

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахпетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

КОММУТАТИВНЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

С. С. ДАВИДОВ

Ереванский государственный университет

E-mail: *davidov@ysu.am*

Аннотация. В статье изучаются коммутативные медиальные тернарные группоиды. Вводится понятие тернарного полутерма, доказывается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных тернарных группоидов, а именно, приводится алгоритм, с помощью которого решается вопрос о выполнимости тождества $u = v$ в многообразии коммутативных медиальных тернарных группоидов. Используя приведенный алгоритм, описывается строение свободного коммутативного медиального тернарного группоида, доказывается, что коммутативный медиальный тернарный группоид имеет выпуклое линейное представление.

MSC2010 number: 03C05, 08A30, 08A62, 08A35.

Ключевые слова: Тернарный группоид, коммутативный медиальный группоид, разрешимая теория, свободный группоид, линейное представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие алгебраической теории n -арных систем началось с выхода работы В. Дернте [1] по n -арным группам, которая была выполнена под руководством Эмми Нетер. В 40-х годах XX века появились две работы по n -арным группам, которые сыграли основополагающую роль в дальнейшем развитии теории n -арных алгебраических систем – это капитальная работа Поста [2] и богатая идеями работа С. А. Чунихина [3].

Алгебраические n -арные системы имеют применения в различных областях математики – так, с помощью n -арных квазигрупп ($n > 2$) В. Д. Белоусовым и А. С. Бектеновым дано описание пространственных сетей ([4, 5]), а А. А. Гварамия [6] получил глубокие результаты по автоматам; n -арные группы нашли отражение в геометрии и полиадических автоматах. Такие системы существенно используются в теории многозначных логик, кибернетике, общей теории систем ([7], [8]).

Изучению алгебраических систем с одной операцией арности больше, чем два посвящены многие исследования (например [9–13]).

Условимся тернарные операции определенные на множестве Q обозначать скобками: (xyz) или $[xyz]$, где $x, y, z \in Q$.

Алгебра $(A; \Omega)$ называется медиальной (абелевой, энтропийной), если она удовлетворяет сверхтождеству медиальности:

$$f(g(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, g(x_{m1}, \dots, x_{mn})) = g(f(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, f(x_{n1}, \dots, x_{nm})),$$

где $f, g \in \Omega$. В частности тернарный группоид называется медиальным, если он удовлетворяет тождеству:

$$((xyz)(uvw)(pqr)) = ((xip)(yvp)(zwr)).$$

Медиальные системы изучались разными авторами (Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) [14–20], они связаны с понятием энтропии в теории информации [20] и находят приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В работах Ежека и Кепки [14–16] изучаются бинарные медиальные группоиды, в частности, доказывается разрешимость эквациональной теории бинарных коммутативных медиальных группоидов, описывается строение свободного бинарного коммутативного медиального группоида и доказано существование выпуклого линейного представления для коммутативных медиальных бинарных группоидов. В настоящей работе, с использованием метода работ [14–16], аналогичные результаты получены для тернарных медиальных группоидов.

2. ТЕРНАРНЫЕ ТЕРМЫ И ПОЛУТЕРМЫ

В этом параграфе, следуя [15] (Глава I) вводим понятие тернарного полутерма и исследуем некоторые его свойства.

Зафиксируем три символа $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, которые в дальнейшем рассматриваются как унарные символы операций. Свободный моноид над множеством $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ обозначим через E . Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно выражен в виде

$$e = \prod_{i=1}^n a_i, \quad \text{где } n \in N \quad \text{и} \quad a_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Число n будем называть глубиной e и обозначим через $\partial(e)$. Для каждого $n \geq 0$ положим

$$E_n = \{e \in E \mid \partial(e) = n\}.$$

Положим $\bar{\alpha} = \beta$, $\bar{\bar{\alpha}} = \gamma$, $\bar{\beta} = \gamma$, $\bar{\bar{\beta}} = \alpha$, $\bar{\gamma} = \alpha$, $\bar{\bar{\gamma}} = \beta$.

Пусть X – произвольное множество. Через SW_X^* обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha, \beta, \gamma\}$ (состоящую из одной бинарной, одной нульарной и трех унарных операционных символов), определяемую следующими тождествами:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\beta(x + y) = \beta x + \beta y,$$

$$\gamma(x + y) = \gamma x + \gamma y,$$

$$\alpha 0 = 0,$$

$$\beta 0 = 0,$$

$$\gamma 0 = 0.$$

Элементы алгебры SW_X^* будем называть тернарными полутермами над X или просто полутермами. Очевидно, что каждый полутерм $s \in SW_X^*$ может быть выражен в виде

$$s = \sum_{i=1}^r e_i x_i,$$

где $r \in N$, $e_i \in E$, $x_i \in X$; это выражение однозначно с точностью до порядка слагаемых. Целое число r называется длиной s и обозначается через $\lambda(s)$. Ясно, что $\lambda(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$.

Определим тернарную операцию на SW_X^* следующим образом:

$$(stu) = \alpha s + \beta t + \gamma u.$$

Полученный тернарный группоид будем обозначать через SW_X и называть тернарным группоидом (3-группоидом) полутермов над X . Элементы подалгебры

алгебры SW_X порожденной множеством X , будем обозначать через W_X и называть тернарными термами над X (в дальнейшем просто термами).

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. W_X абсолютно свободный тернарный группоид (3-группоид) над X . Для каждого терма t над X имеет место один из следующих случаев:

- (1) $t \in X$;
- (2) существует единственная тройка u, v, w термов над X такая, что $t = (uvw)$.

Лемма 2.2. Пусть $t = \sum_{i=1}^r e_i x_i$ ($x_i \in X$) полутерм над X . Тогда t будет термом над X тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $r \geq 1$;
- (2) если $i, j \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторого $f \in E$, то $i = j$;
- (3) если $i \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = fag$ для некоторых $f, g \in E$ и $a \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то существуют $j, k \in \{1, \dots, r\}$ с $e_j = f\bar{a}h_1$, $e_k = f\bar{a}h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in E$.

Доказательство. Аналогично [15, Предложение 1.3.2]. □

Пусть $s = \sum_{i=1}^r e_i x_i$ — терм над X . Через $I^*(s)$ и $I(s)$ обозначим следующие множества:

$$\begin{aligned} I^*(s) &= \{e_i \mid i = 1, \dots, r\}, \\ I(s) &= \{e \in E \mid ef \in I^*(s), \text{ где } f \in E\}, \\ I_n(s) &= E_n \cap I(s). \end{aligned}$$

Элементы $I(s)$ назовем подтермами входящими в s .

Пусть t терм над X . Тогда $I^*(t) \subseteq I(t)$. Более того, если $e \in I(t)$, то $e \in I^*(t)$ тогда и только тогда, когда $e\alpha \notin I(t)$, тогда и только тогда, когда $e\beta \notin I(t)$, тогда и только тогда, когда $e\gamma \notin I(t)$. Глубиной терма t назовем число $\partial(t) = \max \{\partial(e) \mid e \in I(t)\}$. Очевидно, что $I_{\partial(t)}(t) \subseteq I^*(t)$ и $\partial(t)$ — наибольшее целое число n такое, что $I_n(t) \neq \emptyset$.

Непосредственно из леммы 2.2 следует следующая лемма.

Лемма 2.3. Пусть t терм над X . Множество $P = I(t)$ имеет следующие свойства.

- (1) P конечное подмножество E и $1 \in P$;
- (2) Если $e, f \in E$ и $ef \in P$, то $e \in P$;
- (3) Если $e \in E$, то $e\alpha \in P \leftrightarrow e\beta \in P \leftrightarrow e\gamma \in P$.

Обратно, если $P \subseteq E$ удовлетворяет (1), (2), (3) и $h : Q \rightarrow X$, где $Q = \{e \in P \mid e\alpha \notin P\}$, то полутерм $s = \sum_{e \in Q} eh(e)$ является термом над X и $P = I(s)$.

Лемма 2.4. Пусть t -терм над X и $e \in I(t)$. Тогда существует единственная пара (w, u) такая, что w – полутерм, u – терм и $t = w + eu$. Более того, если v – произвольный терм над X , то $w + ev$ также будет термом над X .

Доказательство. Аналогично [15, Предложение 1.3.4]. $\square$

Пусть $t = w + eu$ – терм, тогда терм u будем обозначать через $t_{[e]} = u$ и называть подтермом терма t , соответствующим e . Ясно, что $t_{[e]} \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in I^*(t)$. Если $t = \sum_{i=1}^r e_i x_i$, то $t_{[e_i]} = x_i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Терм $w + eu$ будем обозначать через $\sigma_{e:v}(t)$.

Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 2.5. Пусть t, v – два терма над X , $n \geq 0$, $e \in I_n(t)$. Положим $s = \sigma_{e:v}(t)$. Тогда

- (1) $I_m(s) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0, \dots, n\}$;
- (2) $s_{[e]} = v$;
- (3) если $f \in I_n(t)$ и $f \neq e$, то $s_{[f]} = t_{[f]}$;
- (4) если $0 \leq m < n$, $x \in X$ и $g \in I_m(t)$, то $t_{[g]} = x \leftrightarrow s_{[g]} = x$.

Пусть t – терм над X , $e_1, \dots, e_k$ подтермы t такие, что для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторого $f \in E$, то $i = j$ (такие подтермы называются независимыми). Из леммы 2.4 следует, что существует единственная $(k+1)$ -ка $w, u_1, \dots, u_k$ такая, что w – полутерм над X , $u_1, \dots, u_k$ – термы над X и $t = w + e_1 u_1 + \dots + e_k u_k$. Имеем $u_1 = t_{[e_1]}, \dots, u_k = t_{[e_k]}$. Если $v_1, \dots, v_k$ произвольные термы, тогда $w + e_1 v_1 + \dots + e_k v_k$ – терм, который будем обозначать через $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$.

Пусть t – терм, $n \geq 0$ и p – подстановка $I_n(t)$. Обозначим через $e_1, \dots, e_k$ попарно различные элементы $I_n(t)$. Очевидно, $e_1, \dots, e_k$ – независимые подтермы t . Терм $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$, где $v_i = t_{[p(e_i)]}$ для всех $i = 1, \dots, k$, обозначим через $p[t]$.

Лемма 2.6. Пусть t – терм над X , $n \geq 0$ и p – подстановка $I_n(t)$. Тогда

- (1) $I_m(p[t]) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0, \dots, n\}$;
- (2) если $e \in I_n(t)$, то $p[t]_{[e]} = t_{[p(e)]}$;
- (3) если $0 \leq m < n$, $x \in X$ и $e \in I_m(t)$, то $t_{[e]} = x$ тогда и только тогда, когда $p[t]_{[e]} = x$.

Доказательство. Следует из леммы 2.5. □

Пусть $n \in 2N$, $t_0, t_1, \dots, t_n$ – термы над X и $a_1, \dots, a_n$ – некоторые элементы из $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Определим терм $[t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, t_n]$ индукцией по n следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [t_0] &= t_0; \\
 [t_0, t_1, \alpha, \beta, t_2] &= (t_0 t_1 t_2); \\
 [t_0, t_1, \beta, \gamma, t_2] &= (t_2 t_0 t_1); \\
 [t_0, t_1, \gamma, \alpha, t_2] &= (t_1 t_2 t_0); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \alpha, \beta, t_n] &= \\
 &= ([t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, t_{n-2}] t_{n-1} t_n); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \beta, \gamma, t_n] &= \\
 &= (t_n [t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-2}, t_{n-2}] t_{n-1}); \\
 [t_0, t_1, a_1, a_2, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, \gamma, \alpha, t_n] &= \\
 &= (t_{n-1} t_n [t_0, t_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n-2}, t_{n-2}]).
 \end{aligned}$$

Лемма 2.7. Пусть t – терм над X и $e = a_1 \dots a_n \in I_n(t)$ ($n \geq 0$). Тогда

- (1) $t = \left[t_{[a_1 \dots a_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \right.$
 $\left. a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]} \right];$
- (2) если v терм над X , то

$$\sigma_{e:v}(t) = \left[v, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \right. \\
 \left. a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]} \right].$$

Доказательство. (1). Индукцией по $\lambda(t)$. Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$ и утверждение очевидно. При $\lambda(t) = 3$ (случай $\lambda(t) = 2$ для тернарных термов невозможен) имеем: $t = (xyz) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $t_{[\alpha]} = x$, $t_{[\beta]} = y$, $t_{[\gamma]} = z$. Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] &= [x, y, \alpha, \beta, z] = (xyz) = t; \\ [t_{[\beta]}, t_{[\bar{\beta}]}, \beta, \bar{\beta}, t_{[\bar{\beta}]}] &= [y, z, \beta, \gamma, x] = (xyz) = t; \\ [t_{[\gamma]}, t_{[\bar{\gamma}]}, \gamma, \bar{\gamma}, t_{[\bar{\gamma}]}] &= [z, x, \gamma, \alpha, y] = (xyz) = t. \end{aligned}$$

Предположим утверждение верно для $\lambda(t) < m$, докажем для $\lambda(t) = m$. Поскольку t терм, то существуют термы u, v, w такие, что $t = (uvw) = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Длина термов u, v, w меньше m , поэтому для них справедливо предположение индукции. Пусть $e = a_1 \dots a_n \in I_n(t)$, тогда $a_1 = \alpha$ или $a_1 = \beta$ или $a_1 = \gamma$.

Рассмотрим случай $a_1 = \alpha$. Тогда $a_2 \dots a_n \in I_{n-1}(u)$ и $t = [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] = [u, v, \alpha, \beta, w] = (uvw)$. По предположению индукции имеем:

$$u = [u_{[a_2 \dots a_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]}].$$

Поэтому получим:

$$\begin{aligned} t &= [t_{[\alpha]}, t_{[\bar{\alpha}]}, \alpha, \bar{\alpha}, t_{[\bar{\alpha}]}] = [u, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}] = [[u_{[a_2 \dots a_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, \\ &\quad u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]}], t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}], \end{aligned}$$

т.к. $u_{[a_2 \dots a_n]} = t_{[a_1 a_2 \dots a_n]}$, $u_{[a_2 \dots \bar{a}_n]} = t_{[a_1 a_2 \dots \bar{a}_n]}$, $\dots$, $u_{[\bar{a}_2]} = t_{[a_1 \bar{a}_2]}$ и $a_1 = \alpha$, $\bar{a}_1 = \beta$, то

$$\begin{aligned} t &= [t_{[a_1 \dots a_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, t_{[a_1 \dots \bar{a}_n]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{n-2}]}, \\ &\quad = a_{n-2}, \bar{a}_{n-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}]. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Случаи $a_1 = \beta$ и $a_1 = \gamma$ рассматриваются аналогично.

Утверждение (2) следует из (1). $\square$

3. СОКРАТИМЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

В этом параграфе приведены необходимые условия для выполнимости произвольного тождества $u = v$ в классе сократимых медиальных тернарных группоидов. Вопрос о достаточности этих условий для выполнимости тождества $u = v$ в

классе медиальных сократимых тернарных группоидов остается открытым. Отметим, что в случае бинарных сократимых медиальных группоидов аналогичные условия являются необходимыми и достаточными ([15], 2.1.1).

Пусть $Q()$ – тернарный группоид. Правой (левой, средней) трансляцией при помощи элементов a, b называется отображение $R_{a,b} : Q \rightarrow Q$ ($L_{a,b} : Q \rightarrow Q$, $S_{a,b} : Q \rightarrow Q$), определяемое равенством: $R_{a,b}(x) = (xab)$ ($L_{a,b}(x) = (abx)$, $S_{a,b}(x) = (axb)$).

Тернарный группоид $Q()$ называется сократимым, если трансляции $R_{a,b}$, $L_{a,b}$, $S_{a,b}$ инъективны для всех $a, b \in Q$.

Конгруэнция θ тернарного группоида $Q()$ называется сократимой, если для любых $a, b \in Q$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} (R_{a,b}(x), R_{a,b}(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta, \\ (L_{a,b}(x), L_{a,b}(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta, \\ (S_{a,b}(x), S(y)) \in \theta &\rightarrow (x, y) \in \theta. \end{aligned}$$

Если θ сократимая конгруэнция тернарного группоида $Q()$, тогда фактор группойд Q/θ будет сократимым группоидом.

Обозначим через M_X множество тождеств над X выполняющихся во всех медиальных сократимых тернарных группоидах. M_X – наименьшая конгруэнция W_X такая, что W_X/M_X – медиальный сократимый тернарный группоид. M_X вполне инвариантная конгруэнция W_X . Фактор группоид W_X/M_X – свободный медиальный группоид ранга $Card(X)$.

Если $e = a_1 \dots a_n \in E$, тогда упорядоченная тройка

$$(Card\{i \mid a_i = \alpha\}, \quad Card\{i \mid a_i = \beta\}, \quad Card\{i \mid a_i = \gamma\})$$

целых неотрицательных чисел называется весом e . Для каждой упорядоченной тройки (k, l, m) целых неотрицательных чисел, обозначим через $E_{k,l,m}$ множество всех $e \in E$ веса (k, l, m) . Для каждого $t \in W_X$ положим $I_{k,l,m} = E_{k,l,m} \cap I(t)$.

Если $t \in W_X$, $k, l, m \geq 0$ и $x \in X$, то положим

$$P_{k,l,m}(x, t) = Card\{e \in I_{k,l,m}(t) \mid t_{[e]} = x\}$$

т.е. число вхождений x веса (k, l, m) в t .

Для каждого непустого множества X определим бинарное отношение R_X на W_X следующим образом:

$$(u, v) \in R_X \leftrightarrow P_{k,l,m}(x, u) = P_{k,l,m}(x, v)$$

для всех $x \in X$ и всех троек k, l, m целых неотрицательных чисел.

Непосредственной проверкой доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $t, u, v \in W_X$, $k, l, m \geq 0$ и $x \in X$. Тогда

$$P_{k,l,m}(x, (tuv)) = P_{k-1,l,m}(x, t) + P_{k,l-1,m}(x, u) + P_{k,l,m-1}(x, v)$$

где $P_{-1,l,m}(x, t) = P_{k,-1,m}(x, u) = P_{k,l,-1}(x, v) = 0$.

Лемма 3.2. Пусть $t \in W_X$, $k, l, m \geq 0$, $x \in X$ и пусть g эндоморфизм W_X . Тогда

$$(3.1) \quad P_{k,l,m}(x, g(t)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, t) \cdot P_{k-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)).$$

Доказательство. Индукцией по длине терма t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$. Все первые сомножители в правой части равенства (3.1), кроме $P_{0,0,0}(x, x) = 1$, равны нулю, поэтому сумма равна $P_{k,l,m}(x, g(x))$. Базис индукции установлен. Пусть $t = (uvw)$ и для термов u, v, w лемма верна. Тогда согласно лемме 3.1 будем иметь:

$$\begin{aligned} P_{k,l,m}(x, g(t)) &= P_{k,l,m}(x, g(uvw)) = P_{k,l,m}(x, (g(u)g(v)g(w))) = \\ &= P_{k-1,l,m}(x, g(u)) + P_{k,l-1,m}(x, g(v)) + P_{k,l,m-1}(x, g(w)) = \\ &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, u) \cdot P_{(k-1)-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)) + \\ &\quad + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, v) \cdot P_{k-i,(l-1)-j,m-\nu}(x, g(y)) + \\ &\quad + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{i,j,\nu}(y, w) \cdot P_{k-i,l-j,(m-1)-\nu}(x, g(y)) = \\ &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, u) \cdot P_{(k-1)-i,l-j,m-\nu}(x, g(y)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^m P_{i,j,\nu}(y, v) \cdot P_{k-i,(l-1)-j,m-\nu}(x, g(y)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{i,j,\nu}(y, w) \cdot P_{k-i, l-j, (m-1)-\nu}(x, g(y)) \Big) = \\
& = \sum_{y \in X} \Big(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i-1, j, \nu}(y, u) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j-1, \nu}(y, v) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j, \nu-1}(y, w) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) \Big) = \\
& = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m (P_{i-1, j, \nu}(y, u) + P_{i, j-1, \nu}(y, v) + P_{i, j, \nu-1}(y, w)) \times \\
& \quad \times P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\nu=0}^m P_{i, j, \nu}(y, t) \cdot P_{k-i, l-j, m-\nu}(x, g(y)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 3.1. R_X вполне инвариантная конгруэнция W_X и $M_X \subseteq R_X$.

Доказательство. Доказывается с использованием лемм 3.1 и 3.2 аналогично [15, Лемма 2.1.14]. $\square$

4. КОММУТАТИВНЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ ГРУППОИДЫ

В этом параграфе устанавливается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных тернарных группоидов. В изложении следуем [15].

