ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 3 – 16.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ ПРЕПЯТСТВИЯ

А. АРАКЕЛЯН, Р. БАРХУДАРЯН, М. ПОГОСЯН

Королевский технологический институт, Швеция
Институт математики, НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mail: *avetik@kth.se, rafayel@instmath.sci.am, michael@ysu.am*

Аннотация. В статье рассматривается метод конечных разностей для однофазной задачи препятствия. Получена оценка погрешности для этого приближения.

MSC2010 number: 35R35, 65N06

Ключевые слова: Задача со свободной границей, задача препятствия, метод конечных разностей.

1. Введение

Однофазную (или классическую) задачу препятствия можно описать как задачу определения состояния равновесия упругой мембраны при присутствии препятствия.

Если предположить, что мембрана расположена над областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным граничным значением φ, а препятствие дано множеством $\{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то задача препятствия можно математически сформулировать как задачу минимизации функционала энергии

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega \lambda(x) u(x) dx$$

на множестве всех допустимых "деформаций" мембраны:

$$u \in \mathbb{K}_{\psi,\varphi} = \{v \in H^1(\Omega) : v - \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ и } v(x) \geq \psi(x) \ \text{ п.в. } \ \text{в } \Omega\}.$$

Здесь мы предполагаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной областью, а $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\lambda \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in C^2(\Omega)$ суть данные функции.

Теоретические аспекты однофазной задачи препятствия хорошо изучены (см. [1, 5, 7, 10, 16]). Кроме того, существует обширная литература, посвященная численным методам решения вариационных неравенств, которые, в частности, годны для численного исследования классической задачи препятствия.

Данная работа посвящена методу конечных разностей для приближенного решения однофазной задачи препятствия.

Разностные схемы широко используются для численного решения вариационных неравенств, однофазных задач препятствия эллиптического и параболического типа, и, в частности, для задачи определения стоимости американских опционов (см., например, [17]). Этот метод легко реализуется и имеет достаточно хорошую скорость приближения на практике, так что имеется теоретический и практический интерес на исследование и математическое обоснование сходимости. Но как ни странно, до 2006 года не было никаких результатов сходимости и оценок погрешности. В 2006-ом Чэн и Хю (см. [3]) доказали квадратичную сходимость метода для двумерной классической задачи препятствия при условии, что решение принадлежит классу $C^4(\Omega)$. Это совсем не неожиданный результат, так как для $u \in C^4(\Omega)$, с помощью разложения Тейлора, можно доказать локальную оценку

$$\Delta u(x) - \Delta_h u(x) = O(h^2),$$

где Δ_h - конечно-разностное приближение Δ (определение см. ниже). Но, как известно (см. [1]), в общем случае, даже для бесконечно дифференцируемых препятствий ψ, решение u принадлежит только $C^{1,1}(\Omega)$. Таким образом, в общем случае результат [3] не может быть использован.

Между тем, в 2009 году, метод конечных разностей был применен для одномерной параболической задачи с препятствием в связи с задачей определения стоимости опционов американского типа (см. [8]). Там было доказано, что при некоторых естественных условиях метод конечных разностей сходится к точному решению со скоростью сходимости $o(\sqrt{h}+k)$, где h и k шаги дискретизации пространственного и временного переменного, соответственно.

В данной работе, опираясь на технику статьи [8] (в действительности идея восходит от Н. В. Крылова (см. [11, 12])), мы получим оценку погрешности приближенного решения однофазной задачи препятствия методом конечных разностей.

2. Метод конечных разностей

Хорошо известно, что классическая (однофазная) задача с препятствием можно преобразовать к задаче минимизации функционала

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega f(x)u(x)dx \tag{2.1}$$

на множестве

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1,\ v(x) \geq 0 \text{ в } \Omega\}, \tag{2.2}$$

где $f \in L^2(\Omega)$ и $g \in C(\overline{\Omega})$ - заданные функции. Известно также, что последняя может быть сформулирована в виде вполне нелинейной задачи

$$\min\{-\Delta u(x) + f(x), u(x)\} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда если обозначить

$$\mathcal{F}(v)(x) = \min\{-\Delta v(x) + f(x), v(x)\},$$

то классическая задача препятствия (2.1)-(2.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = 0 & \text{в} \quad \Omega \\ u = g & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение этой задачи надо понимать в смысле вязкостого решения (см. напр. [2], [4]). Нетрудно проверить, что решение классической задачи препятствия удовлетворяет уравнению (2.3) как в вязкостном смысле, так и п.в..

Для численного решения мы будем предполагать, что $n = 1$ или 2. В случае $n = 1$ для простоты возьмем $\Omega = (-1, 1)$ а в случае $n = 2$ возьмем $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, имея ввиду, что изложенный метод будет работать и для более сложных областей.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – натуральное число, $h = 2/N$ и

$$x_i = -1 + ih, \, y_i = -1 + ih, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

Обозначим

$$\mathcal{N} = \{i : \; 0 \le i \le N\} \quad \text{или} \quad \mathcal{N} = \{(i, j) : \; 0 \le i, j \le N\},$$

$$\mathcal{N}^o = \{i : \; 1 \le i \le N-1\} \quad \text{или} \quad \mathcal{N}^o = \{(i, j) : \; 1 \le i, j \le N-1\},$$

в одномерном и двумерном случае, соответственно, и

$$\partial\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^o.$$

Обозначим через $\Delta_h u$ конечно-разностное приближение оператора Лапласа, то есть, для $n = 1$

$$\Delta_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2},$$

а для $n = 2$

$$\Delta_h u(x_1, x_2) = \frac{u(x_1-h, x_2) + u(x_1+h, x_2) + u(x_1, x_2-h) + u(x_1, x_2+h) - 4u(x_1, x_2)}{h^2}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_h(v)(x) = \min\{-\Delta_h v(x) + f(x), v(x)\}, \qquad x \in \Omega_h$$

где

$$\Omega_h = \{\alpha \cdot h : \alpha \in \mathcal{N}^o\}.$$

Будем использовать также следующие обозначения:

$$\partial\Omega_h = \{\alpha \cdot h : \alpha \in \partial\mathcal{N}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{H} = \{v = (v_\alpha) : v_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathcal{N}\}.$$

Обозначим через u_h решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_h(u_h) = 0 & \text{в} \quad \Omega_h \\ u_h = g & \text{на} \quad \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{2.4}$$

Целью данной работы является доказательство сходимости $u_h \to u$ при $h \to 0$, где u - решение (2.3), и получение оценки погрешности аппроксимации в терминах h.

Повсюду далее будем считать, что

$$\begin{aligned} &g \in C(\partial\Omega) \ \text{ и } \ g(x) > 0, x \in \partial\Omega; \\ &f \in C^3(\overline{\Omega}) \ \text{ и } \ f(x) > 0, x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть f и g удовлетворяют условиям* (2.5)*, а функции u и u_h суть решения* (2.3) *и* (2.4)*, соответственно. Тогда существует константа $C_0 > 0$, не зависящая от h, такая что*

$$|u(x) - u_h(x)| \le C_0 \cdot h^{4/11}, \quad x \in \Omega_h.$$

3. Технические леммы

3.1. Принцип сравнения для непрерывных и дискретных нелинейных уравнений.

Лемма 3.1. *(Принцип сравнения) Пусть Ω-ограниченная область и $v_1, v_2 \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Если $\mathcal{F}(v_1) \le \mathcal{F}(v_2)$ п.в. в Ω и $v_1 \le v_2$ на $\partial\Omega$, то $v_1 \le v_2$ в Ω.*

Доказательство. Обозначим

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega |\ v_1(x) > v_2(x)\}.$$

Если множество

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega_1 : -\Delta v_1(x) > -\Delta v_2(x)\}$$

имеет положительную меру Лебега, то получим противоречие, так как $\mathcal{F}(v_1)(x) > \mathcal{F}(v_2)(x)$ в Ω_2. Следовательно, $-\Delta v_1(x) \le -\Delta v_2(x)$ п.в. в Ω_1. Но в этом случае из слабого принципа максимума следует, что $v_2 \ge v_1$ в Ω_1, что противоречит определению Ω_1. Таким образом, $\Omega_1 = \emptyset$. □

Лемма 3.2. *Пусть $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$. Если $\mathcal{F}_h(v_1) \le \mathcal{F}_h(v_2)$ в Ω_h и $v_1 \le v_2$ на $\partial\Omega_h$, то $v_1 \le v_2$ в Ω_h.*

Доказательство этой леммы можно найти в статье [15], где автор доказывает принцип сравнения для схем более общего типа (так называемых вырожденных эллиптических схем).

3.2. **Регуляризация и оценка погрешности.** Пусть $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta(z) = 0, \quad z \geq 0, \qquad \beta(z) = -z - 1, \; z \leq -2;$$

$$\beta'(z) \leq 0, \qquad \beta''(z) \geq 0, \; z \in \mathbb{R}$$

и $\beta_\varepsilon(z) = \beta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$, $z \in \mathbb{R}$. Обозначим через u^ε решение следующей вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + f = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon = g & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Из стандартной теории следует, что задача (3.1) имеет единственное решение u^ε и кроме того $u^\varepsilon \in C^4(\Omega)$.

Обозначим

$$M = \max\left\{\max_{x \in \overline{\Omega}} f(x), 1\right\}.$$

Лемма 3.3. *Если u^ε-решение задачи* (3.1)*, тогда*

(i) $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) \leq M$ *для всех* $x \in \Omega$*;*

(ii) $u^\varepsilon(x) \geq -(M+1)\varepsilon$ *для всех* $x \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $n = 2$, так как доказательство для $n = 1$ получается аналогично.

(i) Имеем $u^\varepsilon(x) = g(x) > 0$ для $x \in \partial\Omega$. Если $u^\varepsilon(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, то из определения функции β получим $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 < M$. В противном случае, если

$$u^\varepsilon(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u^\varepsilon(x) < 0,$$

тогда $D^2 u^\varepsilon(x_0) \geq 0$ (т.е. матрица $D^2 u^\varepsilon(x_0)$ неотрицательно полуопределена), и следовательно $\Delta u^\varepsilon(x_0) \geq 0$.

Так как функция β убывающая, из определений u^ε и M получим, что для любого $x \in \Omega$,

$$\beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) \leq \beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x_0)) = -\Delta u^\varepsilon(x_0) + f(x_0) \leq f(x_0) \leq M.$$

(ii) Так как $\beta(z) = -z - 1$ для $z \leq -2$, то $\beta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = -\frac{z}{\varepsilon} - 1$ для $z \leq -2\varepsilon$, следовательно, $z = -\varepsilon\left(\beta_\varepsilon(z) + 1\right)$ для $z \leq -2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$u^\varepsilon = -\varepsilon\left(\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + 1\right), \quad \text{если} \quad u^\varepsilon \leq -2\varepsilon,$$

и используя (i), получим

$$u^\varepsilon \geq -\varepsilon(M+1), \quad \text{если} \quad u^\varepsilon \leq -2\varepsilon.$$

В случае, когда $u^\varepsilon \geq -2\varepsilon$, снова получим $u^\varepsilon \geq -\varepsilon(M+1)$, так как $M \geq 1$ по определению. Следовательно, для всех $x \in \Omega$, $u^\varepsilon(x) \geq -\varepsilon(M+1)$. □

Лемма 3.4. *Для функции u^ε верны следующие оценки:*

(i) $-(M+1)\varepsilon \leq \mathcal{F}(u^\varepsilon)(x) \leq 0$ *для всех* $x \in \Omega$*;*

(ii) $0 \leq u(x) - u^\varepsilon(x) \leq \dfrac{3}{2}(M+1)\varepsilon$ *для всех* $x \in \Omega$.

Доказательство. (i) Прежде всего, по определению $\mathcal{F}$ и u^ε, имеем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{-\Delta u^\varepsilon + f, u^\varepsilon\} = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{F}(u^\varepsilon) \leq 0$ для всех $x \in \Omega$. Действительно,

- если $u^\varepsilon \geq 0$, тогда $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$, и следовательно $\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{0, u^\varepsilon\} = 0$;
- если $u^\varepsilon < 0$, тогда $\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\} \leq u^\varepsilon < 0$.

С другой стороны, учитывая, что $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq 0$ (поскольку β неотрицательная всюду) и пользуясь оценкой пункта (ii) Леммы **3.3**, получаем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) = \min\{\beta_\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon\} \geq -(M+1)\varepsilon.$$

(ii) Из пункта (i) имеем $\mathcal{F}(u^\varepsilon) \leq 0 = \mathcal{F}(u)$ в Ω и $u^\varepsilon = u$ на $\partial\Omega$. Тогда в силу Леммы 3.1 получим, что $u^\varepsilon \leq u$ в Ω.
Обозначим

$$\ell(x) = \frac{(M+1)\varepsilon}{2n}\left(3n - |x|^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\Delta\ell(x) = -(M+1)\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{3.2}$$

$$(M+1)\varepsilon \leq \ell(x) \leq \frac{3}{2}(M+1)\varepsilon, \quad x \in [\,-1,1]^n. \tag{3.3}$$

Учитывая (3.2), получим

$$\mathcal{F}(u-\ell) = \min\{-\Delta u + \Delta\ell + f, u-\ell\} = \min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u-\ell\}.$$

Теперь рассмотрим два случая:

1. Если $u = 0$, т.е. u касается препятствия, то

$$\min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u-\ell\} =$$
$$= \min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, -\ell\} \leq -\ell \leq -(M+1)\varepsilon.$$

2. Если $u > 0$, то $-\Delta u + f = 0$, то есть

$$\min\{-\Delta u - (M+1)\varepsilon + f, u - \ell\} = \min\{-(M+1)\varepsilon, u - \ell\} \leq -(M+1)\varepsilon.$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathcal{F}(u - \ell) \leq -(M+1)\varepsilon,$$

что, в сочетании с (i) Леммы 3.3, даст нам $\mathcal{F}(u-\ell) \leq \mathcal{F}(u^\varepsilon)$, $\forall x \in \Omega$. Если x принадлежит границе $\partial\Omega$, имеем (так как $\ell(x) \geq (M+1)\varepsilon > 0$ в Ω)

$$u(x) - \ell(x) = g(x) - \ell(x) \leq g(x) = u^\varepsilon(x),$$

и снова используя Лемму 3.1, получим, что $u(x) - \ell(x) \leq u^\varepsilon(x)$, $\forall x \in \Omega$. И наконец, из (3.3) получим

$$u(x) - u^\varepsilon(x) \leq \ell(x) \leq \frac{3}{2}(M+1)\varepsilon, \quad x \in [-1,1]^n.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следующей оценки Шаудера можно найти в [9, стр. 286].

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, ограниченное множество и $f \in C^\alpha(\Omega)$ для некоторой $\alpha \in (0,1)$. Тогда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что если v является слабым решением уравнения $-\Delta v = f$ в Ω, то $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ и*

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C_1 \cdot \left(\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.4}$$

В дальнейшем нам понадобится только следующий слабый вариант этого результата.

Следствие 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, ограниченное множество и $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда существует константа $C_2 > 0$ такая, что если v решение (классическое) уравнения $-\Delta v = f$ в Ω, то*

$$\|v\|_{C^2(\Omega)} \leq C_2 \cdot \left(\|f\|_{C^1(\Omega)} + \|v\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{3.5}$$

Следующая теорема является обобщением известного интерполяционного неравенства Ландау-Колмогорова на случай негладких областей и для функций многих переменных. Доказательство этого результата можно найти в [13] (см. также [14]):

Теорема 3.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область, обладающая свойством внешнего конуса (см. [6]) и пусть $v \in L^\infty(D)$ и $D^2 v \in L^\infty(D)$. Тогда существуют постоянные $C_3, C_4 > 0$ такие что*

$$\|Dv\|_{C^0(D)} \leq C_3 \|D^2 v\|^{1/2}_{C^0(D)} \cdot \|v\|^{1/2}_{C^0(D)} + C_4 \|v\|_{C^0(D)}. \tag{3.6}$$

Следствие 3.2. *При условиях теоремы 3.2, существуют постоянные* $C_4, C_5 > 0$ *такие, что*

$$\|Dv\|_{C^0(D)} \le \delta \|D^2 v\|_{C^0(D)} + \left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right) \|v\|_{C^0(D)} \tag{3.7}$$

для любого $\delta > 0$.

Теперь перейдем к доказательству сходимости разностной схемы. Для этого нам нужны оценки частных производных четвертого порядка функции u^ε в терминах ε для контроля разности между лапласианом u^ε и приближением этого лапласиана конечными разностями.

Лемма 3.5. *Если функции* f *и* g *удовлетворяют условиям* (2.5), *и* u^ε *- решение уравнения* (3.1), *то*

$$\left|\frac{\partial^4 u^\varepsilon(x)}{\partial x_i^4}\right| \le \frac{C_6}{\varepsilon^{9/2}}, \quad \textit{для} \quad x \in \Omega \quad i = 1, ..., n,$$

где C_6 *- постоянная, не зависящая от* ε.

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы можем считать $\varepsilon \in (0,1)$, так как нам нужно перейти к пределу $\varepsilon \to 0+$.

В ходе доказательства символами C_i будем обозначать положительные постоянные, которые *не зависят от* ε. В частности, обозначим $C_f = \|f\|_{C^3(\Omega)}$ и $C_\beta = \|\beta\|_{C^3(\mathbb{R})}$.

