

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 3-10.

О ВНЕШНИХ НОРМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *avagujan@ysu.am*

Аннотация. Доказано, что в отличие от свободных произведений групп для произвольного нечётного $n \geq 665$ существуют такие группы G_1 и G_2 , n -периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$ которых обладает нормальным внешним автоморфизмом.

MSC2010 number: 20F05, 20F50, 20E06.

Ключевые слова: n -периодическое произведение групп; свободная бернсайдова группа; нормальный автоморфизм; внутренний автоморфизм.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] для каждого нечетного $n \geq 665$ была построена новая операция умножения групп, названная *периодическим произведением данного периода n* или *n -периодическим произведением* (см. также [2]). Эти операции умножения обладают многими свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойствами точности, ассоциативности и наследственности по подгруппам. Последнее свойство означает, что для любых подгрупп H_i сомножителей G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ вложения $H_i \rightarrow G_i$ продолжаются до вложения n -периодического произведения $\prod_{i \in I}^n H_i$ семейства групп $\{H_i\}_{i \in I}$ в n -периодическое произведение $\prod_{i \in I}^n G_i$, т.е. подгруппы сомножителей порождают в $\prod_{i \in I}^n G_i$ свое n -периодическое произведение.

Построенные операции периодического произведения групп решают проблему А. И. Мальцева о существовании в классе всех групп ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции, отличной как от прямого произведения, так и свободного произведения (см. также [3], [4]).

В настоящей работе мы исследуем группы внешних автоморфизмов n -периодических произведений некоторых классических групп.

Определение 1.1. Пусть G – произвольная группа, $\varphi \in \text{Aut}(G)$ – автоморфизм группы G и H – подгруппа группы G . Автоморфизм φ назовем *H -стабильным* автоморфизмом, если $\varphi(H) = H$. При этом H называется *φ -допустимой* подгруппой.

Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{K}$ подгрупп группы G . Всевозможные H -стабильные автоморфизмы при $H \in \mathcal{K}$ составляют подгруппу группы $\text{Aut}(G)$. Она называется стабилизатором семейства $\mathcal{K}$ и обозначается

$$\text{Aut}_{\mathcal{K}}(G) = \{\varphi \in \text{Aut}(G) \mid \varphi(H) = H \text{ для всех } H \in \mathcal{K}\}.$$

Если ν_g – внутренний автоморфизм, порожденный элементом $g \in G$, т.е. для любого $x \in G$ имеет место $\nu_g(x) = g^{-1}xg$, то $\nu_g(H) = H$ для каждой нормальной подгруппы $H \triangleleft G$.

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G и $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Легко заметить, что тогда выполнены следующие вложения

$$\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}_{\mathcal{N}}(G) \leq \text{Aut}_{\mathcal{M}}(G) \leq \text{Aut}(G),$$

где $\text{Inn}(G)$ – группа всех внутренних автоморфизмов группы G .

Каждый автоморфизм из $\text{Aut}_{\mathcal{N}}(G)$ принято называть **нормальным** автоморфизмом. В частности, любой внутренний автоморфизм является нормальным автоморфизмом. Согласно определению, при данном нормальном автоморфизме $\varphi \in \text{Aut}(G)$ любая нормальная подгруппа группы G φ -допустима и наоборот. Ясно, что если N есть φ -допустимая нормальная подгруппа группы G , то автоморфизм φ индуцируется некоторый автоморфизм фактор группы G/N .

А. Любоцкий в [5] и А. Лю в [6] доказали, что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренним, т.е. имеет место равенство $\text{Inn}(F) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(F)$. Соответствующее равенство было доказано в разные годы для различных интересных классов групп (см. [7] – [14]). В частности, А. Минасян и Д. Осин в [14] показали, что если G – нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $\text{Inn}(G) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(G)$.

М. В. Нецадим в [15], усиливая результаты работ [5] и [6], доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний.

Мы покажем, что результат работы [15] невозможно распространить на n -периодические произведения. Точнее, мы докажем, что для любого нечетного $n \geq 665$ существуют такие группы G_1 и G_2 , n -периодическое произведение которых обладает внешним нормальным автоморфизмом.

В случае двух множителей для обозначения n -периодического произведения будем употреблять запись $G_1 *^n G_2$.

2. ВНЕШНИЕ НОРМАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ

Теорема 2.1. *Пусть G произвольная группа без инволюций, обладающая автоморфизмом порядка 2. Тогда если для некоторого нечетного числа $n \geq 665$ группа G совпадает со своей подгруппой G^n , то n -периодическое произведение $G *^n G$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть автоморфизмом ψ группы G имеет порядок 2. Это означает, что для любого элемента $x \in G$ выполнено равенство $\psi^2(x) = x$. По условию теоремы, существует нечетное число $n \geq 665$ такое, что выполняется равенство $G = G^n$, где G^n есть подгруппа, порожденная всеми n -ми степенями группы G .

Рассмотрим пересекающиеся по единичной подгруппе две изоморфные копии G_1 и G_2 группы G и через $\psi_1 : G_1 \rightarrow G_1$ и $\psi_2 : G_2 \rightarrow G_2$ обозначим соответствующие автоморфизмы порядка 2 этих групп. Построим n -периодическое произведение $G_1 *^n G_2$. Поскольку n -периодическое произведение в классе всех групп является точной операцией, то автоморфизмы $\psi_i : G_i \rightarrow G_i$, $i = 1, 2$, мультипликативным образом расширяются до автоморфизма $\Psi : G_1 *^n G_2 \rightarrow G_1 *^n G_2$ группы $G_1 *^n G_2$. Покажем, что группа $G_1 *^n G_2$ является простой группой (напомним, что нетривиальная группа называется простой, если она имеет в точности две нормальные подгруппы). Для этого воспользуемся следующим критерием простоты, доказанным в работах [16] и [2].

Лемма 2.1. (см. [2], Критерий простоты.) *Пусть дано произвольное число $n \geq 665$ и семейство нетривиальных групп $\{G_i\}_{i \in I}$, где либо $|I| > 2$, либо $|G_i| > 2$ при некотором i . Для того, чтобы n -периодическое произведение $\prod_{i \in I}^n G_i$ периода n было простой группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа G_i совпадала со своей подгруппой, порожденной всеми n -ми степенями.*

По условию теоремы имеют место равенства $G_i = G_i^n$, где G_i^n есть подгруппа, порожденная всеми n -ми степенями группы G_i , $i = 1, 2$. Кроме того, так как G_1

обладает автоморфизмом порядка 2, то $|G_1| > 2$. Поэтому, согласно лемме 2.1, группа $G_1 *^n G_2$ является простой группой.

Очевидно, каждый автоморфизм простой группы является нормальным автоморфизмом. Докажем, что Ψ является внешним автоморфизмом, т.е. не является внутренним автоморфизмом.

Доказывая от противного, предположим, что Ψ – внутренний автоморфизм. Это означает, что некоторый внутренний автоморфизм ν_g совпадает с Ψ . Таким образом, для любого $x \in G_1 *^n G_2$ имеет место равенство $\Psi(x) = \nu_g(x) = g^{-1}xg$. Если $x \in G_i$, то $\Psi(x) = \psi_i(x)$, поскольку автоморфизм Ψ является продолжением автоморфизмов ψ_i , $i = 1, 2$. Тем самым, имеем $\nu_g(x) = \psi_i(x)$ для любого элемента $x \in G_i$, $i = 1, 2$. По условию теоремы автоморфизмы ψ_i имеют порядок 2, т.е. $\psi_i^2 = 1_{G_i}$, $i = 1, 2$. Значит, для любого $x \in G_i$ имеем $\nu_g^2(x) = g^{-2}xg^2 = 1_{G_i}(x) = x$. Отсюда вытекает, что элемент $g^2 \in G_1 *^n G_2$ принадлежит централизатору каждой из групп G_i , $i = 1, 2$. Из этого непосредственно следует, что g^2 принадлежит централизатору всей группы $G_1 *^n G_2$, поскольку периодическое произведение порождается своими множителями. Следовательно, автоморфизм Ψ тоже имеет порядок 2.

Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [16].

Лемма 2.2. (см. [16], теорема 7) *Пусть F есть периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$. Если неединичный элемент x группы F сопряжен некоторому элементу y одной из подгрупп G_i группы F , то всякий перестановочный с x элемент группы F принадлежит той же сопряженной G_i подгруппе HG_iH^{-1} которой принадлежит x .*

Если предположить, что элемент x принадлежит множителю G_1 произведения $G *^n G$, то из равенства $g^{-2}xg^2 = x$, согласно утверждению леммы 2.2, получаем, что элемент g^2 принадлежит этому же множителю G_1 . Аналогичным образом убедимся, что элемент g^2 также принадлежит множителю G_2 . Поскольку единственным общим элементом подгрупп G_1 и G_2 группы $G_1 *^n G_2$ является единичный элемент, то $g^2 = 1$. Таким образом, элемент g является инволюцией. Поэтому элемент g не сопряжен никакому элементу подгрупп G_i , $i = 1, 2$, поскольку элемент группы, сопряженный инволюции, сам является инволюцией, в то время как, согласно условию теоремы, в группах G_i , $i = 1, 2$ не содержатся

инволюции. По той же причине элемент g не равен произведению двух инволюций.

Теперь воспользуемся следующим свойством периодических произведений групп.

Лемма 2.3. (см. [2, теорема 2]) *Если элемент x группы $\prod_{i \in I}^n G_i$ не сопряжен в группе $\prod_{i \in I}^n G_i$ никакому элементу подгрупп G_i и не равен в F произведению двух инволюций, то в $\prod_{i \in I}^n G_i$ выполнено соотношение $x^n = 1$.*

В силу леммы 2.3 в группе $\prod_{i \in I}^n G_i$ выполнено соотношение $g^n = 1$. Сопоставляя последнее равенство с равенством $g^2 = 1$, получаем, что $g = 1$, поскольку n – нечетное число. Условие $g = 1$ означает, что автоморфизм Ψ – тривиальный, что противоречит доказанному выше утверждению, что Ψ является автоморфизмом порядка 2. Полученное противоречие доказывает, что Ψ – внешний автоморфизм. Теорема доказана. $\square$

Следует подчеркнуть, что согласно основному результату работы [17] (см. также [18], [19]), для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной периодической группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ (конечного или бесконечного) является внутренним автоморфизмом, т.е.

$$\text{Inn}(B(m, n)) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(B(m, n)).$$

По определению, свободная периодическая (или свободная бернсайдова) группа $B(m, n)$ периода n и ранга m имеет следующее задание

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$. Согласно теореме 5 работы [16], если все G_i суть свободные периодические группы показателя n , то n -периодическое произведение $\prod_{i \in I}^n G_i$ также есть свободная периодическая группа показателя n , ранг которой равен сумме рангов сомножителей G_i . Таким образом, в терминах n -периодических произведений указанный результат работы [17] можно переформулировать следующим образом: *для любого нечётного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм n -периодического произведения $B(m_1, n)^n * B(m_2, n)$ свободных периодических групп $B(m_1, n)$ и $B(m_2, n)$ рангов $m_1, m_2 \geq 1$ является внутренним автоморфизмом.*

В связи с этим отметим, что из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любого взаимно простого с n нечетного числа k n -периодическое произведение $B(m, k) \overset{n}{*} B(m, k)$ обладает нормальным автоморфизмом, который не является внутренним.*

Доказательство. Рассмотрим n -периодическое произведение $B(m, k) \overset{n}{*} B(m, k)$, где k и n – нечетные числа, $n \geq 665$ и $(k, n) = 1$. Так как период k группы $B(m, k)$ – нечетное число, то в $B(m, k)$ не содержатся инволюции. Из условия взаимной простоты чисел k и n вытекает, что $B(m, k) = B(m, k)^n$. Укажем автоморфизм порядка 2 группы $B(m, k)$. Таковым является, например, автоморфизм $\alpha : B(m, k) \rightarrow B(m, k)$, заданный на свободных порождающих $a_1, \dots, a_m$ группы $B(m, k)$ формулами $\forall a_i (\alpha(a_i) = a_i^{-1})$. Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены и, поэтому, группа $B(m, k) \overset{n}{*} B(m, k)$ обладает нормальным внешним автоморфизмом. $\square$

На самом деле, нетрудно заметить, что рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.1, позволяют получить следующий более общий результат.

Следствие 2.2. *Пусть G_1 и G_2 – произвольные группы, обладающие автоморфизмами порядка $k > 1$ и порядок каждого элемента групп G_1, G_2 взаимно прост как с k , так и с n , где $n \geq 665$ некоторое нечетное число. Тогда если $G_i = G_i^n$, $i = 1, 2$, то n -периодическое произведение $G_1 \overset{n}{*} G_2$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Доказательство. Повторив начало доказательства теоремы 2.1, построим автоморфизм $\Psi : G_1 \overset{n}{*} G_2 \rightarrow G_1 \overset{n}{*} G_2$ как продолжение автоморфизмов $\psi_i : G_i \rightarrow G_i$ порядка k групп G_i , $i = 1, 2$. Так как порядки всех элементов групп G_i взаимно просты с n , то имеет место равенство $G = G^n$. Предположив, что автоморфизм Ψ является внутренним, как и в теореме 2.1, найдем элемент g удовлетворяющий соотношениям $g^k = 1$ и $\Psi(x) = gxg^{-1}$ для всех $x \in G$. Элемент g не сопряжен никакому элементу подгрупп G_i , $i = 1, 2$, поскольку порядки элементов групп G_i , $i = 1, 2$, взаимно просты с k согласно условию теоремы. Элемент g также не равняется произведению двух инволюций, поскольку все произведения двух инволюций группы $G_1 \overset{n}{*} G_2$ (если такие существуют) имеют бесконечный порядок. Значит, в силу леммы 2.3, имеет место соотношение $g^n = 1$. Так как $(k, n) = 1$, то для некоторых целых чисел u и v имеет место равенство $ku + nv = 1$. Тогда имеем

$g = g^{ku+nv} = 1$, и, тем самым, Ψ – тривиальный автоморфизм. Это противоречит тому, что автоморфизм Ψ имеет порядок $k > 1$. $\square$

Следствие 2.3. *Для любого нечётного числа $n \geq 665$ и для любых взаимно простых с n нечетных чисел k_1, k_2 n -периодическое произведение $B(m_1, k_1)^n * B(m_2, k_2)$ обладает нормальным автоморфизмом, который не является внутренним.*

В заключение отметим представляющий интерес следующий вопрос:
Верно ли, что каждый нормальный автоморфизм n -периодического произведения нетривиальных групп периода n является внутренним?

Abstract. The paper proves that, as opposed to free product of groups, for any odd $n \geq 665$ there are some groups G_1 and G_2 with n -periodic product $G_1 \overset{n}{*} G_2$ possessing a normal outer automorphism.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, Теория чисел, математический анализ и их приложения, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 3 – 21 (1976).
- [2] С. И. Адян “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, Матем. заметки, **88**, no. 6, 803 – 810 (2010).
- [3] А. Ю. Ольшанский, “Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 225 – 249 (1989).
- [4] S. V. Ivanov, “On periodic products of groups”, Internat. J. Algebra Comput., **5**, no. 1, 7 – 17 (1995).
- [5] A. Lubotzky, “Normal automorphisms of free groups”, J. Algebra, **63**, no. 2, 494 – 498 (1980).
- [6] A. S.-T. Lue, “Normal automorphisms of free groups”, J. Algebra, **64**, no. 1, 52 – 53 (1980).
- [7] M. Jarden, “Normal automorphisms of free profinite groups”, J. Algebra, **62**, no. 1, 118–123 (1980).
- [8] M. Jarden, J. Ritter, “Normal automorphisms of absolute Galois groups of p -adic fields”, Duke Mathematical Journal, **47**, no. 1, 47 – 56 (1980).
- [9] В. А. Романьков, “Нормальные автоморфизмы дискретных групп”, Сибирск. мат. Ж., **24**, no. 4, 138 – 149 (1983).
- [10] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободной в многообразии $\mathcal{N}_2\mathcal{A}$ про- p -группы”, Алгебра и логика, **35**, no. 3, 249 – 267 (1996).
- [11] Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободных разрешимых про- p -групп”, Алгебра и логика, **36**, no. 4, 441 – 453 (1997).
- [12] G. Endimioni, “Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group”, Q. J. Math., **53**, no. 4, 397 – 402, (2002).
- [13] O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups”, Math. Z., **247**, no. 3, 595 – 609 (2004).
- [14] A. Minasyan, D. Osin, “Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups”, Trans. Amer. Math. Soc., **362**, no. 11, 6079 – 6103 (2010).
- [15] М. В. Нецадим, “Свободное произведение групп не имеет внешних нормальных автоморфизмов”, Алгебра и логика, **35**, no. 5, 562 – 566 (1996).
- [16] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, Докл. АН СССР, **241**, no. 4, 745 – 748 (1978).
- [17] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, Изв. РАН. Сер. матем., **75**, no. 2, 3 – 18 (2011).

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН

- [18] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, *Internat. J. Algebra Comput*, **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).
- [19] В. С. Атабекян, “Не φ -допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп”, *Изв.НАН Армении. Математика*, **45**, no. 2, 21 – 36 (2010).

Поступила 11 марта 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 11-30.

О ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ, ВОЗРАСТАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет,
Ереванский Государственный Университет
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Доказывается, что многочлен (символ дифференциального оператора), многогранник Ньютона которого является прямоугольным параллелепипедом с вершиной в начале координат, будет почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда он регулярен. Получены также алгебраические условия почти гипоеллиптичности для нерегулярных многочленов, возрастающих на бесконечности. Для многочленов двух переменных полученные результаты окончательны.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоеллиiptический многочлен; регулярный многочлен; гипоеллиiptический оператор (многочлен); многогранник Ньютона.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть R^n n -мерное евклидово пространство, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, N_0^n — множество n -мерных мультииндексов, т.е. множество точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in R^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ ($j = 1, \dots, n$), $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, через $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ обозначим характеристический многочлен (полный символ), отвечающий этому оператору.

Определение 1.1. Будем говорить, что многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ (запись $Q < P$), если с некоторой постоянной $C > 0$

$$|Q(\xi)| \leq C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n.$$

Определение 1.2. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоеллиiptическим, если $D^\nu P < P$ для любого $\nu \in N_0^n$.

Понятие *почти гипоеллиптического* оператора (многочлена) является обобщением введенного Л. Хермандером в [1] понятия *гипоеллиптического* оператора (многочлена). Напомним, что гипоеллиптические многочлены характеризуются тем (см. [5], Теорема 11.1.3), что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$

$$D^\nu P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

а гипоеллиптические операторы тем, что все решения из класса распределений дифференциальных уравнений, отвечающих этим операторам являются бесконечно дифференцируемыми функциями (см. [2] – [4]).

Из этих определений следует, что гипоеллиптический многочлен является почти гипоеллиптическим. Обратное не верно, в чём можно убедиться непосредственной проверкой на примере многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2$ (см. также ниже, Лемму 2.1), которому соответствует оператор

$$P(D) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

После появления работы [1] Л. Хермандера и особенно после публикации монографии [6] и статьи [7] того же автора, началось бурное развитие теории гипоеллиптических уравнений. В частности, разными авторами были найдены различные алгебраические условия гипоеллиптичности (см., например, [8] – [11]). Эти и многие неотмеченные работы относились к невырожденным (регулярным) (см. Определение 1.4 ниже) многочленам, близким по своему характеру к эллиптическим.

Далее были получены алгебраические условия гипоеллиптичности также и для вырожденных (нерегулярных) многочленов, сильно отличающихся от эллиптических (см., например, [12] – [15]).

Несмотря на то, что класс гипоеллиптических операторов содержит множество эллиптических операторов и выходит далеко за его пределы, естественным образом встал вопрос описания таких дифференциальных уравнений, которые будучи негипоеллиптическими, имеют “достаточное количество” бесконечно дифференцируемых решений. На этом пути были введены понятия частично гипоеллиптического оператора (см., например, [16] – [19]), глобально гипоеллиптического оператора (см., например, [20]) и почти гипоеллиптического оператора (см., например, [21] – [23]).

Приведем еще несколько определений и обозначений.

Пусть $\lambda \in R^n$. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется λ -однородным (обобщенно - однородным) λ -порядка d , если для любого $t > 0$

$$R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^d R(\xi) \quad \forall \xi \in R^n,$$

или, что то же самое, если многочлен R представляется в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d} r_\alpha \xi^\alpha.$$

Для λ -однородного многочлена R обозначим

$$(1.1) \quad R^{n,0} = \{\xi \in R^n, \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \neq 0\} \quad \text{и} \quad \Sigma(\lambda, R) = \{\eta \in R^{n,0}, R(\eta) = 0\}.$$

Пусть $\eta \in \Sigma(R) = \Sigma(\lambda, R)$, положим

$$(1.2) \quad \aleph(\eta, R) = \{\nu \in N_0^n, D^\nu R(\eta) \neq 0\},$$

$$(1.3) \quad \Delta(\eta, R) = \min_{\nu \in \aleph(\eta, R)} (\lambda, \nu),$$

при этом будем считать, что $\Delta(\eta, R) = 0$, если $\eta \in R^{n,0} \setminus \Sigma(R)$.

Для набора мультииндексов $\aleph = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$, наименьший выпуклый многогранник $\aleph(\aleph)$ в $R^{n,0}$, содержащий все мультииндексы $\alpha^j \in \aleph$ ($j = 1, \dots, N$) называется многогранником Ньютона набора $\aleph$ (см. [8] или [27]).

Многогранник $\aleph$ с вершинами из N_0^n называется полным, если $\aleph$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой оси координат.

Пусть $\aleph$ — полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \aleph$ называется гранью многогранника $\aleph$, если существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и число $d \geq 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) = d$ для всех $\alpha \in \Gamma$ и $(\lambda, \alpha) < d$ при $\beta \in \aleph \setminus \Gamma$. В этом случае вектор λ называется внешней нормалью ($\aleph$ -нормалью) грани Γ . Множество (единичных) внешних нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$. Грани размерности k многогранника $\aleph$ обозначим через $\aleph_i^k$ ($i = 1, \dots, M'_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$).

Грань $\aleph_i^k$ ($1 \leq i \leq M'_k$, $0 \leq k \leq n-1$) многогранника $\aleph$ называется **главной**, если среди $\aleph$ -нормалей этой грани существует нормаль, которая имеет хотя бы одну положительную координату. Если среди $\aleph$ -нормалей $\aleph_i^k$ существует вектор с неотрицательными (положительными) координатами, то грань $\aleph_i^k$ называется **правильной (вполне правильной)**.

Многогранник $\aleph$ называется **правильным (вполне правильным)**, если $\aleph$ — полный и все $(n-1)$ -мерные некоординатные грани $\aleph$ правильны (вполне правильны).

Многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ построенный на наборе мультииндексов (P) оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) назовем **многогранником Ньютона** или **характеристическим многогранником** оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Легко видеть (см. ниже, доказательство первой части Леммы 2.1), что многогранник Ньютона гипоеллиптического многочлена является вполне правильным, а многогранник Ньютона почти гипоеллиптического многочлена - правильным (см. [28], Лемма 1.1).

Каждой главной грани $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) многогранника $\mathfrak{R}(P)$ сопоставим подмногочлен

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

многочлена $P(\xi)$. В [8] доказано, что подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{R}_i^k$ многогранника Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ является λ -однородным для любого $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$, т.е. существует число $d = d_{i,k} \geq 0$ такое, что

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = d} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

при этом $d > 0$, если грань $\mathfrak{R}_i^k$ главная.

Определение 1.3. (см. [8]) Грань $\mathfrak{R}_i^k$ ($1 \leq i \leq M_k$, $0 \leq k \leq n-1$) многогранника $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ называется *регулярной (невырожденной)*, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{n,0}$. Если $P^{i,k}(\eta^0) = 0$ для некоторой точки $\eta^0 \in R^{n,0}$, то грань $\mathfrak{R}_i^k$ назовём *нерегулярной (вырожденной)*.

Пусть $\mathfrak{R}_i^k$ некоторая главная грань многогранника Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$. Очевидно, что для любого ненулевого вектора $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ существует натуральное число $M = M(\lambda, \mathfrak{R}_i^k)$ и неотрицательные числа $d_j = d(\lambda, \mathfrak{R}_i^k)$ ($j = 0, 1, \dots, M$) такие, что многочлен P можно представить в виде суммы отличных от нуля λ -однородных многочленов

$$(1.4) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha) = d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$ и $P_{d_0}(\xi) \equiv P^{i,k}(\xi)$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$.

