho)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, М., (1948).
- [2] М. Nicolescu, Les Fonctions Poliharmonique, Herman, Paris (1936).
- [3] Н. Е. Товмасын, “Задача типа Дирихле для одного неправильно эллиптического уравнения высокого порядка”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **27**, no. 1, 99 – 109 (1992).
- [4] N. E. Tovmasyan, “Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics”, World Scientific, Singapore–New-Jersey–London–Honk-Kong, 250 p. (1994).

- [5] H. Begehr and A. Kumar, “Boundary value problems for bi-polyanalytic functions”, *Appl. Anal.*, **85**, 1045 – 1077 (2006).
- [6] H. Begehr, A. Kumar, “Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation”, *International mathematical journal of analysis and its applications, Analysis*, **25**, 55 – 71 (2005).
- [7] H. Begehr, D. Schmersau, “The Schwarz problem for polyanalytic functions”, Preprint, FU Berlin, ZAA (2004).
- [8] Г. М. Айрапетян, “Граничная задача типа Римана-Гильберта для n -голоморфных функций”, *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **31**, по. 3, 24 – 41 (1996).
- [9] Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян, “Граничная задача типа Римана-Гильберта для неправильно эллиптического уравнения второго порядка”, *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **45**, по. 2, 3-20 (2010).
- [10] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные Интегральные Уравнения*, Москва (1968).
- [11] Г. М. Айрапетян, “О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом”, *Мат. заметки*, **76**, вып. 5, 643 – 650 (2004).
- [12] А. В. Бицадзе, *Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка*, Москва, Наука (1968).
- [13] М. Б. Балк, М. Ф. Зуев, “О полианалитических функциях”, *УМН*, **XXV**, вып. 5(155), 203 – 226 (1970).

Поступила 26 апреля 2011

**О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК
НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ
ФРАНКЛИНА**

Д. А. КАРАГУЛЯН

Ереванский Государственный Университет, Армения
E-mail: *davidkar89@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказываются теоремы, дающие полные характеристики множеств точек расходимости и абсолютной расходимости рядов по системе Франклина.

MSC2010 number: 42A20

Ключевые слова: ряды Франклина; множество расходимости; множество типа G_δ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Для функционального ряда

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

множество $E \subset [0, 1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0, 1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1). Хорошо известна классическая теорема Хана–Серпинского (см. [8], [2]): для того чтобы $E \subset [0, 1]$ стало множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ). Характеризации множеств точек расходимости рядов Фурье функций из разных классов посвящено много работ. При этом рассматриваются как ряды Фурье по тригонометрической

так и по другим классическим ортонормированным системам (Уолша, Хаара, Вилленкина). Множество неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью было охарактеризовано в работе М. А. Луниной [7]. Ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. Множество точек обычной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью охарактеризована Г. А. Карагуляном в работе [3], где доказывается, что для того чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции из $L^\infty[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$. Аналогичное свойство для системы Франклина установлено Г. А. Карагуляном в [5]. Более того, в работах [4] и [5] Карагуляном дается полная характеристика множеств расходимости последовательностей операторов со свойством локализации. В настоящей работе рассматривается вопрос о характеристизации множества точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина.

Система Франклина получается ортогонализацией системы Фабера-Шаудера методом Шмидта и обозначается через $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Множество A назовем множеством типа G_δ , если

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k суть открытые множества. При этом, очевидно, можно предполагать, что $G_k \supseteq G_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Нижеследующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. *Если множество $E \subset [0, 1]$ имеет тип G_δ , то существует ряд по системе Франклина*

$$(1.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x),$$

который неограниченно расходится в любой точке $x \in E$ и абсолютно сходится при $x \in [0, 1] \setminus E$.

Отметим, что система Франклина состоит из непрерывных функций и поэтому согласно теоремы Хана-Серпинского множество неограниченной расходимости

любого ряда Франклина имеет тип G_δ . Отсюда, с учетом результата теоремы 1 получаем:

Следствие 1. *Для того, чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда Франклина (1.2), необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .*

Следствие 2. *Для того чтобы множество $E \subset [0, 1]$ было множеством неограниченной расходимости для некоторого ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k F_k(x)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства теоремы нам потребуются несколько лемм. Положим

$$\beta_k(x) = r_{k+1}(x)r_{k+2}(x), \quad x \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots$$

где

$$r_n(x) = \text{sign}[\sin(2^n \pi x)], \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

есть функции Радемахера.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$, $x \in [0, 1]$, линейна на интервалах*

$$\left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k} \right], \quad l = 1, 2, \dots, 2^k,$$

тогда

$$\int_0^1 f(x) \beta_k(x) dx = 0.$$

Доказательство. Достаточно установить равенство

$$\int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x) (ax + b) dx = 0,$$

для любых чисел $a, b \in R$ и $l = 1, 2, \dots, 2^k$, или же

$$\int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x) dx = \int_{\frac{l-1}{2^k}}^{\frac{l}{2^k}} \beta_k(x) x dx = 0.$$

А последнее можно получить простыми вычислениями интегралов. □

Обозначим

$$(2.1) \quad \beta_I^k(x) = \begin{cases} \beta_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

где $I = [a, b]$. В силу леммы 1, имеем

$$(2.2) \quad \int_0^1 \beta_I^k(x) f(x) dx = 0,$$

если $f(x)$ линейна на интервалах

$$\left[a + \frac{(l-1)(b-a)}{2^k}, a + \frac{l(b-a)}{2^k} \right], \quad l = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Отметим, что система Франклина является базисом в $C[0, 1]$ и обладает свойством локализации. Характерным свойством системы Франклина является экспоненциальная оценка

$$(2.3) \quad |F_n(t)| \leq C \sqrt{n} q^{n|t-z_n|}, \quad t \in [0, 1]$$

где $C > 0$ и q , $0 < q < 1$ – абсолютные постоянные, и $z_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$, если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $z_1 = 1$ (см. [6], стр. 223).

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $J = (a, b) \subset [0, 1]$, $I = [c, d] \subset J$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, $\text{supp } f \subset I$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, имеем

$$(2.4) \quad \sum_{k=n}^{\infty} |(F_k, f) F_k(x)| < \varepsilon, \quad \text{при } x \in J^c.$$

Доказательство. Обозначим

$$I_1 = \left[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2} \right], \quad r = \min \left\{ \frac{c-a}{2}, \frac{b-d}{2} \right\}$$

и зафиксируем любую точку $x \in J^c$. Заметим, что при условии

$$z_k \in I_1$$

имеем $|x - z_k| \geq r$. Отсюда, с учетом (2.3) и неравенства $\|F_k\|_1 \leq C/\sqrt{k}$, получим

$$(2.5) \quad |(F_k, f) F_k(x)| \leq \|F_k\|_1 C \sqrt{k} q^{kr} \leq C q^{kr}.$$

Если же

$$z_k \notin I_1,$$

то для $t \in I$ имеем $|z_k - t| \geq r$, и следовательно, получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} |(F_k, f)F_k(x)| &\leq C\sqrt{k} \int_0^1 |F_k(t)f(t)|dt = C\sqrt{k} \int_I |F_k(t)f(t)|dt \leq \\ &\leq C\sqrt{k} \int_I |F_k(x)|dx \leq C_1 q^{kr}. \end{aligned}$$

Из (2.5) и (2.6) получим

$$(2.7) \quad |(F_k, f)F_k(x)| \leq C_2 q^{kr}, \quad x \in J^c,$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, соотношение (2.4) сразу же следует из (2.7) если учесть, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{kr}$ сходится, при $q < 1$. $\square$

В доказательстве следующей леммы воспользуемся утверждением Г. Г. Геворкяна [1]: если интегрируемая функция $f(t)$ в точке $x \in (0, 1)$ имеет разрыв первого рода, то

$$(2.8) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) - \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) \geq B|f(x+0) - f(x-0)|,$$

где B есть абсолютная постоянная, а $S_n(x, f)$ – частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции f .

Лемма 3. Пусть $J \subset [0, 1]$ – открытый интервал, а $I = [a, b] \subset J$ – двоичный. Тогда для любых чисел $p \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, существует полином по системе Франклина

$$(2.9) \quad \sum_{k=p}^q a_k F_k(x),$$

такой, что

$$(2.10) \quad \sum_{k=p}^q |a_k F_k(x)| < \varepsilon, \quad \text{при } x \in J^c,$$

$$(2.11) \quad \max_{p \leq n \leq q} \left| \sum_{k=p}^n a_k F_k(x) \right| \geq 1, \quad \text{при } x \in I.$$

Доказательство. Согласно лемме 2, существует натуральное число n_0 такое, что для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, с условиями $\|f\|_\infty \leq 1$ и $\text{supp } f \subset I$, имеет место неравенство

$$(2.12) \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} |(F_k, f)F_k(x)| < \frac{B\varepsilon}{(2B+1)}, \quad \text{при } x \in J^c,$$

где B есть абсолютная постоянная из (2.8). Так как I – двоичный интервал, то его можно представить в виде

$$I = \bigcup_{j=1}^{2^m} I_j,$$

где I_k – разные двоичные интервалы одинаковой длины. Рассмотрим функцию β_I^m , определенную в (2.1), и пусть $n = \max\{p, n_0\}$. Из (2.12) следует

$$(2.13) \quad \sum_{k=p}^{\infty} |(F_k, \beta_I^m) F_k(x)| < \frac{B\varepsilon}{(2B+1)}, \text{ при } x \in J^c.$$

Ясно, что при достаточно большом m , первые N функции системы Франклина будут линейными на отрезках I_j . Тогда, согласно (2.2), имеем

$$(F_k, \beta_I^m) = 0, \text{ для } k = 1, 2, \dots, N.$$

Функция β_I^m имеет конечное число точек разрыва. Обозначим их через ξ_k , $k = 1, 2, \dots, l$. Согласно (2.8), для любой точки ξ_k существует частичная сумма, для которой имеем

$$|S_{\nu_k}(\xi_k, \beta_I^m)| > B|\beta_I^m(\xi_k + 0) - \beta_I^m(\xi_k - 0)| \geq B,$$

Из непрерывности S_{ν_k} следует, что

$$(2.14) \quad |S_{\nu_k}(x, \beta_I^m)| > B, \quad x \in (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k)$$

для некоторого числа $\delta_k > 0$. С другой стороны, ряд Фурье–Франклина функции β_I^m равномерно сходится к β_I^m на множестве $I \setminus \bigcup_k (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k)$, и, следовательно, существует число $\nu_0 \in \mathbb{N}$, такое, что

$$(2.15) \quad |S_{\nu_0}(\xi_k, \beta_I^m)| > \frac{1}{2}, \quad x \in I \setminus \bigcup_k (\xi_k - \delta_k, \xi_k + \delta_k)$$

Определим полином (2.9) взяв

$$q = \max_{0 \leq j \leq l} \nu_j, \quad a_k = \frac{2B+1}{B}(\beta_I^m, F_k).$$

Из (2.14) и (2.15) легко следует неравенство (2.11), а (2.10) получается из (2.13).

Лемма доказана. $\square$

Пусть G – открытое множество. Скажем, что система замкнутых двоичных интервалов $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ является разбиением для G , если $(\omega_i)^o \cap (\omega_j)^o = \emptyset$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k = G$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\omega_k, G^c) = 0.$$

Обозначим через ω_k^* объединение ω_k с его двумя соседними интервалами. Легко заметить, что любое открытое множество обладает таким разбиением.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

Если A есть множество типа G_δ , то

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k – открытые множества и $G_k \supseteq G_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Каждое из множеств G_k обладает некоторым разбиением на двоичные интервалы. Пусть $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая нумерация всех этих интервалов. Легко заметить, что утверждение $x \in A$ эквивалентно нижеследующим утверждениям

$$(3.1) \quad \begin{aligned} &x \in \omega_k \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N}, \\ &x \in \omega_k^* \text{ для бесконечного числа } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Для каждого интервала ω_k построим многочлен Франклина

$$(3.2) \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i F_i(x)$$

с условиями

$$(3.3) \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i F_i(x)| \leq \frac{1}{2^k} \quad x \notin \omega_k^*,$$

$$(3.4) \quad \max_{n_{k-1} < n \leq n_k} \left| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i F_i(x) \right| \geq k, \quad x \in \omega_k,$$

где $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ есть некоторая последовательность номеров. Сделаем это по индукции. Применив лемму 3, при $J = \omega_1^*$, $I = \omega_1$, $p = 1$, $\varepsilon = 1$, получим полином (3.2), с условиями (3.3) и (3.4) в случае $k = 1$. Далее предположим, что условия (3.3) и (3.4) выполняются для некоторых полиномов (3.2) при $k = 1, 2, \dots, t$. Обозначим

$$M_{t+1} = \max_{x \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n_t} a_i F_i(x) \right| + (t+1)$$

Вновь применив лемму 3, с $J = \omega_{t+1}^*$, $I = \omega_{t+1}$, $n = n_t$, $\varepsilon = 1/M_{t+1}2^k$, получим полином вида (3.2), удовлетворяющий условиям (3.3) и (3.4) при $k = t+1$. Итак,

завершая индукцию, мы получим некоторый ряд

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i F_i(x)$$

удовлетворяющий условиям (3.3) и (3.4). Пусть $x \in A$. Тогда, согласно (3.1), существует бесконечная последовательность интервалов ω_k , содержащих точку x . Это значит, что в точке x для бесконечного числа значений k выполняется (3.4). Отсюда следует расходимость ряда (3.5) в точке x . Если же $x \notin A$, то существуют лишь конечное число интервалов ω_k^* , содержащих x . Это значит, что (3.3) может не выполняться только для конечного числа индексов k . Отсюда получаем, что ряд (3.5) абсолютно расходится. Теорема доказана.