Пусть u^ε-решение уравнения (3.1). Известно, что $u^\varepsilon \in C^4(\Omega)$. Обозначим

$$f_\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) - f(x) :$$

Тогда, $f_\varepsilon \in C^3(\Omega)$ и

$$-\Delta u^\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.8}$$

Чтобы получить оценки частных производных u^ε четвертого порядка, сначала дважды продифференцируем обе стороны (3.8) относительно переменной x_i, и получим

$$-\Delta \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon.$$

Тогда, используя оценку (3.5), мы будем иметь

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)} \le C_2 \left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}\right) \le$$

$$\le C_2 \left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{3.9}$$

Теперь нужно оценить $\left\|\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)}$ и $\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)}$, чтобы получить оценку для $\left\|\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)}$, и в частности, для $\left\|\dfrac{\partial^4}{\partial x_i^4}u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}$.

Имеем,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon = \beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 + \beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Отсюда следует, что

(3.10)

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} \le \left\|\beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)}.$$

Прежде всего,

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} \le \|f\|_{C^3(\Omega)} = C_f. \tag{3.11}$$

Далее,

$$\left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} = \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|D\left(\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right)\right\|_{C^0(\Omega)} \le$$

$$\le \|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^n\left\|\beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\sum_{j=1}^n\left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_i^2\partial x_j}\right\|_{C^0(\Omega)} \le$$

$$\le \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^n\left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^3u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\sum_{j=1}^n\left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\beta''\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)},$$

и следовательно,

$$\left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i^2}\right\|_{C^1(\Omega)} \le \frac{C_\beta}{\varepsilon}\cdot\left\|D^2u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\frac{C_7}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \frac{C_8}{\varepsilon}\cdot\left\|D^3u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} \tag{3.12}$$

Аналогично, для первого слагаемого в правой части (3.10), имеем

$$\left\|\beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2\right\|_{C^1(\Omega)} \le \frac{C_\beta}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|^2_{C^0(\Omega)} +$$

$$+\frac{C_9}{\varepsilon^3}\cdot\|Du^\varepsilon\|^3_{C^0(\Omega)} + \frac{C_{10}}{\varepsilon^2}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\cdot\left\|D^2u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} \tag{3.13}$$

Теперь мы последовательно получим оценки для производных u^ε соответственно первого, второго и третьего порядка. Здесь необходимо подчеркнуть, что эти оценки далеко не оптимальные.

Оценка для $\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$. Используя (3.8) и (3.5), получим

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \le C_2\left(\|f_\varepsilon\|_{C^1(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{3.14}$$

Прежде всего, из (ii) Леммы 3.4 следует, что существует постоянная $C_{11} > 0$, не зависящая от ε такая, что

$$\|u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le C_{11}.$$

Теперь, по определению f_ε, и имея в виду, что β_ε равна нулю, если аргумент неотрицателен, мы получим

$$\|f_\varepsilon\|_{C^1(\Omega)} = \|f_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} + \|Df_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \le \|\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^0(\Omega)} +$$
$$+\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \cdot \|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + \|Df\|_{C^0(\Omega)} \le$$
$$\le C_f + C_\beta\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}\right) = C_{12} + \frac{C_\beta}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}.$$

Подставляя полученное в (3.14), будем иметь

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \le C_{13} + \frac{C_{14}}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}, \tag{3.15}$$

и, в частности,

$$\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le C_{13} + \frac{C_{14}}{\varepsilon}\cdot\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}. \tag{3.16}$$

Теперь возьмем $D = \{x \in \Omega : u^\varepsilon(x) < 0\}$ и $v = u^\varepsilon$ в (3.7), откуда следует

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \delta\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + \left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right)\|u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})}.$$

С помощью оценки (ii) Леммы 3.3 мы получаем $\|u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le (M+1)\varepsilon$, т.е.

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \delta\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} + (M+1)\left(C_4 + \frac{C_5}{\delta}\right)\varepsilon. \tag{3.17}$$

Взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C_5}$ в полученном неравенстве и подставляя в (3.16), в результате получим

$$\|D^2u^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le \frac{C_{15}}{\varepsilon} \tag{3.18}$$

для некоторой константы C_{15}. Теперь возвращаясь к (3.17) и беря $\delta = \varepsilon$, из оценки (3.18) получим

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\{u^\varepsilon<0\})} \le C_{16} \tag{3.19}$$

для некоторой константы C_{16}.

Из (3.15) следует, что

$$\|u^\varepsilon\|_{C^2(\Omega)} \leq \frac{C_{17}}{\varepsilon} \tag{3.20}$$

для некоторой константы C_{17}. Следовательно,

$$\|D^2 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_{17}}{\varepsilon}. \tag{3.21}$$

Исправленная оценка для $\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$**.** Из (3.21) следует что $\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_{17}}{\varepsilon}$. Используя оценку (3.6) Теоремы 3.2 с $v = u^\varepsilon$ и $D = \Omega$, из (3.20) получаем

$$\|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_{18}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.22}$$

Оценка для $\|D^3 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}$**.** Дифференцируя обе стороны равенства (3.8) по переменному x_i, получим

$$-\Delta \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon,$$

а из оценки (3.5), будем иметь

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon\right\|_{C^2(\Omega)} \leq C_{19}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)}\right) \leq \tag{3.23}$$
$$\leq C_{19}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} + \|Du^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)}\right).$$

Из определения f_ε,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} = \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_i} f\right\|_{C^1(\Omega)} \leq \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right\|_{C^1(\Omega)} +$$
$$+\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} f\right\|_{C^1(\Omega)} \leq \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|D\left(\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}u_\varepsilon\right)\right\|_{C^0(\Omega)} +$$
$$+\left\|D^2 f\right\|_{C^0(\Omega)} \leq \left\|\frac{1}{\varepsilon}\beta'\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{C^0(\Omega)}\cdot\|Du_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} +$$
$$+\sum_{j=1}^n\left(\left\|\beta''_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{C^0(\Omega)} + \left\|\beta'_\varepsilon(u^\varepsilon)\cdot\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_j\partial x_i}\right\|_{C^0(\Omega)}\right) + \left\|D^2 f\right\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_{20}}{\varepsilon^3},$$

и поскольку (3.23) верна для любого $i = 1, ..., n$, мы получим

$$\|D^3 u^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_{20}}{\varepsilon^3}. \tag{3.24}$$

Наконец, сочетая (3.9)-(3.13), (3.20), (3.21), (3.23) и (3.24), получим

$$\left\|\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_i^4}\right\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C_6}{\varepsilon^{9/2}}, \quad i = 1, ..., n.$$

□

Лемма 3.6. *Существует постоянная $C > 0$, не зависящая от ε такая, что*

$$|\Delta u^\varepsilon(x) - \Delta_h u^\varepsilon(x)| \le \frac{C}{\varepsilon^{9/2}} h^2, \quad x \in \Omega. \tag{3.25}$$

Доказательство. Оценка получается стандартным методом из разложения Тейлора с помощью Леммы 3.5. □

Лемма 3.7. *Пусть $C > 0$ - постоянная из предыдущей леммы,*

$$\varphi_\varepsilon(x) = C \cdot \frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}} \cdot \left(1 - \frac{|x|^2}{2n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и

$$\psi_\varepsilon(x) = K \cdot \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} (\cos x_i - \cos 1.5), \quad x \in \Omega,$$

где $K = \dfrac{M+1}{n \cdot (\cos 1 - \cos 1.5)}$. *Если обозначить*

$$\Phi_h^\pm(x) = u^\varepsilon(x) \pm (\varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

то для малого $h > 0$,

$$\Phi_h^-(x) \le u_h(x) \le \Phi_h^+(x), \quad x \in \Omega_h.$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что при достаточно малых $h > 0$

$$\mathcal{F}_h(\Phi_h^-) \le 0 = \mathcal{F}_h(u_h) \le \mathcal{F}_h(\Phi_h^+), \quad x \in \Omega_h. \tag{3.26}$$

Поскольку

$$-\Delta_h \varphi_\varepsilon(x) = C \cdot \frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}},$$

то из оценки (3.25) будем иметь $-\Delta_h \varphi_\varepsilon(x) \ge |\Delta u^\varepsilon(x) - \Delta_h u^\varepsilon(x)|$. Это означает, что

$$-\Delta u^\varepsilon(x) \le -\Delta_h \Big(u^\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x)\Big) = -\Delta_h \Big(\Phi_h^+ - \psi_\varepsilon\Big) = -\Delta_h \Phi_h^+ + \Delta_h \psi_\varepsilon \tag{3.27}$$

и

$$-\Delta u^\varepsilon(x) \ge -\Delta_h \Big(u^\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)\Big) = -\Delta_h \Big(\Phi_h^- + \psi_\varepsilon\Big) = -\Delta_h \Phi_h^- - \Delta_h \psi_\varepsilon. \tag{3.28}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) + \psi_\varepsilon = \min\{-\Delta u^\varepsilon + f, u^\varepsilon\} + \psi_\varepsilon = \min\{-\Delta u^\varepsilon + \psi_\varepsilon + f, u^\varepsilon + \psi_\varepsilon\} =$$
$$= \min\{-\Delta u^\varepsilon - \Delta_h \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon + \Delta_h \psi_\varepsilon + f, u^\varepsilon + \psi_\varepsilon\}.$$

Легко проверить, что

$$\psi_\varepsilon + \Delta_h \psi_\varepsilon \le 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \tag{3.29}$$

для малых $h > 0$.

Используя оценки (3.27) и (3.29) и определение Φ_h^+, получаем

$$\mathcal{F}(u^\varepsilon) + \psi_\varepsilon = \min\{-\Delta u^\varepsilon - \Delta_h \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon + \Delta_h \psi_\varepsilon + f, u^\varepsilon + \psi_\varepsilon\} \leq$$
$$\leq \min\{-\Delta u^\varepsilon - \Delta_h \psi_\varepsilon + f, u^\varepsilon + \psi_\varepsilon\} \leq \min\{-\Delta_h \Phi_h^+ + f, u^\varepsilon + \psi_\varepsilon\} =$$
$$= \min\{-\Delta_h \Phi_h^+ + f, \Phi_h^+ - \varphi_\varepsilon\} \leq \min\{-\Delta_h \Phi_h^+ + f, \Phi_h^+\} = \mathcal{F}_h\left(\Phi_h^+\right).$$

Аналогично можно доказать, что $\mathcal{F}(u^\varepsilon) - \psi_\varepsilon \geq \mathcal{F}_h\left(\Phi_h^-\right)$. Из последнего неравенства, используя (i) Леммы 3.4, имеем

$$\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^-\right) \leq \mathcal{F}(u^\varepsilon) - \psi_\varepsilon \leq -\psi_\varepsilon \leq 0,$$

и

$$\mathcal{F}_h\left(\Phi_h^+\right) \geq \mathcal{F}(u^\varepsilon) + \psi_\varepsilon \geq -(M+1)\varepsilon + \psi_\varepsilon =$$
$$= -(M+1)\varepsilon + K\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}(\cos x_i - \cos 1.5) \geq -(M+1)\varepsilon + K\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}(\cos 1 - \cos 1.5) = 0$$

для всех $x \in \Omega$.

Таким образом, мы доказали (3.26). С другой стороны, используя неотрицательность φ_ε и ψ_ε на $\partial\Omega_h$, получим

$$\Phi_h^-(x) \leq u_h(x) \leq \Phi_h^+(x),$$

при $x \in \partial\Omega_h$. Для завершения доказательства остается воспользоваться Леммой 3.2. □

Следствие 3.3. *Существуют постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что для малых $h > 0$*

$$|u^\varepsilon(x) - u_h(x)| \leq M_1 \frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}} + M_2\varepsilon, \quad x \in \Omega_h. \tag{3.30}$$

Доказательство. Из Леммы 3.7,

$$|u^\varepsilon(x) - u_h(x)| \leq \varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_h.$$

□

4. Доказательство Теоремы 2.1

Используя (3.30) и (ii) Леммы 3.4, получим

$$|u(x) - u_h(x)| \leq |u(x) - u^\varepsilon(x)| + |u^\varepsilon(x) - u_h(x)| \leq \frac{3}{2}(M+1)\varepsilon + M_1\frac{h^2}{\varepsilon^{9/2}} + M_2\varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon = h^{4/11}$, будем иметь

$$|u(x) - u_h(x)| \leq C_0 \cdot h^{4/11}, \quad x \in \Omega_h,$$

где $C_0 = \frac{3}{2}(M+1) + M_1 + M_2$.

Р. Бархударян и М. Погосян благодарят фонды Кнут и Алис Воленберг и Горан Гюстафсон за предоставленную возможность посетить Королевский Технологический Институт (KTH, Стокгольм).

Abstract. In this paper we consider the finite difference scheme approximation for one-phase obstacle problem and obtain an error estimate for this approximation.

Список литературы

[1] L. A. Caffarelli, "The obstacle problem revisited", J. fourier Anal. Appl., **4** (4-5), 383-402 (1998).

[2] L. A. Caffarelli, and X. Cabre, *Fully nonlinear elliptic equations* (vol. 43 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995).

[3] X.-L. Cheng, and L. Xue, "On the error estimate of finite difference method for the obstacle problem", Appl. Math. Comput., **183**(1), 416-422 (2006).

[4] M. G. Grandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations", Bull. Amer. Math. Soc. (New S.), **27** (1), 1-67 (1992).

[5] A. Friedman, *Variational principles and free–boundary problems* second Ed. (Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, 1988).

[6] E. Gagliardo, "Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili", Ricerche Mat. **8** 24-51 (1959).

[7] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems* (Scientific Computation, Springer-Verlag, Berlin, 2008), Reprint of the 1984 original.

[8] B. Hu, J. Liang, and L. Jiang, "Optimal convergence rate of the explicit finite difference scheme for American option valuation", J. Comput. Appl. Math., **230** (2), 583-599 (2009).

[9] J. Jost, *Partial differential equations* (vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New-York, 2002), Translated and revised from the 1998 German original by the author.

[10] D. KinderLehrer, and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications* (vol. 31 of Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000), Reprinted of the 1980 original.

[11] N. V. Krylov, "On the rate of convergence of finite–difference approximations for Bellman's equations", Алгебра и Анализ, **9** (3), 245-256 (1997).

[12] N. V. Krylov, "On the rate of convergence of finite–difference approximations for Bellman's equations with variable coefficients", Probab. Theory Related Fields, **117** (1), 1-16 (2000).

[13] L. Nirenberg, "On elliptic partial differential equations", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (3), 115-162 (1959).

[14] L. Nirenberg, "An extended interpolation inequality", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (3), 733-737 (1966).

[15] A. M. Oberman, "Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton-Jacobi equations and free boundary problems", SIAM, J. Numer. Anal., **44** (2), (2006), 879–895 (electronic).

[16] J.-F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics* (vol. 134 of North–Holland Mathematics Studies, North–Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987), Notas de Matemática[Mathematical Notes], 114.

[17] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation* (Oxford Financial Press, 1994).

Поступила 14 января 2011

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 17 – 28.

HOMOCLINIC ORBITS FOR SECOND ORDER NONLINEAR p-LAPLACIAN DIFFERENCE EQUATIONS

X. DENG, X. LIU, H. SHI, T. ZHOU

College of Information, Hunan University of Commerce, China
Oriental Science and Technology College, Hunan Agricultural University, China
Basic Courses Department, Guangdong Baiyun Institute, China
Science College, Hunan Agricultural University, China
E-mails: *dengxq924@163.com; xia991002@163.com;*
E-mails: *shp7971@163.com; zhoutaohunau@yahoo.com.cn*

Abstract. The paper proves the existence of nontrivial homoclinic orbits for second order nonlinear p-Laplacian difference equations without on assumptions on pereodicity using the critical point theory. Moreover, if the nonlinearity is an odd function, the existence of an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits is proved.

MSC2000 number: 37C29, 37J45.

Keywords: Homoclinic orbit, nonlinear difference equation, p-Laplacian, variational structure, critical point.

1. Introduction

Below $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{R}$ denote the sets of all naturals, integers and real numbers respectively. For any $a,\ b \in \mathbf{Z}$, we denote $\mathbf{Z}(a) = \{a, a+1, \cdots\}$, $\mathbf{Z}(a,b) = \{a, a+1, \cdots, b\}$ when $a \le b$. Besides, l^p denotes the space of all real functions whose pth powers are summable over $\mathbf{Z}$.

The present paper considers the existence of a nontrivial homoclinic orbit for the following p-Laplacian difference equation

$$(1.1)\quad \Delta(\varphi_p(\Delta u(t-1))) - \varphi_p(u(t)) = \lambda(t) f(t, u(t+1), u(t), u(t-1)),\ t \in \mathbf{Z},$$

where Δ is the forward difference operator $\Delta u(t) = u(t+1) - u(t)$, $\Delta^2 u(t) = \Delta(\Delta u(t))$, $\varphi_p(s)$ is the p-Laplacian operator $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s (p \ge 2)$, $\lambda \in C(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ and $f \in C(\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^3, \mathbf{R})$.

Equation (1.1) can be considered as a discrete analog of the second order p-Laplacian functional differential equation

$$(1.2)\qquad [\varphi_p(u')]' - \varphi_p(u) = \lambda(s) f(s, u(s+1), u(s), u(s-1)),\ s \in \mathbf{R},$$

where $f \in C(\mathbf{R}^4, \mathbf{R})$. Equation (1.2) includes the following equation

$$(1.3)\qquad c^2 u''(s) = V'(u(s+1) - u(s)) - V'(u(s) - u(s-1)),\ s \in \mathbf{R}.$$

Equations similar to (1.3) have been studied by many researchers. For example, using a version of the Mountain Pass Theorem, Smets and Willem [27] have proved the existence of solitary waves with prescribed speed on infinite lattices of particles with nearest neighbor interaction for (1.3).