Тернарный группоид называется коммутативным, если удовлетворяет тождеству

$$(x_1 x_2 x_3) = (x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)})$$

где τ произвольная подстановка из S_3 .

Лемма 4.1. В коммутативном медиальном тернарном группоиде выполняется тождество

$$((x_1 x_2 x_3) (x_4 x_5 x_6) (x_7 x_8 x_9)) = ((x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)}) (x_{\tau(4)} x_{\tau(5)} x_{\tau(6)}) (x_{\tau(7)} x_{\tau(8)} x_{\tau(9)}))$$

где τ — произвольная подстановка из S_9 .

Доказательство. Непосредственной проверкой. $\square$

Для любого непустого множества X обозначим, через C_X множество всех тождеств над X выполняющихся во всех коммутативных медиальных тернарных группоидах. C_X наименьшая конгруэнция W_X такая, что W_X/C_X – коммутативный медиальный группоид, она будет вполне инвариантной конгруэнцией, а 3-группоид W_X/C_X – свободным коммутативным группоидом ранга $Card(x)$.

Для $t \in W_X$, $x \in X$ и $n \geq 0$ положим

$$P_n(x, t) = Card\{e \in I_n(t) \mid t_{[e]} = x\}.$$

Таким образом $P_n(x, t)$ – число вхождений x глубины n в t .

Лемма 4.2. Пусть $n \geq 0$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и

$u_0, \dots, u_{2n}, v_0, \dots, v_{2n}, w_0, \dots, w_{2n} \in W_X$. Тогда

- (1) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([v_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [u_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}])) \in C_X$.
- (2) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([w_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [u_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]))) \in C_X$.
- (3) $(([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]), ([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}]))) \in C_X$.

Доказательство. (1). Индукцией по n . При $n = 0$ утверждение следует из закона коммутативности. Допустим утверждение верно для чисел меньших n , докажем для n . Имеем

$$\begin{aligned} & [u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, \dots, a_n, \bar{a}_n, u_{2n}] = \\ & = ([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, u_3, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}] u_{2n-1} u_{2n}) \\ & \quad [v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, \dots, b_n, \bar{b}_n, v_{2n}] = \\ & = ([v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, v_3, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] v_{2n-1} v_{2n}) \\ & \quad [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_n, \bar{c}_n, w_{2n}] = \end{aligned}$$

$$= ([w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, w_3, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}] w_{2n-1} w_{2n}) .$$

Согласно предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} & (([u_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}][v_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] \\ & [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}]), ([v_0, u_1, a_1, \bar{a}_1, u_2, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, u_{2(n-1)}] \\ & [u_0, v_1, b_1, \bar{b}_1, v_2, \dots, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, v_{2(n-1)}] [w_0, w_1, c_1, \bar{c}_1, w_2, \dots, c_{n-1}, \bar{c}_{n-1}, w_{2(n-1)}])) \\ & \in C_X, \end{aligned}$$

так как C_X конгруэнция и 3-группоид коммутативный, получаем требуемое утверждение. Утверждения (2) и (3) доказываются аналогично. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$ и $e, f \in I_n(t)$. Тогда $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$, где $\tau_{e,f}$ транспозиция определенная на $I_n(t)$, переставляющая e и f .

Доказательство. Индукцией по длине t . Если $t \in X$, т.е. при $n = 0$, то $t = \tau_{e,f}[t]$ и доказывать нечего. Пусть $t = (uvw)$ и $n \geq 1$. Положим $e = a_1 \cdots a_n$, $f = b_1 \cdots b_n$. Возможны девять случаев.

- (1) $a_1 = b_1 = \alpha$. Тогда $\tau_{e,f}[t] = (\tau_{a_2 \cdots a_n, b_2 \cdots b_n}[u]vw)$. По индуктивному предположению имеем $(u, \tau_{a_2 \cdots a_n, b_2 \cdots b_n}[u]) \in C_X$, следовательно $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$, так как C_X конгруэнция.
- (2) $a_1 = b_1 = \beta$. Аналогично (1).
- (3) $a_1 = b_1 = \gamma$. Аналогично (1).
- (4) $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$. Тогда

$$\tau_{e,f}[t] = (\sigma_{a_2 \cdots a_n: t[f]}(u) \sigma_{b_2 \cdots b_n: t[e]}(v) w).$$

Согласно лемме 2.7 имеем:

$$t = \left(\left[u_{[a_2 \cdots a_n]}, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]} \right] \right. \\ \left. \left[v_{[b_2 \cdots b_n]}, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_n]}, b_n, \bar{b}_n, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_n]}, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_{n-1}]}, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, \dots, b_2, \bar{b}_2, v_{[\bar{b}_2]} \right] w \right),$$

и

$$\tau_{e,f}[t] = \left(\left[v_{[b_2 \cdots b_n]}, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_n]}, a_n, \bar{a}_n, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_n]}, u_{[a_2 \cdots \bar{a}_{n-1}]}, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}, \dots, a_2, \bar{a}_2, u_{[\bar{a}_2]} \right] \right. \\ \left. \left[u_{[a_2 \cdots a_n]}, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_n]}, b_n, \bar{b}_n, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_n]}, v_{[b_2 \cdots \bar{b}_{n-1}]}, b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}, \dots, b_2, \bar{b}_2, v_{[\bar{b}_2]} \right] w \right).$$

Следовательно, согласно лемме 4.2, получим $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$.

Остальные случаи

$$(5) \ a_1 = \beta, b_1 = \alpha,$$

$$(6) \ a_1 = \alpha, b_1 = \gamma,$$

$$(7) \ a_1 = \gamma, b_1 = \alpha,$$

$$(8) \ a_1 = \beta, b_1 = \gamma,$$

$$(9) \ a_1 = \gamma, b_1 = \beta,$$

рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 4.4. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$ и p подстановка множества $I_n(t)$. Тогда $(t, p[t]) \in C_X$.

Доказательство. Следует из леммы 4.3, поскольку любая подстановка представима в виде произведения транспозиций. $\square$

Определим бинарное отношение S_X на W_X следующим образом

$$(u, v) \in S_X \leftrightarrow P_n(x, u) = P_n(x, v),$$

для всех $x \in X$ и всех $n \geq 0$.

Непосредственно из определения следует следующая лемма.

Лемма 4.5. Пусть $t, v, w \in W_X$, $n \geq 0$ и $x \in X$. Тогда

$$P_n(x, (tvw)) = P_{n-1}(x, t) + P_{n-1}(x, v) + P_{n-1}(x, w),$$

где $P_{-1}(x, t) = 0$.

Лемма 4.6. Пусть $t \in W_X$, $n \geq 0$, $x \in X$ и g эндоморфизм W_X . Тогда

$$P_n(x, g(t)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, t) \cdot P_{n-i}(x, g(y)).$$

Доказательство. Индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$. В этом случае все первые сомножители суммы

$$\sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, t) \cdot P_{n-i}(x, g(y))$$

равны нулю, кроме одного, при $y = x$, а также $P_i(x, x) = 0$ ($i > 0$), $P_0(x, x) = 1$. Следовательно, эта сумма будет равна $P_n(x, g(t))$. Базис индукции установлен.

Пусть $t = (uvw)$ и для термов u, v, w лемма верна. Согласно лемме 4.5 и предположению индукции получим:

$$\begin{aligned}
 P_n(x, g(uvw)) &= P_n(x, (g(u)g(v)g(w))) = P_{n-1}(x, g(u)) + P_{n-1}(x, g(v)) + \\
 &+ P_{n-1}(x, g(w)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, u) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, v) \times \\
 &\times P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, w) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) = \\
 &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, u) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, v) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=0}^{n-1} P_i(y, w) \cdot P_{n-1-i}(x, g(y)) \right) = \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, u) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) + \right. \\
 &+ \sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, v) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) + \left. \sum_{i=0}^{n-1} P_{i-1}(y, w) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) \right) = \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n (P_{i-1}(y, u) + P_{i-1}(y, v) + P_{i-1}(y, w)) \cdot P_{n-i}(x, g(y)) = \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^n P_i(y, (uvw)) \cdot P_{n-i}(x, g(y)).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 4.1. S_X вполне инвариантная сократимая конгруэнция W_X и $C_X \subseteq S_X$.

Доказательство. Следует из лемм 4.5 и 4.6. $\square$

Далее будем считать, что X – счетное множество. Для каждого $n \geq 0$ определим линейный порядок на E_n следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdots a_n < b_1 \cdots b_n &\leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ st } a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, \\
 (a_k = \alpha \& b_k = \beta) \bigvee (a_k = \alpha \& b_k = \gamma) &\bigvee (a_k = \beta \& b_k = \gamma).
 \end{aligned}$$

Определим множество термов T следующим образом: когда $n \geq 0$, $e, f \in I_n(t)$, $e < f$ и $t_{[f]} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[e]} = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, j\}$.

Лемма 4.7. Для любого терма $t \in W_X$ существует терм $r \in T$ такой, что $(t, r) \in C_X$.

Доказательство. Определим последовательность термов $t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ следующим образом: $t^{(0)} = t$; $t^{(n+1)} = p[t^{(n)}]$, где p подстановка $I_{n+1}(t^n)$ такая, что когда $e, f \in I_{n+1}(t^{(n)})$, $e < f$ и $t_{[p(f)]}^{(n)} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[p(e)]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$. Существует натуральное число $c \in N$ такое, что $t^{(c)} = t^{(c+1)} = \dots$. Согласно лемме 4.4 получим $(t, t^{(c)}) \in C_X$. Остается доказать, что $t^{(c)} \in T$. Индукцией по n докажем, что если $0 \leq m \leq n$, $e, f \in I_m(t^{(n)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(n)} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[e]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$. При $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим условие выполняется для $n \geq 0$ и пусть $0 \leq m \leq n+1$, $e, f \in I_m(t^{(n+1)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(n+1)} = x_j$. Имеем $t^{(n+1)} = p[t^{(n)}]$ для подстановки p множества $I_{n+1}(t^{(n)})$. Если $m \leq n$, то согласно лемме 2.6 (3), имеем $t_{[f]}^{(n)} = x_j$ и по индуктивному предположению получим $t_{[e]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$ и следовательно, согласно лемме 2.6 (3), получаем $t_{[e]}^{(n+1)} = x_i$. Если $m = n+1$, тогда $t_{[p(f)]}^{(n)} = t_{[f]}^{(n+1)} = x_j$, согласно лемме 2.6 (2), так, что $t_{[p(e)]}^{(n)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$ (согласно выбору p); отсюда получаем $t_{[e]}^{(n+1)} = x_i$, согласно лемме 2.6 (2). $\square$

Лемма 4.8. Пусть $t, w \in T$ и $(t, w) \in C_X$. Тогда $t = w$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $I_n(t) = I_n(w)$ ($n \geq 0$) и если $e \in I_n(t)$, $x \in X$, тогда $t_{[e]} = x \leftrightarrow w_{[e]} = x$. Доказательство проведем индукцией по n .

Для $n = 0$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 1$. Согласно индуктивному предположению имеем:

$$a_1 \cdots a_n \in I_n(t) \leftrightarrow t_{[a_1 \cdots a_{n-1}]} \notin X \leftrightarrow w_{[a_1 \cdots a_{n-1}]} \notin X \leftrightarrow a_1 \cdots a_n \in I_n(w).$$

Таким образом $I_n(t) = I_n(w)$.

Далее, пусть $e \in I_n(t)$. Допустим $I_n(t) = \{e_1, \dots, e_m\}$, где $m \geq 0$ и $e_1 < \dots < e_m$. Имеем $e = e_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Если j положительное целое число, то поскольку $t \in T$ имеем:

$$t_{[e]} = x_j \leftrightarrow P_n(x_1, t) + \dots + P_n(x_{j-1}, t) < i \leq P_n(x_1, t) + \dots + P_n(x_j, t).$$

Аналогично, так как $w \in T$, имеем:

$$w_{[e]} = x_j \leftrightarrow P_n(x_1, w) + \dots + P_n(x_{j-1}, w) < i \leq P_n(x_1, w) + \dots + P_n(x_j, w).$$

Так как $P_n(x, t) = P_n(x, w)$ для всех $x \in X$ получим: $t_{[e]} = x_j \leftrightarrow w_{[e]} = x_j$. $\square$

Лемма 4.9. $C_X = S_X$.

Доказательство. Согласно предложению 4.1 имеем $C_X \subseteq S_X$. Пусть $(t, w) \in S_X$. Согласно лемме 4.7, существуют термы $r, s \in T$, такие, что $(t, r) \in C_X$ и $(w, s) \in C_X$. На основании леммы 4.8 получаем $r = s$ и следовательно $(t, w) \in C_X$. $\square$

Предложение 4.2. *Если X – произвольное непустое множество, то $C_X = S_X$.*

Доказательство. См. [15, лемма 2.1.17, 2.1.18]. $\square$

Теорема 4.1. *Пусть X произвольное непустое множество и u, v термы над X . Тогда $(u, v) \in C_X$ тогда и только тогда, когда $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in X$ и всех целых неотрицательных чисел n .*

Доказательство. Следует из предложения 4.2. $\square$

Заметим, что для проверки $(u, v) \in C_X$ достаточно проверить равенство $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in \text{var}(u) \cup \text{var}(v)$ и всех $n \in \{0, \dots, \text{Max}(\partial(u), \partial(v))\}$.

Следствие 4.1. *Любой свободный коммутативный медиальный тернарный группоид – сократимый группоид.*

5. СТРОЕНИЕ СВОБОДНОГО КОММУТАТИВНОГО МЕДИАЛЬНОГО ТЕРНАРНОГО ГРУППОИДА

Для любого непустого множества X группоид W_X/C_X – свободный коммутативный медиальный тернарный группоид ранга $\text{Card}(X)$. Согласно теореме 4.1 его описание носит в некотором смысле конструктивный характер. В данном параграфе мы дадим более явное описание свободного коммутативного медиального тернарного группоида.

Пусть X – непустое множество. Обозначим через CF'_X свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha\}$ (состоящей из одной бинарной, одной унарной и одной нульарной операций символов) определяемую тождествами:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\alpha 0 = 0.$$

Каждый элемент $u \in CF'_X$ может быть представлен в виде $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i$, где r и n_i – целые неотрицательные числа, а $x_i \in X (i = 1, \dots, r)$. Данное выражение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определим тернарную операцию на CF'_X следующим образом:

$$(uvw) = \alpha u + \alpha v + \alpha w.$$

Множество CF'_X относительно этой операции будет тернарным группоидом, который обозначим через: CF_X . Для любого $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ положим $\partial(u) = \text{Max}(n_i \mid i = 1, \dots, r)$.

Обозначим через CG_X подгруппоид CF_X порожденный множеством X .

Теорема 5.1 (ср. с [15], 4.2.1). *Пусть X – произвольное непустое множество. Группоид CG_X будет свободным коммутативным медиальным тернарным группоидом над X . Элемент $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ принадлежит CG_X тогда и только тогда, когда*

$$(5.1) \quad \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card} \{i \mid n_i = k\} = 1.$$

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 5.1. *Обозначим через h единственный гомоморфизм W_X на CG_X такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Если $t \in W_X$, то*

$$h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Если $u, v \in W_X$, то $h(u) = h(v)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x, u) = P_n(x, v)$ для всех $x \in X$ и $n \geq 0$.

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$ и утверждение очевидно. Допустим $t = (uvw)$ и для термов

u, v, w верно утверждение. Тогда

$$\begin{aligned} h(t) &= h(u)h(v)h(w) = \alpha h(u) + \alpha h(v) + \alpha h(w) = \\ &= \alpha \sum_{e \in I^*(u)} \alpha^{\partial(e)} u_{[e]} + \alpha \sum_{e \in I^*(v)} \alpha^{\partial(e)} v_{[e]} + \alpha \sum_{e \in I^*(w)} \alpha^{\partial(e)} w_{[e]} = \\ &= \sum_{e \in I^*(u)} \alpha^{\partial(e)+1} u_{[e]} + \sum_{e \in I^*(v)} \alpha^{\partial(e)+1} v_{[e]} + \sum_{e \in I^*(w)} \alpha^{\partial(e)+1} w_{[e]} = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}. \end{aligned}$$

Второе утверждение непосредственно следует из первого. $\square$

Лемма 5.2. CG_X свободный коммутативный медиальный тернарный группоид над X .

Доказательство. Следует из леммы 5.1 и теоремы 4.1. $\square$

Обозначим через L_X множество всех $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ таких, что

$$\sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card} \{i \mid n_i = k\} = 1.$$

Очевидно $0 \notin L_X$.

Лемма 5.3. Пусть $u \in CF_X$, $x, y, z, a \in X$ и $n \geq 0$. То $u + \alpha^n x \in L_X$ тогда и только тогда, когда $u + \alpha^{n+1}y + \alpha^{n+1}z + \alpha^{n+1}a \in L_X$.

Доказательство. Сумма (5.1) для $u + \alpha^{n+1}y + \alpha^{n+1}z + \alpha^{n+1}a$ получается из суммы (5.1) для $u + \alpha^n x$, если к ней добавить $3^{-(n+1)} \cdot 3$ и вычесть $3^{-n} \cdot 1$, т.е. $3^{-(n+1)} \cdot 3 - 3^{-n} = 0$. $\square$

Лемма 5.4. $CG_X \subseteq L_X$.

Доказательство. Ясно, что $X \subseteq L_X$. Поэтому достаточно доказать, что L_X подгруппоид CF_X . Пусть

$$u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X, \quad v = \sum_{j=1}^s \alpha^{m_j} y_j \in L_X, \quad w = \sum_{\mu=1}^p \alpha^{l_\mu} z_\mu \in L_X.$$

Имеем

$$t = (uvw) = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i+1} x_i + \sum_{j=1}^s \alpha^{m_j+1} y_j + \sum_{\mu=1}^p \alpha^{l_\mu+1} z_\mu,$$

и

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\partial(t)} 3^{-k} \text{Card}(\{i \mid n_i + 1 = k\} \cup \{j \mid m_j + 1 = k\} \cup \{\mu \mid l_\mu + 1 = k\}) = \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i + 1 = k\} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{j \mid m_j + 1 = k\} + \\
 & \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \{\mu \mid l_\mu + 1 = k\} = \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + \\
 & \quad \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \text{Card}\{j \mid m_j = k\} + \sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+1)} \{\mu \mid l_\mu = k\} = \\
 & \quad = 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + \\
 & \quad 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \text{Card}\{j \mid m_j = k\} + 3^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \{\mu \mid l_\mu = k\} = 3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом $(uvw) \in L_X$. $\square$

Лемма 5.5. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$ и $r = 1$. Тогда $u \in X$ и $n_i = 0$.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Лемма 5.6. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$ и $r \geq 3$. Тогда $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \geq 3$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \leq 2$. Тогда

$$\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} = 1 \quad \text{или} \quad \text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} = 2.$$

В этих случаях получим

$$1 = \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + 3^{-\partial(u)} \cdot 1$$

или

$$1 = \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} + 3^{-\partial(u)} \cdot 2,$$

следовательно

$$3^{\partial(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{\partial(u)-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\}$$

или

$$3^{\partial(u)} = 2 + \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} 3^{\partial(u)-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\}.$$

В обоих случаях равенство возможно только при $\partial(u) = 0$, т.е. когда $u = x$ или $r = 1$. $\square$

Лемма 5.7. $L_X \subseteq CG_X$.

Доказательство. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in L_X$. Индукцией по r докажем, что $u \in CG_X$. Для $r = 1$ утверждение следует из леммы 5.5. (Отметим, что случай $r = 2$ невозможен, так как, в этом случае $u \notin L_X$. Действительно, если $u = \alpha^k x_1 + \alpha^m x_2 \in L_X$, то $3^{-k} \cdot 1 + 3^{-m} \cdot 1 = 1$ или $3^{k-m} + 1 = 3^k$ (если $k \geq m$), что невозможно). Допустим $r \geq 3$. Положим $n = \partial(u)$. Согласно лемме 5.6 имеем $\text{Card}\{i \mid n_i = \partial(u)\} \geq 3$, поэтому существуют три различных целых числа $c, d, m \in \{1, \dots, r\}$ такие, что $n_c = n_d = n_m = n$. Положим

$$v = \sum_{i \neq c, d, m} \alpha^{n_i} x_i + \alpha^{n-1} x_c$$

(очевидно $n \geq 1$). Легко видеть, что $v \in L_X$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\partial(v)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} - 3^{-n} \cdot 3 + 3^{-(n-1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} 3^{-k} \text{Card}\{i \mid n_i = k\} = 1. \end{aligned}$$

Длина v меньше r , следовательно согласно индуктивному предположению $v \in CG_X$.