В заключении выражаю благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. Theorems of the paper give a complete description of the divergence and absolute divergence sets of the series in Franklin system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Геворкян, “О рядах по системе Франклина”, *Analysis Mathematica*, **16**, 87 – 114 (1990).
- [2] Н. Hahn, “Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge”, *Arch. d. Math. u. Phys.*, **28**, 34 – 45 (1919).
- [3] Г. А. Карагулян, “Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара”, *Известия НАН Армении, серия Математика*, **45**, no. 6, 33 – 50 (2010).
- [4] G. A. Karagulyan, “Divergence of general localized operators on the sets of measure zero”, *Colloq. Math.*, **121**, no. 1, 113 – 119 (2010).
- [5] Г. А. Карагулян, “О характеристике множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации”, *Мат. Сборник*, **202**, no. 1, 11 – 36 (2011).
- [6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Москва, “Наука” (1984).
- [7] М. А. Лунина, “О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара”, *Вестник Моск. ун-та, Серия 1, Мат. мех.*, no 4, 13 – 20 (1976).
- [8] W. Sierpinski, “Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues”, *Fund. Math.*, no. 2, 41 – 49 (1921).

Поступила 16 июня 2011

СРАВНЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

В. Н. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Исследуется почти гипозэллиптичность многочленов путем сравнений.

MSC2010 number: 12E10, 26C05

Ключевые слова: Почти гипозэллиптичность; гипозэллиптичность; сравнение многочленов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n$ – множество n -мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 0, \dots, n$, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, а $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$ ($i^2 = -1$) n -мерное комплексное пространство.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ ($\xi \in \mathbb{C}^n$) и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ обозначим

$$|\xi| = (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)^{1/2}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}, \quad \gamma_{\alpha} \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

многочлен, где сумма распространяется по конечному набору

$$(P) = \{\alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}.$$

Для многочлена P введем следующие обозначения:

$\Re(P)$ (характеристический многогранник многочлена P) – минимальный выпуклый многогранник содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, $\Gamma(P)$ – множество точек лежащих на главных гранях $\Re(P)$ (т.е. на тех гранях $\Re(P)$, для которых существуют индекс $j : 1 \leq j \leq n$ и внешняя (относительно $\Re(P)$) нормаль $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ этой грани, для которых $\lambda_j > 0$). Далее пусть

$$\begin{aligned} \text{ord } P &\equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|, \quad \text{ord}_j P \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ D(P, n) &\equiv \{\zeta \in \mathbb{C}^n : P(\zeta) = 0\}, \quad d_P(\xi, n) \equiv \inf_{\zeta \in D(P, n)} |\xi - \zeta|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \rho_P(n) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|\zeta|=t} d_P(\xi, n). \end{aligned}$$

Характеристический многогранник $\Re(P)$ многочлена P называется полным (правильным, вполне правильным) в $\mathbb{R}^n$, если $\Re(P)$ имеет вершину на каждой оси координат, отличную от начала координат, (компоненты внешних (относительно $\Re(P)$) нормалей $(n-1)$ -мерных не координатных граней не отрицательны, положительны).

Определение 1.1. Будем говорить, что многочлен P от n -переменных существенно зависит только от переменных $\xi_j : j \leq k$ ($k \leq n$, $k \in \mathbb{N}_0$), если $\text{ord}_j P \geq 1$ $j \leq k$ и $\text{ord}_j P = 0$, $j = k+1, \dots, n$, т.е. когда

$$P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{и} \quad \prod_{j=1}^k D_j P \neq 0.$$

Нетрудно заметить, что если многочлен P от n -переменных существенно зависит только от переменных $\xi_j : 1 \leq j \leq k$ ($k \leq n$), то

$$\begin{aligned} (1.1) \quad D(P, n) &= D(P, k) \times \mathbb{C}^{n-k}, \\ d_P(\xi, n) &= d_P(\xi', n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где} \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \\ \rho_P(n) &= \min \left\{ \rho_P(k), \inf_{\xi' \in \mathbb{R}^k} d_P(\xi, n) \right\} \quad \text{при} \quad k < n. \end{aligned}$$

Через $L(n)$ обозначим множество многочленов P рассматриваемых как многочлен от n -переменных, а через $L(n, k)$, $0 \leq k \leq n$ – множество многочленов $P \in L(n)$ существенно зависящих только от переменных $\xi_j; j \leq k$.

Определение 1.2. (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3). Многочлен $P \in L(n)$ называется *гипоэллиптическим* в $\mathbb{R}^n$, если для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из определения 1.2 следует, что если многочлен $P \in L(n)$ гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то $P \in L(n, n)$.

Определение 1.3. (см. [2]). Многочлен $P \in L(n)$ называется *почти гипоэллиптическим* в $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $c > 0$ для которого

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из определения 1.3 следует, что если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то оно, рассматриваемый как многочлен из $L(n+k)$, почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$

Пример 1.1. Многочлен $\xi_1^2 + \xi_2^2$ гипоэллиптичен и почти гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^2$. Однако этот многочлен рассматриваемый как многочлен от $n \geq 3$ переменных не является гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$, но является почти гипоэллиптическим в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные (см. [1], лемма 11.1.4, лемма 10.4.1 и теорема 10.4.3) результаты.

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ включение $P \in L(n)$ и неравенство $\text{ord} P \leq m$ выполняются.

А если $P(\xi) \neq 0$, то существуют постоянные $\chi_j = \chi_j(n, m) > 0$, ($j = 1, 2, 3, 4$), для которых

$$(1.2) \quad \chi_1 \leq d_P(\xi, n) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \right|^{1/|\alpha|} \leq \chi_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(1.3) \quad \chi_3 \tilde{P}(\xi, t) \leq \sup_{|\eta| \leq t} |P(\xi + \eta)| \leq \chi_4 \tilde{P}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

если для многочлена $Q \in L(n)$ с некоторой постоянной $\chi > 0$ выполняется неравенство

$$(1.4) \quad \tilde{Q}(\xi, 1) \leq \chi \tilde{P}(\xi, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то существует постоянная $\chi_5 = \chi_5(n, m, \chi) > 0$ для которой

$$(1.5) \quad \tilde{Q}(\xi, t) \leq \chi_5 \tilde{P}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 1,$$

где для данного многочлена $S \in L(n)$

$$\tilde{S}(\xi, t) \equiv \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |S^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \right]^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Нетрудно заметить, что если для многочленов $P, Q \in L(n)$ выполняется оценка (1.4), то $\text{ord}_j Q = 0$ при $\text{ord}_j P = 0$, $1 \leq j \leq n$.

Из оценки (1.2) и определения $\rho_P(n)$, непосредственно следует, что

- а1. многочлен $P \in L(n)$ гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\rho_P(n) = +\infty$.
- а2. если для многочлена $P \in L(n)$ $\rho_P(n) > 0$, то многочлен P почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. При этом, если $P \in L(n, k)$ $k < n$, то (см. (1.1)) существует постоянная $c > 0$ для которой

$$|P(\xi)| \geq c \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

- а3. если для почти гипоеллиптического в $\mathbb{R}^n$ многочлена $P \in L(n)$ с некоторыми постоянными $C, M > 0$

$$(1.6) \quad |P(\xi)| \geq c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{с} \quad |\xi| \geq M,$$

то $\rho_P(n) > 0$.

Заметим, что если для многочлена $P \in L(n) \setminus L(n, n)$ выполняется оценка (1.6), то

$$|P(\xi)| \geq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 1.1. Несмотря на то, что из почти гипоеллиптичности в $\mathbb{R}^n$ многочлена $P \in L(n)$ следует его почти гипоеллиптичность в $\mathbb{R}^{n+k}$, если его рассмотреть как многочлен от $(n+k)$ -переменного $k = 0, 1, \dots$, однако, при $\rho_P(n) > 0$ $\rho_P(n+k)$ может обращаться в нуль при $k = 1, 2, \dots$ (см. а1).

Пример 1.2. Многочлен $P = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ и (см. а1) $\rho_P(2) = +\infty$, т.к. многочлен P гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^2$. Однако, $\rho_P(n) = 0$ при $n \geq 3$.

Определение 1.4. (см. определения 10.3.4 и 10.4.4 из [1] и [3]). Многочлен $P \in L(n)$ сильнее (доминирует, мощнее) многочлена $Q \in L(n)$ и записывают $Q \prec P$ ($Q \prec\prec P$; $Q < P$), если с некоторой постоянной $\chi > 0$ выполняется оценка (1.4) $\left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \tilde{Q}(\xi, t) / \tilde{P}(\xi, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty; \text{ с некоторой постоянной } c > 0 \right) |Q(\xi)| \leq (|P(s)| + 1)$, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Из определения 1.4 и оценки (1.3) следует, что если $Q \prec\prec P$ ($Q < P$), то $Q \prec P$, если $Q \prec P$, то $D_j Q \prec\prec P$, $j = 1, \dots, n$.

Замечание 1.2. Если $Q < P$, $Q \prec P$, $Q \prec\prec P$ $P, Q \in L(n)$ то $\text{ord}_j Q = 0$ при $\text{ord}_j P = 0$ $1 \leq j \leq n$.

В работе [4] В. П. Михайловым и в [5] в других терминах, Л. Р. Волевичем, С. Г. Гиндикином введено понятие регулярного многочлена и доказано, что многочлен $P \in L(n)$ регулярен тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $c > 0$

$$|\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n} \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где } \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathfrak{R}(P).$$

Известно (см. [3] – [5]), что

- b1. если многочлен $P \in L(n)$ регулярен, то $Q < P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$.
- b2. если характеристический многогранник $\mathfrak{R}(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ полный, то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,
- b3. если характеристический многогранник $\mathfrak{R}(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ полный, $Q \in L(n)$ то $Q(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $Q(\xi) \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P) \setminus \Gamma(P)$,
- b4. если характеристический многогранник $\mathfrak{R}(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ правильный, то $Q \prec P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P)$

б5. если характеристический многогранник $\mathfrak{R}(P)$ регулярного многочлена $P \in L(n)$ вполне правильный, то $Q \prec\prec P$ для многочлена $Q \in L(n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}(P) \setminus \Gamma(P)$.

Заметим, что если P многочлен из пунктов б2 - б4, то $P \in L(n, n)$, если из пункта б5, то P гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Из теоремы 11.1.9, определения гипоеллиптичности и следствия 10.4.8 работы [1] следует, что

- (i) если $Q \prec P \prec Q$, $Q \in L(n)$ и многочлен P гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то многочлен Q также гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$,
- (ii) если $P, Q \in L(n)$ гипоеллиптичны в $\mathbb{R}^n$, то $P \cdot Q$ также гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$,
- (iii) если $P \in L(n)$ гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ и $Q \prec\prec P$ ($Q \in L(n)$), то для любого $a \in C$ многочлен $P + aQ$ также гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

На примерах покажем, что в общем случае, эти утверждения перестают быть справедливыми для почти гипоеллиптических в $\mathbb{R}^n$ многочленов.

Пример 1.3. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^4$, $Q(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^4$. Прямой проверкой можно убедиться, что многочлен P почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^2$, Q не является почти гипоеллиптическим в $\mathbb{R}^2$ хотя с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$

$$\begin{aligned} c_1^{-1}(|P(\xi)| + 1) &\leq \tilde{P}(\xi, 1) \leq c_1(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \\ c_2^{-1}(|P(\xi)| + 1) &\leq \tilde{Q}(\xi, 1) \leq c_2(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

т.е. $Q \prec P \prec Q$.

Пример 1.4. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $Q(\xi) = \xi_1 - \xi_2$. Нетрудно проверить, что оба многочлена почти гипоеллиптичны в $\mathbb{R}^2$. Однако при $\xi_1 = \xi_2 \rightarrow \infty$

$$|D_1(P \cdot Q)(\xi)| / (|(P \cdot Q)(\xi)| + 1) \rightarrow \infty,$$

т.е. многочлен $P \cdot Q$ не является почти гипоеллиптическим в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1.5. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_2^2$, $Q(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Так как при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|(D_1^2 + D_2^2)P(\xi)| \geq 2|Q(\xi)|$, то $Q \prec\prec P$. С другой стороны непосредственной проверкой можно убедиться, что многочлен $P - Q$ не является почти гипоеллиптичным в $\mathbb{R}^2$ хотя многочлен P почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^2$.

Цель настоящей работы — исследовать условия, при которых утверждения (i), (ii) и (iii) останутся в силе, если заменить гипоеллиптичность на почти гипоеллиптичность.

2. ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теорема 2.1. Пусть для многочленов $P, Q \in L(n)$ с некоторой постоянной $c > 0$

$$(2.1) \quad c^{-1}\tilde{Q}(\xi, 1) \leq \tilde{P}(\xi, 1) \leq c\tilde{Q}(\xi, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. $Q \prec P \prec Q$. Тогда существует число $\rho_0 = \rho_0(c, \chi_2, \chi_5) > 0$ (χ_2, χ_5 — постоянные из оценок (1.2) и (1.5)), такие, что если $\rho_P(n) > \rho_0$, то многочлен Q почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\rho_1 \in (0, \rho_P)$ любое фиксированное число. Тогда из оценки (1.2) имеем, что существует постоянная $M(\rho_1) > 0$ для которого

$$(2.2) \quad d_P(\xi, n) \geq \rho_1/2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \geq M(\rho_1),$$

и

$$(2.3) \quad \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| d_P^{(\alpha)}(\xi, n) \leq \chi_2^{|\alpha|} |P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \geq M(\rho_1), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Из условия $Q \prec P$ теоремы, в силу оценок (2.2), (1.5) и (2.3) с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\chi_2, \chi_5) > 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$ когда $\rho_1 \geq 2$ имеем, что

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \tilde{Q}(\xi, \rho_1/2) &\leq \tilde{Q}(\xi, d_P(\xi, n)) \leq \chi_5 \tilde{P}(\xi, d_P(\xi, n)) \\
 &= \chi_5 \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 d_P^{2|\alpha|}(\xi, n) \right]^{1/2} \\
 &\leq \chi_5 |P(\xi)| \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq \text{ord } P} \chi_2^{2|\alpha|} \right)^{1/2} \leq c_1 |P(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Так как, в силу оценки (2.1),

$$|P(\xi)| \leq c \cdot \tilde{Q}(\xi, 1) \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то из оценки (2.4) и отсюда при $\rho_1 \geq 2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$ имеем, что

$$\begin{aligned}
 |Q(\xi)|^2 + \left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2 \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 &\leq \left(\tilde{Q}(\xi, \rho_1/2) \right)^2 \leq c_1^2 |P(\xi)|^2 \\
 &\leq c_1^2 c^2 \left(\tilde{Q}(\xi, 1) \right)^2 \leq c_1^2 c^2 \left(|Q(\xi)|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Пусть $\rho_0 \equiv \max\{2, 2\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot c\}$ и $\rho_P > \rho_0$. Тогда при $\rho_1 \in (\rho_0, \rho_P)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq M(\rho_1)$

$$(2.5) \quad |Q(\xi)|^2 + c_1^2 c^2 \sum_{\alpha \neq 0} \left| Q^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 \leq c_1^2 c^2 |Q(\xi)|^2.$$

Откуда, непосредственно, следует утверждение теоремы 2.1. $\square$

Следствие 2.1. При условиях теоремы 2.1 $\rho_Q(n) > 0$.

