

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Մ. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МЕРА ОТРЕЗКОВ СОДЕРЖАЩИХСЯ В ОБЛАСТИ

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет ¹
E-mails: *narine78@ysu.am*; *victo@aaa.am*

Аннотация. В статье получена формула для вычисления кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ множества отрезков постоянной длины l целиком лежащих в ограниченной, выпуклой области $\mathbf{D}$ на евклидовой плоскости. Эта формула позволяет найти явный вид кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для тех областей $\mathbf{D}$, для которых известно распределение длины хорды. В частности, используя эту формулу, выводятся явные выражения для меры $K(\mathbf{D}, l)$ для круга, правильного треугольника, прямоугольника и правильного пятиугольника.

Ключевые слова: функция распределения длины хорды; множество отрезков; кинематическая мера; ограниченное выпуклое множество.

Mathematics Subject Classification 2010: 60D05; 52A22; 53C65

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S - отрезок длины l и пусть $\mathbf{D}$ - ограниченная, выпуклая область на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, с площадью $\|\mathbf{D}\|$ и периметром $|\partial\mathbf{D}|$. Как хорошо известно [1], [3], задача нахождения кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ отрезков постоянной длины l , содержащихся в $\mathbf{D}$, имеет непростое решение, существенно зависящее от формы области. Известны явные выражения для $K(\mathbf{D}, l)$ лишь в двух случаях [1], [2]. В первом случае $\mathbf{D}$ является кругом $\mathbf{C}_d$, и, при этом, очевидно $K(\mathbf{C}_d, l) = 0$, если $d \leq l$, а при $d \geq l$

$$(1.1) \quad K(\mathbf{C}_d, l) = \frac{\pi d^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{l}{d} - \frac{l}{d} \sqrt{1 - \frac{l^2}{d^2}} \right].$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1A-125

Во втором случае $\mathbf{D}$ - прямоугольник $\mathbf{R}_{a,b}$ со сторонами a, b , причем $K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = 0$, если l не меньше длины $\sqrt{a^2 + b^2}$ диагонали прямоугольника $\mathbf{R}_{a,b}$ [1, 2], а если $l \leq \min(a, b)$, то

$$(1.2) \quad K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi a b - 2l(a + b) + l^2.$$

В настоящей статье получена формула, позволяющая вычислять кинематическую меру $K(\mathbf{D}, l)$ множества отрезков постоянной длины l , полностью лежащих в $\mathbf{D}$, посредством функции распределения длины хорды области $\mathbf{D}$. Полученная формула позволяет находить явный вид кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для областей $\mathbf{D}$ с наперед известным распределением длины хорды. В частности, с использованием этой формулы выводятся явные выражения для кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ для круга, правильного треугольника, прямоугольника и правильного пятиугольника.

2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МЕРА

Пусть $S_1 = M S$ - образ отрезка S при евклидовом движении $M \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ - группа всех евклидовых движений на плоскости. Для локально компактной группы $\mathfrak{M}$ существует локально конечная мера Хаара, то есть, локально конечная мера Бореля, которая инвариантна как слева, так и справа и не является тождественным нулем. Отрезок S_1 можно определять двумя координатами (g, t) , где $g \in \mathbb{G}$ ($\mathbb{G}$ - пространство всех прямых на плоскости) прямая, на которой лежит отрезок S_1 , а t - одномерная координата центра отрезка S_1 на прямой g . В пространстве $\mathbb{G} \times \mathbf{R}$ определим меру $m(\cdot)$ по его элементу следующим образом:

$$m(dS_1) = dg dt,$$

где dg - локально конечная мера в пространстве $\mathbb{G}$, инвариантная относительно группы $\mathfrak{M}$, а dt - одномерная лебегова мера на g . Мера $m(\cdot)$ называется кинематической мерой на группе $\mathfrak{M}$ [1], [3].

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом параграфе получена основная формула для вычисления кинематической меры $K(\mathbf{D}, l)$ в терминах функции распределения длины хорды для области $\mathbf{D}$.

Очевидно, что $K(\mathbf{D}, l) = 0$, если $l \geq \text{diam}(\mathbf{D})$, где $\text{diam}(\mathbf{D})$ - диаметр области $\mathbf{D}$, т.е.

$$\text{diam}(\mathbf{D}) = \max\{\rho(x, y) : x, y \in \mathbf{D}\},$$

где $\rho(x, y)$ - расстояние между точками x и y . Поэтому всюду в данной статье рассматривается случай $l \leq \text{diam}(\mathbf{D})$. Очевидно, в этом случае

$$K(\mathbf{D}, l) = \iint_{\{(g, t) : S_1(g, t) \subset \mathbf{D}\}} dg dt = \int_{[\mathbf{D}]} (\chi(g) - l)^+ dg,$$

где $[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$ - множество прямых, пересекающих область $\mathbf{D}$, $\chi(g) = g \cap \mathbf{D}$ - хорда в $\mathbf{D}$, а

$$x^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} (3.1) \quad K(\mathbf{D}, l) &= \int_{\chi(g) > l} \chi(g) dg - l \int_{\chi(g) > l} dg \\ &= \pi \|\mathbf{D}\| - G(l) - l |\partial \mathbf{D}| [1 - F_{\mathbf{D}}(l)], \end{aligned}$$

где

$$G(x) = \int_{\chi(g) \leq x} \chi(g) dg,$$

а $F_{\mathbf{D}}(\cdot)$ - функция распределения длины хорды для области $\mathbf{D}$, определяемая по формуле

$$F_{\mathbf{D}}(y) = \frac{1}{|\partial \mathbf{D}|} \int_{\chi(g) \leq y} dg.$$

Преобразуем формулу (3.1) для меры $K(\mathbf{D}, l)$ к более удобному для применений виду. Для этого докажем следующую формулу:

$$(3.2) \quad G(x) = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u) du,$$

где $f_{\mathbf{D}}(x)$ - плотность распределения длины хорды области $\mathbf{D}$, т.е. $f_{\mathbf{D}}(x) = F'_{\mathbf{D}}(x)$ - первая производная функции распределения (см. [10]). Далее, для вычисления производной функции $G(x)$ заметим, что

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x < \chi(g) \leq x + \Delta x} \chi(g) dg \\ &= (x + \theta \Delta x) |\partial \mathbf{D}| \frac{F_{\mathbf{D}}(x + \Delta x) - F_{\mathbf{D}}(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Затем, полагая, что функция распределения $F_{\mathbf{D}}(x)$ обладает плотностью $f_{\mathbf{D}}(x)$, устремим в формуле (3.3) $\triangle x$ к нулю, получим

$$G'(x) = |\partial \mathbf{D}| x f_{\mathbf{D}}(x),$$

откуда следует, что

$$G(x) = G(0) + |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u) du = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u) du,$$

поскольку $G(0) = \int_{\chi(g) \leq 0} \chi(g) dg = 0$.

Теперь преобразуем (3.2) интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} G(x) &= |\partial \mathbf{D}| \int_0^x u f_{\mathbf{D}}(u) du = -|\partial \mathbf{D}| \int_0^x u d[1 - F_{\mathbf{D}}(u)] \\ &= -x |\partial \mathbf{D}| [1 - F_{\mathbf{D}}(x)] + |\partial \mathbf{D}| \int_0^x [1 - F_{\mathbf{D}}(u)] du. \end{aligned}$$

Следовательно

$$(3.4) \quad G(x) = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x [1 - F_{\mathbf{D}}(u)] du - x |\partial \mathbf{D}| [1 - F_{\mathbf{D}}(x)].$$

Наконец, подставляя (3.4) в формулу (3.1) для $K(\mathbf{D}, l)$ получаем основной результат параграфа:

$$(3.5) \quad K(\mathbf{D}, l) = \pi \|\mathbf{D}\| - l |\partial \mathbf{D}| + |\partial \mathbf{D}| \int_0^l F_{\mathbf{D}}(u) du.$$

Следовательно, если известен явный вид функции $F_{\mathbf{D}}(u)$ при $0 \leq u \leq l$, то используя (3.5) можно вывести явное выражение для $K(\mathbf{D}, l)$. Эффективность этого подхода показана в следующих параграфах статьи.

4. СЛУЧАЙ КРУГА

В случае круга $\mathbf{D} = \mathbf{C}_d$ диаметра d функция распределения длины хорды имеет вид [8]

$$(4.1) \quad F_{\mathbf{C}_d}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{d^2}}, & \text{если } 0 < y \leq d, \\ 1, & \text{если } y > d. \end{cases}$$

Следовательно, подставляя (4.1) в (3.5), получаем

$$(4.2) \quad K(\mathbf{C}_d, l) = \frac{\pi d^2}{4} - \pi d \int_0^l \sqrt{1 - \frac{u^2}{d^2}} du.$$

Так как

$$(4.3) \quad \int_0^l \sqrt{1 - \frac{u^2}{d^2}} du = \frac{d}{2} \arcsin \frac{l}{d} + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{d^2}},$$

то подстановкой (4.3) в (4.2) получим кинематическую меру $K(\mathbf{C}_d, l)$ при $l \leq d$, т.е. формулу (1.1).

5. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В случае правильного треугольника Δ со стороной a функция распределения длины хорды имеет вид [4, 6, 8]

$$(5.1) \quad F_{\Delta}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0, \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \frac{y}{a}, & \text{если } 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}a}{2}, \\ \frac{y}{2a} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{y}{a} + \frac{2y}{\sqrt{3}a} \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2y} + \frac{\sqrt{4y^2 - 3a^2}}{2y}, & \text{если } \frac{a\sqrt{3}}{2} \leq y \leq a, \\ 1, & \text{если } y \geq a. \end{cases}$$

Подставляя значения (5.1) функции $F_{\Delta}(u)$ в (3.5), получаем следующие выражения:

5.1. Случай $0 \leq l \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$K(\Delta, l) = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4} - 3al + l^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \right].$$

5.2. Случай $\frac{a\sqrt{3}}{2} \leq l \leq a$.

$$\begin{aligned} K(\Delta, l) &= \frac{5\pi a^2 \sqrt{3}}{8} - 3al + \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi \sqrt{3}}{3} \right) l^2 \\ &\quad + 2\sqrt{3} \int_{a\sqrt{3}/2}^l u \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2u} du + \frac{3a}{2} \int_{a\sqrt{3}/2}^l \frac{\sqrt{4u^2 - 3a^2}}{u} du. \end{aligned}$$

Однако,

$$\int_{a\sqrt{3}/2}^l u \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2u} du = -\frac{3\pi a^2}{16} + \frac{l^2}{2} \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2l} + \frac{\sqrt{3}a}{8} \sqrt{4l^2 - 3a^2}$$

и

$$\int_{a\sqrt{3}/2}^l \frac{\sqrt{4u^2 - 3a^2}}{u} du = \sqrt{4l^2 - 3a^2} - a\sqrt{3} \arccos \frac{a\sqrt{3}}{2l}.$$

Тем самым

$$K(\Delta, l) = \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi \sqrt{3}}{3} \right) l^2 - 3al + \frac{9a}{4} \sqrt{4l^2 - 3a^2} + \left(l^2 \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \right) \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2l} - \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}.$$

Таким образом, в случае правильного треугольника кинематическая мера $K(\Delta, l)$ имеет вид

$$K(\Delta, l) = \begin{cases} \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4} - 3al + l^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \right] & \text{при } 0 \leq l \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}, \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi \sqrt{3}}{3} \right) l^2 - 3al + \frac{9a}{4} \sqrt{4l^2 - 3a^2} + \left(l^2 \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \right) \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2l} - \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} & \text{при } \frac{a\sqrt{3}}{2} \leq l \leq a. \end{cases}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l \uparrow \frac{a\sqrt{3}}{2}} K(\Delta, l) = \lim_{l \downarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}} K(\Delta, l) = \frac{a^2}{16} (6\pi\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 9)$$

и

$$K(\Delta, a) = 0.$$

6. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

В случае прямоугольника $\mathbf{R}_{a,b}$ со сторонами $a \leq b$ мера $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ различного вида в следующих трех случаях:

- 1) $0 \leq l \leq a$,
- 2) $a \leq l \leq b$,
- 3) $b \leq l \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Для нахождения вида меры $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ в этих случаях, отметим, что, как хорошо известно [5], [6], [8], [9], функция распределения длины хорды для прямоугольника имеет вид

$$(6.1) \quad F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0, \\ \frac{y}{a+b}, & \text{если } 0 \leq y \leq a, \\ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y}, & \text{если } a \leq y \leq b, \\ 1 - \frac{y}{a+b} + \left(\frac{a\sqrt{y^2 - b^2}}{(a+b)y} + \frac{b\sqrt{y^2 - a^2}}{(a+b)y} \right), & \text{если } b \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1, & \text{если } y \geq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Подставляя значения (6.1) функции $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$ в (3.5), получаем следующие формулы.

6.1. **Случай** $0 \leq l \leq a$.

$$\begin{aligned} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) &= \pi a b - 2(a+b)l + 2(a+b) \int_0^l u \frac{1}{a+b} du \\ &= \pi a b - 2(a+b)l + l^2, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (1.2) (см. также [1]).

6.2. **Случай** $a \leq l \leq b$. Вновь пользуясь формулой (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$, из (6.1) получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) &= \pi a b - 2(a+b)l \\ &+ 2(a+b) \left[\int_0^a u \frac{1}{a+b} du + \frac{a}{a+b} (l-a) + \frac{b}{a+b} \int_a^l \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du \right] \\ &= \pi a b - a^2 - 2bl - 2ab \arccos \frac{a}{l} + 2b \sqrt{l^2 - a^2}, \end{aligned}$$

так как

$$(6.2) \quad \int_a^l \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{l^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{l}.$$

6.3. **Случай** $b \leq l \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Пользуясь формулой (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{R}_{a,b}}(y)$, применяя (6.2) из (6.1) получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) &= \pi a b - 2(a+b)l + 2(a+b) \left[\int_0^a u \frac{1}{a+b} du + \frac{a}{a+b} (b-a) \right. \\ &+ \left. \frac{b}{a+b} \int_a^l \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du + (l-b) - \int_0^a u \frac{1}{a+b} du + \frac{a}{a+b} \int_b^l \frac{\sqrt{u^2 - b^2}}{u} du \right] \\ &= \pi a b - a^2 - b^2 - 2ab \left[\arccos \frac{a}{l} + \arccos \frac{b}{l} \right] - l^2 + 2b \sqrt{l^2 - a^2} + 2a \sqrt{l^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае прямоугольника кинематическая мера $K(\mathbf{R}_{a,b}, l)$ имеет вид (см. [2])

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \begin{cases} \pi a b - 2(a+b)l + l^2, & \text{если } 0 \leq l \leq a, \\ \pi a b - a^2 - 2bl - \\ - 2ab \arccos \frac{a}{l} + 2b \sqrt{l^2 - a^2}, & \text{если } a \leq l \leq b, \\ \pi a b - a^2 - b^2 - l^2 - \\ - 2ab \left[\arccos \frac{a}{l} + \arccos \frac{b}{l} \right] \\ + 2b \sqrt{l^2 - a^2} + 2a \sqrt{l^2 - b^2}, & \text{если } b \leq l \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l \uparrow a} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \lim_{l \downarrow a} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi a b - a^2 - 2 a b,$$

$$\lim_{l \uparrow b} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \lim_{l \downarrow b} K(\mathbf{R}_{a,b}, l) = \pi a b - a^2 - 2 b^2 - 2 a b \arccos \frac{a}{b} + 2 b \sqrt{b^2 - a^2}$$

и

$$K(\mathbf{R}_{a,b}, \sqrt{a^2 + b^2}) = 0.$$

7. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

В случае правильного пятиугольника $\mathbf{P}_a$ со стороной a вид меры $K(\mathbf{P}_a, l)$ различен в следующих случаях.

- 1) $0 \leq l \leq a$,
- 2) $a \leq l \leq \frac{a}{2} \sqrt{5} + 2 \sqrt{5}$,
- 3) $\frac{a}{2} \sqrt{5} + 2 \sqrt{5} \leq l \leq \frac{(\sqrt{5}+1)a}{2}$.