Обозначим через h единственный гомоморфизм из W_X на CG_X такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Имеем $v = h(t)$ для некоторого $t \in W_X$. Согласно лемме 5.1 имеем

$$v = h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Поэтому существует $e \in I_{n-1}(t)$ такой, что $t_{[e]} = x_c$. Положим $w = \sigma_{e: x_c x_d x_m}(t)$. Из леммы 5.1 следует, что $h(w) = u$ и следовательно $u \in CG_X$. $\square$

Теорема 5.1 следует из лемм 5.2, 5.4, 5.7.

6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ МЕДИАЛЬНЫХ ТЕРНАРНЫХ ГРУППОИДОВ

Будем говорить, что n -арный группоид $Q(A)$ имеет линейное представление, если существуют коммутативный моноид $S(+, 0)$ и система его коммутирующих

эндоморфизмов $\{f_i \mid i = 1, \dots, n\}$, такие что $Q \subseteq S$ и операция A может быть представлена в виде

$$A(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) + a$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in Q$, где a некоторый фиксированный элемент S .

Линейное представление называется точным, если $Q = S$ и выпуклым, если $a = 0$.

Теорема 6.1 (ср. с [15], 4.3.1). *Пусть $G(\cdot)$ – коммутативный медиальный тернарный группоид. Тогда он имеет выпуклое линейное представление $S(+, 0, f, g, h)$ такое, что $f = g = h$ и f – автоморфизм $S(+)$, т.е. существуют коммутативный моноид $S(+, 0)$ и его автоморфизм f такие, что $G \subseteq S$ и $(xyz) = f(x) + f(y) + f(z)$ для всех $x, y, z \in G$.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Пусть $A[\cdot]$ коммутативный медиальный тернарный группоид. Обозначим через h единственный гомоморфизм из CG_A на $A[\cdot]$ такой, что $h(x) = x$ для всех $x \in A$.

Определим бинарное отношение R на CF_A следующим образом:

$(u, v) \in R$ тогда и только тогда, когда существуют $w \in CF_A$, $x, y, z, a \in A$ и $c \geq 0$ такие, что $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1} y + \alpha^{c+1} z + \alpha^{c+1} a$ и $x = [yza]$.

Далее, определим бинарное отношение $\bar{R}$ на CF_A следующим образом:

$(u, v) \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда существуют $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$ такие, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$.

Лемма 6.1. *Следующие утверждения справедливы:*

- (1) $\bar{R}$ конгруэнция алгебры $CF_A(+, 0, \alpha)$;
- (2) Если $u, v \in CF_A$ и $(\alpha u, \alpha v) \in \bar{R}$, то $(u, v) \in \bar{R}$;
- (3) Если $(u, v) \in \bar{R}$, тогда $u \in CG_A$ тогда и только тогда, когда $v \in CG_A$;
- (4) Если $x, y, z, a \in A$ и $x = [yza]$, то $(x, (yza)) \in \bar{R}$.

Доказательство. (1). Очевидно $\bar{R}$ – отношение эквивалентности. Покажем, что $\bar{R}$ – конгруэнция. Пусть $(u, v) \in \bar{R}$, тогда существуют $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$ такие, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $u_0 + t = u + t$, $u_m + t = v + t$. Остается показать, что $(u_{i-1} + t, u_i + t) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Так как $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$, то $u_{i-1} = w + \alpha^c x$,

$u_i = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, поэтому $u_{i-1} + t = (w + t) + \alpha^c x$, $u_i + t = (w + t) + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, что означает $(u + t, v + t) \in \overline{R}$. Аналогично проверяется, что если $(u, v) \in \overline{R}$, то $(\alpha u, \alpha v) \in \overline{R}$.

(2). Пусть $(\alpha u, \alpha v) \in \overline{R}$, тогда $u_0 = \alpha u$, $u_m = \alpha v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $\alpha u'_0 = \alpha u$, $\alpha u'_m = \alpha v$ и $(\alpha u'_{i-1}, \alpha u'_i) \in R \cup R^{-1}$, поэтому $\alpha u'_{i-1} = w + \alpha^c x$, $\alpha u'_i = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$, следовательно w так-же начинается с α , поэтому получаем $u'_{i-1} = w' + \alpha^{c-1}x$, $u'_i = w' + \alpha^c y + \alpha^c z + \alpha^c a$, что означает $(u'_{i-1}, u'_i) \in R \cup R^{-1}$ и $u = u'_0, \dots, v = u'_m$, т.е. $(u, v) \in \overline{R}$.

(3). Следует из леммы 5.3.

(4). Пусть $x, y, z, a \in A$ и $x = [yza]$. Имеем $x = 0 + x$, $(yza) = 0 + \alpha y + \alpha z + \alpha a$, т.е. $(x, (yza)) \in \overline{R}$ ($c = 0, u_0 = x, u_1 = (yza)$). $\square$

Лемма 6.2. Пусть $(u, v) \in R$ и $u, v \in CG_A$. Тогда $h(u) = h(v)$.

Доказательство. Имеем $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1}y + \alpha^{c+1}z + \alpha^{c+1}a$ для некоторого $w \in CF_A$, $c \geq 0$ и $x, y, z, a \in A$ таких, что $x = [yza]$. Обозначим через g гомоморфизм W_A на CG_A такой, что $g(x) = x$ для всех $x \in A$. Существует $t \in W_A$ такой, что $g(t) = u$. Согласно лемме 5.1 существует $e = a_1 \dots a_c \in I_c(t)$ такой, что $t_{[e]} = x$. Согласно лемме 2.7 имеем

$$\begin{aligned} t &= [t_{[e]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_c]}, a_c, \bar{a}_c, t_{[a_1 \dots \bar{a}_c]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-1}]}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-1}]}, t_{[a_1 \dots \bar{a}_{c-2}]}, \\ &\quad a_{c-2}, \bar{a}_{c-2}, \dots, t_{[a_1 \bar{a}_2]}, t_{[\bar{a}_1]}, a_1, \bar{a}_1, t_{[\bar{a}_1]}] = \\ &= [t_{[e]}, t_{2c}, a_c, \bar{a}_c, t_{2c-1}, t_{2c-2}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, t_{2c-3}, t_{2c-4}, a_{c-1}, \bar{a}_{c-1}, \dots, t_3, t_2, a_1, \bar{a}_1, t_1], \end{aligned}$$

для некоторых термов $t_1, t_2, \dots, t_{2c} \in W_A$. Положим $u_i = g(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2c$. Тогда $u_1, \dots, u_{2c} \in CG_A$, поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} u &= g(t) = g(((\dots((xt_{2c}t_{2c-1})t_{2c-2}t_{2c-3})\dots)t_2t_1)) = \\ &= (((\dots((xu_{2c}u_{2c-1})u_{2c-2}u_{2c-3})\dots)u_2u_1)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= \alpha^c x + \alpha^c u_{2c} + \alpha^c u_{2c-1} + \alpha^{c-1} u_{2c-2} + \alpha^{c-1} u_{2c-3} + \dots + \alpha u_2 + \alpha u_1, \\ v &= \alpha^{c+1} y + \alpha^{c+1} z + \alpha^{c+1} a + \alpha^c u_{2c} + \alpha^c u_{2c-1} + \alpha^{c-1} u_{2c-2} + \alpha^{c-1} u_{2c-3} + \dots + \alpha u_1. \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} h(u) &= [[\dots [[xh(u_{2c})h(u_{2c-1})]h(u_{2c-2})h(u_{2c-3})]\dots]h(u_2)h(u_1)] = \\ &= [[\dots [[[yza]h(u_{2c})h(u_{2c-1})]h(u_{2c-2})h(u_{2c-3})]\dots]h(u_2)h(u_1)] = h(v). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.3. Пусть $x, y \in A$ и $(x, y) \in \bar{R}$. Тогда $x = y$.

Доказательство. Из леммы 6.1 (3) следует, что $x, y \in CG_A$, поэтому согласно лемме 6.2 имеем $h(x) = h(y)$, т.е. $x = y$. $\square$

Лемма 6.4. Тернарный группоид $A[]$ имеет выпуклое линейное представление $S(+, 0, f, f, f)$ такое, что f – инъективный эндоморфизм $S(+)$.

Доказательство. Из определения $\bar{R}$ и леммы 6.3 следует, что алгебра изоморфная алгебре $CF_A(+, 0, \alpha, \alpha, \alpha)/\bar{R}$ будет выпуклым линейным представлением группоида $A[]$. Согласно лемме 6.1 (2) соответствующий эндоморфизм инъективен. $\square$

Теорема 6.1 следует из леммы 6.4 и следующего предложения [15, Предложение 1.1.1]:

Предложение 6.1. Пусть Δ – сигнатура, а $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ – символы унарных операций из Δ . Пусть A будет Δ -алгеброй такой, что операции $F_A^{(i)}$ инъективные эндоморфизмы A для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда существует Δ -алгебра B со следующими свойствами:

- (1) A подалгебра B и существует цепь $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ подалгебр B такая, что B_i изоморфны A для всех $i = 0, 1, \dots$ и B объединение этой цепи;
- (2) $F_B^{(i)}$ автоморфизмы B для всех $i = 0, 1, \dots, n$;
- (3) алгебры A, B удовлетворяют одним и тем же тождествам.

Abstract. The paper studies the class of commutative medial ternary groupoids. A construction of ternary semiterms is given and proved that the equational theory of medial commutative ternary groupoids is solvable, namely, an algorithm is found, which in all medial commutative ternary groupoids verifies the validity of the identity

$u = v$ for any pair (u, v) of terms. A construction of free medial commutative ternary groupoids is given, and it is proved that any medial commutative ternary groupoid has a convex linear representation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Dorn, "Untersuchungen Überverallgemeinerten Gruppenbegriff", Math. Zeitscher., Bd. 29, 1 – 19 (1928).
- [2] E. L. Post, "Polyadic groups", Trans. Amer. Math. Soc. **48**, №2, 208 – 350 (1940).
- [3] С. А. Чунихин, "К теории неассоциативных n -групп с постулатом К.", ДАН СССР, **48**, №1, 7 – 10 (1945).
- [4] В. Д. Белоусов, А. С. Бектенов, "Пространственные сети и их координатизация I", Ткани и квазигруппы, Калинин: КГУ, 157 – 166 (1981).
- [5] В. Д. Белоусов, А. С. Бектенов, "Пространственные сети и их координатизация II", Ткани и квазигруппы, Калинин: КГУ, 30 – 45 (1982).
- [6] А. А. Гварамия, "Квазимногообразия автоматов. Связи с квазигруппами", Сиб. мат. журнал, XXVI, №3, 11 – 30 (1985).
- [7] А. И. Мальцев, Итеративные алгебры Поста, Изд. НГУ, Новосибирск (1976).
- [8] В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко, Алгебра, языки, программирование, Наукова думка, Киев (1974).
- [9] В. Д. Белоусов, n -арные квазигруппы, Штиинца, Кишинев (1972).
- [10] С. А. Русаков, Алгебраические n -арные системы. Силовская теория n -ых групп, Наука і техника, Минск (1992).
- [11] J. Usan, n -Groups in the light of the neutral operations, Mathematica Moravica, Special Vol.(2003).
- [12] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд. ЕГУ, Ереван (1986).
- [13] A. Marini, V. Shcherbacov, "On autotopies and automorphisms of n -ary linear quasigroups", Algebra and Discrete Mathematics, **2**, 59 – 83 (2004).
- [14] J. Jezek, T. Kepka, "Equational theories of medial groupoids", Algebra Universalis, **17**, 174 – 190 (1983).
- [15] J. Jezek, T. Kepka, Medial groupoids, Rozprawy CSAV 93/2, Academia, Praha (1983).
- [16] J. Jezek, T. Kepka, "Free entropic groupoids", CMUC, **22**, 223 – 233 (1981).
- [17] А. Г. Куроп, Общая алгебра, Наука, Москва (1974).
- [18] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, Modes, World Scientific, Singapore (2002).
- [19] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Математических Наук, **53(1)**, 61 – 114 (1998).
- [20] J. D. H. Smith, "Entropy, character theory and centrality of finite quasigroups", Math.Proc.CambridgePhilos. Soc., **108**, 435 – 443 (1990).

Поступила 12 октября 2010

ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Ереванский Государственный Университет
Российско - Армянский (Славянский) Университет
E-mails: *wachagan.margaryan@yahoo.com*; *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами называется *регулярным (невыврожденным)*, если все мономы $\{\xi^\alpha\}$ характеристического многочлена (полного символа) $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ этого оператора оцениваются через $P(\xi)$. В работе рассматривается двумерный регулярный, почти гипоеллиптический оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ с правильным многоугольником Ньютона и доказывается, что все обобщённые (слабые) решения уравнения $P(D)u = f$ из определенного весового пространства Соболева являются бесконечно дифференцируемыми в прямоугольнике $\Omega = \Omega(a, b) = \{x \in E^2; -a < x_1 < a; -b < x_2 < b\}$ функциями по второй переменной, если функция f бесконечно дифференцируема по той же переменной.

MSC2010 number: 12E10

Ключевые слова: гипоеллиптический оператор, гипоеллиптическое уравнение, регулярный оператор, почти гипоеллиптическое уравнение, анизотропное весовое пространство Соболева.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАСС УРАВНЕНИЙ

В 1937 году И. Г. Петровский доказал (см. [1]), что все классические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами аналитичны тогда и только тогда, когда эта система эллиптика. Тем самым Петровский обобщил результаты С. Н. Бернштейна (см. [2]) и других, относящихся к уравнениям второго порядка. Что касается слабых (обобщённых) решений, то их дифференцируемость для уравнения Лапласа впервые была доказана Г. Вейлем (см. [3]), а для более общих уравнений (в основном второго порядка) этот вопрос изучен Л. Шварцем [4], Ф. Йоном [5], К. Фридрихсом [6], П. Д. Лаксом [7], Л. Ниренбергом [8] и другими.

Переломным моментом в этой теории можно считать появление в 1955 году работы Л. Хёрмандера [9], где он ввел понятие гипозэллиптического уравнения (оператора), все обобщенные решения которого бесконечно дифференцируемы (для более подробных сведений см. [10]). Это оператор $P(D)$, отношения всех частных производных $D^\alpha P(\xi)$ характеристического многочлена (символа) $P(\xi)$ которого на этот символ стремятся к нулю при стремлении $|\xi|$ к бесконечности. Л. Хёрмандер доказал, что все непрерывные слабые решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ гипозэллиптичен.

Если иметь в виду, что эллиптичность оператора $P(D)$ можно определить как оператор у которого отношение $|\xi|^{|\alpha|} \cdot |D^\alpha P(\xi)/P(\xi)|$ ограничено для любого мультииндекса α , то ясно, что понятие гипозэллиптичности является непосредственным обобщением понятия эллиптичности оператора. Работы Л. Хёрмандера стали естественным толчком в возникновении задачи о выделении нетривиальных бесконечно дифференцируемых решений негипозэллиптических уравнений. В этом направлении первые результаты принадлежат Л. Гордингу и Б. Мальгранжу, которые в работе [11] ввели понятие *частично гипозэллиптического* оператора и доказали, что те решения частично гипозэллиптических уравнений, которые бесконечно дифференцируемы по определенным переменным, являются бесконечно дифференцируемыми по всем переменным.

Далее этой тематике были посвящены работы многих авторов. Отметим только работы [12] – [15] к которым непосредственно примыкает наша заметка. В частности, в работе Я. С. Бугрова [14] построен пример негипозэллиптического уравнения, решения которого в *полупространстве* являются бесконечно гладкими, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми их производными. В работе [15] В. И. Буренковым найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы все решения $\{u\}$ так называемого *глобально гипозэллиптического* уравнения $P(D)u = 0$, которые определенным образом стремятся к нулю в бесконечности, являлись бесконечно гладкими.

На наш взгляд понятие *почти гипоеллиптического* оператора (см. [16]) является таким же естественным и непосредственным обобщением понятия гипоеллиптичности, каким понятие гипоеллиптичности является обобщением понятия эллиптичности. Именно, оператор $P(D)$ называется *почти гипоеллиптическим*, если отношение $|D^\alpha P(\xi)/P(\xi)|$ ограничено для любого мультииндекса α .

Нами в [17] доказано: для того, чтобы все те решения уравнения $P(D)u = 0$, которые суммируемы с определенным экспоненциальным весом были бесконечно дифференцируемыми функциями *во всем пространстве*, необходимо и достаточно, чтобы оператор $P(D)$ был почти гипоеллиптическим.

В работе [18] выделено множество бесконечно гладких решений одного класса двумерных почти гипоеллиптических уравнений в *бесконечной* полосе достаточно большой ширины. В настоящей работе мы изучаем определенный класс двумерных регулярных, почти гипоеллиптических уравнений $P(D)u = P(D_1, D_2)u = f$ в *конечном прямоугольнике* из E^2 .

Для формулировки задачи и изложения результатов условимся в следующих обозначениях: R^2 и E^2 двумерные вещественные пространства точек $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $x = (x_1, x_2)$, N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ - множество 2-мерных мультииндексов. Для $\xi \in R^2$, $x \in E^2$ и $\alpha \in N_0^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2},$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i} \cdot \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2$).

Для линейного дифференциального оператора

$$P(D) = P(D_1, D_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad (1.1)$$

где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$, многочлен

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \quad (1.2)$$

назовем характеристическим многочленом или (полным) символом, а наименьший выпуклый многоугольник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, назовем *многоугольником Ньютона* оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Многоугольник $\mathfrak{R}$ с вершинами из N_0^2 назовем *полным* (см. [19]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат N_0^2 . Полный многоугольник $\mathfrak{R}$ назовем *правильным (вполне правильным)* (см. [20], [21]), если внешние нормали некоординатных сторон $\mathfrak{R}$ имеют неотрицательные (положительные) координаты. Легко доказать (см., например, [16]), что многоугольник Ньютона гипоеллиптического (почти гипоеллиптического) оператора является вполне правильным (правильным).

Оператор $P(D)$ вида (1.1) (многочлен $P(\xi)$ вида (1.2)) назовем *регулярным (невырожденным)* (см. [19]), если существует число $C > 0$ такое, что

$$\sum_{\alpha \in (P)} |\xi^\alpha| \leq C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^2. \quad (1.3)$$

В. П. Михайловым в работе [19] найдены необходимые и достаточные условия того, что многочлен $P(\xi)$ с полным многоугольником Ньютона был регулярным. Там же доказано, что вершины полного многогранника Ньютона регулярного многочлена с вещественными коэффициентами имеют чётные координаты. В настоящей заметке чётные натуральные числа l, m ($l < m$) и, тем самым, четырёхугольник $\mathfrak{R} = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, \nu_1 + \nu_2 \leq m\}$ будут фиксированы.

Геометрически очевидно, что $\mathfrak{R}$ – правильный четырёхугольник в $R_+^2 = \{\xi \in R^2, \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}$ с вершинами $(0, 0), (l, 0), (l, m - l), (0, m)$ из N_0^2 . Важно отметить, что $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным многоугольником, так как вторая координата внешней нормали некоординатной стороны $[(l, 0) - (l, m - l)]$ равна нулю, или - геометрически, эта сторона перпендикулярна оси α_1 в N_0^2 .

Пусть для положительных чисел a, b функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ задана в прямоугольнике $\Omega = \Omega(a, b) = \{x \in E^2; x_1 \in (-a, a), x_2 \in (-b, b)\}$. Рассматривается уравнение

$$P(D)u(x) = f(x); \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Легко показать, что при (линейном) преобразовании координат $x_j = a_j y_j$; $a_j > 0$ ($j = 1, 2$) оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) не меняет ни своего многоугольника Ньютона ни регулярности, ни почти гипоеллиптичности. Поэтому преобразованием $x_1 = x_1, x_2 = b y_2$ из прямоугольника $\Omega(a, b)$ можно перейти к прямоугольнику, который также обозначим через Ω : $\Omega = \Omega(a) = \Omega(a, 1) = \{x \in E^2; x_1 \in (-a, a), x_2 \in (-1, 1)\}$.

Итак, будем рассматривать уравнение (1.4) с *регулярным* линейным дифференциальным оператором $P(D)$ с четырёхугольником Ньютона $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}$ и поставим задачу о выделении бесконечно дифференцируемых по переменной x_2 решений из множества обобщённых решений уравнения (1.4) при данной правой части f с априорными свойствами гладкости по переменной x_2 . Описанный оператор является почти гипоеллиптическим (см. [16]) и частично гипоеллиптическим по второй переменной (см. [11] или [10]), но не является гипоеллиптическим, вследствие того, что четырёхугольник $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}$ не является вполне правильным.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы вводим и исследуем функциональные пространства типа весовых анизотропных пространств Соболева, в которых мы изучаем уравнение (1.4) с многоугольником Ньютона фиксированного типа $\mathfrak{R}$ и с фиксированным прямоугольником $\Omega = \Omega(a) \subset E^2$.