Доказательство. Непосредственно, следует из оценки (2.5) и в силу оценки (1.4) для многочлена Q . $\square$

Теорема 2.2. Пусть $P, Q \in L(n)$. Если $Q < P < Q$ и многочлен P почти гипозллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то многочлен Q также почти гипозллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из оценки (1.3), в силу условия $Q < P$ и почти гипозллиптичности многочлена P в $\mathbb{R}^n$, с некоторыми постоянными $c_j > 0$, ($j = 1, 2, 3, 4$)

имеем, что

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\xi, 1) &\leq c_1 \sup_{|\eta| \leq 1} |Q(\xi + \eta)| \leq c_2 \sup_{|\eta| \leq 1} (|P(\xi + \eta)| + 1) \leq c_3 \tilde{P}(\xi, 1) \\ &\leq c_4 (|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия $P < Q$, с некоторой постоянной $c_5 > 0$ имеем, что

$$\tilde{Q}(\xi, 1) \leq c_5 (|Q(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. многочлен Q почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в теореме 2.2 не требовалось условие $\rho_P(n) > 0$.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$ $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2$, $Q_a(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_1 - \xi_2) + a$, $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, оба многочлена почти гипоеллиптичны в $\mathbb{R}^2$ и $Q \prec P \prec Q$. Однако $\rho_P(2) = 0$, $\rho_{Q_a}(2) = 0$ при $a \leq \frac{1}{4}$ и $\rho_{Q_a}(2) > 0$ при $a > \frac{1}{4}$.

Теорема 2.3. Если для многочленов $P, Q \in L(n)$ $\rho_P(n) > 0$, $\rho_Q(n) > 0$, то $\rho_{P \cdot Q}(n) > 0$ т.е. (см. пункт а2) многочлен $P \cdot Q$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Так как, очевидно, $D(P \cdot Q, n) = D(P, n) \cup D(Q, n)$, то

$$d_{P \cdot Q}(\xi, n) = \min\{d_P(\xi, n), d_Q(\xi, n)\} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда $\rho_{P \cdot Q}(n) = \min\{\rho_P(n), \rho_Q(n)\} > 0$. Следовательно, в силу пункта а2, многочлен $P \cdot Q$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Следствие 2.2. Пусть $1 \leq k < n$, $1 < l \leq n$, $P \in L(n, k)$, $Q \in L(n)$, $\text{ord}_j Q = 0$, $j = 1, \dots, l-1$, $\text{ord}_j Q \geq 1$, $j = l, \dots, n$. Если многочлен P почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^k$, Q почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^{n-l}$ и с некоторой постоянной $c > 0$

$$(2.6) \quad \begin{aligned}|P(\xi)| &\geq c, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k, \\ |Q(\xi)| &\geq c, \quad \xi'' = (\xi_l, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-l}.\end{aligned}$$

то многочлен $P \cdot Q$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из оценки (2.6) в силу пункта а3 имеем, что $\rho_P(k) > 0$, $\rho_Q(n-l) > 0$. Из оценок (2.6), (1.3) и почти гипоеллиптичности в $\mathbb{R}^k$ многочлена P и в

$\mathbb{R}^{n-l}$ многочлена Q имеем, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$d_P(\xi', k) \geq c_1, \quad \xi' \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad d_Q(\xi'', n-l) \geq c_1, \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-l}.$$

Следовательно, в силу (1.1)

$$\rho_P(n) \geq \min\{c_1, \rho_P(k)\} > 0 \quad \text{и} \quad \rho_Q(n) \geq \min\{c_1, \rho_Q(n-l)\} > 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.3 получаем, что многочлен $P \cdot Q$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. $\square$

На примере покажем, что, при условиях следствия 2.2, выполнение оценки (2.6) существенно для почти гипоеллиптичности многочлена $P \cdot Q$.

Пример 2.2. Пусть $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$, $Q(\xi) = \xi_2^2 + \xi_3^2 - 1$, $\xi \in \mathbb{R}^3$. Нетрудно заметить, что многочлены P , Q почти гипоеллиптичны в $\mathbb{R}^2$. Однако $P \cdot Q$ не является почти гипоеллиптическим в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2.4. Многочлен $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ многочлен $|P|^2 = P \cdot \bar{P}$.

Доказательство. Пусть многочлен $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Тогда в силу конечности множества $\{\alpha; \alpha \in N_0^n, \quad D^\alpha |P|^2 \neq 0\}$, оценки (1.3) и формулы Тейлора с некоторыми постоянными $c_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} D^\alpha |P|^2(\xi) &\leq c_1 \left(\sum_{\alpha} (D^\alpha |P|^2(\xi))^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_2 \sup_{|\eta| \leq 1} |P|^2(\xi + \eta) = c_2 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} |P(\xi + \eta)| \right)^2 \\ &\leq c_2 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} \left| \sum_{\beta} \frac{P^\beta(\xi) \eta^\beta}{\alpha!} \right| \right)^2 \leq c_2 \left(\sum_{\beta} \left| \frac{P^\beta(\xi)}{\beta!} \right| \right)^2 \\ &\leq c_3 (|P(\xi)| + 1)^2 \leq c_4 (|P(\xi)|^2 + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что многочлен $|P|^2$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Обратно, пусть для многочлена $P \in L(n)$ многочлен $|P|^2$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, т.е. с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$\sum_{\alpha} (D^{\alpha} |P|^2(\xi)) \leq c_5 (|P|^2(\xi) + 1) \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как, в силу конечности множества $\{\alpha; \alpha \in N_0^n, P^{(\alpha)} \neq 0\}$, с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c_6 \left(\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то отсюда, в силу оценки (1.3) и формулы Тейлора, с некоторой постоянной $c_7 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 &\leq c_7 \left(\sup_{|\eta| \leq 1} |P(\alpha + \eta)| \right)^2 = c_7 \sup_{|\eta| \leq 1} |P|^2(\alpha + \eta) \\ &= c_7 \sup_{|\eta| \leq 1} \left| \sum_{\beta} \frac{D^{\beta} |P|^2(\xi) \eta^{\beta}}{\beta!} \right| \leq c_7 \sum_{\beta} \left| \frac{D^{\beta} |P|^2(\xi)}{\beta!} \right| \\ &\leq c_7 c_5 (|P|^2(\xi) + 1) \leq c_7 c_5 (|P(\xi)| + 1)^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Откуда, непосредственно, следует почти гипоеллиптичность многочлена P в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в отличие от теоремы 2.3 здесь не требовалось условие $\rho_P(n) > 0$. Аналогично теореме 2.4 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.5. *Многочлен $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$ многочлен P^2 .*

Теорема 2.6. *Пусть $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Если для многочлена $Q \in L(n)$*

$$(2.7) \quad |Q(\xi)| / [|P(\xi)| + 1] \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad Q(\xi) \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то для любого $0 \neq a \in C$ многочлен $P + aQ$ также почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для любого $t > 0$ через $A(Q, t)$ обозначим множество $\xi \in \mathbb{R}^n$ для которых $|Q(\xi)| \geq t$. Пусть $0 \neq a \in C$ любое фиксированное число. Из соотношения (2.7) следует, что существует число $t_a > 0$ для которого

$$|Q(\xi)|/(|P(\xi)| + 1) \leq \frac{|a|}{2}, \quad \xi \in A(Q, t_a),$$

Для любого $\xi \in A(Q, t_a)$ имеем

$$1 + |P(\xi) + aQ(\xi)| \geq 1 + |P(\xi)| - |a||Q(\xi)| \geq \frac{1}{2}(1 + |P(\xi)|).$$

Так как при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus A(Q, t_a)$,

$$|P(\xi) + aQ(\xi)| \geq |P(\xi)| - |a|t_a,$$

то отсюда получаем, что $P < P + aQ$.

Так как из соотношения (2.7) следует, что с некоторой постоянной $c > 0$

$$\begin{aligned} |P(\xi) + aQ(\xi)| &\leq |P(\xi) + |a||Q(\xi)|| \leq |P(\xi)| + |a|c(|P(\xi)| + 1) \\ &\leq (|a|c + 1)(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Следовательно, при выполнении соотношения (2.7) для любого $a \in C$ $P < P + aQ < P$. Отсюда по теореме 2.2, в силу почти гипоеллиптичности в $\mathbb{R}^n$ многочлена P получаем утверждение теоремы. $\square$

3. ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Определение 3.1. Скажем, что многочлен $P \in L(n)$ устойчив в $\mathbb{R}^n$, если для любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ многочлен $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$ принадлежит $L(n, n)$.

Нетрудно проверить, что гипоеллиiptические в $\mathbb{R}^n$ многочлены из $L(n)$ устойчивы в $\mathbb{R}^n$. Известно (см. [6]), что

- с1. если почти гипоеллиiptический в $\mathbb{R}^n$ многочлен $P \in L(n)$ устойчив в $\mathbb{R}^n$,
то

$$P \in I_n \equiv \{Q \in L(n) : Q(\xi) \rightarrow \infty \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty\} \subset L(n, n).$$

- с2. если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то для любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ многочлен $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$ также почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$,
- с3. если многочлен $P \in L(n)$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то многочлены $Q_j(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \equiv P(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$, $j = 1, \dots, n$ почти гипоеллиптичны в $\mathbb{R}^{n-1}$,
- с4. если почти гипоеллиптический в $\mathbb{R}^n$ многочлен $P \in L(n)$ с $\text{ord}P \geq 1$ не устойчив в $\mathbb{R}^n$, то существуют линейное, обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k < n$, почти гипоеллиптический в $\mathbb{R}^k$, устойчивый в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ такой, что

$$Q(\eta) = q(\eta_1, \dots, \eta_k), \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$.

Лемма 3.1. *Если почти гипоеллиптический в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) многочлен $P \in L(n)$ с вещественными коэффициентами устойчив в $\mathbb{R}^n$, то существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$P(\xi) \geq a, \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{либо} \quad P(\xi) \leq a, \quad \text{для любого } \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. непосредственно следует из пункта 3.1 так как, если многочлен $P \in L(n)$, $n \geq 2$ с вещественными коэффициентами принадлежит I_n , то либо $P(\xi) \rightarrow +\infty$ когда $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ либо $P(\xi) \rightarrow -\infty$ когда $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $m, n \in N$, $m \geq 1$, $n \geq 2$, $P(\xi) = \xi_1^m + r(\xi) \in L(n)$, $\text{ord}r < m$ многочлен с вещественными коэффициентами, для которого $\text{ord}_2 r + \dots + \text{ord}_n r \geq 1$. Если многочлен P почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то для него верно утверждение леммы 3.1.*

Доказательство. Предположим обратное, что существуют последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$, $\{\eta^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \rightarrow \infty$, $|\eta^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ для которых

$$(3.1) \quad P(\xi^s) \rightarrow -\infty \quad \text{и} \quad P(\eta^s) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Отсюда, в силу вещественности P и условия $n \geq 2$, существует последовательность $\{\tau^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $|\tau^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $P(\tau^s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$. Отсюда, в силу пункта с1 следует, что многочлен P не устойчив в $\mathbb{R}^n$. Тогда, в силу пункта с4, для некоторого линейного, обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k < n$, устойчивого и почти гипоеллиптического в $\mathbb{R}^k$ (в силу пунктов с2 и с3) многочлена $q \in L(k)$ имеем, что

$$(3.2) \quad P(T\eta) \equiv Q(\eta) = q(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' = (\eta_1, \dots, \eta_k).$$

Покажем, что при условиях леммы $k \geq 2$. Предположим обратное, что $k = 1$. Тогда из (3.2) следует, что для любого j имеем

$$(3.3) \quad 0 \equiv \frac{\partial}{\partial \eta_j} q(\eta_1) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} P(T\eta) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} P \right) (T\eta) t_{lj}, \quad j = 2, \dots, n,$$

где $(t_{lj})_{l,j=1}^n \equiv T$.

Так как, в силу вида P

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} P \right) (T\eta) t_{lj} = \frac{\partial}{\partial \xi_l} (\xi_1^m + r(\xi)) \Big|_{\xi=T\eta} t_{1j} + \sum_{l=2}^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} r \right) (T\eta) t_{lj},$$

то отсюда и условия $ord r < m$ получаем, что $t_{1j} = 0$, $j = 2, \dots, n$. Следовательно из (3.3) получаем, что

$$\sum_{l=2}^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} r \right) (T\eta) t_{lj} \equiv 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Отсюда, в силу обратимости минора $(t_{lj})_{l,j=2}^n$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} r \right) (T\eta) \equiv 0 \quad l = 2, \dots, n.$$

Это, в силу обратимости T , противоречит условию $ord_2 r + \dots + ord_n r \geq 1$ леммы и доказывает, что в представлении (3.3) $k \geq 2$.

Так как многочлен $q \in L(k)$ устойчив, почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^k$ и $k \geq 2$, то в силу леммы 3.1 существует число $a \in R$ для которого

$$(3.4) \quad q(\eta') \geq a, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k,$$

либо

$$(3.5) \quad q(\eta') \leq a, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k.$$

Тогда из (3.2), в силу обратимости T , имеем, что

$$P(\xi) \geq a \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

если имеет место (3.4) или

$$P(\xi) \leq a \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

если имеет место (3.5).