Если главная грань $\mathfrak{R}_i^k$ нерегулярна, то согласно обозначениям (1.1) - (1.3) свяжем с обобщённо - однородным многочленом $P^{i,k}(\xi)$ (с гранью $\mathfrak{R}_i^k$) и вектором $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ множества $\Sigma(\lambda, P_j)$, $\aleph(\eta, \lambda, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ ($j = 0, 1, \dots, M$)

для произвольной точки $\eta \in \Sigma(\lambda, P_j)$. Для мультииндекса $\nu \in N_0^n$, множества $\Sigma(\lambda, D^\nu P_j)$, $\aleph(\eta, \lambda, D^\nu P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, D^\nu P_j)$ определяются аналогично, если иметь в виду, что (см. представление (1.4)) многочлен $D^\nu P$ представляется в виде

$$(1.5) \quad D^\nu P(\xi) = \sum_{\alpha \in (D^\nu P)} \gamma_{\alpha, \nu} \xi^\alpha = \sum_{j=0}^M D^\nu P_j(\xi).$$

В. П. Михайловым в [8] доказано, что для любого регулярного многочлена P с полным многогранником Ньютона $\aleph(P)$ существует постоянная $C = C(P) > 0$ такая, что

$$(1.6) \quad \sum_{\alpha \in \aleph(P)} |\xi^\alpha| \leq C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n.$$

Более того, справедливо в определенном смысле обратное утверждение:

Лемма 1.1. *Если многочлен P с полным многогранником Ньютона $\aleph(P)$ удовлетворяет соотношению (1.6), то P регулярен.*

Доказательство. Пусть некоторая главная грань $\aleph_i^k$ многогранника $\aleph(P)$ нерегулярна. Докажем, что многочлен P не удовлетворяет соотношению (1.6) ни для какой постоянной C . Пусть $\lambda \in \Lambda(\aleph_i^k)$, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$, $(\lambda, \alpha) = d_0$ уравнение $(n-1)$ -мерной опорной к $\aleph(P)$ гиперплоскости, проходящей через грань $\aleph_i^k$ и $P^{i,k}$ – подмногочлен P , отвечающий этой грани. Тогда $P^{i,k}(\eta) = 0$ и для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем из (1.4)

$$\begin{aligned} P(\xi^s) &\equiv P(s^\lambda \eta) = P^{i,k}(s^\lambda \eta) + \sum_{j=1}^M P_j(s^\lambda \eta) = \\ &= s^{d_0} P^{i,k}(\eta) + \sum_{j=1}^M s^{d_j} P_j(\eta) = \sum_{j=1}^M s^{d_j} P_j(\eta), \end{aligned}$$

причем $|(\xi^s)^\alpha| = s^{d_0} |\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}|$. Так как для точек $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ $\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n} \neq 0$ и $d_j < d_0$ для всех $j = 1, \dots, M$, то из этих двух соотношений получаем, что при $s \rightarrow \infty$ $|P(\xi^s)| = o(s^{d_0})$, в то время как

$$|(\xi^s)^\alpha|/s^{d_0} = |\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}| > 0 \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Это показывает, что (1.6) не может иметь места. Лемма 1.1 доказана. $\square$

Исходя из теоремы В. П. Михайлова и леммы 1.1 далее многочлен P назовем регулярным, если для него справедливо соотношение (1.6).

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Следующее предложение позволяет нам далее рассматривать только многочлены с правильными многогранниками Ньютона.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ полный (n - мерный) многогранник Ньютона регулярного многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тогда многочлен $P(\xi)$

- 1) гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ — вполне правильный
- 2) почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ — правильный.

Доказательство. 1). Пусть P — регулярный многочлен, а $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ вполне правильный многогранник. Докажем, что P гипоеллиптичен. Для этого достаточно доказать (см. [5], Теорема 11.1.1), что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$ при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$(2.1) \quad |D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \rightarrow 0.$$

Так как многогранник $\mathfrak{R}$ вполне правильный, то из простых геометрических соображений следует, что для любого $0 \neq \nu \in N_0^n$ точки $\alpha \in (D^\nu P)$ являются неглавными точками многогранника $\mathfrak{R}$. В работе [8] доказана, что для любой неглавной точки $\beta \in \mathfrak{R}$ при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$(2.2) \quad |\xi^\beta| / \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \rightarrow 0.$$

Поэтому для доказательства (2.1), достаточно воспользоваться соотношениями (1.6), (2.2) и фактом, что регулярный многочлен бесконечно возрастает при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Докажем, что многочлен P , многогранник которого не является вполне правильным, не может быть гипоеллиптическим (независимо от его регулярности). Заметим, что если многогранник $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным, то это геометрически означает:

а) проекция какой-нибудь главной вершины $\mathfrak{R}$ на какую-нибудь координатную гиперплоскость выходит за пределы $\mathfrak{R}$ (если $\mathfrak{R}$ неправильный многогранник),

б) если $\mathfrak{R}$ правильный, то проекция какой-нибудь главной вершины $\mathfrak{R}$ совпадает с какой-нибудь главной вершиной $\mathfrak{R}$.

В случае а) пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ такая вершина $\mathfrak{R}$, что ее проекция $e' = (0, \dots, 0, e_{k+1}, \dots, e_n)$ на координатную гиперплоскость $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ($k \leq n-1$)

выходит за пределы $\mathfrak{K}$. Проведем $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость, проходящую через точку e' так, чтобы она не проходила через начало координат и не имела общей точки с $\mathfrak{K}$. Пусть $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение этой гиперплоскости, при этом λ -внешняя относительно $\mathfrak{K}$ нормаль этой гиперплоскости. Тогда $d > 0, (\lambda, e') = d, (\lambda, \alpha) < d$ для всех $\alpha \in \mathfrak{K}$.

Обозначим $\nu = (e_1, \dots, e_k, 0, \dots, 0)$. Представляя по вектору λ многочлены P и $D^\nu P = D_1^{e_1} \dots D_k^{e_k} P$ соответственно в виде (1.4) и (1.5) и рассматривая их на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$), где точка η выбрана так, чтобы $D^\nu P(\eta) \neq 0$, получим, что при $s \rightarrow \infty$

$$(2.3) \quad D^\nu P(\xi) = D^\nu P(\eta)s^d; \quad P(\xi^s) = o(s^d),$$

т.е. многочлен P не гипоеллиптичен.

В случае б), предполагая, что e' есть главная вершина $\mathfrak{K}$ (т.е. многогранник $\mathfrak{K}$ правильный, но не вполне правильный), то проводя через e' $(n - 1)$ -мерную опорную к $\mathfrak{K}$ гиперплоскость, не проходящую через начало координат и не имеющую других общих точек с $\mathfrak{K}$, кроме e' и повторяя рассуждения, проводимые выше, получим, что с некоторыми постоянными $C_1 > 0, C_2 > 0$

$$|D^\nu P(\xi^s)| \geq C_1 s^d, \quad |P(\xi^s)| \leq C_2 s^d \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Это показывает, что P не гипоеллиптичен.

Второй пункт доказывается буквальным повторением доказательства первой части первого пункта, когда оценки соответствующих многочленов приводят к соотношениям (2.3) из которых следует, что $|D^\nu P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \rightarrow \infty$ при $|\xi^s| \rightarrow \infty$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P . Пусть все вполне правильные грани $\mathfrak{K}$ регулярны. Многочлен P является почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда P регулярен, т.е. когда все главные грани $\mathfrak{K}$ регулярны.

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы почти гипоеллиптический многочлен не может иметь главных нерегулярных граней.

Так как все нульмерные грани регулярны, то начнем доказательство с одномерных граней. Пусть Γ одномерная главная (не вполне правильная) нерегулярная грань $\mathfrak{K}$. Докажем, что P не почти гипоеллиптичен.

Пусть $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $(\lambda, \alpha) = d_0$ уравнение $(n-1)$ -мерной опорной к $\mathfrak{R}$ гиперплоскости, содержащей Γ и не содержащей точек из $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$. Так как Γ не вполне правильная грань, то λ имеет хотя бы одну неположительную координату. Пусть, для определенности, $\lambda_1 \leq 0$.

Положим $m_1 = \max\{\alpha_1, \alpha \in \Gamma\}$, $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 = m_1\}$ и покажем, что Γ_0 состоит из единственной точки и, следовательно, является нульмерной подгранью Γ , т.е. вершиной $\mathfrak{R}$. В самом деле, если Γ содержит две разные точки α^1 и α^2 такие, что $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = m_1$, то так как одномерная грань определяется своими двумя точками, это значит, что $\alpha_1 = m_1$ для всех точек $\alpha \in \Gamma$. Тогда Γ перпендикулярна оси $0\alpha_1$, т.е. $\lambda_1 > 0$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом Γ_0 совпадает с какой-то главной вершиной $e = (m_1, e_2, \dots, e_n)$ многогранника $\mathfrak{R}$.

Представим по вектору λ многочлены P и $D_1^{m_1}P$ по формулам (1.4), (1.5) и рассмотрим поведение этих многочленов на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta = (s^{\lambda_1} \eta_1, \dots, s^{\lambda_n} \eta_n)$ ($s = 1, 2, \dots$), где $\eta \in \Sigma(\Gamma)$. Имеем

$$(2.4) \quad P(\xi^s) = P_{d_0}(\eta) s^{d_0} + \sum_{j=1}^M P_{d_j}(\eta) s^{d_j} = \sum_{j=1}^M P_{d_j}(\eta) s^{d_j},$$

$$D_1^{m_1} P(\xi^s) = D_1^{m_1} [\gamma_e(\xi^s)^e + \sum_{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 < m_1} \gamma_\alpha(\xi^s)^\alpha] + \sum_{j=1}^M P_{d_j}(\xi^s) =$$

$$= \gamma_e(m_1!) \eta_2^{e_2} \dots \eta_n^{e_n} s^{d_0 - \lambda_1 m_1} + \sum_{j=1}^M D_1^{m_1} P_{d_j}(\eta) s^{d_j - \lambda_1 m_1}.$$

Так как $\lambda_1 \leq 0$, то $d_0 - \lambda_1 m_1 > d_1 - \lambda_1 m_1 \geq 0$. Поэтому из этих соотношений получаем при $s \rightarrow \infty$

$$|P(\xi^s)| = o(s^{d_0}), \quad |D_1^{m_1} P(\xi^s)| = \gamma_e(m_1!) |\eta_2^{e_2} \dots \eta_n^{e_n}| s^{d_0 - \lambda_1 m_1} (1 + o(1)).$$

Так как $\eta \in R^{n,0}$, то $\eta_2^{e_2} \dots \eta_n^{e_n} \neq 0$ и эти соотношения показывают, что многочлен P не является почти гипоеллиптическим.

Пусть теперь Γ – двумерная главная (не вполне правильная) нерегулярная грань $\mathfrak{R}$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и пусть, например, $\lambda_1 \leq 0$. Введем обозначения m_1 и Γ_0 как выше и покажем, что в этом случае либо Γ_0 состоит из одной точки, т.е. является вершиной $\mathfrak{R}$, либо составляет одномерную подгрань грани $\mathfrak{R}$.

Покажем, что если Γ_0 содержит более одной точки, то все они лежат на одной прямой. В противном случае существуют три точки α^1, α^2 и α^3 из Γ , не

лежащие на одной прямой такие, что $\alpha_1^j = m_1$ ($j = 1, 2, 3$). Так как три такие точки однозначно определяют двумерную грань Γ , то это значит, что плоскость, проходящая через Γ перпендикулярна оси $0\alpha_1$ и, следовательно, $\lambda_1 > 0$.

Так как, очевидно, все подграницы главной грани являются главными, то Γ_0 либо нульмерная главная грань, т.е. вершина, либо одномерная главная грань $\mathfrak{X}$ и, в обоих случаях, подмногочлен P_{d_0} , отвечающий грани Γ и вектору λ , имеет вид

$$(2.5) \quad P_{d_0}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 = m_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha + \sum_{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 < m_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \xi_1^{m_1} q(\xi_2, \dots, \xi_n) + \sum_{\alpha \in \Gamma, \alpha_1 < m_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

при этом в нульмерном случае $q(\eta_2, \dots, \eta_n) \neq 0$ для $\eta \in R^{n,0}$ по определению вершины. Если Γ_0 – одномерная вполне правильная грань, то $q(\eta_2, \dots, \eta_n) \neq 0$ по предположению теоремы. Если Γ_0 – одномерная главная, но не вполне правильная грань, то $q(\eta_2, \dots, \eta_n) \neq 0$ по уже доказанной части теоремы.

Рассматривая многочлены P и $D_1^{m_1}P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$) с некоторой точкой $\eta \in \Sigma(\Gamma)$, для многочлена P получим представление (2.4), а для многочлена $D_1^{m_1}P$ согласно (2.5), представление

$$(2.6) \quad D_1^{m_1}P(\xi^s) = (m_1!)q(\eta_2, \dots, \eta_n)s^{d_0 - \lambda_1 m_1} + \sum_{j=1}^M D_1^{m_1}P_{d_j}(\eta)s^{d_j - \lambda_1 m_1}.$$

Так как $q(\eta_2, \dots, \eta_n) \neq 0$, то, рассуждая как выше, из (2.4), (2.6) получим, что многочлен P не является почти гипозеллиптическим.

Если $n \geq 4$, то продолжая аналогичные рассуждения для трёхмерных и т.д. $(n-1)$ -мерных граней, получим, что многочлен P регулярен. При этом отметим, что, например, для трёхмерных граней множество Γ_0 может быть нульмерной, одномерной или двумерной гранью $\mathfrak{X}$.

Почти гипозеллиптичность регулярного многочлена с правильным многогранником Ньютона следует из Леммы 2.1. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Следствие 2.1. *При $n = 2$ для почти гипозеллиптического многочлена нерегулярными могут быть только вполне правильные грани его многогранника Ньютона.*

Одним из основных результатов настоящей статьи является

Следствие 2.2. *Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, многогранник Ньютона которого n -мерный прямоугольный параллелепипед с вершиной в начале координат, является почти гипозэллиптическим тогда и только тогда, когда он регулярен.*

Первое следствие очевидно, потому, что подгранями одномерной грани являются только нульмерные грани. Второе следствие получается из геометрически очевидного факта, что вполне правильными гранями для прямоугольного параллелепипеда также являются только нульмерные грани.

Следствие 2.3. *Если Γ некоторая l -мерная ($0 < l \leq n - 1$) правильная, но не вполне правильная грань правильного многогранника $\mathfrak{X}$ почти гипозэллиптического многочлена P , все k -мерные главные подграни которой регуляры при $k < l$, то грань Γ регулярна.*

3. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ВОЗРАСТАЮЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом параграфе для одного класса многочленов с вещественными коэффициентами мы получим условия при которых нерегулярный многочлен является почти гипозэллиптическим. Для описания класса изучаемых многочленов введем ряд дополнительных обозначений и понятий.

Через I_n обозначим множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ таких, что $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. В [25] найдены необходимые и достаточные условия при которых многочлен двух переменных принадлежит I_2 .

Очевидно, любой регулярный или гипозэллиптический многочлен n переменных принадлежит I_n . Однако существуют почти гипозэллиптические многочлены n переменных, не принадлежащие I_n . Такие многочлены нами изучены в [28], [29]. Здесь мы рассматриваем нерегулярные многочлены из I_n , при этом сосредоточимся на случае, когда правильный многогранник Ньютона $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(P)$ многочлена P имеет единственную, притом вполне правильную $(n - 1)$ -мерную, нерегулярную грань, а все остальные главные грани $\mathfrak{X}$ регуляры. Отметим, что рассмотрение только $(n - 1)$ -мерной нерегулярной грани мотивируется тем, что для двумерных многочленов это единственно возможный случай, а рассмотрение только вполне правильной грани мотивировано Теоремой 2.1 (см. также Следствие 2.1).

Если $P \in I_n$, то, очевидно, за счет добавления константы к P и умножения на константу, можно добиться того, что $P(\xi) > 0$ для любого $\xi \in R^n$. Поэтому далее будем считать, что если $P \in I_n$, то $P(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in R^n$. Следующее утверждение было доказано в [28].

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ – полный многогранник Ньютона многочлена $P \in I_n$ и $\mathfrak{R}_i^k$ ($i = 1, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1$) – главные грани $\mathfrak{R}$.

a) Тогда $P^{i,k}(\xi) \geq 0$ для любого $\xi \in R^n$ ($i = 1, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1$);

b) Пусть пара (i, k) , ($1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1$), вектор $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ и точка $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ фиксированы, при этом (см. представление (1.4)) $P_j(\eta) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$), $P_l(\eta) \neq 0$ ($1 \leq l \leq M, l = l(\eta)$). Тогда $P_l(\eta) > 0$.

Пусть $\mathfrak{R}_i^k$ – некоторая нерегулярная грань $\mathfrak{R}(P)$, $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и число $l = l(\eta)$ определяется как в пункте b) леммы 3.1. Согласно обозначениям (1.1) – (1.3) введем множества $\aleph(\eta, \lambda, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$). В добавление к Лемме 3.1 докажем следующее предложение.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{R}_i^k$ – некоторая главная нерегулярная грань правильного многогранника Ньютона почти гипоеллиптического многочлена P , а $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ и $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ – произвольные точки. Тогда

$$(3.1) \quad d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) \leq d_l \quad (j = 0, 1, \dots, l-1).$$

Доказательство. Допустим противное, что для некоторых значений j ($0 \leq j \leq l-1$) неравенство (3.1) нарушается, при этом через j_0 обозначим наименьшее из таких j . Итак, получаем

$$(3.2) \quad d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) \leq d_l \quad (j = 0, 1, \dots, j_0-1), d_{j_0}(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0}) > d_l.$$

Пусть мультииндекс $\beta \in N_0^n$ выбран так, что $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$ и $(\lambda, \beta) = \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0})$. Рассмотрим значения многочленов P и $D^\beta P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$).

Так как $d_j(\lambda) > d_{j_0}(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots, j_0-1$), то из (3.2) следует, что $\Delta(\eta, \lambda, P_{j_0}) < \Delta(\eta, \lambda, P_j)$ ($j = 0, 1, \dots, j_0-1$). Тогда $P_j(\eta) = D^\beta P_j(\eta) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, j_0-1$), $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$ и, согласно представлениям (1.4), (1.5) и неравенству (3.2) имеем

$$P(\xi^s) = P_l(\eta)s^{d_l} + o(s^{d_l}) \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Для многочлена $D^\beta P$ и для всех $s \in N$ имеем

$$D^\beta P(\xi^s) = s^{d_{j_0}(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0})} D^\beta P_{j_0}(\eta) + \sum_{j=j_0+1}^M s^{d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0})} D^\beta P_j(\eta).$$

Так как $d_j(\lambda) < d_{j_0}(\lambda)$ ($j = j_0 + 1, \dots, M$), то получаем

$$|D^\beta P(\xi^s)| = |D^\beta P_{j_{2pt0}}(\eta)| s^{d_{j_0}(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_{j_0})} (1 + o(1)) \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Так как $D^\beta P_{j_0}(\eta) \neq 0$, эти соотношения вместе с (3.2) противоречат почти гипотезе эллиптичности многочлена P . Лемма 3.2 доказана. $\square$

Обобщенно - однородный многочлен $R(\xi)$ назовем многочленом с изолированными характеристиками, если для каждой точки $\eta \in \Sigma(R)$ существуют окрестность $U(\eta)$, гладкие обобщенно - однородные функции $q(\xi) = q(\xi, \eta)$, $r(\xi) = r(\xi, \eta)$ и натуральное число $m = m(\eta)$ такие, что $q(\eta) = 0$, $r(\eta) \neq 0$, $\text{grad} q(\eta) \neq 0$ и

$$R(\xi) = [q(\xi)]^m r(\xi), \quad \xi \in U(\eta).$$

Замечание 3.1. Из леммы 2.1 работы [12] следует, что при $n = 2$ любой обобщенно - однородный многочлен $R(\xi_1, \xi_2)$ является многочленом с изолированными характеристиками. При этом, если R_1 и R_2 два обобщенно - однородных многочлена двух переменных таких, что $R_1(\eta) = R_2(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in R^{n,0}$ и

$$R_i(\xi) = [q_i(\xi)]^{m_i} r_i(\xi), \quad \xi \in U_i(\eta), \quad i = 1, 2$$

их представления, то $q_1(\xi) \equiv q_2(\xi)$, $U_1(\eta) = U_2(\eta)$ и $D_j q_1(\eta) \neq 0$ $j = 1, 2$.

Ниже (в теореме 3.1) будем считать, что если Γ - $(n - 1)$ -мерная, вполне правильная нерегулярная грань многогранника $\mathfrak{R}(P)$ многочлена P , μ - внешняя нормаль этой грани и $\eta \in \Sigma(\Gamma)$, то (см. (1.4)) μ -однородные многочлены P_j ($j = 0, 1, \dots, l - 1$, $l = l(\eta)$) имеют изолированные характеристики и (см. Замечание 3.1)

$$(3.3) \quad P_j(\xi) = [q(\xi)]^{m_j} r_j(\xi) \geq 0, \quad \xi \in U(\eta), \quad j = 0, 1, \dots, l - 1,$$

где $q(\eta) = 0$, $r_j(\eta) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, l - 1$) и, если предполагать, что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, то $D_n q(\eta) \neq 0$. Тогда имеет место

Теорема 3.1. Пусть все главные грани правильного многогранника Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ многочлена $P \in I_n$ регулярны, кроме одной $(n - 1)$ -мерной вполне

правильной грани $\Gamma = \mathbb{R}_{i_0}^{n-1}$, которая нерегулярна, притом многочлены P_j , $j = 0, 1, \dots, l-1$, $l = l(\eta)$ удовлетворяют условиям (3.3). Тогда многочлен P почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$

$$(3.4) \quad d_j - \Delta(\eta, P_j) \leq d_l(\eta) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1).$$

Доказательство. Необходимость условий (3.4) вытекает из леммы 3.2. Докажем достаточность этих условий.

Мы применяем метод доказательства В. П. Михайлова [8], примененный для регулярных многочленов, модифицированный и приспособленный к нерегулярным многочленам (см., например [12], Теорема 2, или [28] Теорема 2.1).

Допустим обратное, существует мультииндекс ν^0 и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $|D^{\nu^0} P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \rightarrow \infty$. При этом достаточно считать (см. [28], Теорема 1.1), что $|\nu^0| = 1$. Пусть, для определенности, $\nu^0 = (1, 0, \dots, 0)$ и

$$(3.5) \quad |D_1 P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Не умаляя общности можно считать, что $\xi_i^s > 0$ ($i = 1, \dots, n; s = 1, 2, \dots$). Положим

$$(3.6) \quad \rho_s = \exp \sqrt{\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j^s)^2}, \quad \lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\ln \rho_s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда $\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}$ ($\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$; $i = 1, \dots, n$) и $|\lambda^s| = 1$ ($s = 1, 2, \dots$). Так как из последовательности $\{\lambda^s\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то без потери общности можно считать, что $\lambda^s \rightarrow \lambda$ при $s \rightarrow \infty$, где $|\lambda| = 1$.

Из выпуклости многогранника $\mathfrak{R}$ следует, что λ является нормалью к одной и только одной грани $\mathfrak{R}_{i_1}^{k_1}$ многогранника $\mathfrak{R}$. Обозначим λ через $e^{1,1}$ и выберем n -мерные векторы $e^{1,2}, \dots, e^{1,n}$ так, чтобы система $(e^{1,1}, e^{1,2}, \dots, e^{1,n})$ составляла ортонормированный базис в R^n . Тогда $\lambda^s = \sum_{j=1}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}$ и поскольку $\lambda^s \rightarrow e^{1,1}$ при $s \rightarrow \infty$, то $\kappa_{1,1}^s \rightarrow 1$, $\kappa_{1,j}^s = o(1)$, $j = 2, \dots, n$.

Если для достаточно больших s базис $(e^{1,1}, e^{1,2}, \dots, e^{1,n})$ удовлетворяет условию $\sum_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j} = 0$, то обозначим его через $e^1, \dots, e^n$. В противном случае можно предположить, что $\sum_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j} \neq 0$, для всех $s \in N$ и что

$$(3.7) \quad [\sum_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}] / [\sum_{j=2}^n \kappa_{1,j}^s e^{1,j}] \rightarrow e^{2,2}; \quad |e^{2,2}| = 1 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Выберем n -мерные векторы $e^{2,3}, \dots, e^{2,n}$ так, чтобы система $(e^{2,2}, e^{2,3}, \dots, e^{2,n})$ составляла ортонормированный базис в $(n-1)$ -мерном пространстве, порожденном базисом $(e^{1,2}, \dots, e^{1,n})$. Тогда при $n \geq 3$

$$\lambda^s = \kappa_{1,1}^s e^{1,1} + \kappa_{2,2}^s e^{2,2} + \sum_{j=3}^n \kappa_{2,j}^s e^{2,j} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

при этом $\kappa_{1,1}^s \rightarrow 1$, $\kappa_{2,2}^s = o(\kappa_{1,1}^s)$, $\kappa_{2,j}^s = o(\kappa_{2,2}^s)$, $(j = 3, \dots, n)$ при $s \rightarrow \infty$.