В качестве весовой функции мы рассмотрим функцию $g(t) = 1 - t^2$ при $|t| \leq 1$ и $g(t) = 0$ при $|t| > 1$.

Обозначим через $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_H = \|u\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.1)$$

а через $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{H_g} = \|u\|_{H_g(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha u g^{|\alpha|}(x_2)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Из полноты многоугольника $\mathfrak{R}$ и определения функции g легко следует, что формулами (2.1) и (2.2) определяются нормы, при этом $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ (соответственно $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$) банахово пространство типа пространств Соболева (соответственно типа весовых пространств Соболева).

Наконец через $H^0(\mathfrak{R}, \Omega)$ обозначим пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.1), а через $H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ — множество функций $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega(a'))$ для любого $a' \in (0, a)$, где $\Omega(a') = \Omega(a', 1) = \{x \in E^2, -a' < x_1 < a', -1 < x_2 < 1\}$, $\Omega(a') \subset \Omega$.

Замечание 2.1. Легко видеть, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \cdot \psi(x_1) \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$.

Сначала докажем два простых вспомогательных предложения.

Предложение 2.1. Пусть $\delta \in (0, 1)$; $k, n \in N_0, k + n \leq m$. Тогда

- 1) $g^n(t) \leq (2\delta)^n$ при $1 - \delta \leq |t| < 1$;
- 2) $g^{m-k}(t) \leq (2\delta)^n g^{m-k-n}(t)$ при $1 - \delta \leq |t| \leq 1$;
- 3) существует число $\sigma = \sigma(m) > 0$ такое, что для всех $k = 0, 1, \dots, m$

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} g^m(t) \right| \leq \sigma g^{m-k}(t) \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Очевидно, пункт 1) достаточно доказать для $n = 1$. Так как $|t| \geq 1 - \delta$, то $g(t) = 1 - |t|^2 \leq 1 - (1 - \delta)^2 = (2 - \delta)\delta < 2\delta$.

Второй пункт получается из первого умножением обеих частей неравенства 1) на неотрицательное выражение $g^{m-k-n}(t)$. Третий пункт доказывается простыми выкладками. $\square$

Предложение 2.2. Пусть $\delta \in (0, 1)$. Существует функция $\varphi_\delta(t)$; $t \in E^1$, удовлетворяющая условиям

- 1) $\varphi_\delta \in C_0^\infty(-1 + \delta/2, 1 - \delta/2)$;
- 2) $0 \leq \varphi_\delta(t) \leq 1, \forall t \in E^1$;
- 3) $\varphi_\delta(t) = 1$ при $|t| \leq 1 - \delta$;
- 4) Для любого $k \in N_0$ существует число $C_k > 0$, не зависящее от δ такое, что

$$|\varphi_\delta^{(k)}(t)| \leq C_k \delta^{-k}, \quad t \in E^1; \quad k = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\Phi(t) \geq 0$ при всех $t \in (-1, 1)$ и $\int \Phi(t) dt = 1$, а $\chi_\delta(t)$ — характеристическая функция отрезка $[-1 + \frac{3}{4}\delta, 1 - \frac{3}{4}\delta]$. Тогда простыми вычислениями легко убедиться, что функция

$$\varphi_\delta(t) = \frac{4}{\delta} \int \chi_\delta(t)(t - \tau) \Phi\left(\frac{4\tau}{\delta}\right) d\tau$$

удовлетворяет требованиям 1) - 4) предложения при

$$C_k = 4^k \int |\Phi^{(k)}(t)| dt \quad k = 0, 1, \dots$$

Предложение 2.2 доказано. $\square$

Лемма 2.1. Пусть $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$ и $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$, тогда

$$u(x)\psi(x_1)g^m(x_2) \in H^0(\mathfrak{R}, \Omega).$$

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, 1)$ и функция $\varphi_\delta(x_2)$ ($x_2 \in E^1$) построена по предложению 2.2. Положим

$$d_1 = \max\{C_k; 1 \leq k \leq m\}, \Omega_\delta = \Omega(a, 1) \setminus \Omega(a, 1 - \delta).$$

Тогда из свойства 3) функции φ_δ следует

$$\begin{aligned} I &\equiv \|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} = \\ &= \|u(x)\psi_1(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega_\delta)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)(1 - \varphi_\delta(x_2))]\|_{L_2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Оценим выражение I , применяя свойства 2), 4) функции φ_δ и формулу Лейбница (при этом ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_\delta)}$)

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)]\| + \\ &+ d_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)]\|, \end{aligned}$$

где C_i^j – биномиальные коэффициенты. Ещё раз применив формулу Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} I &\leq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \right. \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]D_2^{\beta_2}g^m(x_2)\| \Big\} + \\ &+ d_1 \left\{ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \right. \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 > 0} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \sum_{\gamma_2=1}^{\alpha_2-\beta_2} C_{\alpha_2-\beta_2}^{\gamma_2} \|D^{\alpha-(0, \gamma_2)}[u(x)\psi(x_1)]D_2^{\gamma_2}g^m(x_2)\| \Big\} \equiv \\ &\equiv I_1 + d_1 I_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Применяя предложение 2.1, для слагаемого I_1 получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^m(x_2)\| + \\ &+ \sigma \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0, \beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\|. \end{aligned}$$

Для I_2 аналогично

$$I_2 \leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} (2\delta)^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\| + \\ + \sigma \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_2 \geq 1} \sum_{\beta_2=1}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \delta^{-\beta_2} \sum_{\gamma_2=1}^{\alpha_2-\beta_2} (2\delta)^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)-(0,\gamma_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2-\gamma_2}(x_2)\|.$$

Сгруппировав соответствующие члены в оценках I_1 и I_2 , из (2.3) получаем с некоторой постоянной $d_2 > 0$

$$I \leq d_2 \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \beta_2=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \|D^{\alpha-(0,\beta_2)}[u(x)\psi(x_1)]g^{m-\beta_2}(x_2)\|. \quad (2.4)$$

Так как $m - \beta_2 \geq |\alpha - (0, \beta_2)|$ при $\alpha \in \mathfrak{R}$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$ и по определению функции g , $g(x_2) \leq 1$ при $|x_2| \leq 1$, то

$$g^{m-\beta_2}(x_2) \leq g^{|\alpha-(0,\beta_2)|}(x_2) \quad \forall x_2 \in (-1, 1). \quad (2.5)$$

С другой стороны, в силу правильности $\mathfrak{R}$ множество $\{\alpha - (0, \beta_2); \alpha \in \mathfrak{R}, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2\} \subset \mathfrak{R}$. Поэтому из (2.4), (2.5) следует, что с некоторой постоянной $d_3 > 0$

$$I \leq d_3 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^{|\alpha|}(x_2)\|_{L_2(\Omega_\delta)}. \quad (2.6)$$

Если иметь в виду, что $\text{mes}\Omega_\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ и по условию леммы $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$, следовательно, в силу замечания 2.1 $D^\alpha[u(x)\psi(x_1)]g^{|\alpha|}(x_2) \in L_2(\Omega)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$, и правая часть неравенства (2.6) стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$. По определению класса $H(\mathfrak{R}, \Omega)$ это значит, что при $\delta \rightarrow +0$

$$I \equiv \|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)[1 - \varphi_\delta(x_2)]\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $\Phi_\varepsilon \in C_0^\infty$ такая, что

$$\|u(x)\psi(x_1)g^m(x_2)\varphi_\delta(x_2) - \Phi_\varepsilon(x)\|_{H(\mathfrak{R}, \Omega)} < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Для фиксированных u и ψ через $\tilde{u} \cdot \tilde{\psi}$ обозначим продолжение нулём функции $u \cdot \psi$ вне Ω . Если таким образом функцию $u \cdot \psi$ доопределить на все пространство E^2 , то функция $u \cdot \psi \cdot g^m \cdot \varphi_\delta$ также будет доопределена нулём на E^2 . Далее, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что рассмотренные функции продолжены нулём вне Ω , причем мы опустим в обозначениях знак продолжения.

Пусть $\text{supp}\psi \subset [-a + \Delta, a - \Delta]$; $\Delta > 0$ и (см. предложение 2.2) $\text{supp}\varphi_\delta \subset [-1 + \delta/4, 1 - \delta/4]$. Тогда

$$\text{supp}(u\psi g^m \varphi_\delta) \subset [-a + \Delta, a - \Delta]X[-1 + \delta/4, 1 - \delta/4].$$

Пусть $S_1 = \{x \in E^2, |x| < 1\}$ открытый круг в E^2 , $0 \leq \omega \in C_0^\infty(S_1)$, $\int \omega(x) dx = 1$, $h > 0$ и $\omega_h(x) = h^{-2} \omega(x/h)$. Тогда (см. [23])

$$\text{supp}[u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] \subset \text{supp}(u \psi g^m \varphi_\delta) + \text{supp} \omega_h.$$

Положим $h_0 = \min\{\Delta, \delta/4\}$. Тогда при $0 < h \leq h_0$

$$\text{supp}[u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] \subset \text{supp}(u \psi g^m \varphi_\delta) + \text{supp} \omega_h \subset \Omega. \quad (2.9)$$

Так как (см. [22], Главу 2, или [23], Главу 3) $[u \psi g^m \varphi_\delta] * \omega_h \in C^\infty$, то в силу (2.9)

$$[u \psi g^m \varphi_\delta] * \omega_h \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.10)$$

Применим неравенство Минковского и свойства функции ω для оценки следующей разности

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta]\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \int_{|y| < h} \{D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](x-y) - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](x)\} \omega_h(y) dy \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{|y| < h} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](\cdot - y)\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\omega_h\|_{L_1(\Omega)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{|y| < h} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta](\cdot - y)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу непрерывности в среднем функций из L_2 отсюда следует, что при $h \rightarrow 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \|D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta * \omega_h] - D^\alpha [u \psi g^m \varphi_\delta]\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Для $h \in (0, h_0)$ положим

$$\Phi_h(x) = u(x) \psi(x_1) g^m(x_2) \varphi_\delta(x_2) * \omega_h(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} \|u \psi g^m - \Phi_h\| &= \|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta) + u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \\ &\leq \|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta)\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} + \|u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу (2.7) число $\delta_0 > 0$ можно выбрать так, что при $\delta \leq \delta_0$

$$\|u \psi g^m (1 - \varphi_\delta)\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.14)$$

В силу (2.12) для данного δ_0 число $h \in (0, h_0)$ можно выбрать так, чтобы

$$\|u \psi g^m \varphi_\delta - \Phi_h\|_{H(\mathbb{R}, \Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.15)$$

Из соотношений (2.13) - (2.15) следует (2.8), что и доказывает лемму 2.1. $\square$

Лемма 2.2. В пространстве $H_g = H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ можно ввести норму

$$\|u\|'_{H_g} = \|u\|'_{H_g(\mathfrak{R}, \Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.16)$$

эквивалентную исходной норме (2.2).

Доказательство. Мы должны доказать существование числа $C > 0$ такого, что

$$\begin{aligned} C^{-1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R}$. Воспользуемся свойством 3) функции g с заменой m на α_2 и k на β_2 ($0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$) (см. Предложение 2.1). Применяя формулу Лейбница, получим с некоторой постоянной $C_1 > 0$ для всех $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ (при этом, в обозначениях нормы мы опустим индекс $L_2(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha [u g^{|\alpha|}]\|_{L_2(\Omega)} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\| \sum_{\beta_2 \leq \alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} [D^{\alpha - (0, \beta_2)} u] [D_2^{\beta_2} g^{|\alpha|}] \right\| \leq \\ &\leq \sigma \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \sum_{\beta_2 \leq \alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \| [D^{\alpha - (0, \beta_2)} u] g^{|\alpha| - \beta_2} \| \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha u) g^{|\alpha|} \|, \end{aligned}$$

что доказывает правую часть (2.17).

Для доказательства левой части (2.17) покажем по индукции по j , что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$ $(D_1^{\alpha_1} D_2^j u(x)) g^{\alpha_1 + j}(x_2) \in L_2(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_2$ в предположении, что выражение $\|u\|'$ в (2.16) ограничено. При $j = 0$, $[D_1^{\alpha_1} u(x)] g^{\alpha_1}(x_2) = D_1^{\alpha_1} [u(x) g^{\alpha_1}(x_2)] \in L_2(\Omega)$. Пусть теперь

$$(D_1^{\alpha_1} D_2^j u(x)) g^{\alpha_1 + j}(x_2) \in L_2(\Omega), \quad j = 0, 1, \dots, r \leq \alpha_2 - 1, \quad (2.18)$$

покажем, что

$$[D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} u(x)] g^{\alpha_1 + r + 1}(x_2) \in L_2(\Omega).$$

Так как при $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $r \leq \alpha_2 - 1$ в силу ограниченности $\|u\|'$

$$D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} [u(x) g^{\alpha_1 + r + 1}(x_2)] \in L_2(\Omega), \quad (2.19)$$

то применяя формулу Лейбница и соотношения (2.18), (2.19) получаем

$$\begin{aligned} [D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} u(x)] g^{\alpha_1 + r + 1}(x_2) &= D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1} [u(x) g^{\alpha_1 + r + 1}(x_2)] - \\ &- \sum_{k=1}^{r+1} C_{r+1}^k [D_1^{\alpha_1} D_2^{r+1-k} u(x)] D_2^k g^{\alpha_1 + r + 1}(x_2) \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.20)$$

ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА

В силу произвольности $(\alpha_1, j) \in \mathfrak{R}$ это показывает, что $u \in H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$, при этом

$$\|(D^\alpha u) g^{|\alpha|}\| \leq C_2 \sum_{j=0}^{\alpha_2} \|D_1^{\alpha_1} D_2^j [u g^{\alpha_1+j}]\| \leq C_2 \sum_{\beta \in \mathfrak{R}} \|D^\beta [u g^{|\beta|}]\|$$

с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\alpha) > 0$, не зависящей от u . Так как число мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R}$ ограничено, то отсюда следует левая часть неравенства (2.18). Лемма 2.2 доказана. $\square$

3. ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

Пусть прямоугольник $\Omega = \Omega(a, 1)$, правильный четырёхугольник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(l, m)$, весовая функция g , весовое пространство $H_g(\mathfrak{R}, \Omega)$ и локальное пространство $H_{g,loc}(\mathfrak{R}, \Omega)$ определены как и выше.

Для $j = -1, 0, 1, 2, \dots$ положим $\mathfrak{R}_j = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, |\nu| = \nu_1 + \nu_2 \leq m + j\}$. $\mathfrak{R}_j$ - правильный четырёхугольник в R_+^2 с вершинами $(0, 0)$, $(l, 0)$, $(l, m - l + j)$, $(0, m + j)$ из N_0^2 , при этом $\mathfrak{R}_{-1} = \{\nu \in N_0^2, \nu_1 \leq l, |\nu| \leq m - 1\}$, $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_j \subset \mathfrak{R}_{j+1}$, $j = -1, 0, 1, 2, \dots$

Следующая лемма нам понадобится для доказательства основного результата.

Лемма 3.1. Пусть $Q(D) = Q(D_1, D_2)$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и с четырёхугольником Ньютона $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}_j$ для некоторого $j \in N_0$. Если $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{j-1}, \Omega)$, $[Q(D)u] g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1))$ для любого $a' \in (0, a)$, то для каждой $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$

$$Q(D)[u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2)] \in L_2(E^2). \quad (3.1)$$

Доказательство. Сначала покажем, что оператор $Q(D)$ как оператор обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$, затем покажем, что результат такого применения принадлежит $L_2(\Omega)$. При этом отметим, что в (3.1) функция $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$ продолжена нулем вне Ω .

Ниже для оператора $Q(D)$ и мультииндекса $\beta \in N_0^2$ оператор $Q^{(\beta)}(D)$ - дифференциальный оператор, отвечающий символу (характеристическому многочлену) $Q^{(\beta)}(\xi) \equiv D^\beta Q(\xi)$, при этом $Q^{(0,0)}(\xi) = Q(\xi)$, и $Q^{(\beta)}(\xi) \equiv 0$ при $|\beta| > m + j$. Заметим, что если $\mathfrak{R}(Q) \subset \mathfrak{R}_j$, то из правильности $\mathfrak{R}_j$ следует, что $\mathfrak{R}(Q^{(\beta)}) \subset \mathfrak{R}_{j-1}$ при $|\beta| \neq 0$.

Чтобы показать, что оператор $Q(D)$ как оператор обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \psi g^{m+j}$, следует показать, что выражение

$$I(\varphi) \equiv |(u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x))|$$

ограничено (постоянной, зависящей от φ) для каждой (пробной) функции $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$.

Итак, пусть $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. Применяя формулу Лейбница для оператора $Q(D)$, неравенство Коши - Буняковского, и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= |(u, \psi g^{m+j} Q(-D)\varphi)| = |(u, Q(-D)[\varphi \psi g^{m+j}]) - \\ &\quad - \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} (u, [Q^{(\beta)}(-D)\varphi] (-D)^\beta [\psi g^{m+j}])| = \\ &= |(u, Q(-D)[\varphi \psi g^{m+j}]) - \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} (u (-D)^\beta [\psi g^{m+j}], [Q^{(\beta)}(-D)\varphi])| \leq \\ &\leq |(Q(D)u, \varphi \psi g^{m+j})| + \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} |(Q^{(\beta)}(D)[u (-D)^\beta (\psi g^{m+j})], \varphi)| \equiv \\ &\equiv A + \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{\beta!} B_\beta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Оценим каждое слагаемое правой части (3.2). Имеем

$$A \equiv |(Q(D)u, \varphi \psi g^{m+j})| = |([Q(D)u g^{m+j}] \psi, \varphi)|$$

Так как по условию леммы $Q(D)u g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1))$ для любого $a' \in (0, a)$ и $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, то $[Q(D)u g^{m+j}] \psi \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega(a, 1))$. Поэтому, применяя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$A \leq \|Q(D)u g^{m+j} \psi\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} < \infty. \tag{3.3}$$

Применив формулу Лейбница для оператора $Q^{(\beta)}(D)$, для слагаемых B_β ; $|\beta| > 0$ имеем

$$\begin{aligned} B_\beta &\equiv |(Q^{(\beta)}(D)[u (-D)^\beta (\psi g^{m+j})], \varphi)| = \\ &= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} |([Q^{(\beta+\gamma)}(D)u] (D)^{\beta+\gamma} [\psi g^{m+j}], \varphi)|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как $D^\alpha Q(\xi) \equiv 0$ при $|\alpha| > m+j$, то в правой части (3.2) сумма распространяется по мультииндексам β $|\beta| \leq m+j$, а в правой части (3.4) по мультииндексам

$\gamma \quad |\gamma| \leq m + j$. Поэтому из (3.4) имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$B_\beta \leq C_1 \sum_{0 < |\beta| \leq m+j} |([Q^{(\beta)}(D)u] (D)^\beta [\psi g^{m+j}], \varphi)|. \quad (3.5)$$

Покажем, что при $\beta \in N_0^2$; $0 < |\beta| \leq m + j$

$$[Q^{(\beta)}(D)u] (D)^\beta [\psi g^{m+j}] \in L_2(\Omega). \quad (3.6)$$

Сначала отметим, что с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$|Q^{(\beta)}(D)u(x)| \leq C_2 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} |D^{(\alpha-\beta)}u(x)| \quad \forall x \in E^2.$$

Далее, так как $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, а функция g удовлетворяет свойству 3) предложения 2.1, то с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$|D^\beta [\psi(x_1) g^{m+j}(x_2)]| = |D_1^{\beta_1} \psi(x_1) D_2^{\beta_2} g^{m+j}(x_2)| \leq C_3 g^{m+j-\beta_2}(x_2) \quad \forall x \in E^2.$$

Из последних двух соотношений при $\beta \in N_0^2$; $0 < |\beta| \leq m + j$ получаем с некоторой постоянной $C_4 = C_4(\beta) > 0$

$$||[Q^{(\beta)}(D)u] D^\beta [\psi g^{m+j}]||_{L_2(\Omega)} \leq C_4 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} ||(D^{\alpha-\beta}u) g^{m+j-\beta_2}||_{L_2(\Omega(a',1))},$$

где $a' = a'(\psi) \in (0, a)$, $\text{supp } \psi \subset [-a', a']$.