Оба случая противоречат соотношению (3.1) и доказывают утверждение леммы. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $P, Q \in L(n)$, $\text{ord}Q < \text{ord}P$ такие многочлены с вещественными коэффициентами, что для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $R_a = P + aQ$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Если для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$(3.6) \quad P(\xi) \geq c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то для любого $a \in \mathbb{R}$ существует постоянная $c_a \in \mathbb{R}$ для которой

$$(3.7) \quad R_a(\xi) \geq c_a, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Представим многочлен P в следующем виде $P = P_0 + r$, где P_0 – однородный многочлен порядка $\text{ord}P$ и $\text{ord}r < \text{ord}P$. Тогда из (3.6) в силу однородности многочлена P_0 имеем, что

$$(3.8) \quad P_0(\xi) \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть при условиях леммы, существует число $a_0 \in \mathbb{R}$, для которого не выполняется оценка (3.7). Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ для которой

$$(3.9) \quad R_{a_0}(\eta^s) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Так как $\text{ord}P_0 = \text{ord}P > \text{ord}Q$, $\text{ord}P_0 > \text{ord}r$, то из (3.8) следует, что существует последовательность $\{\eta^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $|\eta^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и для которой

$$(3.10) \quad R_{a_0}(\eta^s) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Проводя рассуждения аналогичные доказательству леммы 3.2, в силу соотношений (3.9) и (3.10), получаем, что существуют линейное, обратимое отображение

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k < n$ и устойчивый, почти гипоеллиптический в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ для которого

$$(3.11) \quad \begin{aligned} R_{a_0}(T\eta) &= P_0(T\eta) + r(T\eta) + a_0Q(T\eta) \\ &= q(\eta') = q_0(\eta') + q_1(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta' &= (\eta_1, \dots, \eta_k), \quad q_0(\eta') \equiv P_0(T\eta), \quad q_1(\eta') \equiv r(T\eta) + a_0Q(T\eta), \\ \text{ord } q_0 &= \text{ord } P_0 = \text{ord } P \quad \text{and} \quad \text{ord } q_1 = \text{ord } (r + a_0Q) \leq m - 1. \end{aligned}$$

Так как, в силу оценки (3.8)

$$q_{a_0}(\eta') \geq 0, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k,$$

и $\text{ord } q_0 > \text{ord } q_1$, то существует последовательность $\{(\tau')^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^l$ при $s \rightarrow \infty$ для которой

$$q((\tau')^s) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Отсюда, в силу устойчивости многочлена q в $\mathbb{R}^k$, имеем (см. 3.1)

$$q(\eta') \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |\eta'| \rightarrow \infty, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k.$$

Следовательно с некоторой постоянной $c_1 \in \mathbb{R}$

$$(3.12) \quad q(\eta') \geq c_1, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k.$$

Из (3.11), в силу (3.12) и обратимости T , имеем

$$R_{a_0}(\xi) \geq c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Это противоречит соотношению (3.4) и доказывает справедливость утверждения леммы. $\square$

Предложение 3.1. Пусть f, g – функции, определенные на $\mathbb{R}^n$ а $\{a_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $|a_s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ – некоторая последовательность. Если для любого s с некоторой постоянной c_s

$$(3.13) \quad |a_s g(\xi)| \leq |f(\xi)| + c_s, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то $|g(\xi)/f(\xi)| \rightarrow 0$ при $g(\xi) \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть, наоборот, существует последовательность $\{\xi^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $|g(\xi^k)| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $|g(\xi^k)/f(\xi^k)| \geq \varepsilon$, $s = 1, 2, \dots$. Так как $|a_s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то существует $s_0 \in N$ для которого $|a_{s_0}| \geq 2/\varepsilon$. Тогда, из оценки (3.13) имеем, что

$$|a_{s_0}g(\xi^k)| \leq |f(\xi^k)| + c_{s_0} \leq \frac{|a_{s_0}|}{2} |g(\xi^k)| + c_{s_0}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которое противоречит условию $g(\xi^k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения предположения. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $P, Q \in L(n)$, $\text{ord}Q < \text{ord}P$ – многочлены с вещественными коэффициентами. Если для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $P + aQ$ почти гипозеллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то

$$Q(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Q(\xi) \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Так как при $n = 1$ утверждение теоремы непосредственно следует из условия $\text{ord}Q < \text{ord}P$, то пусть $n \geq 2$. Тогда, в силу пунктов с1 и с4, существуют линейное, обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in N$, $1 \leq k \leq n$ и устойчивый, почти гипозеллиптический в $\mathbb{R}^k$ многочлен $q \in L(k)$ для которого

$$(3.14) \quad P(T\eta) = q(\eta'), \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_k)$.

Через $R_a(\eta)$ обозначим многочлен $P(T\eta) + aQ(T\eta)$, $a \in \mathbb{R}$. В силу пункта 3.2 для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен $R_a(\eta)$ почти гипозеллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

- (A) $k = 1$,
- (B) $k \geq 2$.

В случае (A) возможны следующие подслучаи:

- (A₁) $\text{ord}_2 r + \dots + \text{ord}_n r = 0$,
- (A₂) $\text{ord}_2 r + \dots + \text{ord}_n r \geq 1$,

где $r(\eta) \equiv Q(T\eta)$.

Так как, в силу обратимости T , $Q(\xi) \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $r(\eta) \rightarrow \infty$, где $\xi = T\eta$, то в подслучае (A_1) утверждение теоремы непосредственно следует из условия $\text{ord}Q = \text{ord}r < \text{ord}q = \text{ord}P$.

Рассмотрим подслучай (A_2) . Пусть $0 \neq a_0 \in \mathbb{R}$. Тогда, в силу леммы 3.2 существует постоянная $c \in \mathbb{R}$, для которой

$$(3.15) \quad R_{a_0}(\eta) \geq c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

либо

$$(3.16) \quad R_{a_0}(\eta) \leq c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Так как утверждение теоремы при выполнении оценки (3.17) доказывается аналогично случаю, когда выполняется оценка (3.16), то пусть имеет место оценка (3.16). Тогда, в силу леммы 3.3 для любого $a \in \mathbb{R}$ существует число $c_a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$R_a(\eta) = R_{a_0}(\eta) + (a - a_0)r(\eta) \geq c_a, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда непосредственно получаем, что

$$|\theta r(\eta)| \leq |R_{a_0}(\eta)| + \max\{|c_{\theta+a_0}|, |c_{-\theta+a_0}|\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, в силу предложения 3.1

$$r(\eta)/R_{a_0}(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r(\eta) \rightarrow \infty, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

или, что тоже самое

$$r(\eta)/P(T\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r(\eta) \rightarrow \infty, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Но так как, в силу обратимости T , $Q(\xi) \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $r(\eta) \rightarrow \infty$, $\xi = T\eta$, то отсюда получаем утверждение теоремы и в подслучае (A_2)

Рассмотрим случай (B) ($k \geq 2$). Так как $q(\eta')$ устойчивый почти гипоеллиiptический в $\mathbb{R}^k$ многочлен, то, в силу пункта 3.1 по лемме 3.1 существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$(3.17) \quad q(\eta') \geq c, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k,$$

либо

$$(3.18) \quad q(\eta') \leq c, \quad \eta' \in \mathbb{R}^k.$$

Так как утверждение теоремы при выполнении оценки (3.19) доказывается аналогично случаю, когда выполняется оценка (3.18), то пусть выполняется оценка (3.18). Из представления (3.15), в силу обратимости T , из оценки (3.18) имеем, что

$$P(\xi) \geq c, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда, в силу леммы 3.3 при условиях теоремы имеем, что для любого $a \in \mathbb{R}$ с некоторой постоянной $c_a \in \mathbb{R}$

$$P(\xi) + aQ(\xi) \geq c_a, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда, проводя аналогичные рассуждения как в подслучае (A_2) получаем, что

$$Q(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Q(\xi) \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Этим утверждение теоремы в случае (B) и тем самым окончательно доказана. $\square$

Следствие 3.1. *При условиях теоремы 3.1 для всех $j: 1 \leq j \leq n$ для которых $\text{ord}_j Q > 0$ $\text{ord}_j P > \text{ord}_j Q$.*

Доказательство непосредственно следует из условия

$$Q(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Q(\xi) \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3.1 является обратной к теореме 2.6, когда многочлены $P, Q \in L(n)$ вещественнозначные.

На примере покажем, что обратное утверждение теоремы 2.6 в общем случае не верна.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^2$, $Q(\xi) = \xi_1 + i\xi_2$. Не трудно проверить, что при всех $a \in \mathbb{C}$ с некоторой постоянной $c_a > 0$

$$|\xi_1| \leq c_a(|P(\xi) + aQ(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда с некоторой постоянной $c'_a > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |D^{\alpha}(P(\xi) + aQ(\xi))| &\leq |P(\xi) + aQ(\xi)| + 2|\xi_1| + |a| + 2 \\ &\leq c'_a(|P(\xi) + aQ(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

т.е. для любого $a \in \mathbb{C}$ многочлен $P + aQ$ почти гипоеллиптичен в $\mathbb{R}^2$. Однако $Q(\xi)/P(\xi) \not\rightarrow 0$ при $Q(\xi) \rightarrow \infty$.

Abstract. The paper investigates the hypoellipticity of polynomials in terms of comparisons.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, Москва, Мир, **2**, (1986).
- [2] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
- [3] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Критерии гипоеллиптичности в терминах мощности и силы операторов", Тр. МИАН СССР, **150**, 128 – 142 (1979).
- [4] В. П. Михайлов, "О поведений на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1961).
- [5] L. Volevich, S. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedrons in the Theory of PDE, Kluwer Acad. Publisher (1992).
- [6] H. G. Kazaryan, V. N. Margaryan, "On increase at infinity of the almost hypoelliptic polynomials", Eurasian Math. Journal (prepared to print)

Поступила 20 мая 2011

О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СО ЗВЕЗДНЫМИ ГРАФИКАМИ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *protectdrive@gmail.com*

Аннотация. В статье изучаются некоторые топологические свойства звездных тел. Доказано, что граница звездного тела является липшицевой поверхностью. Доказана теорема отделимости звездных тел. Показано, что условие звездности графика при некоторых дополнительных предположениях обеспечивает локальную липшицевость многозначного отображения. Показано, что контингентные и касательные конусы Ф. Кларка являются шатрами Болтянского. На основе этих результатов для некоторых многозначных отображений со звездными графиками построены нижние и верхние дифференциалы. Доказаны теоремы о неподвижных точках многозначных отображений со звездными значениями.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: Звездное множество; касательный конус; шатер; многозначное отображение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] посредством контингентных и касательных конусов определяется производная для многозначных отображений в точках их графиков. Из выпуклого анализа известно [4], [5], [10], что можно определить шатры к выпуклым и невыпуклым множествам. Эти конусы сохраняют многие свойства касательных пространств. В настоящей статье доказано, что контингентные и касательные конусы Кларка [7] для звездных множеств являются шатрами Болтянского [4]. При помощи этих результатов построены нижние и верхние дифференциалы для многозначных отображений со звездными графиками. Как известно [1], [6], [16], [18], основная идея дифференциального исчисления многозначных функций состоит в локальном приближении отображения положительно однородными отображениями. Различные определения дифференцируемости многозначных отображений рассматривались в работах [1], [16], [17]. Ближе всего к определению, принятому

в данной работе, стоит определение Де Блази [16]. Этот подход позволяет выяснить существование селекций, которые имеют производные по направлениям. Эти факты уточняют известные результаты Э. Майкла, полученные в [19].

Обобщена теорема Какутана о неподвижной точке для непрерывных многозначных отображений со звездными значениями.

В статье приняты известные определения и обозначения из выпуклого анализа [10], [12], а также понятия непрерывности и липшицевости многозначных отображений [1], [6], [11], [14].

В дальнейшем, если f липшицева функция, то $\partial^0 f(x)$ и $f'(x, \bar{x})$ соответственно субдифференциал и верхняя производная Кларка [7]. $B_r(x)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . ∂M – граница множества M . $\overline{M}$ – замыкание множества M . $d(x, A)$ – расстояние от точки x до множества A . $H(A, B)$ – хаусдорфово расстояние между множествами A и B . Если $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение, то

$$\text{graf}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) / y \in a(x)\}, \text{ dom}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x / a(x) \neq \emptyset\}, \|a(x)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in a(x)} \|y\|.$$

2. О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть M – подмножество банахова пространства X . Положим

$$M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M : \lambda x + (1 - \lambda)y \in M, y \in M, \text{ и } \lambda \in [0, 1]\}.$$

Подмножество M^0 называется ядром звездности множества M . Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным [12]. Нетрудно показать, что M^0 – выпуклое множество. Очевидно, что если M выпуклое множество, то $M = M^0$. Звездное множество M называется звездным телом, если $\text{int } M^0 \neq \emptyset$.

Предложение 2.1. Пусть $M \subseteq X$ звездное тело. Тогда:

- (1) если $x \in \text{int } M^0$, $y \in M$, то $\lambda y + (1 - \lambda)x \in \text{int } M$ для всех $\lambda \in [0, 1]$;
- (2) $\overline{\text{int } M} = \overline{M}$;
- (3) $\text{int } M = \text{int } \overline{M}$;
- (4) $\overline{M^0} = (\overline{M})^0$.