Продолжая этот процесс, получим ортонормированный базис $(e^1, \dots, e^n)$ такой, что $\lambda^s = \sum_{j=1}^n \kappa_j^s e^j$ ($s = 1, 2, \dots$), при этом $\kappa_1^s \rightarrow 1$, $\kappa_j^s = o(\kappa_{j-1}^s)$, $(j = 2, \dots, n)$ при $s \rightarrow \infty$.

Очевидно, существуют натуральные числа $m \leq n$ и s_0 такие, что $\lambda_j^s \neq 0$ ($j = 1, \dots, m$), $\lambda_j^s = 0$ ($j = m+1, \dots, n$; $s = s_0, s_0+1, \dots$). За счет выбора подпоследовательности можно считать, что $s_0 = 1$ и $\lambda_i^s > 0$ ($j = 1, \dots, m$) для всех $s \in N$. Свяжем теперь построенный базис с многогранником $\mathfrak{R}$. Выберем грани $\mathfrak{R}_{i_1}^{k_1}, \dots, \mathfrak{R}_{i_m}^{k_m}$ следующим образом: пусть грань $\mathfrak{R}_{i_j}^{k_j}$ лежит в опорной к $\mathfrak{R}$ гиперплоскости с нормалью e^j , ($j = 1, \dots, m$), при этом грань $\mathfrak{R}_{i_j}^{k_j}$, ($j = 2, \dots, m$) либо совпадает с $\mathfrak{R}_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, либо является ее подгранью. Тогда $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$ и (см. обозначения (3.6))

$$(3.8) \quad \xi^s = \rho_s^{\sum_{j=1}^n \kappa_j^s e^j} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

при этом $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и для некоторого r ($1 \leq r \leq m$)

$$(3.9) \quad \rho_s^{\kappa_j^s} \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, r), \quad \rho_s^{\kappa_{r+1}^s} \rightarrow b \geq 1, \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Для $r = m = n$ положим $\kappa_{n+1}^s = 0$ ($s = 1, 2, \dots$).

Сравним поведение многочленов P и $D_1 P$ на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s \rightarrow \infty$.

Из e^j -однородности подмногочлена P^{i_j, k_j} имеем при $s \rightarrow \infty$, с некоторым мультииндексом α , принадлежащим всем граням $\mathfrak{R}_{i_j}^{k_j}$ ($j = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} P(\xi^s) &= \rho_s^{(\alpha, \kappa_1^s e^1)} [P^{i_1, k_1}(\rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} \kappa_j^s e^j}) + o(\rho_s^{-\varepsilon_1 \kappa_1^s})] = \\ &= \rho_s^{(\alpha, \kappa_1^s e^1 + \kappa_2^s e^2)} [P^{i_2, k_2}(\rho_s^{\sum_{j=3}^{n+1} \kappa_j^s e^j}) + o(\rho_s^{-\varepsilon_2 \kappa_2^s})] = \\ (3.10) \quad &= \dots = \rho_s^{(\alpha, \sum_{j=1}^r \kappa_j^s e^j)} [P^{i_r, k_r}(\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1} \kappa_j^s e^j}) + o(\rho_s^{-\varepsilon_r \kappa_r^s})], \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ – положительные числа, а e^{n+1} – произвольный единичный вектор, если $r = m = n$, при этом из определения чисел $\{\kappa_j^s\}$ следует (см. (3.8), (3.9)), что

$$\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1} \kappa_j^s e^j} \rightarrow b^{e^{r+1}} \equiv \eta \in R^{n,0} \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Если $(\alpha, e^1) = 0$, то грань $\mathfrak{R}_{i_1}^{k_1}$ проходит через начало координат N_0^n и, следовательно, неглавная. Этот случай (не связанный с регулярностью многочлена P) рассматривается как соответствующий случай в доказательстве Теоремы 2 работы [12]. Повторять его здесь не будем.

Пусть $(\alpha, e^1) > 0$, тогда $(\alpha, \sum_{j=1}^r \kappa_j^s e^j) > 0$ для всех достаточно больших s . Если $P^{i_r, k_r}(\eta) \neq 0$, то из (3.10) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(3.10') \quad |P(\xi^s)| = \rho_s^{\kappa_1^s(e^1, \alpha)} |P^{i_r, k_r}(\eta)| (1 + o(1)).$$

Если $e_1^1 < 0$, то из простых геометрических соображений следует, что грань $\mathfrak{R}_{i_1}^{k_1}$ и, следовательно, все ее подграницы правильного многогранника $\mathfrak{R}$ лежат на гиперплоскости $\alpha_1 = 0$, т.е. многочлен $P^{i_r, k_r}(\xi)$ не зависит от ξ_1 . Тогда $D_1 P^{i_1, k_r}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in R^n$ и, в частности, $D_1 P^{i_r, k_r}(\eta) = 0$. Рассуждая как и при доказательстве формулы (3.10') имеем

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq C_1 \rho_s^{\kappa_1^s[(e^1, \alpha) - \varepsilon]} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

где $C_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ суть постоянные. Если $e_1^1 \geq 0$, то рассуждая так же, получим с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq C_1 \rho_s^{\kappa_1^s(e^1, \alpha) - e_1^1} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Последние три соотношения вместе противоречат (3.5).

Пусть теперь $P^{i_r, k_r}(\eta) = 0$. Тогда грань $\mathfrak{R}_{i_r}^{k_r}$ совпадает с $(n-1)$ -мерной нерегулярной гранью Γ , при этом $r = m = 1$, $k_r = k_1 = n-1$, $e^1 = \mu$, $\eta \in \Sigma(\Gamma)$. По вектору $\mu = e^1$ и точке $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ представим многочлены P и $D_1 P$ в виде (см. формулы (1.4), (1.5))

$$(3.11) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} P_j(\xi) + P_l(\xi) + Q(\xi),$$

$$(3.12) \quad D_1 P(\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} D_1 P_j(\xi) + D_1 P_l(\xi) + D_1 Q(\xi),$$

где номер $l = l(\eta)$ для точки η определяется как в пункте b) Леммы 3.1, P_j есть e^1 однородный многочлен порядка d_j ($j = 0, 1, \dots, l$), $d_0 > d_1 > \dots > d_{l-1} > d_l$. Сначала докажем, что для каждого $j = 0, 1, \dots, l$ существует постоянная $C_j > 0$ такая, что

$$(3.13) \quad |D_1 P_j(\xi^s)| \leq C_j [|P_j(\xi^s)| + |P_l(\xi^s)|] \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Представим по точке $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ многочлены P_j ($j = 0, 1, \dots, l-1$) в виде (3.3), предварительно полагая

$$\eta^s = \rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} \kappa_j^s e^j}; \quad \xi^s = \rho_s^{\kappa_1^s e^1} \eta^s \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Имеем для всех достаточно больших s , для которых $\eta^s \in U(\eta)$

$$P_j(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_j} P_j(\eta^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_j} [q(\eta^s)]^{m_j} r_j(\eta^s) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1),$$

$$P_l(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_l} P_l(\eta^s).$$

Для многочленов $D_1 P_j$ ($j = 0, 1, \dots, l$) соответственно

$$D_1 P_j(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s (d_j - \mu_1)} \{m_j [q(\eta^s)]^{m_j-1} D_1 q(\eta^s) + [q(\eta^s)]^{m_j} D_1 r_j(\eta^s)\},$$

$$D_1 P_l(\xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s (d_l - \mu_1)} D_1 P_l(\eta^s),$$

где $\kappa_1^s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$.

Так как $\eta^s \rightarrow \eta$, $q(\eta^s) \rightarrow q(\eta) = 0$ при $s \rightarrow \infty$ и $r_j(\eta) \neq 0$, $P_l(\eta) \neq 0$, то из последних четырех представлений имеем с положительными постоянными a_1, a_2 и с теми же s

$$(3.14) \quad |P_j(\xi^s)| \geq a_1 \rho_s^{\kappa_1^s d_j} |q(\eta^s)|^{m_j} \quad (j = 0, 1, \dots, l-1),$$

$$(3.15) \quad |P_l(\xi^s)| \geq a_1 \rho_s^{\kappa_1^s d_l},$$

$$(3.16) \quad |D_1 P_j(\xi^s)| \leq a_2 \rho_s^{\kappa_1^s (d_j - \mu_1)} |q(\eta^s)|^{m_j-1} \quad (j = 0, 1, \dots, l-1),$$

$$(3.17) \quad |D_1 P_l(\xi^s)| \leq a_2 \rho_s^{\kappa_1^s (d_l - \mu_1)}.$$

Если $m_{j_0} = 1$ для некоторого $j_0 : 0 \leq j_0 \leq l-1$, то вследствие того, что по предположению теоремы $D_n q(\eta) \neq 0$ получаем, что $\Delta(\eta, P_{j_0}) = \mu_n$. Тогда условие (3.4) теоремы для многочлена P_{j_0} примет вид $d_{j_0} - \mu_n \leq d_l$ и так как $d_{j_0} - \mu_1 \leq d_{j_0} - \mu_n$, то неравенство (3.13) для многочлена P_{j_0} следует из неравенств (3.15) и (3.17).

Поэтому далее будем считать, что $m_j > 1$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$). Рассуждая как и выше, в этом случае получим, что $\Delta(\eta, P_j) = m_j \mu_n \leq m_j \mu_j$ и из условий (3.4) следует, что $d_j - m_j \mu_1 \leq d_j - m_j \mu_n \leq d_l$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$).

Применяя Лемму 1.3 работы [28] для $x_s = \rho_s^{\kappa_1^s d_j}$, $y_s = |q(\eta^s)|$, $a = \kappa_1^s(d_j - \mu_1)$, $b = m_j - 1$, $c = \kappa_1^s d_j$, $d = m_j$, $e = \kappa_1^s d_l$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$; $s = 1, 2, \dots$) из соотношений (3.14) - (3.16) получаем неравенство (3.13). Следует только отметить, что $x_s \geq 1$ и $y_s \in [0, 1]$ для достаточно больших s , что позволяет применить упомянутую лемму для таких $\{x_s, y_s\}$.

Из определения многочлена Q следует, что при $s \rightarrow \infty$

$$(3.18) \quad |Q(\xi^s)| = o(\rho_s^{\kappa_1^s d_l}), \quad |D_1 Q(\xi^s)| = o(\rho_s^{\kappa_1^s(d_l - \mu_1)}).$$

Так как $P_j(\xi^s) \geq 0$, ($j = 0, 1, \dots, l$) для достаточно больших s , то соотношения (3.13) – (3.18) вместе противоречат (3.5). Теорема 3.1 доказана. $\square$

Далее мы получим критерий почти гипоеллиптичности для многочленов $P \in I_n$ без ограничений (3.3) об изолированных характеристиках соответствующих обобщённо - однородных многочленов и об их неотрицательности. При этом отметим, что условие неотрицательности подходящих многочленов является существенным для почти гипоеллиптичности нерегулярных многочленов, что следует из следующего примера.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$ и

$$P^\pm(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 \pm (\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_2^2 + \xi_2^2 + 1.$$

Здесь $\mathfrak{R}(P^\pm)$ – вполне правильный треугольник с единственной вполне правильной одномерной стороной $\mathfrak{R}_1^1 = \{(6, 0) - (0, 6)\}$, которая нерегулярна, при этом (см. представление (1.4)) $\Lambda(\mathfrak{R}_1^1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $P_0^\pm(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6$, $P_1^\pm(\xi) = \pm(\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_2^2$, $P_2^\pm(\xi) = \xi_2^2$, $\Sigma(P_0^\pm) = \Sigma(P_1^\pm) = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$, $d_0^\pm = 6$, $d_1^\pm = 4$, $d_2^\pm = 2$, $l = 2$.

Очевидно, условия (3.3), (3.4) теоремы 3.1 для многочлена P^+ выполняются и P^+ почти гипоеллиптичен. Условие (3.4) для многочлена P^- также выполняется, в то время, как нарушается часть условия (3.3) о неотрицательности. Покажем, что многочлен P^- не является почти гипоеллиптическим, более того $P^- \notin I_2$.

Пусть $\xi_1^s = s + 1, \xi_2^s = s$, тогда $P^-(\xi^s) = 2, (s = 1, 2, \dots)$, т.е. $P^- \notin I_2$. Так как $D_1^2 P^-(\xi^s) = 24 + 2s^2, P^-(\xi^s) = 2, (s = 1, 2, \dots)$ и $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то многочлен P^- не является почти гипоеллиптическим.

Следующее предложение дает критерий почти гипоеллиптичности в отмеченном случае.

Теорема 3.2. Пусть все главные грани правильного многогранника Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ многочлена $P \in I_n$ регулярны, за исключением одной $(n - 1)$ -мерной грани Γ , μ – внешняя нормаль Γ и многочлен P представлен в виде (1.4). Пусть для точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ число $l = l(\eta)$ определяется как в пункте b) Леммы 3.1. Предположим, что $D^\alpha P_j < P_0$ ($j = 1, \dots, l - 1$) для каждой точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ и для всех $\alpha \in N_0^n$.

Тогда P почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ выполняются условия (3.4).

Доказательство. Допуская обратное и повторяя рассуждения, проводимые в доказательстве Теоремы 3.1, получим противоречие, когда $P^{i_r, k_r}(\eta) \neq 0$. Если $P^{i_r, k_r}(\eta) = 0$, то грань $\mathfrak{R}_{i_r}^{k_r}$ совпадает с нерегулярной гранью Γ .

Представим P и $D_1 P$ соответственно в виде (3.11), (3.12) и рассмотрим два возможных случая, когда последовательность $\{P_0(\xi^s)\}$ ограничена и не ограничена. Пусть $\{P_0(\xi^s)\}$ ограничена. Тогда по условию теоремы $\{P_j(\xi^s)\}$ также ограничена для всех $j = 1, \dots, l - 1$. Так как $P_l(\eta^s) \rightarrow P_l(\eta) \neq 0$ при $s \rightarrow \infty$, то с некоторой постоянной $a_3 > 0$ имеем

$$|P_l(\xi^s)| = \rho_s^{\kappa_1^s d_l} |P_l(\eta^s)| \geq a_3 \rho_s^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Для многочленов Q и $D_1 Q$ и в этом случае справедливы соотношения (3.18). Если ещё иметь в виду, что $P \in I_n$, т.е. (см. Лемму 3.1), что $P_0(\xi^s) \geq 0, P_l(\xi^s) \geq 0$, то с некоторой постоянной $a_4 > 0$ имеем

$$|P(\xi^s)| \geq a_4 \rho_s^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

По условиям теоремы $D_1 P_j < P_0$ $j = 1, \dots, l - 1$, поэтому, рассуждая аналогично, получим с некоторой постоянной $a_5 > 0$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq a_5 \rho_s^{\kappa_1^s d_l} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Эти два соотношения вместе противоречат (3.5).

Если $\{P_0(\xi^s)\}$ не ограничена, то, за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $P_0(\xi^s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Так как $P_j < P_0$, $D_1 P_j < P_0$ ($j = 1, \dots, l-1$), то из Леммы 1 работы [26] следует, что в этом случае $[|P_j(\xi^s)| + |D_1 P_j(\xi^s)|]/P_0(\xi^s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Аналогичные рассуждения в этом случае приводят к соотношениям

$$|P(\xi^s)| \geq a_6[P_0(\xi^s) + \rho_s^{\kappa_1^s d_l}], \quad |D_1 P(\xi^s)| \leq a_7[P_0(\xi^s) + \rho_s^{\kappa_1^s d_l}]$$

для всех $s = 1, 2, \dots$ с положительными постоянными a_6 и a_7 , что противоречит (3.5). Теорема 3.2 доказана. $\square$

Abstract. It is proved that a polynomial (the symbol of a differential operator), the Newton polygon of which is a rectangular parallelepiped with a vertex at the origin, is almost hypoelliptic if and only if it is regular. Also some algebraic conditions of almost hypoellipticity are obtained for nonregular polynomials increasing at infinity. The results are unimprovable for polynomials of two variables.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, "On the theory of general partial differential operators". Acta Math. 94, 161 - 248, 1955
- [2] L. Schwartz, "Theorie des distributions". Hermann, Paris, v.1, 1957, v.2, 1959
- [3] И. М. Гельфанд, Г. Г. Шилов, "Обобщенные функции", т.1, Москва, Физматгиз. 1958.
- [4] H. Bremerman, "Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms". Berkley, 1965.
- [5] L. Hörmander, "The Analysis of linear Partial Differential Operators". v.2. Springer - Verlag. 1983.
- [6] L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators". Springer -Verlag, Berlin - Heidenberg, 1963
- [7] L. Hörmander, "Hypoelliptic differential operators". Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11, 477 - 492, 1961.
- [8] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов". Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 - 81, 1961.
- [9] B. Malgrange, "Sur une classe d'operateurs differentiels hypoelliptiques". Bull. Soc. Math. France, v. 85, no. 3, 283 - 306, 1957.
- [10] L. Cattabriga, "Su una classe di polinomi ipoellittici". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. v. 36, 285 - 309, 1966.
- [11] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипозеллиптических операторов". Мат. Сборник, т.75, но. 3, стр. 400 - 416, 1968.
- [12] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипозеллиптических полиномов". Изв. АН Арм. ССР, Мат. т.9, но. 3, стр. 189 - 211, 1974.
- [13] Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипозеллипτικότητα". Труды МИАН СССР, т. 150, стр. 143 - 159, 1979.
- [14] В. Н. Маргарян, "Добавление младших членов, сохраняющих гипозеллипτικότητα оператора". Изв. АН Арм. ССР, Мат. т.15, но.6, стр. 443 - 460, 1980.
- [15] О. Р. Габриелян, "О степени превалирования вырождающихся многочленов и об их гипозеллиптивности". Изв. НАН Армении, Мат., т.38, но.6, 63 - 82, 2003.

- [16] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов". Труды МИАН СССР, т. 77, стр. 45 - 64, 1965.
- [17] L. Gårding ,B. Malgrange, "Operateurs differentiels partiellement hypoelliptiques". Rend. Acad. Sci. (Paris) v. 247, n. 23, p. 2083 - 2085, 1958
- [18] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division 4". Amer. J. Math., v82, 522 - 588, 1960.
- [19] Е.А. Горин, "Об асимптотических свойствах многочленов от нескольких переменных". УМН, т. 16, но. 1, стр. 91 - 118, 1961.
- [20] V.I. Burenkov, "Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p - spaces with an exponential weight". Proc of the summer school " Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis" hold in Fridrichroda in 1993. B.G. Teubner, Stuttgart - Leipzig, 133, p.p. 256 - 265, 1993.
- [21] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials". Doklady Ross. Acad. Nauk. v. 398, n. 6, p.p 701 - 703, 2004.
- [22] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов". Изв.НАН Армении. Мат. т.41,н.6, стр.39-56,2006.
- [23] В. Н. Маргарян , Г.Г.Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений". Изв.НАН Армении. Мат. т.43,н.3, стр.39-64,2008.
- [24] H.G. Ghazaryan , V.N.Margaryan, "On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations". Eurasian Mathematical Journal, v.1,no.1, p.p. 54 - 72, 2010.
- [25] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов". Изв.НАН Армении. Мат. т.39,н.3, стр.21 - 38,2004.
- [26] Г.Г. Казарян , В. Н.Маргарян, "Критерии гипоеллиптичности в терминах мощности и силы операторов". Труды МИАН СССР, т. 150, стр. 128 - 142, 1979.
- [27] S. Gindikin , L.Volevich, "The method of Newtons Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations". Kluwer, 1992.
- [28] Г.Г. Казарян, "Об оценках производных многочленов многих переменных". Изв.НАН Армении. Мат. т.34,н.3, стр.46 - 65,1999.
- [29] Г.Г. Казарян, "Почти гипоеллиптические многочлены, не возрастающие на бесконечности". Изв.НАН Армении. Мат. т.36,н.2, стр.15 - 26,2001.

Поступила 8 марта 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 31-40.

СВЕРХТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ В ПОЛУГРУППАХ

Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *yurimovsisyan@yahoo.com; hakobyantigran91@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс полугрупп в которых существенно выполняется сверхтождество левой дистрибутивности. Доказывается, что класс всех полугрупп в которых существенно выполняется сверхтождество левой дистрибутивности является объединением трех конечно-базируемых многообразий полугрупп, причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

MSC2010 number: 20M07, 08A05, 08A40, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: полугруппа; сверхтождество дистрибутивности; существенная выполняемость; многообразие полугрупп.

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что сверхтождество [1] – формула второго порядка вида:

$$(1.1) \quad \forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре (Q, Σ) , если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же арности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q .

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра этого многообразия удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае данное сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V .

Сверхтождество (1.1) называется нетривиальным, если $m > 1$, и – тривиальным, если $m = 1$. Число m называется функциональным рангом сверхтождества (1.1). Бинарную алгебру (Q, Σ) назовем нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$.

Известна (см. [1] – [4]) классификация нетривиальных сверхтождеств ассоциативности и дистрибутивности в нетривиальных q -алгебрах и e -алгебрах.

Пусть $Q(\cdot)$ – полугруппа. Следующая функция называется бинарным полиномом (многочленом, термом) полугруппы $Q(\cdot)$:

$$f(x, y) = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \{x, y\}$ и $z_i \neq z_{i+1}$.

Аналогично определяются тернарные и n -арные полиномы (многочлены, термы) полугруппы $Q(\cdot)$. Совокупность всех бинарных полиномов полугруппы $Q(\cdot)$ обозначим через Q_{pol}^2 .

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ полиномиально выполняется сверхтождество (1.1), если в бинарной алгебре (Q, Q_{pol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе [5] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество ассоциативности

$$(1.2) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z),$$

образует конечно-базированное многообразие (причем указывается базис содержащий около 1000 тождеств). Такие полугруппы называются сверхассоциативными. В работе [6] (см. также [7]) указывается базис тождеств этого многообразия содержащий 5 тождеств.

В работе [8] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество правой (или левой) дистрибутивности, образует конечно-базированное многообразие полугрупп, определяемый тремя тождествами: $x^2 = x^3$, $xyz = yxzx$, $xyz = xzyz$. Такие полугруппы называются сверхдистрибутивными. А класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется нетривиальное сверхтождество правой (или левой) дистрибутивности, образует конечно-базированное многообразие полугрупп, определяемых тремя тождествами: $x^2 = x$, $xyz = yxzx$, $xyz = xzyz$. Из этого описания, в частности, следует, что любая сверхдистрибутивная полугруппа является сверхассоциативной.

Через Q_{epol}^2 обозначим множество всех бинарных полиномов $f(x, y)$ полугруппы $Q(\cdot)$, каждая из которых существенно зависит от обоих аргументов x, y (см. определения 2.1 и 2.2 ниже).

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.1), если в алгебре (Q, Q_{epol}^2) выполняется это сверхтождество. В работе

[9] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется тривиальное сверхтождество (1.2), образует многообразие, определяемый четырьмя тождествами (см. также [10, 11]).

В работе [12] доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечно-базируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

Однако характеристика полугрупп, в которых существенно выполняется сверхтождество дистрибутивности, осталась открытой.

В настоящей работе описываются полугруппы, в которых существенно выполняется одно из следующих сверхтождеств левой дистрибутивности функционального ранга 1 или 2, а также одно из сверхтождеств левой дистрибутивности функционального ранга 3, 4 или 5:

$$(1.3) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.4) \quad X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.5) \quad X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.6) \quad X(x, X(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.7) \quad X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.8) \quad X(x, X(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.9) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.10) \quad X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.11) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.12) \quad X(x, Y(y, z)) = X(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.13) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.14) \quad X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.15) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.16) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), Y(x, z)),$$

$$(1.17) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), X(x, z)),$$

$$(1.18) \quad X(x, Y(y, z)) = Y(Y(x, y), Y(x, z)).$$

2. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.3) и (1.15)

Определение 2.1. Будем говорить, что бинарный многочлен $F(x, y)$ в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно зависит от предметной переменной x , если существуют такие $x_1, x_2, y \in Q$, что $F(x_1, y) \neq F(x_2, y)$.

Точно так же определяется существенная зависимость бинарного многочлена $F(x, y)$ от предметной переменной y .

Определение 2.2. Назовем бинарный многочлен $F(x, y)$ существенным, если этот многочлен существенно зависит от предметных переменных x и y .

Определение 2.3. Два сверхтождества назовем эквивалентными, если в любой полугруппе $Q(\cdot)$, эти сверхтождества либо одновременно существенно выполняются, либо ни одно из них существенно не выполняется.

Будем говорить, что сверхтождество (h_2) вытекает из сверхтождества (h_1) (и обозначим $(h_1) \rightarrow (h_2)$), если во всех полугруппах, где существенно выполняется сверхтождество (h_1) существенно выполняется так же и сверхтождество (h_2) .