При этом, нетрудно проверить, что площадь $\mathbf{P}_a$ равна

$$S(\mathbf{P}_a) = \frac{\sqrt{5} a^2}{4} \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}},$$

и, как хорошо известно [6, 9], функция распределения длины хорды для правильного пятиугольника имеет вид

$$F_{\mathbf{P}_a}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0, \\ \frac{y}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5 \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right), & \text{если } 0 \leq y \leq a, \\ 1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})y}{5a \sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)y}{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} \right), & \text{если } a \leq y \leq \frac{a}{2} \sqrt{5} + 2 \sqrt{5}, \\ 1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})y}{5a \sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)y}{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} \right) - \frac{(\sqrt{5}+1)^2 y}{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arccos \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2} \sin \left(\arccos \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} \right), & \text{если } \frac{a}{2} \sqrt{5} + 2 \sqrt{5} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} a, \\ 1, & \text{если } y \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} a. \end{cases}$$

7.1. **Случай** $0 \leq l \leq a$. Используя (3.5) и приведенное выражение для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, получим

$$K(\mathbf{P}_a, l) = \frac{\sqrt{5} \pi a^2}{4} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - 5al + \frac{5l^2}{4} - \frac{\pi l^2 (\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

7.2. **Случай** $a \leq l \leq \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Вновь пользуясь (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, а также равенством

$$\cos \left(\arcsin \frac{a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4l} \right) = \frac{\sqrt{16l^2 - a^2(10 + 2\sqrt{5})}}{4l},$$

получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5} \pi a^2}{4} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \frac{15a^2}{4} \\ &\quad - \frac{2\pi a^2 (\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \frac{\pi (5 + 3\sqrt{5})}{2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} l^2 \\ &\quad - \frac{10(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \int_a^l u \arcsin \frac{a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4u} du \\ &\quad - \frac{5a(\sqrt{5} + 1)}{8} \int_a^l \frac{\sqrt{16u^2 - a^2(10 + 2\sqrt{5})}}{u} du. \end{aligned}$$

Для упрощения этой формулы воспользуемся простыми равенствами

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin z}{z^3} dz &= -\frac{1}{2z^2} \arcsin z - \frac{\sqrt{1 - z^2}}{2z}, \\ \int \frac{\sqrt{z^2 - c^2}}{z} &= \sqrt{z^2 - c^2} - c \arccos \frac{c}{z}, \\ \arcsin \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} &= \frac{2\pi}{5}, \quad \arccos \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно получаем

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5} \pi a^2}{4} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \frac{\pi a^2 (\sqrt{5} + 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \\ &\quad - \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \left(l^2 - \frac{1}{8} a^2 (10 + 2\sqrt{5}) \right) \arcsin \frac{a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4l} \\ &\quad + \frac{l^2 \pi (5 + 3\sqrt{5})}{2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} - \frac{15a(\sqrt{5} + 1)}{16} \sqrt{16l^2 - a^2(10 + 2\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

7.3. **Случай** $\frac{a}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} \leq l \leq \frac{(\sqrt{5}+1)a}{2}$. Вновь пользуясь (3.5) и выражением для $F_{\mathbf{P}_a}(y)$, а также тождеством

$$\sin \left(\arccos \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2l(\sqrt{5}-1)} \right) = \frac{\sqrt{4l^2(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}{2l(\sqrt{5}-1)},$$

получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{15a^2}{4} \\ &\quad - \frac{2\pi a^2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} l^2 \\ &\quad - \frac{10(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_a^l u \arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4u} du \\ &\quad - \frac{5a(\sqrt{5}+1)}{8} \int_a^l \frac{\sqrt{16u^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}{u} du \\ &\quad - \frac{5(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_{\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}}^l u \arccos \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2u(\sqrt{5}-1)} du \\ &\quad + \frac{5a(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^3} \int_{\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}}^l \frac{\sqrt{4(\sqrt{5}-1)^2 u^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}{u} du. \end{aligned}$$

Подстановкой простых равенств, использованных при рассмотрении предыдущего случая, а также равенств

$$\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{\pi}{5},$$

формулу для $K(\mathbf{P}_a, l)$ приведем к следующей упрощенной форме:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}_a, l) &= \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{\pi a^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \\ &\quad - \frac{5(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \left(l^2 - \frac{1}{8} a^2 (10+2\sqrt{5}) \right) \arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4l} \\ &\quad - \frac{l^2 \pi (5+\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{15a(\sqrt{5}+1)}{16} \sqrt{16l^2 - a^2(10+2\sqrt{5})} \\ &\quad + 5(\sqrt{5}+1) \left(\frac{l^2(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{a^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)^3} \right) \arcsin \frac{a \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2l(\sqrt{5}-1)} \\ &\quad + \frac{15a(\sqrt{5}+1)}{(2\sqrt{5}-1)^3} \sqrt{4(\sqrt{5}-1)^2 l^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

При этом, нетрудно проверить, что

$$\lim_{l \uparrow a} K(\mathbf{P}_a, l) = \lim_{l \downarrow a} K(\mathbf{P}_a, l) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi (27 - 7\sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} - 15 \right),$$

$$\lim_{l \uparrow \frac{a}{2}} K(\mathbf{P}_a, l) = \lim_{l \downarrow \frac{a}{2}} K(\mathbf{P}_a, l)$$

и

$$K\left(\mathbf{P}_a, \frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right) = 0.$$

Замечание 7.1. Выше вычислены точные значения меры $K(\mathbf{D}, l)$ в некоторых частных случаях, для которых известен явный вид функции распределения длины хорды. Однако, в [9] дан явный вид для функции распределения длины хорды для любого правильного многоугольника, а, в частности, для правильного шестиугольника соответствующий результат можно найти в [7]. Следовательно, пользуясь результатом [9] можно вычислить меру $K(\mathbf{D}, l)$ для любого правильного многоугольника.

Abstract. The paper proves a formula for calculation of the kinematic measure $K(\mathbf{D}, l)$ of set of segments with constant length l , entirely contained in a bounded convex domain $\mathbf{D}$ of the Euclidean space. The obtained formula permits to find an explicit form for the kinematic measure $K(\mathbf{D}, l)$ for the domains $\mathbf{D}$ with known chord length distribution. In particular, application of the obtained formula gives explicit expressions for $K(\mathbf{D}, l)$ in the disc, regular triangle, rectangle and regular pentagon.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Сантало. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности* (Наука, Москва, 1983).
- [2] Ren De-Lin. *Topics in Integral Geometry*, Series in Pure Mathematics, **19** (World Scientific, Publishing CO., 1994).
- [3] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008).
- [4] R. Sulanke. "Die verteilung der sehnennlängen an ebenen und räumlichen figuren Math. Nachr., **23**, 51-74 (1961).
- [5] W. Gille. "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases Exp. Techn. Phys., **36**, 197-208 (1988).
- [6] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян. "Функции распределения длины хорды для многоугольников", Известия НАН Армении, сер. Математика, **40** (4), 43-56 (2005).
- [7] Г. С. Арутюнян. "Функция распределения длины хорды для правильного шестиугольника", Ученые Записки Ереванского государственного университета, **1**, 17-24 (2007).
- [8] D. Stoyan and H. Stoyan, *Fractals, Random Shapes and Point Fields* (John Wiley& Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994).

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН

- [9] H. Harutyunyan and V. Ohanyan, “Chord length distribution function for regular polygons”, *Advances in Applied Probability*, **41**, 358-366 (2009).
- [10] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, “Случайная копия отрезка внутри выпуклой области”, *Известия НАН Армении, Математика*, **45** (6), 348-356 (2010).

Поступила 12 февраля 2011

О *СЕР*-ПОДГРУППАХ n -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский Государственный Университет

E-mail: avagujan@ysu.am

Аннотация. Хорошо известно, что произвольная группа G_1 является *СЕР*-подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения группы G_1 с любой группой G_2 . В работе получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого множитель G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, является *СЕР*-подгруппой. В частности, согласно полученному критерию, любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является *СЕР*-подгруппой n -периодического произведения $G_1 * G_2$ для произвольной группы G_2 .

MSC2010 number: 20F05, 20F50, 20E06.

Ключевые слова: n -периодическое произведение; *СЕР*-подгруппа; некоммутативный аналог группы рациональных чисел.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] С. И. Адяном для каждого нечетного $n \geq 665$ была построена новая операция умножения групп, названная *периодическим произведением данного периода n* или *n -периодическим произведением* (см. также [2]). Эти операции умножения обладают многими свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойством наследственности по подгруппам. Последнее свойство означает, что для любых подгрупп H_i сомножителей G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ тождественные вложения $H_i \rightarrow G_i$ продолжают до вложения n -периодического произведения $\prod_{i \in I} {}^n H_i$ семейства подгрупп $\{H_i\}_{i \in I}$ в n -периодическое произведение $\prod_{i \in I} {}^n G_i$, т.е. подгруппы сомножителей порождают в $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ свое n -периодическое произведение.

Построенные операции периодического произведения групп решают проблему А. И. Мальцева о существовании ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции (см. также [3], [4]). Доказано также (см. [5]), что периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ данного семейства групп является простой группой в том и только том случае, когда каждый множитель этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$. Этот замечательный критерий простоты позволяет строить новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk , где $k > 1$ и $n \geq 665$ и, тем самым, получить положительный ответ на вопрос: может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное количество неизоморфных неабелевых простых групп? (см. проблему 23 монографии [6]).

Работой [1] открылись новые возможности в теории периодических групп. В ней показано, что теория Новикова-Адяна (см. [7], [8]) может быть распространена на изучение факторизаций свободных произведений по специально выбранным соотношениям вида $X^n = 1$. Именно, построение теории на базе свободных произведений позволяет ввести понятие n -периодических произведений групп (подробный обзор см. в [9]).

В настоящей работе мы исследуем свойства n -периодических произведений групп, связанные с так называемыми *CEP*-подгруппами (Congruence Extension Property). Речь идет о вполне естественном свойстве подгруппы: любую конгруэнцию на данной подгруппе H можно расширить до некоторой конгруэнции на всей группе G (следовательно, любая факторгруппа подгруппы H группы G естественным образом вкладывается в некоторую факторгруппу всей группы G).

В литературе для *CEP*-подгруппы помимо *E*-подгруппы используется также название *Q-подгруппа* (см. [13], [14]). Понятие *CEP*-подгруппы было введено Б. Нейманом в работе [10], где указанные подгруппы названы *E-подгруппами*.

Определение 1.1. *Подгруппа H группы G называется CEP-подгруппой, если для любой нормальной подгруппы N_H группы H существует нормальная подгруппа N_G группы G такая, что $H \cap N_G = N_H$.*

В частности, в работе [11] (см. также [12]) доказано, что в абсолютно свободной группе F_2 ранга 2 с порождающими a, b подгруппа порожденная элементами $[a, b^{2^i-1}ab^{-(2^i-1)}]$, ($i = 1, 2, \dots$) является СЕР-подгруппой, изоморфной свободной группе F_∞ бесконечного ранга. Соотношения

$$H_1 = H/N_H = H/H \cap N_G \simeq HN_G/N_G < G/N_G = G_1$$

показывают, что справедлива

Лемма 1.1. *Подгруппа H группы G является СЕР-подгруппой тогда и только тогда, когда любой эпиморфизм $H \rightarrow H_1$ на произвольную группу H_1 можно продолжить до эпиморфизма $G \rightarrow G_1$ на некоторую группу G_1 , содержащую H_1 в качестве подгруппы.*

Лемма 1.2. *Если подгруппа H группы G является СЕР-подгруппой, то любая сопряженная с H подгруппа группы G также является СЕР-подгруппой.*

Легко понять, что центр любой группы является СЕР-подгруппой и что любая простая подгруппа данной группы – СЕР-подгруппа. Из леммы 1.1 очевидно следует, что любой ретракт H данной группы G тоже является СЕР-подгруппой (подгруппа H группы G называется ретрактом, если тождественное отображение $1_H : H \rightarrow H$ продолжается до некоторого гомоморфизма $\alpha : G \rightarrow H$).

Запись $H \leq_{\text{СЕР}} G$ означает, что H является СЕР-подгруппой группы G , или, что подгруппа H СЕР-вложена в группу G . Из определения СЕР-подгруппы легко следует, что если $H \leq_{\text{СЕР}} G$ и $G \leq_{\text{СЕР}} F$, то $H \leq_{\text{СЕР}} F$, т.е. свойство быть СЕР-подгруппой транзитивно.

Одним из важных результатов о СЕР-подгруппах является теорема А. Ю. Ольшанского из работы [15], согласно которой произвольная неэлементарная гиперболическая группа содержит СЕР-подгруппу, изоморфную абсолютно свободной группе F_∞ бесконечного ранга.

Как показано в работах [16], [17], свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода богаты свободными периодическими подгруппами. В работах [13], [14], [18], [19] построены СЕР-подгруппы свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода, изоморфные свободным бернсайдовым группам $B(\infty, n)$ бесконечного ранга.

В дальнейшем через $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ будем обозначать n -периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ введенное Адяном в работах [1], [2] для всех нечетных $n \geq 665$. В случае двух множителей будем употреблять запись $G_1 * {}^n G_2$.

Из определений прямого и свободного произведения непосредственно следует, что произвольная группа G_1 является CEP -подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения $G_1 * G_2$ группы G_1 с любой группой G_2 . В работе получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого множитель G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, является CEP -подгруппой. В частности, будет показано, что любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является CEP -подгруппой n -периодического произведения $G_1 * {}^n G_2$ для произвольной группы G_2 , а также, что для любого простого числа p и для любой группы G группа $A_p(m, n)$ является CEP -подгруппой n -периодического произведения $A_p(m, n) * {}^n G$ (группа $A_p(m, n)$ есть фактор группа группы $A(m, n)$ – некоммутативного аналога группы рациональных чисел по подгруппе $\langle d^p \rangle$, где d – порождающий элемент центра группы $A(m, n)$ (см. [20])).

2. CEP -множители ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Теорема 2.1. *Множитель G_1 n -периодического произведения $G_1 * {}^n G_2$ групп G_1 и G_2 , где $|G_2| > 2$, является CEP -подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n , порожденную всеми n -ми степенями элементов группы G_1 .*

Доказательство. Предположим, что G_1 является CEP -подгруппой группы $G = G_1 * {}^n G_2$. Пусть N_{G_1} – нетривиальная нормальная подгруппа группы G_1 , а N такая нормальная подгруппа группы G , что имеет место равенство $N_{G_1} = N \cap G_1$. Выберем произвольные нетривиальные элементы a, g, b_1, b_2 такие, что $a \in N_{G_1} = N \cap G_1$, $g \in G_1$ и $b_1, b_2 \in G_2$, где $b_1 \neq b_2$ (по условию $|G_2| > 2$). Рассмотрим элемент $b_1^{-1} a b_1 b_2^{-1} a b_2 g$. Заметим, что он не равен произведению двух инволюций в свободном произведении $G_1 * G_2$, т.е. – в ранге 0, так как из теоремы о нормальной форме для свободных произведений непосредственно следует, что один из циклических сдвигов произведения двух инволюций имеет вид $i_1 z i_2 z^{-1}$, где

i_1 и i_2 инволюции из сомножителей произведения $G_1 * G_2$, а слово z либо пусто, либо $|i_1 z i_2 z^{-1}| = 2|z| + 2$. Значит слово $b_1^{-1} a (b_1 b_2^{-1}) a b_2 g$ над алфавитом свободного произведения $G_1 * G_2$ есть элементарный период ранга 1. Поскольку $a \in N$, то $(b_1^{-1} a b_1 b_2^{-1} a b_2 g)^n \equiv g^n \pmod{N}$.

Так как слово $b_1^{-1} a (b_1 b_2^{-1}) a b_2 g$ является элементарным периодом ранга 1, то, согласно определению n -периодического произведения, в группе G выполняется соотношение $(b_1^{-1} a b_1 b_2^{-1} a b_2 g)^n = 1$. Следовательно $g^n \equiv 1 \pmod{N}$, что означает $g^n \in N$. Но так как $g \in G_1$, то $g^n \in N \cap G_1$, т.е. $g^n \in N_{G_1}$. Таким образом, из условия $g \in G_1$ следует, что $g^n \in N_{G_1}$ и поэтому имеет место включение $G_1^n \subset N_{G_1}$. Необходимость условия доказана.

Теперь предположим, что любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n , т.е. $G_1^n \subset N_{G_1}$. Рассмотрим произвольный эпиморфизм $\phi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ и докажем, что его можно продолжить до эпиморфизма из группы $G = G_1 * G_2$ на некоторую группу G' , содержащую G'_1 в качестве подгруппы (см. лемму 1.1).

Если эпиморфизм $G_1 \rightarrow G'_1$ является изоморфизмом, то существование нужного эпиморфизма следует из точности операции n -периодического произведения (см. теорему 3 работы [1]). Поэтому можно считать, что $G'_1 = G_1/N_{G_1}$ для некоторой нетривиальной нормальной подгруппы $N_{G_1} \triangleleft G_1$. Обозначим $G'_2 = G_2/G_2^n$ и построим n -периодическое произведение $G' = G'_1 *^n G'_2$. По условию теоремы $G_1^n \subset N_{G_1}$, следовательно, группы G'_i суть периодические группы периода n для $i = 1, 2$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.1. (см. [1], теорема 5) *Если все группы G_i семейства $\{G_i\}_{i \in I}$ суть периодические группы показателя n , то периодическое произведение $\prod_{i \in I}^n G_i$ этих групп при нечетном $n \geq 665$ также есть периодическая группа показателя n .*

Согласно лемме 2.1, группа G' тоже является периодической группой периода n . Построим отображение $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow G'_1 *^n G'_2$, сопоставляя каждому элементу $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_t}$ в нормальной форме свободного произведения $G_1 * G_2$ элемент $g'_{i_1} g'_{i_2} \dots g'_{i_t} \in G'$, где каждый элемент g_{i_s} принадлежит или группе G_1 или группе G_2 , $s = 1, \dots, t$ а g'_{i_s} есть образ элемента g_{i_s} при соответствующем естественном

эпиморфизме $G_i \rightarrow G'_i$, $i = 1, 2$. Из определения отображения ϕ следует, что оно является продолжением ϕ_1 . Чтобы доказать существование нужного эпиморфизма $\bar{\phi} : G_1 *^n G_2 \rightarrow G'_1 *^n G'_2$, достаточно показать, что отображение ϕ можно пропустить через периодическое произведение $G_1 *^n G_2$.

Докажем, что образ каждого определяющего соотношения группы $G_1 *^n G_2$ при отображении ϕ есть определяющее соотношение группы G' . Произведение $G_1 *^n G_2$ получается из свободного произведения $G_1 * G_2$ добавлением некоторых определяющих соотношений вида A^n , где $A \in G_1 * G_2$, следовательно, нужно проверить, что $\phi(A^n) = 1$ в группе G' . Но по определению $\phi(A^n) = (\phi(A))^n$, а группа G' , как было отмечено выше, является n -периодической группой.

Для завершения доказательства остается вспомнить, что в силу точности n -периодического произведения, группа G_1 вкладывается в группу G , а группа G'_1 – в группу G' . Теорема доказана. $\square$

Согласно теореме 4 работы Адяна [1] операция n -периодического произведения коммутативна и ассоциативна. Поэтому, из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Пусть множество $\bigcup_{i \in I - \{k\}} (G_i - \{e_i\})$ содержит более одного элемента. Тогда множитель G_k n -периодического произведения семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ является СЕР-подгруппой группы $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ в том и только том случае, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_k} группы G_k содержит подгруппу G_k^n , порожденную всеми n -ми степенями элементов группы G_k .

Как известно (см., например, [6]), группа с единственной минимальной нетривиальной нормальной подгруппой называется *монолитической*, а ее минимальная нормальная подгруппа называется *монолитом* группы. Согласно этому, теорему 2.1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 2.2. Пусть группа G_2 содержит более двух элементов. Тогда множитель G_1 n -периодического произведения $G_1 *^n G_2$ является СЕР-подгруппой в том и только том случае, когда или G_1^n является монолитом группы G_1 или $G_1^n = \{1\}$.

Теорема 2.2. Пусть в группе G_1 содержится не более одной инволюции. Тогда множитель G_1 n -периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$, где $|G_2| \neq 1$, является СЕР-подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n .