Доказательство. Доказательства соотношений 1 – 3 мы опускаем, ибо они аналогичны доказательству в выпуклом случае. Покажем последнее свойство. Имеет место очевидное включение $\overline{M^0} \subseteq (\overline{M})^0$. Покажем теперь обратное включение. Предположим, что существует точка $x \in (\overline{M})^0$, но $x \notin \overline{M^0}$. Пусть $y \in \text{int} M^0$. Тогда так как множество $(\overline{M})^0$ выпуклое, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{conv}\{B_\varepsilon(y), x\} \subseteq (\overline{M})^0$. Согласно условию 1 для достаточно малых $\lambda \in (0, 1)$ имеем

$$x_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda y + (1 - \lambda)x \in \text{int} (\overline{M})^0.$$

Поскольку $x \notin \overline{M^0}$, то можно считать, что $x_\lambda \notin \overline{M^0}$. Следовательно, существует точка $z \in M$, которая не видна из точки x_λ , т.е. на отрезке $[x_\lambda, z]$ найдется точка q такая, что $q \notin M$. Но поскольку $x_\lambda \in (\overline{M})^0$ и $z \in M$, то $[x_\lambda, z] \subseteq \text{int } \overline{M}$. Отсюда получим $[x_\lambda, z] \subseteq \text{int } M$, т.е. $q \in M$, что противоречит предположению. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $f(x)$ – липшицева функция на замкнутом шаре $B_\varepsilon(x_0)$, $x_0 \in X$. Тогда

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{epi}(f) = \{(\mu, x) / \mu \geq f(x), x \in B_\varepsilon(x_0)\}$$

является звездным множеством.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ – липшицева функция, то существует такое число $L > 0$, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\| \text{ для всех } x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x_0).$$

Покажем, что при достаточно больших $\bar{\mu}$ точка $(\bar{\mu}, \bar{x}) \in M^0$ для всех $\bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$. Если $(\mu, x), (\bar{\mu}, \bar{x}) \in M$, то

$$\mu - f(x) \geq 0, \quad \bar{\mu} - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Отсюда при $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) &\geq \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - L(1 - \lambda)\|\bar{x}\| - f(\lambda x) \geq \\ &\geq \lambda\mu + (1 - \lambda)\bar{\mu} - L(1 - \lambda)\|\bar{x}\| - L(1 - \lambda)\|x\| - f(x) \geq (1 - \lambda)(\bar{\mu} - L\|\bar{x}\| - L\|x\| - f(x)). \end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ ограничена в $B_\varepsilon(x_0)$, то из последнего неравенства следует, что можно выбрать $\bar{\mu}$ настолько большим, что

$$\bar{\mu} - L\|\bar{x}\| - L\|x\| - f(x) > 0 \text{ для всех } \bar{x}, x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Таким образом показано, что $\lambda\mu + (1-\lambda)\bar{\mu} \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x})$. Это означает, что $(\bar{\mu}, \bar{x}) \in M^0$. $\square$

Определение 2.1. [7]. Вектор ν называется гиперкасательным к множеству M в точке $x \in M$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $y + tw \in M$ для всех $y \in B_\varepsilon(x) \cap M$, $w \in B_\varepsilon(\nu)$ и $t \in (0, \varepsilon)$.

Предложение 2.2. Если $M \subseteq R^n$ – звездное тело, то для любых $x \in \partial M$ и $x_0 \in \text{int } M^0$ вектор $\nu = (x_0 - x)/\|x - x_0\|$ является гиперкасательным к множеству M .

Доказательство. Полагая $\lambda = \|x - x_0\|$, получим $x_0 = x + \lambda\nu$. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $x + \lambda\nu + B_\varepsilon(0) \subseteq M^0$. Выберем теперь число $\delta > 0$ так, что $B_\delta(x) + \lambda B_\delta(\nu) \subseteq M^0$. Тогда для любых $t \in (0, \delta)$, $y \in B_\delta(x)$, $w \in B_\delta(\nu)$ имеем

$$y + tw = (1 - \frac{t}{\lambda})y + \frac{t}{\lambda}(y + \lambda w).$$

Если $y \in M$, то $y + \lambda w \in M^0$, и поэтому $y + tw \in M$. Это означает, что ν –гиперкасательная к множеству M в точке x . $\square$

Определение 2.2. Множество $M \subseteq R^n$ называется эллиптицизовым вблизи точки $x \in M$, если существует такое линейное обратимое отображение $A : R^n \rightarrow R^{n-1} \times R$, что для некоторой окрестности U точки x имеем

$$M \cap U = U \cap A^{-1}(\text{epi}\varphi),$$

где функция $\varphi : R^{n-1} \rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности ξ , где ξ есть компонента $A(x)$.

Согласно предложению 2.2 множество гиперкасательных для звездных тел непусто. Поэтому из теоремы 7.3 [7] непосредственно следует, что граница звездного тела является липшицевой поверхностью.

Теорема 2.2. *Если множество $M \subseteq R^n$ является звездным телом, то вблизи любой точки $x \in \partial M$ множество M является эллиптицизовым.*

3. ЛИПШИЦЕВЫ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СО ЗВЕЗДНЫМИ ГРАФИКАМИ

Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение. Обозначим через a^0 отображение, графиком которого является множество $(\text{graf}(a))^0$.

Определение 3.1. [10] *Отображение a ограничено, если существует такая константа $c > 0$, что*

$$\|y\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \text{для всех } y \in a(x).$$

Теорема 3.1. *Пусть a – выпуклое замкнутое отображение (т.е. отображение с выпуклым замкнутым графиком), а множество M звездно и замкнуто. Пусть далее в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a)$ пересечение множеств $a(x_0)$ и M^0 непусто и множество $a(x_0) \cap M$ ограничено. Тогда многозначное отображение $b(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x) \cap M$ ограничено.*

Доказательство. Допустим обратное. Тогда найдутся последовательности $z_k = (x_k, y_k)$ и $y_k \in b(x_k)$ такие, что

$$\frac{\|y_k\|}{1 + \|x_k\|} \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть последовательность x_k ограничена. Положим $\lambda_k = \alpha(1 + \|x_k\|)/\|y_k\|$, где α – положительное число. Значит, для достаточно больших k имеем $\lambda_k \in (0, 1)$.

Возьмем $y_0 \in a(x_0) \cap M^0 \subseteq (b(x_0))^0$ и рассмотрим точки

$$\overline{x_k} = \lambda_k x_k + (1 - \lambda_k) x_0, \quad \overline{y_k} = \lambda_k y_k + (1 - \lambda_k) y_0.$$

Так как M звездное множество и $y_0 \in M^0$, то $\overline{y_k} \in M$. Далее поскольку a – выпуклое отображение, то $\overline{y_k} \in a(\overline{x_k})$. Поэтому $\overline{y_k} \in b(\overline{x_k})$. Имеем

$$(3.1) \quad \overline{y_k} = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)y_k}{\|y_k\|} + (1 - \lambda_k)y_0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\|x_k\| \rightarrow \alpha_0, \quad \frac{y_k}{\|y_k\|} \rightarrow h \neq 0.$$

Тогда из (3.1) и в силу замкнутости отображения b имеем

$$\alpha(1 + \alpha_0)h + y_0 \in b(x_0).$$

Отсюда следует, что из точки $y_0 \in M^0$ исходит некоторый луч целиком содержащийся в $b(x_0)$. Но это невозможно, поскольку множество $b(x_0)$ по предположению ограничено.

Пусть теперь $\|x_k\| \rightarrow \infty$. Положим в этом случае

$$\lambda_k = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)}{\|x_k\|\|y_k\|}, \quad k \geq 1.$$

Тогда повторяя все предыдущие рассуждения с учетом замены формулы (3.1) на

$$\overline{y_k} = \frac{\alpha(1 + \|x_k\|)}{\|x_k\|} \frac{y_k}{\|y_k\|} + (1 - \lambda_k)y_0$$

и формулы $\frac{1 + \|x_k\|}{\|x_k\|} \rightarrow 1$, снова получим противоречие. Это завершает доказательство. $\square$

Совершенно аналогично доказывается следующий результат.

Предложение 3.1. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком. Тогда, если в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a^0)$ множество $a(x_0)$ ограничено, то отображение a ограничено.

Теорема 3.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком. Тогда оно полунепрерывно снизу в любой точке $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$. Кроме того, если в некоторой точке $x_0 \in \text{dom}(a^0)$ множество $a(x_0)$ ограничено, то a удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x_0 .

Доказательство. Пусть $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$, $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда из предложения 3.3.8 [1] следует, что

$$x_0 \in \text{int } (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)), \quad \text{где } K \stackrel{\text{def}}{=} \text{dom}(a^0)^{-1}.$$

Значит, существует такое $\gamma > 0$, что

$$B_{2\gamma}(x_0) \subseteq (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)).$$

Пусть $y \in Im(a)$ и $x \in B_\gamma(x_0)$. Если $y \in a(x)$, то $d(y, a(x)) = 0$. Если $y \notin a(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $z \in a^{-1}(y)$, что

$$\|x - z\| \leq d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon.$$

Так как $B_\gamma(x) \subseteq (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0))$, то

$$(3.2) \quad \frac{x - z}{\|x - z\|} \gamma \in (a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)) - x.$$

Положим

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma}.$$

Ясно, что $\lambda \in (0, 1)$. Включение (3.2) можно записать следующим образом:

$$(3.3) \quad (1 - \lambda)(x - z) \in \lambda(a^0)^{-1}(K \cap B_1(y_0)) - \lambda x.$$

Поскольку $z \in a^{-1}(y)$ и график отображения a^{-1} является звездным множеством, то из (3.3) следует, что существует $y_1 \in K \cap B_1(y_0)$, такое, что

$$x \in \lambda(a^0)^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)a^{-1}(y) \subseteq a^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y).$$

Следовательно, $y_x \stackrel{\text{def}}{=} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y \in a(x)$. Кроме того, так как, $y_1 \in B_1(y_0)$, то

$$\|y_x - y\| = \lambda\|y_1 - y\| \leq \lambda(\|y_1 - y_0\| + \|y_0 - y\|) \leq \lambda(1 + \|y - y_0\|).$$

Далее,

$$\lambda = \frac{\|x - z\|}{\gamma + \|x - z\|} \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом

$$d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|) \quad \text{для всех } x \in B_\gamma(x_0).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$(3.4) \quad d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|) \quad \text{для всех } x \in B_\gamma(x_0).$$

Из соотношения 3.4 непосредственно следует, что отображение полунепрерывно снизу в точке x_0 . Теперь предположим, что множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда согласно предложению 3.1 отображение a ограничено, и поэтому из (3.4) следует, что существует такая константа $L > 0$, что

$$H(a(x), a(x')) \leq L\|x - x'\| \quad \text{для всех } x, x' \in B_\gamma(x_0).$$

Теорема доказана. $\square$

В работе [1] (см. следствие 7 теоремы 1, стр.138), используя соотношение (3.4) для многозначного отображения $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + R_+$, где f непрерывная выпуклая функция, доказано, что f локально липшицева на внутренности своего эффективного множества, т.е. на $\text{int } \text{dom}(a)$. Совершенно аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть $f: R^n \rightarrow R$ такая непрерывная функция, надграфик которой является звездным множеством. Пусть a – многозначное отображение, график которого является надграфик функции f . Тогда f локально липшицева на $\text{int } \text{dom}(a^0)$.*

4. КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ И ШАТРЫ ДЛЯ ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВ

Напомним некоторые определения из нелинейного анализа. Пусть M – подмножество банахова пространства X .

Определение 4.1. [20] Вектор $\nu \in X$ называется внутренним направлением для M в точке $x \in M$, если существуют такая окрестность $B_\delta(\nu)$ точки ν и такое число $\varepsilon > 0$, что

$$x + h\nu \in M \text{ для всех } \nu \in B_\delta(\nu), h \in (0, \varepsilon).$$

Конус внутренних направлений для M в точке x обозначим через $G_M(x)$.

Контингентный конус $T_M(x)$ для M в точке $x \in M$ определяется следующим образом:

Определение 4.2. [1] $\nu \in T_M(x)$ в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ существует $u \in B_\varepsilon(\nu)$, и $h \in (0, \alpha]$ такие, что $x + hu \in M$.

Касательный конус Ф. Кларка $C_M(x_0)$ для M в точке x_0 определяется следующим образом:

Определение 4.3. [7] $\nu \in C_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha > 0$, и $\beta > 0$ такие, что для любого $x \in B_\alpha(x_0) \cap M$ и любого $h \in (0, \beta]$ существует $u \in B_\varepsilon(\nu)$ такое, что $x + hu \in M$.

Определение 4.4. [3] Конус $K_M(x)$ называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существует отображение $r(\bar{x}) = o(\bar{x})$, определенное в некоторой $B_\delta(0)$ окрестности нуля, такое, что

$$x + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M \text{ для любого } \bar{x} \in K_M(x) \cap B_\delta(0).$$

Шатер называется липшицевым (гладким), если отображение r липшицево (непрерывно дифференцируемо) в окрестности начала координат.

Пусть $M \subseteq X$ – некоторое множество. Положим

$$\text{con}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = \lambda x_1, x_1 \in M, \lambda > 0\}.$$

Теорема 4.1. Пусть M – звездное замкнутое тело и $x \in M^0$. Тогда:

- (1) $T_M(x) = \overline{\text{con}(M - x)}$,
- (2) $\text{int } T_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x)$,
- (3) $\text{con}(\text{int } M - x) = \text{int } \text{con}(M - x)$
- (4) $G_M(x) = \text{int } T_M(x)$.

Доказательство. Первое равенство непосредственно вытекает из определения конуса $T_M(x)$. Покажем, что

$$(4.1) \quad \text{int } T_M(x) = \text{int } \text{con}(M - x).$$

Для этого сначала докажем, что выпуклый конус $K_{M^0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{con}(M^0 - x)$ является ядром конуса $K_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{con}(M - x)$. Действительно, пусть $\nu \in K_{M^0}(x)$. Тогда для некоторого $\gamma_1 > 0$ и $x_0 \in M^0$ имеем $\nu = \gamma_1(x_0 - x)$.

Выберем любую точку $u \in K_M(x)$ и покажем, что для любого $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda\nu + (1 - \lambda)u \in K_M(x).$$

Существуют число $\delta_2 > 0$ и элемент $\bar{x} \in M$, такие, что $u = \gamma_2(\bar{x} - x)$. Имеем

$$\lambda\nu + (1 - \lambda)u = (\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2) \left(\frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2} (x_0 - x) + \frac{(1 - \lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2} (\bar{x} - x) \right) =$$

$$(\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2)\left(\frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}x_0 + \frac{(1-\lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}\bar{x} - x\right).$$

Так как $x_0 \in M^0$ и $\bar{x} \in M$, то

$$(4.2) \quad \frac{\lambda\gamma_1}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}x_0 + \frac{(1-\lambda)\gamma_2}{\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2}\bar{x} \in M.$$

Следовательно,

$$\lambda\nu + (1-\lambda)u \in K_M(x).$$

Таким образом мы показали, что конус $K_M(x)$ является звездным телом. По предложению 2.1 имеем

$$\text{int } T_M(x) = \text{int } K_M(x) = \text{int } \overline{K_M(x)}.$$

Значит равенство (4.1) доказано. Осталось доказать, что

$$\text{int } K_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x).$$

Пусть $\nu \in \text{int } K_M(x)$. Тогда существует окрестность $B_\eta(0)$ такая, что $\nu + B_\eta(0) \subseteq K_M(x)$.