По определению, выражение x^0 будем считать пустым.

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$(2.1) \quad \begin{cases} xyz = yxz, \\ xyx = xzyx; \end{cases}$$

Лемма 2.1. В полугруппе $Q(\cdot)$ с тождествами (2.1), любой существенный многочлен $X(x, y)$ равен одному из многочленов множества

$$P = \{xy, yx, x^2y, yx^2, xyx, yxy\}.$$

Доказательство. Любой существенный многочлен $X(x, y)$ может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \dots x^{\alpha_n} y^{\beta_n}, \\ X(x, y) &= y^{\beta_1} x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{\alpha_2} \dots y^{\beta_n} x^{\alpha_n}, \\ X(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \dots x^{\alpha_n} y^{\beta_n} x^{\alpha_{n+1}}, \\ X(x, y) &= y^{\beta_1} x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{\alpha_2} \dots y^{\beta_n} x^{\alpha_n} y^{\beta_{n+1}}, \end{aligned}$$

где $n, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, а $i = 1, 2, \dots, n$. Докажем следующую формулу:

$$(2.2) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad \exists e, f \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b x^c y^d = x^e y^f).$$

Так как

$$\begin{aligned} x^a y^b x^c y^d &= x^{a-1} (x (y^b x^{c-1}) x y^d) = x^{a-1} (x (y^b x^{c-1}) y^d) = \\ &= x^a y^b x^{c-1} y^d = \dots = x^a y^b y^d = x^a y^{b+d}, \end{aligned}$$

то заключаем, что значения $e = a$ и $f = b + d$ удовлетворяют (2.2). Из (2.2) ясно, что любой существенный многочлен $X(x, y)$ можно представить в одном из следующих видов:

$$X(x, y) = x^a y^b, \quad X(x, y) = y^a x^b, \quad X(x, y) = x^a y^b x^c, \quad X(x, y) = y^a x^b y^c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{N}$. Докажем также, что

$$(2.3) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b = x^c y).$$

Если $b = 1$, то $c = a$. Если $b \geq 2$, то имеем:

$$\begin{aligned} x^a y^b &= (x^a y^2) y^{b-2} = (x^a y y) y^{b-2} = \\ &= (x^a y x^a y) y^{b-2} = (x^a x^a y) y^{b-2} = x^{2a} y^{b-1} = \dots = x^c y. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{N}, \exists d, e \in \mathbb{N} \quad (x^a y^b x^c &= x^a y^d x = x^e y x), \\ \forall a, b, c \in \mathbb{N}, \exists d, e \in \mathbb{N} \quad (y^a x^b y^c &= y^a x^d y = y^e x y). \end{aligned}$$

Таким образом, любой существенный многочлен $X(x, y)$ можно представлять в одном из следующих видов

$$X(x, y) = x^a y, \quad X(x, y) = y^a x, \quad X(x, y) = x^a y x,$$

где $a \in \mathbb{N}$. Имеем

$$x^3 y = x x x y = x x y = x^2 y \quad \text{и} \quad x^2 y x = x x y x = x y x.$$

Следовательно, если $a \geq 2$, то $x^a y x = x^{a-2} x^2 y x = x^{a-2} x y x = x^{a-1} y x = \dots = x y x$.

Таким образом, $y^a x y = y x y$, $a \in \mathbb{N}$. Отсюда, при $a \geq 3$, имеем

$$x^a y = x^{a-3} x^3 y = x^{a-3} x^2 y = x^{a-1} y = \dots = x^2 y,$$

т.е. $x^a y = x^2 y$, если $a \geq 2$. Аналогично, $y^a x = y^2 x = y y x = y x y x = y x^2$, если $a \geq 2$. Следовательно, любой существенный многочлен $X(x, y)$ может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= x y, \quad X(x, y) = x^2 y, \\ X(x, y) &= y x, \quad X(x, y) = y x^2, \\ X(x, y) &= x y x, \quad X(x, y) = y x y. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Определение 2.4. Будем говорить, что переменная x , y или z участвует в тернарном многочлене $X(x, y, z)$ полугруппы $Q(\cdot)$, если в этом многочлене она участвует с ненулевой степенью.

Например, если $Y(x, y)$, $Z(z, y)$, $U(x, y)$ суть существенные многочлены полугруппы $Q(\cdot)$, то переменные x , y , z участвуют в следующих многочленах:

$$\begin{aligned} X(x, y, z) &= Y(x, Z(y, z)), \\ X(x, y, z) &= Y(Z(x, y), U(x, z)). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$(2.4) \quad \begin{cases} xyz = xzy, \\ xyz = yxz, \\ xyz = x^2yz. \end{cases}$$

Лемма 2.2. В полугруппе $Q(\cdot)$ с тождествами (2.4), любой тернарный многочлен $X(x, y, z)$, в котором участвуют все переменные x , y , z , равен многочлену xyz и, следовательно, определяется единственным образом.

Доказательство. В полугруппе $Q(\cdot)$, который удовлетворяет системе тождеств (2.4), любой многочлен $X(x, y, z)$, в котором участвуют переменные x , y , z , можно представить в следующем виде

$$X(x, y, z) = x^a y^b z^c, \quad \text{где } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Если $a \geq 2$, то $x^a y^b z^c = x^{a-2} (x^2 y^b z^c) = x^{a-2} (xy^b z^c) = x^{a-1} y^b z^c = \dots = xy^b z^c$, т.е. $x^a y^b z^c = xy^b z^c$. Следовательно, $xy^b z^c = xyz^c = xyz$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $i = 3$ или $i = 15$. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.i) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет (2.1) или одному из следующих тождеств:

$$(2.5) \quad xy = x^2, \quad xy = y^2.$$

Доказательство. Докажем теорему только для сверхтождества (1.3), т.е. когда $i = 3$. Аналогично доказывается теорема для сверхтождества (1.15). Докажем необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется одно из тождеств (2.5). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным.

Принимая в (1.3) $X(x, y) = xy$, будем иметь $xyz = yxz$.

Принимая в (1.3) $X(x, y) = yx$, будем иметь $zyx = zxyx$, т.е. $xyz = xzyz$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

А) Если выполнено одно из тождеств (2.5), то не существуют существенных многочленов.

Б) Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ выполняется система тождеств (2.1). Согласно лемме 2.1 любой существенный многочлен $X(x, y)$ принадлежит следующему множеству:

$$P = \{xy, yx, x^2y, yx^2, xyx, yxy\}.$$

Рассмотрим эти случаи в отдельности:

- (1) При $X(x, y) = xy$ имеем: $xyz = yxz$.
- (2) При $X(x, y) = yx$ имеем: $zyx = zxyx$.
- (3) При $X(x, y) = x^2y$ получим справедливое тождество: $x^2y^2z = x^2yx^2yx^2z$, т.к.

$$x^2yx^2yx^2z = x^2y(x^2yx^2z) = x^2yx^2yz = x^2y^2z.$$

- (4) При $X(x, y) = yx^2$ получаем тождество: $zy^2x^2 = zx^2yx^2yx^2$, т.к.

$$zx^2yx^2yx^2 = zx^2(yx^2yx^2) = zx^2y^2x^2 = zy^2x^2.$$

- (5) При $X(x, y) = xyx$ получаем тождество: $xyzyx = yuxxzxxyx$, т.к.

$$yuxxzxxyx = xy(x^2zx^2y)x = yx^2zyx = (xyxx)zyx = yxzyx = yxzyx.$$

- (6) При $X(x, y) = yxy$ получаем тождество: $zyzxyz = zxzyxyzx$, т.к.

$$zyzxyz = zyxyz = zyxx,$$

$$zxzyxyzx = zxxyxz = zxxyxz = zxxyxz = zyxx.$$

3. СВЕРХТОЖДЕСТВА (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18)

Теорема 3.1. Пусть $i = 4, \dots, 14, 16, 17, 18$. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.i) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет (2.4) или одному из тождеств (2.5).

Доказательство. Будем доказывать теорему для сверхтождества (1.4), т.е. когда $i = 4$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Докажем необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется одно из тождеств (2.5). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным.

Принимая в (1.4) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $xyz = xyxz$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $zyx = zxux$, т.е. $xyz = xzyz$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = xy$ и $Y(x, y) = yx$, будем иметь $xyz = xyzx = xyzyx = xzyx = xzy$. Принимая в (1.4) $X(x, y) = yx$ и $Y(x, y) = xy$, будем иметь $zyx = xzyx$, т.е. $xyz = zxuz = zuxz = yxz$. Следовательно, $xyz = x(yxz) = xxuz = x^2yz$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

А) Если одно из тождеств (2.5) имеет место, то не существует существенных многочленов.

Б) Допустим, что в полугруппе $Q(\cdot)$ выполняется система тождеств (2.4). Согласно Лемме 2.2, любой тернарный многочлен $X(x, y, z)$ в котором принимают участие переменные x, y и z равен многочлену xyz . Следовательно,

$$X(x, X(y, z)) = xyz = X(X(x, y), Y(x, z)).$$

Теорема доказана. $\square$

4. СВЕРХТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАНГА 3, 4 ИЛИ 5 В ПОЛУГРУППАХ

Многочлены (а так же и функциональные переменные) будем обозначать буквами $X, Y, Z, \dots$.

Теорема 4.1. *Пусть дано сверхтождество левой дистрибутивности, функциональный ранг которого больше 2. В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется это сверхтождество тогда и только тогда, когда полугруппа $Q(\cdot)$ удовлетворяет (2.4) или одному из тождеств (2.5).*

Доказательство. Необходимость. Рассматриваемое сверхтождество имеет следующий вид:

$$X(x, X_1(y, z)) = X_2(X_3(x, y), X_4(x, z)),$$

где $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{X, Y, Z, \dots\}$. Поскольку ранг рассматриваемого сверхтождества не меньше 3, то в нем участвуют по крайней мере 3 разных многочлена: X, Y, Z .

Если в этом сверхтождестве имеется точно один многочлен Y , то тогда взяв остальные многочлены равными многочлену X , получим одно из сверхтождеств (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18). Если же в этом сверхтождестве имеются 2 или больше

многочленов Y , то тогда, взяв остальные многочлены (за исключением многочлена X) равными многочлену Y , опять получим одно из сверхтождеств (1.4)-(1.14), (1.16)-(1.18). Необходимость доказана.

Доказательство достаточности аналогично доказательству достаточности предыдущей теоремы. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.1. *Любое сверхтождество левой дистрибутивности эквивалентно сверхтождеству (1.3) ранга 1 или сверхтождеству (1.4) ранга 2, причем $(1.4) \rightarrow (1.3)$.*

В заключение отметим, что аналогичные результаты справедливы и для сверхтождеств правой дистрибутивности.

Abstract. The paper gives a description of the class of semigroups in which the hyperidentity of left distributivity is essentially valid. It is proved that the class of all semigroups, in which this hyperidentity is essentially valid, is a union of three finitely based semigroup varieties, and the basic identities of all varieties are given in explicit forms.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
- [2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
- [3] Ю. М. Мовсисян, “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, Успехи мат. Наук, **53** (1(319)), 61-114 (1998).
- [4] Yu. M. Movsisyan, “Hyperidentities and hypervarieties”, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, no. 3, 595 – 640 (2001).
- [5] K. Deneck, J. Koppitz, “Hyperassociative varieties of semigroups”, Semigroup Forum, **49**, 41-49 (1994).
- [6] L. Polak, “On hyperassociativity”, Algebra Universalis, **36**, 363 – 378 (1996).
- [7] L. Polak, “All Solid Varieties of Semigroups”, Journal of Algebra **219**, 421 – 436 (1999).
- [8] Yu. M. Movsisyan, I. R. Simonyan, “Hyperidentities of Distributivity in Varieties of Semigroups”, Computer Science and Information Technologies, Proceedings of the Conference, Yerevan, 24-26 (1999)
- [9] G. Paseman, “A small basis for Hyperassociativity, preprint, Berkeley (1993).
- [10] K. Denecke and Sh.L.Wismath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).
- [11] J. Koppitz and K. Denecke, M-Solid Varieties of Algebras, Springer (2006).
- [12] Ю. М. Мовсисян, Т. А. Акопян, “Петривальные сверхтождества ассоциативности в полугруппах”, Известия НАН Армении, серия Математика, **46** no. 3, 65 – 78 (2011).

Поступила 19 января 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 41-48.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Р. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *karenmuradyan1988@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые вопросы абсолютной расходимости почти всюду рядов Фурье по системе Хаара. Строится измеримое множество $E \subset [0, 1]$, такое, что ряд Фурье-Хаара его характеристической функции абсолютно расходится почти всюду.

MSC2010 number: 42A20.

Ключевые слова: ряды Фурье-Хаара; абсолютная сходимость.

Хорошо известно, что ряды Фурье-Хаара функций из класса суммируемых по Лебегу функций $L^1(0, 1)$ сходятся почти всюду. Многие работы посвящены вопросам безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье-Хаара. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на множестве E , если при любой перестановке его членов этот ряд сходится п.в. на E . Е. М. Никишин и П. Л. Ульянов в [2] (см. также [1], стр.104) установили, что для безусловной сходимости любого ряда по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

на некотором множестве $E \subset [0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы этот ряд абсолютно сходиллся п.в. на множестве E . Поэтому многие вопросы безусловной сходимости рядов Хаара сводятся к вопросам их абсолютной сходимости. В работе [3] П. Л. Ульянов привел пример функции из класса $L^2(0, 1)$, ряд Фурье-Хаара которой расходится п.в. на $(0, 1)$ после некоторой перестановки его членов. Далее, А. М. Олевский [4], [5] распространил этот результат для общих полных ортонормированных систем, при этом установив, что эту исключительную функцию можно брать непрерывной. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос безусловной или абсолютной расходимости рядов Фурье-Хаара для характеристических функций.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ (см. [1] часть 3.1).

Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, 2^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $n = 2^k + i$. Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$. При $n \geq 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_k^i, \end{cases}$$

а в точках разрыва функция $\chi_n(x)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \chi_n(x) &= \frac{1}{2}(\chi_n(x+) + \chi_n(x-)), \quad x \in (0, 1), \\ \chi_n(0) &= \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-). \end{aligned}$$

Через $a_n(f)$ обозначим коэффициент Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0, 1)$, т.е.

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt.$$

Обозначим через $\mathbb{I}_F(x)$ характеристическую функцию множества $F \subset [0, 1]$. В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $G \subset [0, 1]$, с $|G| < \varepsilon$, такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_G) \chi_k(x)| = \infty \text{ п.в. на } [0, 1].$$

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset [0, 1]$, с $|E| < \varepsilon$, такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_E) \chi_k(x)| = \infty \text{ п.в. на } [0, 1] \setminus E.$$

Отметим, что в теореме 2 нельзя получить расходямость п.в. на $[0, 1]$ так как из открытости E следует безусловная сходимости в любой точке $x \in E$.

В дальнейшем, множество $E \subset (0, 1)$ назовем простым, если оно есть объединение конечного числа двоичных интервалов, а $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Доказательства теорем основаны на следующем утверждении.

Лемма 1. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $m \in \mathbb{N}$, а F есть простое множество. Тогда существуют простое множество E , и число $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\begin{aligned} E \cap F &= \emptyset, \quad |E| < \varepsilon, \\ |\{x \in [0, 1] \setminus F : \sum_{p=m}^n |a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}| &< \varepsilon \\ \mathbb{I}_E(x) &= \sum_{p=1}^n a_p(\mathbb{I}_E)\chi_p(x). \end{aligned}$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, существует функция $f \in L^\infty$ такая, что

$$(1) \quad \sum_{p=1}^{\infty} |a_p(f)\chi_p(x)| = \infty \text{ п.в. .}$$

При этом, очевидно, можно предполагать, что $\|f\|_\infty \leq 1$ и $f(x) \geq 0$.

Обозначим

$$g(x) = f(x)\mathbb{I}_{(F)^c}(x).$$

Из определения системы Хаара следует, что

$$a_n(g) = a_n(f) \text{ при } \Delta_n \subset F^c.$$

Отсюда и из (1) ясно, что

$$(2) \quad \sum_{p=1}^{\infty} |a_p(g)\chi_p(x)| = \infty \text{ п.в. на } F^c.$$

Из структуры множества F можно заключить, что F является объединением конечного числа двоичных открытых интервалов длины $\nu = 2^{-q}$ и при этом можно предполагать, что $q > m$. Далее используя (2) можем найти число $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$), такое, что

$$(3) \quad |\{x \in [0, 1] \setminus F : \sum_{p=\nu}^n |a_p(g)\chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon^2}\}| < \varepsilon$$

Для данного интервала $\Delta = (a, b)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_\Delta(x) = \mathbb{I}_{(a,c)}(x),$$

где

$$c = a + \varepsilon \int_a^b g(x)dx.$$

Имея в виду, что $0 \leq g(x) \leq 1$, получим

$$(4) \quad c \in (a, b), \quad c - a < \varepsilon(b - a),$$

$$(5) \quad \int_a^b \varphi_{\Delta}(x) dx = \varepsilon \int_a^b g(x) dx.$$

Обозначим

$$(6) \quad \tilde{g}(x) = \sum_{i: \Delta_{k+1}^i \subset F^c} \varphi_{\Delta_{k+1}^i}(x).$$

Очевидно

$$(7) \quad \tilde{g}(x) = \mathbb{I}_E(x) \text{ и } |E| < \varepsilon |F^c| < \varepsilon,$$

где $E \subset F^c$ есть некоторое множество являющееся объединением конечного числа интервалов. Так как функции Хаара $\chi_p(x)$, $p = 1, 2, \dots, n = 2^k$ постоянны на интервалах Δ_{k+1}^j , то, с учетом (5) и (6), получим

$$a_p(\tilde{g}) = a_p(\mathbb{I}_E) = \varepsilon a_p(g), \quad p = \nu, \nu + 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=\nu}^n |a_p(\mathbb{I}_E) \chi_p(x)| = \varepsilon \sum_{p=\nu}^n |a_p(g) \chi_p(x)|$$

Комбинируя последнее с (3), легко получить

$$(8) \quad |\{x \in [0, 1] \setminus F : \sum_{p=\nu}^n |a_p(\mathbb{I}_E) \chi_p(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}| < \varepsilon.$$

Имеем, что E есть конечное объединение некоторых интервалов. Из соображений непрерывности легко усмотреть, что можно изменить множество E так, чтобы концы его составляющих интервалов стали двоично рациональными и сохранились неравенства (7) и (8). Можно предполагать таковым является множество E и учитывая это, имеем, что $\mathbb{I}_E(x) = S_q(\mathbb{I}_E, x)$ при некотором $q \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можем считать, что $n = q$, т.е. имеем

$$\mathbb{I}_E(x) = S_n(\mathbb{I}_E, x).$$

Очевидно, что E удовлетворяет условиям леммы. □

Доказательство теоремы 1. Используя лемму при $F = \emptyset$, найдем простое множество E_1 и число $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|E_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \left\{ x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_1})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что E_1 состоит из двоичных интервалов, имеем, что

$$\mathbb{I}_{E_1}(x) = S_{n_1}(\mathbb{I}_{E_1}, x).$$

Обозначим $G_1 = E_1$. Очевидно, что существует положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$ такое, что для любого множества A с условием

$$|G_1 \Delta A| < \varepsilon_1,$$

имеем

$$|\{x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon}\}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Еще раз применив лемму, найдем простое E_2 и число $n_2 > n_1$ такие, что

$$(9) \quad |E_2| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

$$(10) \quad |\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_1}\}| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

$$\mathbb{I}_{E_2}(x) = S_{n_2}(\mathbb{I}_{E_2}, x).$$

Обозначим $G_2 = G_1 \Delta E_2$. Если $n > n_1$, то выполняется одно из соотношений $\Delta_n \subset G_1$ или $\Delta_n \cap G_1 = \emptyset$. Если $\Delta_n \subset G_1$, то имеем

$$\begin{aligned} a_n(\mathbb{I}_{G_2}) &= \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{G_1}(x) - \mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx \\ &= \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{G_1}(x))\chi_n(x)dx - \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx = \\ &= - \int_{\Delta_n} (\mathbb{I}_{E_2}(x))\chi_n(x)dx = -a_n(\mathbb{I}_{E_2}). \end{aligned}$$

Если же $\Delta_n \cap G_1 = \emptyset$, то очевидно, что

$$a_n(\mathbb{I}_{G_2}) = a_n(\mathbb{I}_{E_2}).$$

Отсюда имеем $|a_n(\mathbb{I}_{G_2})| = |a_n(\mathbb{I}_{E_2})|$, при $n_1 < n \leq n_2$, и следовательно имеет место (10), если заменить множество E_2 на G_2 . Очевидно, что существует ε_2 ,

$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$, такое, что для любого множества A , для которого $|G_2 \Delta A| < \varepsilon_2$, имеем:

$$|\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_1}\}| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Продолжив этот процесс по индукции, мы получим простые множества E_k, G_k , $k = 1, 2, \dots$, числа $n_k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_k > 0$ такие, что

$$(11) \quad G_k = G_{k-1} \Delta E_k,$$

$$(12) \quad \varepsilon_k < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2},$$

$$(13) \quad |E_k| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и при этом для любого множества A , удовлетворяющего условию $|G_k \Delta A| < \varepsilon_k$, имеет место неравенство

$$|\{x : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_A)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_{k-1}}\}| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}.$$

Обозначим

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq k} G_i.$$

Из (11) легко следует, что

$$G \Delta G_k \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_i.$$

Отсюда имеем

$$|G \Delta G_k| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |E_i| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{i-1}}{2} \leq \varepsilon_k.$$

Далее, обозначим

$$A_k = \{x : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_G)\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon_{k-1}}\}, \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq k} (A_i)^c.$$

С учетом (13), имеем

$$|A_k| < \frac{\varepsilon_{k-1}}{2} < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

и следовательно $|A| = 1$. С другой стороны из определения множества A ясно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(\mathbb{I}_G)\chi_i(x)| = \infty, \quad x \in A.$$

Из неравенств $|G \Delta G_1| < \varepsilon_1$, $|G_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ следует, что $|G| < \varepsilon$, и теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя лемму при $F = \emptyset$, найдем простое множество E_1 и число $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $|E_1| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\left| \left\{ x : \sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_1})\chi_i(x)| < \frac{2}{\varepsilon} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathbb{I}_{E_1}(x) = S_{n_1}(\mathbb{I}_{E_1}, x).$$

Еще раз применив лемму, при $F = E_1$ найдем простое E_2 и число $n_2 > n_1$ такие, что

$$E_2 \cap E_1 = \emptyset, \quad |E_2| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\{x : \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{4}{\varepsilon}\}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Можем взять E_2 такое, что

$$\sum_{i=1}^{n_1} |a_i(\mathbb{I}_{E_2})\chi_i(x)| < \frac{1}{2}, \quad \mathbb{I}_{E_2}(x) = S_{n_2}(\mathbb{I}_{E_2}, x).$$

Продолжив этот процесс по индукции, мы получим простые множества E_k , $k = 1, 2, \dots$, числа $n_k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$(14) \quad E_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) = \emptyset, |E_k| < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$(15) \quad |\{x \in [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{2^k}{\varepsilon}\}| \leq \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{n_{k-1}} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$(17) \quad \mathbb{I}_{E_k}(x) = S_{n_k}(\mathbb{I}_{E_k}, x).$$

Обозначим

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Из (14) легко следует, что

$$|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \varepsilon.$$

Далее, обозначим

$$A_k = \{x \in [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) : \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| < \frac{2^k}{\varepsilon}\}.$$

Возьмем $x \notin A_k$ тогда с учетом (15), (16) и (17), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_E)\chi_i(x)| &= \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{\bigcup_{q=1}^{\infty} E_q})\chi_i(x)| \geq \\ &\geq \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_k})\chi_i(x)| - \sum_{q=k+1}^{\infty} \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k} |a_i(\mathbb{I}_{E_q})\chi_i(x)| \geq \frac{2^k}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Из (15) следует, что

$$|A_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 0$, теорема доказана. $\square$

В заключение автор выражает благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper studies some questions related to almost everywhere, absolute divergence of the series in Haar system. It is constructed a measurable set $E \subset [0, 1]$ such that the Fourier-Haar series of the characteristic function of the set E absolutely diverges almost everywhere.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Наука (1984).
- [2] Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и безусловной сходимости”, Успехи матем. наук, **22**, по. 3, 240 – 242 (1967).
- [3] П. Л. Ульянов, “Расходящиеся ряды Фурье класса $L^p(p \geq 2)$ ”, Докл. АН СССР, **137**, по. 4, 768 – 789 (1961).
- [4] А. М. Олевский, “Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций”, Докл. АН СССР, **141**, по. 1, 28 – 31 (1961).
- [5] А. М. Олевский, “Расходящиеся ряды Фурье”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **27**, по. 3, 343 – 666 (1963).