Recently, the theory of nonlinear difference equations has been widely used in the study of discrete models appearing in many fields such as computer science, economics, neural network, ecology, cybernetics see [1, 14, 15, 17, 20]. For example, the simple logistic equation $u_{n+1} = ru_n$ is a formula for approximating the evolution of an animal population over time, where u_n is the number of animals this year, u_{n+1} is the number in the next year and r is the growth rate or fecundity. The price-demand curve of cobweb phenomenon

$$D_n = -m_d p_n + b_d,\ m_d > 0,\ b_d > 0$$

is the economics application of difference equations, where D_n is the number of units demanded in period n, p_n is the price per unit in period n and m_d represents the sensitivity of consumers to price.

In the theory of differential equations, a trajectory which is asymptotic to a constant state as $|s| \to \infty$ (s denotes the time variable) is called a homoclinic orbit. Such orbits have been found in various models of continuous dynamical systems and frequently have tremendous effects on the dynamics of such nonlinear systems. So the homoclinic orbits have been extensively studied since the time of Poincaré, see [4, 6, 9, 13, 16, 21, 23, 25, 28] and the references therein. Similarly, we give the following definition: *if $\bar{x}$ is a solution of a discrete system, another solution z will be called a homoclinic orbit emanating from $\bar{x}$ if $|z(t) - \bar{x}| \to 0$ when $t \to \pm\infty$.*

Homoclinic orbits of dynamical systems are important in applications for a number of reasons. They may be "organising centres" for the dynamics in their neighbourhood. From their existence one can under certain conditions, infer the existence of chaos nearby or the bifurcation behaviour of periodic orbits. In the past two decades many authors studied homoclinic orbits for dynamical systems via critical point theory. Here we only mention [6, 9, 16, 21, 28]. In particular, the second order systems were considered in [6, 16].

It is well-known that critical point theory is powerful tool to deal with the problems for differential equations [18, 19, 24, 29]. Only since 2003, the critical point theory has been employed to establish sufficient conditions on the existence of periodic solutions of difference equations. In particular, Yu, Shi, Chen and their collaborators considered the existence of periodic solutions of second order nonlinear difference equations [8, 10 - 12, 26, 30, 31]. In the recent paper of Cabada, Li and Tersian [7] the existence of homoclinic solutions for semilinear p-Laplacian difference equations with periodic coefficients is studied. However, to our best knowledge, the results on the homoclinic orbits of p-Laplacian difference equations for (1.1) obtained in the literature are very scarce. Since f in (1.1) depends on $u(t+1)$ and $u(t-1)$, the traditional ways of establishing the functional in [2, 3, 10 - 12, 22, 30, 31] are inapplicable to our case. The main purpose of this paper is to give some sufficient conditions for the existence of a nontrivial homoclinic orbit. What is more, if $f(t,\cdot)$ is an odd function for any $t \in \mathbf{Z}$, the existence of an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits is obtained. The main approach used in our paper is variational techniques and the notable Mountain Pass Lemma introduced by Ambrosetti and Rabinowitz [5, 24]. Now we state the main results of this paper.

Theorem 1.1. *Assume that the following hypotheses are satisfied:*
(λ) $\lambda(t) > 0$ *for all* $t \in \boldsymbol{Z}$ *and* $\sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^q(t) < +\infty$, *where* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
(f_1) *there exists a functional* $g(v_1, v_2, v_3) \in C(\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R})$ *such that*

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(v_1,v_2,v_3)}{v_2} = 0, \ r = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2},$$

$$|f(t,v_1,v_2,v_3)| \le |g(v_1,v_2,v_3)|, \quad \textit{for all} \quad t \in \boldsymbol{Z};$$

(F_1) *there exists a functional* $F(t,v_1,v_2) \in C^1(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R})$ *with* $F(t,v_1,v_2) \le 0$ *and it satisfies the conditions*

$$\frac{\partial F(t-1,v_2,v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(t,v_1,v_2)}{\partial v_2} = f(t,v_1,v_2,v_3),$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{F(t,v_1,v_2)}{\rho^p} = 0$$

uniformly for $t \in \boldsymbol{Z}$, $\rho = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$;
(F_2) *there exists a constant* $\beta > p$ *such that*

$$\frac{\partial F(t,v_1,v_2)}{\partial v_1} v_1 + \frac{\partial F(t,v_1,v_2)}{\partial v_2} v_2 \le \beta F(t,v_1,v_2) < 0,$$

for all $(t,v_1,v_2) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Then equation (1.1) has a nontrivial homoclinic orbit.

Remark 1.1. *The above hypotheses imply that* $u(t) \equiv 0$ *is a trivial solution of (1.1).*

Remark 1.2. *The assumption* (F_2) *implies that for any nonempty finite integer interval* $I \subset \boldsymbol{Z}$ *there exist constants* $a > 0$ *and* $R > 0$ *such that*
(F_2') $F(t,v_1,v_2) \le -a\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^\beta$, *for all* $t \in I$ *and* $v_1^2+v_2^2 \ge R^2$.

If $f(t,\cdot)$ is an odd function, we show that (1.1) has an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits.

Theorem 1.2. *Suppose that the conditions* (λ), (f_1), (F_1) *and* (F_2) *are satisfied. If*

(f_2) $f(t,-v_1,-v_2,-v_3) = -f(t,v_1,v_2,v_3)$,
for all $(t,v_1,v_2,v_3) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}^3$, *then equation (1.1) has an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits.*

2. Variational structure and some lemmas

In order to apply the critical point theory, we establish variational framework corresponding to (1.1) and give some lemmas which will be of fundamental importance in proving our main results. We start by some basic notation.

Let S be the vector space of all real sequences of the form

$$u = \{u(t)\}_{t\in \mathbf{Z}} = (\cdots, u(-t), \cdots, u(-1), u(0), u(1), \cdots, u(t), \cdots),$$

namely

$$S = \{\{u(t)\} | u(t) \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{Z}\}.$$

Define

$$E = \left\{ u \in S | \sum_{t=-\infty}^{+\infty} [|\Delta u(t-1)|^p + |u(t)|^p] < +\infty,\ t \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Note that E is a Banach space with the norm

$$\|u\|_E = \left\{ \sum_{t=-\infty}^{+\infty} [|\Delta u(t-1)|^p + |u(t)|^p] \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,\ \ u \in E. \tag{2.1}$$

For all $u \in E$ define the functional J as follows:

$$\begin{aligned} J(u) &:= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{p}|\Delta u(t-1)|^p + \frac{1}{p}|u(t)|^p + \lambda(t) F\left(t, u(t+1), u(t)\right) \right] \\ &= \frac{1}{p}\|u\|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t) F(t, u(t+1), u(t)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

where

$$\frac{\partial F(t-1, v_2, v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(t, v_1, v_2)}{\partial v_2} = f(t, v_1, v_2, v_3).$$

The functional J is well-defined C^1 functional on E and Equation (1.1) is easily recognized as the corresponding Euler-Lagrange equation for J. Therefore, we are to look for nonzero critical points of J.

Five lemmas should be stated, which will be used in the proof of our main results. Firstly, let us recall the Palais-Smale condition.

Let E be a real Banach space and $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, that is J is a continuously Fréchet-differentiable functional defined on E. J is said to satisfy the Palais-Smale condition

(P.S. condition for short) if any sequence $\{u(t)\} \subset E$ for which $\{J(u(t))\}$ is bounded and $J'(u(t)) \to 0 (t \to \infty)$ possesses a convergent subsequence in E.
Let B_ρ denote the open ball in E with radius ρ and centered at 0 and let ∂B_ρ denote its boundary.

Lemma 2.1. *(Mountain Pass Lemma [5, 24]). Let E be a real Banach space and $J \in C^1(E, \boldsymbol{R})$ satisfy the P.S. condition. If $J(0) = 0$ and*

(J_1) there exist constants $\rho,\ \alpha > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,

(J_2) there exists $e \in E \setminus B_\rho$ such that $J(e) \leq 0$,

then J possesses a critical value $c \geq \alpha$ given by

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(g(s)),$$

where

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) | g(0) = 0,\ g(1) = e\}.$$

Lemma 2.2. *(Symmetric Mountain Pass Lemma [24]). Let E be an infinite dimensional Banach space and let $J \in C^1(E, \boldsymbol{R})$ be even, satisfy the P.S. condition and $J(0) = 0$. If $E = V \oplus X$, where V is finite dimensional, and J satisfies the following conditions*

(J_3) there exist constants $\rho,\ \alpha > 0$ such that $J|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$,

(J_4) for each finite dimensional subspace $\tilde{E} \subset E$, there is a $\gamma = \gamma(\tilde{E})$ such that $J \leq 0$ on $\tilde{E} \backslash B_\gamma$,

then J possesses an unbounded sequence of critical values.

Lemma 2.3. *The following inequalities are true:*

$$\|u\|_{l^p} \leq \|u\|_E, \tag{2.3}$$

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_E, \tag{2.4}$$

where

$$\|u\|_{l^p} = \left[\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |u(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \textit{and} \quad \|u\|_\infty = \sup_{t \in \boldsymbol{Z}} |u(t)|.$$

Proof. By the definition of $\|\cdot\|_{l^p}$, $\|\cdot\|_\infty$ and $\|\cdot\|_E$, inequalities (2.3) and (2.4) follow immediately. □

Lemma 2.4. *For any $x > 0$, the following inequality holds*

$$|x^p - 1| \geq |x - 1|^p, \quad \textit{where} \quad p \geq 1.$$

Proof is obvious. □

Lemma 2.5. *If the conditions (λ), (f_1), (F_1) and (F_2) are satisfied, then J satisfies the P.S. condition.*

Proof. Let $\{u_k\} \subset E$ be such that $\{J(u_k)\}$ is bounded and $J'(u_k) \to 0$ as $k \to \infty$. Then there exists a positive constant K such that $|J(u_k)| \leq K$. Thus by (2.3) and (F_2), we obtain that for k large enough

$$K + \|u_k\|_E \geq J(u_k) - \frac{1}{\beta}\langle J'(u_k), u_k\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}\right) \| u_k \|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t) F(t, u_k(t+1), u_k(t))$$

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\left[\lambda(t-1)\frac{\partial F(t-1, u_k(t), u_k(t-1))}{\partial v_2}u_k(t) + \lambda(t)\frac{\partial F(t, u_k(t+1), u_k(t))}{\partial v_2}u_k(t)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}\right) \| u_k \|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t) F(t, u_k(t+1), u_k(t))$$

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\lambda(t)\left[\frac{\partial F(t, u_k(t+1), u_k(t))}{\partial v_1}u_k(t+1) + \frac{\partial F(t, u_k(t+1), u_k(t))}{\partial v_2}u_k(t)\right]$$

$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}\right) \| u_k \|_E^p .$$

Since $\beta > p$, it is not difficult to conclude that $\{u_k\}$ is a bounded sequence in E, i.e. there exists a constant $C_1 > 0$ such that $\|u_k\|_E \leq C_1$. So passing to a subsequence if necessary, it can be assumed that $u_k \rightharpoonup u_0$ in E. Moreover, since

$$\|u_0\|_E = \sup_{0\neq h\in E'} \frac{|h(u_0)|}{\|h\|_E} = \sup_{0\neq h\in E'} \frac{\left|\liminf_{k\to\infty} h(u_k)\right|}{\|h\|_E} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_E, \tag{2.5}$$

we conclude that $\|u_0\|_E$ is bounded and $\|u_0\|_E \leq C_1$. By (2.5) we have $|u_k(t)| \leq C_1$ and $|u_0(t)| \leq C_1$, for all $t \in \mathbf{Z}$, and by (f_1), there exists a constant $C_2 > 0$ such that

$$|f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))| \leq C_2, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Since $\sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^q(t) < +\infty$ for all $\epsilon > 0$ there exists $D \in \mathbf{N}(D > 1)$ such that

$$\left(\sum_{|t|>D} \lambda^q(t)\right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon.$$

For this D, we define a $2(D+1)$ dimensional subspace of E:

$$E_{D+1} = \{u = \{u(t)\} \in E : \ u(t) = 0, \ |t| > D+1\}.$$

Let

$$v_k(t) = \begin{cases} u_k(t), & \text{if } \ |t| \leq D+1, \\ 0, & \text{if } \ |t| > D+1, \end{cases}$$

$$v_0(t) = \begin{cases} u_0(t), & \text{if } |t| \le D+1, \\ 0, & \text{if } |t| > D+1. \end{cases}$$

Obviously, the above assumptions imply $v_k = \{v_k(t)\} \in E_{D+1}$ and $v_0 = \{v_0(t)\} \in E_{D+1}$.

Since $u_k \rightharpoonup u_0$, $k \to \infty$ in E, we get

$$\langle u_k, h\rangle \to \langle u_0, h\rangle, \quad h \in E. \tag{2.6}$$

Therefore, for any $h \in E_{D+1}$ we have $\langle v_k, h\rangle \to \langle v_0, h\rangle$, i.e. $v_k \rightharpoonup v_0,\ k \to \infty$ in E_{D+1}. Consequently, we arrive at $v_k \to v_0,\ k \to \infty$ in E_{D+1} which implies $v_k \to v_0,\ k \to \infty$ in E. So for k large enough, we have

$$|u_k(t) - u_0(t)| = |v_k(t) - v_0(t)| \le \epsilon, \ \ |t| \le D+1. \tag{2.7}$$

Thus, we have

$$|f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))| \to 0, \ k \to \infty,$$

for any t such that $|t| \le D$. On the other hand, by (2.7) and Hölder's inequality, for k large enough, we get

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)\left[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))\right](u_k(t) - u_0(t))$$
$$= \sum_{|t|\le D} \lambda(t)\left[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))\right](u_k(t) - u_0(t))$$
$$+ \sum_{|t|> D} \lambda(t)\left[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))\right](u_k(t) - u_0(t))$$
$$\le C_2 \sum_{|t|\le D} \lambda(t)|u_k(t) - u_0(t)| + C_2 \sum_{|t|> D} \lambda(t)|u_k(t) - u_0(t)|$$
$$\le C_2\bar{\lambda} \sum_{|t|\le D} |u_k(t) - u_0(t)| + C_2 \left(\sum_{|t|> D} \lambda^q(t)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{|t|> D} |u_k(t) - u_0(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le 2C_2\bar{\lambda}D \cdot \epsilon + C_2\left\|u_k - u_0\right\|_E \cdot \epsilon = \left(2C_2\bar{\lambda}D + C_2\left\|u_k - u_0\right\|_E\right) \cdot \epsilon,$$

where $\bar{\lambda} = \sup\limits_{t\in\mathbf{Z}} \lambda(t)$. Since ϵ is arbitrary, we have

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) -$$
$$-f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))](u_k(t) - u_0(t)) \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty. \tag{2.8}$$

Similarly, we get

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))]h(t)$$

$$\leq (\bar{\lambda} + C_2)\|h\|_E \cdot \epsilon, \quad h \in E.$$

Combining with (2.2) and (2.6), we obtain that for any $h \in E$

$$\langle J'(u_k) - J'(u_0), h\rangle \to 0, \quad \text{as} \quad k \to +\infty.$$

Therefore, $\|J'(u_0)\|_E \leq \liminf_{k\to\infty} \|J'(u_k)\|_E = 0$. So we have

$$\langle J'(u_k) - J'(u_0), u_k - u_0\rangle = \langle J'(u_k), u_k - u_0\rangle$$

$$\leq \|J'(u_k)\|_E \left(\|u_k\|_E + \|u_0\|_E\right) \leq 2C_1 \|J'(u_k)\|_E \to 0 \quad \text{as} \quad k \to +\infty. \tag{2.9}$$

For k large enough, we have

$$\begin{aligned} \|u_k - u_0\|_E^p \leq \langle J'(u_k) - J'(u_0), u_k - u_0\rangle \\ - \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)[f(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)) - \\ -f(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1))](u_k(t) - u_0(t)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

By the definition of J

$$\begin{aligned} &\langle J'(u_k) - J'(u_0), u_k - u_0\rangle \\ &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\varphi_p\left(\Delta u_k(t-1)\right) - \varphi_p\left(\Delta u_0(t-1)\right)\right]\left(\Delta u_k(t-1) - \Delta u_0(t-1)\right) \\ &+ \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\varphi_p\left(u_k(t-1)\right) - \varphi_p\left(u_0(t-1)\right)\right]\left(u_k(t-1) - u_0(t-1)\right) \\ &+ \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)\left[f\left(t, u_k(t+1), u_k(t), u_k(t-1)\right) - \right. \\ &\left. -f\left(t, u_0(t+1), u_0(t), u_0(t-1)\right)\right]\left(u_k(t) - u_0(t)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

If $\Delta u_0(t-1) \neq 0$, we set

$$x = \frac{\Delta u_k(t-1)}{\Delta u_0(t-1)}.$$

Since u_k possesses point-wise limit $u_0(x)$ at any $x > 0$, by Lemma 2.4, for all $t \in \mathbf{Z}$, we easily obtain

$$\begin{aligned} \left[\varphi_p\left(\Delta u_k(t-1)\right) - \varphi_p\left(\Delta u_0(t-1)\right)\right]\left(\Delta u_k(t-1) - \Delta u_0(t-1)\right) \geq \\ \geq \left|\Delta u_k(t-1) - \Delta u_0(t-1)\right|^p \end{aligned} \tag{2.12}$$

and

$$\begin{aligned} \left[\varphi_p\left(u_k(t-1)\right) - \varphi_p\left(u_0(t-1)\right)\right]\left(u_k(t-1) - u_0(t-1)\right) \geq \\ \geq \left|u_k(t-1) - u_0(t-1)\right|^p. \end{aligned} \tag{2.13}$$

If $\Delta u_0(t-1)=0$, then (2.12) and (2.13) are obviously true. From the definition of $\|\cdot\|_E$, formulas (2.11), (2.12) and (2.13), (2.10) holds. Therefore, (2.9), (2.10) and (2.11) imply that $u_k \to u_0$ in E. The proof of Lemma 2.5 is complete. $\square$

3. Proofs of the main results

In this section, we firstly prove the existence of a nontrivial homoclinic orbit of equation (1.1). Next, if $f(t,\cdot)$ is an odd function for any $t \in \mathbf{Z}$, we prove the existence of an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits of equation (1.1).