Если $\nu + x \in \text{int } M$, то доказательство завершено. Если нет, то возьмем точку

$x_0 \in \text{int } M^0$ и положим $\nu_0 = x_0 - x$. Тогда

$$\nu - \frac{\eta\nu_0}{\|\nu_0\|} \in K_M(x),$$

и поэтому существует такое число $h > 0$, что

$$x + h\left(\nu - \frac{\eta\nu_0}{\|\nu_0\|}\right) \in M.$$

Пусть

$$\alpha = \frac{h\eta}{h\eta + \|\nu_0\|}.$$

Поскольку $x_0 \in \text{int } M^0$ и $x + h(\nu - \eta\nu_0/\|\nu_0\|) \in M$, то согласно предложению 2.1, имеем

$$x + (1-\alpha)h\nu = \alpha x_0 + (1-\alpha)(x + h(\nu - \eta\nu_0/\|\nu_0\|)) \in \text{int } M.$$

Это означает, что

$$\nu \in \frac{1}{(1-\alpha)h}(\text{int } M - x).$$

Перейдем теперь к доказательству равенства: $\text{int } T_M(x) = G_M(x)$. Пусть $\bar{x} \in \text{int } T_M(x)$. Так как

$$\text{int } T_M(x) = \text{con}(\text{int } M - x),$$

то

$$\bar{x} = \lambda(x_1 - x) \text{ для некоторого } \lambda > 0 \text{ и } x_1 \in \text{int } M.$$

Существует окрестность $B_\varepsilon(x_1) \subseteq M$. Тогда множество $\lambda(B_\varepsilon(x_1) - x)$ является окрестностью точки $\bar{x}$ и для любой точки y ($y = \lambda(x'_1 - x)$, $x'_1 \in B_\varepsilon(x_1)$) из этой окрестности и для любого числа $\delta \in (0, 1/\lambda)$ будет $x + \delta y \in M$. Действительно, по предложению 2.1 имеем

$$x + \delta y = x + \delta\lambda(x'_1 - x) \in \text{int } M, \text{ поскольку } \lambda\delta \in (0, 1).$$

Значит, $\text{int } T_M(x) \subseteq G_M(x)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Следствие 4.1. Пусть M – звездное тело и $x \in M^0$. Тогда $\overline{G_M(x)} = T_M(x)$.

Следствие 4.2. Пусть M – замкнутое звездное тело и $0 \in M^0$. Тогда если $h \in \text{int } T_M(0)$, то существует вектор $x \in \text{int } M$ такой, что $h = \lambda x$ при некотором $\lambda > 0$.

Одно из интересных приложений теоремы 4.1 является теорема отделимости звездных тел. Введем понятие отделимости множеств.

Определение 4.5. Множества $M_1, M_2 \subseteq X$ такие, что $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ называются *отделимыми*, если существуют вектор w и число $\delta > 0$ такие, что

$$(M_1 + \alpha w) \cap M_2 = \emptyset \text{ для всех } \alpha \in (0, \delta).$$

Предложение 4.1. Пусть M_1, M_2 – звездные замкнутые тела в банаховом пространстве X такие, что

$$\text{int } M_1 \cap \text{int } M_2 = \emptyset \text{ и } M_1^0 \cap M_2^0 \neq \emptyset.$$

Тогда множества M_1 и M_2 отделимы.

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $0 \in M_1^0 \cap M_2^0$. Покажем, что $\text{int}(\text{conv } M_2) \cap M_1 = \emptyset$. Действительно, если существует вектор $\nu \in \text{int}(\text{conv } M_2) \cap M_1$, то в окрестности вектора ν существует такая точка $\bar{\nu}$, что

$$\bar{\nu} \in \text{int } \text{con}(M_2) \cap \text{int } M_1.$$

Поэтому в силу Следствия 4.2 для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$\lambda \bar{\nu} \in \text{int} M_1 \bigcap \text{int} M_2,$$

что противоречит условию предложения. Теперь, если $\mathbf{w} \in \text{int} M_2^0$, то

$$\mathbf{w} + M_2 \subseteq \text{int} \text{con} M_2.$$

Действительно, если $x \in M_2$, то по предложению 2.1 имеем

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathbf{w} \in \text{int} M_2.$$

Поэтому

$$x + \mathbf{w} \in \text{con}(\text{int} M_2) = \text{int} \text{con}(M_2).$$

Так как $\mathbf{w} \in M_2^0$ и $0 \in M_2^0$, то $\alpha \mathbf{w} \in M_2^0$ при $\alpha \in (0, 1)$.

Следовательно,

$$(\alpha \mathbf{w} + M_2) \bigcap M_1 = \emptyset \text{ для всех } \alpha \in (0, 1).$$

Предложение доказано. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $M \subseteq R^n$ – выпуклое тело и $x_0 \in M$. Тогда любой замкнутый конус $K \subseteq \text{int} T_M(x_0)$ является гладким шатром для M в точке x_0 .

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Рассмотрим пересечение $Q = S_1 \bigcap K$, где S_1 – единичная сфера. Q – компакт и для любого $x \in Q$ множество $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} [0, x] \bigcap M$, в силу теоремы 4.1, содержит отличный от нуля элемент $y \in \text{int} M$. Поэтому многозначное отображение a с выпуклыми непустыми компактными значениями непрерывно на компакте Q (см. [1], теорему 3.1.16). Положим $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(x, a(x))$. Так как многозначное отображение a непрерывно, то функция f также непрерывна. Следовательно, она достигает своего максимального значения на компакте Q , т.е. $\max_{x \in Q} f(x) = f(x_*)$. Очевидно, что $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|x_*\| - f(x_*) > 0$. Поэтому, если $x \in K \bigcap B_\delta(0)$, то $x \in M$. $\square$

Теорема 4.3. Пусть $M \subseteq R^n$ – звездное тело. Тогда для любого $x \in M$ конус $C_M(x)$ является липшицевым шатром для M в точке x .

Доказательство. Согласно теореме 2.2, в окрестности любой точки $x_0 \in \partial M$ множество является эпиллиптицевым. Поэтому существуют линейное обратимое отображение $\mathbf{A}$ и липшицева функция $\varphi: R^{n-1} \rightarrow R$ такие, что для некоторой окрестности U точки x_0 имеет место равенство

$$M \cap U = U \cap A^{-1}(\text{epi}\varphi).$$

Положим

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - y_n, \quad \widehat{y} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Функция f липшицева вблизи точки $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}x_0$ и субдифференциал Кларка этой функции равен $(\partial^0 \varphi(\widehat{y}_0), -1)$. Значит, $0 \notin \partial^0 f(y_0)$, и поэтому существует такой вектор a , что $f^0(y_0, a) < 0$. Нетрудно заметить, что если $C_M(x_0)$ – касательный конус Кларка, то $\mathbf{A}C_M(x_0)$ является касательным конусом для $\mathbf{A}M$ в точке y_0 . Известно (см. теорему 2.4.9 [7]), что надграфик функции $\varphi^0(\widehat{y}, \cdot)$ совпадает с конусом $C_{\text{epi}(f)}(\widehat{y}, \varphi(\widehat{y}))$. Не нарушая общности, предположим, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Выберем направление $a = (0, 0, \dots, 1)$. Так как функция f липшицева вблизи нуля, то согласно лемме 5.3.5 [10] существует функция $r(\bar{y}) = o(\bar{y})$ такая, что

$$(4.3) \quad f(\bar{y}) \leq f(0) + f^0(0, \bar{y}) + r(\bar{y}).$$

Поскольку функция $f^0(y, a)$ полунепрерывна сверху по y , то существуют окрестность $V \subseteq U$ нуля и число C такие, что

$$\max_{y \in V} f^0(y, a) \stackrel{\text{def}}{=} m < 0, \quad \text{и} \quad \|y^*\| \leq C \text{ для любого } y \in V.$$

Положим $\omega(\lambda) = \sup\{r(\bar{y}) : \|\bar{y}\| \leq \lambda\}$. Ясно, что $\omega(\lambda)$ монотонно не убывает и $\omega(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $r(\bar{y}) \leq \omega(\|\bar{y}\|)$. Положим $K \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} : f^0(0, \bar{y}) \leq 0\}$. Пусть вектор $\bar{y} \in K$ и $\mu > 0$. Тогда из (4.3) получим

$$\begin{aligned} f(\bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) &\leq f^0(0, \bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) + \omega(\|\bar{y}\|(1 + \mu\|a\|)) \leq \\ &\leq \|\bar{y}\|[\mu f^0(0, a) + \omega(\|\bar{y}\|(1 + \mu\|a\|))]/\|\bar{y}\|. \end{aligned}$$

Выберем теперь $\delta_\mu > 0$ настолько малым, чтобы выражение в квадратных скобках, было меньше $1/2\mu f^0(0, a)$ при $\|\bar{y}\| \leq \delta_\mu$. Тогда имеем

$$f(\bar{y} + \mu\|\bar{y}\|a) \leq \frac{1}{2} f^0(0, a)\|\bar{y}\| < 0 \text{ при } \|\bar{y}\| \leq \delta_\mu, \bar{y} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $q(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} f(\bar{y} + \alpha\|\bar{y}\|a)$ на отрезке $[0, \mu]$. Очевидно, что она непрерывна на этом отрезке. Теперь на множестве $K \cap B_{\delta_\mu}(0)$ определим функцию $\alpha(\bar{y})$ следующим образом. Если $f(\bar{y}) \leq 0$, то положим $\alpha(\bar{y}) = 0$. Если $f(\bar{y}) > 0$, то $q(0) > 0$, $q(\mu) < 0$. Следовательно, существует единственная точка $\alpha(\bar{y}) \in [0, \mu]$ такая, что $q(\alpha(\bar{y})) = 0$. Из определения функции $\alpha(\bar{y})$ непосредственно следует, что $\alpha(\bar{y}) \rightarrow 0$ при $\bar{y} \rightarrow 0$. Положим $\rho(\bar{y}) = \alpha(\bar{y})\|\bar{y}\|$. Очевидно, что $\rho(\bar{y}) = o(\bar{y})$. Покажем, что функция $\rho(\bar{y})$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\bar{U} \stackrel{\text{def}}{=} K \cap B_{\delta_\mu}(0)$. Пусть $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{U}$.

Рассмотрим случай, когда $f(\bar{y}_1) > 0$, $f(\bar{y}_2) \leq 0$. Тогда согласно определению функции ρ имеем

$$f(\bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_1)a) = 0 \text{ и } \rho(\bar{y}_2) = 0.$$

Значит,

$$f(\bar{y}_2 + \rho(\bar{y}_2)a) - f(\bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_1)a) = (y^*, \bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \rho(\bar{y}_2)a - \rho(\bar{y}_1)a) \leq 0,$$

где $y^* \in \partial^0 f(\xi)$, ξ – некоторая точка из $\bar{U}$. Отсюда получим

$$(4.4) \quad (y^*, \rho(\bar{y}_2)a - \rho(\bar{y}_1)a) \leq (y^*, \bar{y}_1 - \bar{y}_2) \leq C\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|,$$

где

$$C = \max_{y \in \bar{U}} \max_{y^* \in \partial^0 f(y)} \|y^*\|.$$

Так как $f^0(0, a) < 0$ и отображение $f^0(y, a)$ полунепрерывно сверху по y , то, не нарушая общности, можно считать, что

$$l \stackrel{\text{def}}{=} \max_{y \in \bar{U}} f^0(y, a) < 0.$$

Отсюда и из (4.4) получим

$$\rho(\bar{y}_1) - \rho(\bar{y}_2) \leq \frac{C}{-l} \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|.$$

Положив $L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{-l}$ и имея ввиду, что $\rho(\bar{y}_2) = 0$, окончательно получаем

$$|\rho(\bar{y}_1) - \rho(\bar{y}_2)| \leq L \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть Π – оператор проектирования на выпуклый замкнутый конус $K = C_{\mathbf{A}M}(0)$. Положим $r(\bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\Pi(\bar{y})a)$. Так как оператор проектирования удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то отображение $r(\bar{y})$ также удовлетворяет условию Липшица. Очевидно, что $r(\bar{y}) = o(\bar{y})$ и если $\bar{y} \in \bar{U}$, то $f(\bar{y} + r(\bar{y})) \leq 0$. Таким образом мы доказали, что выпуклый конус $K = \mathbf{A}C_M(0)$ является липшицевым шатром к множеству $\mathbf{A}M$ в нуле. Следовательно, конус $C_M(0)$ – липшицевый шатер для M в нуле. $\square$

Предложение 4.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\text{dom}(a) = R^n$. Тогда существует такое липшицево, положительно однородное отображение $P: R^n \rightarrow R^m$, что $P(x) \in a(x)$ для всех $x \in R^n$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $b(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x) \cap B_1(0)$. Очевидно, что b – выпуклое отображение с компактными значениями и

$$0 \in \text{int}(a(0) - B_1(0)).$$

Известно (см. [8], теорема 6.1) – теорема о липшицевости пересечения липшицевых многозначных отображений с условием непустой внутренней), что отображение b удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ нуля с некоторой константой L . Обозначим через $z_s(x)$ селектор Штейнера для отображения b , определенный на этой окрестности. Известно (см. [9], лемма 2.1.4) также, что этот селектор удовлетворяет условию :

$$\|z_s(x_1) - z_s(x_2)\| \leq L_m H(b(x_1), b(x_2)), \text{ где } L_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m/2 + 1)}{\Gamma((m+1)/2)}.$$

Положим

$$(4.5) \quad P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{x}{\delta} \right\| z_s\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } P(0) = 0.$$

Очевидно, что

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \text{ и } P(x) \in a(x) \text{ для всех } x \in R^n, \lambda \geq 0.$$

Теперь покажем, что отображение P на R^n удовлетворяет условию Липшица.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \|P(x_1) - P(x_2)\| &\leq \left\| \frac{x_1}{\delta} \left(\|z_s(\delta \frac{x_1}{\|x_1\|}) - z_s(\delta \frac{x_2}{\|x_2\|})\| + \|z_s(\delta \frac{x_2}{\|x_2\|})\| \left\| \frac{x_1}{\delta} - \frac{x_2}{\delta} \right\| \right) \right\| \leq \\ &\leq LL_m \|x_1\| \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\| + \frac{\max_{u \in B_\delta(0)} \|z_s(u)\|}{\delta} \|x_1\| - \|x_2\| \leq (2LL_m + \frac{C}{\delta}) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

где $C \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u \in B_\delta(0)} \|z_s(u)\|$.