Так как $g(t) \leq 1$ при $t \in E^1$ и $|\alpha - \beta| \leq m + j - \beta_2$, то

$$\begin{aligned} & ||[Q^{(\beta)}(D)u] D^\beta [\psi g^{m+j}]||_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq C_4 \sum_{\alpha \in (Q), \alpha \geq \beta} ||(D^{\alpha-\beta}u) g^{|\alpha-\beta|}||_{L_2(\Omega(a',1))}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Покажем, что $\alpha - \beta \in \mathfrak{R}_{j-1}$ при $\alpha \in (Q)$; $0 \neq \beta \leq \alpha$, т.е. покажем, что $\alpha_1 - \beta_1 \leq l$ и $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \leq m + j - 1$. Пусть сначала $\beta_1 = 0$, тогда $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_1 \leq l$ по определению множества $\mathfrak{R}_j$ и так как $\beta_2 \geq 1$, то $\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \leq m + j - \beta_2 \leq m + j - 1$. Пусть $\beta_1 \neq 0$. Так как $\alpha \in (Q) \subset \mathfrak{R}_j$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq m + j$, поэтому $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) \leq m + j - 1$.

Отсюда, из условия $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{j-1}, \Omega)$ леммы и из (3.7) следует (3.6). Тогда применяя к правой части (3.5) неравенство Коши - Буняковского, из соотношений (3.2), (3.3), (3.5) получим ограниченность выражения $I(\varphi)$ для каждой (пробной) функции $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. Это значит, что оператор $Q(D)$ как оператор

обобщенного дифференцирования можно применить к функции $u \cdot \psi \cdot g^{m+j}$, при этом с некоторой постоянной $C_5 = C_5(u) > 0$

$$I(\varphi) \leq C_5 \|\varphi\|_{L_2(E^2)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(E^2). \quad (3.8)$$

Для завершения доказательства леммы рассмотрим линейный функционал

$$I(\varphi) = (u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x))$$

на $C_0^\infty(E^2)$. Оценка (3.8) показывает, что функционал $I(\varphi)$ ограничен в $C_0^\infty(E^2)$. Так как множество $C_0^\infty(E^2)$ плотно в $L_2(E^2)$, то по теореме Хана-Банаха функционал I можно продолжить на L_2 с сохранением нормы, т.е.

$$|I(\varphi)| \leq C_5 \|\varphi\|_{L_2(E^2)} \quad \forall \varphi \in L_2(E^2).$$

По теореме Рисса существует функция $\Phi \in L_2$ такая, что

$$I(\varphi) = (\Phi, \varphi) \quad \forall \varphi \in L_2.$$

Так как для всех $\varphi \in C_0^\infty$

$$(\Phi, \varphi) = (u(x) \psi(x_1) g^{m+j}(x_2), Q(-D)\varphi(x)),$$

то по определению обобщенной производной

$$Q(D)(u \psi g^{m+j}) = \Phi \in L_2(E^2).$$

Этим Лемма 3.1 доказана. □

Положим

$$N(P) = N(P, \mathfrak{R}, g, \Omega) = \{u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega);$$

$$D_2^j[P(D)u] g^{m+j} \in L_2(a', 1) \quad \forall j \in N_0, \quad \forall a' \in (0, a)\}.$$

Из нижеприводимой леммы непосредственно следует основной результат настоящей заметки.

Лемма 3.2. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с правильным четырехугольником Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P) = \{\nu \in N_0^2 \mid \nu_1 \leq l, |\nu| \leq m, \quad l < m\}$. Тогда

$$N(P, \mathfrak{R}, g, \Omega) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega).$$

Доказательство. Проведем по индукции по j . Пусть $j = 0$ и $u \in N(P)$. Докажем, что

$$u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_0, \Omega) \equiv H_{g, loc}(\mathfrak{R}, \Omega). \quad (3.9)$$

Так как по определению множества $\mathfrak{R}(P)$, $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$, то для доказательства (3.9) достаточно доказать, что для мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_{-1}$ т.е. для мультииндексов $\{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m\}$

$$(D^\alpha u) \psi g^{|\alpha|} \in L_2(\Omega(a', 1)) \quad \forall a' \in (0, a). \quad (3.10)$$

Сначала отметим, что при $j = 0$ и $Q(D) = P(D)$ условия леммы 3.1 эквивалентны условию $u \in N(P)$. Поэтому, применяя лемму 3.1 к оператору $Q(D) = P(D)$, получим

$$P(D)[u \cdot \psi \cdot g^m] \in L_2(E^2) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a), \quad (3.11)$$

а из определения множества $N(P)$ следует, что

$$u \psi g^m \in L_2(E^2) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.12)$$

Далее символ $P(\xi)$ регулярного оператора $P(D)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Поэтому из равенства Парсеваля, неравенства (1.3) и соотношений (3.11), (3.12) получим для любых $\{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m\}$ и $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$

$$\begin{aligned} \|\xi^\alpha F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)} &\leq C\{\|P(\xi) \cdot F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)} + \|F[u \psi g^m]\|_{L_2(R^2)}\} = \\ &= C\{\|P(D)[u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} + \|u \psi g^m\|_{L_2(E^2)}\} < \infty, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $F(f)$ – преобразование Фурье функции $f \in L_2(E^2)$. Это в силу равенства Парсеваля означает, что

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m} \|D^\alpha [u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} < \infty \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.14)$$

Из принадлежности u к $H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ и из Леммы 2.2 следует, что

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha| = m-1} \|D^\alpha [u \psi g^m]\|_{L_2(E^2)} < \infty \quad \forall \psi \in C_0^\infty(-a, a). \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15) в силу Леммы 2.2 и произвольности ψ следует (3.10), т.е. $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_0, \Omega)$.

Теперь докажем, что если $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega)$ для всех $j = 0, 1, \dots, r$, то $N(P) \subset H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$.

Пусть $u \in N(P)$, докажем, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$. Сначала отметим, что из регулярности оператора $P(D)$ следует (см. неравенство (1.3)), что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$ и для любого $j \in N_0$

$$|\xi_2^j \xi^\alpha| \leq C [|\xi_2^j P(\xi)| + |\xi_2^j|] \quad \forall \xi \in R^2.$$

С другой стороны, так как $m > 1$, то $(0, r+1) = (0, m+r-(m-1)) \in \mathfrak{R}_r$. Поэтому еще раз применяя равенство Парсеваля и Лемму 3.1 для оператора $Q(D) = D_2^{r+1}P(D)$, имеем для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} & \|\xi_2^{r+1} \cdot \xi^\alpha F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} \leq \\ & \leq C \{ \|\xi_2^{r+1} P(\xi) \cdot F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} + \|\xi_2^{r+1} F[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(R^2)} \} = \\ & = C \cdot \{ \|D_2^{r+1}P(D)[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(E^2)} + \|D_2^{r+1}[u \psi g^{m+r+1}]\|_{L_2(E^2)} \} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства Парсеваля следует, что

$$D_2^{r+1}D^\beta[u \psi g^{m+r+1}] \in L_2(E^2) \quad \forall \beta \in \mathfrak{R}. \quad (3.16)$$

Так как по предположению индукции и леммы 2.2

$$D^\beta[u \psi g^{|\beta|}] \in L_2(\Omega) \quad \forall \beta \in \mathfrak{R}_r \quad (3.17)$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(-a, a)$, то в силу леммы 3.1 и замечания 2.1 из (3.16), (3.17) следует, что $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{r+1}, \Omega)$. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Пусть $x \in \Omega = \Omega(a, 1)$, функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по переменной x_2 и

$$D_2^j f g^{m+j} \in L_2(\Omega(a', 1)) \quad \forall j \in N_0, \quad \forall a' \in (0, a). \quad (3.18)$$

Следующее предложение является основным результатом настоящей заметки.

Теорема 3.1. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с правильным четырехугольником Ньютона $\mathfrak{R}$ а функция f удовлетворяет условиям (3.18) в прямоугольнике Ω . Тогда любое обобщенное решение $u \in H_{g,loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ уравнения (1.2) является бесконечно дифференцируемой по второй переменной функцией.

Доказательство. Для области $G \subset E^2$ и $j = 0, 1, \dots$ через $C^{(0,j)}(G)$ обозначим множество функций $\{u(x) = u(x_1, x_2)\}$ непрерывных и имеющих непрерывные производные в G по переменной x_2 до j -того порядка включительно.

Пусть, как и выше, (натуральные) числа l и m определяют четырехугольник $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{S}(l, m + j)$ $j = 0, 1, \dots$ множество мультииндексов $\alpha \in N_0^2$ таких, что $\alpha_1/l + \alpha_2/(m + j) \leq 1$. Для каждого $j = 0, 1, \dots$ это (неравнобедренный) прямоугольный треугольник в R_+^2 с вершинами из N_0^2 . Через $W_2^{l, m+j}(G)$ обозначим анизотропное пространство Соболева - множество функций $u \in L_2(G)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W_2^{l, m+j}(G)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}(l, m+j)} \|D^\alpha u\|_{L_2(G)} \quad j = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что для каждого $j = 0, 1, \dots$, $\mathfrak{S}(l, m + j) \subset \mathfrak{R}_j(l, m)$, при этом, если $G = \Omega(a, 1)$, то $H(\mathfrak{R}_j, \Omega) \subset W_2^{l, m+j}(\Omega)$.

Пусть $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_{-1}, \Omega)$ обобщенное решение уравнения (1.4). Тогда по условиям (3.18) теоремы $u \in N(P)$ и по лемме 3.2 $u \in H_{g, loc}(\mathfrak{R}_j, \Omega)$ для любого $j \in N_0$. Покажем, что для любых фиксированных чисел $a' \in (0, a)$ и $b \in (0, 1)$, $u \in \bigcap_j H(\mathfrak{R}_j, \Omega(a', b))$. В самом деле, так как при $b \in (0, 1)$ и $|t| \leq b$, $g(t) \geq 1 - b^2 > 0$, то для любого мультииндекса $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{R}_j$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(a', b)} |D^\alpha u(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{(1 - b^2)^{|\alpha|}} \int_{\Omega(a', b)} |D^\alpha u(x)|^2 g^{2|\alpha|}(x_2) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - b^2)^{|\alpha|}} \int_{\Omega(a', 1)} |D^\alpha u(x)|^2 g^{2|\alpha|}(x_2) dx < \infty, \end{aligned}$$

т.е. $u \in \bigcap_j H(\mathfrak{R}_j, \Omega(a', b))$.

Так как $\mathfrak{S}(l, m + j) \subset \mathfrak{R}_j(l, m)$ для каждого $j = 0, 1, \dots$, то отсюда следует, что $u \in \bigcap_j W_2^{l, m+j}(\Omega(a', b))$. Применяя здесь теорему 10.4 монографии [22] о вложении анизотропных пространств $W_2^{l, m+j}(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots$ в пространство непрерывных функций, получим, что $u \in \bigcap_j C^{(0, j)}(\Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Abstract. A linear differential operator $P(D)$ with constant coefficients is said to be *regular or nondegenerating*, if all monomials $\{\xi^\alpha\}$ of the characteristic polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$, i.e. of the complete symbol of the operator $P(D)$ are estimated by $P(\xi)$. This work is devoted to the study of two-dimensional, regular, almost hypoelliptic operators $P(D) = P(D_1, D_2)$ with regular Newton polyhedrons. It is proved that all generalized (weak) solutions of the equation $P(D)u = f$ from a

several weighted Sobolev space are infinitely differentiable functions in the rectangle $\{x \in E^2 : -a < x_1 < a, -b < x_2 < b\}$ in the variable x_2 , in which the function f is infinitely differentiable.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Г. Петровский, "Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles", *Мат. Сборник*, **5**, (47), 3 – 70 (1937).
- [2] S. N. Bernstein, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivees partielles du second ordre", *Mat. Ann.* **59**, 20 – 76 (1904).
- [3] H. Weyl, "The method of orthogonal projection in potential theory" *Duke Math. J.* **7**, 411 – 444 (1940).
- [4] L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, **2**, Hermann, Paris (1951).
- [5] F. John, *Plane Waves and Spherical Means to Partial Differential Equations*, New York (1955).
- [6] K. Friedrichs, "On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **6**, 299 – 326 (1953).
- [7] P. D. Lax, "On Cauchy's problem for hiperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations", *Comm. Pure Appl. Math.* **8**, 615 – 633 (1955).
- [8] L. Nirenberg, "Remarks on strongly elliptic partial differential equations". *Comm. Pure Appl. Math.* **8**, 89 – 105 (1955).
- [9] L. Hörmander, "On the theory of general partial differential operators", *Acta Math.* **94**, 161 – 248 (1955).
- [10] L. Hörmander, *The Analysis of linear Partial Differential Operators*, **2**, Springer - Verlag (1983).
- [11] L. Gårding, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partillement hypoelliptiques", *Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **247**, no. 23, 2083 – 2085 (1958).
- [12] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division. 4", *Amer. J. Math.* **82**, 522 – 588 (1960).
- [13] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", *ДАН СССР*, **144**, no. 4, 767 – 769 (1962).
- [14] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", *Труды МИАН СССР*, **77**, стр. 45 – 64 (1965).
- [15] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоеллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", *Сб. докладов 7-го Советско - Чехословацкого семинара*, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [16] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", *Doklady Ross. Acad. Nauk.*, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
- [17] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **41**, no. 6, 39 – 56 (2006).
- [18] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **43**, no. 3, 39 – 64 (2008).
- [19] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", *Труды МИАН СССР*, **91**, 59 – 81 (1967).
- [20] S. Gindikin and L. R. Volevich, *The Method of Newton's Polyhedron in Theory of Partial Differential Equations*, Kluwer, Academic Publishers, London (1992).
- [21] Г. Г. Казарян, "О гипоеллиптических полиномах", *ДАН СССР*, **124**, no. 5, 1018 – 1020 (1974).
- [22] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. Москва, Наука (1996).
- [23] H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*. University of California, Berkeley, Massachusetts (1965).

Поступила 1 декабря 2010

Dedicated to the 75th anniversary of
academician Norair Arakelian

POWER SERIES WITH RADIUS OF CONVERGENCE ZERO – OVERCONVERGENCE, ELONGATIONS, SUMMABILITY

W. LUH, A. STEPANYAN

Universität Trier, Trier, Germany

*National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia*¹

E-mails: Wolfgang.luh@gmx.de, arpistepanyan@gmail.com

Abstract. We deal with overconvergence phenomena of power series with radius of convergence zero. Among others it is shown that the partial sums of such series can be elongated to become Cesàro summable on a set $S \subset \{z : |z| > 0\}$ if and only if the considered power series is overconvergent.

MSC2010 number: 30B30, 40A25, 30B40

Keywords: Overconvergence, elongation of sequences, Cesàro summability.

1. INTRODUCTION

We consider a power series

$$(1.1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \quad \text{with} \quad \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu} = \infty$$

which has radius of convergence zero. Its partial sums

$$(1.2) \quad s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$$

are divergent for all $z \neq 0$ and quantitatively we have

$$(1.3) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |s_n(z)|^{1/n} = \infty \quad \text{for all } z \neq 0.$$

We define C^{∞} as the family of all functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ which are infinitely differentiable on $\mathbb{R}$. Then, according to a classical result of E. Borel (see. e. g. [6], page 191 or [7], page 102) for any sequence $\{a_{\nu}\}$ of complex numbers there exists a function $\varphi \in C^{\infty}$

¹The research work of the second author has been supported by German Academic Exchange Service (DAAD)

with the property that its sequence of derivatives satisfies $\varphi^{(\nu)}(0) = \alpha_\nu$ for all $\nu \in \mathbb{N}_0$. Hence, there is a function $g \in C^\infty$ such that the power series (1.1) can be written as

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu$$

and therefore represents the Taylor series of g . Of course, this series has no analytic properties around the origin.

However, among others, we show in this paper that certain power series of the type (1.1) may – by applying simple analytic operations to their partial sums – generate holomorphic (and other) behavior on sets in $|z| > 0$. Our idea is, to modify the sequence of partial sums by „elongation” and to apply a summability method to the new sequence.

We say that a sequence $\{s_n\}$ of complex numbers is being elongated with respect to a sequence $m = \{m_n\}$ of natural numbers if the term s_n is listed m_n -times, i. e. the modified sequence

$$\underbrace{s_0, \dots, s_0}_{m_0\text{-times}}, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_{m_1\text{-times}}, \dots, \underbrace{s_k, \dots, s_k}_{m_k\text{-times}}, \dots$$

is considered. Occasionally we denote this new sequence as the m -elongation of $\{s_n\}$. It is clear that $\{s_n\}$ converges if and only if any m -elongation converges. This may change drastically when instead of convergence, summability properties are considered.

We mainly concentrate ourselves to the C_1 means (arithmetical means) which transform the partial sums (1.2) into

$$(1.4) \quad \sigma_n(z) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^n s_\nu(z).$$

This sequence again diverges for all $z \neq 0$ and simple estimations show that (in analogy to the behavior of partial sums) the following holds:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(z)|^{1/n} = \infty \quad \text{for all } z \neq 0.$$

It is the object of this paper:

- To demonstrate in part 2 that certain power series of type (1.1) may show overconvergence phenomena with respect to certain notions of convergence.
- To prove in the main parts 3 and 4 that special elongations of the partial sums of those series may be C_1 summable in sets, contained in $|z| > 0$ and

that this property occurs if and only if the power series under consideration is overconvergent.

2. OVERCONVERGENCE

A power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ with radius of convergence zero is called overconvergent, if there exist a set $S \subset \{z : |z| > 0\}$ and a subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of its partial sums which converges on S . Such a sequence is called an overconvergent subsequence of the considered series. (There are other definitions of overconvergence also.)

In this part of our paper we construct power series which have different overconvergence behavior with respect to certain convergence concepts.

For the construction of those series the following Lemma is useful.

Lemma 2.1. *Let K be a compact set with connected complement, $0 \notin K$, a number $q \in \mathbb{N}$, a holomorphic function F on K and $\varepsilon > 0$. Then there exists a polynomial of the type*

$$P(z) = \sum_{\nu=q}^Q a_{\nu} z^{\nu}$$

with

$$\max_K |F(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Proof. The function $F(z)/z^q$ is holomorphic on K and by Runge's approximation theorem there exists a polynomial $Q(z) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} z^{\nu}$ with

$$\max_K \left| Q(z) - \frac{F(z)}{z^q} \right| < \frac{\varepsilon}{\max_K |z^q|}.$$

Then $P(z) := z^q Q(z)$ has the required form and we get

$$\max_K |P(z) - F(z)| < \varepsilon.$$

Lemma 2.1 is proved. □

In the following results we describe various overconvergence phenomena which deal as basis for the main results in parts 3 and 4.

Theorem 2.1. *Let an open set $\mathcal{O}$ with simply connected components be given, $0 \notin \mathcal{O}$ and a function f which is holomorphic on $\mathcal{O}$. Then there exists a power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ with radius of convergence zero and a sequence $\{p_k\}$, such that the subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of partial sums converges compactly to $f(z)$ on $\mathcal{O}$.*

Proof. 1. We have $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} G_j$ where the set $J = \{1, 2, \dots\}$ is finite or countable and the G_j are pairwise disjoint simply connected domains. For each $j \in J$ we can choose a sequence of Jordan domains $\{G_j^{(k)}\}$ exhausting G_j , which means that $G_j^{(k)} \subset \overline{G_j^{(k-1)}} \subset G_j^{(k+1)} \subset G_j$ for all $k \in \mathbb{N}$ and that a compact set $B \subset G_j$ is contained in some $G_j^{(k_0)}$.

We consider $K_k := \bigcup_{\substack{j \in J \\ j \leq k}} G_j^{(k)}$ and a point $z_k \notin K_k$ with $0 < |z_k| < \frac{1}{k}$. Then $K_k \cup \{z_k\}$ is compact with connected complement and does not contain the origin.

2. Now we construct a sequence of polynomials and a strictly increasing sequence of integers by induction. Suppose that $P_0(z) = z, q_0 = 0$ and that for a $k \in \mathbb{N}$ the polynomials

$$P_0(z) = z, \dots, P_{k-1}(z) = \sum_{\nu=q_{k-1}+1}^{q_k} a_\nu z^\nu$$

are already determined. Then, by Lemma 2.1 there exists a polynomials P_k of the form

$$P_k(z) = \sum_{\nu=q_k+1}^{q_{k+1}} a_\nu z^\nu$$

with

$$(2.1) \quad \max_{K_k} |P_k(z) - \{f(z) - \sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu(z)\}| < \frac{1}{k}$$

and

$$(2.2) \quad |P_k(z_k) - 2| < 1.$$

3. We consider the power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ and with the abbreviation $p_k = q_{k+1}$ we get (observe that there are no overlappings of the coefficients in the polynomials):

$$s_{p_k}(z) := \sum_{\nu=0}^{p_k} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^k P_\nu(z).$$

Let be given any compact set $K \subset \mathcal{O}$, then there exists a k_0 with $K \subset K_k$ for all $k \geq k_0$. Then, for $k \geq k_0$, we obtain by (2.1)

$$\max_K |s_{p_k}(z) - f(z)| \leq \max_{K_k} |s_{p_k}(z) - f(z)| = \max_{K_k} \left| \sum_{\nu=0}^k P_\nu(z) - f(z) \right| < \frac{1}{k}.$$

Since $K \subset \mathcal{O}$ was arbitrary, we obtain that $\{s_{p_k}(z)\}$ converges on $\mathcal{O}$ compactly to $f(z)$.