Доказательство. Если $|G_1| \leq 3$, то утверждение очевидно, поэтому предположим, что $|G_1| > 3$. Пусть N_{G_1} – нетривиальная нормальная подгруппа группы G_1 , а $N \triangleleft G = G_1 \overset{n}{*} G_2$ и имеет место равенство $N_{G_1} = N \cap G_1$. Выберем произвольные нетривиальные элементы a, g, b такие, что $a \in N_{G_1} = N \cap G_1$, $g \in G_1$, $a \neq g$ и $b \in G_2$. Так как в группе G_1 содержится не более одной инволюции, то можно считать, что $a \neq g^{\pm 1}$. Следовательно, слово $b^{-1}abg$ не равно произведению двух инволюций в ранге 0. Очевидно, слово $b^{-1}abg$ есть элементарный период ранга 1, поэтому, согласно определению n -периодического произведения, имеет место равенство $(b^{-1}abg)^n = 1$ в группе G . Поскольку $a \in N$, то

$$(b^{-1}abg)^n \equiv g^n \pmod{N},$$

значит $g^n \equiv 1 \pmod{N}$, т.е. выполнено соотношение $g^n \in N$. Следовательно, из условия $g \in G_1$ вытекает, что $g^n \in N_{G_1}$, т.е. имеет место включение $G_1^n \subset N_{G_1}$. Необходимость условия доказана. Достаточность утверждения доказывается аналогично теореме 2.1. $\square$

Следствие 2.3. Любая группа G_1 нечетного периода $n \geq 665$ является СЕР-подгруппой n -периодического произведения $G_1 \overset{n}{*} G_2$ для произвольной группы G_2 .

В качестве другого применения теоремы 2.2 рассмотрим фактор группу $A_p(m, n) = A(m, n)/\langle d^p \rangle$, где $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число, $m > 1$, p – произвольное простое число, а группа

$$A(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, d \mid a_j d = d a_j \text{ и } A^n = d \text{ для всех } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i \text{ и } 1 \leq j \leq m \rangle$$

есть некоммутативный аналог группы рациональных чисел, построенный и исследованный в работах [8], [20]. Ясно, что группа $A_p(m, n)$ имеет задание:

$$A_p(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, d \mid d^p = 1, a_j d = d a_j, \\ A^n = d \text{ для всех } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i \text{ и } 1 \leq j \leq m \rangle.$$

Лемма 2.2. *Подгруппа $\langle d \rangle$ содержится в каждой неабелевой подгруппе группы $A_p(m, n)$. В частности, группа $A_p(m, n)$ – монолитическая группа с монолитом $A_p(m, n)^n = \langle d \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\Delta}$ – произвольная неабелева подгруппа группы $A_p(m, n)$, а Δ ее образ при естественном гомоморфизме

$$A_p(m, n) \rightarrow B(m, n) = A_p(m, n)/\langle d \rangle.$$

Поскольку фактор группа неабелевой группы по центру – нециклическая группа, то Δ – не циклическая.

В силу теоремы 1 работы [21], в нециклической подгруппе Δ содержатся элементы порядка n . Согласно утверждению [8, гл. VI, теорема 1.2], в Δ содержится некоторый элемент вида TAT^{-1} , где A – элементарный период некоторого ранга, т.е. $A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i$. Тогда элемент $TA^nT^{-1} = TdT^{-1} = d$ принадлежит $\overline{\Delta}$. Первая часть утверждения доказана.

Остается показать, что если $\overline{\Delta}$ – нетривиальная абелева нормальная подгруппа группы $A_p(m, n)$, то $\overline{\Delta} = \langle d \rangle$. Поскольку подгруппа $\overline{\Delta}$ абелева, то ее образ Δ тоже – абелева нормальная подгруппа. В силу теоремы Адяна (см. [8, гл. VI, теорема 3.3]), всякая абелева подгруппа группы $B(m, n)$ циклическая, т.е. $\Delta = \langle y \rangle$ для некоторого элемента $y \in B(m, n)$. Так как произвольный элемент x группы $B(m, n)$ нормализует подгруппу $\langle y \rangle$, то $|\langle x, y \rangle| \leq n^2$ для любого $x \in B(m, n)$. По теореме Адяна (см. [8, гл. VII, теорема 1.8]) всякая конечная подгруппа группы $B(m, n)$ – циклическая группа. Поэтому подгруппа $\langle x, y \rangle$ – циклическая, в частности, x и y коммутируют для любого $x \in B(m, n)$. Тогда y принадлежит центру $B(m, n)$. Согласно другой теореме Адяна (см. [8, гл. VI, теорема 3.4]), центр группы $B(m, n)$ тривиален, т.е. $\langle y \rangle$ – тривиальная подгруппа и поэтому $\overline{\Delta} \subset \langle d \rangle$. Но $|\langle d \rangle| = p$ – простое число, а $\overline{\Delta}$ нетривиальна, значит $\overline{\Delta} = \langle d \rangle$. $\square$

Заметим, что при $p \geq 3$ группа $A_p(m, n)$ не имеет инволюций, а группа $A_2(m, n)$ имеет единственную инволюцию d . Поэтому из леммы 2.2 и теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.4. *Для любого простого числа p и для любой группы G группа $A_p(m, n)$ является СЕР-подгруппой n -периодического произведения $A_p(m, n)^n * G$.*

Любопытно, что монолит $\langle d \rangle$ группы $A_p(m, n)$ является простой подгруппой и в то же время совпадает с центром группы $A_p(m, n)$, а каждое из этих условий достаточно, чтобы подгруппа $\langle d \rangle$ являлась *CEP*-подгруппой.

Abstract. There is a well-known fact, that any group G_1 is a *CEP*-subgroup both for the direct product $G_1 \times G_2$ and the free product $G_1 * G_2$ of G_1 with any group G_2 . The paper gives a necessary and sufficient condition providing that a multiplier G_i of a n -periodic product $\prod_{i \in I}^n G_i$ of any family of groups $\{G_i\}_{i \in I}$ is a *CEP*-subgroup. Particularly, the found criterion means that any group G_1 of odd period $n \geq 665$ is a *CEP*-subgroup of the n -periodic product $G_1 * G_2$ for any group G_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, Теория чисел, математический анализ и их приложения, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 3 – 21 (1976).
- [2] С. И. Адян “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, Матем. заметки, **88**, no. 6 (2010).
- [3] А. Ю. Олшанский, “Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 225 – 249 (1989).
- [4] S. V. Ivanov, “On periodic products of groups”, Internat. J. Algebra Comput., **5**, no. 1, 7 – 17 (1995).
- [5] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, Докл. АН СССР, **241**, no. 4, 745 – 748 (1978).
- [6] Х. Нейман, Многообразия Групп, Мир, М. (1969).
- [7] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I, II, III”. Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**, 212 – 244, 251 – 524, 709 – 731 (1968).
- [8] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и Тождества в Группах, Наука, М. (1975).
- [9] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы”, УМН, **65**, no. 5 (395), 5 – 60 (2010).
- [10] B. H. Neumann, “An essay on free products of groups with amalgamations”, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A., **246**, 503 – 554 (1954).
- [11] B. H. Neumann, H. Neumann, “Embedding theorems for groups”, J. London Math. Soc., **34**, 465 – 479 (1959).
- [12] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, “Embedding theorems for groups”, J. London Math. Soc., **24**, 247 – 254 (1949).
- [13] A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir, “Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups”, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **96**, 43 – 169 (2003).
- [14] S. V. Ivanov, “On subgroups of free Burnside groups of large odd exponent”, Illinois J. Math. Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979), **47**, no. 1-2, 299 – 304 (2003).
- [15] А. Ю. Олшанский, “ SQ-универсальность гиперболических групп”, Матем. сб., **186**, no. 8, 119 – 132 (1995).
- [16] В. С. Атабекян, “О простых и свободных периодических группах”, Вестн. Моск. ун-та., Сер. 1. Матем., мех., no. 6, 76 – 78 (1987).
- [17] В. С. Атабекян, “О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп”, Матем. заметки, **86**, no. 4, 483 – 490 (2009).
- [18] D. Sonkin, “CEP-subgroups of free Burnside groups of large odd exponents”, Comm. Algebra, **31**, **10**, 4687 – 4695 (2003).

В. С. АТАБЕКЯН

- [19] S. V. Ivanov, “Embedding free Burnside groups in finitely presented groups”, *Geometriae Dedicata*, **111**, no. 1, 87 – 105 (2005).
- [20] С. И. Адян, “О некоторых группах без кручения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**, no. 3, 459 – 468 (1971).
- [21] В. С. Атабекян, “О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**, no. 5, 3 – 36 (2009).

Поступила 28 февраля 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 25-40.

СУММИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ И СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ПО МЕТОДУ (C, α, β)

Л. Н. ГАЛОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет

E-mail: lev.nik.galoyan@gmail.com

Аннотация. В данной работе приводятся достаточные условия для (C, α, β) суммируемости тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов.

MSC2010 number: 40G05, 42A24

Ключевые слова: Сопряженные ряды; обобщенные средние Чезаро; регулярный метод суммирования; функция ограниченной вариации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть числа $\{A_n^{\alpha, \beta}\}_{n=0}^{\infty}$ определяются как коэффициенты разложения в степенной ряд следующей аналитической функции

$$(1.1) \quad \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} \cdot \left(\ln \frac{e}{1-z} \right)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha, \beta} z^n, \quad |z| < 1,$$

где α и β суть действительные числа.

В [4] А. Зигмундом детально изучены свойства этих чисел. Приведем некоторые из них.

$$(1.2) \quad A_n^{\alpha, \beta} \sim \frac{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad \alpha \neq -1, -2, \dots,$$

$$(1.3) \quad A_n^{\alpha, \beta} \sim \beta (-1)^{\alpha-1} (|\alpha| - 1)! n^{\alpha} (\ln n)^{\beta-1}, \quad \alpha = -1, -2, \dots,$$

$$(1.4) \quad A_n^{\alpha+1, \beta} - A_{n-1}^{\alpha+1, \beta} = A_n^{\alpha, \beta}, \quad n A_n^{\alpha-1, \beta} = \alpha A_{n-1}^{\alpha, \beta} + \beta A_{n-1}^{\alpha, \beta-1}.$$

Пусть дан ряд $\sum a_n$ и пусть $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ частичные суммы этого ряда.

Рассмотрим следующее линейное преобразование частичных сумм

$$(1.5) \quad t_n^{\alpha, \beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1, \beta} S_k = \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha, \beta} a_k.$$

Говорят, что последовательность S_n суммируема к числу S обобщенным методом Чезаро или методом (C, α, β) , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{\alpha, \beta} = S.$$

Приведенный метод суммирования ввел в рассмотрение А. Зигмунд в 1924 году [4]. Легко заметить, что при $\beta = 0$ метод суммирования (C, α, β) совпадает с классическим методом суммирования Чезаро или с (C, α) методом. Обобщенные средние Чезаро изучались в ряде работ ([5], [6], [10], [11]). Отметим, что этот метод является регулярным при $\alpha > 0, \beta \in R$, то есть в этом случае из сходимости последовательности S_n к числу S всегда следует сходимость средних $t_n^{\alpha, \beta}$ к тому же числу.

В данной работе изучаются сходимость обобщенных средних частичных сумм рядов Фурье и сопряженных тригонометрических рядов.

Пусть дана 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$. Обозначим через $\sigma(f)$ ее ряд Фурье

$$(1.6) \quad \sigma(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Параллельно будем рассматривать сопряженный с ним ряд и функцию $\bar{f}(t)$, сопряженную к $f(t)$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}(f) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt - b_n \cos nt \\ \bar{f}(t) &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}(x, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\tan t/2} dt. \end{aligned}$$

Введем еще следующие обозначения

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S, \quad \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

где S — действительное число.

Обобщенные средние Чезаро частных сумм рядов (1.5) и (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned} t_n^{\alpha, \beta}(x) &= \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1, \beta} S_k(x, f), \\ \tilde{t}_n^{\alpha, \beta}(x) &= \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1, \beta} \tilde{S}_k(x, f). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt, \\ \tilde{S}_n(x, f) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \tilde{D}_n(t) dt, \end{aligned}$$

где $D_n(t)$ и $\tilde{D}_n(t)$ – ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin u/2} \quad \text{и} \quad \tilde{D}_n(u) = \frac{\cos u/2 - \cos(n+1/2)u}{2\sin u/2},$$

получаем интегральное представление для обобщенных средних Чезаро

$$(1.8) \quad t_n^{\alpha,\beta}(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) K_n^{\alpha,\beta}(t) dt,$$

$$(1.9) \quad \tilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x, f) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) dt,$$

где использованы следующие обозначения:

$$(1.10) \quad K_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} D_k(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} \frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin t/2},$$

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} \tilde{D}_k(t) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} \frac{\cos(k+1/2)t}{2\sin t/2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - H_n^{\alpha,\beta}(t). \end{aligned}$$

Приведем результаты непосредственно относящиеся к настоящей работе.

Для сходимости в точке ряда Фурье по тригонометрической системе известен следующий результат (см. [1], стр.168).

Теорема (признак Лебега-Гергена). Пусть 2π -периодическая, интегрируемая функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям

$$\int_0^h \varphi_x(t) dt = o(h) \quad \text{и} \quad \int_h^\pi \frac{|\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)|}{t} dt = o(1) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0.$$

Тогда в этой точке частичные суммы ряда (1.6) сходятся к числу S .

Далее в работе [7] Жижиашвили, обобщая условия Лебега-Гергена, привел достаточное условие для (C, α) суммируемости рядов Фурье при $\alpha \in (-1, 1)$.

Теорема (Л. Жижиашвили). Пусть 2π -периодическая, интегрируемая функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям

$$\int_0^h \varphi_x(t) dt = o(h) \quad \text{и} \quad \int_h^\pi \frac{|\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)|}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{1}{h^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0.$$

Тогда в этой точке частичные суммы ряда (1.6) (C, α) суммируемы к числу S .

Аналогичную теорему он доказал для сопряженных рядов Фурье.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе приводятся достаточные условия для (C, α, β) суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов. Точнее будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Если 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$(a) \quad \int_0^h \varphi_x(t) dt = o(h) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0$$

$$(b) \quad \int_h^\pi |\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)| \frac{\ln^\beta(2\pi/t)}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^\beta(1/h)}{h^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0,$$

где $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\beta \in R$, или $\alpha = 0$, $\beta \geq 0$, то в этой точке $t_n^{\alpha, \beta}(x, f) \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.2. *Если 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$(a) \quad \int_0^h \varphi_x(t) dt = o\left(\frac{h}{\ln(1/h)}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0,$$

$$(b) \quad \int_h^\pi |\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)| \left(\ln \frac{2\pi}{t}\right)^\beta dt = o\left(h \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{\beta-1}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0,$$

то в этой точке $t_n^{-1, \beta}(x, f) \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$.

Аналогичные теоремы справедливы и для сопряженных рядов.

Теорема 2.3. *Если 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$(a) \quad \int_0^h \psi_x(t) dt = o(h) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0$$

$$(b) \quad \int_h^\pi |\psi_x(t+h) - \psi_x(t)| \frac{\ln^\beta(2\pi/t)}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^\beta(1/h)}{h^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0,$$

где $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\beta \in R$, или $\alpha = 0$, $\beta \geq 0$, то в этой точке $\tilde{t}_n^{\alpha, \beta}(x, f) - f(x, \frac{\pi}{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.4. *Если 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $f(t)$ удовлетворяет в точке x условиям*

$$(a) \quad \int_0^h \psi_x(t) dt = o\left(\frac{h}{\ln 1/h}\right) \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0$$

$$(b) \quad \int_h^\pi |\psi_x(t+h) - \psi_x(t)| \ln^\beta \frac{2\pi}{t} dt = o \left(h \left(\ln \frac{1}{h} \right)^{\beta-1} \right) \quad \text{при } h \rightarrow +0,$$

то в этой точке $\tilde{t}_n^{-1,\beta}(x, f) - f(x, \frac{\pi}{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 2.1. Условия теорем 2.2 и 2.4 отличаются от условий теорем 2.1 и 2.3 при формальной постановке в них $\alpha = -1$. Для $(C, -1, \beta)$ суммируемости приходится налагать на функцию более жесткие требования. В дальнейшем мы увидим, что это обусловлено ухудшением поведения ядер Чезаро при $\alpha = -1$.

Замечание 2.2. В дальнейшем через $C_1, C_2, C_3, \dots$ мы будем обозначать постоянные, не зависящие от n и t .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Леммы данного параграфа используются в доказательствах теорем 2.1 – 2.4.

Лемма 3.1. При $0 \leq t \leq \pi$ справедливы следующие соотношения

(a) для любых $\alpha \in (-1, 1)$ и $\beta \in R$

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} K_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

(b) для любого $\beta > 0$

$$K_n^{-1,\beta}(t) = O(n \ln n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} K_n^{-1,\beta}(t) = O(n^2 \ln n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Легко проверить (например с помощью теорем 8.4 – 8.7 в [1], стр. 32), что при $\alpha \in (-1, 1)$, $\beta \in R$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \ln^\beta k = O(n^{\alpha+1} \ln^\beta n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Используя эту оценку и свойства (1.2), (1.4) и (1.10) получим

$$\begin{aligned} |K_n^{\alpha,\beta}(t)| &= \left| \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} D_k(t) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha,\beta} \cos kt \right| \\ &= O \left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \ln^\beta k \right) = O(n), \\ \left| \frac{d}{dt} K_n^{\alpha,\beta}(t) \right| &= \left| \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha,\beta} k \sin kt \right| = O \left(\frac{1}{n^{\alpha-1} \ln^\beta n} \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \ln^\beta k \right) = O(n^2). \end{aligned}$$

При $\alpha = -1$, $\beta > 0$ используя (1.3) и оценку

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln^{\beta-1} k}{k} = O(\ln^{\beta} n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

получим

$$|K_n^{-1,\beta}(t)| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^{-1,\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{-1,\beta} \cos kt \right| = O\left(\frac{n}{\ln^{\beta-1} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^{\beta-1} k}{k}\right) = O(n \ln n),$$

и

$$\left| \frac{d}{dt} K_n^{-1,\beta}(t) \right| = \left| \frac{1}{A_n^{-1,\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{-1,\beta} k \sin kt \right| = O\left(\frac{n^2}{\ln^{\beta-1} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^{\beta-1} k}{k}\right) = O(n^2 \ln n).$$

Лемма 3.1 доказана. $\square$

Следующая лемма доказывается аналогичным путем.