Поступила 9 марта 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 49-66.

**THE PAPANGELOU PROCESS. A CONCEPT FOR GIBBS, FERMI
AND BOSE PROCESSES**

B. NEHRING, H. ZESSIN

*Institut für Mathematik der Universität Potsdam, Potsdam
Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld, Bielefeld
E-mails: bnehring@uni-potsdam.de, zessin@math.uni-bielefeld.de*

Abstract. This note is a revised and enlarged version of the german article [16] in a slightly different framework. We here correct a serious mistake in the first version and generalize the class of Polya sum processes considered there. (A corrected version of the same results can be found already in the thesis of Mathias Rafler [12].) Moreover, the class of Polya difference processes is constructed here for the first time. In analogy to classical statistical mechanics we propose a theory of interacting Bosons and Fermions. We consider Papangelou processes. These are point processes specified by some kernel which represents the conditional intensity of the process. The main result is a general construction of a large class of such processes which contains Cox, Gibbs processes of classical statistical mechanics, but also interacting Bose and Fermi processes.

MSC2010 number: 60G55; 60G57; 60D05

Keywords: Papangelou process; Polya sum; Polya difference process.

1. INTRODUCTION AND GENERALITIES

The analysis of the ideal quantum mechanical gases of Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein and Fermi-Dirac in [1] shows that the corresponding point processes are qualitatively different; the associated random fields have different distributions.

Nevertheless they are ideal gases in the sense that they are of first order and have independent increments. Thus it is natural for the construction of the corresponding interacting particle systems to take as a starting point the corresponding ideal, i.e. non-interacting processes. For the Gibbsian theory of classical statistical mechanics this is the Poisson process. We propose here to construct interacting Bosons by means of the ideal Bose process and interacting Fermions by means of the ideal Fermi process. This is not done in the spirit of the DLR-approach but in the spirit of the equivalent theory of integration by parts formulas (cf. [7]) which represent an abstract version of the classical approach by Kirkwood-Salzburg equations. And this means that the starting point of the whole theory is the appropriate Boltzmann kernel determined by

the underlying interaction potential together with the appropriate ideal gas; and these kernels differ for the Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein and Fermi-Dirac processes. In the language of modern point process theory the Boltzmann kernels represent conditional intensities of the corresponding point processes, which are called Polya sum in case of the ideal Bose process resp. Polya difference processes for the ideal Fermi process and which have to be modified in case of interactions by an appropriate Boltzmann factor.

Thus the main task is first to identify these conditional intensities for the three ideal gas processes. And this has been done in [1]. We take them here as a starting point to build up the first steps of a unifying general theory which can explain the appearance of all three quantum mechanical gases. Conceptually this theory exists since a long time and is the theory of Papangelou processes (cf. [3, 6, 7, 9, 13, 15]). The historical point of departure of this theory has been described in [10, 16].

The main result is a construction theorem which was missing until now. As examples we present the ideal Bose process, i.e. the Polya sum process, and the ideal Fermi process, i.e. the Polya difference process, and then indicate how one can add an interaction between the particles. All this is done in analogy to the Gibbsian theory which can be considered as a theory for quantum particles obeying Maxwell-Boltzmann statistics.

Before starting our approach we indicate shortly how one can use the construction theory of the DLR-approach for the construction of Papangelou processes. This can be done by combining the important work of Rauchenschwandtner [13] with the fundamental work of Preston [11]: Given a kernel π one can define a so-called specification $\mathcal{V}_\pi$ such that the associated collection $\mathcal{G}(\mathcal{V}_\pi)$ of all abstract Gibbs states specified by $\mathcal{V}_\pi$ coincides with the collection of all Papangelou processes with kernel π . This result can be found in [13]. Therefore, if we start with a kernel π such that the assumptions of Preston's general existence theorem $\mathcal{G}(\mathcal{V}_\pi) \neq \emptyset$ are satisfied then we are done. Our approach here is more direct but also weaker in the sense that we construct for a given π a Papangelou process for some locally modified kernel $\tilde{\pi}$ which in general does not coincide with π .

We shall work in the following *general setting*. X denotes a Polish state space, $\mathcal{B}(X)$ resp. $\mathcal{B}_0(X)$ its Borel resp. bounded Borel sets. $\mathcal{M}(X)$ is the vaguely Polish space of locally finite measures on X (i.e. of Radon measures on X). $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ denotes the

subspace of all Radon point measures on X , and $\mathcal{M}_{\tilde{B}}(X)$, $B \in \mathcal{B}_0(X)$, the collection of all point measures with support in B . $\mathcal{M}_{\tilde{f}}(X)$ is the space of all finite point measures. We need also the space $\mathcal{M}(X)$ of all *simple* Radon point measures on X , i.e. of all locally finite subsets of X . All these spaces are given the Borel σ -fields generated by the vague topology in $\mathcal{M}(X)$, and are denoted by $\mathcal{F}^\cdot$, $\mathcal{F}_{\tilde{f}}$ and $\mathcal{F}_{\tilde{B}}$. For some underlying measurable space S we denote by $F_+(S)$ the collection of all non-negative, measurable real functions defined on S . We consider random measures in X , i.e. random elements ξ in or, their laws P on $\mathcal{M}(X)$, for which we write $P \in \mathcal{PM}(X)$. If such a P is concentrated on the measurable subset $\mathcal{M}^\cdot(X)$ then P is called a point process in X . The *Campbell measure* of a point process P is defined by $\mathbb{C}_P(h) = \int \int h(x, \mu) \mu(dx) P(d\mu)$, $h \in F_+(X \times \mathcal{M}^\cdot(X))$, whereas the *reduced Campbell measure* of P is given by $\mathbb{C}'_P(h) = \int \int h(x, \mu - \delta_x) \mu(dx) P(d\mu)$, $h \in F_+$. (We shall use freely these and related concepts of the theory of random measures and point processes and refer to the standard monographies [3] and [6] for details.)

The point of departure is a kernel $\pi(\varrho, \eta; dx)$ from $(\mathcal{M} \times \mathcal{M}^\cdot, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^\cdot)$ to the set of all Radon measures on X . (Here and in the sequel we shall skip X if possible.) We are interested in point processes P in X for which the kernel π is a conditional intensity. This means that P is a solution of the following equation

$$\mathbb{C}_P(h) = \int \int h(x, \mu + \delta_x) \pi(\mu, dx) P(d\mu), h \in F_+(X \times \mathcal{M}^\cdot(X)).$$

We then call P a *Papangelou process* for π . For such a Papangelou process the kernel π is a.s. uniquely determined; moreover, P is a Papangelou process for some kernel π iff the measure $\mathbb{C}'_P(B \times (\cdot))$ is dominated by P for any $B \in \mathcal{B}_0(X)$. (All this can be found in [5, 7, 9].) In the scholion at the end we develop the notion of a Papangelou process in more detail in a discrete setting to relieve the understanding of the following abstract developements.

Given a kernel π we define for every $m \in \mathbb{N}$, $\varrho \in \mathcal{M}$ and $\eta \in \mathcal{M}^\cdot$ the following kernels on X^m :

$$\pi^{(m)}(\varrho, \eta; dx_1 \dots dx_m) = \pi(\varrho, \eta; dx_1) \pi(\varrho, \eta + \delta_{x_1}; dx_2) \dots \pi(\varrho, \eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{m-1}}; dx_m)$$

For $m = 0$ we denote by $\pi^{(0)}(\varrho, \eta; \cdot)$ the kernel on $X^0 = \{\emptyset\}$ which gives mass 1 to $\{\emptyset\}$.

2. THE FINITE PAPANGELOU PROCESS

Finite Papangelou processes can be constructed if the kernel π satisfies the following *integrability condition*: For any given (ϱ, η) the following series is convergent.

$$(2.1) \quad \Xi(\varrho, \eta) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \pi^{(m)}(\varrho, \eta; X^m).$$

Under this condition the *finite Papangelou process with kernel π* is well defined for a given $\varphi \in F_+(\mathcal{M}_{\vec{j}})$ by

$$(2.2) \quad P_{\pi}^{(\varrho, \eta)}(\varphi) = \frac{1}{\Xi(\varrho, \eta)} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \int_{X^m} \varphi(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\varrho, \eta; dx_1 \dots dx_m).$$

We add another condition on the kernel π which plays a fundamental role in the whole theory. We require that π satisfies the following *cocycle condition*: For all ϱ, η, x, y

$$\pi(\varrho, \eta; dx) \pi(\varrho, \eta + \delta_x; dy) = \pi(\varrho, \eta; dy) \pi(\varrho, \eta + \delta_y; dx)$$

This condition implies the symmetry of the kernels $\pi^{(m)}(\varrho, \eta; \cdot)$. The next result plays the role of a main lemma. A proof can be found in [16].

Lemma 2.1. *If π is an integrable kernel satisfying the cocycle condition then every $P_{\pi}^{(\varrho, \eta)}$ is a solution $P \in \mathcal{PM}_{\vec{j}}$ of the following integration by parts formula.*

$$\mathbb{C}_P(h) = \int_{\mathcal{M}_{\vec{j}}} \int_X h(x, \mu + \delta_x) \pi(\varrho, \eta + \mu; dx) P(d\mu), h \in F_+(X \times \mathcal{M}_{\vec{j}}).$$

Here $\mathbb{C}_P$ denotes the *Campbell measure of P* .

3. THE GENERAL PAPANGELOU PROCESS

Here we give a construction of a large class of infinitely extended Papangelou processes, thereby correcting a mistake in [16]. The following comment is in order here: In theorem 1 of [16] the statement is that ξ is a Papangelou process for π . This is false. The correct statement can be found in theorem 3 of the present paper: ξ is a Papangelou process for $\tilde{\pi} = p_{\varrho} \pi$. Thus the factor p_{ϱ} was missing in theorem 1 of [16]. We start with a kernel $\pi(\varrho, \eta; \cdot)$ from $\mathcal{M} \times \mathcal{M}_{\vec{j}}$ to the set $\mathcal{M}$ of Radon measures on X . We now require that there exists a *locally finite partition* $\Delta = (X_n)_{n \geq 0}$ of X . This means that every bounded Borel set has a non-empty intersection with only finitely many elements of the partition. In addition every X_n has to be a bounded Polish subspace of X . Recall that every Polish subspace of X is a $\mathcal{G}_{\delta}$ -set and thereby Borelian.

We need the following notations. η_{X^n} is the restriction of η to $X^n = X_0 \cup \dots \cup X_n$; and η_k its restriction to X_k . We then say that π is *locally integrable* (with respect to any Δ) if for all ϱ, η, n the following series converge:

$$\Xi_n(\varrho, \eta) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \pi^{(m)}(\varrho, \eta_{X^{n-1}}; X_n^m).$$

By our considerations above the following finite process in X_n is then well defined for all ϱ, η . If $\varphi \in F_+(\mathcal{M}_f(X_n))$

$$\Pi_{X_n}^\varrho(\eta; \varphi) = \frac{1}{\Xi_n(\varrho, \eta)} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \int_{X_n^m} \varphi(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\varrho, \eta_{X^{n-1}}; dx_1 \dots dx_m).$$

Note that the kernel $\Pi_{X_n}^\varrho$ depends only on the σ -field $\mathcal{F}_{X^{n-1}}$ of events happening in X^{n-1} . This will be important in the sequel.

The aim now is to construct by means of these kernels and suitable initial and boundary conditions an infinitely extended Papangelou process which has a modification of π as its kernel. For this purpose we use the theorem of Ionescu Tulcea which enables us to construct processes by means of an initial condition and conditional distributions (see [2] e.g.).

Given $\varrho \in \mathcal{M}(X)$ and $(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in \mathcal{M}_{X_0} \times \dots \times \mathcal{M}_{X_{m-1}}$, consider the Markovian kernels

$$Q_m^\varrho(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}; d\eta_m) = \Pi_{X_m}^\varrho(\eta_0 + \dots + \eta_{m-1}; d\eta_m)$$

from $\mathcal{M}_{X_0} \times \dots \times \mathcal{M}_{X_{m-1}}$ to $\mathcal{M}^\cdot(X_m)$. Given also a random measure $P_0 \in \mathcal{PM}$ then by the theorem of Ionescu Tulcea there exist random elements ζ in $\mathcal{M}(X)$ and random elements ξ_n in $\mathcal{M}^\cdot(X_n), n \geq 0$, with the property that the corresponding finite-dimensional distributions are given by

$$\mathcal{L}(\zeta, \xi_0, \dots, \xi_n) = P_0(d\varrho) \Pi_{X_0}^\varrho(0; d\eta_0) Q_1^\varrho(\eta_0; d\eta_1) \dots Q_n^\varrho(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}; d\eta_n).$$

We are now in the position to construct the following random element in $\mathcal{M}^\cdot(X)$.

$$\xi = \sum_{n \geq 0} \xi_n.$$

Note that ξ is locally finite because the underlying partition has this property. The distribution P_π of ξ is the point process in X we are interested in. (We do not indicate the initial condition P_0 .) We shall show now that P_π is a Papangelou process specified by a modification of the kernel π . For later use we remark that P_π has the following

disintegration with respect to ζ .

$$P_\pi = \int_{\mathcal{M}} P_\pi^\varrho P_0(d\varrho).$$

We observe also that this implies for the Campbell measure of P_π the disintegration

$$\mathbb{C}_{P_\pi} = \int_{\mathcal{M}} \mathbb{C}_{P_\pi^\varrho} P_0(d\varrho).$$

We now formulate the conditions for the existence of infinitely extended Papangelou processes.

We assume that π is a kernel from $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}^\cdot(X)$ to $\mathcal{M}(X)$ which is *locally integrable* with respect to any partition. Moreover, we assume that π is *dominated with a symmetric density*, i.e. on the complement of any $\{y\}$ each $\pi(\varrho, \eta + \delta_y; dx)$ has a *symmetric density* f_π with respect to $\pi(\varrho, \eta; dx)$ which does not depend on ϱ, η . Thus

$$1_{\{y\}^c}(x)\pi(\varrho, \eta + \delta_y; dx) = 1_{\{y\}^c}(x)f_\pi(x, y)\pi(\varrho, \eta; dx),$$

with f_π being symmetric. We remark that this condition implies the cocycle condition for π and thus is a bit stronger.

Finally we need the following *finite-range property*. There exists a positive constant $R \geq 0$ such that

$$1_B(x)\pi(\varrho, \eta; dx) = 1_B(x)\pi(\varrho, \eta_{\partial_R B} + \eta_{C^c}; dx) \text{ for any } B, C \in \mathcal{B}_0, B \subset C.$$

Here $\partial_R B = \{x \in X | d(x, B) \leq R\}$, where d denotes some fixed metric compatible with the Polish topology in X . Note that for configurations η with compact support one has for any $B \in \mathcal{B}_0$

$$1_B(x)\pi(\varrho, \eta; dx) = 1_B(x)\pi(\varrho, \eta_{\partial_R B}; dx) \text{ for any } B, C \in \mathcal{B}_0.$$

Theorem 3.1. *If π is a kernel from $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}^\cdot(X)$ to $\mathcal{M}(X)$ which is locally integrable, dominated and of finite range, then any $P_\pi^\varrho, \varrho \in \mathcal{M}$, is a Papangelou process with kernel*

$$(3.1) \quad \tilde{\pi}(\varrho, \eta; dx) = p_\varrho(x, \eta) \cdot \pi(\varrho, \eta; dx),$$

where

$$(3.2) \quad p_\varrho(x, \eta) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\Xi_j(\varrho, \eta)}{\Xi_j(\varrho, \eta + \delta_x)}$$

The kernel $\tilde{\pi}$ is a random Radon measure.

Proof. We consider the point process ξ constructed by means of $P_0 = \delta_\varrho$ and start to compute its Campbell measure $\mathbb{C}_\xi$. For a given $h \in F_+$

$$\mathbb{C}_\xi(h) = \sum_{n \geq 0} \int h(x, \xi) \xi_n(dx) dP.$$

(Here P denotes the underlying probability which should not be confused with the law of ξ .) We follow the arguments of Mecke [8] and assume first that h has the form $h = g \otimes \varphi$, where $g \in F_+(X)$ is identically 0 outside some $X_k, 0 \leq k \leq n$, and $\varphi \in F_+(\mathcal{M}^{\cdot})$ is a random variable which is measurable with respect to $\mathcal{F}_{X^n}$. In this case

$$\mathbb{C}_\xi(h) = \int \xi_k(g) \varphi(\xi_{X^n}) dP$$

and thus

$$\mathbb{C}_\xi(h) = \int \Pi_{X_0}^\varrho(0, d\eta_0) \dots \Pi_{X_k}^\varrho(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \eta_k(g) \cdot \psi^\varrho(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k),$$

where

$$\psi^\varrho(\eta_{X^k}) = \int \Pi_{X_{k+1}}^\varrho(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \dots \Pi^\varrho(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_{n-1}, d\eta_n) \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n).$$

Applying here the main lemma 2.1 to the inner integral of $\mathbb{C}_\xi(h)$ and using the cocycle property one obtains

$$\begin{aligned} & \int \Pi_{X_k}^\varrho(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \eta_k(g) \cdot \psi^\varrho(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k) = \\ & \int \Pi_{X^k}^\varrho(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \int_{X^k} \pi(\varrho, \eta_{X^k}, dx) g(x) \cdot \psi(\varrho, \eta_{X^{k-1}} + \eta_k + \delta_x). \end{aligned}$$

On the other hand, using again that the kernel π is dominated with a symmetric density f_π , we obtain for $k \leq l \leq n-1, x \in X_k$,

$$\Pi_{X_{l+1}}^\varrho(\eta_{X^l} + \delta_x; d\eta_{l+1}) = \frac{\Xi_{l+1}(\varrho, \eta)}{\Xi_{l+1}(\varrho, \eta + \delta_x)} f_\pi(x, \eta_{l+1}) \Pi_{X_{l+1}}^\varrho(\eta_{X^l}, d\eta_{l+1}).$$

Here $f_\pi(x, \eta_{l+1}) = \prod_{y \in \text{supp } \eta_{l+1}} f_\pi(x, y)^{\eta_{l+1}(y)}$.

Thus we have

$$\begin{aligned} \psi(\varrho, \eta_{X^k} + \delta_x) = & \int \Pi_{X_{k+1}}^\varrho(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \dots \Pi_{X_n}^\varrho(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_{n-1}, d\eta_n) \\ & \prod_{l=k}^{n-1} \frac{\Xi_{l+1}(\varrho, \eta)}{\Xi_{l+1}(\varrho, \eta + \delta_x)} \prod_{l=k}^{n-1} f_\pi(x, \eta_{l+1}) \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n + \delta_x), \end{aligned}$$

and consequently, using again that the kernel is dominated with a symmetric density,

$$\mathbb{C}_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \prod_{l=k}^{n-1} \frac{\Xi_{l+1}(\varrho, \xi)}{\Xi_{l+1}(\varrho, \xi + \delta_x)} \pi(\varrho, \xi_{X^n}; dx) dP.$$

Changing slightly the parameter l and observing that Ξ_l depends only on that part of ξ which lies in the 'past' X^{l-1} , whereas δ_x lies in the 'future' X_k , one has

$$\mathbb{C}_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \prod_{l=0}^n \frac{\Xi_l(\varrho, \xi)}{\Xi_l(\varrho, \xi + \delta_x)} \pi(\zeta, \xi_{X^n}; dx) dP,$$

where in this equation ξ_{X^n} can be replaced by ξ because of the special choice of φ and the finite range property of π .

The finite range property is needed again and will enable us to replace the finite by the infinite product. Consider the terms of the infinite product

$$\prod_{l=0}^{\infty} \frac{\Xi_l(\varrho, \xi)}{\Xi_l(\varrho, \xi + \delta_x)}.$$

Here the assumption of *finite range* implies that only finitely many terms of the product can be different from 1. This shows the first part of the theorem for the special class of variables h . Standard arguments then complete the proof of this part. That $\tilde{\pi}$ is a random Radon measure is obvious. $\square$

Some consequences of the theorem. As a first consequence we obtain for the distribution of ξ with a general initial condition P_0 that $P_\pi = \int_{\mathcal{M}} P_\pi^\varrho P_0(d\varrho)$ is a solution of the equation

$$\mathbb{C}_{P_\pi}(h) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}^{\cdot\cdot}} \int_X h(x, \eta + \delta_x) \tilde{\pi}(\varrho, \eta; dx) P_\pi^\varrho(d\eta) P_0(d\varrho),$$

where $h \in F_+(X \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X))$.

Furthermore, the above theorem gives a construction of a very large class of Papangelou processes. We first discuss the special case where the infinite product appearing in $\tilde{\pi}$ is identically 1: If the normalizing constants $\Xi_l(\varrho, \xi)$ do not change if ξ is locally modified (i.e. if they are tail-measurable) then the infinite product is 1. A sufficient condition for this to hold is for instance the tail-measurability of π .

Consider the following additional condition on the kernel π : For a given ϱ the kernel π has zero range in the strict sense if

$$Res_{B^m} \pi^{(m)}(\varrho, (\cdot); dy), B \in \mathcal{B}_0, m \geq 1, \text{ are measurable with respect to } \mathcal{F}_{\dot{B}}.$$

In this case π is dominated with density $f \equiv 1$, and has range $R = 0$. Moreover, the normalizing constants Ξ_n depend only on ϱ but not on η . As a consequence, if π satisfies this condition and is locally integrable then ξ is a Papangelou process for the kernel π . Moreover, by construction, ξ has independent increments, and the

distribution of the field variables $\xi_B, B \in \mathcal{B}_0$, is given by

$$P_\pi^\varrho(\xi_B = k) = \frac{1}{\Xi_B(\varrho)} \frac{1}{k!} \pi^{(k)}(\varrho, B^k),$$

where we skipped η because there is no dependence on it. This raises the question for which class of kernels π with strictly positive range the above construction leads to Papangelou processes with kernel π , so that $p_\varrho \equiv 1$.

Consider now a kernel π which satisfies the assumptions of the theorem and does not depend on ϱ for simplicity. We are interested in the kernel

$$\gamma(\eta, dx) = V(x, \eta) \cdot \pi(\eta, dx), \eta \in \mathcal{M}^+(X).$$

We shall make several assumptions on V which will assure the existence of Papangelou processes $P_{\tilde{\gamma}}$ for the modified kernel $\tilde{\gamma}$. This will be our model for interacting Bosons. $V(x, \eta)$ is to be understood as a *Boltzmann factor* $\exp(-E(x, \eta))$, where $E(x, \eta)$ denotes the energy of a particle in x , given the configuration η . (Usually E is defined by means of some potential.) The first assumption on V is that $\gamma(\eta, \cdot)$ is always a Radon measure. Moreover we need a symmetry condition:

$$(3.3) \quad V(x, \eta) \cdot V(y, \eta + \delta_x) = V(y, \eta) \cdot V(x, \eta + \delta_y) \text{ for any } x, y, \eta.$$

The next is a finite-range property:

Denoting $B_r(x)$ the ball centered in x with radius r , this means

$$(3.4) \quad V(x, \eta) = V(x, \eta_{B_r(x)}), x \in X, \text{ for some } r \geq 0.$$

The following condition will guaranty that the Boltzmann kernel γ is dominated by some symmetric density: There exists a symmetric function $U \in F_+(X \times X)$ such that

$$(3.5) \quad V(x, \eta + \delta_y) = V(x, \eta) \cdot U(x, y), \text{ for all } x, y, \eta.$$

In applications U is given by the exponential of the negative of a pairpotential.

Finally we are looking for a sufficient condition on V which implies local integrability of γ . We assume that there exists for any configuration η some constant $0 < C(\eta)$ such that for any $m \geq 1$ and any $x_1, \dots, x_m \in X$

$$(3.6) \quad V(x_1, \eta) V(x_2, \eta + \delta_{x_1}) \dots V(x_m, \eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{m-1}}) \leq \frac{C(\eta)^m}{m!}.$$

In this case

$$\gamma^{(m)}(\eta_{X^{n-1}}, X_n^m) \leq C(\eta)^m \frac{1}{m!} \pi^{(m)}(\eta_{X^{n-1}}, X_n^m),$$

and thus local integrability of π implies the one of γ . We remark that the stability condition (3.6) is a version of *superstability*.

Given such a pair (π, V) there exists a Papangelou process for the modified kernel $\tilde{\gamma}$. We now comment the case of simple Papangelou processes. If π is *simple* in the sense that π is a kernel from $\mathcal{M}(X)$ to X satisfying the condition

$$\pi(\eta, \text{supp } \eta) = 0 \text{ for any } \eta \in \mathcal{M},$$

then a Papangelou process for the kernel π is simple too. (See [7] e.g.) It follows that a Papangelou process for the above kernel $\tilde{\gamma}$ then is simple too. Thus we have a method which allows to construct a large class of simple Papangelou processes.