4. The constructed power series has radius of convergence zero. Otherwise there would exist an $r > 0$ such that $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ is uniformly convergent on $|z| \leq r$. We have $0 < |z_k| < r$ for sufficiently great k and it follows from (2.2)

$$\left| \sum_{\nu=q_k+1}^{q_{k+1}} a_{\nu} z_k^{\nu} \right| = |P_k(z_k)| > 1,$$

which contradicts Cauchy's criterion for uniform convergence. $\square$

Remark 2.1. *Theorem 2.1 can be derived from a result due to Seleznev [5] (see also Große-Erdmann [1, Theorem 17]) on universal elements. We preferred to give an elementary and direct constructive proof.*

In the next result we deal with pointwise or uniform overconvergence.

Theorem 2.2. *There exists a power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ with radius of convergence zero and a sequence $\{p_k\}$, such that the subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of partial sums converges to zero*

- (a) *pointwise for all $z \in \mathbb{C}$,*
- (b) *uniformly on each compact set which does not intersect $[0, \infty)$,*
- (c) *uniformly on each compact set contained in $(0, \infty)$.*

Proof. We consider the compact set

$$K_k := \left\{ z : \frac{1}{k} \leq |z| \leq k \right\} \setminus \left\{ z : \operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{k} \right\}$$

which has connected complement and construct a sequence of polynomials $\{P_k\}$ and a strictly increasing sequence $\{q_k\}$ of integers by induction. Suppose that $P_0(z) = z$, $q_0 = 0$, and that for $k \in \mathbb{N}$

$$P_0(z) = z, \dots, P_{k-1}(z) = \sum_{\nu=q_{k-1}+1}^{q_k} a_{\nu} z^{\nu}$$

have already been determined. Then, by Lemma 2.1 we find a polynomial

$$P_k(z) = \sum_{\nu=q_k+1}^{q_{k+1}} a_{\nu} z^{\nu}$$

with

$$(2.3) \quad \max_{K_k} \left| P_k(z) + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{\nu}(z) \right| < \frac{1}{k},$$

and

$$(2.4) \quad \left| P_k\left(\frac{1}{2k}\right) - 2 \right| < 1.$$

We consider the power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$. If we abbreviate $p_k = q_{k+1}$ then we have

$$s_{p_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^k P_{\nu}(z).$$

Let a point $z \in \mathbb{C}$ be given. If $z = 0$ then $s_{p_k}(0) = 0$ for all k and for $z \neq 0$ there exists a k_0 with $z \in K_k$ for all $k \geq k_0$; it follows from (2.3) that $\{s_{p_k}(z)\}$ converges to zero.

If K is a compact set with $K \cap [0, \infty) = \emptyset$ or $K \subset (0, \infty)$, then in both cases there is a k_1 with $K \subset K_k$ for all $k \geq k_1$ and it follows again from (2.3) that $\{s_{p_k}(z)\}$ converges on K uniformly to zero.

As in step 4 in the proof of Theorem 2.1 it follows from (2.4) that the constructed power series cannot have a positive radius of convergence. $\square$

Remark 2.2. If f is an entire function with the power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu}$, then

$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + f_{\nu}) z^{\nu}$ still has radius of convergence zero and its sequence of partial sums $\left\{ \sum_{\nu=0}^{p_k} (a_{\nu} + f_{\nu}) z^{\nu} \right\}$ converges to $f(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$ and uniformly on each compact set K with $K \cap [0, \infty) = \emptyset$ or $K \subset (0, \infty)$.

A result, similar to Theorem 2.1 also holds for power series with positive radius of convergence which we mention without proof.

Theorem 2.3. There exists a power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ with radius of convergence 1 and a sequence $\{p_k\}$ such that the subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of partial sums converges to zero

- (a) pointwise for all $z, |z| \geq 1$,
- (b) uniformly on each compact set $K \subset \{z : |z| \geq 1\}$ which does not intersect $[1, \infty)$,
- (c) uniformly on each compact set $K \subset (1, \infty)$.

There also exists a result for measurable functions on measurable sets which easily follows from a theorem of Tomm und Trautner [7], where even much more has been proved.

Theorem 2.4. *Let $M \subset \mathbb{C}$ be a (Lebesgue-)measurable set and let the function $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ be measurable on M . Then there exists a power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ with radius of convergence zero and a sequence $\{p_k\}$ such that the subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of partial sums converges to $f(z)$ almost everywhere on M .*

To see this, consider the function

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & \text{if } z \in M \\ 0, & \text{if } z \notin M \end{cases}$$

which is measurable on $\mathbb{C}$ and it suffices to construct a power series with radius of convergence zero with an almost everywhere convergent subsequence to the limit $g(z)$. But the existence of such a series follows from Theorem 1 in the above mentioned paper [7].

3. ELONGATIONS

We now show that overconvergence phenomena permit the elongation of partial sums to become C_1 summable throughout the set of overconvergence. Then, in part 4 it is shown – as a converse result – that such an elongation only can exist if the considered power series is overconvergent.

Theorem 3.1. *Let $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ be a power series with radius of convergence zero and partial sums $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$. Suppose that there exists an overconvergent subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ which is on a set $S \subset \{z : |z| > 0\}$*

$$\left. \begin{array}{l} \text{compactly convergent} \\ \text{or uniformly convergent} \\ \text{or pointwise convergent} \\ \text{or almost everywhere convergent} \end{array} \right\} \text{ to a limit } f(z).$$

Then there exists an elongation of $\{s_n(z)\}$ such that its C_1 transforms have the same convergence properties as $\{s_{p_k}(z)\}$ on S .

Proof. Let be given such a set S where $\{s_{p_k}(z)\}$ satisfies one of the assumptions.

1. We consider the sequence $\{p_k\}$ and for every $k \geq 1$ we choose

$$(3.1) \quad m_k := k \cdot (p_{k+1} + 1) \cdot \max_{0 \leq \nu \leq p_{k+1}} \left\{ \max_{|z|=k} |s_{\nu}(z)| \right\}.$$

we elongate the sequence $\{s_n(z)\}$ to the sequence $\{\tilde{s}_n(z)\}$ where the partial sums $s_{p_k}(z)$ for $k \geq 1$ are listed $m_k + 1$ times, i. e. we consider the sequence

$$s_0, \dots, s_{p_1-1}, s_{p_1}, \underbrace{s_{p_1}, \dots, s_{p_1}}_{m_1\text{-times}}, s_{p_1+1}, \dots, s_{p_k-1}, s_{p_k}, \underbrace{s_{p_k}, \dots, s_{p_k}}_{m_k\text{-times}}, \dots$$

Any natural $n \geq p_1$ has a representation of the form

$$(3.2) \quad n = p_k + \sum_{\nu=1}^k m_\nu + \vartheta, \quad \text{where } 1 \leq \vartheta \leq p_{k+1} - p_k,$$

or

$$(3.3) \quad n = p_{k+1} + \sum_{\nu=1}^k m_\nu + \gamma, \quad \text{where } 1 \leq \gamma < m_{k+1}.$$

2. If n has the form (3.2), then we get

$$\begin{aligned} \sigma_n(z) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^n \tilde{s}_\nu(z) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{p_k+\vartheta} s_\nu(z) - \frac{1}{n+1} (p_k + 1 + \vartheta) s_{p_{k+1}}(z) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^k m_\nu s_{p_\nu}(z) + (p_k + 1 + \vartheta) s_{p_{k+1}}(z) \right\}. \end{aligned}$$

The last term of this identity is exactly the C_1 mean of a sequence elongated along $\{s_{p_k}(z)\}$ and therefore has (by the regularity of the C_1 transform) the same convergence properties as $\{s_{p_k}(z)\}$.

By (3.1) we get for the remaining terms and all sufficiently great k

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq k} \left| \frac{1}{n+1} (p_k + 1 + \vartheta) s_{p_{k+1}}(z) \right| &\leq \\ &\leq \frac{p_k + 1 + \vartheta}{p_k + \sum_{\nu=1}^k m_\nu + \vartheta + 1} \cdot \max_{|z| \leq k} |s_{p_{k+1}}(z)| \leq \\ &\leq \frac{p_{k+1} + 1}{m_k} \max_{|z| \leq k} |s_{p_{k+1}}(z)| \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \max_{|z| \leq k} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{p_k+\vartheta} s_\nu(z) \right| &\leq \\
 &\leq \frac{p_k + \vartheta + 1}{p_k + \sum_{\nu=1}^k m_\nu + \vartheta + 1} \cdot \max_{\nu \leq p_k + \vartheta} \left\{ \max_{|z| \leq k} |s_\nu(z)| \right\} \leq \\
 &\leq \frac{p_{k+1} + 1}{m_k} \cdot \max_{\nu \leq p_{k+1}} \left\{ \max_{|z| \leq k} |s_\nu(z)| \right\} = \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

Therefore these terms are compactly convergent to zero on $\mathbb{C}$.

3. If n has the form (3.3) then we get

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(z) &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^n \bar{s}_\nu(z) = \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{p_{k+1}} s_\nu(z) - \frac{1+p_{k+1}}{n+1} \cdot s_{p_{k+1}}(z) + \\
 &+ \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^k m_\nu s_{p_\nu}(z) + \left(n+1 - \sum_{\nu=1}^k m_\nu \right) s_{p_{k+1}}(z) \right\}.
 \end{aligned}$$

Again, the last term has the same convergence properties as $\{s_{p_k}(z)\}$ and the remaining terms are estimated in a similar way as in step 2. $\square$

Remark 3.1. The Cesàro means C_α of order $\alpha \geq 1$ of the partial sums (1.2) are given by

$$\sigma_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \cdot \sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu+\alpha-1}{n-\nu} s_\nu(z).$$

For $\alpha = 1$ we obtain the above considered arithmetical means. It is well known that for $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ the C_{α_2} transform is stronger than C_{α_1} . So, Theorem 3.1 holds also for all Cesàro means C_α of order $\alpha \geq 1$ and in addition for all Hölder means H_α of order $\alpha \geq 1$ since H_α is equivalent to C_α . Moreover, Theorem 3.1 remains true for all summability methods which are stronger than the C_1 means. For a number of those examples see for instance [3, chapter 2] or [4, chapter II, 6.1].

4. THE CONVERSE RESULT

We now show, that elongations as in Theorem 3.1 are possible only in the case that the power series under consideration is overconvergent. For the proof the following Lemma is essential.

Lemma 4.1. *Let $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ be a power series with radius of convergence zero. Suppose that there exists an m -elongation of the partial sums $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$ such that their C_1 transforms are bounded at a point z_0 with $|z_0| > 1$. Then $\left\{ \frac{M_n}{m_n} \right\}$ has a bounded subsequence, where $M_n := \sum_{\nu=0}^n m_{\nu}$.*

Proof. 1. Let $\{t_n\}$ be a sequence with the property that its C_1 transforms

$$\tau_n := \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n t_{\nu}$$

are bounded. We have $t_n = (n+1)\tau_n - n\tau_{n-1}$ and it follows that $\left\{ \frac{t_n}{n} \right\}$ is bounded.

2. Let the m -elongation $\{\tilde{s}_k(z)\}$ of $\{s_n(z)\}$ have the form

$$\underbrace{s_0(z), \dots, s_0(z)}_{m_0\text{-times}}, \dots, \underbrace{s_n(z), \dots, s_n(z)}_{m_n\text{-times}}, \dots$$

Then by the assumption, the C_1 transforms of $\{\tilde{s}_k(z)\}$ are bounded at z_0 . This implies by step 1 that $\left\{ \frac{\tilde{s}_k(z_0)}{k} \right\}$ is bounded. Since $\tilde{s}_{M_n}(z_0) = s_n(z_0)$ we obtain with a positive constant C :

$$\frac{|s_n(z_0)|}{M_n} \leq C \quad \text{or} \quad |s_n(z_0)| \leq C \cdot M_n.$$

3. Now choose any fixed $R > 1$. If $\left\{ \frac{M_n}{m_n} \right\}$ would not have a bounded subsequence, then $\frac{M_n}{m_n} \rightarrow \infty$ and there exists an n_0 such that $M_n \geq R \cdot m_n$ for all $n \geq n_0$ and it follows for those n

$$M_n - M_{n-1} = m_n \leq \frac{1}{R} M_n$$

or

$$M_n \leq S \cdot M_{n-1}, \quad \text{where } S = \frac{R}{R-1} > 1.$$

It follows

$$M_n \leq S \cdot M_{n-1} \leq S^2 \cdot M_{n-2} \leq \dots \leq S^{n-n_0} \cdot M_{n_0}.$$

We therefore have $|s_n(z_0)| \leq C \cdot S^{n-n_0} \cdot M_{n_0}$ which implies

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |s_n(z_0)|^{1/n} \leq S$$

in contradiction to (1.3). □

As a corollary one obtains now easily:

Theorem 4.1. Let $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ be a power series with radius of convergence zero and suppose that there exists an m -elongation of the partial sum $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$ whose C_1 transforms are on a set $S \subset \{z : |z| > 0\}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{compactly convergent} \\ \text{or uniformly convergent} \\ \text{or pointwise convergent} \\ \text{or almost everywhere convergent} \end{array} \right\} \text{ to a limit } f(z).$$

Then there exists a subsequence $\{s_{p_k}(z)\}$ of the partial sums having the same convergence properties with the same limit on S .

Proof. According to Lemma 4.1 there exists a sequence $\{p_k\} \subset \mathbb{N}$ such that $\left\{ \frac{M_{p_k}}{m_{p_k}} \right\}$ is bounded.

We consider the following subsequence of the C_1 transforms:

$$\rho_n(z) = \frac{1}{M_n} \cdot \sum_{\nu=0}^n m_{\nu} s_{\nu}(z)$$

(of course, with the corresponding convergence properties on the set S) and obtain

$$\begin{aligned} M_n \cdot \rho_n(z) &= \sum_{\nu=0}^n m_{\nu} s_{\nu}(z), \\ M_{n-1} \cdot \rho_{n-1}(z) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} m_{\nu} s_{\nu}(z), \end{aligned}$$

which gives us

$$\begin{aligned} m_n \cdot s_n(z) &= M_n \cdot \rho_n(z) - M_{n-1} \cdot \rho_{n-1}(z) = \\ &= M_n \cdot \{\rho_n(z) - \rho_{n-1}(z)\} + m_n \cdot \rho_{n-1}(z), \\ s_n(z) &= \frac{M_n}{m_n} \cdot \{\rho_n(z) - \rho_{n-1}(z)\} + \rho_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Setting now $n = p_k$ we find that $\{s_{p_k}(z)\}$ has on S the same convergence properties as $\{\rho_n(z)\}$ which proves the theorem. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K.-G. Große-Erdmann, "Universal families and hypercyclic operators", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **36**, 345 – 381 (1999).
- [2] W. Luh and M. Wießner, *Aufgabensammlung Analysis*, Band 2, Aula-Verlag, Wiesbaden (1992).
- [3] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformations*, Mc-Graw-Hill, New York, Toronto, Sydney (1966).
- [4] A. Peyerimhoff, *Lectures on Summability*, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag (1970).
- [5] A. I. Seleznev, On universal power series (Russian), *Mat. Sb. (N. S.)*, **28** (70), 453 – 460 (1951).
- [6] K. R. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove (1981).
- [7] L. Tomm und R. Trautner, A Universal Power Series for Approximation of Measurable Functions, *Analysis* **2**, 1 – 6 (1982).

Поступила 15 ноября 2010

ASYMPTOTIC FORM AND INFINITE PRODUCT REPRESENTATION OF SOLUTION OF SECOND ORDER INITIAL VALUE PROBLEM WITH A COMPLEX PARAMETER AND A FINITE NUMBER OF TURNING POINTS

H. R. MARASI

University of Bonab, Bonab, Iran
E-mail: *hamidreza.marasi@gmail.com*

Abstract. The paper studies the differential equation

$$y'' + (\rho^2 \phi^2(x) - q(x)) y = 0 \tag{*}$$

on the interval $I = [0, 1]$, containing a finite number of zeros $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$ of ϕ^2 , i.e. so-called turning points. Using asymptotic estimates from [6] for appropriate fundamental systems of solutions of (*) as $|\rho| \rightarrow \infty$, it is proved that, if there is an asymptotic solution of the initial value problem generated by (*) in the interval $[0, x_1)$, then the asymptotic solutions in the remaining intervals can be obtained recursively. Furthermore, an infinite product representation of solutions of (*) is studied. The representations are useful in the study of inverse spectral problems for such equations.

MSC2010 number:35G25

Keywords: Turning point, Sturm-Liouville problem, nondefinite problem, infinite products, Hadamard factorization, spectral theory.

1. INTRODUCTION

There are numerous research papers devoted entirely or partially to the study of the equation

$$(1.1) \quad y'' + (\rho^2 \phi^2(x) - q(x)) y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

where the real valued functions ϕ^2 and q are said to be the coefficients of the problem, ϕ^2 is the weight and q is the potential function. Let I_+ be the set of points $x \in (0, 1)$, where $\phi^2(x) > 0$, I_- be the set of $x \in (0, 1)$, where $\phi^2(x) < 0$, and let I_0 be the set of those $x \in (0, 1)$, where $\phi^2(x) = 0$. If both I_+ and I_- are of positive Lebesgue measure, then the weight function $\phi^2(x)$ is said to be indefinite. The zeros of $\phi^2(x)$,

which are assumed to form a discrete set, are called turning points or transition points (TP) of (1.1). It is impossible to obtain exact solutions for the majority of differential equations with variable coefficients, so it is necessary to find the best possible method for approximation of solutions. One of the most useful mathematical methods is the representation of a solution in an asymptotic form. For the existence of a solution of (1.1) depending on the parameter ρ^2 , we would like to call the reader's attention to a complete historical review by Mingarelli [19].

The asymptotic techniques for solving differential equations of the form (1.1) play a crucial role in analysis and in the development of methods of modern applied mathematics and theoretical physics. The development of the asymptotic theory for linear differential equations started by a work of Birkhoff [2], based on transformations to first order systems, various diagonal transformation methods were applied by many specialists. The reader can find them in the books by Wasow [26, 27]. The results of Doronidcyn [4], Kazarinoff [11], McKelvey [18], Langer [14], Olver [22], Wazwaz [28], Dyachenko [5], Tumanov [25] and Kheiri, Jodayree & Mingarelli [12] give important innovations in the asymptotic approximation of solutions of the Sturm-Liouville equations with two turning points.

The importance of asymptotic analysis in obtaining information on solutions of the Sturm-Liouville equation with multiple turning points was shown by Leung [15], Olver [20–22], Heading [8], and Eberhard, Freiling & Schneider [6] in the case when the coefficients are smooth, in particular at TP. But the weakness of asymptotic methods is that generally it is impossible to express exact solutions in closed forms, which is necessary for the methods connected with dual equations. On representation of solutions in closed forms, a result of Halvorsen [7] is known, which states that for any $x \in [0, 1]$ a solution $y(x, \lambda)$ of (1.1) satisfying a fixed set of initial conditions is an entire function of the variable λ , whose order does not exceed $1/2$. Thus, it follows from Hadamard's factorization theorem (see, eg. [16]) that the solutions are representable as infinite products, and this gives an alternate description that has not been used for approximation purposes in various applications. Such infinite product

representations have been effectively used by Trubowitz [23] and others [3, 13], etc., in some theoretical considerations related to the inverse spectral problem associated with (1.1) in definite cases, namely where the coefficient of the parameter λ in (1.1) is of a fixed sign in $[0, 1]$, which is not true in the more general indefinite cases. Nevertheless, there are some works of the same spirit as those of Trubowitz and the mentioned above specialists (see, e.g. [10]), where such techniques is effectively used in the study of inverse spectral problems associated with the indefinite problem (1.1). This paper considers the Sturm-Liouville equation (1.1) on a finite interval I , say $I = [0, 1]$, with a finite number of arbitrary turning points $x_1, x_2, \dots, x_m$ subject to any initial conditions, say $y(0, \lambda) = 0$, $y'(0, \lambda) = 1$, and the asymptotic solution in intervals $[x_{v-1}, x_v]$, $v = 1, 2, \dots, m+1$, $x_{m+1} = 1$, $x_0 = 0$ is recursively obtained. Then, the infinite product representation of solutions is studied.