Лемма 3.2. При $0 \leq t \leq \pi$ справедливы следующие соотношения

(а) для любых $\alpha \in (-1, 1)$ и $\beta \in R$

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) = O(n^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

(б) для любого $\beta > 0$

$$\tilde{K}_n^{-1,\beta}(t) = O(n \ln n) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \tilde{K}_n^{-1,\beta}(t) = O(n^2 \ln n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для приведения следующей леммы, введем функции

$$(3.1) \quad V_1(t) = \left(\ln^2 \frac{e}{2 \sin t/2} + \frac{(\pi - t)^2}{4} \right)^{\beta/2}, \quad t \in (0, \infty),$$

$$(3.2) \quad V_2(t) = \beta \arctan \frac{\pi - t}{2 \ln \frac{e}{2 \sin t/2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Тогда имеет место следующая лемма, впервые доказанная Харди для частного случая $\beta = 0$ (см. [1], стр. 159).

Лемма 3.3. При $-1 \leq \alpha < 1$, $\beta \in R$ и $t \in (0, \pi]$ справедливо представление

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = \varphi_n^{\alpha,\beta}(t) + R_n^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$(3.3) \quad \varphi_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{V_1(t)}{A_n^{\alpha,\beta} (2 \sin t/2)^{1+\alpha}} \sin \left[\left(n + \frac{1+\alpha}{2} \right) t - \frac{\pi\alpha}{2} - \beta V_2(t) \right]$$

и для любого $1/n \leq t \leq \pi$

$$(3.4) \quad |R_n^{\alpha,\beta}(t)| = O\left(\frac{1}{nt^2}\right) \quad \text{и} \quad \left| \frac{d}{dt} R_n^{\alpha,\beta}(t) \right| = O\left(\frac{1}{nt^3}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то учитывая (1.4), (1.10) и применяя преобразование Абеля получим

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{1}{A_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1,\beta} \frac{\sin(k+1/2)t}{2 \sin t/2} \\ &= \frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin t/2} \operatorname{Im} \left[e^{i(n+1/2)t} \sum_{k=0}^n A_k^{\alpha-1,\beta} e^{-ikt} \right] \\ &= \frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin t/2} \operatorname{Im} \left[e^{i(n+1/2)t} (1 - e^{-it})^{-1} \sum_{k=0}^n A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right] + \frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta} \sin^2 t/2}. \end{aligned}$$

Из свойств (1.3) и (1.2) следует, что при $-1 \leq \alpha < 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt}$ при $t \in [0, \pi]$ сходится равномерно, поэтому имеем

$$K_n^{\alpha,\beta}(t) = \varphi_n^{\alpha,\beta}(t) + R_n^{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\varphi_n^{\alpha,\beta}(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i(n+1/2)t} (1 - e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right]$$

и

$$R_n^{\alpha,\beta}(t) = -\operatorname{Im} \left[\frac{e^{i(n+1/2)t} (1 - e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin \frac{t}{2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right] + \frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta} \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Поскольку $kA_k^{\alpha-2,\beta} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то согласно теореме Таубера (см. напр. [12], стр. 355) при $t \neq 0$ имеем (см (1.1))

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} = \frac{1}{(1 - e^{-it})^{\alpha-1}} \left(\ln \frac{e}{1 - e^{-it}} \right)^{\beta}.$$

Следовательно

$$\varphi_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i(n+1/2)t}}{(1 - e^{-it})^{\alpha}} \left(\ln \frac{e}{1 - e^{-it}} \right)^{\beta} \right].$$

Отделяя мнимую часть получим (3.3). Заметим, что из (1.2) и (1.3) следует, что при $\alpha < 1$ и при достаточно больших k последовательность $A_k^{\alpha-2,\beta}$ стремится

к нулю монотонно. Учитывая это и воспользовавшись леммой Абеля и неравенством $|Imz| \leq |z|$, получим

$$\begin{aligned} |R_n^{\alpha,\beta}(t)| &< \frac{1}{4A_n^{\alpha,\beta} \sin^2 t/2} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right| + \left| \frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta} \sin^2 \frac{t}{2}} \right| \\ &= O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta} t^3}\right|\right) + O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta} t^2}\right|\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2 t^3}\right) + O\left(\frac{1}{nt^2}\right) = O\left(\frac{1}{nt^2}\right). \end{aligned}$$

Последняя оценка справедлива, поскольку $n^2 t^3 = (nt) \cdot nt^2 \geq nt^2$ при $t \geq \frac{1}{n}$.

Оценим теперь производную от $R_n^{\alpha,\beta}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_n^{\alpha,\beta}(t) &= \text{Im} \left[\left(\frac{e^{i(n+1/2)}(1 - e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin 1/2} \right)' \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right] \\ &\quad - \text{Im} \left[\frac{ie^{i(n+1/2)}(1 - e^{-it})^{-1}}{2A_n^{\alpha,\beta} \sin t/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k A_k^{\alpha-2,\beta} e^{-ikt} \right] \\ &\quad + \left(\frac{A_n^{\alpha-1,\beta}}{4A_n^{\alpha,\beta} \sin^2 \frac{t}{2}} \right)'. \end{aligned}$$

Законность почленного дифференцирования оправдывается тем, что при каждом фиксированном n почленно дифференцированный ряд сходится равномерно при $t \geq \frac{1}{n}$. Это следует из теоремы 2.4 (см. [1], стр. 16) и из монотонного стремления к нулю последовательности $kA_k^{\alpha-2,\beta}$. Действительно, используя (1.4) имеем

$$(k+1)A_{k+1}^{\alpha-2,\beta} - kA_k^{\alpha-2,\beta} = (\alpha-1)A_k^{\alpha-2,\beta} + \beta A_k^{\alpha-2,\beta-1},$$

где второе слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка чем первое, и поэтому при больших k эта разность имеет тот же знак, что и $(\alpha-1)A_k^{\alpha-2,\beta}$, следовательно согласно (1.2) сохраняет знак для достаточно больших k , с другой стороны в силу (1.2) $kA_k^{\alpha-2,\beta} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. После несложных вычислений и вновь воспользовавшись леммой Абеля, получаем

$$\left| \frac{d}{dt} R_n^{\alpha,\beta}(t) \right| = O\left(\left|\frac{A_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta} t^4}\right|\right) + O\left(\left|\frac{nA_n^{\alpha-2,\beta}}{A_n^{\alpha,\beta} t^3}\right|\right) = O\left(\frac{1}{nt^3}\right).$$

В случае $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ легко заметить (см. (1.10)), что $K_n^{0,0}(t) = D_n(t)$ и поэтому представление (3.3) остается справедливым, поскольку $\varphi_n^{0,0}(t) = D_n(t)$, $R_n^{0,0}(t) = 0$. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.3.

Лемма 3.4. При $-1 \leq \alpha < 1$, $\beta \in R$ и $t \in (0, \pi]$ справедливо представление

$$(3.5) \quad H_n^{\alpha, \beta}(t) = \tilde{\varphi}_n^{\alpha, \beta}(t) + \tilde{R}_n^{\alpha, \beta}(t),$$

где

$$\tilde{\varphi}_n^{\alpha, \beta}(t) = \frac{V_1(t)}{A_n^{\alpha, \beta} (2 \sin t/2)^{1+\alpha}} \cos \left[\left(n + \frac{1+\alpha}{2} \right) t - \frac{\pi\alpha}{2} - \beta V_2(t) \right],$$

а при $1/n \leq t \leq \pi$

$$(3.6) \quad |\tilde{R}_n^{\alpha, \beta}(t)| = O\left(\frac{1}{nt^2}\right), \quad \left| \frac{d}{dt} \tilde{R}_n^{\alpha, \beta}(t) \right| = O\left(\frac{1}{nt^3}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две элементарные леммы, которые легко вытекают из теоремы Лагранжа о конечных приращениях (см. [2], стр. 226).

Лемма 3.5. Пусть для $\alpha > -1$ и $\beta \in R$ функция $\omega_{\alpha, \beta}(t) : t \in (0, 2\pi]$ имеет на $(0, 2\pi)$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям

$$\omega_{\alpha, \beta}(t) \simeq \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{1+\alpha}}, \quad \omega'_{\alpha, \beta}(t) = O\left(\frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}}\right), \quad \omega''_{\alpha, \beta}(t) = O\left(\frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}}\right)$$

при $t \rightarrow +0$. Тогда при $t > h$ справедливы утверждения

$$\begin{aligned} (a) \quad & |\omega_{\alpha, \beta}(t+h) - \omega_{\alpha, \beta}(t)| < C_1 \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}} h, \\ (b) \quad & \left| \frac{d}{dt} (\omega_{\alpha, \beta}(t+h) - \omega_{\alpha, \beta}(t)) \right| < C_2 \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}} h, \\ (c) \quad & |\Delta^2 \omega_{\alpha, \beta}(t)| := |\omega_{\alpha, \beta}(t) - 2\omega_{\alpha, \beta}(t+h) + \omega_{\alpha, \beta}(t)(t+2h)| < C_3 \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{3+\alpha}} h^2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Пусть функция $\omega_{-1, \beta}(t) : t \in (0, 2\pi]$ имеет на $(0, 2\pi)$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям

$$\omega_{-1, \beta}(t) \simeq \ln^\beta \frac{2\pi}{t}, \quad \omega'_{-1, \beta}(t) = O\left(\frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t}\right), \quad \omega''_{-1, \beta}(t) = O\left(\frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t^2}\right)$$

при $t \rightarrow +0$. Тогда при $t > h$ справедливы утверждения

$$\begin{aligned} (a) \quad & |\omega_{-1, \beta}(t+h) - \omega_{-1, \beta}(t)| < C_4 \frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t} h, \\ (b) \quad & \left| \frac{d}{dt} (\omega_{-1, \beta}(t+h) - \omega_{-1, \beta}(t)) \right| < C_5 \frac{\ln^{\beta-1} 2\pi/t}{t^2} h, \\ (c) \quad & |\Delta^2 \omega_{-1, \beta}(t)| := |\omega_{-1, \beta}(t) - 2\omega_{-1, \beta}(t+h) + \omega_{-1, \beta}(t)(t+2h)| < C_6 \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^2} h^2. \end{aligned}$$

Если функция $\omega_{\alpha, \beta_1}(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3.5 при $\alpha > -1$ и $\beta_1 \in R$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 3.7. Пусть дана 2π -периодическая функция $g(t)$, удовлетворяющая при $h \rightarrow +0$ следующим условиям

$$(a) \quad G(h) = \int_0^h g(t) dt = o(h),$$

$$(a) \quad \int_h^\pi |g(t+h) - g(t)| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_2} 1/h}{h^\alpha}\right),$$

где $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\beta_2 \geq \beta_1$ или $\alpha = 0$, $\beta_2 \geq \max\{\beta_1, 0\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие соотношения:

$$T_n^\alpha = \int_{\pi/n}^\pi g(t) \omega_{\alpha, \beta_1}(t) \cos ntdt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right),$$

$$Q_n^\alpha = \int_{\pi/n}^\pi g(t) \omega_{\alpha, \beta_1}(t) \sin ntdt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).$$

Доказательство. В выражении T_n^α сделаем замену переменной t на $t + \frac{\pi}{n}$:

$$T_n^\alpha = - \int_0^{\pi - \frac{\pi}{n}} g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha, \beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos ntdt.$$

Складывая два разных выражения для T_n^α и совершая простые преобразования, получим

$$\begin{aligned} 2T_n^\alpha &= \int_{\pi/n}^\pi \left[g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \omega_{\alpha, \beta_1}(t) \cos ntdt \\ &+ \int_{\pi/n}^\pi g(t) \left[\omega_{\alpha, \beta_1}(t) - \omega_{\alpha, \beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt dt \\ &+ \int_{\pi/n}^\pi \left[g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right] \left[\omega_{\alpha, \beta_1}(t) - \omega_{\alpha, \beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt dt \\ &+ \int_{\pi - \pi/n}^\pi g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha, \beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos ntdt \\ &+ \int_0^{\pi/n} g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\alpha, \beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos ntdt \equiv \sum_{k=1}^5 T_{n,k}^\alpha. \end{aligned}$$

Оценим каждый из слагаемых по отдельности. Учитывая условие (b) настоящей леммы и условия леммы 3.5, получаем

$$|T_{n,1}^\alpha| < C_7 \cdot \int_{\frac{\pi}{n}}^\pi \left| g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| \cdot \frac{\ln^{\beta_1} \frac{2\pi}{t}}{t^{1+\alpha}} dt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right).$$

Снова используя условие (b) и утверждение (a) леммы 3.5 будем иметь

$$\begin{aligned} |T_{n,3}^\alpha| &\leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| \left| \omega_{\alpha,\beta_1}(t) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| dt \\ &\leq \frac{C_8}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g(t) \right| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{2+\alpha}} dt = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right). \end{aligned}$$

Учитывая утверждения (a) и (b) леммы 3.5, для $T_n^{(5)}$ получим

$$\begin{aligned} |T_{n,5}^\alpha| &= \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} g(t) \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \, dt \right| \leq \left| G(t) \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \right|_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} \\ &\quad + \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} G(t) \omega'_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \, dt \right| + n \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} G(t) \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \sin nt \, dt \right| \\ &\leq o\left(n^\alpha \ln^{\beta_1} n\right) + C_9 \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} |G(t)| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{2+\alpha}} dt \right| \\ &\quad + C_9 n \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} |G(t)| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}} dt \right| = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right). \end{aligned}$$

В выражении $T_{n,2}^\alpha$ снова делаем замену переменной и прибавляем к друг другу получившиеся два разных выражения. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} 2T_{n,2}^\alpha &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi/n} g(t) \left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt \, dt \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} g(t) \left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt \, dt \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\pi/n} g(t) \left[\omega_{\alpha,\beta_1}(t) - 2\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) + \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right] \cos nt \, dt \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\pi/n} \left[g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \left[\omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \omega_{\alpha,\beta_1}\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right] \cos nt \, dt \\ &\equiv \sum_{k=1}^4 t_{n,k}^\alpha. \end{aligned}$$

Слагаемые $t_{n,1}^\alpha$ и $t_{n,4}^\alpha$ оцениваются также как и $T_{n,5}^\alpha$ и $T_{n,3}^\alpha$. Для оценки $t_{n,3}^\alpha$ воспользуемся утверждениями (а) и (б) леммы 3.5

$$\begin{aligned} |t_{n,3}^\alpha| &= \left| \int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} g(t) \Delta^2 \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \, dt \right| \leq \left| G(t) \Delta^2 \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \right|_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} \\ &\quad + \left| \int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} G(t) \frac{d}{dt} [\Delta^2 \omega_{\alpha,\beta_1}(t)] \cos nt \, dt \right| \\ &\quad + \left| n \int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} G(t) \Delta^2 \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \sin nt \, dt \right| \\ &\leq o\left(n^\alpha \ln^{\beta_1} n\right) + \frac{C_{10}}{n} o\left(\int_{\pi/n}^{\pi-\pi/n} \frac{\ln^\beta 2\pi/t}{t^{2+\alpha}} dt\right) = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right). \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка для $t_{n,2}^\alpha$. Таким образом, получаем $T_{n,2}^\alpha = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$.

Приступим к оценке $T_{n,4}^\alpha$. Достаточно оценить следующее выражение

$$\overline{T}_{n,4}^\alpha = \int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} g(t) \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \, dt,$$

поскольку ясно, что $|T_{n,4}^\alpha - \overline{T}_{n,4}^\alpha| = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$. При $\alpha > 0$ или $\alpha = 0, \beta_2 \geq 0$ оценка $\overline{T}_{n,4}^\alpha = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right)$ очевидна. Пусть $\alpha \in (-1, 0)$.

Сначала покажем, что

$$\int_{\pi-h}^{\pi} g(t) \, dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_2} \frac{1}{h}}{h^\alpha}\right) \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\pi-h}^{\pi} g(t) \, dt \right| &= \left| \int_h^{\pi-h} [g(t+h) - g(t)] \, dt + \int_h^{2h} g(t) \, dt \right| \\ &\leq C_{11} \int_h^{\pi-h} |g(t+h) - g(t)| \frac{\ln^{\beta_1} 2\pi/t}{t^{1+\alpha}} \, dt + \left| \int_h^{2h} g(t) \, dt \right| = o\left(\frac{\ln^{\beta_2} 1/h}{h^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что функции $\omega_n(t) = \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt$, $n = 2, 3, \dots$ непрерывны на $[\pi - \pi/n, \pi]$ и имеют на этом отрезке равномерно ограниченные вариации, получаем

$$\begin{aligned} |\overline{T}_{n,4}^\alpha| &= \left| \int_{\pi-\pi/n}^{\pi} g(t) \omega_{\alpha,\beta_1}(t) \cos nt \, dt \right| = \left| \int_{\pi-\pi/n}^{\pi} \omega_n(t) d\left(\int_t^{\pi} g(u) \, du\right) \right| \\ &\leq \left| \omega_n(\pi - \pi/n) \int_{\pi-\pi/n}^{\pi} g(u) \, du \right| + \left| \int_{\pi-\pi/n}^{\pi} \int_t^{\pi} g(u) \, du d\omega_n(t) \right| \\ &\leq C_{12} \max_{0 \leq h \leq \pi/n} \left| \int_{\pi-h}^{\pi} g(t) \, dt \right| = o\left(n^\alpha \ln^{\beta_2} n\right). \end{aligned}$$

Таким образом утверждение леммы 7 для T_n^α доказано. Q_n^α оценивается аналогично. Лемма 3.7 доказана. $\square$

Пусть $\omega_{-1,\beta}(t)$, где $\beta \in R$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы 3.6. Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.7, с единственным различием, что вместо леммы 3.5 используется лемма 3.6.