3.1. **Proof of Theorem 1.1.** To prove the existence of a homoclinic orbit to (1.1) recall that as we know that $J \in C^1(E,\mathbf{R})$, $J(0)=0$ and J satisfies P.S. condition. Hence, it suffices to prove that J satisfies the conditions (J_1) and (J_2). By (F_1), there exists $\delta > 0$ such that

$$|F(t,v_1,v_2)| \le \frac{1}{4\bar{\lambda}p}\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^p \quad \text{for} \quad t \in \mathbf{Z} \quad \text{and} \quad v_1^2+v_2^2 \le \delta^2.$$

Let $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$, for any $u \in E$ and $\|u\|_E \le \rho$, we have

$$|u(t)| \le \|u\|_{l^p} \le \|u\|_E \le \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Thus, we have $u^2(t+1)+u^2(t) \le \delta^2$ for all $t \in \mathbf{Z}$, which implies

$$|F(t,u(t+1),u(t))| \le \frac{1}{2^{\frac{p}{2}+2}\bar{\lambda}p}\left(\sqrt{u^2(t)+u^2(t+1)}\right)^p \le \tag{3.1}$$

$$\le \frac{1}{4\bar{\lambda}p}\left[u^p(t)+u^p(t+1)\right], \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Summing inequalities (3.1) over $\mathbf{Z}$, we get

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |F(t,u(t+1),u(t))| \le \frac{1}{4\bar{\lambda}p}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}\left[u^p(t)+u^p(t+1)\right] \le \frac{1}{2\bar{\lambda}p}\|u\|_E^p.$$

Thus, if $\|u\|_E = \rho$, then

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty}\lambda(t)F(t,u(t+1),u(t)) \ge \frac{1}{p}\|u\|_E^p - \frac{1}{2\bar{\lambda}p}\bar{\lambda}\|u\|_E^p = \frac{1}{2p}\rho^p,$$

that is $J(u) \ge \alpha > 0$, where $\alpha = \frac{1}{2p}\rho^p$. To verify condition (J_2), for all $\tau \in \mathbf{R}$ and any given $w \in E\setminus\{0\}$, we consider the quantity

$$J(\tau w) = \frac{1}{p}\tau^p\|w\|_E + \sum_{t=-\infty}^{+\infty}\lambda(t)F(t,\tau w(t+1),\tau w(t)).$$

Let $\bar{w} \in E$ be such that $\bar{w}^2(t) + \bar{w}^2(t+1) \geq R^2$ on a nonempty finite, integer interval $I \subset \mathbf{Z}$. Then by (F_2') we conclude that for any $\tau \geq R$

$$J(\tau\bar{w}) \leq \frac{1}{p}\tau^p \|\bar{w}\|_E + \sum_{t\in I} \lambda(t)F(t, \tau\bar{w}(t+1), \tau\bar{w}(t))$$

$$\leq \frac{1}{p}\tau^p \|\bar{w}\|_E - a|\tau|^\beta \underline{\lambda} \sum_{t\in I} \left[\sqrt{\bar{w}^2(t+1) + \bar{w}^2(t)}\right]^\beta,$$

where $\underline{\lambda} = \min\limits_{t\in I} \lambda(t) > 0$.

Since $\beta > p$, we can choose τ large enough to ensure that $J(\tau\bar{w}) \leq 0$. Thus, both conditions (J_1) and (J_2) are satisfied. Theorem 1.1 is proved. □

3.2. **Proof of Theorem 1.2.** The condition (f_2) implies that J is even. As we already know $J \in C^1(E, \mathbf{R})$, $J(0) = 0$ and J satisfies P.S. condition. In order to prove Theorem 1.2 by using the Symmetric Mountain Pass Lemma, we prove conditions (J_3) and (J_4). From the proof of Theorem 1.1, condition (J_1) is valid, so (J_3) is also valid. To prove (J_4), suppose $\tilde{E} \subset E$ is a finite-dimensional subspace and consider $u \in \tilde{E}$ with $u \neq 0$. By (F_2'), there exist some constants $R > 1$ and $a > 0$ such that

$$F(t, v_1, v_2) \leq -a\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^p,$$

$t \in \mathbf{Z}$ and $v_1^2 + v_2^2 \geq R^2$. For all $u \in \tilde{E}$, we have $\|u\|_E^p \leq c\|u\|_\infty^p$, where $c = c(\tilde{E})$. Choosing u such that $\|u\|_E \geq \sqrt[p]{c}R$, we define $I = \{t \mid |u(t)| \geq R\}$. Hence,

$$\sum_{t\in I} \lambda(t)F(t, u(t+1), u(t)) \geq -a\sum_{t\in I} \lambda(t)\left[\sqrt{(u(t+1))^2 + (u(t))^2}\right]^\beta.$$

Thus, we have

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)F(t, u(t+1), u(t))$$

$$\leq \frac{1}{p}\|u\|_E^p - a\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)\left[\sqrt{(u(t+1))^2 + (u(t))^2}\right]^\beta$$

$$\leq \frac{1}{p}c\|u\|_\infty^p - a\sum_{t\in I} \lambda(t)\left[\sqrt{(u(t+1))^2 + (u(t))^2}\right]^\beta$$

$$\leq \frac{1}{p}c\|u\|_\infty^p - a\|u\|_\infty^\beta \sum_{t\in I} \lambda(t).$$

Since $\beta > p$ there exists $\gamma = \gamma(\tilde{E})(\gamma \geq R)$ such that $J(u) \leq 0$ whenever $\|u\|_\infty > \gamma$. By Lemma 2.2 J possesses an unbounded sequence of critical values c_j with $c_j = J(u_j)$, $j \in \mathbf{N}$. Hence, by (F_1) we have

$$c_j = \frac{1}{p}\|u_j\|_E^p + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda(t)F(t, u_j(t+1), u_j(t)) \leq \frac{1}{p}\|u_j\|_E^p. \tag{3.2}$$

Since $c_j \to \infty$ as $j \to \infty$, (3.2) implies that $\{u_j\}$ is unbounded in E. Therefore, the existence of an unbounded sequence homoclinic orbits is obtained. $\square$

Remark 3.1. *As an application of Theorems 1.1 and 1.2, we give an example illustrating our results.*

For all $t \in \mathbf{Z}$, assume that

$$\Delta(\varphi_p(\Delta u(t-1))) - \varphi_p(u(t)) =$$

$$= -\beta e^{-t^2} u(t) \left[\left(1+\cos^2 2\pi t\right) \left((u(t+1))^2 + (u(t))^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right.$$

$$\left. + \left(1+\cos^2 2\pi (t-1)\right) \left((u(t))^2 + (u(t-1))^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right], \tag{3.3}$$

where $\beta > p$. Then, we have $\lambda(t) = e^{-t^2}$ and

$$f(t, v_1, v_2, v_3) = -\beta v_2 \left[\left(1+\cos^2 2\pi t\right) \left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} + \right.$$

$$\left. + \left(1+\cos^2 2\pi (t-1)\right) \left(v_2^2 + v_3^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right],$$

$$g(v_1, v_2, v_3) = -4\beta v_2 \left[\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right],$$

$$F(t, v_1, v_2) = -\left(1+\cos^2 2\pi t\right) \left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}}.$$

Then

$$\frac{\partial F(t-1, v_2, v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial F(t, v_1, v_2)}{\partial v_2}$$

$$= \beta v_2 \left[\left(1+\cos^2 2\pi t\right) \left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} + \left(1+\cos^2 2\pi (t-1)\right) \left(v_2^2 + v_3^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right].$$

It is easy to verify that all assumptions of Theorems 1.1 and 1.2 are satisfied. Consequently, equation (3.3) has an unbounded sequence of nontrivial homoclinic orbits u_j, $j \in \mathbf{N}$.

Список литературы

[1] R. P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. Marcel Dekker, New York (1992).

[2] R. P. Agarwal, K. Perera, D. O'Regan, "Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods", Nonlinear Anal., **58**, 69 – 73 (2004).

[3] R. P. Agarwal, K. Perera, D. O'Regan, "Multiple positive solutions of singular discrete p-Laplacian problems via variational methods", Adv. Difference Equ., **2005**, 93 – 99 (2005).

[4] A. Ambrosetti, V. Coti Zelati, "Multiple homoclinic orbits for a class of conservative systems", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **89**, 177 – 194 (1993).

[5] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, "Dual variational methods in critical point theory and applications", J. Funct. Anal. **14**, 349 – 381 (1973).

[6] F. Antonacci, P. Magrone, "Second order nonautonomous systems with symmetric potential changing sign", Rend. Mat. Appl. **18**(2), 367 – 379 (1998).

[7] A. Cabada, C. Y. Li, S. Tersian, "On homoclinic solutions of a semilinear p-Laplacian difference equation with periodic coefficients", Adv. Difference Equ., **2010**, 1 – 17 (2010).

[8] P. Chen, H. Fang, "Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order p-Laplacian difference equations", Adv. Difference Equ., **2007**, 1 – 9 (2007).
[9] Y. Ding, M. Girardi, "Infinitely many homoclinic orbits of a Hamiltonian system with symmetry", Nonlinear Anal. **38**, 391 – 415 (1999).
[10] Z. M. Guo, J. S. Yu, "Applications of critical point theory to difference equations", Fields Institute Communications, **42**, 187 – 200 (2004).
[11] Z. M. Guo, J. S. Yu, "The existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations", Sci. China, Ser. A, **46**, 506 – 515 (2003).
[12] Z. M. Guo, J. S. Yu, "The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations", J. London Math. Soc., **68**, 419 – 430 (2003).
[13] H. Hofer, K. Wysocki, "First order elliptic systems and the existence of homoclinic orbits in Hamiltonian systems", Math. Ann. **288**, 483 – 503 (1990).
[14] V. L. Kocic, G. Ladas, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of High Order with Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston (1993).
[15] Y. K. Li, L. H. Lu, "Positive periodic solutions of higher-dimensional nonlinear functional difference equations", J. Math. Anal. Appl., **309**, 284 – 293 (2005).
[16] M. J. Ma, Z. M. Guo, "Homoclinic orbits for second order self-adjoint difference equations", J. Math. Anal. Appl., **323**, 513 – 521 (2006).
[17] H. Matsunaga, T. Hara, S. Sakata, "Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay", Computers Math. Appl., **41**, 543 – 551 (2001).
[18] J. Mawhin, M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer, New York (1989).
[19] J. Mawhin, M. Willem, "Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum type equations", J. Differential Equations, **52**, 264 – 287 (1984).
[20] R. E. Mickens, Difference Equations: Theory and Application. Van Nostrand Reinhold, New York (1990).
[21] W. Omana, M. Willem, "Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems", Diff. Int. Eqns., **5**, 1115 – 1120 (1992).
[22] A. Pankov, N. Zakharchenko, "On some discrete variational problems", Acta Appl. Math., **65**, 295 – 303 (2001).
[23] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars, Paris (1899).
[24] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI, New York (1986).
[25] E. Serra, M. Tarallo, S. Terracini, "On the existence of homoclinic solutions for almost periodic second systems", Ann. I. H. P. Anal. Non Linéaire **13**, 783 – 812 (1996).
[26] H. P. Shi, W. P. Ling, Y. H. Long, H. Q. Zhang, "Periodic and subharmonic solutions for second order nonlinear functional difference equations", Commun. Math. Anal., **5**(2), 50 – 59 (2008).
[27] D. Smets, M. Willem M, "Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices", J. Funct. Anal., **149**, 266 – 275 (1997).
[28] A. Szulkin, W. Zou, "Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems", J. Funct. Anal., **187**, 25 – 41 (2001).
[29] Y. T. Xu, Z. M. Guo, "Applications of a Z_p index theory to periodic solutions for a class of functional differential equations", J. Math. Anal. Appl., **257**, 189 – 205 (2001).
[30] J. S. Yu, Y. H. Long, Z. M. Guo, "Subharmonic solutions with prescribed minimal period of a discrete forced pendulum equation", J. Dynam. Differential Equations, **16**, 575 – 586 (2004).
[31] Z. Zhou, J. S. Yu, Z. M. Guo, "Periodic solutions of higher-dimensional discrete systems", Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **134**, 1013 – 1022 (2004).

Поступила 27 августа 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 29 – 46.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ СО СДВИГОМ

А. Г. КАМАЛЯН, А. В. САРГСЯН

Ереванский государственный университет
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *kamalyan_ armen@yahoo.com, ann-sargsyan@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости характеристических сингулярных интегральных уравнений на окружности со сдвигом Карлемана $\omega(t) = -t$. При дополнительных предположениях на коэффициенты дается явное описание ядра и коядра соответствующих операторов. Метод исследования основан на сведении задачи разрешимости к факторизации некоторой матрицы-функции. Приводится явная факторизация указанной матрицы-функции.

MSC2000 number: 45F99, 47A68.

Ключевые слова: Сингулярные уравнения, сдвиг, факторизация, ядро оператора, коядро.

1. Введение

Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ – единичная окружность разбивающая комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на области $\mathbb{T}_+ = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ и $\mathbb{T}_- = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$. Как известно (см. [1]), сингулярный интегральный оператор S с ядром Коши, определяемый почти всюду на $\mathbb{T}$ по формуле

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{\tau - z} \, \varphi(\tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным оператором в $L_p = L_p(\mathbb{T})$ для всех $p \in (1; +\infty)$.

Рассмотрим оператор сдвига U и оператор умножения Ξ_d на функцию (матрицу-функцию) d, действующие по формулам

$$(U\varphi)(t) = \varphi(-t), \quad (\Xi_d\varphi)(t) = d(t)\varphi(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Функцию $U\varphi$ будем обозначать через $\varphi^\wedge$. Пусть $p(z) = \prod\limits_{i=1}^{\nu}(z - \alpha_i)$ – отличный от нуля многочлен на $\mathbb{T}$, тождественно равный единице при $\nu = 0$, а ψ – функция из

винеровской алгебры W, т.е. разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, инвариантная относительно сдвига ($\psi^{\wedge} = \psi$).
Настоящая работа посвящена исследованию операторов $F_d, \tilde{F}_d : L_p \to L_p$ ($1 < p < \infty$), определенных равенствами

$$F_d = I + \Xi_d US, \quad \tilde{F}_d = I + US\Xi_d,$$

где I – тождественный оператор, а $d = \dfrac{p}{p^{\wedge}}\psi$. Эти уравнения являются сингулярными интегральными уравнениями с сохраняющим ориентацию на $\mathbb{T}$ сдвигом Карлемана $\omega(t) = -t$. Теория сингулярных интегральных операторов со сдвигом Карлемана достаточно полно изложена в [2] - [5]. В настоящее время развита в основном фредгольмова (нетерева) теория этих операторов. Для достаточно широких классов сингулярных интегральных операторов со сдвигом найдены эффективные критерии фредгольмовости и формулы для вычисления индексов этих операторов. Задача определения размерностей ядра, коядра (тем более их описания) и построения обобщенной обратной этих операторов фактически остается открытой. В случае дробно-линейных сдвигов Карлемана в работах [6] - [8] предложен метод сводящий задачу разрешимости сингулярных уравнений со сдвигом на окружности к факторизации некоторой матрицы-функции. В нашем конкретном случае это матрица-функция имеет вид

$$G_{p,\psi} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\psi^2}{1-\psi^2} & \dfrac{2p}{p^{\wedge}}\dfrac{\psi}{1-\psi^2} \\ \dfrac{2p^{\wedge}}{p}\dfrac{\psi}{1-\psi^2} & \dfrac{1+\psi^2}{1-\psi^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $G_{p,\psi}$ входит в класс матриц-функций, факторизация которых исследована в работах [9, 10]. Данное обстоятельство позволяет строить теорию разрешимости указанных уравнений. Важную роль в дальнейшем играют функция $v = (1+\psi)/(1-\psi)$ и числа $\chi = \operatorname{ind} v$, $\nu_- = 2|\chi| - \nu$.
Ниже мы предполагаем выполнение следующих условий:

- d1) $1 - \psi^2(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{T}$;
- d2) многочлены p и $p^{\wedge}$ не имеют общих корней;
- d3) все корни многочлена находятся либо в $\mathbb{T}_+$ либо в $\mathbb{T}_-$;
- d4) $\nu < |\chi|$.

Условие d1) является необходимым и достаточным условием фредгольмовости операторов F_d и $\tilde{F}_d$ (см. [2]).

2. Факторизация матрицы-функции $G_{p,\psi}$

2.1. Для линейного пространства X через X^n будем обозначать множество n-мерных вектор-столбцов с координатами из X, а через $X^{n\times n}$ множество всех матриц порядка $n\times n$ с компонентами из X.

Определим проекторы $P_\pm = \dfrac{1}{2}(I\pm S)$ и классы функций $L_p^+ = imP_+$, $L_p^- = imP_-\dot{+}\mathbb{C}$. Ниже через τ_k $(k\in\mathbb{Z})$ обозначается функция определенная равенством $\tau_k(t)=t^k$.