2. NOTATIONS, FUNDAMENTAL SOLUTIONS AND PRELIMINARY RESULTS

Let us consider the real, second order differential equation (1.1) where $\rho^2 = \lambda$ is the spectral parameter. In addition, we assume that

$$(2.1) \quad \phi^2(x) = \phi_0(x) \prod_{v=1}^m (x - x_v)^{\ell_v},$$

where $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1 = x_{m+1}$, ℓ_v is natural, $\phi_0(x) > 0$ for $x \in I = [0, 1]$, and ϕ_0 is twice continuously differentiable on I . In other words, $\phi^2(x)$ has m zeros x_v , $v = 1, \dots, m$, of orders ℓ_v in I , which are also called turning points. We also assume that q is bounded and integrable on I .

We distinguish four different types of turning points as follows: the symbol

$$T_v = \begin{cases} I, & \text{if } \ell_v \text{ is even and } \phi^2(x)(x - x_v)^{-\ell_v} < 0, \\ II, & \text{if } \ell_v \text{ is even and } \phi^2(x)(x - x_v)^{-\ell_v} > 0, \\ III, & \text{if } \ell_v \text{ is odd and } \phi^2(x)(x - x_v)^{-\ell_v} < 0, \\ IV, & \text{if } \ell_v \text{ is odd and } \phi^2(x)(x - x_v)^{-\ell_v} > 0. \end{cases}$$

is said to be the type of the turning point x_v , $1 \leq v \leq m$.

Further, for a turning point x_v , $1 \leq v \leq m$, we set

$$I_{v,\varepsilon} = [x_{v-1} + \varepsilon, x_{v+1} - \varepsilon] \quad \text{and} \quad \mu_v = \frac{1}{2 + \ell_v},$$

where $\varepsilon > 0$ is assumed to be a sufficiently small, fixed number, and

$$(2.2) \quad \vartheta_v = \begin{cases} 2, & \text{if } T_v = III, IV \\ 1, & \text{if } T_v = I, II \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \delta_v = \begin{cases} 1, & \text{if } T_v = II, IV \\ 2, & \text{if } T_v = I, III \end{cases}$$

Also, we define

$$[1] \equiv 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty,$$

$$[\alpha] \equiv \alpha + O(\rho^{-\sigma_0}), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\sigma_0 = \min\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}.$$

Besides, we set

$$S_{-1} = \left\{ \rho : \arg \rho \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \right\}$$

and note that by [6] for each fixed $x \in I_{v,\varepsilon}$, according to its type, there exists a fundamental system of solutions $\{Z_{v,1}^{T_v}(x, \rho), Z_{v,2}^{T_v}(x, \rho)\}$ of (1.1), which is described by the following formulas.

Turning point of type I:

$$(2.4) \quad Z_{v,1}^I(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & x_{v-1} < x < x_v, \\ |\phi(x)|^{-1/2} \csc \pi \mu_v \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.5) \quad Z_{v,2}^I(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ -\rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & x_{v-1} < x < x_v, \\ |\phi(x)|^{-1/2} \sin \pi \mu_v \exp \left\{ -\rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.6) \quad Z_{v,1}^I(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\iota \rho)^{1/2-\mu_v} \csc \pi \mu_v e^{i\pi(-1/4+\mu_v/2)} \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.7) \quad Z_{v,2}^I(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\iota \rho)^{1/2-\mu_v} e^{i\pi(-1/4+\mu_v/2)} \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

where

$$\psi(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \phi^{-1/2}(x) \left\{ \int_{x_1}^x \phi(t) dt \right\}^{1/2-\mu_1},$$

and

$$(2.8) \quad W(\rho) = W(Z_{v,1}^I(x, \rho), Z_{v,2}^I(x, \rho)) = -2\rho[1],$$

where $W(f(x), g(x)) := f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ is the Wronskian of f and g .

Turning point of type II:

(2.9)

$$Z_{v,1}^{II}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ \imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ |\phi(x)|^{-1/2} \csc \pi \mu_v \left[\exp \left\{ \imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right. \\ \left. + \imath \cos \pi \mu_v \exp \left\{ -\imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

(2.10)

$$Z_{v,2}^{II}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \left[\exp \left\{ -\imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] + \right. \\ \left. + \imath \cos \pi \mu_v \exp \left\{ \imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ |\phi(x)|^{-1/2} \sin \pi \mu_v \exp \left\{ -\imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.11) \quad Z_{v,1}^{II}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho^{1/2-\mu_v} \csc \pi \mu_v e^{\imath \pi(1/4-\mu_v/2)} \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.12) \quad Z_{v,2}^{II}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho^{1/2-\mu_v} e^{\imath \pi(1/4-\mu_v/2)} \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.13) \quad W(\rho) = W(Z_{v,1}^{II}(x, \rho), Z_{v,2}^{II}(x, \rho)) = -2\imath \rho [1].$$

Turning point of type III:

$$(2.14) \quad Z_{v,1}^{III}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ \imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ \frac{1}{2} |\phi(x)|^{-1/2} \csc \frac{\pi \mu_v}{2} \\ \times \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + \frac{\imath \pi}{4} \right\} [1], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.15) \quad Z_{v,2}^{III}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \left[\exp \left\{ -\imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right. \\ \left. + \imath \exp \left\{ \imath \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ 2 |\phi(x)|^{-1/2} \sin \frac{\pi \mu_v}{2} \\ \times \exp \left\{ -\rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + \frac{\imath \pi}{4} \right\} [1], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.16) \quad Z_{v,1}^{III}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\imath \rho)^{1/2-\mu_v} \csc \pi \mu_v \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.17) \quad Z_{v,2}^{III}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\imath \rho)^{1/2-\mu_v} e^{\imath \pi \mu_v/2} \sec \left(\frac{\pi \mu_v}{2} \right) \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.18) \quad W(\rho) = W(Z_{v,1}^{III}(x, \rho), Z_{v,2}^{III}(x, \rho)) = -2\imath \rho [1].$$

Turning point of type IV:

$$(2.19) \quad Z_{v,1}^{IV}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ \frac{1}{2} \csc \frac{\pi \mu_v}{2} |\phi(x)|^{-1/2} \\ \quad \times \left[\exp \left\{ i \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt - i \frac{\pi}{4} \right\} [1] \right. \\ \quad \left. + \exp \left\{ -i \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + i \frac{\pi}{4} \right\} [1] \right], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.20) \quad Z_{v,2}^{IV}(x, \rho) = \begin{cases} |\phi(x)|^{-1/2} \exp \left\{ -\rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} [1], & \text{if } x_{v-1} < x < x_v, \\ 2 \sin \frac{\pi \mu_v}{2} |\phi(x)|^{-1/2} \\ \quad \times \left[\exp \left\{ -i \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt - i \frac{\pi}{4} \right\} [1] \right], & \text{if } x_v < x < x_{v+1}, \end{cases}$$

$$(2.21) \quad Z_{v,1}^{IV}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho^{1/2-\mu_v} \csc \pi \mu_v \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.22) \quad Z_{v,2}^{IV}(x_v, \rho) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho^{1/2-\mu_v} e^{-i\pi\mu_v/2} \sec \left(\frac{\pi\mu_v}{2} \right) \frac{2^{\mu_v} \psi(x_v)}{\Gamma(1-\mu_v)} [1],$$

$$(2.23) \quad W(\rho) = W(Z_{v,1}^{IV}(x, \rho), Z_{v,2}^{IV}(x, \rho)) = -2\rho[1].$$

Halvorsen [7] proved that if $0 < c < x < 1$ and

$$\int_c^x |\phi(t)| dt \neq 0,$$

then the solution $y(x, \lambda)$ of (1.1), determined by fixed values of y, y' at c , is an entire function of λ of order $1/2$. On the other hand, by Hadamard's theorem an entire function $f(z)$ of a finite order l , can be represented in the following form:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{h} \left(\frac{z}{a_n} \right)^h \right\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

where $a_n \neq 0$ are the zeros of $f(z)$, arranged in order of increasing magnitude, $h \leq l$, $g(z)$ is a polynomial whose degree q does not exceed l and m is the multiplicity of the zero of $f(z)$ at the origin. By means of Hadamard's theorem, we can find an infinite expansion for $\sinh z$ and $J'_v(z)$. It is well known that

$$\sinh z = z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{m^2 \pi^2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

and therefore

$$(2.24) \quad \sinh c\sqrt{z} = c\sqrt{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{zc^2}{m^2\pi^2}\right) = c\sqrt{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_m^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

where $z_m = m\pi/c$, and the holomorphy domain of the function $f(z) = z^{1/2}$ is the complement of the negative real axis $z \leq 0$, while its range is the right half of the z -plane with the imaginary axis excluded.

Also, from [1] we have

$$(2.25) \quad J'_v(z) = \frac{(z/2)^{v-1}}{2\Gamma(v)} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\tilde{j}_m^2}\right), \quad v > 0,$$

where $\tilde{j}_m$, $m = 1, 2, \dots$, is the sequence of positive zeros of $J'_1(z)$ and

$$(2.26) \quad \tilde{j}_m^2 = m^2\pi^2 - \frac{m\pi^2}{2} + O(1).$$

Putting $z = c\sqrt{\lambda}$ and $\Gamma(1) = 1$ in (2.25), we obtain

$$(2.27) \quad J'_1(c\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda c^2}{\tilde{j}_m^2}\right),$$

and similarly

$$(2.28) \quad J'_1(\iota c\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda c^2}{\tilde{j}_m^2}\right).$$

For completeness, below we give the following well-known theorems which play an important role in estimation of the infinite product and which can be found, for instance, in [24].

Theorem 2.1. *For any sequence of complex numbers p_n , $n = 0, 1, \dots$, the product*

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + p_n)$$

converges absolutely if and only if the series $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converges absolutely.

Theorem 2.2. *If $p_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, are analytic functions in a simply connected domain D , and the series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|$$

uniformly converges in every closed region R of D , then

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + p_n(z))$$

uniformly converges in every such R to a function $f(z)$ analytic in D .

Theorem 2.3. (a) If a_{mn} , $m, n > 1$ are complex numbers such that

$$|a_{mn}| = O\left(\frac{1}{|m^2 - n^2|}\right), \quad m \neq n,$$

then for any $n \geq 1$

$$\prod_{m \geq 1, m \neq n} (1 + a_{mn}) = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

(b) In addition, if b_n ($n \geq 1$), is a square summable sequence of complex numbers, then the product

$$\prod_{m \geq 1, m \neq n} (1 + a_{mn} b_n)$$

is convergent.

3. ASYMPTOTIC FORM OF THE SOLUTION

Let us consider the second order differential equation (1.1) on a finite interval I , say $I = [0, 1]$, with any initial conditions, where y and y' are determined at a fixed point c , for example $y(0, \lambda) = 0$, $y'(0, \lambda) = 1$, also $\phi^2(x)$ is of the form (2.1) meaning that I contains m turning points $x_1, x_2, \dots, x_m$, which are zeros of ϕ . A solution of the problem in $I_{1,\varepsilon}$ can be obtained by applying the initial conditions to

$$y(x, \rho) = C_1(\rho) Z_{1,1}^{T_1}(x, \rho) + C_2(\rho) Z_{1,2}^{T_1}(x, \rho), \quad x \in I_{1,\varepsilon}.$$

In view of formulas (2.4) - (2.23) for the functions of $\{Z_{1,1}^{T_1}(x, \rho), Z_{1,2}^{T_1}(x, \rho)\}$ and their derivatives, it is clear that this solution can be represented in the following form:

$$y_{(0,x_1)}(x, \rho) := H(x, \rho) \exp \left\{ (-1)^{\delta_1-1} (\iota)^{\delta_1} \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho),$$

$$y(x_1, \rho) := F(x_1, \mu_1, \rho) \csc \pi \mu_1 \exp \left\{ (-1)^{\theta_1} (\iota)^{\vartheta_1} \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} E_k(x_1, \rho),$$

as it is done in Example 3.1 below. Here, the functions $H(x, \rho)$ and $F(x_1, \mu_1, \rho)$ depend on the initial conditions and the type of the turning point x_1 . Moreover,

$$E_k(x, \rho) = [1] + \sum_{n=1}^{\nu(x)} e^{\rho \alpha_k \beta_{kn}(x)} [b_{kn}(x)],$$

where $\alpha_{-2} = \alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = -\alpha_{-1} = \iota$, $\beta_{k\nu(x)}(x) \neq 0$, $0 < \delta \leq \beta_{k1}(x) < \beta_{k2}(x) < \dots < \beta_{k\nu(x)}(x) \leq 2 \max\{R_+(1), R_-(1)\}$, and the integer-valued functions ν and b_{kn} are constant in all intervals $[0, x_1 - \varepsilon]$ and $[x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon]$ for sufficiently small $\varepsilon > 0$, and

$$(3.1) \quad R_+(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, \phi^2(t)\}} dt, \quad R_-(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, -\phi^2(t)\}} dt.$$

The following theorem proves that if an asymptotic solution of initial value problem (1.1) is obtained in the interval $[0, x_1]$, then it can be obtained recursively in the remaining intervals.

Theorem 3.1. *Let $y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho)$ be an asymptotic solution of the initial value problem (1.1) in the interval (x_v, x_{v+1}) . Then*

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y_{(0, x_1)}(x, \rho) &= H(x, \rho) \exp \left\{ (-1)^{\delta_1-1}(\iota)^{\delta_1} \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho) \\ &= A(x, \rho) E_k(x, \rho), \end{aligned}$$

and for $x \in (x_v, x_{v+1})$, $v \geq 1$, we have

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) &= \frac{1}{2^k} A(x_1, \rho) \prod_{x_i \leq x_v} \csc \frac{\pi \mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \\ &\quad \times \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1}(\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x_i \leq x_v: T_i = III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota \pi}{4} + (-1)^{\delta_v-1}(\iota)^{\delta_v} \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho), \end{aligned}$$

where k is the number of turning points $x_i \leq x_v$ of III or IV type. Also,

$$(3.4) \quad y(x_1, \rho) = F(x_1, \mu_1, \rho) \csc \pi \mu_1 \exp \left\{ (-1)^{\vartheta_1}(\iota)^{\vartheta_1} \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} E_k(x_1, \rho),$$

and for $x_v > x_1$, which are turning points of *II* or *IV* type, we have

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad y(x_v, \rho) &= \frac{1}{2^s} F(x_v, \mu_v, \rho) \exp \left\{ (2 - \vartheta_v) \iota \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_v}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{\vartheta_1} (\iota)^{\vartheta_1} \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} \csc \pi \mu_v \prod_{x_i < x_v} \csc \frac{\pi \mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \\
 &\quad \times \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{x_i < x_v: T_i = III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota \pi}{4} \right\} E_k(x_v, \rho).
 \end{aligned}$$

Similarly, for $x_v > x_1$, which are turning points of *I* or *III* type, we have

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad y(x_v, \rho) &= \frac{1}{2^s} F(x_v, \mu_v, \iota \rho) \exp \left\{ (2 - \vartheta_v) \iota \pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu_v}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{\vartheta_1} (\iota)^{\vartheta_1} \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} \csc \pi \mu_v \prod_{x_i < x_v} \csc \frac{\pi \mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \\
 &\quad \times \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{x_i < x_v: T_i = III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota \pi}{4} \right\} E_k(x_v, \rho),
 \end{aligned}$$

where s is the number of turning points $x_i < x_v$, which are *III* or *IV* type.

Proof: It is clear that in the intervals $(0, x_1) \cup (x_1, x_2)$ the solution can be obtained by the formula

$$y(x, \rho) = C_1(\rho) Z_{1,1}^{T_1}(x, \rho) + C_2(\rho) Z_{1,2}^{T_1}(x, \rho),$$

and the initial conditions. For example, if x_1 is a turning point of *IV* type and $y(0, \lambda) = 1$, $y'(0, \lambda) = 0$, then using formulas (2.19)-(2.21) and (2.23) we obtain

$$\begin{aligned}
 y_{(0, x_1)}(x, \rho) &= \frac{1}{2} |\phi(x)|^{-1/2} |\phi(0)|^{1/2} \exp \left\{ \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho) \\
 &:= H(x, \rho) \exp \left\{ \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho) \\
 &:= A_{(0, x_1)}(x, \rho) E_k(x, \rho).
 \end{aligned}$$

Moreover, for the interval (x_1, x_2) we get

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad y_{(x_1, x_2)}(x, \rho) &= \frac{1}{4} |\phi(x)|^{-1/2} |\phi(0)|^{1/2} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \\
 (3.8) \quad &\times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt + \imath \rho \int_{x_1}^x |\phi(t)| dt - \frac{\imath \pi}{4} \right\} E_k(x, \rho) \\
 &= \frac{1}{2} A_{(0, x_1)}(x_1, \rho) \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \exp \left\{ \imath \rho \int_{x_1}^x |\phi(t)| dt - \frac{\imath \pi}{4} \right\}.
 \end{aligned}$$

In order to find the solution in $I_{2, \varepsilon}$, we fix $x \in (x_1, x_2)$ and write the obtained solution in this interval as linear combination of fundamental solutions in $I_{2, \varepsilon}$:

$$(3.9) \quad y_{(x_2, x_3)}(x, \rho) = A(\rho) Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho) + B(\rho) Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho).$$

Then, by Cramer's rule we can determine the connection coefficients

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad A(\rho) &= \frac{y_{(x_1, x_2)}(x, \rho) Z_{2,2}^{T_2'}(x, \rho) - Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho) y'_{(x_1, x_2)}(x, \rho)}{W \left(Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho), Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho) \right)}, \\
 B(\rho) &= \frac{y'_{(x_1, x_2)}(x, \rho) Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho) - Z_{2,1}^{T_2'}(x, \rho) y_{(x_1, x_2)}(x, \rho)}{W \left(Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho), Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho) \right)}.
 \end{aligned}$$

Note that $\{Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho), Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho)\}$ are fundamental system of solutions in the intervals $(x_1, x_2) \cup (x_2, x_3)$, and hence the continuation of the solution $y(x, \lambda)$ to (x_2, x_3) satisfies (3.9), where $A(\rho)$ and $B(\rho)$ are the coefficients obtained in the previous interval, but now the formulas for $\{Z_{2,1}^{T_2}(x, \rho), Z_{2,2}^{T_2}(x, \rho)\}$ are used in $x_2 < x < x_3$. Further, one can suppose that

$$y_{(x_i, x_{i+1})}(x, \rho) = A_{(x_i, x_{i+1})}(x, \rho) E_k(x, \rho)$$

is the asymptotic form of the solution of the initial value problem in the interval (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, m$, with $x_{m+1} = 1$. Without loss of generality we can suppose that x_1 and x_2 are turning points of *IV* and *III* types. Then, using formulas (2.14) - (2.16) and those which they imply for the derivatives and taking into account (2.18), we can calculate the connection coefficients $A(\rho)$ and $B(\rho)$ by (3.10). Thus, (3.9)

yields

$$\begin{aligned} y_{(x_2, x_3)}(x, \rho) &= \frac{1}{4} H(x, \rho) \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \csc \frac{\pi \mu_2}{2} \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} \\ &\times \exp \left\{ \iota \rho \int_{x_1}^{x_2} |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} + \rho \int_{x_2}^x |\phi(t)| dt + \frac{\iota \pi}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{2} A_{(x_1, x_2)}(x_2, \rho) \csc \frac{\pi \mu_2}{2} \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + \frac{\iota \pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

This procedure can be used to calculate the solution in the remaining intervals. For completeness of the proof, note that acting in the same way one can obtain the following representations.