Лемма 3.8. Пусть дана 2π -периодическая, интегрируемая на периоде функция $g(t)$, удовлетворяющая следующим двум условиям

$$(a) \quad G(h) = \int_0^h g(t)dt = o\left(\frac{h}{\ln 1/h}\right) \quad \text{при } h \rightarrow +0,$$

$$(b) \quad \int_h^\pi |g(t+h) - g(t)| \ln^\beta \frac{2\pi}{t} dt = o\left(h \ln^{\beta_1} \frac{1}{h}\right) \quad \text{при } h \rightarrow +0,$$

где $\beta \leq \beta_1 + 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$:

$$T_n^{-1} = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{-1,\beta}(t) \cos nt dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_1} n}{n}\right),$$

$$Q_n^{-1} = \int_{\pi/n}^\pi g(t)\omega_{-1,\beta}(t) \sin nt dt = o\left(\frac{\ln^{\beta_1} n}{n}\right).$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2.1. Достаточно оценить разность

$$t_n^{\alpha,\beta}(x, f) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \cdot K_n^{\alpha,\beta}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^\pi = I_{1n}(x) + I_{2n}(x).$$

$I_{1n}(x)$ оценивается при помощи условий теоремы 2.1 и утверждения а) леммы 3.1.

$$\begin{aligned} I_{1n}(x) &= \int_0^{\pi/n} \varphi_x(t) \cdot K_n^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= K_n^{\alpha,\beta}(t) \int_0^t \varphi_x(u) du \Big|_0^{\pi/n} - \int_0^{\pi/n} \frac{d}{dt} K_n^{\alpha,\beta}(t) dt \int_0^t \varphi_x(u) du = o(1). \end{aligned}$$

Теперь оценим $I_{2n}(x)$. Согласно лемме 3.3 имеем:

$$\begin{aligned} I_{2n}(x) &= \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t) K_n^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t) \varphi_n^{\alpha,\beta}(t) dt + \int_{\pi/n}^\pi \varphi_x(t) R_n^{\alpha,\beta}(t) dt = R_{1n}(x) + R_{2n}(x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям и применив лемму 3.3, получаем

$$\begin{aligned} R_{2n}(x) &= \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) R_n^{\alpha, \beta}(t) dt \\ &= \int_0^t \varphi_x(u) du R_n^{\alpha, \beta}(t) \Big|_{\pi/n}^{\pi} - \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{d}{dt} R_n^{\alpha, \beta}(t) dt \int_0^t \varphi_x(u) du = o(1). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается оценить $R_{1n}(x)$. Учитывая (3.3), получим

$$\begin{aligned} R_{1n}(x) &= \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \frac{V_1(t)}{(2 \sin t/2)^{1+\alpha}} \sin \left[\left(n + \frac{1+\alpha}{2} \right) t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta V_2(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \Omega_1(t, \alpha, \beta) \cos nt dt + \frac{1}{A_n^{\alpha, \beta}} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \Omega_2(t, \alpha, \beta) \sin nt dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(t, \alpha, \beta) &= \frac{V_1(t)}{(2 \sin \frac{t}{2})^{1+\alpha}} \sin \left[\frac{1+\alpha}{2} t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta \cdot V_2(t) \right], \\ \Omega_2(t, \alpha, \beta) &= \frac{V_1(t)}{(2 \sin \frac{t}{2})^{1+\alpha}} \cos \left[\frac{1+\alpha}{2} t - \frac{\pi\alpha}{2} + \beta \cdot V_2(t) \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что функции $\Omega_1(t, \alpha, \beta)$ и $\Omega_2(t, \alpha, \beta)$ удовлетворяют условиям леммы 3.5 и

$$\Omega_1(t, \alpha, \beta) \sim \frac{(\ln \frac{2\pi}{t})^\beta}{t^{1+\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}, \quad \Omega_2(t, \alpha, \beta) \sim \frac{(\ln \frac{2\pi}{t})^\beta}{t^{1+\alpha}} \cos \frac{\pi\alpha}{2}$$

при $t \rightarrow 0$.

Пусть сначала $\alpha \neq 0$. Взяв в лемме 3.7 $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta$, $\omega_{\alpha, \beta}(t) = \Omega_i(t, \alpha, \beta)$, $i = 1, 2$ (условия леммы 3.7 очевидно выполняются), получим

$$\begin{aligned} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \Omega_1(t, \alpha, \beta) \cos nt dt &= o \left(n^\alpha \ln^\beta n \right), \\ \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi_x(t) \Omega_2(t, \alpha, \beta) \sin nt dt &= o \left(n^\alpha \ln^\beta n \right). \end{aligned}$$

Отсюда $R_{1n}(x) = o(1)$.

При $\alpha = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1(t, 0, \beta) &= \frac{V_1(t)}{(2 \sin t/2)} \sin \left[\frac{t}{2} + \beta V_2(t) \right], \\ \Omega_2(t, 0, \beta) &= \frac{V_1(t)}{(2 \cos t/2)} \cos \left[\frac{t}{2} + \beta V_2(t) \right]. \end{aligned}$$

Легко заметить

$$\Omega_1(t) \sim \frac{(\ln 2\pi/t)^{\beta-1}}{t} \quad \text{и} \quad \Omega_2(t) \sim \frac{(\ln 2\pi/t)^\beta}{t} \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Взяв сначала в лемме 3.7 $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta \geq 0$, $\omega_{0,\beta}(t) = \Omega_2(t, 0, \beta)$, получим

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \cdot \Omega_2(t, 0, \beta) \sin nt dt = o(\ln^\beta n).$$

Далее взяв в ней $g(t) = \varphi_x(t)$, $\beta_2 = \beta \geq 0$, $\beta_1 = \beta - 1$, $\omega_{0,\beta-1}(t) = \Omega_1(t, 0, \beta)$, получим

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi_x(t) \cdot \Omega_1(t, 0, \beta) \cos nt dt = o(\ln^\beta n),$$

то есть снова $R_{1n}(x) = o(1)$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.3. Согласно (1.7) и (1.9) имеем

$$\tilde{t}_n^{\alpha,\beta}(x) - \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi_x(t) \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi_x(t) H_n^{\alpha,\beta}(t) dt.$$

Далее поступим так же, как и в доказательстве теоремы 2.1. Первое слагаемое оценивается с помощью первого утверждения леммы 3.2, второе оценивается применением лемм 3.3 и 3.4, с единственной разницей – вместо $g(t)$ в лемме 3.7 берем на этот раз $\psi_x(t)$. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Доказательство теорем 2.2 и 2.4. Доказываются таким же образом, что и теоремы 2.1 и 2.3, с той разницей, что мы будем пользоваться вторыми свойствами лемм 3.1, 3.2, леммой 3.3 и леммой 3.8. В остальном все доказательство проводится тем же путем. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper gives sufficient conditions for (C, α, β) -summability of Fourier trigonometric series and conjugate series.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1 (1959).
- [2] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Ичисления, Москва (1996).
- [3] И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, Наука (1974).
- [4] A. Zygmund, "Sur une generalization de la methode de Cesaro", Comptes Renders, Paris, **197**, 870 – 872 (1924).
- [5] G. Das and K. C. Panda, "On a generalized absolute harmonic summability of Fourier series", Indian J. pure appl. Math., **18** (8), 705 – 722 (1987).
- [6] S. C. Jena, M. A. Abid, "Behaviour of an associated conjugate series of a Fourier series", Proc. Indian. Acad. Sci.(Math.Sci.), **103**, no. 3, 295 – 301 (1993).
- [7] Л. Жижиашвили, "О некоторых свойствах (C, α) средних рядов Фурье и сопряженных тригонометрических рядов", Мат. сборник, **63** (105), no. 4, 489 – 504 (1964).

Л. Н. ГАЛОЯН

- [8] G. H. Hardy and Littlewood, “A convergence criterion for Fourier series”, Math. Sbornik, **28**, 612 – 634 (1928).
- [9] G. Das and P. C. Mohapatra, “On a generalized harmonic-Cesaro method of summability”, Indian J. Math., **22**, 33 – 47 (1980).
- [10] H. Horkawa, “A note on generalized harmonic-Cesaro summability”, Internat. J. Math. and Math. Sci., **7**, no. 2, 413 – 414 (1983).
- [11] Г. Харди, Расходящиеся Ряды, (1949).
- [12] А. И. Маркушевич, Теория Аналитических Функций, **1**, Москва (1950).

Поступила 27 сентября 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 41-52.

НОРМАЛИЗИРОВАННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ОБРАЗЫ НЕКОТОРЫХ 2×2 КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

Л. З. ГЕВОРГЯН

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: *levgev@hotmail.com*

Аннотация. Описываются нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц.

MSC2010 number: 47A12, 47B15, 51M04.

Ключевые слова: Нормализованный числовой образ; конические сечения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – гильбертово пространство и A – оператор в H . Множество

$$W_n(A) = \left\{ \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} : Au \neq \theta \right\}$$

в [1] получило принятое в настоящее время название – нормализованный числовой образ оператора A . Ранее Густафсон [5] разработал теорию антисобственных векторов, основанный на величине

$$\inf_{Au \neq \theta} \frac{|\langle Au, u \rangle|}{\|Au\| \cdot \|u\|}.$$

Практически одновременно М. Г. Крейн в [6] ввел понятие угловой девиации оператора A . Ее важность определяется ролью, которая она играет, в частности, в вопросах определения скорости сходимости итераций при решении операторных уравнений методом Ричардсона [4].

Некоторые свойства нормализованного числового образа исследованы в [2]. В [3] описаны эти множества для некоторых конечномерных и бесконечномерных операторов. Оказывается, что в отличие от обычного числового образа оператора, который согласно классической теореме Хаусдорфа-Теплица всегда

есть ограниченное выпуклое подмножество комплексной плоскости, нормализованный числовой образ имеет довольно сложную геометрическую структуру. Даже в простейшем нетривиальном случае ситуация довольно неординарна. Поэтому интерес к такому частному случаю кажется вполне оправданным. Ниже мы опишем нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \sigma & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda, \mu, \nu, \sigma \in \mathbb{C}.$$

2. СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Нормализованный числовой образ нормальной матрицы A есть часть одной ветви гиперболы, содержащаяся внутри единичного круга. В исключительных случаях он может вырождаться в хорду или радиус единичного круга.*

Доказательство. Пусть A – нормальная матрица в двумерном пространстве. Очевидно, что приведя A к канонической форме (нетрудно заметить, что унитарное преобразование произвольного оператора не меняет нормализованный числовой образ), ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Сперва мы рассмотрим случай $\lambda, \mu \neq 0$ и пусть $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и $\arg \lambda = \phi$, $\arg \mu = \psi$ (это обозначение будет использовано на протяжении всей работы).

Тогда

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{|\alpha|^2 \lambda + |\beta|^2 \mu}{\sqrt{|\alpha|^2 |\lambda|^2 + |\beta|^2 |\mu|^2} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив частное $|\alpha|^2 / |\beta|^2$ через $t \in [0; +\infty]$, мы получим

$$(2.1) \quad z(t) = x(t) + iy(t) = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{\lambda t + \mu}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}},$$

$$z(+\infty) = e^{i \arg \lambda}.$$

Пусть $\lambda = a + ib$ и $\mu = c + id$. Отделив действительную и мнимую части, будем иметь

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x &= x(t) = \frac{at + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t + c^2 + d^2}}, \\ y &= y(t) = \frac{bt + d}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t + c^2 + d^2}}, \end{aligned}$$

откуда $\frac{y}{x} = \frac{bt + d}{at + c}$. Подставив $t = \frac{dx - cy}{ay - bx}$ в первое из уравнений (2.1), получим

$$\begin{aligned} (ad - bc)^2 &= (a^2 + b^2)(dx - cy)^2 \\ &\quad + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(dx - cy)(ay - bx) + (c^2 + d^2)(ay - bx)^2. \end{aligned}$$

Расположив степени x и y по порядку, получим

$$\begin{aligned} &(d^2(a^2 + b^2) + b^2(c^2 + d^2) - bd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))x^2 \\ &+ ((ad + bc)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2ab(c^2 + d^2) - 2cd(a^2 + b^2))xy \\ &+ (c^2(a^2 + b^2) + a^2(c^2 + d^2) - ac(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))y^2 \\ &= (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} &\left(\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi - \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \sin \varphi \sin \psi \right) x^2 \\ &+ \left(\frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi - \sin 2\psi \right) xy \\ &+ \left(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|} \cos \varphi \cos \psi \right) y^2 = \sin^2(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Обозначив $k = \frac{|\lambda|^2 + |\mu|^2}{|\lambda||\mu|}$, получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &(\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi - k \sin \varphi \sin \psi) x^2 + \\ &(k \sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi - \sin 2\psi) xy + \\ &(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - k \cos \varphi \cos \psi) y^2 = \sin^2(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

□

Дискриминант квадратичной формы (2.3) равен $D = -\frac{k^2-4}{4} \sin^2(\varphi - \psi)$. Так как $k \geq 2$ в силу неравенства между средне-арифметическим и средне-геометрическим, то кривая, определенная уравнением (2.2) есть часть одной ветви гиперболы, содержащаяся внутри единичного круга (вырожденная, если $\sin(\varphi - \psi) = 0$, что эквивалентно $\varphi = \psi$, $\varphi = \psi - \pi$ или $k = 2$, означающее $|\lambda| = |\mu|$). Действительно, если $\varphi = \psi$, то

$$z(t) = \frac{|\lambda|t + |\mu|}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}} e^{i\varphi}$$

и кривая сводится к двум отрезкам, соединяющим точки $e^{i\varphi}$ и $2\frac{\sqrt{|\lambda||\mu|}}{|\lambda|+|\mu|} \cdot e^{i\varphi}$ в противоположных направлениях. При $\varphi = \psi - \pi$ имеем

$$z(t) = \frac{|\lambda|t - |\mu|}{\sqrt{|\lambda|^2 t^2 + (|\lambda|^2 + |\mu|^2)t + |\mu|^2}} e^{i\varphi}.$$

В этом случае $W_n(A)$ есть диаметр единичного круга, соединяющий точки $-e^{i\varphi}$ и $e^{i\varphi}$. Если же $|\lambda| = |\mu|$, то

$$z(t) = \frac{\lambda t + \mu}{|\lambda|t + |\mu|} = e^{i\varphi} \frac{t}{1+t} + e^{i\psi} \frac{1}{1+t}$$

представляет собой выпуклую комбинацию $e^{i\varphi}$ и $e^{i\psi}$.

Квадрат длины действительной полуоси есть

$$m^2 = \frac{4|\lambda||\mu|}{(|\lambda| + |\mu|)^2} \cos^2 \frac{\phi - \psi}{2}.$$

Вершина гиперболы имеет полярные координаты $\left(m; \frac{\varphi + \psi}{2}\right)$, откуда

$$\inf_{Ax \neq \theta} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|Ax\| \|x\|} = \frac{2\sqrt{|\lambda||\mu|}}{|\lambda| + |\mu|} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Эта формула является обобщенным неравенством Канторовича [4]. В оставшемся случае $\mu = 0$, имеем

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{\lambda |\alpha|}{|\lambda| \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{i\varphi}, \quad (\alpha \neq 0),$$

так что в этом случае кривая есть полуоткрытый интервал $(0, e^{i\varphi}]$.

3. СЛУЧАЙ МАТРИЦЫ С НУЛЕВОЙ СТРОКОЙ ИЛИ СТОЛБЦОМ

а) Пусть

$$(3.1) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и $\langle Au, u \rangle = \lambda |\alpha|^2 + \nu \beta \bar{\alpha}$.

Условие $\alpha = 0$ означает $\langle Au, u \rangle = 0$, поэтому рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Пусть далее

$$w = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|}.$$

Имеем

$$w = \frac{\lambda |\alpha|^2 + \nu \beta \bar{\alpha}}{|\lambda \alpha + \nu \beta| \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = \frac{\lambda + \nu z}{|\lambda + \nu z| \cdot \sqrt{1 + |z|^2}},$$

где $z = \frac{\beta}{\alpha}$. Обозначая $\tau(z) = \frac{\lambda + \nu z}{|\lambda + \nu z|}$, $z \neq -\frac{\lambda}{\nu}$, получаем

$$(3.2) \quad w(z) = \frac{\tau(z)}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Пусть $C_r = \{z : |z| = r\}$, $(r > 0)$ и $D_r = \{\lambda + \nu z : z \in C_r\}$. Очевидно, что D_r есть окружность радиуса $|\nu| r$ с центром в точке λ . Так как $W_n(cA) = e^{i \arg c} W_n(A)$ для любого комплексного c , то можно предположить, что один из элементов матрицы A есть положительное число. Для простоты предположим, что $\lambda > 0$. Если $0 < r \leq \frac{\lambda}{|\nu|}$, то

$$(3.3) \quad |\arg \tau(z)| \leq \arcsin \frac{r |\nu|}{\lambda}$$

и образ C_r при отображении (3.2) есть дуга окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, определенная неравенством (3.3), так что концы этой дуги будут иметь координаты

$$(3.4) \quad \left(\frac{\sqrt{1 - r^2 |\nu|^2 / \lambda^2}}{\sqrt{1 + r^2}}; \pm \frac{r |\nu| / \lambda}{\sqrt{1 + r^2}} \right).$$

Если же $r > \frac{\lambda}{|\nu|}$, то образом C_r будет вся окружность. Границей $W_n(A)$ является огибающая этих кривых.

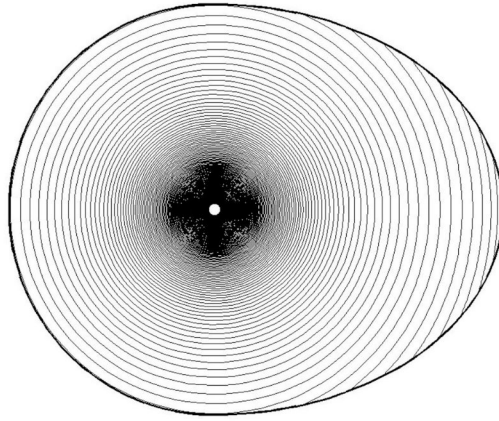


Рис. 1. Кривые уровня и их огибающая.