The above theorem induces several other problems and questions. Under which conditions on π the associated Papangelou process is of first order or uniquely determined? Under which additional condition on π the above construction leads to some Papangelou process for π and not for $\tilde{\pi}$? These questions can be seen also as follows: We explained already in the introduction that the collection of Papangelou processes for a given kernel π coincides with the collection of abstract Gibbs states (in the sense of Preston [11]) for the local specification $\mathcal{V}_\pi$ induced by π in a natural way. And for this collection some of these questions have been analyzed in [11]. As has been remarked already here one can find also a general construction method for Gibbs states specified by $\mathcal{V}_\pi$ and thereby for Papangelou processes with kernel π .

The above construction shows that Papangelou processes are processes in *spacetime* which have an infinitely long memory. The underlying symmetry given by the cocycle condition is much stronger than reversibility in time. Thus there is a new underlying spacetime structure here which has to be developed further.

4. EXAMPLES

We discuss some applications of the theorem. We don't repeat here the example of Gibbs processes for classical interacting systems which can be found in [16]. Instead we discuss the analog constructions of interacting Bosons and Fermions which seem to be new. In particular the Polya difference process or ideal Fermi process is considered here for the first time.

Cox processes. We include this well known class of processes to make explicit the appearance of the parameter ϱ in the above setting. Cox processes P are of the form $P = \int_{\mathcal{M}} P_\kappa W(d\kappa)$, where W is a random measure in X , i.e. a probability on $\mathcal{M}$.

It is well known (see [15]) that any Cox process is a Papangelou process for a kernel having the structure $\pi(\mu, dx) = P^\mu(d\varrho) \varrho(dx)$. Here $(P^\mu)_{\mu \in \mathcal{M}^\cdot}$ is a Markovian kernel from $\mathcal{M}^\cdot$ to $\mathcal{M}$, i.e. a measurable family of random measures on X indexed by configurations μ . Thus $\pi(\mu, \cdot)$ is given by the intensity measure of P^μ which we assume to be always Radonian. A deep result of Wakolbinger [15] is that the following converse is true: If P is a Papangelou process whose kernel is tail-field measurable then P can be represented as a Cox process. Thus we see that a tail-field measurable Papangelou kernel π can always be represented as $\pi(\mu, \cdot) = P^\mu(d\varrho) \varrho(\cdot)$ with a tail-field measurable family of random measures $P^\mu, \mu \in \mathcal{M}^\cdot$.

In this case the above theorem yields a construction of Cox processes which in fact is well known. To be more precise: Consider the kernel $\pi(\varrho, \eta; \cdot)$, which is tail-field measurable with respect to η , together with a random measure $P_0(d\varrho)$. Then the normalizing constants $\Xi_n(\varrho)$ do not depend on η , and it is obvious that the conditions of the theorem are satisfied, so that, for a given ϱ , P_π^ϱ is a Papangelou process with kernel $\pi(\varrho, 0)$ and therefore by Mecke's characterization a Poisson process with intensity measure $\pi(\varrho, 0)$. As a consequence $P_\pi = \int P_{\pi(\varrho, 0)} P_0(d\varrho)$ is a Cox process with random intensity measure $\pi(\varrho, 0)$.

Polya sum processes and the ideal Bose process. Here we consider Polya sum processes, which had been introduced in [16]. For the convenience of the reader we repeat here their construction and some of their properties. They describe the ideal Bose process of quantum mechanics (cf. [1]).

Let $0 < z < 1$ and ϱ be some fixed Radon measure on X . Consider the kernel $\pi_+(\varrho, \eta; \cdot) = z(\varrho + \eta)$. (For simplicity we skip ϱ in the sequel.) In this case local integrability holds true with a normalizing constant independent of η :

$$\Xi_n(\varrho) = \exp(\varrho(X_n) \kappa(z)) = \frac{1}{(1-z)^{\varrho(X_n)}},$$

where $\kappa(z) = \sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j}$. Here we used the fact that

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \varrho(X_n)^{[m]} z^m = \exp(\varrho(X_n) \kappa(z)) = \frac{1}{(1-z)^{\varrho(X_n)}}$$

with $a^{[m]} = a(a+1) \cdots (a+m-1)$. It is evident that the other assumptions of the theorem are also satisfied. In particular π_+ has range 0 in the strict sense. The corresponding Papangelou process $P_+ = P_{\pi_+}^\varrho$ was called in [16] the Polya sum process

specified by (z, ϱ) . But from the point of view of quantum mechanics this is the *ideal Bose process specified by (z, ϱ)* .

Using that P_+ is a Papangelou process for π_+ we show directly that this process has independent increments, we deduce the distribution of the field variables ξ_B , show that P_+ is of first order (i.e. all ξ_B are integrable) and finally that P_+ is uniquely determined by the kernel π_+ .

Let $B \in \mathcal{B}_0$ and $k \geq 1$ and consider a non-negative measurable function φ on the space of configurations which depends only on what happens outside B . Thus φ is measurable with respect to $\mathcal{F}_{B^c}$. Then using its character as a Papangelou process we obtain the recursion

$$\begin{aligned} P_+(1_{\{\xi_B=k\}} \cdot \varphi) &= \frac{1}{k} \int 1_B(x) 1_{\{\xi_B=k\}}(\eta) \varphi(\eta) \eta(dx) P_+(d\eta) \\ &= \frac{z}{k} \int 1_B(x) 1_{\{\xi_B=k-1\}}(\eta) \varphi(\eta) (\varrho + \eta)(dx) P_+(d\eta) \\ &= \frac{z}{k} [\varrho(B) + (k-1)] P_+(1_{\{\xi_B=k-1\}} \cdot \varphi). \end{aligned}$$

Iterating this process until B is void of particles yields

$$P_+(1_{\{\xi_B=k\}} \cdot \varphi) = \frac{z^k}{k!} \varrho(B)^{[k]} P_+(1_{\{\xi_B=0\}} \cdot \varphi).$$

Choosing now for φ the indicator of the event $\{\xi_{B_2} = k_2, \dots, \xi_{B_n} = k_n\}$, where $k_j \geq 1$ and $B_1 = B, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ are pairwise disjoint, and iterating the above procedure we obtain that for $k_1, \dots, k_n \geq 0$

$$P_+(\xi_{B_1} = k_1, \dots, \xi_{B_n} = k_n) = \prod_{j=1}^n \frac{z^{k_j}}{k_j!} \varrho(B_j)^{[k_j]} \cdot P_+(\xi_{B_1} = 0, \dots, \xi_{B_n} = 0).$$

This equation determines $P_+(\xi_{B_1} = 0, \dots, \xi_{B_n} = 0)$ as a product of terms which depend only on a single k_j . Thus P_+ has independent increments.

The distribution of ξ_B , $B \in \mathcal{B}_0$, amounts to

$$P_+\{\xi_B = k\} = \exp(-\varrho(B)\kappa(z)) \cdot z^k \cdot \frac{\varrho(B)^{[k]}}{k!}, k \geq 0.$$

If $\varrho(B)$ is an integer this is a negative binomial distribution. From this we obtain that P_+ is of first order and

$$P_+(\xi_B) = \frac{z}{1-z} \cdot \varrho(B), B \in \mathcal{B}_0.$$

The above considerations used only the partial integration formula, for which P_+ is a solution. Thus the finite-dimensional distributions of the random field $(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}_0}$ and thereby P_+ is completely determined by π_+ .

We finally add an important observation of Mathias Rafter that P_+ is infinitely divisible. (See [12], Prop. 6.7 .) We thus see that the Polya sum process resp. the ideal Bose process P_+ for (z, ϱ) has analog properties as the Poisson process and thus has the character of an ideal gas.

The interacting Bose process. Here we propose a theory of interacting Bosons in analogy to the Gibbsian theory of classical interacting particles. The idea is to replace the Poisson process by the Polya sum process and to build by means of a given potential the interacting system as in the classical case . To be more precise, we replace the (conditional) intensity ϱ of the Poisson process by the conditional intensities of the Polya processes.

Let $V(x, \eta)$ be a non-negative, measurable function on $X \times \mathcal{M}^+(X)$ satisfying the conditions (3.3) – (3.6); furthermore, let $0 < z < 1$ and $\varrho \in \mathcal{M}(X)$. Denote by $\pi_+(\eta, \cdot) = z(\varrho + \eta)$ the Polya sum kernel for (z, ϱ) from above. We then consider the kernel

$$\gamma(\eta, dx) = V(x, \eta) \cdot \pi_+(\eta, dx), \eta \in \mathcal{M}^+(X).$$

As a consequence of the considerations above we know the existence of a Papangelou process for the modified kernel $\tilde{\gamma} = p_\varrho \cdot V \cdot \pi_+$ and call it the *Bosonic state for (ϱ, V)* . In the case where V (and thereby C) does not depend on η , say $V(x, \eta) \equiv f(x)$, we obtain a Papangelou process for $\gamma(\eta, \cdot) = f \cdot z(\varrho + \eta)$. (Thus the infinite product is trivial here; f is playing the role of the exponential of a self-potential.) This state differs from the above Polya sum process in that the constant z may depend on the position x . We call this process also the *ideal Bose process for (f, z, ϱ)* . It has the same properties as the former Polya sum process. A quantum mechanical derivation of this model can be found in [1].

The Polya difference process and the ideal Fermi process. Here we study the Papangelou process which describes Fermions and which we call the Polya difference process or ideal Fermi process. This notion has been foreshadowed already in [1].

For simplicity we assume first that the underlying space X is countably infinite or even finite. The measure ϱ is the counting measure on X . Thus $\varrho \equiv 1$. Again $0 < z < 1$ is a given parameter. We then consider the *Polya difference kernel for z* defined by

$$\pi_-(\eta, \cdot) = z \cdot (\varrho - \eta), \eta \in \mathcal{M}(X).$$

Note that this kernel is a kernel from $\mathcal{M}^\cdot(X)$, the collection of simple point measures, to X , and thus well-defined as a Radon measure in the second variable. Moreover, $\pi_-(\eta, \text{supp } \eta) = 0$, and thus a Papangelou process for π_- is simple. Again local integrability holds true with a normalizing constant

$$\Xi_n(\varrho) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \varrho(X_n)_{[m]} z^m = (1+z)^{\varrho(X_n)},$$

which again does not depend on η . Note that here appears now the symbol $a_{[m]} = a(a-1) \cdots (a-m+1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Again we are in the situation of the theorem. We call the corresponding Papangelou process $P_- = P_{\pi_-}$ the *Polya difference process for z* . From the point of view of quantum mechanics it is the *ideal Fermi process for z* . (For a quantum mechanical explication we refer again to [1].) By construction this process is simple, i.e. respects the Pauli exclusion property, and has independent increments. Exactly as above, by using only its character as a Papangelou process for π_- , the field variables ξ_B , $B \in \mathcal{B}_0$, have the following distribution:

$$P_-\{\xi_B = k\} = \frac{1}{Z_-(B)} \cdot z^k \cdot \frac{\varrho(B)_{[k]}}{k!}, k \geq 0,$$

where $Z_-(B)$ denotes the normalizing constant. In case that $\varrho(B)$ is an integer this is a binomial distribution.

From this we obtain that P_- is of first order and

$$P_-(\xi_B) = \frac{z}{1+z} \cdot \varrho(B), B \in \mathcal{B}_0.$$

Again P_- is completely determined by π_- . Therefore also P_- has the character of an ideal gas. We indicate shortly how one can define difference kernels on abstract spaces X and how to develop the corresponding interacting theory.

Let X denote a Polish space and fix some Radon measure ϱ on it. Consider a (random) element ζ in $\mathcal{M}^\cdot(X)$, i.e. a point process in X . Given some Radon measure ϱ and a parameter $z > 0$ consider the following kernel called again Polya difference kernel

$$\pi_-(\zeta, \eta; \cdot) = z \cdot \varrho + (\zeta - \eta) \cdot 1_{\mathcal{M}^\cdot(\zeta)}(\eta),$$

where $\mathcal{M}^\cdot(\zeta) = \{\eta \in \mathcal{M}^\cdot(X) | \eta \leq \zeta\}$. Here $\eta \leq \zeta$ means that η is a subconfiguration of ζ and therefore the difference $\zeta - \eta$ a well defined Radon point measure. The corresponding Papangelou process, called again Polya difference process, exists and is uniquely determined by π_- and the distribution of ζ . For a deterministic ζ it has

independent increments and is of first order. This model seems to be interesting not only for quantum mechanical applications.

We finally remark that in the case of simple Papangelou processes the structure of the *discrete part* of the Papangelou kernel π has been analysed already in complete generality by Kallenberg [4] in Theorem 3.1. This discrete part π_a has the following structure:

$$(4.1) \quad \pi_a(\mu, dx) = V_a(x, \mu) \cdot (1 - \mu)(dx), x \in X, \mu \in \mathcal{M}(X), \text{ where}$$

$V_a(x, \mu) = \frac{\tau(x, \mu)}{1 - \tau(x, \mu)}$ and τ is intuitively given by $\tau(x, \cdot) = P(\xi_x = 1 | \xi_{\{x\}^c})(\cdot)$. (For more details we refer to the following scholion.)

The atomic part of the kernel for an *ideal* Fermi gas has the form where V_a does not depend on μ ; and in this case the corresponding process $(\xi_x)_x$ has independent increments. Important examples are given by $V_a = \varrho$ with ϱ a probability on X which is not a Dirac measure; or $V_a = \frac{\varrho}{1 - \varrho}$. A very special modification of the second case which takes into account also interactions with respect to the particles in μ then leads to so called determinantal processes. For details we refer to Shirai/Takahashi [14].

Scholion: The probabilistic structure of Papangelou kernels. For the convenience of the reader we add a rigorous derivation of the probabilistic structure of a Papangelou kernel in the discrete setting. The general theory can be found in [3, 4, 9]. The situation now is elementary: X is finite and $\pi(\mu, x), x \in X, \mu \in \mathcal{M}^+$, is a kernel. We consider *Papangelou processes* P for π , i.e. point processes P in X solving the equations

$$\mathbb{C}_P(h) = \sum_x \sum_{\mu} h(x, \mu + \delta_x) \pi(\mu, x) P(\mu), h \in F_+,$$

and ask for the meaning of this condition in terms of the corresponding random field $(\xi_x)_{x \in X}$. Recall that the Campbell measure $\mathbb{C}_P$ is concentrated on $C = \{(x, \mu) | \mu(x) \geq 1\}$.

The above equation is equivalent to

$$(4.2) \quad \mu(x) P(\mu) = \pi(\mu - \delta_x, x) P(\mu - \delta_x) \text{ for any } x, \mu, \mu(x) \geq 1, \text{ i.e. } \mu \in \mathcal{M}^+.$$

This is equivalent to saying

$$(4.3) \quad (\mu + \delta_x)(x) P(\mu + \delta_x) = \pi(\mu, x) P(\mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M}^+.$$

Note that $\pi(\mu, x) > 0$ iff $(P(\mu + \delta_x) > 0 \iff P(\mu) > 0)$. We observe that in the case of simple point processes P condition (4.2) is equivalent to saying

$$(4.4) \quad (1 - \mu)(x)P(\mu + \delta_x) = \pi(\mu, x)P(\mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M}.$$

In this case π can always be chosen as a kernel $\pi : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ satisfying $\pi(\mu, x) = 0$ if $\mu(x) \geq 1$. Thus $\pi(\mu, \cdot)$ is supported by the complement of the support of μ . (4.2) means that π is a *local specification of the point process* P in the sense that

$$\pi(\mu, x) = (1 + \mu)(x) \cdot \frac{P(\mu + \delta_x)}{P(\mu)} \text{ for all } x \text{ } P - a.s. [\mu].$$

Note that one can choose always a version V for the quotient on the right hand side which is defined everywhere. Thus the kernel π has the following structure:

$$(4.5) \quad \pi(\mu, x) = (1 + \mu)(x) \cdot V(x, \mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M},$$

where $V : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$.

Interpretation of π in terms of the random field $\xi_x, x \in X$: Condition (4.2) can be expressed as follows: For all x and all μ

$$(1 + \mu)(x)P(\xi_x = 1 + \mu(x), \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}) = \pi(\mu, x) \cdot P(\xi_x = \mu(x), \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}).$$

In the case of simple point processes P this condition reduces to: For all x, μ

$$(1 - \mu)(x)P(\xi_x = 1, \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}) = \pi(\mu, x) \cdot P(\xi_x = 0, \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c});$$

or equivalently for all x, μ with $P(\xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}) > 0$

$$(1 - \mu)(x)P(\xi_x = 1 | \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}) = \pi(\mu, x) \cdot P(\xi_x = 0 | \xi_{\{x\}^c} = \mu_{\{x\}^c}).$$

Setting $q_x = P(\xi_x = 1 | \xi_{\{x\}^c})$ this means that the process P satisfies the condition

$$(\Sigma) \quad (q_x > 0 \implies 1 - q_x > 0) \text{ } P - a.s., x \in X,$$

and thereby $P(\xi_{\{x\}^c} = (\cdot)) > 0$, and that π is given by

$$(4.6) \quad \pi(\mu, x) = (1 - \mu)(x) \cdot \frac{q_x(\mu)}{1 - q_x(\mu)}, x \in X, P - a.s. [\mu].$$

Thus in the simple case we have: P is a Papangelou process for π iff condition (Σ) is true; and in this case π satisfies (4.6). This is a well known representation of the Papangelou kernel by Kallenberg [4], theorem 3.1., for simple processes in this elementary context. Note that for the right hand side of (4.6) one can choose always a version $V(x, \mu)$ which depends only on $\mu_{\{x\}^c}$ if x is given. Thus for simple Papangelou processes P the kernel π has the following structure

$$(4.7) \quad \pi(\mu, x) = (1 - \mu)(x) \cdot V(x, \mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M},$$

where $V : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ is *exvisible*, i.e. is measurable with respect to the σ -field $\mathcal{Z}$ in $X \times \mathcal{M}$ generated by all sets of the form $\{x\} \times N$, where $x \in X$ and $N \in \mathcal{F}_{\{x\}^c}$.

To summarize we have the following situation: If P is a Papangelou process for a given kernel $\pi : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$, then π can be represented as

$$(4.8) \quad \pi(\mu, x) = (1 + \mu)(x) \cdot V(x, \mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M},$$

where $V : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$.

Let P be a simple Papangelou process for a given kernel $\pi : X \times \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$. Then π can be represented as

$$(4.9) \quad \pi(\mu, x) = (1 - \mu)(x) \cdot V(x, \mu), x \in X, \mu \in \mathcal{M},$$

where V is exvisible. We observe here that this implies that $\pi(\cdot, x)$ is the conditional intensity of ξ in the sense that for any x

$$\pi(\cdot, x) = P(\xi_x | \xi_{\{x\}^c}) \text{ P.a.s..}$$

We use this terminology also in the non-simple case though this interpretation is no longer valid.

Thus we now know the general structure of a Papangelou kernel in the discrete case which remains true in the general case (cf. [4]).

If the random point field $(\xi_x)_x$ is independent (or has independent increments) then V can be chosen in such a way that it depends only on x ; if the field is even identically distributed then V is a constant. In these cases one can speak of an ideal gas.

Acknowledgement. We are grateful to Alexander Bach for several important comments concerning the Polya processes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Bach, H. Zessin, "The particle structure of the quantum mechanical Bose and Fermi gas" (In preparation) (2010).
- [2] O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability, Springer (2002).
- [3] O. Kallenberg, Random Measures, Akademie-Verlag, Berlin, and Academic press, London (1983).
- [4] O. Kallenberg, "On conditional intensities of point processes", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **41**, 205 – 220 (1978).
- [5] O. Kallenberg, Probabilistic Symmetries and Invariance Principles, Springer (2005).
- [6] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, Infinitely Divisible Point Processes, Wiley (1978).
- [7] K. Matthes, W. Warmuth, J. Mecke, "Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh und Hans Zessin", Math. Nachr., **88**, 117 – 127 (1979).
- [8] J. Mecke, "Stationäre Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen", Z. W-Theorie verw. Geb., **9**, 36 – 58 (1967).
- [9] F. Papangelou, "The conditional intensity of general point processes and an application to line processes", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **28**, 207 – 226 (1974).

- [10] F. Papangelou, “The Armenian Connection: Reminiscences from a Time of Interactions”, *Izvestiya NAN Armenii: Matematika*, **44**, 25 – 32 (2009); Letter to H. Zessin, *Izvestiya NAN Armenii: Matematika*, **44**, 32 – 34 (2009).
- [11] Ch. Preston, Specifications and Their Gibbs States, unpublished manuscript, Bielefeld (See the version from march 2005 on www.math.uni-bielefeld.de/~Preston/start.php).
- [12] M. Rafter, Gaussian Loop- and Polya Processes, Apoint process approach, Universitätsverlag Potsdam, PHD Thesis (2009).
- [13] B. Rauchenwandtner, Gibbsprozesse und Papangeloukerne, Dissertationen der Johannes Kepler-Universität Linz, VWGÖ, Wien (1978).
- [14] T. Shirai, Y. Takahashi, “Random point field associated with certain Fredholm determinants II”, Fermion shifts and their ergodic and Gibbs properties, *Ann. Prob.*, **31**, 1533 – 1564 (2003).
- [15] A. Wakolbinger, Singularität von Punktprozessen, Dissertation der Johannes Kepler-Universität Linz, Linz (1979).
- [16] H. Zessin, “Der Papangelou Prozeß” [in German], *Izvestiya NAN Armenii: Matematika*, **44**, (1), 61 – 72 (2009).

Поступила 25 января 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 6, 2011, стр. 67-76.

О ВРАЩЕНИИ ОБРАЗА ОКРУЖНОСТИ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский Государственный Университет

E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. В работе изучаются вращения образа окружности $|z| = r$ при отображении функциями $w(z) - p(z)$, где $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $p(z)$ – полином. В терминах отмеченных вращений устанавливаются некоторые аналоги второй основной теоремы Р. Неванлинны.

MSC2010 number: 30D30, 30D35, 30C15.

Ключевые слова: Теория Неванлинны; свойство близости a -точек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предполагаем известными основные положения теории распределения значений мероморфных функций, теории поверхностей наложения Л. Альфорса и пользуемся стандартными обозначениями из [1].

Из первой основной теоремы Р. Неванлинны вытекает следующие качественное следствие: если мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция $w(z)$ (с неограниченной характеристикой) относительно редко принимает в круге $|z| \leq r < R$ значение a , то на окружности $|z| = r$ найдутся участки, на которых $|w(z) - a|$ “мало”. Иначе некоторые участки границы ∂F_r области $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$ (F_r – часть римановой поверхности функции $w^{-1}(z)$, на которую отображается круг $|z| \leq r$ при отображении функцией $w(z)$) “близко” расположены от a .

Рассмотрим часть границы ∂F_r , лежащую над кругом $|w - a| < 1$ при $a \neq \infty$ и над $|w| > 1$, при $a = \infty$. Это множество является объединением некоторой совокупности дуг γ_a .

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема А. Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция, $a_\nu \in \bar{\mathbb{C}}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Тогда для любого $r < R$ имеет место неравенство

$$(1.1) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, a_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a_\nu) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi + h \cdot L(z),$$

где $z = re^{i\varphi}$, а $L(z)$ – сферическая характеристика Альфорса,

$$\Delta(r, a) = \Delta(r, a, w) = \{z : |z| = r, |w(z) - a| < 1\}, |h| < h_1(a_1, \dots, a_q) < \infty.$$

Неравенство (1.1) показывает, что вращения дуг γ_{a_ν} , $\nu = 1, 2, \dots, q$ вокруг точки a_ν оценивается через вариацию угла между касательной к кривой $w(re^{i\varphi})$ и действительной осью (r – фиксировано).

Теорема А имеет определенное методическое значение. Оно состоит в том, что в ней как бы концентрируется “геометрия” доказательства соотношений типа второй основной теоремы Р. Неванлинны.

В доказательстве второй основной теоремы Р. Неванлинны и многих других основных результатов теории распределения важную роль играет следующее неравенство,

$$(1.2) \quad \sum_{\nu=1}^q m(r, a_\nu) \leq m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + O\left[m\left(r, \frac{w'}{w}\right)\right].$$

Это неравенство позволяет оценку близости $w(z)$ к значениям a_ν , $\nu = 1, 2, \dots, q$ сводить к оценке близости $w'(z)$ к нулю. Величина $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ выполняет как бы “собирательную” роль, поскольку в левой части неравенства (1.2) q произвольно. Неравенство (1.1) по существу является аналогом неравенства (1.2). В этом случае вместо величин $m(r, a)$, изучаются величины равные числу оборотов дуг γ_a вокруг точки a , а величина

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi$$

выполняет ту же роль, что и величина $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ в неравенстве (1.2).