(i) If x_v is a *I* type turning point, then

$$A_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = A_{(x_{v-1}, x_v)}(x_v, \rho) \csc \pi \mu_v \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\}.$$

(ii) If x_v is a *II* type turning point, then

$$A_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = A_{(x_{v-1}, x_v)}(x_v, \rho) \csc \pi \mu_v \exp \left\{ \iota \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\}.$$

(iii) If x_v is a *III* type turning point, then

$$A_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2} A_{(x_{v-1}, x_v)}(x_v, \rho) \csc \frac{\pi \mu_v}{2} \exp \left\{ \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + \frac{\iota \pi}{4} \right\}.$$

(iv) If x_v is a *IV* type turning point, then

$$A_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2} A_{(x_{v-1}, x_v)}(x_v, \rho) \csc \frac{\pi \mu_v}{2} \exp \left\{ \iota \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} \right\}.$$

This completes the proof. $\square$

Example 3.1. Let $y(x, \rho)$ be the solution of 1.1 corresponding the initial conditions

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 1.$$

Suppose, the first turning point x_1 is of *IV* type, that is of the order $l_1 = 4m + 1$, and the other $m - 1$ turning points are arbitrary. Then, using the fundamental system of solutions $\{Z_{1,1}^{IV}(x, \rho), Z_{1,2}^{IV}(x, \rho)\}$ we obtain

$$(3.11) \quad y(x, \rho) = \frac{1}{-2\rho} (Z_{1,1}^{IV}(0, \rho) Z_{1,2}^{IV}(x, \rho) - Z_{1,1}^{IV}(x, \rho) Z_{1,2}^{IV}(0, \rho)), \quad x \in (0, x_1).$$

Hence, from (2.19) and (2.20) it follows that

$$(3.12) \quad y(x, \rho) = \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-\frac{1}{2}}}{2\rho} \left[\exp \left\{ \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} [1] - \exp \left\{ -\rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} [1] \right]$$

for $x \in (0, x_1)$ or

$$(3.13) \quad y(x, \rho) = \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-1/2}}{2\rho} \exp \left\{ \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho) \quad \text{for } x \in (0, x_1).$$

Besides, in virtue of (2.21) and (2.22) we get

$$(3.14) \quad y(x_1, \rho) = \frac{|\phi(0)|^{-1/2} \sqrt{2\pi} \rho^{1/2 - \mu_1} 2^{\mu_1} \psi(x_1) \csc \pi \mu_1}{4\Gamma(1 - \mu_1)} \\ \times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho).$$

Further, using Theorem 3.1 we can calculate

$$(3.15) \quad y(x, \rho) = \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-1/2}}{4\rho} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \\ \times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt + \iota \rho \int_{x_1}^x |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} \right\} E_k(x, \rho), \quad x_1 < x < x_2.$$

We note that (3.15) also can be obtained directly.

Now, for a turning point of *IV* type we use Theorem 3.1. Then we find the solution in the interval (x_v, x_{v+1}) :

$$(3.16) \quad y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2^k} \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-1/2}}{2\rho} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \csc \frac{\pi \mu_v}{2} \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} \right\} \\ \times \prod_{x_2 \leq x_i < x_v} \csc \frac{\pi \mu_i}{2^{\vartheta_i - 1}} \exp \left\{ (-1)^{\delta_v - 1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ \left. + \sum_{x_2 \leq x_i < x_v: T_i = III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota \pi}{4} + \iota \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} \right\} E_k(x, \rho).$$

Besides, for a turning point of *III* type

$$(3.17) \quad y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2^k} \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-1/2}}{2\rho} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \csc \frac{\pi \mu_v}{2} \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt - \frac{\iota \pi}{4} \right\} \\ \times \prod_{x_2 \leq x_i < x_v} \csc \frac{\pi \mu_i}{2^{\vartheta_i - 1}} \exp \left\{ (-1)^{\delta_v - 1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ \left. + \sum_{x_2 \leq x_i < x_v: T_i = III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota \pi}{4} + \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt + \frac{\iota \pi}{4} \right\} E_k(x, \rho).$$

Similarly, for a turning point of II type we obtain

$$(3.18) \quad y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2^k} \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{1-1/2}}{2\rho} \csc \frac{\pi\mu_1}{2} \csc \pi\mu_v \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt - \frac{\iota\pi}{4} \right\} \\ \times \prod_{x_2 \leq x_i < x_v} \csc \frac{\pi\mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ \left. + \sum_{x_2 \leq x_i < x_v: T_i=III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota\pi}{4} + \iota\rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho).$$

Further, for a turning point of I type we have

$$(3.19) \quad y_{(x_v, x_{v+1})}(x, \rho) = \frac{1}{2^k} \frac{|\phi(x)\phi(0)|^{-1/2}}{2\rho} \csc \frac{\pi\mu_1}{2} \csc \pi\mu_v \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt - \frac{\iota\pi}{4} \right\} \\ \times \prod_{x_2 \leq x_i < x_v} \csc \frac{\pi\mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ \left. + \sum_{x_2 \leq x_i < x_v: T_i=III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota\pi}{4} + \rho \int_{x_v}^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho).$$

Indeed, using Theorem 3.1 we can obtain that for a turning point of II or IV type

$$(3.20) \quad y(x_v, \rho) = \frac{1}{2^s} \frac{|\phi(0)|^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \rho^{\frac{1}{2}-\mu_1} 2^{\mu_1} \psi(x_1) \csc \pi\mu_v}{4\Gamma(1-\mu_1)} \\ \times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt + (2 - \vartheta_v) \iota\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_v}{2} \right) \right\} \prod_{x_i < x_v} \csc \frac{\pi\mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \\ \times \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right\},$$

and for a turning point of I or III type

$$(3.21) \quad y(x_v, \rho) = \frac{1}{2^s} \frac{|\phi(0)|^{-1/2} \sqrt{2\pi} (\iota\rho)^{1/2-\mu_1} 2^{\mu_1} \psi(x_1) \csc \pi\mu_v}{4\Gamma(1-\mu_1)} \\ \times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt + (2 - \vartheta_v) \iota\pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu_v}{2} \right) \right\} \prod_{x_i < x_v} \csc \frac{\pi\mu_i}{2^{\vartheta_i-1}} \\ \times \exp \left\{ (-1)^{\delta_v-1} (\iota)^{\delta_v} \rho \sum_{x_i < x_v} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\phi(t)| dt \right. \\ \left. + \sum_{x_i < x_v: T_i=III, IV} (-1)^{\delta_v} \frac{\iota\pi}{4} \right\} E_k(x_v, \rho).$$

4. INFINITE PRODUCT REPRESENTATION

In this section, we consider the real, second order differential equation (1.1) with the initial conditions

$$(4.1) \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 1,$$

under the assumption that $\phi^2(x)$ is a real function having m zeros x_v , of the orders ℓ_v , $v = 1, \dots, m$, in I , where ℓ_1 is an odd number and $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_m$ are even. Specially, we suppose that $\ell_1 = 4k + 1$ and $\ell_v = 4k$, $v = 2, 3, \dots, m$. In the terminology of [6], x_1 is of the type IV while $x_2, x_3, \dots, x_v$ are of the type II. Besides, the function $\phi_0 : I \rightarrow R - \{0\}$, defined as

$$\phi_0(x) = \phi^2(x) \prod_{v=1}^m (x - x_v)^{-\ell_v},$$

is twice continuously differentiable.

Now, let $S(x, \lambda)$ be the solution of the initial value problem (1.1), (4.1). Then by Halvorsen's result, $S(x, \lambda)$ is an entire function of the order $1/2$ for any fixed $x \in (0, 1)$, and therefore by Hadamard's theorem [3], $S(x, \lambda)$ is representable in the form

$$S(x, \lambda) = s(x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_n(x)} \right),$$

where $s(x)$ is a function independent of λ but can depend on x . For any x , the sequence $\{w_n(x)\}_1^{\infty}$ is the set of zeros of $S(x, \lambda)$, i.e. $S(x, w_n(x)) = 0$, which corresponds to the eigenvalues of the boundary value problem $L(\phi^2(x), q(x), x)$ defined by the second-order differential equation (1.1) with the boundary conditions

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 1, \quad y(x, \lambda) = 0.$$

We see that for any fixed x each $w_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, appears in the denominator and hence must be nonzero. Adding the extra condition $q(x) \geq 0$ for any x , we get $w_n(x) \neq 0$ by Sturm's comparison theorem. Further, for any fixed $x \in (0, x_1)$ the function $S(x, \lambda)$ has the asymptotic representation

$$(4.2) \quad S(x, \lambda) = \frac{1}{2\rho} |\phi(x)\phi(0)|^{-1/2} \exp \left\{ \rho \int_0^x |\phi(t)| dt \right\} E_k(x, \rho).$$

For any $x \in [0, x_1)$, the boundary value problem $L(\phi^2(x), q(x), x)$ has infinitely many negative eigenvalues, say $\{\lambda_n^-(x)\}$, and in this case $w_n(x) = \lambda_n^-(x)$. Besides, due to (1.1) the asymptotic representation of each $\lambda_n^-(x)$ is of the form

$$(4.3) \quad \sqrt{-\lambda_n^-(x)} = n\pi \left(\int_0^x |\phi(t)| dt \right)^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

By Hadamard's theorem, for a fixed $x \in [0, x_1)$ the following representation is true:

$$S(x, \lambda) = s(x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^-(x)} \right),$$

where the function $s(x)$ is independent of λ but may depend on x , and for any x infinitely many negative eigenvalues $\{\lambda_n^-(x)\}_{n=1}^{\infty}$ form the zero set of $S(x, \lambda)$. We rewrite the infinite product as follows:

$$(4.4) \quad S(x, \lambda) = s(x) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^-(x)} \right) = s_1(x) \prod_{n \geq 1} \frac{\lambda - \lambda_n^-(x)}{z_n^2},$$

where

$$s_1(x) := s(x) \prod_{n \geq 1} \frac{-z_n^2}{\lambda_n^-(x)} \quad \text{and} \quad z_n = \frac{n\pi}{R_-(x)}.$$

Note that

$$\frac{-z_m^2}{\lambda_m^-(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

and hence by Theorem 2.1 the infinite product

$$\prod_{m \geq 1} \frac{-z_m^2}{\lambda_m^-(x)}$$

is absolutely convergent on any compact subinterval of $(0, x_1)$. Besides, the function $\frac{-z_m^2}{\lambda_m^-(x)}$ is continuous, and so the O -term is uniformly bounded in x .

The proof of the following theorem is similar to Theorem 6.1 of [9] and therefore omitted.

Theorem 4.1. *Let $S(x, \lambda)$ be the solution of (1.1) satisfying the initial conditions $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Then*

$$S(x, \lambda) = |\phi(x)\phi(0)|^{-1/2} R_-(x) \prod_{m \geq 1} \frac{\lambda - \lambda_m^-(x)}{z_m^2}, \quad 0 < x < x_1,$$

where

$$z_m = \frac{m\pi}{R_-(x)}, \quad R_-(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, -\phi^2(t)\}} dt,$$

and the sequence $\lambda_m^-(x)$ ($m \geq 1$) is that of the negative eigenvalues of the boundary value problem L on $[0, x]$.

Similarly, Theorem 3.1 implies that for any $x_v < x < x_{v+1}$, $v = 1, 2, \dots, m$, $x_{m+1} = 1$, the asymptotic form of the solution of the initial value problem (1.1), (4.1) is

$$(4.5) \quad S(x, \rho) = \frac{1}{4\rho} |\phi(x)\phi(0)|^{-1/2} \csc \frac{\pi\mu_1}{2} \csc \pi\mu_2 \cdots \csc \pi\mu_{v-1} \csc \pi\mu_v \\ \times \exp \left\{ \rho \int_0^{x_1} |\phi(t)| dt + \nu \rho \int_{x_1}^x |\phi(t)| dt - \frac{\nu\pi}{4} \right\} E_k(x, \rho).$$

Further, the boundary value problem L in $[0, x]$ has a countable set of positive and negative eigenvalues which we denote by $\{\lambda_n(x)\} = \{\lambda_n^+(x)\} \cup \{\lambda_n^-(x)\}$, and the following formulas are true:

$$(4.6) \quad \sqrt{\lambda_n^+(x)} = \left(n\pi - \frac{\pi}{4} \right) \left(\int_{x_1}^x |\phi(t)| dt \right)^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \sqrt{-\lambda_n^-(x)} = -\left(n\pi - \frac{\pi}{4} \right) \left(\int_0^{x_1} |\phi(t)| dt \right)^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

By Hadamard's theorem, for $x_v < x < x_{v+1}$ the solution on $[0, x]$ is of the form

$$S(x, \lambda) = g(x) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^-(x)} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^+(x)} \right).$$

Let $\tilde{j}_n$ be the sequence of positive zeros of $J_1'(z)$. Then (see [1], § 9.5.11)

$$\frac{\tilde{j}_n^2}{R_+^2(x)\lambda_n^+(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \frac{-\tilde{j}_n^2}{R_-^2(x)\lambda_n^-(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Consequently, the infinite products

$$\prod_{n \geq 1} \frac{\tilde{j}_n^2}{R_+^2(x)\lambda_n^+(x)} \quad \text{and} \quad \prod_{n \geq 1} \frac{-\tilde{j}_n^2}{R_-^2(x)\lambda_n^-(x)}$$

are absolutely convergent for each $x \in (x_v, x_{v+1})$. Therefore, we can write

$$(4.7) \quad S(x, \lambda) = g_v(x) \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda - \lambda_n^-(x))R_-^2(x_1)}{\tilde{j}_n^2} \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda_n^+(x) - \lambda)R_+^2(x)}{\tilde{j}_n^2},$$

where

$$g_v(x) = g(x) \prod_{n \geq 1} \frac{\tilde{j}_n^2}{R_+^2(x) \lambda_n^+(x)} \prod_{n \geq 1} \frac{-\tilde{j}_n^2}{R_-^2(x_1) \lambda_n^-(x)}.$$

Theorem 4.2. *If $x_v < x < x_{v+1}$, $v = 1, 2, \dots, m$ and $x_{m+1} = 1$, then*

$$(4.8) \quad S(x, \lambda) = \frac{\pi}{8} |\varphi(x) \varphi(0)|^{-1/2} (R_-(x) R_+(x))^{1/2} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \csc \pi \mu_2 \cdots \csc \pi \mu_v \\ \times \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda - \lambda_n^-(x)) R_-^2(x_1)}{\tilde{j}_n^2} \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda_n^+(x) - \lambda) R_+^2(x)}{\tilde{j}_n^2},$$

where

$$R_+(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, \phi^2(t)\}} dt, \quad R_-(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, -\phi^2(t)\}} dt,$$

the sequence $\{\lambda_n^+(x)\}$ is that of the positive eigenvalues and $\{\lambda_n^-(x)\}$ is that of the negative eigenvalues of the boundary value problem L in $[0, x]$.

Proof: By Lemmas 2 and 3 of [10], for a fixed x the infinite products

$$\prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda - \lambda_n^-(x)) R_-^2(x_1)}{\tilde{j}_n^2}, \quad \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda_n^+(x) - \lambda) R_+^2(x)}{\tilde{j}_n^2}$$

are entire functions of λ , with sequences of zeros $\lambda_n^-(x)$ and $\lambda_n^+(x)$ ($n \geq 1$) respectively.

Moreover,

$$\prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda - \lambda_n^-(x)) R_-^2(x_1)}{\tilde{j}_n^2} \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda_n^+(x) - \lambda) R_+^2(x)}{\tilde{j}_n^2} \\ = \frac{4 \exp\{R_-(x_1) \sqrt{\lambda}\}}{\pi R_-^{1/2}(x_1) R_+^{1/2}(x) \sqrt{\lambda}} \left\{ \cos(R_+(x) \sqrt{\lambda} - \pi/4) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}$$

as $\lambda \rightarrow \infty$. Consequently, using of the asymptotic expansion (4.5) of $S(x, \lambda)$ we get

$$g_v(x) = S(x, \lambda) \left(\prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda - \lambda_n^-(x)) R_-^2(x_1)}{\tilde{j}_n^2} \prod_{n \geq 1} \frac{(\lambda_n^+(x) - \lambda) R_+^2(x)}{\tilde{j}_n^2} \right)^{-1} \\ = \frac{\pi}{8} |\varphi(x) \varphi(0)|^{-1/2} (R_-(x_1) R_+(x))^{1/2} \csc \frac{\pi \mu_1}{2} \csc \pi \mu_2 \cdots \csc \pi \mu_v,$$

which completes the proof. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Abramowitz, J. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Appl. Math. Ser., no. 55, U.S., Govt. Printing Office, Washington, D.C. (1964).
- [2] G. D. Birkhoff, "On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter", Trans. Amer. Math. Soc. **9**, 219 – 231 (1908).
- [3] B. DelRio and B. Grébert, "Inverse spectral results for AKNS systems with partial information on the potentials", Math.Phys. Anal. Geom. **4** (3), 229 – 244 (2001).
- [4] A. A. Dorodnicyn, "Asymptotic laws of distribution of the characteristic values for certain special forms of differential equations of the second order", Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, **16**, 1 – 101 (1960).
- [5] A. X. Dyachenko, "Asymptotics of the eigenvalues of an indefinite Sturm-Liouville problem", Mathematical Notes, **68** (1), 120-124 (2000).
- [6] W. Eberhard, G. Freiling, A. Schneider, "Connection formulae for second-order differential equations with a complex parameter and having an arbitrary number of turning points", Math. Nachr. **165**, 205-229 (1994).
- [7] S. G. Halvorsen, "A function theoretic property of solutions of the equation $x'' + (\lambda w - q)x = 0$ ", Quart. J. Math., Oxford (2), **38**, 73 – 76 (1987).
- [8] J. Heading, "Global phase-integral methods", Quart. J. Mech. Appl. Math., **30**, 281 – 302 (1977).
- [9] A. Jodayree Akbarfam, A. B. Mingarelli, "The infinite product representation of solutions of Sturm-Liouville problems with two turning points", The Arabian Journal for Science and Engineering, **31** (1A) (2006).
- [10] A. Jodayree Akbarfam, A. B. Mingarelli, "The canonical product of the solution of the Sturm-Liouville equation in one turning point case", Canad. Appl. Math. Quart., **8** (4), 305 – 320 (2000).
- [11] N. D. Kazarinoff, "Asymptotic theory of second order differential equations with two simple turning points", Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, 129-150 (1958).
- [12] H. Kheiri, A. Jodayree Akbarfam, A. B. Mingarelli, "The uniqueness of the solution of dual equations of an inverse indefinite Sturm-Liouville problem", J. Math. Anal. Appl., **306**, 269-281 (2005).
- [13] Shin Kwang, "Trace formulas for non-self-adjoint periodic Schrödinger operators and some applications", J. Math. Anal. Appl., **299** (1), 19 – 39 (2004).
- [14] R. E. Langer, "On the asymptotic solution of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order", Trans. Amer. Math. Soc., **33**, 23 – 64 (1931).
- [15] A. Leung, "Distribution of eigenvalues in the presence of higher order turning points", Trans. Amer. Math. Soc., **229**, 111 – 135 (1977).
- [16] B.Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translation of Math. Monographs, American Mathematical Society, (1964).
- [17] H. R. Marasi, A. Jodayree Akbarfam, "On the canonical solution of indefinite problem with m turning points of even order", J. Math. Anal. Appl. (In Press).
- [18] R. W. McKelvey, "The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two", Trans. Amer. Math. Soc., **79**, 103 – 123 (1955).
- [19] A.B Mingarelli, "A survey of the regular weighted Sturm-Liouville problem, the non-definite case", in: Proceeding of the Workshop on Differential Equations, Tsinghua University, Beijing, China, 3-7 June.1985, 109-137 (Xiao Shutie and Pu Fuquan Eds., World Scientific, Singapore and Philadelphia,1986).
- [20] F. W. J. Olver, "Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities", SIAM J. Math. Anal., **8**, 673 – 700 (1977).
- [21] F. W. J. Olver, "Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points", SIAM J. Math. Anal., **8**, 127 – 154 (1977).
- [22] F. W. J. Olver, "Second-order linear differential equation with two turning points", Phil. Trans. Royal Soc. Lond., A. **278**, 137 – 174 (1975).
- [23] E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, New York (1987).
- [24] H. W. Eves, *Functions of a Complex Variable*, vol. 2., Prindle, Weber and Schmidt, Boston (1966).

H. R. MARASI

- [25] S. N. Tumanov, “Asymptotics of the eigenvalues of the indefinite Sturm-Liouville problem with two turning points”, Russian Mathematical Surveys, **55** (5), 1007 – 1008 (2000).
- [26] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Interscience Publishers, New York (1965).
- [27] W. Wasow, *Linear Turning Point Theory*, Springer, Berlin (1985).
- [28] A. M. Wazwaz, “Two turning points of second order”, SIAM J. Applied Math., **50**, 883 – 892 (1990).

Поступила 25 июля 2010

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 4, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

С. С. ДАВИДОВ, Коммутативные медиальные тернарные группойды.....	3
Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН, Выделение гладких решений одного класса регулярных уравнений в прямоугольнике	27
W. LUH, A. STEPANYAN, Power series with radius of convergence zero – overconvergence, elongations, summability	45
H. R. MARASI, Asymptotic form and infinite product representation of solution of second order initial value problem with a complex parameter and a finite number of turning points.....	57

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 4, 2011

CONTENTS

S. S. DAVIDOV, Commutative medial ternary groupoids.....	3
H. G. GHAZARYAN, V. N. MARGARYAN, Extraction of smooth solutions of a class of regular equations in rectangle	27
W. LUH, A. STEPANYAN, Power series with radius of convergence zero – overconvergence, elongations, summability	45
H. R. MARASI, Asymptotic form and infinite product representation of solution of second order initial value problem with a complex parameter and a finite number of turning points.....	57