Исключая r из формулы (3.4), получаем

$$y = \pm \frac{|\nu|}{\sqrt{\lambda^2 + |\nu|^2}} \sqrt{1 - x^2}.$$

Предложение 3.1. Пусть A – матрица вида (3.1) с некоторым $\lambda > 0$. Ее нормализованным числовым образом является область, ограниченная в правой полуплоскости эллипсом с большой полуосью 1 и малой полуосью $\frac{|\nu|}{\sqrt{\lambda^2 + |\nu|^2}}$, а в левой полуплоскости – полуокружностью с радиусом, равным малой полуоси. Для произвольного ненулевого комплексного λ вся картина должна быть повернута на угол $\arg \lambda$.

Нетрудно заметить, что для жордановой клетки с нулевой диагональю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нормализованным числовым образом является открытый единичный круг $\{z : |z| < 1\}$.

б) Случай матрицы с нулевым столбцом. Пусть

$$(3.5) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$S = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\nu|^2}} \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \bar{\nu} & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица S унитарна и имеет место равенство

$$SCS^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

означающее, что матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентны. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Предложение 3.2. *Нормализованные числовые образы матриц (3.1) и (3.5) совпадают при $|\nu| = |\sigma|$.*

4. СЛУЧАЙ МАТРИЦЫ С НУЛЕВОЙ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

Предложение 4.1. *Нормализованный числовой образ матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu \neq 0, \quad \sigma \neq 0,$$

есть эллипс.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{\nu\beta\bar{\alpha} + \sigma\alpha\bar{\beta}}{\sqrt{|\nu\beta|^2 + |\sigma\alpha|^2} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \exp\left(i \frac{\arg \nu - \arg \sigma}{2}\right),$$

после несложных преобразований для указанного частного получаем

$$(4.1) \quad \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \|u\|} = \frac{mz + \bar{z}}{\sqrt{m^2 + |z|^2} \sqrt{1 + |z|^2}} \exp\left(i \frac{\arg \nu + \arg \sigma}{2}\right),$$

где $m = \frac{|\nu|}{|\sigma|}$, $z \in \mathbb{C}$. Первый множитель в правой части (4.1) равен

$$\frac{mre^{it} + re^{-it}}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}} = \frac{r(m+1)\cos t + ir(m-1)\sin t}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}}.$$

Эта кривая (при фиксированном r) есть эллипс с полуосями

$$\frac{r(m+1)}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}} \quad \text{и} \quad \frac{r|m-1|}{\sqrt{m^2 + r^2}\sqrt{1 + r^2}},$$

каждая из которых достигает своего наибольшего значения при $r = \sqrt{m}$. Поэтому границей интересующей нас области будет кривая, которая получается, если в (4.1) подставить $z = \sqrt{m} \exp(it)$. Таким образом, область, ограниченная эллипсом

$$w(t) = \left(\cos t + i \frac{|\nu| - |\sigma|}{|\nu| + |\sigma|} \sin t \right) \exp \left(i \frac{\arg \nu + \arg \sigma}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

есть нормализованный числовой образ матрицы A . □

5. СЛУЧАЙ ЖОРДАНОВОЙ КЛЕТКИ

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{|\alpha|^2 + \nu\beta\bar{\alpha} + |\beta|^2}{\sqrt{|\alpha + \nu\beta|^2 + |\beta|^2} \cdot \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}.$$

Обозначив $z = \frac{\alpha}{\beta} e^{-i \arg \nu}$, получим

$$w = \frac{1 + |\nu|\bar{z} + |z|^2}{\sqrt{||\nu| + z|^2 + 1} \cdot \sqrt{|z|^2 + 1}},$$

так что в дальнейшем мы будем считать, что $\nu > 0$ и опускать знак модуля.

Тогда

$$w = \frac{1 + \nu x + x^2 + y^2 - i\nu y}{\sqrt{(\nu + x)^2 + y^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

Зафиксировав x или y , получим координатные кривые $w = f(y)$ или $w = g(x)$.

Используя производные легко усмотреть, что точка, в которой достигается минимум $g(x)$ не зависит от y и имеет место при $x = -\frac{\nu}{2}$. Другое доказательство

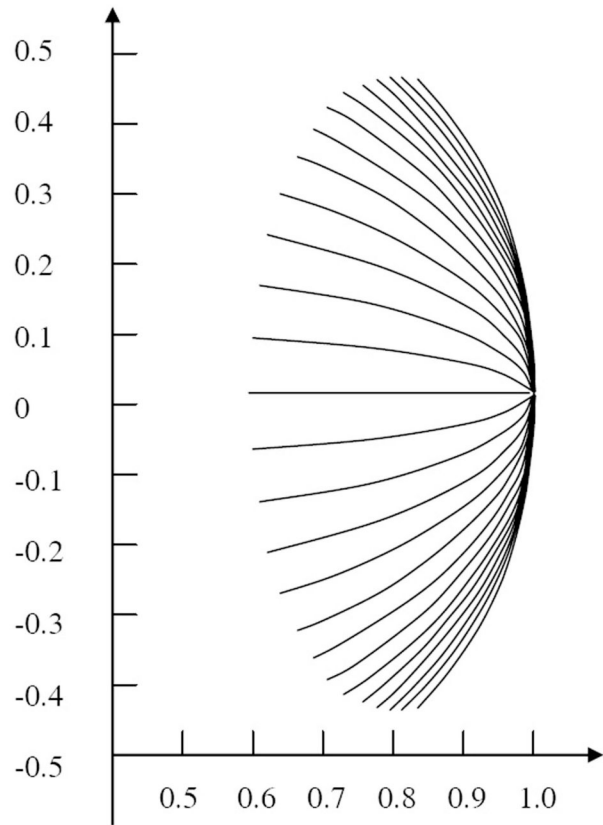


Рис. 2. Координатные кривые $w = g(x)$ для случая $\nu = 1$, $y = [-1.3, 1.3]$ с шагом 0.1

этого утверждения можно получить из формулы

$$w = \frac{t^2 + 1 - \frac{\nu^2}{4} + y^2 - i\nu y}{\sqrt{(\frac{\nu}{2} + t)^2 + y^2 + 1} \cdot \sqrt{(\frac{\nu}{2} - t)^2 + y^2 + 1}}, \quad t = x + \frac{\nu}{2}.$$

Таким образом, границей этой области является кривая, которая получится, если в $w = f(y)$ подставить экстремальное значение $x = -\frac{\nu}{2}$. Найдем образ вертикальной прямой $z = -\nu/2 + iy, y \in \mathbb{R}$

$$f(y) = \frac{1 - \nu^2/4 + y^2 - i\nu y}{1 + \nu^2/4 + y^2}.$$

Имеем

$$f(y) = \frac{4}{4 + \nu^2} - \frac{\nu^2}{4 + \nu^2} \cdot \frac{1 + \nu^2/4 - y^2}{1 + \nu^2/4 + y^2} - \frac{i\nu y}{1 + \nu^2/4 + y^2}.$$

Обозначив $\frac{2y}{\sqrt{4+\nu^2}} = \tan(t/2)$, получим

$$w = \frac{4}{4+\nu^2} + \frac{\nu^2}{4+\nu^2} \cos t + i \frac{\nu}{\sqrt{4+\nu^2}} \sin t, \quad t \in [0; 2\pi).$$

Окончательно получаем следующий результат.

Предложение 5.1. *Нормализованный числовой образ матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

есть внутренность эллипса

$$w = \left(\frac{4|\lambda|^2}{4|\lambda|^2 + |\nu|^2} + \frac{|\nu|^2}{4|\lambda|^2 + |\nu|^2} \cos t + i \frac{|\nu|}{\sqrt{4|\lambda|^2 + |\nu|^2}} \sin t \right) \exp(i \arg \lambda),$$

где $t \in [0, 2\pi)$.

Случай общей ненормальной матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ с различными собственными значениями ($\lambda \neq \mu, \lambda, \mu \neq 0$) будет рассмотрен схематично. Так как $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix}$ суть собственные векторы A , можно положить $u = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$(5.1) \quad \frac{\langle Au, u \rangle}{\|Au\| \cdot \|u\|} = \frac{\lambda |s|^2 + \nu \bar{s} + \mu}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2} \cdot \sqrt{|s|^2 + 1}}.$$

Средний член удовлетворяет неравенству

$$\frac{|\nu \bar{s}|}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2} \cdot \sqrt{|s|^2 + 1}} \leq \frac{|\nu|}{|\mu|}.$$

Пусть a, c – ненулевые, а b – произвольное комплексное число. Тогда

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|a+b|^2 + |c|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |c|^2}} \right| \leq \frac{|b|}{\sqrt{|a+b|^2 + |c|^2} \sqrt{|a|^2 + |c|^2}},$$

откуда

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\lambda s|^2 + |\mu|^2}} \right| \leq \frac{|\nu|}{|\lambda s| \cdot |\mu|}$$

и

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|\lambda s + \nu|^2 + |\mu|^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\lambda s|^2 + |\mu|^2}} \right| \leq \frac{|\nu|}{|\mu|^2}.$$

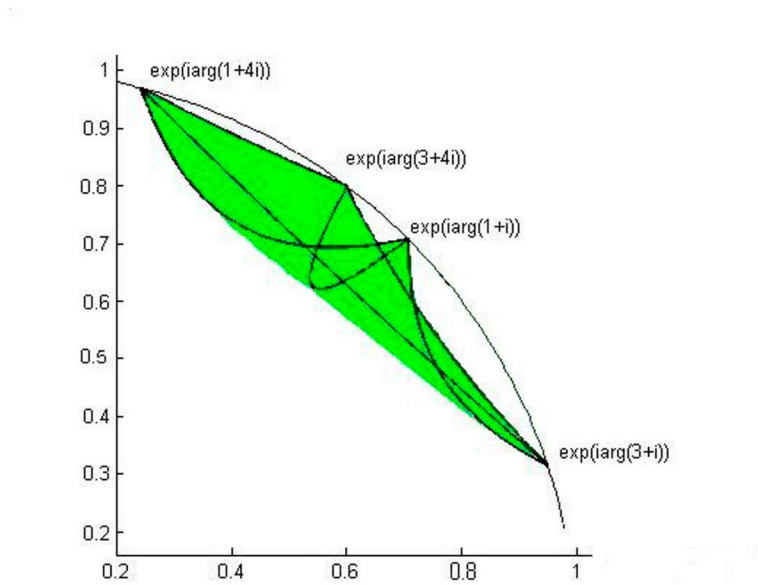


Рис. 3. Нормализованный числовой образ диагональной матрицы 4×4

Разность между двумя выражениями, определенными формулами (2.1) и (5.1) может быть оценена как

$$\frac{|\lambda| \cdot |\nu|}{|\lambda| \cdot |\mu|} + \frac{|\nu|}{|\mu|} + \frac{|\nu| |\mu|}{|\mu|^2} = 3 |\nu|,$$

следовательно, для достаточно малых значений $|\nu|$ нормализованный числовой образ A лежит в малой окрестности гиперболы, определенной Предложением 1. Для достаточно больших значений $|\nu|$ нормализованный числовой образ A мало отличается от нормализованного числового образа жордановой клетки.

С целью дать представление о взаимовлиянии различных собственных значений ниже представлен нормализованный числовой образ матрицы

$$A = \text{diag} (1 + i, 3 + i, 3 + 4i, 1 + 4i),$$

полученный методом Монте Карло. Черным цветом выделены куски гипербол (см. Рис. 3).

Abstract. A description of the normalized numerical ranges of some complex 2×2 matrices is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Auzinger, "Sectorial operators and normalized numerical range", Appl. Numer. Math., **45** 367 – 388 (2003).
- [2] L. Gevorgyan, "On the convergence rate of iterations and the normalized numerical range of an operator", Math. Sci. Res. J., **8**, no. 1, 16 – 26 (2004).
- [3] L. Gevorgyan, "On some properties of the normalized numerical range", J. Contemp. Math. Anal., **41**, no.1, 14 – 21 (2006).
- [4] L. Gevorgyan, "Normalized numerical ranges of some operators", Operators and Matrices, **3**, 145 – 153 (2009).
- [5] K. Gustafson, "Antieigenvalue inequalities in operator theory, in Inequalities III", Proc. Los Angeles Symposium, ed. O. Shisha, Academic Press, 115 – 119 (1969).
- [6] М. Г. Крейн, "Об угловой локализации спектра мультипликативного интеграла в гильбертовом пространстве", Функц. Анализ и его приложения, **3**, no. 1, 89 – 90 (1969).

Поступила 5 ноября 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 5, 2011, стр. 53-64.

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *petrosyan@instmath.sci.am*

Аннотация. В статье рассматриваются ограниченные операторы, заданные в банаховых пространствах $L^\infty(B)$ и $L^1(B)$, где B – единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Областью значений этих операторов являются, соответственно, пространства $A_\infty(\varphi)$ и $A^1(\psi)$ голоморфных функций, которые зависят от нормальной пары весовых функций $\{\varphi, \psi\}$.

MSC2010 number: 30H05, 46E15

Ключевые слова: банаховые пространства; аналитические функции; нормальная пара; проекторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются пространства $A_\infty(\varphi)$ и $A^1(\psi)$ функций, голоморфных в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$. Эти пространства зависят от пары весовых функций $\{\varphi, \psi\}$, и их естественным образом можно рассматривать как замкнутые подпространства соответственно $L^\infty(B)$ и $L^1(B)$.

Многие свойства весовых пространств голоморфных функций, такие, как их полнота, ограниченность функционала “значение в точке”, непрерывность q -растяжения и др. (см. предложения 2.1–2.4) справедливы для весьма общего класса весовых функций: достаточно, чтобы они были положительными, непрерывными и удовлетворяли (2.1). В то же время вопросы, связанные с ограниченностью операторов естественного проектирования требуют, чтобы скорость стремления к нулю функции φ была бы ограничена сверху и снизу степенными функциями. В связи с этим, следуя Шилдсу и Вильямсу [1], вводится понятие нормальной функции (определение 2.1) и понятие нормальной пары весовых функций (определение 2.2). Понятие нормальной пары оказалось удобным для формулировки

утверждений, связанных с оценками интегралов и для описания проекторов, заданных в весовых пространствах (лемма 3.4, теоремы 4.1 и 4.2).

В данной статье некоторые из результатов, полученных в [1] для случая единичного круга на плоскости, обобщаются на случай единичного шара в $\mathbb{C}^n$.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ – скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$, а $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ – соответствующая норма;

$B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$;

$S = \partial B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ – его граница, являющаяся единичной сферой в $\mathbb{C}^n$;

$H(B)$ – множество всех функций, голоморфных в B ;

$d\nu$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $\nu(B) = 1$,

$d\sigma$ – мера площади поверхности на S , нормированная условием $\sigma(S) = 1$;

для мультииндекса $m = (m_1, \dots, m_n)$ обозначим

$m! = m_1! \cdots m_n!$, $|m| = m_1 + \cdots + m_n$, $z^m = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$.

2. ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ положительны и непрерывны на $[0, 1)$ и

$$(2.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \psi(r) dr < \infty.$$

Среди этих функций выделим так называемые нормальные функции и нормальные пары.

Определение 2.1. Положительная и непрерывная на $[0, 1)$ функция φ называется нормальной, если существуют три константы $0 < \epsilon < k$ и $0 \leq r_0 < 1$ такие, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{\varphi(r)}{(1-r)^\epsilon} \text{ убывает при } r_0 \leq r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^\epsilon} = 0, \\ & \frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} \text{ возрастает при } r_0 \leq r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} = \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что ϵ и k определяются функцией φ неоднозначно.

Определение 2.2. Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ составляет нормальную пару, если φ нормальна и существует такое число α (индекс пары), что

$$(2.3) \quad \varphi(r)\psi(r) = (1 - r^2)^\alpha, \quad 0 \leq r < 1, \quad \text{и} \quad \int_0^1 \psi(r) dr < \infty.$$

Лемма 2.1. Если функция φ нормальна, то существует такая функция ψ , что $\{\varphi, \psi\}$ является нормальной парой.

Доказательство см. в [1]. Отметим, что если $\alpha > k$, то функция ψ также нормальна с соответствующими степенями $\alpha - k$ и $\alpha - \epsilon$.

Пусть φ и ψ удовлетворяют (2.1). Продолжим эти функции в B , положив $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ и $\psi(z) = \psi(|z|)$ и определим пространства голоморфных функций:

$$A_\infty(\varphi) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in B} |f(z)|\varphi(z) < \infty \right\};$$

$$A^1(\psi) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_\psi = \int_B |f(z)|\psi(z) d\nu(z) < \infty \right\}.$$

Эти пространства в указанных нормах являются линейными нормированными пространствами. Исследуем их свойства подробнее.

При фиксированном $z \in B$ отображение $f \mapsto f(z)$ является линейным функционалом «значение в точке» в $A^1(\psi)$. Как следует из следующего предложения, этот функционал непрерывен.

Предложение 2.1. Для всякой функции $f \in A^1(\psi)$ и любой точки $z \in B$

$$|f(z)| \leq \frac{2^{2n}}{(1 - |z|)^{2n-1}} \left(2n \int_{(1+|z|)/2}^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Доказательство. Следующая оценка для ядра Пуассона очевидна:

$$(2.4) \quad P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^{2n}} \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^{2n-1}} \leq \frac{2}{(1 - |z|)^{2n-1}}.$$

Пусть $z \in B$ и $|z| < R < 1$. В силу субгармоничности функции $|f(Rz)|$ в окрестности шара $\overline{B}$ и (2.4) имеем

$$(2.5) \quad |f(Rz)| \leq \int_S |f(R\zeta)| P(z, \zeta) d\sigma(\zeta) \leq \frac{2}{(1 - |z|)^{2n-1}} \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta).$$

Среднее интегральное $M(R) = \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta)$ является неубывающей величиной от R . Поэтому

$$\begin{aligned} & 2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \int_S |f(R\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq \\ & \leq 2n \int_R^1 \int_S |f(t\zeta)| r^{2n-1} \psi(r) dr d\sigma(\zeta) = \\ (2.6) \quad & = \int_{R < |z| < 1} |f(z)| \psi(r) d\nu(z) \leq \|f\|_\psi. \end{aligned}$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$|f(Rz)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^{2n-1}} \left(2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Сделав замену переменной $Rz \mapsto z$, получим

$$|f(z)| \leq \frac{2}{(R-|z|)^{2n-1}} \left(2n \int_R^1 r^{2n-1} \psi(r) dr \right)^{-1} \|f\|_\psi.$$

Взяв $R = (1 + |z|)/2$, получим наше утверждение. $\square$

Предложение 2.2. *Пространства $A^1(\psi)$ и $A_\infty(\varphi)$ являются банаховыми.*

Доказательство. Очевидно, эти пространства являются линейными нормированными, поэтому достаточно доказать их полноту. Сначала докажем полноту $A^1(\psi)$. Пусть последовательность f_j фундаментальна в $A^1(\psi)$ и пусть K — компактное подмножество B . Из предложения 2.1 следует, что существует константа $C = C(K)$ такая, что

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq C \|f\|_\psi$$

для всех $f \in A^1(\psi)$. Следовательно,

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C \|f_j - f_k\|_\psi$$

для любых $z \in K$ и j, k . Поскольку f_j фундаментальна в $A^1(\psi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность f_j равномерно сходится к некоторой функции h , голоморфной в B . Из теоремы Фату следует, что $h \in A^1(\psi)$.