В настоящей работе вместо чисел $\{a_\nu\}$ рассматриваются полиномы:

$$P_\nu(z) = P_{\nu,n}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(\nu)} z^k, \quad \nu = 1, 2, \dots, q,$$

где $a_n^{(i)} \neq a_n^{(j)}$, при $i \neq j$. Соответственно вместо множества $\Delta(r, a_\nu)$ рассматриваются множества $\Delta(r, P_\nu) = \Delta(r, w - P_\nu, 0)$.

В нижеследующей теореме 1.1 мы используем обозначение

$$E_\alpha(R) = \{r : \alpha^2 R \leq r \leq \alpha R\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ предполагаем фиксированным.

Теорема 1.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $\beta \in (0, 1)$, $q > 2$ – фиксированные числа. Тогда для каждого $R > R_0$ существует такое подмножество

$E_\alpha(q, R)$ множества $E_\alpha(R)$, что $\text{mes } E_\alpha(q, R) > \beta \cdot \text{mes } E_\alpha(R)$ и при $r \in E_\alpha(q, R)$ выполняется неравенство

$$(1.3) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \\ \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi + o[T(cr, w)], \quad z = re^{i\varphi},$$

где $T(r)$ – неванлинновская характеристика $c = \text{const} > 1$.

Следствие 1.1. Если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то существует последовательность $r = r_n \rightarrow \infty$ такое, что

$$(1.4) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \\ \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi + o[T(r)], \quad z = re^{i\varphi}.$$

В работе [3] введена величина $\nu(r, a) = \nu(r, a, w)$, которая характеризует участки $\{\gamma_\alpha\}$ границы ∂F_r . Обозначим через $2\pi\nu_{\gamma_\alpha}$ приращение на γ_α величины $\arg(w(z) - a)^{-1}$, при $a \neq \infty$ и величины $\arg w(z)$ при $a = \infty$. Положим

$$\nu(r, a) = \nu(r, a, w) = \sum_{\gamma_\alpha} [\nu_{\gamma_\alpha}],$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

Величина $\nu(r, a)$ определяется структурой границы ∂F_r в окрестности точки a и сама характеризует эту структуру, показывая суммарное количество целочисленных оборотов дуг $\{\gamma_a\}$ вокруг точки a . В работе [2] вводятся следующие величины

$$\nu^+(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a)^{-1} \right)^+ d\varphi, \\ \nu^-(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a)^{-1} \right)^- d\varphi,$$

где $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \min\{x, 0\}$ и рассматривается следующий вопрос: возможно ли, чтобы для широкого набора значений a и r величина $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$ (суммарное количество оборотов дуг γ_α вокруг точки a без учета знаков оборотов) существенно превосходила величину $\nu(r, a)$? Если бы это было так, то это указывало бы на “хаотичность” геометрической структуры ∂F_r . И наоборот, если для широкого набора значений a и r величины $\nu(r, a)$ и $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$ примерно равны, то это в известной степени указывает на рациональность строения ∂F_r , ибо количество оборотов (без учета знака), примерно равное $\nu(r, a)$, в силу

теоремы 1 работы [3] будет определять разность $A(r) - n(r, a)$, т.е. дефектность значения a .

В пользу такой рациональности, говорит следующий результат:

Теорема В. (см.[2]). Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда для всех a , исключая быть может, не более чем счетное множество значений a , выполняется

$$(1.5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)}{A(r)} = 0,$$

отсюда для тех же значений a имеем:

$$(1.6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\nu(r, a)|}{A(r)} = 0.$$

В соотношениях (1.5) и (1.6) содержится ответ на поставленный вопрос, поскольку из них следует, что имеет место общность в распределениях величин $\nu(r, a)$ и $\nu^+(r, a) - \nu^-(r, a)$. В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $\beta \in (0, 1)$, $q > 2$ – фиксированные числа. Тогда для каждого $R > R_0$ существует такое подмножество $E_\alpha(q, R) \subset E_\alpha(R)$, что $\text{mes} E_\alpha(q, R) > \beta \cdot \text{mes} E_\alpha(R)$, и при $r \in E_\alpha(q, R)$ выполняется неравенство

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \leq K(\alpha, \beta, n) \cdot T(cr, w),$$

где $\nu^+(r, P_k) = \nu^+(r, w - P_k, 0)$, $\nu^-(r, P_k) = \nu^-(r, w - P_k, 0)$, $K(\alpha, \beta, n)$ – постоянная, зависящая от α , β и n .

Следствие 1.2. Если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то существует последовательность $r = r_m \rightarrow \infty$ такая, что выполняется неравенство

$$(1.8) \quad \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \leq K(\lambda, n) \cdot T(r, w),$$

где $K(\lambda, n)$ – постоянная, зависящая от λ и n .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через

$$\begin{aligned} w_{\nu, i}(z) &= w^{(i)}(z) - P_{\nu}^{(i)}(z) + b_i^{(\nu)}, \\ \Delta^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) &= \Delta \left(r, b_i^{(\nu)}, w_{\nu, i} \right), \\ \Delta_l(r, a) &= \Delta_l(r, a, w) = \{z : |z| = r, |w(z) - a| \leq l\}, \\ \Delta_l^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) &= \Delta_l \left(r, b_i^{(\nu)}, w_{\nu, i} \right), \end{aligned}$$

где $b_i^{(\nu)} = i!a_i^{(\nu)}$ и $l = \max_{i,\nu} |b_i^{(\nu)}| + 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $\nu = 1, 2, \dots, q$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство

$$(2.1) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \\ + K_1 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| d\varphi \\ + K_2 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^n L(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)}), \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\Delta_{\rho,i}^{\nu,i} = \Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)}) \setminus \Delta_l^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})$, $L(z)$ – сферическая характеристика Л. Альфорса, $\rho \in (0, 1)$ – фиксированное число, K_1, K_2 – постоянные.

Доказательство. В работе [2] установлено следующее неравенство

$$(2.2) \quad \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - a) \right| d\varphi \leq \int_{\Delta_\rho(r,a)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w(z) \right| d\varphi + O(L(r, w)).$$

Используя это неравенство получим

$$\int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ \leq \int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w_{\nu,i}(z) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})).$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$(2.3) \quad \int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ \leq \int_{\Delta_\rho^*(r, b_i^{(\nu)}) \setminus \Delta_\rho^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ + \int_{\Delta_\rho^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})) \\ \equiv I(r) + \int_{\Delta_\rho^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi + O(L(r, w_{\nu,i})).$$

Оценим первый интеграл в правой части неравенства (2.3). Обозначим через $\Delta_l^{\nu,i} = \Delta_l^* \left(r, b_i^{(\nu)} \right) \setminus \Delta^* \left(r, b_{i+1}^{(\nu)} \right)$, откуда получим

$$(2.4) \quad \begin{aligned} I(r) &\leq \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)} \right) \right| d\varphi \\ &\quad + \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| d\varphi \\ &\quad + \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg w_{\nu,i+1}(z) \right| d\varphi \equiv I_1(r) + I_2(r) + I_3(r). \end{aligned}$$

Поскольку при $z \in \Delta_l^{\nu,i}$, $1 < |w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}| \leq l$, то имеем

$$(2.5) \quad \begin{aligned} I_1(r) &\leq r \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi \leq Kr \int_{\Delta_l^{\nu,i}} |w'_{\nu,i+1}(z)| d\varphi \\ &\leq Kr \int_{\Delta_l^{\nu,i}} \frac{|w'_{\nu,i+1}(z)|}{1 + |w_{\nu,i+1}(z)|^2} d\varphi \leq KL(r, w_{\nu,i+1}). \end{aligned}$$

Для оценивания интеграла $I_2(r)$ нетрудно видеть, что при $z \in \Delta_{\rho,l}^{\nu,i}$ имеем $|w_{\nu,i+1}(z)| > 1$ и $|w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}| > 1$. Учитывая эти неравенства, получим

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| = r \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}}{w_{\nu,i+1}(z)} \right) \right| \leq Kr \frac{|w'_{\nu,i+1}(z)|}{1 + |w_{\nu,i+1}(z)|^2}.$$

Следовательно

$$(2.6) \quad I_2(r) \leq KL(r, w_{\nu,i+1}).$$

Оценим интеграл $I_3(r)$.

$$I_3(r) = \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg w_{\nu,i+1}(z) \right| d\varphi \leq r \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z)} \right| d\varphi$$

и

$$\left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z)} \right| \leq K \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right|, \quad z \in \Delta_{\rho,l}^{\nu,i}.$$

Следовательно,

$$(2.7) \quad I_3(r) \leq Kr \int_{\Delta_{\rho,l}^{\nu,i}} \left| \frac{w'_{\nu,i+1}(z)}{w_{\nu,i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi.$$

Учитывая неравенства (2.3) – (2.7), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^*(r, b_i^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, i}(z) - b_i^{(\nu)}) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta^*(r, b_{i+1}^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ &+ K_1 r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + K_2 L(r, w_{\nu, i}) + K_3 L(r, w_{\nu, i+1}). \end{aligned}$$

Последовательно применяя это неравенство при $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и учитывая, что $w_{\nu, 0}(z) - b_0^{(\nu)} = w(z) - P_\nu(z)$, $\Delta^*(r, b_0^{(\nu)}) = \Delta(r, P_\nu)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta^*(r, b_n^{(\nu)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w_{\nu, n}(z) - b_n^{(\nu)}) \right| d\varphi \\ &+ K_1 \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + \sum_{i=0}^n L(r, w_{\nu, i}). \end{aligned}$$

Отсюда применяя неравенство (2.2) для первого интеграла правой части этого неравенства и учитывая, что $w_{\nu, n}(z) = w^{(n)}(z)$, $\Delta^*(r, b_n^{(\nu)}) = \Delta(r, b_n^{(\nu)}, w^{(n)})$, $\nu = 1, 2, \dots, q$, получим

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi &\leq \int_{\Delta_\rho(r, b_n^{(\nu)}, w^{(n)})} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \\ &+ K_1 \sum_{i=0}^{n-1} r \int_{\Delta_{\rho, i}^{\nu, i}} \left| \frac{w'_{\nu, i+1}(z)}{w_{\nu, i+1}(z) - b_{i+1}^{(\nu)}} \right| d\varphi + \sum_{i=0}^n L(r, w_{\nu, i}). \end{aligned}$$

Пологая $\rho = \min \left\{ \min_{i \neq j} \frac{b_n^{(i)} - b_n^{(j)}}{2}, 1 \right\}$, очевидно получаем

$$\Delta_\rho(r, b_n^{(i)}, w^{(n)}) \cap \Delta_\rho(r, b_n^{(j)}, w^{(n)}) = \Phi, \quad i \neq j.$$

Учитывая это и суммируя по ν ($\nu = 1, 2, \dots, q$) неравенство (2.8), получим утверждение леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}$ -функция. Тогда имеет место неравенство ($z = re^{i\varphi}$)

$$(2.9) \quad \int_0^\pi \int_{\Delta(r, w, w')} \left| \frac{w''(re^{i\varphi})}{w'(re^{i\varphi})} \right| r dr d\varphi \leq K(c) \left\{ RT^{1/2}(cR, w) + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0,$$

где $\Delta(r, w, w') = \Delta(r, 0, w) \setminus \Delta(r, 0, w')$, $c = \text{const} > 1$.

Доказательство. Так как при $z \in \Delta(r, w, w')$, $|w(z)| < 1$ и $|w'(z)| > 1$, то нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| \leq \frac{|w''(z)|}{1 + |w'(z)|^2} + 2 \frac{|w''(z)|}{1 + |w'(z)|^2} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2}.$$

Отсюда используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K A^{1/2}(R, w') \left\{ R + A^{1/2}(R, w) \right\}.$$

Учитывая очевидное соотношение

$$(2.10) \quad A(r, w) < \frac{T(cr, w)}{\ln c}, \quad c > 1,$$

имеем

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K T^{1/2}(cR, w') \left\{ R + T^{1/2}(cR, w) \right\}.$$

Используя теперь известное неравенство (см. [4], теорема 2.3, Гл. III)

$$(2.11) \quad T(r, w^{(l)}) \leq (l+1)T(r, w) + Q(r, w),$$

где $Q(r, w) = o[T(r_1, w)]$, $r_1 > r$, $r \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\pi \int_{\Delta(r,w,w')} \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| r dr d\varphi \leq K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0.$$

Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Интегрируя по r неравенство (2.1) леммы 2.1 получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \left[\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \right] dr \\ & \leq K_1 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^{n-1} \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| r dr d\varphi \\ & \quad + K_2 \sum_{\nu=1}^q \sum_{i=0}^n \int_{E_\alpha(R)} L\left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i! a_i^{(\nu)}\right) dr. \end{aligned}$$

Используя лемму 2.2, неравенство (2.11) и

$$(3.2) \quad \left(\sum_{\nu} c_\nu \right)^\gamma \leq \sum_{\nu} c_\nu^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad c_\nu \geq 0,$$

имеем

$$(3.3) \quad \int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_{\rho,i}^{\nu,i}} \left| \frac{w^{(i+2)}(z) - P_\nu^{(i+2)}}{w^{(i+1)}(z) - P_\nu^{(i+1)}} \right| r dr d\varphi \leq K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_{E_\alpha(R)} L \left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right) dr \leq KRA^{1/2} \left(\alpha R, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right).$$

Отсюда учитывая неравенства (2.10), (2.11) и (3.2) имеем

$$(3.4) \quad \int_{E_\alpha(R)} L \left(r, w^{(i)} - P_\nu^{(i)} + i!a_i^{(\nu)} \right) dr \leq KRT^{1/2}(cR, w), \quad R > R_0.$$

Из неравенства (3.1), (3.3), (3.4) получим

$$(3.5) \quad \int_{E_\alpha(R)} \left[\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(r, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_\nu(z)) \right| d\varphi - \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi \right] dr \leq K \left\{ R^{1/2}(cR, w) + T(cR, w) \right\}, \quad R > R_0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.1. $\square$

Доказательство следствия 1.1. Используя теорему о среднем значении в некоторой точке $R^* \in (\alpha^2 R, \alpha R)$ из неравенства (3.5) получим

$$(3.6) \quad \sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(R^*, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(R^* e^{i\varphi}) - P_\nu(R^* e^{i\varphi})) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(R^* e^{i\varphi}) \right| d\varphi + K \left\{ T^{1/2}(cR, w) + \frac{1}{R} T(cR, w) \right\}.$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha, c)$ значений R , зависящих только от α и c , для которых выполняется неравенство

$$T(cR, w) = T\left(\frac{c}{\alpha^2} \alpha^2 R, w\right) \leq \left(\frac{c}{\alpha^2}\right)^{\lambda+1} T(\alpha^2 R, w) \leq K(c, \alpha, \lambda) T(R^*, w).$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1. из работы [5]. С таким R_n из неравенства (3.6) имеем ($R^* = R_n \rightarrow \infty$)

$$\sum_{\nu=1}^q \int_{\Delta(R^*, P_\nu)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(R^* e^{i\varphi}) - P_\nu(R^* e^{i\varphi})) \right| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(R^* e^{i\varphi}) \right| d\varphi + o(T(R^*, w)).$$

Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Нетрудно видеть, что

$$\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, P_k)} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(w(z) - P_k(z)) \right| d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Отсюда и из неравенства (3.5) получим

$$\begin{aligned} & \int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \right\} dr \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \frac{\partial}{\partial \varphi} w^{(n)}(z) \right| d\varphi dr \\ & \quad + K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\} \\ & \leq \int_{E_\alpha(R)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{w^{(n2)}(z)}{w^{(n+1)}(z)} \right| r dr d\varphi + K \left\{ T^{1/2}(cR, w)R + T(cR, w) \right\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 2 работы [6] и неравенство (2.11) имеем

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{k=1}^q [\nu^+(r, P_k) - \nu^-(r, P_k)] \right\} dr \leq KRT(cR, w), \quad R > R_0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1.2 доказывается аналогично доказательству следствия 1.1.

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. The paper studies the rotation of the image of the sphere $|z| = r$ under mappings by functions of the form $w(z) - p(z)$, where $w(z)$ is an entire meromorphic function, while $p(z)$ is a polynomial. In terms of rotations, some analogs of the Nevanlinna Second Fundamental Theorem are established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванlinna, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).
- [2] Г. А. Барсегян, “О геометрической структуре образа круга при отображениях мероморфными функциями”, Матем. сб., **106**, no. 1, 35 – 43 (1978).
- [3] Г. А. Барсегян, “Дефектные значения и структуры поверхностей наложения”, Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем., XII, no. 1, 46 – 53 (1977).
- [4] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение Значений Мероморфных Функций, М., Наука (1970).
- [5] В. П. Петренко, Рост Мероморфных Функций, Харьков: Выш. Школа (1978).
- [6] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Матем. сб., **144** (156), no. 2, 179 – 226 (1981).

Поступила 3 ноября 2010

THE PÓLYA SUM PROCESS: A COX REPRESENTATION

M. RAFLER

TU München, Zentrum Mathematik, M5, Boltzmannstr.3, Garching bei München
E-mail: *rafler@ma.tum.de*

Abstract. In [1], Zessin constructed the so-called Pólya sum process via partial integration. Here we use the technique of integration by parts to the Pólya sum process to derive representations of the Pólya sum process as an infinitely divisible point process and a Cox process directed by an infinitely divisible random measure. This result is related to the question of the infinite divisibility of a Cox process and the infinite divisibility of its directing measure. Finally we consider a scaling limit of the Pólya sum process and show that the limit satisfies an integration by parts formula, which we use to determine basic properties of this limit.

MSC2010 number: 60G55; 60G57; 60D05

Keywords: Point process; Campbell measure; integration by parts; infinite divisibility; Cox process.

1. INTRODUCTION

A huge class of point processes admit an integration by parts formula of their Campbell measure, that is for a point process P on a polish space X ,

$$C_P(h) = \iint h(x, \mu) \mu(dx) P(d\mu) = \iint h(x, \mu + \delta_x) \eta(\mu, dx) P(d\mu)$$

for nonnegative, measurable functions $h : X \times \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}$. In such a case, η is named conditional intensity or Papangelou kernel. They were introduced and studied systematically by Papangelou [2] in connection with point processes on spaces of lines and flats, Kallenberg [3], Nguyen and Zessin [4] in connection with Gibbs processes and Matthes, Warmuth and Mecke [5].

Recently, Zessin [1] gave a construction method for point processes by specifying a Papangelou kernel. As a fundamental example he introduced the Pólya sum process, which is the point process given by the Papangelou kernel

$$(1.1) \quad \eta(\mu, dx) = z(\rho + \mu)(dx),$$

where $z \in (0, 1)$ and ρ is a fixed Radon measure on X . Furthermore he showed that in that way constructed point process has independent increments and that the number of points inside some bounded, measurable set follows a negative binomial distribution.

A point process with the last two properties is already mentioned in [6]. Here we want to demonstrate only by using the integration by parts technique that the Pólya sum process can be represented as a Cox process, where the underlying random intensity measure is a random measure with again independent increments, but with gamma distributed mass inside each bounded, measurable set. This particular directing random measure is given e.g. in Nehring and Zessin [7] as an example for a random measure which is given as the solution of a certain functional equation.

That point of view on the Pólya sum process is in spirit very close to the construction of the negative binomial process in Barndorff-Nielsen and Yeo [8] as a Cox process with some Gamma process as underlying random measure, but however, the latter Gamma processes properties differ to a large extend from those of the former directing measure.

In section 2 we briefly give the setting, review the characterisation of random measures by a functional equation as in [7]. The main theorem, the Cox representation of the Pólya sum process is stated and proven in section 3. In section 4 we demonstrate the more general principle behind that representation. Finally we turn in section 5 to a question of H. Zessin about the behaviour of the Pólya sum process as the parameter z tends to 1 and show that after a suitable scaling, the limit is an infinitely divisible random measure and show that the total mass in bounded regions is gamma distributed.

2. PRELIMINARIES

Here and in the following sections let X be a polish space and denote by $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ its Borel sets as well as by $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_0(X)$ the ring of bounded Borel sets of X . Furthermore let $\mathcal{M}(X)$ and $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$ be the space of locally finite measures and locally finite point measures on X , respectively, each of which is known to be vaguely Polish with the σ -algebras generated by the mappings $\zeta_B(\mu) = \mu(B)$, $B \in \mathcal{B}_0$. We call a probability measure P on $\mathcal{M}(X)$ a random measure and if P is concentrated on $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$ a point process. Finally let $F(X)$ be the set of bounded, non-negative and continuous functions on X and $F_b(X) \subset F(X)$ the subset of those functions in $F(X)$ with bounded support.

For a detailed construction of random measures solving the functional equation $(\Sigma_{L,\alpha})$ below see [7]. Let $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ be a locally finite measure and denote by $\alpha(f) := \int f d\alpha$ for any $f \in F$. Let L be a measure on $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ satisfying

$$(2.1) \quad \int \left[1 - e^{-\nu(f)}\right] L(d\nu) < +\infty, \quad f \in F.$$

We are interested in solution of the functional equation

$$(\Sigma_{L,\alpha}) \quad C_P = C_L \star P + \alpha \otimes P,$$

where $\star$ is a kind of convolution,

$$(C_L \star P)(h) = \iint h(x, \mu + \nu) C_L(\mathfrak{x}, d\nu) P(d\mu) \quad \text{for } h \in F(X \times \mathcal{M}(X)).$$

Theorem 2.1. (*Integration by parts* [7]). *Let $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ and $L \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(X) \setminus \{0\})$ satisfy condition (2.1). Then the functional equation $(\Sigma_{L,\alpha})$ has a unique solution which we denote by $\mathbf{D}_{L,\alpha}$. The random measure $\mathbf{D}_{L,\alpha}$ is infinitely divisible with canonical pair (α, L) .*

Our main interest in the following section lies in measures L which are concentrated on measures of the form $r\delta_x$, $r > 0$, $x \in X$. L will even be given as the image of a product measure $\rho \otimes \tau$ on $X \times \mathbb{R}_+$ under the mapping $\chi : (x, r) \mapsto r\delta_x$. We only assume $\rho \in \mathcal{M}(X)$ and $\int r\tau(\mathfrak{r}) < \infty$, in particular τ does not need to be a finite measure. This result is caused by the Pólya sum process itself, but the structure stays the same if we drop this restriction in section 4.

Given a kernel

$$\eta : \mathcal{M}(X) \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

Zessin [1] gave sufficient conditions on η such that a point process P exists which satisfies the partial integration formula for its Campbell measure C_P ,

$$C_P(h) = \iint h(x, \mu + \delta_x) \eta(\mu, dx) P(d\mu), \quad h \in F.$$

Such point processes are called Papangelou processes according to Zessin. One fundamental example he stated is the point process with conditional intensity (1.1).

Definition 2.1. (*Pólya Sum Process*). *Let $\rho \in \mathcal{M}(X)$ be a locally finite measure and $z \in (0, 1)$ a real number. Then the Pólya sum process $\mathbf{S}_{z,\rho}$ is the Papangelou process for the Papangelou kernel*

$$\eta : \mathcal{M}(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta(\mu, dx) := z(\rho + \mu)(dx).$$

Zessin showed by using partial integration that for $B \in \mathcal{B}_0(X)$, the number of points inside B obeys a negative binomial distribution,

$$\mathbf{S}_{z,\rho}(\zeta_B = k) = (1 - z)^{\rho(B)} \frac{z^k}{k!} \rho(B)^{[k]},$$

where $a^{[m]} = a(a+1) \cdots (a+m-1)$, and furthermore for each finite collection of disjoint, bounded, measurable sets $B_1, \dots, B_n$, $\zeta_{B_1}, \dots, \zeta_{B_n}$ is a family independent random variables.

3. THE COX REPRESENTATION

We begin with the main theorem of this section, which shows in which way the Lévy measure, the basic component of the random measure, transforms under the mapping to the corresponding Cox process.

Theorem 3.1. *Let $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $z \in (0, 1)$ and $L = \chi\gamma$ be the image of γ under the mapping $\chi : X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}(X)$, $(x, r) \mapsto r\delta_x$, where*

$$\gamma := \rho \otimes \tau, \quad \tau(r) := \frac{1}{r} e^{-r^{\frac{1-z}{z}}} 1_{(0, \infty)}(r) dr$$

and define the Cox process

$$P := \int \mathbf{P}_k D_{L,0}(d\kappa).$$

Then $P = \mathbf{S}_{z,\rho}$.