Под факторизацией (см. [11, 12]) матрицы-функции $G_{p,\psi}$ в пространстве L_p $(1<p<\infty)$ мы понимаем представление

$$G_{p,\psi} = (G_{p,\psi})_-\Lambda_{p,\psi}(G_{p,\psi})_+^{-1},$$

где $(G_{p,\psi})_\pm \in \left(L_p^\pm\right)^{2\times 2}$, $(G_{p,\psi})_\pm^{-1} \in \left(L_q^\pm\right)^{2\times 2}$ $(q=p/(p-1))$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\tau_{\varkappa_1},\tau_{\varkappa_2})$, $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2$, $\varkappa_1,\varkappa_2\in\mathbb{Z}$. Целые числа $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ называются частными индексами матрицы-функции G.

Рассмотрим классы функций

$$W_\pm = L_p^\pm \cap W, \quad \overset{\circ}{W}_- = W\cap imP_-.$$

Из условия d1) следует, что $G_{p,\psi}\in W^{2\times 2}$. Поскольку $\det G_{p,\psi}=1$, то $G_{p,\psi}$ допускает факторизацию в L_p, причем $(G_{p,\psi})_+^{\pm 1}\in W_+^{2\times 2}$, $(G_{p,\psi})_-^{\pm}\in W_-^{2\times 2}$, $\varkappa_1+\varkappa_2=0$ (см. [12]).

Далее будем пользоваться следующими обозначениями:

$$(G_{p,\psi})_+ = \begin{pmatrix} g_{11}^+ & g_{12}^+ \\ g_{21}^+ & g_{22}^+ \end{pmatrix}, \quad (G_{p,\psi})_-^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11}^- & g_{12}^- \\ g_{21}^- & g_{22}^- \end{pmatrix}.$$

В силу условия d1) функция v допускает факторизацию $v = v_-\tau_\chi v_+^{-1}$, где

$$\chi = \operatorname{ind} v = \frac{1}{2\pi}\operatorname{vararg}\, v(t)\Big|_{t\in\mathbb{T}}.$$

Заметим, что χ – четное число, а $v_\pm^\wedge = v_\pm$.

Предложенная в [9, 10] схема факторизации основана на представлении $G_{p,\psi} = \tau_{\chi_0}AB$, где $\chi_0\in\mathbb{Z}$, $A\in W_-^{2\times 2}$, $B\in W_+^{2\times 2}$. Приведем явный вид этого представления при условиях, когда $p^{-1}\in W_-$, $\nu<-\chi$ и выполнены условия d1), d2). В этом случае $\chi_0 = -\chi-\nu$, а матрицы-функции A, B определяются с помощью равенств

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} v_-^{-1}\tau_{\nu_-} + p^\wedge v_-\tau_{-\nu}P_-(\Phi_+) & -pv_-\tau_{-\nu}P_-(\Phi_+) \\ -\tau_{-\nu}v_-p^\wedge & \tau_{-\nu}pv_- \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}=\left(\begin{array}{cc} v_+ & -v_+P_+\left(\Phi_+\right) \\ \dfrac{p^\wedge v_+}{p} & -\dfrac{p^\wedge}{p}v_+P_+\left(\Phi_+\right)+\dfrac{1}{pv_+} \end{array}\right),$$

где $\Phi_+=\dfrac{2\psi}{v_+^2(1+\psi)^2p^\wedge}$. Формулы частных индексов и конструкция факторов матрицы-функции $G_{p,\psi}$ в [9, 10] приведены в терминах некоторых матриц $\mathcal{K}_j$ $(j\in\mathbb{Z},\ j>-\nu_-)$. Сравнивая с [9] нетрудно убедиться, что при указанных предположениях, матрицы $\mathcal{K}_j$ могут быть записаны в виде произведения $\mathcal{K}_j=\mathcal{B}_j\mathcal{A}_j$, где

$$\mathcal{B}_j=\left(\begin{array}{cccc} \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-1-j^-} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-2-j^-} & \cdots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_--j} \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-2-j^-} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-3-j^-} & \cdots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu_--j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu-1} & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-\nu-2} & \cdots & \left\langle B^{-1}\right\rangle_{-(\nu_-+\nu)-j^+} \end{array}\right),$$

$$\mathcal{A}_j=\left(\begin{array}{cccc} \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_-} & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_--1} & \cdots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{1-j^+} \\ 0 & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_-} & \cdots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{2-j^+} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left\langle A^{-1}\right\rangle_{\nu_-} \end{array}\right).$$

Здесь и далее для $j\in\mathbb{Z}$ и для матрицы-функции (вектор-функции, функции) Φ мы пользуемся следующими обозначениями: $j^\pm=\frac{1}{2}(j\pm|j|)$ и

$$\langle\Phi\rangle_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\Phi(z)z^{-k-1}dz,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Определим семейство теплицевых операторов $T_j:\left(L_p^+\right)^2\to\left(L_p^+\right)^2$ $(j\in\mathbb{Z})$ действуюших по формуле: $T_j\varphi=P_+\left(\tau_{-(j+\chi_0)}G_{p,\psi}\varphi\right)$. Как известно (см. [9])

$$\ker T_j=\left\{\tau_{j_-}B^{-1}P_+\left(A^{-1}\sum_{k=-(\nu_-+j^+)}^{-1}q_k\tau_k\right);\right. \tag{2.1}$$
$$\left. q_k\in\mathbb{C}^2(k=-1,\ldots,-(\nu_-+j^+)),\qquad q=\left(q^t_{-(\nu_-+j+)},\ldots q^t_{-1}\right)^t\in\ker\mathcal{K}_j\right\}$$

для $j>-\nu_-$ и $\ker T_j=\{0\}$ при $j\leqslant-\nu_-$.

2.2. Пусть $p^{-1}\in W_-$, $\nu<-\chi$ и выполнены условия d1) и d2). Из определения B^{-1} следует, что

$$B^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ b_+ & c_+ \end{array}\right)+B_1, \tag{2.2}$$

где $B_1\in W_+^{2\times2}$, а

$$b_+=\frac{p^\wedge}{p}v_+,\quad c_+=-\frac{p^\wedge v_+}{p}P_+(\Phi_+)+\frac{1}{p\,v_+}=-b_+P_+(\Phi_+)+\frac{1}{p\,v_+}.$$

Поскольку $b_+p \in W_+$ и $\langle p\rangle_\nu = 1$, то

$$\langle b_+\rangle_{k-\nu} = -\sum_{m=0}^{\nu_- -1} \langle b_+\rangle_{k-m}\langle p\rangle_m\,, \quad -k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Из этих равенств следует утверждение.

Предложение 2.1. *Если для целого неотрицательного числа ℓ и комплексных чисел $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ равенства*

$$\sum_{m=0}^{\ell} \langle b_+\rangle_{k-m}\gamma_m = 0$$

справедливы при $k = -1, \ldots, -\nu$, то они справедливы при любом целом отрицательном k. Кроме того либо $\ell \geqslant \nu$, либо $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\ell = 0$.

В дальнейшем важную роль играет следующее предложение.

Предложение 2.2. *Пусть $p^{-1} \in W$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1) и d2). Тогда $j = \nu - \nu_- + 1$ является наименьшим целым числом, при котором подпространство $\ker T_j$ нетривиально. Подпространство $\ker T_{\nu-\nu_-+1}$ одномерно и совпадает с множеством вектор-функций вида $\varphi = \gamma\,(pv_+, p^\wedge v_+)^t$, где γ – произвольное комплексное число.*

Доказательство. Из условия $\nu < -\chi$ следует, что $\chi_0 = -\chi - \nu > \chi$ и $\nu_- = -2\chi - \nu > \nu$. Докажем сначала, что $\ker T_j = \{0\}$ при $j \leqslant \nu - \nu_-$. При $j \leqslant -\nu_-$ это равенство доказано в [9]. Пусть теперь $\nu > 0$ и $-\nu_- < j \leqslant \nu - \nu_-$, $\varphi \in \ker T_j$. Тогда из формулы (2.1) следует существование $q = \left(q^t_{-\nu_-}, \ldots, q^t_{-1}\right)^t \in \ker \mathcal{K}_j$ ($q_k \in \mathbb{C}^2$, $k = -\nu_-, \ldots, -1$) такого, что $\varphi = B^{-1}\psi$, где

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{m-k} q_k\right) t^{m+j}. \tag{2.4}$$

Поскольку $\psi = B\varphi$, то $\psi \in W_+^2$ и следовательно

$$\sum_{k=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{m-k} q_k = 0, \quad \text{при } \ m = 0, 1, \ldots, -j-1\,. \tag{2.5}$$

Учитывая структуру $\langle A^{-1}\rangle_s$ при $s \geqslant 1$, нетрудно убедиться, что $\mathcal{A}_j q = \xi = \left(0, \ldots, 0, \xi_0^t, \ldots, \xi_{k-1}^t\right)^t$, где $k = \nu_- + j$, а $\xi_s = (\eta_s, 0)^t = \sum_{i=-\nu_-}^{-1} \langle A^{-1}\rangle_{-j+s-i} q_i$ ($s = 0, \ldots, k-1$). Из (2.2) следует, что при $s \leqslant -1$ условие $\mathcal{K}_j q = \mathcal{B}_j \mathcal{A}_j q = \mathcal{B}_j \xi = 0$ эквивалентно равенствам

$$\sum_{m=0}^{k-1} \langle b_+\rangle_{s-m}\eta_m = 0 \quad s = -1, \ldots, -\nu + j. \tag{2.6}$$

Так как $k \leqslant \nu$, то в силу предложения 2.1, $\eta_0 = \cdots = \eta_{k-1} = 0$ и потому $\xi_0 = \cdots = \xi_{k-1} = 0$. Из определения чисел ξ_s следует, что равенства (2.5) справедливы при $m = 0, 1, \ldots, \nu_- - 1$. Учитывая, что $\langle A^{-1}\rangle_s = 0$ при $s \geqslant \nu_- + 1$, нетрудно убедиться, что равенства (2.5) справедливы и при $m \geqslant \nu_-$. Из формулы (2.4) следует, что $\varphi = \psi = 0$.

Пусть теперь $0 \leqslant \nu < -\chi$ и $j = \nu - \nu_- + 1$. Определим $\eta_m \in \mathbb{C}$ и $\xi_m \in \mathbb{C}^2$ $(m = 0, \ldots, \nu)$ равенствами $\eta_m = \langle p\rangle_m$, $\xi_m = (\langle p\rangle_m, 0)^t$. Поскольку $\eta_0 = p(0) \neq 0$, то $\xi_0 \neq 0$. В силу (2.3) имеют место равенства (2.6). Отсюда следует, что $\mathcal{B}_j\xi = 0$, где $\xi = (0, \ldots, 0, \xi_0^t, \ldots, \xi_\nu^t)^t \in \mathbb{C}^{2\nu_-}$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{A}_{\nu-\nu_-+1}q = \xi$, где $q = \left(q_{-\nu_-}^t, \ldots, q_{-1}^t\right)^t$. Так как $\langle v_-^{-1}\rangle_0 \neq 0$, то очевидно, что это уравнение разрешимо и потому существует $q \neq 0$ такой, что $\mathcal{K}_{\nu-\nu_-+1}q = 0$. В силу (2.1) вектор-функция

$$\varphi_0 = B^{-1}(z)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=-\nu_-}^{-1}\left(\langle A^{-1}\rangle_{m-k}q_k\right)z^{m+\nu-\nu_-+1} = B^{-1}(z)\left(\xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_\nu z^\nu\right)$$

принадлежит $\ker T_{\nu-\nu_-+1}$. Поскольку $\xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_\nu z^\nu = (p(z), 0)^t$, то из определения B^{-1} следует, что $\varphi_0 = (pv_+, p^\wedge v_+)^t$.

Меньший из частных индексов матрицы-функции $\tau_{-\chi_0}G_{p,\psi}$ равен $\varkappa_1 - \chi_0$. Поскольку с другой стороны наименьшее целое значение j при котором $\ker T_j$ нетривиально, совпадает с $\varkappa_1 - \chi_0 + 1$ (см. например [10, 13, 14]), то $\varkappa_1 = \nu - \nu_- + \chi_0 = (\chi + \nu) < 0$. Следовательно, $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ и потому (см. [10, 13, 14]) $\dim\ker T_{\nu-\nu_-+1} = 1$. Предложение доказано. □

2.3. Определим функции $\Phi'_+ = \dfrac{-2\psi v_+^2}{(1-\psi)^2 p^\wedge}$, $b'_+ = \dfrac{p^\wedge}{pv_+}$, $c'_+ = \dfrac{-p^\wedge}{pv_+}P_+(\Phi'_+) + \dfrac{v_+}{p}$.

$\Phi_- = \dfrac{-2\psi}{(1-\psi)^2 pv_-^2}$, $\Phi'_- = \dfrac{2\psi v_-^2}{(1+\psi)^2 p}$, $b_- = \dfrac{p}{p^\wedge}v_-$, $b'_- = \dfrac{p}{p^\wedge v_-}$;

$c_- = \alpha\left(b_-\tau_1 P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-) + \dfrac{\tau_\nu}{p^\wedge v_-}\right)$, $c'_- = \alpha\left(b'\tau_1 P_-(\tau_{\nu-1}\Phi'_-) + \dfrac{\tau_\nu v_-}{p^\wedge}\right)$,

где $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu$.

Для функции $f \in L_1$, через $\mathcal{H}^+_{n,m}(f)$, $\mathcal{H}^-_{n,m}(f)$ будем обозначать ганкелевы матрицы

$$\mathcal{H}^\pm_{n,m}(f) = \begin{pmatrix} \langle f\rangle_{\mp1} & \langle f\rangle_{\mp2} & \cdots & \langle f\rangle_{\mp m} \\ \langle f\rangle_{\mp2} & \langle f\rangle_{\mp3} & \cdots & \langle f\rangle_{\mp(m+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f\rangle_{\mp n} & \langle f\rangle_{\mp(n+1)} & \cdots & \langle f\rangle_{\mp(n+m-1)} \end{pmatrix}.$$

В случае $p^{-1} \in \overset{\circ}{W}_-$ из формул (2.3) следует, что $\det\mathcal{H}^+_{\nu,\nu}(b_+) \neq 0$ и $\operatorname{rank}\mathcal{H}^+_{n,m}(b_+) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$, $m \geqslant \nu$ (см. [15] гл. 16, § 10, а также [16]). Аналогичным образом $\det \mathcal{H}^+_{\nu,\nu}(b'_+) \neq 0$ и $\operatorname{rank} \mathcal{H}^+_{n,m}(b'_+) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$ и $m \geqslant \nu$. Поскольку $\nu_- > \nu$, то $\dim\ker \mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+) = \dim\ker \mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_+) = \nu_- - \nu + 1$. Кроме того, очевидно, что уравнения $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta = \xi$, $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_+)\eta' = \xi'$ $(\eta, \eta' \in \mathbb{C}^{\nu_-+1})$ разрешимы при любых правых частях $\xi, \xi' \in \mathbb{C}^{\nu}$.

В случае $p^{-1} \in W_+$ и $\nu > 0$ аналогичные утверждения справедливы для матриц $\mathcal{H}^-_{m,n}(b_-)$, $\mathcal{H}^-_{m,n}(b'_-)$. Именно: $\det \mathcal{H}^-_{\nu,\nu}(b_-) \neq 0$, $\det \mathcal{H}^-_{\nu,\nu}(b'_-) \neq 0$; $\operatorname{rank} \mathcal{H}^-_{n,m}(b_-) = \operatorname{rank} \mathcal{H}^-_{n,m}(b'_-) = \nu$ как только $n \geqslant \nu$, $m \geqslant \nu$;

$$\dim\ker \mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b_-) = \dim\ker \mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_-) = \nu_- - \nu + 1,$$

уравнения $\mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b_-)\eta = \xi$, $\mathcal{H}^-_{\nu+1,\nu_-+1}(b'_-)(\eta') = \xi'$ $(\eta, \eta' \in \mathbb{C}^{\nu_-+1})$ разрешимы при любых правых частях $\xi, \xi' \in \mathbb{C}^{\nu}$.