Из (4.5) следует, что

$$\|P(x)\| \leq \frac{C}{\delta} \|x\| \text{ для всех } x \in R^n.$$

Предложение доказано. $\square$

Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ — многозначное отображение и $z_0 \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$. Положим $a_{z_0}(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} \in R^m : (\bar{x}, \bar{y}) \in K\}$, где K — шатер к множеству $\text{graf}(a)$ в точке z_0 .

Теорема 4.4. Пусть выпуклый замкнутый конус K является непрерывным шатром для $\text{graf}(a)$ в точке z_0 . Допустим также, что $\text{dom}(a_{z_0}) = R^n$. Тогда:

- (1) существует селектор $y(x)$ отображения a , проходящий через точку z_0 и определенный в некоторой окрестности точки x_0 , такой, что

$$y'(x_0, \bar{x}) \in a_{z_0}(\bar{x}) \text{ для всех } \bar{x} \in R^n,$$

- (2) отображение $y'(x_0, \bar{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\bar{x}$ в R^n .

Доказательство. По предложению 4.2 найдется липшицевый и положительно однородный селектор P для отображения a_{z_0} . Так как K — непрерывный шатер для $\text{graf}(a)$ в точке z_0 , то существует такое непрерывное отображение

$$r(\bar{z}) \equiv (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z}), \quad \text{при } |\bar{z}| \rightarrow 0$$

что

$$z_0 + \bar{z} + o(\bar{z}) \in \text{graf}(a) \text{ для достаточно малых } |\bar{z}|, \quad \bar{z} \in K.$$

Покажем, что уравнение

$$g(\bar{x}, u) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 + \bar{x} + u + r_1(\bar{x}, P(\bar{x} + u)) - (x_0 + \bar{x}) = 0$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.1.1 о неявных функциях [10], стр. 191). Действительно, имеем

(1) g – непрерывное отображение, определенное в некоторой окрестности U нуля и $g(0, 0) = r_1(0, 0) = 0$,

(2) $\|g(\bar{x}, u) - u\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|u\|^2})$, где $\bar{r}(\lambda) = o(\lambda)$.

Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существует отображение $u(\bar{x})$, определенное в некоторой окрестности $\bar{U} \subseteq U$ нуля, такое, что

$$g(\bar{x}, u(\bar{x})) = 0 \text{ при } \bar{x} \in \bar{U} \text{ и } \frac{u(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Положим $z(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x} + u(\bar{x}), P(\bar{x} + u(\bar{x})))$. При малых $\bar{x}$ имеем $z(\bar{x}) \in K$.

Следовательно,

$$y(x_0 + \bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + P(\bar{x} + u(\bar{x})) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x} + u(\bar{x}))) \in a(x_0 + \bar{x}).$$

Очевидно, что

$$y'(x_0, \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{y(x_0 + \lambda \bar{x}) - y(x_0)}{\lambda} = P(\bar{x}) \in a_{z_0}(\bar{x}).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.5. Пусть $M \subseteq R^n$ – звездное тело и $x \in M^0$. Тогда конус $T_M(x)$ является шатром для M в точке x .

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $x = 0$. Пусть $\bar{x} \in T_M(0)$ и $\bar{x} \neq 0$. Рассмотрим все векторы, образующие с вектором $\bar{x}$ углы, не превосходящие ε . Эти вектора заполняют в пространстве R^n конус, который мы обозначим через $K_\varepsilon(\bar{x})$. Пусть $Q \subseteq \text{int } T_M(0)$ – замкнутый конус такой, что для любого $\bar{x} \in T_M(0)$ имеет место $Q \cap K_\varepsilon(\bar{x}) \neq \{0\}$. Рассмотрим некоторую сферу с центром в нуле и обозначим через $\mathbf{R}$ пересечение этой сферы с конусом Q . В силу теоремы 4.1 $\text{int } T_M(0) = G_M(0)$. Поэтому, если $\bar{x} \in \mathbf{R}$, то существуют окрестность $\mathbf{V}_{\bar{x}} \subseteq \text{int } T_M(0)$ и вещественное число $\delta > 0$, такие, что $\lambda y \in M$

для всех $y \in \mathbf{V}_{\bar{x}}$ и $\lambda \in (0, \delta)$. Семейство окрестностей $\mathbf{V}_{x \in \mathbf{R}}$ образует открытое покрытие компактного множества $\mathbf{R}$. Выделим конечное подпокрытие $\{\mathbf{V}_{\bar{x}_i}\}_{i=1}^N$. Положим $\delta_0 = \min_{i \in [1:N]} \delta_i$. Тогда, если $\bar{x} \in Q \cap B_{\delta_0}(0)$, то $\bar{x} \in M$. Пусть теперь $\bar{x} \in T_M(0)$ – произвольная точка такая, что $\|\bar{x}\| < \delta_0$. Тогда конус $K_\varepsilon(\bar{x})$ имеет нетривиальное пересечение с $Q \cap B_{\delta_0}(0)$. Иными словами найдется точка $y \in Q \cap B_{\delta_0}(0)$ такая, что $y \in K_\varepsilon(\bar{x})$ и $y \neq 0$. Пусть $\hat{x}$ – ортогональная проекция точки $\bar{x}$ на луч, проходящий через y . Расстояние же между точками $\hat{x}$ и $\bar{x}$ не превосходит $\|\bar{x}\| \sin \varepsilon$, т.е. меньше $\|\bar{x}\| \varepsilon$. Но тогда

$$d(\bar{x}, M) \leq \|\bar{x}\| \varepsilon \text{ при } \bar{x} \in T_M(0) \cap B_{\delta_0}(0).$$

Это означает, что конус $T_M(0)$ является шатром к множеству M в точке 0. $\square$

Теорема 4.6. Пусть

- (1) $M_1 \subseteq R^n$ – выпуклое замкнутое множество, $M_2 \subseteq R^n$ – замкнутое звездное тело,
- (2) $M_1 \cap \text{int } M_2^0 \neq \emptyset$ и $x_0 \in M_1 \cap M_2^0$.

Тогда конус $T_{M_1}(x_0) \cap T_{M_2}(x_0)$ является шатром для множества $M_1 \cap M_2$ в точке x_0 .

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $x_0 = 0$. Рассмотрим многозначное отображение F из R^n в R^n

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_1 - u, \text{ если } u \in M_2, \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset, \text{ если } u \notin M_2.$$

Очевидно, что $0 \in \text{int } F(M_2)$. Значит, существует окрестность $B_\delta(0)$ такая, что $B_\delta(0) \subseteq F(M_2)$. Тогда поскольку график многозначного отображения F есть звездное замкнутое множество, то согласно соотношению (3.4) существует такое число $C > 0$, что

$$d(u, F^{-1}(\nu)) \leq Cd(\nu, F(u)) \text{ для } u \in B_\delta(0), \nu \in M_2.$$

Положив в этом неравенстве $\nu = 0$, с учетом $F^{-1}(0) = M_1 \cap M_2$ получим

$$(4.6) \quad d(u, M_1 \cap M_2) \leq Cd(0, F(u)) = Cd(u, M_1) \quad u \in M_2 \cap B_\delta(0).$$

Пусть теперь $w \in B_{\delta/2}(0)$ произвольная точка. Тогда, если u — метрическая проекция точки w на множество M_2 , а v — метрическая проекция точки w на множество M_1 . Тогда $u \in M_2 \cap B_{\delta}(0)$ и из (4.6) получим, что

$$\begin{aligned} d(w, M_1 \cap M_2) &\leq \|w - u\| + d(u, M_1 \cap M_2) \leq \|w - u\| + Cd(u, M_1) \leq \\ &\leq d(w, M_2) + Cd(u, M_1) \leq d(w, M_2) + C(\|w - u\| + \|w - v\|). \end{aligned}$$

Значит,

$$(4.6) \quad d(w, M_1 \cap M_2) \leq (C + 1)(d(w, M_1) + d(w, M_2)).$$

Так как $0 \in \text{int}(M_1 - M_2^0)$, то аналогично теореме 1.4.16 [1] легко установить, что

$$(4.7) \quad T_{M_1 \cap M_2}(x_0) = T_{M_1}(x_0) \cap T_{M_2}(x_0).$$

С другой стороны, так как выпуклый конус $T_{M_1}(0)$ является липшицевым шатром к множеству M_1 в точке 0, то $d(\bar{x}, M_1) = o(\bar{x})$, если $\bar{x} \in T_{M_1}(0)$ и $\bar{x} \rightarrow 0$. Аналогично, в силу теоремы 4.5, имеем $d(\bar{x}, M_2) = o(\bar{x})$ при $\bar{x} \rightarrow 0$, $\bar{x} \in T_{M_2}(0)$. Отсюда и из соотношений (4.7) и (4.8) следует, что

$$d(\bar{x}, M_1 \cap M_2) = o(\bar{x}), \text{ если } \bar{x} \in T_{M_1}(0) \cap T_{M_2}(0) \text{ и } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Значит, конус $T_{M_1}(0) \cap T_{M_2}(0)$ является шатром к множеству $M_1 \cap M_2$ в нуле.

□

5. О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Определение 5.1. [1] *Контингентный производной $Da(x_0, y_0)$ многозначного отображения $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ называется отображение, график которого есть конус $T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$.*

Определение 5.2. [1] *Производной Кларка для отображения a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ называется отображение $Ca(x_0, y_0)$, график которого является конус $C_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$.*

Определение 5.3. Мнозначное отображение $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ является дифференцируемым в точке x_0 , если найдется положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ такое, что

$$H(a(x_0) + \Lambda(\bar{x}), a(x_0 + \bar{x})) = o(\bar{x}).$$

Замечание 5.1. В отличие от дифференцируемости по Де Блази (см.[16]) здесь выпуклость значений отображения Λ не предполагается.

Определение 5.4. Положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется нижним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$y_0 + \Lambda(\bar{x}) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для всех } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Определение 5.5. Положительно однородное отображение $\Lambda: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется верхним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda(\bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для всех } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Предложение 5.1. Если $f: R^n \rightarrow R$ – выпуклая непрерывная функция, то она дифференцируема по Де Блази.

Доказательство. Имеем

$$f(x_0) + f'(x_0, \bar{x}) \leq f(x_0 + \bar{x}) \leq f(x_0) + f'(x_0, \bar{x}) + o(\bar{x}).$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x_0 + \bar{x}) - f(x_0) - f'(x_0, \bar{x})| \leq \varepsilon \|\bar{x}\| \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Это и есть условие дифференцируемости по Де Блази отображения $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x)\}$ в точке x_0 . □

Предложение 5.2. Пусть $f(x)$ – липшицева функция в некоторой окрестности точки x_0 . Пусть $(x_0, f(x_0)) \in (\text{epi}(f))^0$. Тогда многозначное отображение $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y/y \geq f(x)\}$ дифференцируемо в точке x_0 .

Доказательство немедленно следует из теорем 2.1 и 4.5.

Предложение 5.3. Пусть $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in R^n : g(x) + \mathbf{A}y = 0\}$, где $g: R^n \rightarrow R^m$ — дифференцируемое отображение, $\mathbf{A}: R^n \rightarrow R^m$ — есть такой линейный оператор, что $\text{Im} \mathbf{A} = R^m$. Тогда отображение $\Lambda_x(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} : g'(x)\bar{x} + \mathbf{A}\bar{y} = 0\}$ является дифференциалом для a в точке x .

Доказательство. Пусть $y_0 \in a(x_0)$, $\bar{y} \in \Lambda_{x_0}(\bar{x})$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} a(x_0 + \bar{x}) &= \{y \in R^m / g(x_0) + g'(x_0)\bar{x} + o(\bar{x}) + \mathbf{A}y = 0\} = \\ &= \{y \in R^m / \mathbf{A}(y - y_0 - \bar{y}) + o(\bar{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(5.1) \quad a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})).$$

Так как $\text{Im} \mathbf{A} = R^m$, то известно (см. теорему 1.3.1 [1]), что обратное отображение $\mathbf{A}^{-1}$ является липшицевым отображением. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})) \subseteq \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Отсюда и из (5.1) следует, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0).$$

Поскольку $\Lambda_{x_0}(\bar{x}) = \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0)$, то из (5.2) следует, что

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq a(x_0) + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0).$$

С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} a(x_0) + \Lambda_{x_0}(\bar{x}) &= -\mathbf{A}^{-1}g(x_0) - \mathbf{A}^{-1}g'(x_0)\bar{x} = -\mathbf{A}^{-1}(g(x_0) + g'(x_0)\bar{x}) = \\ &= -\mathbf{A}^{-1}(g(x_0 + \bar{x})) - \mathbf{A}^{-1}(o(\bar{x})) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \mathbf{A}^{-1}(0) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \subseteq \\ &\subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x}\| B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0). \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (5.1) следует предложение 5.3. □

Теорема 5.1. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком и $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0)$, причем $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$ и множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда:

- (1) найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что для любого $\gamma \geq \gamma_0$ отображение $\Lambda_1(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \cap \gamma \|\bar{x}\| B_1(0)$ является нижним дифференциалом для a в точке (x_0, y_0) ,
- (2) отображение $\Lambda_2(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Da(x_0, y_0)(\bar{x})$ является верхним дифференциалом для a в точке (x_0, y_0) .