Случай $A_\infty(\varphi)$ проще. Пусть $f_j \in A_\infty(\varphi)$. На компактном подмножестве K шара функция $\varphi(z)$ ограничена от нуля, поэтому

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C \varphi(z) |f_j(z) - f_k(z)| = C \|f_j - f_k\|_\varphi, \quad z \in K.$$

Если последовательность f_j фундаментальна в $A_\infty(\varphi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность f_j равномерно сходится к некоторой функции h , голоморфной в B . Нетрудно видеть, что f_j сходится к h и в норме $A_\infty(\varphi)$. $\square$

В следующем предложении утверждается непрерывность ϱ -растяжения в пространстве $A^1(\psi)$.

Предложение 2.3. Пусть $f \in A^1(\psi)$ и $f_\varrho(z) = f(\varrho z)$. Тогда

$$\|f_\varrho - f\|_\psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow 1^-.$$

Доказательство. Используя выражение для элемента нормированного объема $d\nu$ в полярных координатах

$$(2.7) \quad d\nu(z) = 2n r^{2n-1} dr d\sigma(\zeta), \quad z = r\zeta, \quad \text{где } \zeta \in S,$$

(см., [3, Lemma 1.8]), для любого числа $\delta \in (0, 1)$ будем иметь

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \|f_\varrho - f\|_\psi &\leq \int_{|z| < \delta} |f(\varrho z) - f(z)| \psi(z) d\nu(z) + \\ &+ 2n \int_\delta^1 \left\{ \int_S (|f(\varrho r\zeta)| + |f(r\zeta)|) d\sigma(\zeta) \right\} r^{2n-1} \psi(r) dr. \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $|f(w)|^p$ субгармонична, ее среднее по сфере

$$m(\varrho) = \int_S |f(\varrho r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ϱ : $m(\varrho) \leq m(1)$. Отсюда и из (2.8)

$$\|f_\varrho - f\|_\psi \leq \int_{|z| < \delta} |f(\varrho z) - f(z)| \psi(z) d\nu(z) + 2 \int_{\delta \leq |z| < 1} |f(z)| \psi(z) d\nu(z),$$

откуда видно, что выбрав число δ , а затем ϱ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой. $\square$

Отметим, что в случае $n = 1$ утверждения предложений 2.2 и 2.3 доказаны в [1]. Как известно, функции, голоморфные в окрестности $\overline{B}$, равномерно на $\overline{B}$ приближаются полиномами от z (например, отрезками ряда Тейлора), поэтому из предложения 2.3 получаем следующее

Следствие 2.1. Голоморфные полиномы плотны в $A^1(\psi)$.

Нетрудно заметить, что предложение 2.3 и его следствие для пространства $A_\infty(\varphi)$ неверны. Они справедливы в следующем слабом варианте.

Предложение 2.4. Пусть $f \in A_\infty(\varphi)$. Тогда

- (i) f_ϱ слабо* сходится к f при $\varrho \rightarrow 1^-$.
- (ii) Голоморфные полиномы слабо* плотны в $A_\infty(\varphi)$.

Доказательство. (i) Нужно доказать, что для любой функции $g \in L^1(B)$ имеет место равенство

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} \int_B \varphi(w) f_\varrho(w) g(w) d\nu(w) = \int_B \varphi(w) f(w) g(w) d\nu(w).$$

Это следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, поскольку $f_\varrho(w) \rightarrow f(w)$ поточечно при $\varrho \rightarrow 1^-$ и $w \in B$ и, кроме того, $|(\varphi f_\varrho g)(w)| \leq \|f\|_\varphi |g(w)|$.

(ii) Для любого $\varrho \in (0, 1)$ частичные суммы ряда Тейлора функции $f_\varrho(z)$ сходятся к ней равномерно на $\overline{B}$. Из этого факта, с учетом доказанного выше пункта (i) следует утверждение (ii). $\square$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Всюду ниже предполагается, что $\{\varphi, \psi\}$ составляют нормальную пару.

Лемма 3.1. Для любого числа $c > 0$ справедлива оценка

$$\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \langle \zeta, z \rangle|^{n+c}} = O((1 - |z|)^{-c}) \quad \text{при } |z| \rightarrow 1^-.$$

Доказательство см. в [3, Глава 1, §3].

Лемма 3.2. Для $\gamma > -1$ и $m > 1 + \gamma$ имеем

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\gamma dr \leq C(1 - \rho)^{1+\gamma-m}, \quad 0 < \rho < 1,$$

где константа $C = C(m, \gamma)$ от ρ не зависит.

Доказательство см. в [1].

Следующая лемма является некоторой модификацией леммы 8 из [1] и мы приведем ее доказательство. Отметим, что константа c , встречающаяся ниже в разных местах, необязательно одна и та же.

Лемма 3.3. Пусть $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара, $\alpha + \beta - k > -1$ и $m \geq 1 + \alpha + \beta$.

Тогда

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr \leq c \frac{1}{\varphi(\rho)} (1 - \rho)^{1+\alpha+\beta-m}, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Доказательство. В обозначениях (2.2) и (2.3) имеем

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr = \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^1 = I_1 + I_2.$$

Первый интеграл при $0 \leq \rho < 1$ ограничен. При $\rho > r_0$ для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r_0}^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta (1 - r^2)^\alpha \frac{1}{\varphi(r)} dr = \int_{r_0}^\rho + \int_\rho^1 \leq \\ &\leq c \int_{r_0}^\rho (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-\varepsilon} \frac{(1 - r)^\varepsilon}{\varphi(r)} dr + \\ &+ c \int_\rho^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-k} \frac{(1 - r)^k}{\varphi(r)} dr \leq \\ &\leq c \frac{(1 - \rho)^\varepsilon}{\varphi(\rho)} \int_{r_0}^\rho (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-\varepsilon} dr + \\ &+ c \frac{(1 - \rho)^k}{\varphi(\rho)} \int_\rho^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^{\alpha+\beta-k} dr. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 3.2 следует требуемое утверждение, так как $\alpha + \beta - \varepsilon > \alpha + \beta - k > -1$ и $m > 1 + \alpha + \beta - \varepsilon > 1 + \alpha + \beta - k$. $\square$

Следующая лемма является основной.

Лемма 3.4. Если $\alpha + \beta - k > -1$ и $m \geq 1 + \alpha + \beta$, то

$$I = \int_B \frac{(1 - |w|^2)^\beta}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+m}} \psi(w) d\nu(w) \leq c \frac{1}{\varphi(z)} (1 - |z|)^{1+\alpha+\beta-m}, \quad z \in B.$$

Доказательство. Пусть $w = r\zeta$, где $r = |w|$, $\zeta \in S$. Пользуясь формулой (2.7), будем иметь

$$I = 2n \int_0^1 (1 - r^2)^\beta \psi(r) r^{2n-1} \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \langle \zeta, rz \rangle|^{n+m}} \right) dr.$$

Согласно лемме 3.1, внутренний интеграл имеет порядок $O((1 - r|z|)^{-m})$. Обозначив $|z| = \rho$, получим

$$I \leq c \int_0^1 (1 - \rho r)^{-m} (1 - r)^\beta \psi(r) dr.$$

Далее, ввиду леммы 3.3,

$$I \leq c \frac{1}{\varphi(\rho)} (1 - \rho)^{1+\alpha+\beta-m} = c \frac{1}{\varphi(z)} (1 - |z|)^{1+\alpha+\beta-m}.$$

□

4. ПРОЕКТОРЫ

Рассмотрим отображения

$$T_\infty: A_\infty(\varphi) \mapsto L^\infty(B), \quad T_1: A_1(\psi) \mapsto L^1(B),$$

определяемые равенствами $T_\infty f = \varphi f$, $T_1 g = \psi g$. Очевидно, они являются изометриями. Для их областей значений мы используем следующие обозначения:

$$TA^1 = T_1 A^1(\psi), \quad TA_\infty = T_\infty A_\infty(\varphi).$$

Для $\alpha > -1$ и $1 \leq p < \infty$ через A_α^p обозначим множество голоморфных функций пространства $L_\alpha^p = L^p(B, (1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z))$, т.е. $A_\alpha^p = L_\alpha^p \cap H(B)$, а через

$$K_\alpha(z, w) = \frac{\gamma_\alpha}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1+\alpha}},$$

воспроизводящее ядро гильбертова пространства A_α^2 . Здесь

$$\gamma_\alpha = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Теорема 4.1. (i) *Оператор P , определяемый равенством*

$$(Ph)(z) = \int_B K_\alpha(z, w) h(w) \psi(w) d\nu(w), \quad h \in L^\infty(B), \quad z \in B,$$

является ограниченным оператором, отображающим $L^\infty(B)$ на $A_\infty(\varphi)$; оператор $T_\infty P$ является ограниченным проектором из $L^\infty(B)$ на его подпространство TA_∞ .

(ii) *Оператор Q , определяемый равенством*

$$(Qf)(z) = \int_B K_\alpha(z, w) f(w) \varphi(w) d\nu(w), \quad f \in L^1(B), \quad z \in B,$$

является ограниченным оператором, отображающим $L^1(B)$ на $A^1(\psi)$; оператор $T_1 Q$ является ограниченным проектором из $L^1(B)$ на его подпространство TA^1 .

Доказательство. (i) Применяя лемму 3.4, получим

$$|(Ph)(z)| \leq \gamma_\alpha \|h\|_\infty \int_B \frac{\psi(w) d\nu(w)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \leq c \|h\|_\infty \frac{1}{\varphi(z)},$$

откуда следует, что P является ограниченным оператором, отображающим $L^\infty(B)$ в $A_\infty(\varphi)$. Покажем, что это отображение сюръективно. Пусть $h \in A_\infty(\varphi)$. Имеем

$$\begin{aligned} (P(\varphi h))(z) &= \int_B K_\alpha(z, w) \varphi(w) h(w) \psi(w) d\nu(w) = \\ (4.1) \quad &= \int_B K_\alpha(z, w) h(w) (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w). \end{aligned}$$

Из (2.2) следует, что $\varphi(z) \geq c(1 - |z|^2)^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} |h(z)|(1 - |z|^2)^\alpha &= |f(z)|(1 - |z|^2)^k (1 - |z|^2)^{\alpha-k} \leq \\ &\leq c_1 |h(z)| \varphi(z) (1 - |z|^2)^{\alpha-k} \leq c_2 (1 - |z|^2)^{\alpha-k}. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha - k > -1$, то отсюда следует, что $h \in A_\alpha^1$. Как известно (см. [2] или [3]), для функций $h \in A_\alpha^1$ последний интеграл в (4.1) равен $h(z)$. Таким образом, для любого $h \in A_\infty(\varphi)$ имеем $(P(\varphi h))(z) = h(z)$, т. е. оператор PT_∞ является тождественным на $A_\infty(\varphi)$. Это означает, что P является сюръективным отображением, следовательно, $T_\infty P$ является проектором из $L^\infty(B)$ на его подпространство TA_∞ .

(ii) Снова используя лемму 3.4, будем иметь

$$\begin{aligned} \|Qf\|_\psi &= \int_B |(Qf)(z)| \psi(z) d\nu(z) \leq \\ &\leq \gamma_\alpha \int_B \left(\int_B \frac{|f(w)| \varphi(w) d\nu(w)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \right) \psi(z) d\nu(z) = \\ &= \gamma_\alpha \int_B \left(\int_B \frac{\psi(z) d\nu(z)}{|1 - \langle w, z \rangle|^{n+1+\alpha}} \right) |f(w)| \varphi(w) d\nu(w) \leq \\ &\leq c \int_B \frac{1}{\varphi(w)} |f(w)| \varphi(w) d\nu(w) = c \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Таким образом, Q является ограниченным оператором, отображающим $L^1(B)$ в $A^1(\psi)$. Покажем, что множество значений оператора Q совпадает с $A^1(\psi)$. Пусть

$g \in A^1(\psi)$. Имеем

$$\begin{aligned} (Q(\psi g))(z) &= \int_B K_\alpha(z, w) \psi(w) g(w) \varphi(w) d\nu(w) = \\ (4.2) \quad &= \int_B K_\alpha(z, w) g(w) (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w). \end{aligned}$$

Из (2.1) следует ограниченность $\varphi(z)$ сверху. Поэтому

$$\psi(z) = \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{\varphi(z)} \geq c(1 - |z|^2)^\alpha.$$

Отсюда следует, что $A^1(\psi) \subset A_\alpha^1$. Поэтому, как и выше в пункте (i), последний интеграл в (4.2) равен $g(z)$. Таким образом, для любого $g \in A^1(\psi)$ имеем $(Q(\psi g))(z) = g(z)$, т. е. оператор QT_1 является тождественным на $A^1(\psi)$. Тем самым доказано, что Q является сюръективным отображением, следовательно, T_1Q является проектором из $L^1(B)$ на его подпространство TA^1 . $\square$

Лемма 4.1. Пусть $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ — линейная оболочка множества функций $\{K_\alpha(\cdot, w), w \in B\}$. Тогда

- (i) $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ плотна в $A^1(\psi)$;
- (ii) $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w))$ слабо* плотна в $A_\infty(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение (i) равносильно тому, что $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w)\psi)$ плотна в $TA^1(\psi)$, а это означает, что всякий линейный непрерывный функционал на $TA^1(\psi)$, аннулирующий $\mathfrak{L}(K_\alpha(\cdot, w)\psi)$, является нулевым. Таким образом, с учетом теоремы Хана-Банаха, достаточно доказать, что если $h \in L^\infty(B)$ и

$$(4.3) \quad \int_B K_\alpha(z, w) \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0$$

для всех $w \in B$, то h аннулирует все пространство TA^1 . Пользуясь очевидным разложением

$$\frac{1}{(1 - \langle w, z \rangle)^{n+1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(k+1)} \langle w, z \rangle^k$$

и формулой полинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} K_\alpha(\bar{z}, w) &= \gamma_\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(k+1)} \sum_{|m|=k} \frac{k!}{m!} w^m z^m = \\ (4.4) \quad &= \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)m!} w^m z^m. \end{aligned}$$

Из (4.3) и (4.4) следует

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)m!} w^m \int_B z^m \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0$$

для всех $w \in B$. Поэтому для всех мультииндексов m

$$\int_B z^m \psi(z) h(\bar{z}) d\nu(z) = 0,$$

откуда следует, что h аннулирует все голоморфные полиномы. Согласно следствию к предложению 2.3, h аннулирует все пространство TA^1 .

Аналогично доказывается пункт (ii), причем в этом случае применяется предложение 2.4(ii). $\square$

Ниже используется обозначение

$$(h_1, h_2) = \int_B h_1(\bar{z}) h_2(z) d\nu(z), \quad h_1 \in L^\infty(B), \quad h_2 \in L^1(B).$$

Теорема 4.2. *Справедливы следующие разложения в прямую сумму:*

$$(i) \quad L^\infty(B) = TA_\infty \oplus (TA^1)^\perp,$$

$$(ii) \quad L^1(B) = TA^1 \oplus (TA_\infty)^\perp,$$

$$\text{где } (TA^1)^\perp = \{f \in L^\infty(B) : (f, \psi g) = 0, \text{ для всех } g \in A^1\},$$

$$(TA_\infty)^\perp = \{g \in L^1(B) : (\varphi f, g) = 0, \text{ для всех } f \in A_\infty\}.$$

Доказательство. (i) Согласно теореме 4.1, оператор $T_\infty P$ является ограниченным проектором из $L^\infty(B)$ на TA_∞ . Поэтому достаточно доказать, что ядром этого проектора служит $(TA^1)^\perp$. Из определения $T_\infty P$ следует, что функция $f \in L^\infty(B)$ принадлежит ядру оператора $T_\infty P$ тогда и только тогда, если

$$(4.5) \quad \int_B f(z) \psi(z) K_\alpha(z, w) d\nu(z) = 0 \text{ для всех } w \in B.$$

Согласно лемме 4.1 конечные линейные комбинации функций $\{K_\alpha(\cdot, w), w \in B\}$ плотны в пространстве $A^1(\psi)$. Поэтому (4.5) равносильно тому, что $(f, \psi g) = 0$ для всех $g \in A^1$, т. е. $f \in (TA^1)^\perp$.

Аналогично доказывается (ii). $\square$

Abstract. The paper studies some bounded operators in the Banach spaces $L^\infty(B)$ and $L^1(B)$ over the unit ball B of $\mathbb{C}^n$, the range of which are the corresponding

А. И. ПЕТРОСЯН

holomorphic subspaces $A_\infty(\varphi)$ and $A^1(\psi)$ depending on a normal pair of weight-functions $\{\varphi, \psi\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.L. Shields, D.L. Williams, “Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions”, Trans. Amer. Math. Soc., **162**, 287 – 302 (1971).
- [2] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York (1987).
- [3] K. Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics **226**, Springer-Verlag, New York (2005).