Теорема 2.1. *Пусть $p^{-1} \in W_-$, $\nu < -\chi$ и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = \operatorname{diag}(\tau_{\chi+\nu}, \tau_{-\chi-\nu}),$$

$$(2.7)\quad \begin{aligned} g^+_{11} &= \gamma_1 p v_+, \quad & g^+_{12} &= \gamma_2 \left(v_+ \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m - \mu_0 v_+ P_+(\Phi_+) \right), \\ g^+_{21} &= \gamma_1 p^\wedge v_+, \quad & g^+_{22} &= \gamma_2 \left(\frac{p^\wedge v_+}{p} \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m - \mu_0 \frac{p^\wedge}{p} v_+ P_+(\Phi_+) + \frac{\mu_0}{p v_+} \right) \end{aligned}$$

$$(2.8)\quad \begin{aligned} g^-_{11} &= \frac{1}{\gamma_1 \mu_0} \left(\frac{p^\wedge v_-}{p \tau_{\nu_-}} \sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m + \frac{\mu_0 p^\wedge v_-}{p \tau_{\nu_-}} P_-(\Phi_+) + \frac{\mu_0 \tau_\nu}{v_- p} \right), \\ g^-_{12} &= -\frac{v_-}{\gamma_1 \mu_0 \tau_{\nu_-}} \left(\sum_{m=0}^{\nu_-} \eta_m \tau_m + \mu_0 P_-(\Phi_+) \right), \quad g^-_{21} = -\frac{p^\wedge v_-}{\gamma_2 \mu_0 \tau_\nu}, \quad g^-_{22} = \frac{p v_-}{\gamma_2 \mu_0 \tau_\nu} \end{aligned}$$

где $\mu_0, \gamma_1, \gamma_2$ - произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu_-})^t$, $(\eta_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \ldots, \nu_-)$ - произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta = -\mu_0 \mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c_+).$$

Доказательство. В предложении 2.2 уже доказано, что частные индексы матрицы-функции $G_{p,\psi}$ равны соответственно $\varkappa_1 = \chi + \nu$ и $\varkappa_2 = -(\chi + \nu)$ (т.е. $\chi_0 = -(\chi + \nu)$). Следовательно, частные индексы матрицы-функции $\tau_{-\chi_0} G_{p,\psi}$ совпадают с числами $\varkappa_1 - \chi_0 = 2(\chi + \nu) = \nu - \nu_-$ и $\varkappa_2 - \chi_0 = 0$. Определим матрицы

$$\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1} = \left(\langle A^{-1} \rangle_{2\nu_- - \nu - 1}, \ldots, \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - \nu} \right) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}'_1 = \left(\langle A^{-1} \rangle_{\nu_-}, \ldots, \langle A^{-1} \rangle_0 \right).$$

В силу результатов работы [10] существует факторизационная пара векторов $q = \left(q^t_{-\nu_-}, \ldots, q^t_{-1} \right)^t \in \mathbb{C}^{2\nu_-}$ $(q_i \in \mathbb{C}^2,\ i = -\nu_-, \ldots, -1)$, $h = \left(h^t_{-(\nu_-+1)}, \ldots, h^t_{-1} \right)^t$ $(h_i \in$

$\mathbb{C}^2$, $i=-(\nu_-+1),\ldots,-1$). Эти векторы определяются из уравнений $\mathcal{K}_{\nu-\nu_-+1}q=0$, $\mathcal{K}_1h=0$ таким образом, что отличные от нуля векторы $\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1}q$, $\mathcal{K}'_1h$ – линейно независимы. Если построить вектор-функции φ_1, φ_2 по формулам

$$\varphi_1(t)=t^{\nu-\nu_-+1}B^{-1}(t)\sum_{m=0}^{\nu_-}\left(\sum_{k=-\nu_-}^{-1}\langle A^{-1}\rangle_{m-k}q_k\right)t^m, \tag{2.9}$$

$$\varphi_2(t)=B^{-1}(t)\sum_{m=0}^{\nu_-}\left(\sum_{k=-(\nu_-+1)}^{-1}\langle A^{-1}\rangle_{m-k-1}h_k\right)t^m, \tag{2.10}$$

то матрица-функция (φ_1,φ_2) может быть выбрана в качестве фактора $(G_{p,\psi})_+$. Обратно, как бы не был выбран $(G_{p,\psi})_+$, существует факторизационная пара q, h такая, что первый и второй столбец $(G_{p,\psi})_+$ восстанавливаются по формулам (2.9), (2.10) соответственно.

В предложении 2.2 по существу доказывается, что $\varphi_1=\gamma_1(pv_+,p^\wedge v_+)^t$ ($\gamma_1\neq 0$). Кроме того, вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_{\nu-\nu_-+1}q$ равна нулю. Отсюда в частности следует, что вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_1h$ должна быть отлична от нуля.

Обозначим $\xi=\mathcal{A}_1h$. Пусть $\xi=(\xi_0^t,\xi_1^t,\ldots,\xi_\nu^t)^t$, и $\xi_k=(\eta_k,\mu_k)^t$ ($\eta_k,\mu_k\in\mathbb{C}$, $k=0,1,\ldots,\nu_-$). Из определения $\mathcal{A}_1$ и структуры $\langle A^{-1}\rangle_s$ ($s=0,1,\ldots$) следует, что $\mu_1=\cdots=\mu_{\nu_-}=0$. Но поскольку $\mathcal{K}'_1h=\xi_0$, то $\mu_0\neq 0$. При таком выборе ξ легко видеть, что уравнение $\mathcal{A}_1h=\xi$ разрешимо. Таким образом нахождение решения уравнения $\mathcal{K}_1h=0$, обладающего тем свойством, что вторая компонента вектора $\mathcal{K}'_1h$ отлична от нуля, эквивалентно нахождению решения уравнения $\mathcal{B}_1\xi=0$ вида $\xi=\left(\xi_0^t,\xi_1^t,\ldots,\xi_{\nu_-}^t\right)^t$, где $\xi_0=(\eta_0,\mu_0)^t$, $\xi_k=(\eta_k,0)^t$ ($k=1,\ldots,\nu_-$), $\mu_\nu,\eta_s\in\mathbb{C}$ ($s=0,\ldots,\nu_-$), $\mu_0\neq 0$. В свою очередь, последнее уравнение эквивалентно уравнению $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+)\eta=-\mu_0\mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c_+)$, где $\eta=(\eta_0,\ldots,\eta_{\nu_-})^t$. Последовательное решение этого уравнения и уравнения $\mathcal{A}_1h=\xi$ при некотором $\mu_0\neq 0$ определяет вектор $h=\left(h^t_{-\nu_--1},\ldots,h^t_{-1}\right)^t$ с $h_k=\left(h_k^1,0\right)^t$ ($k=-\nu_--1,\ldots,-2$) и $h_{-1}=\left(h^1_{-1},h^2_{-1}\right)^t$. Из формулы (2.10) следует, что второй столбец $(G_{p,\psi})_+$ имеет вид $\varphi_2(z)=\gamma_2B^{-1}(z)\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_mz^m,\mu_0\right)^t$. Отсюда и из равенства $\varphi_1=\gamma_1(pv_+,p^\wedge v_+)^t$ в силу определения B^{-1} окончательно получим формулы (2.7). Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что $\det(G_{p,\psi})_+=\gamma_2\gamma_1\mu_0$. Из равенства $\det G=\det(G_{p,\psi})_-\det\Lambda_{p,\psi}\cdot(\det G_{p,\psi})_+^{-1}$

следует, что $\det(G_{p,\psi})_-^{-1} = \dfrac{1}{\gamma_1\gamma_2\mu_0}$. Отсюда имеем

$$(G_{p,\psi})_- = \gamma_1\gamma_2\mu_0 \begin{pmatrix} g_{22}^- & -g_{12}^- \\ -g_{21}^- & g_{11}^- \end{pmatrix}.$$

Сравнивая это равенство с $(G_{p,\psi})_- = G_{p,\psi}(G_{p,\psi})_+\Lambda_{p,\psi}^{-1}$ с помощью несложных преобразований нетрудно получить формулы (2.8) для g_{ij}^- $(i,j = 1,2)$. Теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть* $p^{-1} \in W_-$, $\nu < \chi$ *и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции* $G_{p,\varphi}$ *определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = \operatorname{diag}(\tau_{-\chi+\nu}, \tau_{\chi-\nu}),$$

$$\begin{aligned} &g_{11}^+ = -\frac{\gamma_1 p}{v_+}, \quad g_{21}^+ = \frac{\gamma_1 p^\wedge}{v_+},\\ &g_{12}^+ = -\gamma_2\left(\frac{p}{p^\wedge v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_m - \frac{\mu_0 p}{p^\wedge v_+}P_+\left(\Phi'^\wedge_+\right) + \frac{\mu_0 v_+}{p^\wedge}\right),\\ &g_{22}^+ = \gamma_2\left(\frac{1}{v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_m - \frac{\mu_0}{v_+}P_+\left(\Phi'^\wedge_+\right)\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.12)

$$\begin{aligned} &g_{11}^- = \frac{1}{\gamma_1\mu_0 v_-\tau_{\nu_-}}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_m + \mu_0 P_-\left(\Phi'^\wedge_+\right)\right),\\ &g_{12}^- = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p}{p^\wedge v_-\tau_{\nu_-}}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta_m'\tau_m + \frac{\mu_0 p}{p^\wedge v_-\tau_{\nu_-}}P_-\left(\Phi'^\wedge_+\right) + \frac{\mu_0 v_-\tau_\nu}{p^\wedge}\right),\\ &g_{21}^- = -\frac{p^\wedge}{\gamma_2\mu_0 v_-\tau_\nu}, \quad g_{22}^- = -\frac{p}{\gamma_2\mu_0 v_-\tau_\nu}, \end{aligned}$$

где $\mu_0, \gamma_1, \gamma_2$ *– произвольные ненулевые комплексные числа, а* $\eta' = (\eta_0', \eta_1', \dots, \eta_{\nu_-}')^t$, $(\eta_i' \in \mathbb{C},\ i = 0,\dots,\nu_-)$ *– произвольное решение уравнения* $\mathcal{H}^+_{\nu+1,\nu_-+1}(b_+')\eta' = -\mu_0\mathcal{H}^+_{\nu+1,1}(c_+')$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу-функцию $G_{p,-\psi}$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1. При этом необходимо вместо $\chi, v_\pm, b_+, c_+, \Phi$ рассматривать $-\chi, \dfrac{1}{v_\pm}, b_+', c_+', \Phi'$. Воспользуемся теоремой 2.1 и с соответствующими изменениями построим факторизацию $G_{p,-\psi} = (G_{p,-\psi})_-\Lambda_{p,-\psi}(G_{p,-\psi})_+^{-1}$. С другой стороны легко убедиться, что $G_{p,\psi} = J_0 G^\wedge_{p,-\psi}J_0^{-1}$, где

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,
$G_{p,\psi} = J_0(G_{p,-\psi})^\wedge\Lambda^\wedge_{p,-\psi}(G_{p,-\psi})_+^{-1}J_0^{-1} = (-1)^{\varkappa_2}J_0(G_{p,-\psi})^\wedge_-\Lambda_{p,-\psi}\left(J_0(G_{p,-\psi})^\wedge_+\right)^{-1}$

и можем взять

$$(G_{p,\psi})_+ = J_0(G_{p,-\psi})_+^\wedge \quad \text{и} \quad (G_{p,\psi})_- = (-1)^{\varkappa_2} J_0(G_{p,-\psi})_-^\wedge.$$

Учитывая, что $(-1)^{\varkappa_2} = (-1)^\nu$ (т.к. $\varkappa_2 = \chi - \nu$, а χ – четное) и $J_0^{-1} = -J_0$, получим $(G_{p,\psi})_-^{-1} = (-1)^{\nu+1}(G_{p,-\psi})_-^{-1\wedge} J_0$. Из этих формул с учетом равенств $(-1)^{\nu_-} = (-1)^\nu$ и $SW = WS$ следуют (2.11) и (2.12). Теорема доказана. $\square$

2.4. Рассмотрим теперь случай $p^{-1} \in W_+$. Определим функцию ψ_* и многочлен p_* с помощью равенств $\psi_* = (-1)^\nu \bar{\psi}$, $p_*(z) = (-1)^\nu \prod\limits_{i=1}^{\nu}\left(z + \dfrac{1}{\bar{\alpha}_i}\right)$. Очевидно, что из условия $p^{-1} \in W_+$ следует $p_*^{-1} \in W_-$. Функцию v_* определим равенством $v_* = \dfrac{1+\psi_*}{1-\psi^*}$. Из d1) следует, что $1 - \psi_*^2(x) \neq 0$ $(t \in T)$. Пусть представление $v_* = v_{*-}\tau_{\chi_*}v_{*+}^{-1}$ является факторизацией функции v_*. В случае когда ν – четное число, имеет место равенство $v_* = \bar{v}$ и потому в этом случае

$$\chi_* = -\chi, \quad v_{*-}(z) = \frac{1}{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad v_{*+}(z) = \frac{1}{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

В случае когда ν – нечетное число, справедливо равенство $v_* = \dfrac{1}{\bar{v}}$ и поэтому

$$\chi_* = \chi, \quad v_{*-}(z) = \overline{v_+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad v_{*+}(z) = \overline{v_-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Поскольку $|\chi_*| = |\chi|$, то условие d4) эквивалентно условию $\nu < |\chi_*|$. Таким образом к матрице-функции G_{p_*,ψ_*} применимы теоремы 2.1 и 2.2. Пусть представление

$$G_{p_*,\psi_*} = (G_{p_*,\psi_*})_- \Lambda_{p_*,\psi_*} (G_{p_*,\psi_*})_+^{-1}$$

является факторизацией G_{p_*,ψ_*} и $\Lambda_{p_*,\psi_*} = \operatorname{diag}(\tau_{-\varkappa_*}, \tau_{\varkappa_*})$, $(G_{p_*,\psi_*})_+ = \left(g_{*ij}^+\right)_{ij=1}^2$, $(G_{p_*,\psi_*})_-^{-1} = \left(g_{*ij}^-\right)_{ij=1}^2$. Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что $\varkappa_* = |\chi_*| - \nu = |\chi| - \nu = \varkappa_2$. Кроме того, число ν_{*-} определенное равенством $\nu_{*-} = 2|\chi_*| - \nu$ в силу $|\chi_*| = |\chi|$ равно ν_-.

Матрица-функция $G_{p,\psi}$ совпадает с сопряженной к G_{p_*,ψ_*} матрицей-функцией G_{p_*,ψ_*}^*. Поэтому (см. [11, 12]) представление

$$G_{p,\psi} = (G_{p_*,\psi_*})^* = ((G_{p_*,\psi_*})_+ J)^{-1*} J\Lambda_{p_*,\psi_*}^* JJ(G_{p_*,\psi_*})_-^*,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является факторизацией $G_{p,\psi}$. Отсюда следует, что

$$(G_{p,\psi})_+(z) = \left(((G_{p_*,\psi_*})_-)^{-1}\right)^* \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) J, \quad (G_{p,\psi})_-^{-1}(z) = J.((G_{p_*,\psi_*})_+)^* \left(\frac{1}{\bar{z}}\right).$$

С помощью этих формул и теорем 2.1, 2.2 нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 2.3. *Пусть $p^{-1} \in W_+$, $\nu < -\chi$, ν-нечетное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = diag\,(\tau_{\chi+\nu,-\chi-\nu})\,, \quad g_{11}^{+} = \frac{p\,v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}, \quad g_{21}^{+} = \frac{p^\wedge v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}$$

$$g_{12}^{+} = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(-\frac{p}{p^\wedge}v_+\tau_{\nu_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\frac{p}{p^\wedge}\tau_{\nu+1}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_+) + \frac{\mu_0}{v_+p^\wedge}\right)$$

$$g_{22}^{+} = -\frac{v_+\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi_-)\right)$$

$$g_{11}^{-} = \gamma_2\left(v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-)\right)$$

$$g_{12}^{-} = \gamma_2\left(-\frac{pv_-}{p^\wedge}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} - \alpha\mu_0\frac{p}{p^\wedge}v_-\tau_1P_-(\tau_{\nu-1}\Phi_-) + \frac{\mu_0\alpha\tau_\nu}{p^\wedge v_-}\right),$$

$$g_{21}^{-} = \frac{\gamma_1p^\wedge v_-}{\alpha\tau_\nu}, \quad g_{22}^{-} = -\frac{\gamma_1p\,v_-}{\alpha\tau_\nu},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 – произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{\nu_-})^t$ ($\eta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, \nu_-$) – произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,\nu_-+1}(b_-)\,\eta = -\mu_0\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,1}(c_-)\,.$$

Теорема 2.4. *Пусть $p^{-1} \in W_+$, $\nu < \chi$, ν-четное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi} = diag\,(\tau_{-\chi+\nu,\chi-\nu})\,, \quad g_{11}^{+} = -\frac{p}{\alpha\gamma_1\mu_0v_+}, \quad g_{21}^{+} = \frac{p^\wedge}{\alpha\gamma_2\mu_0v_+}$$

$$g_{12}^{+} = \frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p\tau_{\nu_-}}{p^\wedge v_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \frac{\alpha\mu_0p\tau_{\nu_-+1}}{p^\wedge v_+}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-) + \frac{\alpha\mu_0v_+}{p^\wedge}\right)$$

$$g_{22}^{+} = -\frac{\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0v_+}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} + \alpha\mu_0\tau_1P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{11}^{-} = \gamma_2\left(\frac{1}{v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m} - \frac{\alpha\mu_0\tau_1}{v_-}P_-(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(\frac{p}{p^{\wedge}v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}\eta_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0 p}{p^{\wedge}}\tau_\nu P_-(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)+\frac{\mu_0\alpha\tau_\nu v_-}{p^{\wedge}}\right),$$

$$g_{21}^{-}=\frac{\gamma_1 p^{\wedge}}{\alpha\tau_\nu v_-},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1 p}{\alpha\tau_\nu v_-},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 – произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta=(\eta_0,\ldots,\eta_{\nu_-})^t$ ($\eta_i\in\mathbb{C}$, $i=0,\ldots,\nu_-$) – произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,\nu_-+1}\left(b'_-\right)\eta=-\mu_0\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,1}\left(c'_-\right).$$