Доказательство. Пусть $F(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} Ca(x_0, y_0)(\bar{x}) \cap B_1(0)$. Из условий теоремы следует, что $\text{dom}(Ca(x_0, y_0)) = R^n$. Так как отображение $Ca(x_0, y_0)$ полунепрерывно снизу и $0 \in \text{int}(Ca(x_0, y_0)(0) - B_1(0))$, то найдется окрестность $B_\delta(0)$ такая, что

$$0 \in Ca(x_0, y_0)(\bar{x}) - B_1(0) \text{ для } \bar{x} \in B_\delta(0).$$

Значит, $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ при $\bar{x} \in B_\delta(0)$. Рассмотрим многозначное отображение:

$$t: R^n \rightarrow 2^{R^m}, \quad t(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} \|\bar{x}\| F\left(\delta \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right), \text{ если } \bar{x} \neq 0, \quad t(0) = 0.$$

Очевидно, что

$$t(\bar{x}) \subseteq \frac{1}{\delta} \|\bar{x}\| Da(x_0, y_0)\left(\delta \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) \subseteq Da(x_0, y_0)(\bar{x}), \quad t(\lambda \bar{x}) = \lambda t(\bar{x}) \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Отсюда следует, что для любого $\bar{x}$ существует

$$\bar{y} \in Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \text{ такой, что } \|\bar{y}\| \leq \gamma_0 \|\bar{x}\|, \text{ где } \gamma_0 = \frac{1}{\delta}.$$

Поскольку, в силу теоремы 4.5, конус $T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром для $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) , то существует такое отображение, что

$$r(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} r(\bar{x}, \bar{y}) = (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z}),$$

определенное в окрестности нуля, что $z_0 + \bar{z} + r(\bar{z}) \in \text{graf}(a)$ для достаточно малых $\bar{z} \in T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$. Значит, $y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{x}, \bar{y}) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \bar{y}))$ при малых $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$, таких, что $\|\bar{y}\| \leq \gamma \|\bar{x}\|$, $\gamma \geq \gamma_0$. Так как в силу теоремы 3.1. отображение a липшицево вблизи точки x_0 с некоторой константой

$L > 0$, то существует такое число $\delta_1 \leq \delta$, что при $\|\bar{x}\| \leq \delta_1$ имеет место включение

$$y_0 + \bar{y} \in a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon(1 + L)\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \gamma^2\|\bar{x}\|^2}B_1(0).$$

Отсюда

$$y_0 + Da(x_0, y_0)(\bar{x}) \bigcap \gamma\|\bar{x}\|B_1(0) \subseteq a(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon(1 + L)\sqrt{1 + \gamma^2}\|\bar{x}\|B_1(0).$$

Теперь покажем, что Λ_2 является верхним дифференциалом для a . Действительно, поскольку a — отображение со звездным замкнутым графиком, то для каждого $y_0 \in a^0(x_0)$, $y \in a(x_0 + \bar{x})$ и для достаточно малых $\lambda \in (0, 1)$ имеет место включение $(1 - \lambda)y_0 + \lambda y \subseteq a(x_0 + \lambda\bar{x})$. Следовательно,

$$y - y_0 \in \frac{a(x_0 + \bar{x}) - y_0}{\lambda}.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим $y - y_0 \in Da(x_0, y_0)(\bar{x})$. Следовательно,

$$a(x_0 + \bar{x}) \subseteq y_0 + Da(x_0, y_0)(\bar{x}).$$

□

6. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

Пусть X и Y — банаховы пространства, $a: X \rightarrow 2^Y$ — многозначное отображение со звездными значениями. Обозначим через a_0 многозначное отображение, которое каждому $x \in X$ сопоставляет множество $(a(x))^0$.

Предложение 6.1. Пусть $a: X \rightarrow 2^Y$ — непрерывное отображение со звездными замкнутыми значениями. Тогда отображение a_0 является полунепрерывным сверху.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \in a_0(x_n)$, $y_n \rightarrow y_0$. Покажем, что $y_0 \in a_0(x_0)$.

Пусть $v_0 \in a(x_0)$. Так как a полунепрерывно снизу, то существует последовательность $v_n \in a(x_n)$ такая, что $v_n \rightarrow v_0$. С другой стороны, поскольку $y_n \in a_0(x_n)$, то

$$\lambda v_n + (1 - \lambda)y_n \in a(x_n), \quad \text{для любого } \lambda \in [0, 1].$$

Переходя здесь к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, получим $\lambda v_0 + (1 - \lambda)y_0 \in a(x_0)$. Значит, $y_0 \in a_0(x_0)$. □

Из предложения 6.1 и классической теоремы Какутани (см. [1], теорема 6.4.13, стр. 336) следует

Следствие 6.1. Пусть $M \subset X$ – компактное выпуклое множество, $a: M \rightarrow 2^M$ – непрерывное отображение со звездными замкнутыми значениями. Тогда a имеет неподвижную точку.

Применяя Следствие 6.1, можно установить следующий результат, доказательство которого мы опускаем, ибо оно аналогично доказательству теоремы 5.1.1 [10].

Теорема 6.1. (Теорема о неявных функций для многозначных отображений). Пусть $a: R^n \times R^p \rightarrow 2^{R^n}$ – непрерывное отображение со звездными компактными значениями, такое, что

$$a(x, y) = \Lambda x + r(x, y),$$

где Λ – невырожденная $n \times n$ матрица и $\|r(x, y)\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2})$, где $\bar{r}(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда для достаточно малых y включение $0 \in a(x, y)$ разрешима относительно y , причем существует такое решение $x(y)$, что $x(y) = o(y)$ при $y \rightarrow 0$.

Предложение 6.2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – отображение такое, что $a(x) = \Lambda(x) + r(x)$, где $\Lambda: R^n \rightarrow R^m$ – линейный суръективный оператор, r – непрерывное многозначное отображение со звездными компактными значениями и $\|r(x)\| = o(\|x\|)$. Тогда подпространство $H \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} : \Lambda \bar{x} = 0\}$ является шатром для $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : 0 \in a(x)\}$ в нуле.

Доказательство. Рассмотрим включение

$$(6.1) \quad 0 \in A(\bar{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} a(\bar{x} + \Lambda^* y) - \Lambda \bar{x},$$

в которой неизвестными является y , а $\bar{x}$ – параметр. Нетрудно видеть, что

$$A(\bar{x}, y) = \Lambda \Lambda^* y + r(\bar{x} + \Lambda^* y).$$

Так как матрица $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda\Lambda^*$ невырождена, то выполнены все условия теоремы 6.1, и поэтому согласно этой теореме для достаточно малых $\bar{x}$ существует такое решение $y(\bar{x})$ включения (6.1), что $y(\bar{x}) = o(\bar{x})$. Для малых $\bar{x} \in H$ имеем

$$0 \in A(\bar{x}, y(\bar{x})) = a(\bar{x} + \Lambda^*y(\bar{x})),$$

а значит $\bar{x} + \Lambda^*y(\bar{x}) \in M$, причем $\Lambda^*y(\bar{x}) = o(\bar{x})$. $\square$

Следствие 6.2. *Если $H \neq 0$, то для любой окрестности нуля существует точка $\hat{x} \neq 0$ в этой окрестности, такая, что $0 \in a(\hat{x})$.*

Доказательство. Поскольку подпространство H является шатром для M , то для любого ненулевого вектора $\bar{x} \in H$ имеем

$$x_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\bar{x} + r(\lambda\bar{x}) \in M.$$

Отсюда для малых $\lambda > 0$ имеем $x_\lambda \neq 0$ и $0 \in a(x_\lambda)$. $\square$

Рассмотрим теперь так называемую нелинейную экономическую модель Неймана. Пусть имеется m технологических способов производства, причем использование технологического способа интенсивностью $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ведет к производству вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ товаров, удовлетворяющему условию $y \in a(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\lambda + r_1(\lambda)$, где $(n \times m)$ – матрица, $r_1: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ – многозначное отображение такое, что

$$(6.2) \quad \|r_1(\lambda)\| = o(\lambda).$$

Аналогично, при уровне технологии λ в системе расходуется вектор x товаров, удовлетворяющий условию $x \in b(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}\lambda + r_2(\lambda)$, где отображение r_2 удовлетворяет условию (6.2). Тогда чистый выпуск системы задается векторами z , удовлетворяющих условию

$$z \in a(\lambda) - b(\lambda).$$

В экономической системе, действующий на технологическом уровне λ i –й продукт в выпуске z называется промежуточным, если $z_i = 0$. Один и тот же продукт i в экономических системах с одинаковой технологией может при разных

условиях быть отнесен к первичным ($z_1 < 0$), конечным ($z_i > 0$) или промежуточным продуктам.

Предложение 6.3. Пусть

- (1) многозначные отображения $a(x) = \mathbf{A}x + r_1(x)$, $b(x) = \mathbf{B}x + r_2(x)$ удовлетворяют всем требованиям предложения 6.2,
- (2) существует технологический уровень $\hat{\lambda} \geq 0$ такой, что $\mathbf{A}\hat{\lambda} = \mathbf{B}\hat{\lambda}$,
- (3) $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} - \mathbf{B}$ — суръективный оператор.

Тогда существует уровень $\bar{\lambda}$ технологии и выпуск $\bar{z}$ на этом уровне в котором все продукты промежуточные.

Доказательство. Рассмотрим следующее включение

$$0 \in A(\bar{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} a(\bar{x} + \Lambda^*y) - b(\bar{x} + \Lambda^*y) - \Lambda\bar{x}.$$

Заметим, что $A(\bar{x}, y) = \Lambda\Lambda^*y + r_1(\bar{x} + \Lambda^*y) - r_2(\bar{x} + \Lambda^*y)$. Применяя теорему 6.1 и, аналогично как в предложении 6.2 установим справедливость нашего утверждения. $\square$

Из теоремы Банаха о сжимающих отображениях следует существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства M в себя. В [13] рассматривается вопрос существования неподвижных точек для так называемых k -сжатых многозначных отображений. В случае, когда M — компактное звездное множество банахова пространства, то предположение можно ослабить и считать отображение нерастягивающим.

Теорема 6.2. Пусть M — компактное звездное подмножество банахова пространства X , $a: M \rightarrow 2^M$ — нерастягивающее многозначное отображение с замкнутыми значениями. Тогда a имеет неподвижную точку.

Доказательство. Выберем точку x_0 из M^0 рассмотрим многозначные отображения

$$b_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k}x_0 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)a(x), \quad k > 1.$$

Так как множество M звездно, то $b_k(x) \subseteq M$. Имеем

$$H(b_k(x), b_k(y)) = (1 - \frac{1}{k})H(a(x), a(y)) \leq (1 - \frac{1}{k})\|x - y\|.$$

Отсюда следует, что все отображения b_k являются сжимающими. Значит, для каждого из них существует неподвижная точка $x_k \in M$, $x_k \in b_k(x_k)$. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность x_k сходится к некоторому элементу $\bar{x}$ из M . Очевидно, что

$$(6.3) \quad d(x_k, a(x_k)) \leq \frac{1}{k}(\|x_0\| + \max_{y \in a(x_k)} \|y\|).$$

Поскольку $a(x_k) \subseteq M$ и M ограничено, то правая часть неравенства (6.3) сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$, и поэтому $d(x_k, a(x_k)) \rightarrow 0$. Значит,

$$(6.4) \quad d(x_k, a(\bar{x})) \leq d(x_k, a(x_k)) + H(a(\bar{x}), a(x_k)).$$

Поскольку правая часть неравенства (6.4) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то

$$(6.5) \quad d(x_k, a(\bar{x})) \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (6.5) следует, что $\bar{x} \in a(\bar{x})$. □

Abstract. The paper studies some topological properties of starlike bodies. It is proved that the boundary of a starlike body is a Lipschitz surface. A separability theorem for starlike bodies is proved. It is shown that under some additional assumptions the starlikeness property of the graph provides the local Lipschitz property of the set-valued mapping itself. It is shown that F. Clark's contingent and tangential cones are Boltyansky tents. On the base of these results, some lower and upper differentials for set-valued mappings with starlike graphs are constructed. Some theorems on fixed points of set-valued mappings with starlike values are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Мир, М. (1988).
- [2] С. М. Асеев, "Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений", Труды Мат. института АН СССР, **167**, 25 – 52 (1985).
- [3] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Наука, М. (1979).
- [4] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", Успехи мат. наук, **30:3**, 3 – 55 (1975).

- [5] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, Наука, М. (1973).
- [6] Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, Б. Б. Обуховский, “О новых результатах в теории многозначных отображений ||. Анализ и приложения”, Итоги науки и техники, серия мат. анализ, ВИНТИ, **29**107 – 159 (1991).
- [7] Ф. Кларк, Оптимизация и Негладкий Анализ, Мир, М. (1988).
- [8] Е. С. Половинкин, “Необходимые условия оптимальности с дифференциальным включением”, Тр. МИ РАН, **211**, 387 – 400 (1995).
- [9] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, физматлит, М. (2004).
- [10] Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Наука, М. (1980).
- [11] В. В. Остапенко, “К вопросу о непрерывности многозначных отображений”, Укр. мат. журнал, **47**, no. 11, 1919 – 1925 (1995).
- [12] К. Лейхвейс, Выпуклые Множества, Наука, М. (1985).
- [13] П. В. Семенов, “О неподвижных точках многозначных сжатий”, Функ. анализ и его прил., **36**, no. 2, 89 – 92 (2002).
- [14] А. Р. Хачатрян, “О представлении липшицевых многозначных отображений”, Изв. НАН Армении, серия математика, **39**, no. 3, 64 – 73 (2004).
- [15] А. Р. Хачатрян, “Непрерывные и липшицевые многозначные отображения с ограничениями типа равенств и неравенств”, Изв. НАН Армении, серия математика, **39**, no. 6, 39 – 55 (2004).
- [16] F. S. De Blasi, “On the differentiability of multifunctions”, Pacific journal of mathematics, **66**, no. 1, 67 – 81 (1976).
- [17] H. T. Banks, H. T. Jacobs, “Differential calcul for multifunction”, J. math. anal. end appl., **29**, no. 2, 246 – 272 (1970).
- [18] D. Dentcheva, “Differentiable selections of set-valued mappings with applications in stochastic programming”, Workshop “Stochastic Optimization”, Berlin, Germany, 1 – 27 (1995).
- [19] E. Michael, “Continuous selections”, Ann. Math, **63**, 361 – 381 (1956).
- [20] R. T. Rockafellar, J. B. Roger, Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).

Поступила 29 апреля 2011

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 47, номер 1, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Г. М. Айрапетян, А. Р. Айрапетян, Граничные задачи в весовых пространствах полианалитических функций в полуплоскости	3
Д. А. Карагулян, О характеристике множеств точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина	23
В. Н. Маргарян, Сравнение многочленов и почти гипоэллиптичность	31
Р. А. Хачатрян, О многозначных отображениях со звездными графиками	51–78

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 47, No. 1, 2012

CONTENTS

H. M. Hayrapetyan, A. R. Hayrapetyan, Boundary value problems in weighted spaces of polyanalytic functions in half-plane	3
D. A. Karagulyan, On characterization of unbounded divergence point sets of series in Franklin system	23
V. N. Margaryan, Comparison of polynomials and almost hypoellipticity	31
R. A. Khachatryan, On set-valued mappings with starlike graphs	51–78