Поступила 2 декабря 2010

ON THE INTEGRAL OF MEAN CURVATURE OF A FLATTENED
CONVEX BODY IN SPACE FORMS

F. Chen¹, C. Yang²

School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance and Economics,
Guiyang, 550004, Guizhou, China¹

School of Mathematics and Computer Sciences, Guizhou Normal University,
Guiyang, 550001, Guizhou, China²

E-mails: *chen.fangwei@yahoo.com*; *cfw-yy@126.com*, *yangcongli@gznu.edu.cn*

Abstract. Under the assumptions that E_λ^n is an n -dimensional, simply connected Riemannian manifold of constant sectional curvature λ and L_λ^r is an r -dimensional, totally geodesic submanifold of E_λ^n , the paper investigates the q -th integral of the mean curvature M_q^n of a convex body K^r in E_λ^n and gives the expression of M_q^n in the terms of M_p^r , where M_p^r is the p -th integral of the mean curvature of K^r in L_λ^r . A result of L. A. Santaló holds in particular.

MSC2010 number: 53C65, 53A35, 53A07, 52A20

Keywords: Integral of mean curvature; non-Euclidean space; element of area.

1. INTRODUCTION

Let n be a natural number, let $0 \leq r < n$, $0 \leq p \leq r - 1$ and let $0 \leq q \leq n - 1$. Further, let E_λ^n be an n -dimensional, simply connected Riemannian manifold of constant sectional curvature λ , i.e. the sphere space S^n for $\lambda > 0$, the hyperbolic space H^n for $\lambda < 0$ and the Euclidean space E^n for $\lambda = 0$. Besides, let L_λ^r be an r -dimensional, totally geodesic subspace of E_λ^n and let $K^r \subset L_\lambda^r$ be a convex body. Then, the boundary ∂K^r of K^r is an $(r - 1)$ -dimensional hypersurface in L_λ^r . Assuming that P is a point of ∂K^r , we choose $e_1, \dots, e_{r-1}$ to be the principal curvature directions at the point P . Further, we suppose that $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1}$ are the principal curvatures at the point P , which correspond to the principal curvature directions.

Consider the Gauss map $G : P \rightarrow N(P)$, whose differential

$$dG_P(e_i) = x'(t) \rightarrow N'(t) \quad (x(0) = P)$$

satisfies the Rodrigues' equations

$$dG_P(e_i) = -\kappa_i e_i, \quad i = 1, \dots, r - 1.$$

¹Supported in part by CNSF (Grant No. 11161007) and Guizhou Foundation for Science and Technology (Grant No. [2010] 2242).

²Supported in part by CNSF (Grant No. 11101099).

Then we have the mean curvature

$$H = \frac{1}{r-1}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_{r-1}) = -\frac{1}{r-1}\text{trace}(dG_P),$$

along with the Gauss-Kronecker curvature

$$K = \kappa_1 \cdots \kappa_{r-1} = (-1)^{r-1} \det(dG_P).$$

The p -th order mean curvatures are the p -th order elementary symmetric functions of the principal curvatures. By H_q we denote the p -th order mean curvature normalized such that

$$\prod_{p=1}^{r-1} (1 + t\kappa_p) = \sum_{q=0}^{r-1} \binom{r-1}{p} H_p t^p.$$

Thus, $H_1 = H$ is the mean curvature and H_{r-1} is the Gauss-Kronecker curvature K . The p -th ($0 < p \leq r-1$) integral of the mean curvature M_p^r of ∂K^r at P is defined by

$$M_p^r(\partial K^r) = \int_{\partial K^r} H_p d\sigma_{r-1} = \binom{r-1}{p}^{-1} \int_{\partial K^r} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_p}\} d\sigma_{r-1},$$

where $\{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_p}\}$ denotes the p -th elementary symmetric function of the principal curvatures and $d\sigma_{r-1}$ is the area element of ∂K^r . As a particular case, let $M_0^r = \sigma_{r-1}$ be the area of ∂K^r , for completeness. Moreover, we have $M_{r-1}^r = O_{r-1}$, where O_{r-1} denotes the area of the $(r-1)$ -dimensional unit sphere and its value is given by the formula

$$O_{r-1} = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)}.$$

For instance, if $\lambda = 0$ and $r = 2$, and K^2 is a plane convex figure in E^2 , then $M_0^2 = \sigma_1$ and $M_1^2 = 2\pi$. If $r = 3$ and K^3 is a convex body in E^3 , then $M_0^3 = \sigma_2$ and M_1^3 is the integral of mean curvature of ∂K^3 . For more details, see [3, 4].

If $K^r \subset L_\lambda^r$ is a convex body, then it can be considered as a flattened convex body of E_λ^n ($n \geq r$). In order to define the q -th integral of the mean curvature M_q^n ($q = 1, 2, \dots, n-1$) of ∂K^r in E_λ^n , we consider the outer parallel convex body $K_\varepsilon^r := \{x \in E^n : d(K^r, x) \leq \varepsilon\}$ of K^r in E_λ^n , where the $d(K^r, \cdot)$ denotes the geodesic distance from K^r in E_λ^n , and then we pass to the limit as $\varepsilon \rightarrow +0$.

In this paper, we investigate the q -th integral of the mean curvature M_q^n of ∂K^r in E_λ^n , where K^r is considered as a flattened convex body in E_λ^n . We obtain an expression of M_q^n in terms of the integral of the mean curvature M_p^r . Besides, we prove the following theorem.

Theorem 1.1. *Let E_λ^n be a simply connected Riemannian manifold of the sectional curvature λ , let L_λ^r be the totally geodesic submanifold of E_λ^n , and let $K^r \subset L_\lambda^r$ be a convex body of dimension r with C^2 boundary.*

Then the q -th integral of the mean curvatures M_q^n of K^r , where K^r is considered as a flattened convex body in E_λ^n , satisfy the following conditions, where the quantity $\bar{s}(p, q)$ is that defined later, by (3.1):

1) *If $q > n - r - 1$, then*

$$(1.1) \quad M_q^n(\partial K^r) = \sum_{m=1}^{n-r} \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \bar{s}(m, n-r) \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r).$$

2) *If $q = n - r - 1$, then*

$$(1.2) \quad M_q^n(\partial K^r) = \binom{n-1}{q}^{-1} \bar{s}(q, q) O_q \sigma_r(K^r) + \sum_{m=1}^{n-r-1} \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \bar{s}(m, n-r) \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r).$$

3) *If $q < n - r - 1$, then*

$$(1.3) \quad M_q^n(\partial K^r) = \frac{\binom{n-r-1}{q}}{\binom{n-1}{q}} \bar{s}(q, n-r-1) O_{n-r-1} \sigma_r(K^r) + \sum_{m=1}^q \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \bar{s}(m, n-r) \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r).$$

Especially, when $\lambda = 0$, that is, the convex body in Euclidean space E^n . In this case, if $m < q$, then $\bar{s}(m, q) = \varepsilon^{q-m} = 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Theorem 1.1 reduces to the below corollary proved by L. A. Santaló in 1957 (see [2, 3]). Note that the results of [2, 3] play an important role in integral geometry and differential geometry and are widely used (see [1, 3, 4, 5]).

Corollary 1.1. *Let E^n denote the Euclidean space, L_r denote the r -dimensional linear subspace in E^n , let K^r be a convex body of the dimension r in L^r . Then K^r can be considered both as a convex body in L^r and as a flattened convex body in E^n , and the q -th integral of mean of the curvature M_q^n satisfies the conditions*

1) If $q > n - r - 1$, then

$$M_q^n(\partial K^r) = \frac{\binom{r-1}{q-n+r}}{\binom{n-1}{q}} \frac{O_q}{O_{q-n+r}} M_{q-n+r}^r(\partial K^r),$$

2) If $q = n - r - 1$, then

$$M_q^n(\partial K^r) = \binom{n-1}{n-r-1}^{-1} O_{n-r-1} \sigma_r(K^r),$$

3) If $q < n - r - 1$, then

$$M_q^n(\partial K^r) = 0.$$

2. PRELIMINARIES

Let $K^r \subset L_\lambda^r$ and let L_λ^r be a totally geodesic submanifold of E_λ^n . Assuming that ∂K_ε^r is a twice differentiable hypersurface with a well defined normal at each point $P' \in \partial K_\varepsilon^r$, by $N(P')$ we denote the normal vector at the point P' . Let P be the intersection point of the normal $N(P')$ with K^r . Then, we say that P' belongs to the region (A) of ∂K_ε^r if P belongs to K^r , besides, we say that P' belongs to the region (B) of ∂K_ε^r if P belongs to ∂K^r .

In later sections we use the following notation:

$$s_\lambda(r) = \begin{cases} \lambda^{-1/2} \sin(r\sqrt{\lambda}), & \lambda > 0, \\ r, & \lambda = 0, \\ |\lambda|^{-1/2} \sinh(r\sqrt{|\lambda|}), & \lambda < 0. \end{cases}$$

By the moving frames introduced in the book of L. A. Santaló [3], the area elements at a point $P' \in \partial K_\varepsilon^r$ with respect to the regions (A) and (B), respectively, are

$$d\sigma_{n-1} = s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r,$$

$$d\sigma_{n-1} = s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1},$$

where du_{n-r} denotes the area element of the $(n-r)$ -dimensional unit sphere, $d\sigma_r$ and $d\sigma_{r-1}$ denote the volume element of K^r and the element of area of ∂K^r , respectively.

Then the q -th integral of the mean curvature of ∂K_ε^r is given by the formula

$$\begin{aligned} (2.1) \quad M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) &= \binom{n-1}{q}^{-1} \int_{\partial K_\varepsilon^r} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_q}\} d\sigma_{n-1} \\ &= \binom{n-1}{q}^{-1} \left[\int_{K^r} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_q}\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial K^r} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_q}\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \right]. \end{aligned}$$

Let R_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) be the principle radii of the curvature of ∂K_ε^r corresponding to $e_1, \dots, e_{n-1}$, that is $R_i = 1/\kappa_i$. Then (2.1) can be rewritten as

$$(2.2) \quad M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) = \binom{n-1}{q}^{-1} \left[\int_{K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r \right. \\ \left. + \int_{\partial K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \right].$$

Note that the following statements are true for the quantifies R_i ($i = 1, \dots, n-1$).

a) For the points of the region (A), clearly,

$$R_h = \varepsilon \quad \text{for } h = 1, 2, \dots, n-r-1, \\ R_h = \infty \quad \text{for } h = n-r, n-r+1, \dots, n-1.$$

b) In order to find the values of R_i at the points of (B), suppose $e_1, e_2, \dots, e_n$ are a frame of n orthogonal unit vectors, such that $e_1, \dots, e_{n-r}$ are constants independent of $x \in \partial K^r$, orthogonal to L_r^n and $e_{n-r+1}, \dots, e_{n-1}$ are the principal tangent directions of ∂K^r in L_r^n , while e_n is the normal to ∂K^r in L_r^n . A vector X of ∂K_ε^r can be represented as

$$X = x - \varepsilon N,$$

where $x \in K^r$ and

$$(2.3) \quad N = \cos\theta e_n + \sum_{h=1}^{n-r} \cos\theta_h e_h.$$

For any x , the vector X describes an $(n-r)$ -sphere, and consequently

$$(2.4) \quad R_h = \varepsilon \quad \text{for } h = 1, 2, \dots, n-r.$$

For $h = n-r+1, \dots, n-1$, the Rodrigues equations give

$$(2.5) \quad dN \cdot e_h = -\frac{1}{R_h} dS_h,$$

where dS_h denotes the arc element on ∂K_ε^r and

$$(2.6) \quad dS_h = dX \cdot e_h = ds_h - \varepsilon dN \cdot e_h,$$

where ds_h is tangent to e_h arc element on ∂K^r .

From (2.3), for $h = 1, 2, \dots, n-r$, for which the vectors e_h are constant, we get

$$(2.7) \quad dN \cdot e_h = \cos\theta de_n \cdot e_h = -\frac{\cos\theta}{\rho_{h-n+r}} ds_h \quad (h = n-r+1, \dots, n-1),$$

where $\rho_1, \dots, \rho_{r-1}$ are the principal radii of the curvature of ∂K^r . Besides, by (2.5), (2.6) and (2.7) we obtain

$$(2.8) \quad R_h = \frac{\rho_{h-n+r}}{\cos\theta} + \varepsilon \quad \text{for } h = n - r + 1, \dots, n - 1.$$

3. PROOF OF THE MAIN RESULT

Now, we are ready to prove the main result of the present paper, which is given in Theorem 1.1. To this end, first we set

$$(3.1) \quad \bar{s}(p, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^p} s_\lambda(\varepsilon)^q$$

and note another formula, which will be used later:

$$(3.2) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{q-m} \theta du_{n-r} = \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}}.$$

Proof of Theorem 1.1: 1) If $q > n - r - 1$, on region (A), since all the principal radii of curvature $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_q}$ cannot be chosen from the normal space of K^r . There essentially exist some R_{i_j} which are selected from the tangent space of K^r . Then, the first integral of (2.2) vanishes and formula (2.2) reduces to

$$M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) = \binom{n-1}{q}^{-1} \int_{\partial K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1}.$$

On the region (B), if there are m ($1 \leq m \leq n - r$) principal radii of curvature R_{i_j} selected from the normal space, by (2.4) and (2.8) we get

$$\left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} = \sum_{m=1}^{n-r} \frac{1}{\varepsilon^m} \left\{ \frac{\cos\theta}{\rho_1}, \dots, \frac{\cos\theta}{\rho_{q-m}} \right\}.$$

Then, using formula (3.2) and the definition of the q -th integral of the mean curvature M_q^r we obtain

$$\begin{aligned} & M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) \\ &= \binom{n-1}{q}^{-1} \sum_{m=1}^{n-r} \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{\partial K^r} \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_{q-m}} \right\} \cos^{q-m} \theta s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \\ &= \sum_{m=1}^{n-r} \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \frac{1}{\varepsilon^m} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r). \end{aligned}$$

Letting here $\varepsilon \rightarrow 0$ we come to formula (1.1).

2) If $q = n - r - 1$, on the region (A), note that $R_h = \infty$ if h changes from $\{n - r, \dots, n - 1\}$. Then all R_{i_h} in $\{\frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}}\}$ must be $R_{i_1} = R_{i_2} = \dots = R_{i_q} = \varepsilon$, and the first integral of (2.2) reduces to

$$\begin{aligned} & \int_{K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r \\ &= \int_{K^r} \frac{1}{\varepsilon^{n-r-1}} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r = \frac{1}{\varepsilon^q} s_\lambda(\varepsilon)^q O_q \sigma_r(K^r). \end{aligned}$$

By the same argument as the case 1), the second integral in (2.2) becomes

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \\ &= \sum_{m=1}^{n-r-1} \int_{\partial K^r} \frac{1}{\varepsilon^m} \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_{q-m}} \right\} \cos^{q-m} \theta s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \\ &= \sum_{m=1}^{n-r-1} \binom{r-1}{q-m} \frac{1}{\varepsilon^m} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r). \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) &= \binom{n-1}{q}^{-1} \frac{1}{\varepsilon^q} O_q s_\lambda(\varepsilon)^q \sigma_r(K^r) \\ &+ \sum_{m=1}^{n-r-1} \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \frac{1}{\varepsilon^m} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r). \end{aligned}$$

Letting here $\varepsilon \rightarrow 0$ we obtain (1.2).

3) If $q < n - r - 1$, then similarly the first integral of (2.2) takes the form

$$\begin{aligned} & \int_{K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} du_{n-r-1} \wedge d\sigma_r \\ &= \binom{n-r-1}{q} O_{n-r-1} \frac{1}{\varepsilon^q} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} \sigma_r(K^r), \end{aligned}$$

while the second integral in (2.2) becomes

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K^r} \left\{ \frac{1}{R_{i_1}}, \dots, \frac{1}{R_{i_q}} \right\} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \\ &= \sum_{m=1}^q \int_{\partial K^r} \frac{1}{\varepsilon^m} \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_{q-m}} \right\} \cos^{q-m} \theta s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} du_{n-r} \wedge d\sigma_{r-1} \\ &= \sum_{m=1}^q \binom{r-1}{q-m} \binom{r-1}{q-m} \frac{1}{\varepsilon^m} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
 M_q^n(\partial K_\varepsilon^r) &= \frac{\binom{n-r-1}{q}}{\binom{n-1}{q}} \frac{1}{\varepsilon^q} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r-1} O_{n-r-1} \sigma_r(K^r) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^q \frac{\binom{r-1}{q-m}}{\binom{n-1}{q}} \frac{1}{\varepsilon^m} s_\lambda(\varepsilon)^{n-r} \frac{O_{n-r+q-m}}{O_{q-m}} M_{q-m}^r(\partial K^r).
 \end{aligned}$$

Letting here $\varepsilon \rightarrow 0$ we obtain (1.3) and complete the proof of Theorem 1.1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. H. Sah, Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence, Rescher Notes in Mathematics, **33**, Advanced Publishing Program, Pitman, Boston, Mass.-London (1979).
- [2] L. A. Santaló, "On the mean curvatures of a flattened convex body Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A 21, 189 – 194 (1956).
- [3] L. A. Santaló, Integral Geometry and Geometric Probability, Second edition. With a foreword by Mark Kac. Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
- [4] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **44** Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
- [5] J. Zhou and D. Jiang, "On mean curvatures of a parallel convex body", Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., **28** (3), 489 – 494 (2008).

Поступила 10 января 2011

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 5, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН, Кинематическая мера отрезков содержащихся в области	3
В. С. АТАБЕКЯН, О <i>СЕР</i> -подгруппах n -периодических произведений	15
Л. Н. ГАЛОЯН, Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу (C, α, β)	25
Л. З. ГЕВОРГЯН, Нормализованные числовые образы некоторых 2×2 комплексных матриц	41
А. И. ПЕТРОСЯН, Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре	53
F. CHEN, C. YANG, On the integral of mean curvature of a flattened convex body in space forms	65–72

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 5, 2011

CONTENTS

N. G. AHARONYAN, V. K. OHANYAN, Kinematic measure of segments lying in a domain	3
V. S. ATABEKYAN, On <i>СЕР</i> -subgroups of n -periodic products	15
L. N. GALOYAN, Summation of Fourier trigonometric series and conjugate series by (C, α, β) method	25
L. Z. GEVORGYAN, The normalized numerical ranges of 2×2 matrices	41
A. I. PETROSYAN, Bounded projectors in spaces of functions holomorphic in the unit ball	53
F. CHEN, C. YANG, On the integral of mean curvature of a flattened convex body in space forms	65–72