Теорема 2.5. *Пусть $p^{-1}\in W_+$, $\nu<-\chi$, ν-четное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi}=diag\left(\tau_{\chi+\nu,-\chi-\nu}\right),\quad g_{11}^{+}=-\frac{p\,v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0},\quad g_{21}^{+}=-\frac{p^{\wedge}v_+}{\alpha\gamma_2\mu_0}$$

$$g_{12}^{+}=\frac{v_+\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\alpha\mu_0\tau_1 P_+(\tau_{\nu-1}\Phi^{\wedge}_-)\right)$$

$$g_{22}^{+}=\frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(\frac{p^{\wedge}}{p}v_+\tau_{\nu_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\frac{\alpha\mu_0 p^{\wedge}}{p}v_+\tau_{\nu_-+1}P_+(\tau_{\nu-1}\Phi^{\wedge}_-)+\frac{\alpha\mu_0}{v_+p}\right)$$

$$g_{11}^{-}=-\gamma_2\left(\frac{p^{\wedge}}{p}v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0 p^{\wedge}v_-\tau_1}{p}P_-(\tau_{\nu-1}\Phi^{\wedge}_-)+\frac{\alpha\mu_0\tau_\nu}{v_-p}\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(v_-\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\alpha\mu_0 v_-\tau_1 P_-(\tau_{\nu-1}\Phi^{\wedge}_-)\right),$$

$$g_{21}^{-}=-\frac{\gamma_1 p^{\wedge}v_-}{\alpha\tau_\nu},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1 v_- p}{\alpha\tau_\nu},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 – произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta'=(\eta'_0,\ldots,\eta'_{\nu_-})$ ($\eta'_i\in\mathbb{C}$, $i=0,\ldots,\nu_-$) – произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,\nu_-+1}\left(b_-\right)\eta'=-\mu_0\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,1}\left(c_-\right).$$

Теорема 2.6. *Пусть $p^{-1}\in W_+$, $\nu<\chi$, ν-нечетное число и выполнены условия d1), d2). Тогда факторизационные множители матрицы-функции $G_{p,\psi}$ определяются следующими равенствами:*

$$\Lambda_{p,\psi}=diag\left(\tau_{-\chi+\nu,\chi-\nu}\right),\quad g_{11}^{+}=\frac{p}{\alpha\mu_0\gamma_2 v_+},\quad g_{21}^{+}=-\frac{p^{\wedge}}{\alpha\gamma_2\mu_0 v_+}$$

$$g_{12}^{+}=\frac{\tau_{\nu_-}}{\gamma_1\mu_0 v_+}\left(\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\alpha\mu_0\tau_1 P_+(\tau_{\nu-1}\Phi'_-)\right)$$

$$g_{22}^{+}=\frac{1}{\gamma_1\mu_0}\left(-\frac{p^{\wedge}\tau_{\nu_-}}{pv_+}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}+\frac{\alpha\mu_0 p^{\wedge}}{pv_+}\tau_{\nu_-+1}P_+\left(\tau_{\nu_--1}\Phi'^{\wedge}_-\right)-\frac{\alpha\mu_0 v_+}{p}\right)$$

$$g_{11}^{-}=-\gamma_2\left(-\frac{p^{\wedge}}{pv_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0}{pv_-}p^{\wedge}\tau_1P_-\left(\tau_{\nu-1}\Phi'^{\wedge}_-\right)-\frac{\alpha\mu_0\tau_\nu v_-}{p}\right)$$

$$g_{12}^{-}=\gamma_2\left(\frac{1}{v_-}\sum_{m=0}^{\nu_-}(-1)^m\eta'_m\tau_{-m}-\frac{\alpha\mu_0\tau_1}{v_-}P_-\left(\tau_{\nu-1}\Phi'^{\wedge}_-\right)\right),$$

$$g_{21}^{-}=-\frac{\gamma_1p^{\wedge}}{\alpha\tau_\nu v_-},\quad g_{22}^{-}=\frac{\gamma_1p}{\alpha\tau_\nu v_-},$$

где μ_0, γ_1, γ_2 - произвольные ненулевые комплексные числа, а $\eta'=(\eta'_0,\ldots,\eta'_{\nu_-})$ $(\eta'_i\in\mathbb{C},\ i=0,\ldots,\nu_-)$ - произвольное решение уравнения

$$\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,\nu_-+1}\left(b'_-\right)\eta'=-\mu_0\mathcal{H}^{-}_{\nu+1,1}\left(c'_-\right).$$

3. Интегральные операторы

3.1. Если $p^{-1}\in W$, то при выполнении условия d1) оператор F_d фредгольмов и поэтому обладает обобщенным обратным (см. [1]).

Рассмотрим действующий в L_p^2 матричный сингулярный оператор $M_d=\Xi_{\mathcal{C}}P_++\Xi_{\mathcal{D}}P_-$, где матрицы-функции $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ определены равенствами:

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1&d\\d^{\wedge}&1\end{pmatrix},\quad\mathcal{D}=\begin{pmatrix}1&-d\\-d^{\wedge}&1\end{pmatrix}.$$

Как известно (см. [17]), оператор $\mathcal{M}_d$ связан с операторами F_d и $F'_d=I-\Xi_dUS$ следующим операторным тождеством

$$\begin{pmatrix}I&U\\I&-U\end{pmatrix}\mathcal{M}_d\begin{pmatrix}I&I\\U&-U\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}F_d&0\\0&F'_d\end{pmatrix}.\tag{3.1}$$

При $p^{-1}\in W$ и выполнении условия d1), обобщенный обратный к $\mathcal{M}_d$ оператор может быть определен по формуле (см. [18]):

$$\mathcal{M}_d^{(-1)}=\left(\Xi_{(G_{p,\psi})_+}P_++\Xi_{(G_{p,\psi})_-}P_-\right)\left(\Lambda_{p,\psi}^{-1}P_++P_-\right)\Xi_{(G_{p,\psi})_-^{-1}\mathcal{D}^{-1}}.$$

Из (3.1) следует, что оператор $F_d^{(-1)}$ может быть восстановлен с помощью равенства

$$\begin{pmatrix}F_d^{(-1)}&*\\ *&*\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I&U\\I&-U\end{pmatrix}\mathcal{M}_d^{(-1)}\begin{pmatrix}I&I\\U&-U\end{pmatrix}.$$

Отсюда, полагая $\det(G_{p,\psi})_-=1$ (т.е. взяв в теоремах 2.1-2.6 $\mu_0=\gamma_1=\gamma_2=1$), непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что

$$F_d^{(-1)}=M_{11}+M_{12}U+UM_{21}+UM_{22}U,\tag{3.2}$$

где

$$M_{1i}=(\Xi_{g_{11}^+}P_++\Xi_{g_{22}^-}P_-)(\Xi_{\tau_\varkappa}P_++P_-)\Xi_{a_{1i}}+(\Xi_{g_{12}^+}P_+-\Xi_{g_{12}^-}P_-)(\Xi_{\tau_{-\varkappa}}P_++P_-)\Xi_{a_{2i}},$$

$$M_{2i}=(\Xi_{g_{21}^+}P_+-\Xi_{g_{21}^-}P_-)(\Xi_{\tau_\varkappa}P_++P_-)\Xi_{a_{1i}}+(\Xi_{g_{22}^+}P_++\Xi_{g_{11}^-}P_-)(\Xi_{\tau_{-\varkappa}}P_++P_-)\Xi_{a_{2i}},$$

$i=1,2$, а

$$\varkappa=|\chi|-\nu,$$

$$a_{i1}=\frac{1}{2\left(1-\psi^{2}\right)}\cdot\left(g_{i1}^{-}+g_{i2}^{-}d^{\wedge}\right),\quad a_{i2}=\frac{1}{2\left(1-\psi^{2}\right)}\cdot\left(g_{i1}^{-}d+g_{i2}^{-}\right),\quad i=1,2.$$

Таким образом, в случае когда $p^{-1}\in W$, при выполнении условий d1) и d2) оператор $F_d^{(-1)}$, определенный по формуле (3.2), является обобщенным обратным к F_d. Здесь $g_{ij}^{\pm}$ в зависимости от знака χ, четности числа ν и от $p^{-1}\in W_-$ либо $p^{-1}\in W_+$ восстанавливаются по формулам полученным в теоремах 2.1-2.6 ($\mu_0=\gamma_1=\gamma_2=1$). Заметим, что аналогично (3.1) нетрудно убедиться в тождестве

$$\begin{pmatrix} I & U\\ I & -U\end{pmatrix}\tilde{\mathfrak{M}}_{d^{\wedge}}\begin{pmatrix} I & I\\ U & -U\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\tilde{F}_d & 0\\ 0 & \tilde{F}_d'\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

где $\tilde{\mathfrak{M}}_{d^{\wedge}}=P_+\Xi_{\mathfrak{C}^{\wedge}}+P_-\Xi_{\mathfrak{D}^{\wedge}}$, $\tilde{F}_d'=I-US\Xi_d$. Учитывая, что оператор

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{d^{\wedge}}^{(-1)}=\Xi_{\mathfrak{D}^{\wedge-1}(G_{p^{\wedge},\psi})_+}\left(P_+\Xi_{\Lambda^{-1}_{p^{\wedge},\psi}}+P_-\right)\left((-1)^{\nu}P_+\Xi_{(G_{p^{\wedge},\psi})_-^{-1}}+P_-\Xi_{(G_{p^{\wedge},\psi})_+^{-1}}\right)$$

является обобщенно обратным к $\tilde{\mathfrak{M}}_{d^{\wedge}}$, в силу (3.3) обобщенный обратный $\tilde{F}_d^{(-1)}$ к оператору $\tilde{F}_d$, может быть восстановлен из равенства

$$\begin{pmatrix}\tilde{F}_d^{(-1)} & *\\ * & *\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & U\\ 1 & -U\end{pmatrix}\tilde{\mathfrak{M}}_{d^{\wedge}}^{(-1)}\begin{pmatrix}1 & I\\ U & -U\end{pmatrix}.$$

3.2. Сначала докажем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть $p^{-1}\in W$ и выполнены условия d1), d2). Если $\varkappa_2>0$, то*

a) множество $\ker F_d$ совпадает с функциями вида

$$y=\frac{\psi h}{1-\psi^2}\left(\psi g_{11}^{+}+\frac{p}{p^{\wedge}}g_{21}^{+}\right),$$

где h - произвольный многочлен, удовлетворяющий условиям

$$\deg h<\varkappa_2\quad\text{и}\quad g_{11}^{+\wedge}h^{\wedge}=g_{21}^{+}h;$$

b) множество $\ker\tilde{F}_d$ совпадает с функциями вида

$$y=\frac{h}{1-\psi^2}\left(g_{11}^{+\wedge}+\frac{p^{\wedge}}{p}\psi g_{21}^{+\wedge}\right),$$

где h - произвольный многочлен, удовлетворяющий условиям

$$\deg h<\varkappa_2\quad\text{и}\quad g_{11}^{+\wedge}h^{\wedge}=g_{21}^{+}h.$$

Если $\varkappa_2=0$, то подпространства $\ker F_d$, $\ker\widetilde{F}_d$ тривиальны.

Доказательство. Пользуясь равенством $G_{p,\psi} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$, представим оператор $\mathcal{M}_d$ в виде произведения $\mathcal{M}_d = \Xi_d \mathcal{M}_0$, где $\mathcal{M}_0 = \Xi_{G_{p,\psi}} P_+ + P_-$. Очевидно, что $\ker \mathcal{M}_d = \ker \mathcal{M}_0$. Пусть $\varkappa_2 > 0$ и h произвольный многочлен с $\deg h < \varkappa_2$, а вектор-функция ℓ определена равенством $\ell = (h, 0)^t$. Множество $\ker \mathcal{M}_0$ (см. [11]) совпадает с множеством вектор-функций вида

$$(I - P_- \Xi_{G_{p,\psi}})(G_{p,\psi})_+ \ell = ((G_{p,\psi})_+ - (G_{p,\psi})_- \Lambda_{p,\psi})\ell = (E_2 - G_{p,\psi})(G_{p,\psi})_+ \ell,$$

где E_2 – единичная квадратная матрица второго порядка. Это множество совпадает со множеством вектор-функций вида $\varphi = (y, u)^t$, где

$$y = \left(\psi g_{11}^+ + \frac{p}{p^\wedge} g_{21}^+\right) \frac{\psi h}{1 - \psi^2}, \quad u = \left(\frac{p^\wedge}{p} g_{11}^+ + \psi g_{21}^+\right) \frac{\psi h}{1 - \psi^2}. \tag{3.4}$$

Из тождества (3.1) следует, что y принадлежит $\ker F$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $\varphi = (y, y^\wedge)^t$ принадлежит $\ker \mathcal{M}$. Из (3.4) следует, что условие $u = y^\wedge$ эквивалентно равенству

$$\Phi^\wedge = \frac{p}{p^\wedge} \psi \Phi, \tag{3.5}$$

где $\Phi = g_{11}^{+\wedge} h^\wedge - g_{21}^+ h$. Замечая, что одновременно справедливо равенство $\Phi = \dfrac{p^\wedge}{p} \psi \Phi^\wedge$, нетрудно убедиться, что равенство (3.5) в свою очередь эквивалентно тождеству $\Phi = 0$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) доказывается с помощью аналогичных рассуждений. Случай $\varkappa_2 = 0$ очевиден. □

Предложение 3.1 вместе с теоремами 2.1-2.6 позволяет дать следующее описание ядер операторов F_d, $\tilde{F}_d$. Ниже $[x]$ – целая часть числа $x \in R$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия d1) - d4). Тогда*

a) если $\chi < 0$, то система функций

$$y_k = \frac{\psi p v_+ \tau_{2k}}{1 - \psi}, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker F_d$*, а система функций*

$$u_k = \frac{p^\wedge v_+ \tau_{2k}}{1 - \psi}, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi - \nu - 1}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker \tilde{F}_d$*;*

b) если $\chi > \nu + 1$, то система функций

$$y_k = \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{p \tau_{2k-1}}{v_+}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{\chi - \nu}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker F_d$*, а система функций*

$$u_k = \frac{p^\wedge \tau_{2k-1}}{(1 + \psi) v_+}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{\chi - \nu}{2}\right]$$

является базисом пространства $\ker \tilde{F}_d$*;*

c) если $\chi = \nu + 1$*, то пространства* $\ker F_d$ *и* $\ker \widetilde{F}_d$ *тривиальны.*

Доказательство. Из теорем 2.1, 2.3, 2.5 следует, что при $\chi < 0$ условия $g_{11}^{+\wedge}h^{\wedge} = g_{21}^{+}h$ и $g_{11}^{+}h^{\wedge} = g_{21}^{+\wedge}h$ эквивалентны тому, что h – четный многочлен. Аналогично, из теорем 2.2, 2.4, 2.6 следует, что при $\chi > 0$ условия $g_{11}^{+\wedge}h^{\wedge} = g_{21}^{+}h$ и $g_{11}^{+}h^{\wedge} = g_{21}^{+\wedge}h$ эквивалентны тому, что h – нечетный многочлен. Пользуясь тем, что $\varkappa_2 = |\chi| - \nu$, из теорем 2.1, 2.3, 2.5 и предложения 3.1 получим доказательство утверждения a) и соответственно из теорем 2.2, 2.4, 2.6 и предложения 3.1 получим доказательство утверждений b) и c). Теорема доказана. □

3.3. Как известно (см. [1]) сопряженным оператором к сингулярному интегральному оператору S действующему в L_p $(1 < p < \infty)$ является вновь оператор S действующий в L_q $(q = p/(p-1))$. Учитывая также что U^* совпадает с U, а Ξ_d^* с $\Xi_{\bar{d}}$ (но действующих уже в L_q), легко видеть, что $F_d^* = \tilde{F}_{\bar{d}}$, $\tilde{F}_d^* = F_{\bar{d}}$, где операторы $\tilde{F}_{\bar{d}}$, $F_{\bar{d}}$ действуют уже в пространстве L_q. Но для $z \in \mathbb{T}$ имеет место

$$\overline{d(z)} = \frac{\overline{p(z)}}{\overline{p^{\wedge}(z)}}\overline{\psi(z)} = \frac{p_*^{\wedge}(z)}{p_*(z)}\psi_*(z),$$

где многочлен p_* и функция ψ_* определены в п. 2.4. Обозначив $d_* = \dfrac{p_*^{\wedge}}{p_*}\psi_*$, мы можем записать $F_d^* = \tilde{F}_{d_*}$, $\tilde{F}_d^* = F_{d_*}$. Рассмотрим уравнения $F_d y = f$, $\tilde{F}_d y = f$. Первое из этих уравнений разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогональна $\ker \tilde{F}_{d_*}$. Соответственно второе уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогональна $\ker F_{d_*}$.

Пользуясь связью между $\chi_*, p_*, p_*^{\wedge}, \psi_*, v_{*+}$ и $\chi, p, p^{\wedge}, \psi, v_-$ (см. п. 2.4) на основе теоремы 3.1 нетрудно убедится в справедливости следующего результата.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия d1) - d4). Тогда*

a) если $\chi < 0$ *и* ν *– нечетное число, то для разрешимости уравнения* $F_d = f$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi-\nu-1}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{-\chi-\nu-1}{2}\right];$$

b) если $\chi > 0$ и ν – четное число, то для разрешимости уравнения $F_d = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\chi-\nu-1}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu}}\,dz = 0, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\chi-\nu-1}{2}\right];$$

c) если $\chi < 0$ и ν – четное число, то для разрешимости уравнения $F_d = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{-\chi-\nu}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)v_-(z)}{(1+\psi(z))z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{-\chi-\nu}{2}\right];$$

d) если $\chi > 0$ и ν – нечетное число, то для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)p(-z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi-\nu}{2}\right],$$

а для разрешимости уравнения $\tilde{F}_d y = f$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)\psi(z)p(z)}{(1-\psi(z))v_-(z)z^{2k+\nu-1}}\,dz = 0, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{\chi-\nu}{2}\right];$$

e) если $\chi = \nu + 1$, то уравнения $F_d y = f$ и $\widetilde{F}_d y = f$ разрешимы для любого $f \in L_p$.

Следствие 3.1. *При выполнении условий d1) - d4) операторы F_d и $\widetilde{F}_d$ обратимы (односторонне обратимы) тогда и только тогда, когда $\chi = \nu + 1$.*

Заметим, что при замене условия d4) на $\nu = |\chi|$, операторы F_d, $F_{\tilde{d}}$ становятся обратимыми. Этот случай подробно исследован в работе [19].