Note that since

$$\int r\tau(dr) = \int_0^\infty e^{-r^{\frac{1-z}{z}}} dr = \frac{z}{1-z} < \infty,$$

L is of first order, hence $\mathbf{D}_{L,0}$ is well defined. The theorem follows directly from lemma 3.1 and proposition 3.1 below, in which we show that both processes satisfy the functional equation $(\Sigma_{L,0})$ for the same Lévy measure L . A second direct consequence of either theorem 3.1 or lemma 3.1 below is that the superposition of realizations of two independent Pólya sum processes is distributed according to a Pólya sum processes,

Corollary 3.1. *Let $z \in (0, 1)$ and $\rho, \sigma \in \mathcal{M}(X)$. Then $\mathbf{S}_{z,\rho+\sigma} = \mathbf{S}_{z,\rho} * \mathbf{S}_{z,\sigma}$.*

A third consequence of lemma 3.1 is a characterization of the Palm distribution $\mathbf{S}_{z,\rho}^x$ of the Pólya sum processes. By integrating with respect to the Campbell measure functions h which depend on its first component only, one recovers the intensity measure $\nu_{\mathbf{S}_{z,\rho}}$ of the Pólya sum process $\mathbf{S}_{z,\rho}$ to be

$$\nu_{\mathbf{S}_{z,\rho}} = \frac{z}{1-z} \rho.$$

From equation (3.1) below we get immediately that $\mathbf{S}_{z,\rho}^x$ is $\mathbf{S}_{z,\rho}$ with a geometrically distributed number of points added at the site x .

Corollary 3.2. *Let $z \in (0, 1)$ and $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Then*

$$\mathbf{S}_{z,\rho}^x = \mathbf{S}_{z,\rho} * \sum_{j \geq 1} (1-z) z^{j-1} \Delta_x^{*j},$$

where Δ_x is the point process which realizes exactly one point at x .

The first step to prove theorem 3.1 is a successive integration by parts.

Lemma 3.1. *Let $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $z \in (0, 1)$ and $L' = \chi\gamma'$, where*

$$\gamma' := \rho \otimes \tau', \quad \tau' := \sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \delta_j.$$

Then $\mathbf{S}_{z,\rho} = \mathbf{D}_{L',0}$.

Proof. Assume $0 \leq h \leq c1_B \otimes 1$, then by applying the integration by parts formula repeatedly and bounded convergence,

$$(3.1) \quad C_{\mathbf{S}_{z,\rho}}(h) = \iint \sum_{j \geq 1} z^j h(x, \mu + j\delta_x) \rho(dx) \mathbf{S}_{z,\rho}(d\mu).$$

On the other hand, $\mathbf{D}_{L',0}$ is characterized by

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{D}_{L',0}}(h) &= \iint h(x, \mu + \nu) C_{L'}(dx, d\nu) \mathbf{D}_{L',0}(d\mu) \\ &= \iint h(x, \mu + \chi(x, r)) \gamma'(dx, dr) \mathbf{D}_{L',0}(d\mu) \\ &= \iint \sum_{j \geq 1} z^j h(x, \mu + j\delta_x) \rho(dx) \mathbf{D}_{L',0}(d\mu). \end{aligned}$$

Therefore $\mathbf{S}_{z,\rho}$ and $\mathbf{D}_{L,0}$ agree. $\square$

Proposition 3.1. *Let P be the Cox process defined in theorem 3.1. Then $P = \mathbf{D}_{L',0}$, where $\mathbf{D}_{L',0}$ is the point process defined in lemma 3.1.*

Proof. Let $h \in F$. We divide the proof into four steps:

I. At first we apply the partial integration to the inner Poisson process, which in fact is a partial integration formula for the Cox process, and observe that we get the Campbell measure $C_{\mathbf{D}_{L,0}}$ of $\mathbf{D}_{L,0}$,

$$\begin{aligned} C_P(h) &= \iint h(x, \mu + \delta_x) \kappa(dx) P(d\mu, d\kappa) \\ &= \iiint h(x, \mu + \delta_x) \kappa(dx) \mathbf{P}_\kappa(d\mu) \mathbf{D}_{L,0}(d\kappa). \end{aligned}$$

Let $g(x, \kappa) := \int h(x, \mu + \delta_x) \mathbf{P}_\kappa(d\mu)$ to get that on the rhs. we obtained $C_{\mathbf{D}_{L,0}}(g)$.

II. Applying partial integration to $C_{\mathbf{D}_{L,0}}$ yields

$$(3.2) \quad C_{\mathbf{D}_{L,0}}(g) = \iiint g(x, \kappa + \nu) \nu(dx) \chi\gamma(d\nu) \mathbf{D}_{L,0}(d\kappa)$$

$$(3.3) \quad = \iiint g(y, \kappa + r\delta_y) r\tau(dr) \rho(dy) \mathbf{D}_{L,0}(d\kappa).$$

Note that the factor r cancels the r^{-1} in the definition of the measure τ .

III. Consider the integrand g with its new arguments. We have to integrate w.r.t. a Poisson process with intensity measure $\kappa + r\delta_y$, but that is only a convolution of two Poisson processes with intensity measures κ and $r\delta_y$, respectively.

$$\begin{aligned} g(y, \kappa + r\delta_y) &= \int h(y, \mu + \delta_y) \mathbf{P}_{\kappa+r\delta_y}(d\mu) \\ &= \iint h(y, \mu + \nu + \delta_y) \mathbf{P}_{r\delta_y}(d\nu) \mathbf{P}_\kappa(d\mu). \end{aligned}$$

IV. We go back to equation (3.3) and observe that the Poisson process $\mathbf{P}_\kappa$ and $\mathbf{D}_{L,0}$ form the Cox process $\mathbf{P}$. The remaining Poisson process $\mathbf{P}_{r\delta_y}$ is mixed with respect to τ and can be evaluated explicitly,

$$\begin{aligned} \iint h(y, \mu + \nu + \delta_y) \mathbf{P}_{r\delta_y}(d\nu) e^{-ar} 1_{0 \leq r < \infty} dr &= \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} h(y, \mu + (n+1)\delta_y) \int_0^\infty r^n e^{-r \frac{1-z}{z}} e^{-r} dr = \sum_{n \geq 1} z^n h(y, \mu + n\delta_y). \end{aligned}$$

For the integrals we have $I_n := \int r^n e^{-r/z} dr = z^{n+1} n!$, which can easily be shown by observing that they satisfy the recursion

$$I_n = znI_{n-1}, \quad I_0 = z. \quad \square$$

4. GENERAL CANONICAL PAIRS

In the previous section we focussed on Lévy measures which were concentrated on the set of measures $\{r\delta_x : r > 0, x \in X\}$, which caused the Cox process to have independent increments. However, we may drop this restriction on the Lévy measure and nevertheless obtain an infinitely divisible point process.

Theorem 4.1. *Let $\mathbf{P}(d\mu) = \int \mathbf{P}_\kappa(d\mu) \mathbf{D}_{L,\alpha}(d\kappa)$ for $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ and a first-order measure L on $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Then $\mathbf{P}$ satisfies the integration by parts formula*

$$C_{\mathbf{P}}(h) = \iint h(x, \mu + \nu) C_{\tilde{L}}(dx, d\nu) \mathbf{P}(d\mu).$$

In particular $\mathbf{P} = \mathbf{D}_{\tilde{L},0}$, where $\tilde{L}$ is the image under the mapping

$$\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}), \quad (\alpha, L) \mapsto \chi(\alpha \otimes \delta_1) + \int \mathbf{P}_\lambda L(d\lambda).$$

Proof. Assume $\alpha = 0$ for the moment. We adapt the proof of proposition 3.1 and outline the changes occurring in the different parts of that proof.

II. We do not make use of the particular form of L in equation (3.2), therefore

$$(4.1) \quad C_{\mathbf{D}_{L,0}}(g) = \iiint g(x, \kappa + \lambda) \lambda(dx) L(d\lambda) \mathbf{D}_{L,0}(d\kappa).$$

III. Consider now the integration of g wrt. λ , then by the partial integration of the Poisson process,

$$\begin{aligned} \int g(x, \kappa + \lambda) \lambda(dx) &= \iint h(x, \mu + \delta_x) \mathbf{P}_{\kappa+\lambda}(d\mu) \lambda(dx) \\ &= \iiint h(x, \mu + \nu + \delta_x) \lambda(dx) \mathbf{P}_\lambda(d\nu) \mathbf{P}_\kappa(d\mu) \\ &= \iiint h(x, \mu + \nu) \nu(dx) \mathbf{P}_\lambda(d\nu) \mathbf{P}_\kappa(d\mu). \end{aligned}$$

Putting all together we obtain

$$C_P(h) = \iiint h(x, \mu + \nu) \nu(dx) \mathbf{P}_\lambda(d\nu) L(d\lambda) P(d\mu).$$

V. Now we drop the restriction $\alpha = 0$. Because of the additive structure of the partial integration we only consider the additional summand to be introduced in equation (4.1),

$$\begin{aligned} \iint g(x, \kappa) \alpha(dx) \mathbf{D}_{L, \alpha} &= \iiint h(x, \mu + \delta_x) \alpha(dx) \mathbf{P}_\kappa(d\mu) \mathbf{D}_{L, \alpha}(d\kappa) \\ &= \iint h(x, \mu + \nu) \chi(\alpha \otimes \delta_1)(d\nu) P(d\mu). \end{aligned} \quad \square$$

Remark 4.1. Consider again the measure L as the image of a measure γ on $X \times \mathbb{R}_+$ under the mapping $(x, r) \mapsto r\delta_x$, in which case P has independent increments. If $\gamma = \rho \otimes \tau$, we obtain $\tilde{L} = \bar{\alpha} + \chi\tilde{\gamma}$, where $\tilde{\gamma} = \rho \otimes \tilde{\tau}$ and

$$\tilde{\tau} = \sum_{j \geq 1} \frac{I_j}{(j-1)!} \delta_j, \quad I_j = \int_0^\infty r^j e^{-r} \tau(dr).$$

Theorem 4.1 states that if the directing measure of a Cox process is infinitely divisible, then this holds for the Cox process and furthermore its Lévy measure is known. This can be reversed directly: If we knew that the Cox process is infinitely divisible and its Lévy measure can be decomposed in a suitable way, then the directing measure is infinitely divisible itself.

Proposition 4.1. Let P be an infinitely divisible Cox process with directing measure P and Lévy measure $\tilde{L}$. If there exist $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ and a measure L on $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ such that $\tilde{L} = \bar{\alpha} + \int \mathbf{P}_\lambda L(d\lambda)$, then $P = \mathbf{D}_{L, \alpha}$.

Proof. Reversing the calculations in the proof of theorem 4.1 with $\mathbf{D}_{L, \alpha}$ replaced by P , we get that P satisfies the integration by parts formula

$$C_P(h) = \iint g(x, \kappa + \lambda) C_L(dx, d\lambda) P(d\kappa) + \iint g(x, \kappa) \alpha(dx) P(d\kappa),$$

where $g(x, \rho) = \int h(x, \mu + \delta_x) \mathbf{P}_\rho(d\mu)$. If $A, B \in \mathcal{B}_0$, then at least for $h = 1_A \otimes e^{-\zeta_B}$ we have

$$g(x, \rho) = 1_A(x) e^{-1_B(x)} e^{-(1-e^{-1})\zeta_B(\rho)},$$

and the set of these functions generates $\mathcal{B} \otimes \sigma(\zeta_B : B \in \mathcal{B}_0)$. $\square$

5. ASYMPTOTIC OF THE PÓLYA SUM PROCESS

We already identified the intensity measure $\nu_{\mathbf{S}_{z, \rho}}$ of the Pólya sum process $\mathbf{S}_{z, \rho}$ as

$$\nu_{\mathbf{S}_{z, \rho}} = \frac{z}{1-z} \rho.$$

Hence as $z \rightarrow 1$, the intensity measure of $\mathbf{S}_{z,\rho}$ explodes. But what happens if we weight each (including multiple) point configuration by $\frac{1-z}{z}$ and consider then the limit as $z \rightarrow 1$?

Definition 5.1. Let $z \in (0, 1)$ and $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Then denote by $\mathbf{P}_z$ the image of $\mathbf{S}_{z,\rho}$ under the mapping

$$\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X), \quad \mu \mapsto \frac{1-z}{z} \mu.$$

Firstly we remark that $\mathbf{P}_z$ inherits the infinite divisibility from $\mathbf{S}_{z,\rho}$ and that its Lévy measure may be obtained directly from that of the Pólya sum process by a proper scaling.

Lemma 5.1. $\mathbf{P}_z = \mathbf{D}_{K,0}$, where $K = \chi\gamma''$ and

$$(5.1) \quad \gamma'' = \rho \otimes \tau_z, \quad \tau_z = \sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \delta_{\frac{1-z}{z}j}.$$

Proof. Let $h \in F$, then by lemma 3.1,

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}_z}(h) &= \iint h\left(x, \frac{1-z}{z}\mu\right) \frac{1-z}{z} \mu(dx) \mathbf{S}_{z,\rho}(d\mu) \\ &= \iint \frac{1-z}{z} \sum_{j \geq 1} z^j h\left(x, \frac{1-z}{z}\mu + j \frac{1-z}{z} \delta_x\right) \rho(dx) \mathbf{S}_{z,\rho}(d\mu) \\ &= \iint h(x, \mu + \nu) \nu(dx) K(d\nu) \mathbf{P}_z(d\mu), \end{aligned}$$

where $K = \chi\gamma''$ is given by (5.1). □

One can show that τ_z converges for a certain class of bounded and continuous function with a growth condition at the origin. We do not need these considerations if we use the Cox representation.

Theorem 5.1. As $z \rightarrow 1$, $\mathbf{P}_z$ has a weak limit $\mathbf{P}$ which is the unique solution of the functional equation

$$(\Sigma_{\tilde{K},0}) \quad C_P = C_{\tilde{K}} \star P,$$

where $\tilde{K} = \chi(\rho \otimes \tilde{\tau})$ and $\tilde{\tau}(dr) = \frac{1}{r} e^{-r} 1_{(0,\infty)} dr$.

Since the unique solution of the functional equation $(\Sigma_{\tilde{K},0})$ is $\mathbf{D}_{K',0}$, we deduce that $\mathbf{P}_z \rightarrow \mathbf{D}_{K',0}$ weakly as $z \rightarrow 1$. **Proof.** Let $h \in F$, then the Cox representation in

theorem 3.1 and the argument in the previous proof show that

$$\begin{aligned} C_{P_z}(h) &= \int h\left(x, \nu + \frac{1-z}{z}(\mu + \delta_x)\right) \mathbf{P}_\lambda(d\mu) \frac{1-z}{z} \lambda(dx) L(d\lambda) P_z(d\nu) \\ &= \int h\left(x, \nu + \frac{1-z}{z}(\mu + \delta_x)\right) P_{r\delta_x}(d\mu) e^{-\frac{1-z}{z}r} \frac{1-z}{z} dr \rho(dx) P_z(d\nu) \\ &= \int h\left(x, \nu + \frac{1-z}{z}(\mu + \delta_x)\right) \mathbf{P}_{\frac{z}{1-z}t\delta_x}(d\mu) e^{-t} dt \rho(dx) P_z(d\nu). \end{aligned}$$

Thus it suffices to show that the inner integrals converge to the Campbell measure of a random measure $\tilde{K}$ [9]. Due to the substitution $t = \frac{1-z}{z}r$, the mixing measure of the inner Poisson process does not depend on z any more. Notice that, as $z \rightarrow 1$, $\mathbf{P}_{\frac{z}{1-z}t\delta_x}$ realizes a point at x with Poisson distributed weight with increasing intensity, but that weight is scaled in the same manner such that we have, since h is bounded,

$$\int h\left(x, \nu + \frac{1-z}{z}(\mu + \delta_x)\right) \mathbf{P}_{\frac{z}{1-z}t\delta_x}(d\mu) \rightarrow h(x, \nu + t\delta_x)$$

as $z \rightarrow 1$. Furthermore note that

$$\iint h(x, \nu + t\delta_x) e^{-t} dt \rho(dx) = \int h(x, \nu + \lambda) C_{\tilde{K}}(dx, d\lambda),$$

where $\tilde{K}$ is given in the theorem. Using [10, thm 1], one immediately sees that $C_{\tilde{K}}$ is indeed the Campbell measure of a random measure. Therefore $\Pr_z$ has a weak limit P as $z \rightarrow 1$ and P is a solution of the functional equation

$$C_P(h) = \iint h(x, \nu + \lambda) C_{\tilde{K}}(dx, d\lambda) P(d\nu). \quad \square$$

Finally we address the distribution of the random variable ζ_B under P for $B \in \mathcal{B}_0$, which can be derived from the integration by parts formula $(\Sigma_{\tilde{K},0})$. Whenever $\rho(B) > 0$, $P(\zeta_B = 0) = 0$ since τ is an infinite measure and therefore $P(\zeta_B = 0) = \exp(-\tilde{K}(\zeta_B > 0))$. Furthermore, since $\tilde{K}$ is concentrated on the set of measures of the form $r\delta_x$, any family $\zeta_{B_1}, \dots, \zeta_{B_n}$ of pairwise disjoint Borel sets $B_1, \dots, B_n$ is independent.

Next we apply $(\Sigma_{\tilde{K},0})$ to the function $h := 1_B \otimes 1_{\{t < \zeta_B \leq t+\varepsilon\}}$ for $t, \varepsilon > 0$ to get information about the distribution of ζ_B :

$$\begin{aligned} P(\zeta_B \in (t, t+\varepsilon]) &= \iint \frac{1_B(x)}{\mu(B)} 1_{\{t < \mu(B) \leq t+\varepsilon\}} \mu(\mathfrak{x}) P(d\mu) \\ &= \rho(B) \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{s+r} 1_{\{s+r \in (t, t+\varepsilon]\}} e^{-r} dr P\zeta_B^{-1}(ds) \\ &= \rho(B) \int_0^{t+\varepsilon} \int_{t-s}^{t+\varepsilon-s} \frac{1}{s+r} 1_{\{s+r \in (t, t+\varepsilon]\}} e^{-r} dr P\zeta_B^{-1}(ds) \\ &= \rho(B) \int_0^{t+\varepsilon} e^s \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{u} e^{-u} du P\zeta_B^{-1}(ds). \end{aligned}$$

The last line shows that ζ_B is a continuous random variable, therefore, if we denote by f_B the density of ζ_B , dividing by ε and $\varepsilon \rightarrow 0$ yields that f_B satisfies

$$f_B(t) = \int_0^t \rho(B) e^{s-t} \frac{1}{t} f_B(s) (ds),$$

which is a Volterra integral equation. By substituting $g(t) = e^{-t} f_B(t)$, we see that g satisfies

$$g(t) = \frac{\rho(B)}{t} \int_0^t g(s) ds,$$

whose solutions are multiples of $t^{\rho(B)-1}$. Using the fact that $P(\zeta_B = 0) = 0$, f_B is the density of the gamma distribution

$$f_B(t) = \frac{t^{\rho(B)-1}}{\Gamma(\rho(B))} e^{-t}$$

is the desired solution.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Zessin, Der Papangelou Prozess, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **44**, 36 – 44 (2009).
- [2] F. Papangelou, The conditional intensity of general point processes and an application to line processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **28**, 207 – 226 (1974).
- [3] O. Kallenberg, On Conditional Intensities of Point Processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **41**, 205 – 220 (1978).
- [4] X. X. Nguyen and H. Zessin, Integral and differential characterisation of the Gibbs process, Math. Nachr., **88**, 105 – 115 (1979).
- [5] K. Matthes, W. Warmuth and J. Mecke, Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh and Hans Zessin, Math. Machr., **88**, 117 – 127 (1979).
- [6] D. Daley and D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes, 1st ed, Springer, (1988).
- [7] B. Nehring and H. Zessin, A path integral representation of the moment measures of the general ideal Bose gas, Preprint (2010).
- [8] O. Barndorff-Nielsen and G. Yeo, Negative Binomial Processes, J. Appl. Prob., **6**, 633 – 647 (1969).
- [9] J. Kerstan, K. Matthes and J. Mecke, Infinitely Divisible Point Processes, John Wiley & Sons (1978).
- [10] H. Wegmann, Characterization of Palm Distributions and Infinitely Divisible random measures, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **39**, 257 – 262 (1977).

Поступила 18 апреля 2011

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 46

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ серия Математика

	номер
Кинематическая мера отрезков содержащихся в области Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН	5
Оптимально равномерное приближение мероморфными функциями в полосе С. Г. АЛЕКСАНЯН	2
Гипотезы о GC_n множествах А. АПОЗЯН	2
Оценка погрешности метода конечных разностей для однофазной задачи препятствия А. АРАКЕЛЯН, Р. БАРХУДАРЯН, М. ПОГОСЯН	3
О SEP -подгруппах n -периодических произведений В. С. АТАБЕКЯН	5
О внешних нормальных автоморфизмах периодических произведений групп В. С. АТАБЕКЯН	6
Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу (C, α, β) Л. Н. ГАЛОЯН	5
Нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц Л. З. ГЕВОРГЯН	5
О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по регулярной системе Хаара С. Л. ГОГЯН	1
Коммутативные медиальные тернарные группоиды С. С. ДАВИДОВ	4
Расширение Гротендика основной теоремы теории Галуа в общих категориях С. Г. ДАЛАЛЯН	1
Описание случайных полей одноточечными конечно-условными распределениями А. С. ДАЛАЛЯН, Б. С. НАХАПЕТЯН	2
Homoclinic orbits for second order nonlinear p -Laplacian difference equations X. DENG, X. LIU, H. SHI, T. ZHOU	3
О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка В. Ж. ДУМАНЯН	2
The generalized entropic property for the pair of operations A. EHSANI	1
О почти гипоеллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности Г. Г. КАЗАРЯН	6
Выделение гладких решений одного класса регулярных	

уравнений в прямоугольнике Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН	4
Разрешимость некоторых сингулярных интегральных уравнений на окружности со сдвигом А. Г. КАМАЛЯН, А. В. САРГСЯН	3
О количестве решений одного типа одномерных псевдодифференциальных уравнений в пространстве Соболева-Слободянского А. Г. КАМАЛЯН, В. В. СИМОНЯН	1
Weighted boundedness for multilinear Littlewood-Paley and Marcinkiewicz operators on Morrey spaces LIU LANZHE	3
Power series with radius of convergence zero – overconvergence, elongations, summability W. LUN, A. STEPANYAN	4
Asymptotic form and infinite product representation of solution of second order initial value problem with a complex parameter and a finite number of turning points H. R. MARASI	4
Об одном классе почти гипоеллиптических многочленов В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН	1
Нетривиальные сверхтождества ассоциативности в полугруппах Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН	3
Сверхтождества дистрибутивности в полугруппах Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН	6
Об абсолютной расходимости рядов Фурье-Хаара характеристических функций К. Р. МУРАДЯН	6
Обратимые медиальные алгебры и группа операций Э. НАЗАРИ	2
The Papangelou process. A concept for Gibbs, Fermi and Bose processes B. NEHRING, H. ZESSIN	6
Об автоморфизмах и вложениях свободных периодических групп А. С. ПАЙЛЕВАНЯН, Х. Р. РОСТАМИ	2
Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре А. И. ПЕТРОСЯН	5
О вращении образа окружности при отображении мероморфной функцией В. Г. ПЕТРОСЯН	6
The Pólya sum process: A Cox representation M. RAFLER	6
Bivariate mean value interpolation on circles K. R. FARD	1
Homogeneous geodesics and the critical points of the restricted Finsler function P. HAVIBI, D. LATIFI, M. TOOMANIAN	1
Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором Х. А. ХАЧАТРЯН	2
On the integral of mean curvature of a flattened convex body in space forms F. CHEN, C. YANG	5

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 6, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН, О внешних нормальных автоморфизмах периодических произведений групп.....	3
Г. Г. КАЗАРЯН, О почти гипоеллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности	11
Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН, Сверхтождества дистрибутивности в полугруппах	31
К. Р. МУРАДЯН, Об абсолютной расходимости рядов Фурье-Хаара характеристических функций	41
В. NEHRING, H. ZESSIN, The Papangelou process. A concept for Gibbs, Fermi and Bose processes	49
В. Г. ПЕТРОСЯН, О вращении образа окружности при отображении мероморфной функцией	67
М. RAFLER, The Pólya sum process: A Cox representation	77
Содержание тома 46, номера 1 – 6, 2011	87

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 6, 2011

CONTENTS

V. S. ATABEKYAN, A. L. GEVORGYAN, On outer normal automorphisms of periodic products of groups	3
H. G. GHAZARYAN, On almost hypoelliptic polynomials increasing at infinity	11
YU. M. MOVSISYAN, T. A. HAKOBYAN, Distributive hyperidentities in semigroups	31
K. R. MURADYAN, On absolute divergence of Fourier-Haar series of characteristic functions	41
B. NEHRING, H. ZESSIN, The Papangelou process. A concept for Gibbs, Fermi and Bose processes	49
V. G. PETROSYAN, On rotation of the image of sphere under mapping by a meromorphic function	67
M. RAFLER, The Pólya sum process: A Cox representation	77
Author Index to Volume 46, numbers 1 – 6, 2011	87