Abstract. The paper is devoted to investigation of the solvability of some characteristic singular integral equations on the circle with the Carleman shift $\omega(t) = -t$. Under some additional requirements on the coefficients, an explicit description of the kernels and the cokernels of the corresponding operators is given. The investigation method is based on the reduction of the solvability problem to the found explicit factorization of some matrix function.

Список литературы

[1] I. Gohberg, N. Krupnik, One-demensional Linear Singular Integral Operators, Operator Theory, Advances and Applications, **53**, Birkhauser Verlag (1992).

[2] Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом. Наука, Москва (1997).

[3] Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук, "Теория Нетера сингулярных интегральных операторов со сдвигом", Изв. вузов. матем., no 4, 3 – 27 (1983).

[4] Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, Уравнение с Инволютивными Операторами и их Приложения, Издательство Ростовского университета (1988).

[5] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, Introduction to the Theory of Singular Integral Operations with Shift, vol. 289 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers (1994).

[6] Г. В. Дрекова, В. Г. Кравченко, "Размерность и структура ядра и коядра сингулярного интегрального оператора с дробно-линейным сдвигом Карлемана и сопряжением", ДАН СССР **315**, no. 2, 271 – 274 (1990).

[7] В. Г. Кравченко, А. К. Шаев, "Теория разрешимости сингулярных интегральных уравнений с дробно-линейным сдвигом Карлемана", ДАН СССР, **316**, no. 2, 288 – 292 (1991).

[8] V. Kravchenko, A. Lebre, J. Rodrigues, "Factorization of Singular Integral Operators with a Carleman Shift via Factorization of Matrix Functions", Operator Theory: Advances and Applications, **142**, 189 – 211, Birkhäuser Verlag, Basel (2003).

[9] А. Г. Камалян, А. В. Саргсян, "О частных индексах одного класса матриц-функций второго порядка", Изв. НАН Армении, Математика, **42**, no. 3, 39 – 48 (2007).

[10] A. V. Sargsyan, "On factorization of a class of second order matrix-functions, Proceedings of the YSU Phys. and Mathem. Sciences", no. 1, 9 – 15 (2010).

[11] K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Birkhauser Verlag, Basel (1981).

[12] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Akademie-Verlag, Berlin (1987).

[13] А. Г. Камалян, "Некоторые свойства ядер теплицевых операторов", Докл. НАН Армении, **107**, no. 4, 316 – 322 (2007).

[14] А. Г. Камалян, "Индексная факторизация матриц-функций", Докл. НАН Армении, **108**, no. 1, 5 – 11 (2008).

[15] Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, Москва (1988).

[16] А. Г. Камалян, "Явная обобщенная факторизация ограниченных матриц-функций", Изв. НАН Армении, **32**, no. 21, 19 – 32 (1997).

[17] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **8**, no. 1, 3 – 12 (1973).

[18] З. Прёсдорф, "Линейные интегральные уравнения", Итоги науки и техн. ВИНИТИ Совр. проблемы мат., **27**, 5 – 130 (1988).

[19] A. V. Sargsyan, "Invertibility of some singular integral operators with shift", Proceeding of the YSU Phys. and Mathem. Sciences (в печати).

Поступила 29 декабря 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 47 – 64.

WEIGHTED BOUNDEDNESS FOR MULTILINEAR LITTLEWOOD-PALEY AND MARCINKIEWICZ OPERATORS ON MORREY SPACES

LIU LANZHE

Changsha University of Science and Technology, Changsha, China
E-mail: *lanzheliu@163.com*

Abstract. Some sharp estimates for multilinear operators are used to prove weighted boundedness for the multilinear Littlewood-Paley and Marcinkiewicz operators on the Morrey spaces.

MSC2000 number: 42B20, 42B25.

Keywords: Multilinear operator, Littlewood-Paley operator, Marcinkiewicz operator, Morrey space, BMO, A_1-weight.

1. Introduction and Results

Throughout this paper φ denote a positive, increasing function on $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ such that

$$\varphi(2t) \le D\varphi(t), \quad t \ge 0$$

for a constant $D > 0$.

Let w be a non-negative weight function on and f a locally integrable function in the space $\mathbb{R}^n$. For $1 \le p < \infty$ we define

$$||f||_{L^{p,\varphi}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ d>0} \left(\frac{1}{\varphi(d)} \int_{B(x,d)} |f(y)|^p w(y)dy \right)^{1/p}$$

where $B(x, d) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < d\}$. The generalized weighted Morrey spaces are defined by

$$L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : ||f||_{L^{p,\varphi}(w)} < \infty\}.$$

If $\varphi(d) = d^\delta$ for some $\delta > 0$, then $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n, w)$ which is the classical Morrey space (see [15], [16]).

This paper studies some integral operators which are defined as follows.

[0]Supported by the Scientific Research Fund of Human Provincial Education Department (Grant: 09C057) and the Excellent Youth Foundation of Educational Committee of Hunan Provincial (Grant: 10B002)

Introducing the region $\Gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : |x-y| < t\}$ and its characteristic function $\chi_{\Gamma(x)}$, we suppose that m_j $(j = 1, \ldots, l)$ are naturals, $m_1 + \ldots + m_l = m$ and A_j $(j = 1, \ldots, l)$ are given functions in $\mathbb{R}^n$. Let

$$R_{m_j+1}(A_j; x, y) = A_j(x) - \sum_{|\alpha| \le m_j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha A_j(y)(x-y)^\alpha.$$

Definition 1.1. *Let $\lambda > (3n+2)/n$, $\varepsilon > 0$ and let ψ be a fixed function with the following properties:*
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0$,
(ii) $|\psi(x)| \le C(1+|x|)^{-(n+1)}$,
(iii) $|\psi(x+y) - \psi(x)| \le C|y|^\varepsilon (1+|x|)^{-(n+1+\varepsilon)}$ *when* $2|y| < |x|$;

The multilinear Littlewood-Paley operator is defined by

$$g_\lambda^A(f)(x) = \left[\int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} |F_t^A(f)(x,y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2},$$

where

$$F_t^A(f)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(A_j; x, z)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f(z)\, dz$$

and $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ for $t > 0$. Set $F_t(f)(y) = f * \psi_t(y)$. We also define the Littlewood-Paley operator (see [21])

$$g_\lambda(f)(x) = \left(\int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}.$$

If H is the Hilbert space

$$H = \left\{ h : ||h|| = (\int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |h(y,t)|^2 dydt/t^{n+1})^{1/2} < \infty \right\},$$

then for each fixed $x \in \mathbb{R}^n$, the function $F_t^A(f)(x,y)$ can be considered as a mapping from $(0, +\infty)$ to H, and it is clear that

$$g_\lambda^A(f)(x) = \left\| \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda/2} F_t^A(f)(x,y) \right\|$$

and

$$g_\lambda(f)(x) = \left\| \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda/2} F_t(f)(y) \right\|.$$

Definition 1.2. *Let $\lambda > \max(1, 2n/(n+2))$ and $0 < \gamma \le 1$ be fixed numbers and Ω be homogeneous of degree zero in $\mathbb{R}^n$ with*

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0.$$

Assume that $\Omega \in Lip_\gamma(S^{n-1})$ *and there exists a constant* $M > 0$ *such that*

$$|\Omega(x) - \Omega(y)| \le M|x-y|^\gamma, \qquad x, y \in S^{n-1}.$$

We introduce the multilinear Marcinkiewicz operator

$$\mu_\lambda^A(f)(x) = \left[\int\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda} |F_t^A(f)(x,y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}}\right]^{1/2},$$

where

$$F_t^A(f)(x,y) = \int_{|y-z|\le t} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(A_j; x, z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z)dz.$$

Setting

$$F_t(f)(y) = \int_{|y-z|\le t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z)dz,$$

define the Marcinkiewicz integral operator (see [22])

$$\mu_\lambda(f)(x) = \left(\int\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}}\right)^{1/2}$$

For each fixed $x \in R^n$, $F_t^A(f)(x,y)$ can be considered as a mapping from $(0, +\infty)$ to H_{n+3}, and it is clear that

$$\mu_\lambda^A(f)(x) = \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^A(f)(x,y)\right\|$$

and

$$\mu_\lambda(f)(x) = \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t(f)(y)\right\|.$$

Note that for $m = 0$ operators g_λ^A and μ_λ^A are just multilinear commutators(see [13],[19],[22]), while for $m > 0$, they are nontrivial generalizations of the commutators. It is well known that multilinear operators are of great interest in harmonic analysis and have been widely studied by many authors (see [3-6]). In [8], the L^p- boundedness $(p > 1)$ of multilinear singular integral operators is obtained. In [12], variant sharp estimates for multilinear singular integral operators is obtained. The papers [17-19] prove some sharp estimates for the multilinear commutator. Note that the Morrey spaces can be considered as an extension of the Lebesgue space, and hence it is natural and important to study the boundedness of multilinear integral operators on the Morrey spaces.

The present paper has two purposes. The first is to establish some sharp inequalities for the multilinear Littlewood-Paley and Marcinkiewicz operators, and the second is to use these inequalities for proving the weighted boundedness of multilinear operators on the Morrey spaces.

For stating the main results of the paper we need some notation. Throughout the paper, Q denotes a cube in $\mathbb{R}^n$ with sides parallel to the coordinate axes. For any locally integrable function f the sharp function is specified as

$$f^{\#}(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

where $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x)dx$. It is well-known that (see [11], [20])

$$f^{\#}(x) \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{c \in C} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c| dy.$$

We say that f belongs to $BMO(\mathbb{R}^n)$ if $f^{\#}$ belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $||f||_{BMO} = ||f^{\#}||_{L^\infty}$. Assuming that M is the Hardy-Littlewood maximal operator

$$M(f)(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{-1} \int_Q |f(y)| dy,$$

we briefly denote $M_p(f) = (M(f^p))^{1/p}$ for $0 < p < \infty$. We denote the class of Muckenhoupt weights by A_1, that is (see [11]):

$$A_1 = \{0 < w \in L^1_{loc}(R^n) : M(w)(x) \leq Cw(x), a.e.\}.$$

Now we state our main result.

Theorem 1.1. *Let $1 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$, $w \in A_1$ and $D^\alpha A_j \in BMO(\mathbb{R}^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ and $j = 1, \cdots, l$. Then*

(1) $||g_\lambda^A(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{|\alpha_j| = m_j} ||D^{\alpha_j} A_j||_{BMO} \right) ||f||_{L^{p,\varphi}(w)}$;

(2) $||\mu_\lambda^A(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{|\alpha_j| = m_j} ||D^{\alpha_j} A_j||_{BMO} \right) ||f||_{L^{p,\varphi}(w)}$.

2. Proof of Theorem 1.1

To prove the Theorem 1.1 we need several lemmas.

Lemma 2.1. *([5]) Let A be a function in R^n and $D^\alpha A \in L^q(R^n)$ for any α with $|\alpha| = m$ and some $q > n$. Then*

$$|R_m(A; x, y)| \leq C|x - y|^m \sum_{|\alpha| = m} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}(x, y)|} \int_{\tilde{Q}(x,y)} |D^\alpha A(z)|^q dz \right)^{1/q},$$

where $\tilde{Q}$ is the cube centered at x, with sides of the length $5\sqrt{n}|x - y|$.

Lemma 2.2. *Let* $1 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$ *and* $w \in A_1$. *Then, for any* $f \in L^{p,\varphi}(R^n, w)$,
(a) $||M(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f^{\#}||_{L^{p,\varphi}(w)}$;
(b) $||M_q(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f||_{L^{p,\varphi}(w)}$ *for any* $1 < q < p$.

Proof. (a) Let $f \in L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$. Note that $M(w\chi_B) \in A_1$ for any ball $B = B(x,d) \subset \mathbb{R}^n$, then using the inequality (see [7])

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(y)|^p w(y)\, dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f^{\#}(y)|^p w(y)\, dy, \quad w \in A_1$$

we get

$$\begin{aligned}
&\int_B |M(f)(y)|^p w(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(y)|^p M(w\chi_B)(y)\, dy \leq \\
\leq\ & C \int_{\mathbb{R}^n} |f^{\#}(y)|^p M(w\chi_B)(y) dy \\
=\ & C \left[\int_B |f^{\#}(y)|^p M(w\chi_B)(y) dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} |f^{\#}(y)|^p M(w\chi_B)(y) dy \right] \\
\leq\ & C \left[\int_B |f^{\#}(y)|^p w(y) dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} |f^{\#}(y)|^p \frac{w(B)}{|2^{k+1}B|} dy \right] \\
\leq\ & C \left[\int_B |f^{\#}(y)|^p w(y) dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} |f^{\#}(y)|^p \frac{M(w)(y)}{2^{n(k+1)}} dy \right] \\
\leq\ & C \left[\int_B |f^{\#}(y)|^p w(y) dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B} |f^{\#}(y)|^p \frac{w(y)}{2^{nk}} dy \right] \\
\leq\ & C||f^{\#}||^p_{L^{p,\varphi}(w)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk} \varphi(2^{k+1}d) \\
\leq\ & C||f^{\#}||^p_{L^{p,\varphi}(w)} \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-n}D)^k \varphi(d) \leq C||f^{\#}||^p_{L^{p,\varphi}(w)} \varphi(d).
\end{aligned}$$

Thus,

$$||M(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f^{\#}||_{L^{p,\varphi}(w)}.$$

A similar argument leads to the proof of estimate (b), which we omit. □

Lemma 2.3. *For any* $1 < p < \infty$ *and* $w \in A_1$, *both operators* g_λ *and* μ_λ *are bounded in* $L^p(\mathbb{R}^n, w)$.

Proof. Using Minkowski inequality and the properties of ψ, we get

$$g_\lambda(f)(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} |\psi_t(y-z)|^2 \frac{dydt}{t^{1+n}} \right)^{1/2} dz$$

$$\le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} \frac{t^{-2n+2\delta}}{(1+|y-z|/t)^{2n+2-2\delta}} \frac{dydt}{t^{1+n}} \right)^{1/2} dz$$

$$\le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left[\int_0^\infty \left(t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} \frac{dy}{(t+|y-z|)^{2n+2}} \right) tdt \right]^{1/2} dz.$$

Note that

$$2t + |y-z| \ge 2t + |x-z| - |x-y| \ge t + |x-z| \quad \text{when} \quad |x-y| \le t$$

and

$$2^{k+1}t + |y-z| \ge 2^{k+1}t + |x-z| - |x-y| \ge |x-z| \quad \text{when} \quad |x-y| \le 2^{k+1}t.$$

Then recall that $\lambda > (3n+2)/n$ and observe

$$t^{-n} \int_{R^n} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} \frac{dy}{(t+|y-z|)^{2n+2}} =$$

$$= t^{-n} \left[\int_{|x-y|\le t} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} \frac{dy}{(t+|y-z|)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k t<|x-y|\le 2^{k+1}t} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda} \frac{dy}{(t+|y-z|)^{2n+2}} \right]$$

$$\le t^{-n} \left[\int_{|x-y|\le t} \frac{2^{2n+2}dy}{(2t+2|y-z|)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^\infty \int_{|x-y|\le 2^{k+1}t} 2^{-kn\lambda} \frac{2^{(k+2)(2n+2)}dy}{(2^{k+2}t + 2^{k+2}|y-z|)^{2n+2}} \right]$$

$$\le Ct^{-n} \left[\int_{|x-y|\le t} \frac{dy}{(2t+|y-z|)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^\infty \int_{|x-y|\le 2^{k+1}t} 2^{-kn\lambda} \frac{2^{k(2n+2)}dy}{(t+2^{k+1}t+|y-z|)^{2n+2}} \right]$$

$$\le Ct^{-n} \left[\int_{|x-y|\le t} \frac{dy}{(t+|x-z|)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^\infty \int_{|x-y|\le 2^{k+1}t} 2^{-kn\lambda} \frac{2^{k(2n+2)}dy}{(t+|x-z|)^{2n+2}} \right]$$

$$\le Ct^{-n} \left[\frac{t^n}{(t+|x-z|)^{2n+2}} + \sum_{k=0}^\infty 2^{k(3n+2-n\lambda)} \frac{t^n}{(t+|x-z|)^{2n+2}} \right]$$

$$\leq \frac{C}{(t+|x-z|)^{2n+2}},$$

because

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{(t+|x-z|)^{2n+2}} = C|x-z|^{-2n}.$$

Hence, we obtain

$$g_\lambda(f)(x) \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\left(\int_0^\infty \frac{tdt}{(t+|x-z|)^{2n+2}}\right)^{1/2} dz = C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz.$$

For estimating μ_λ note that

$$|x-z| \leq 2t \quad \text{and} \quad |y-z| \geq |x-z|-t \geq |x-z|-3t,$$

if $|x-y| \leq t$, $|y-z| \leq t$. In addition,

$$|x-z| \leq t(1+2^{k+1}) \leq 2^{k+2}t \quad \text{and} \quad |y-z| \geq |x-z|-2^{k+3}t,$$

if $|x-y| \leq 2^{k+1}t$ and $|y-z| \leq t$. Therefore, we obtain

$$\mu_\lambda(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda}\left(\frac{|\Omega(y-z)||f(z)|}{|y-z|^n}\right)^2 \chi_{\Gamma(z)}(y,t)\frac{dydt}{t^{n+3}}\right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\left[\int_0^\infty\int_{|x-y|\leq t}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda}\frac{\chi_{\Gamma(z)}(y,t)}{(|x-z|-3t)^{2n-2}}\frac{dydt}{t^{n+3}}\right]^{1/2} dz$$

$$+C\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\left[\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty\int_{2^kt<|x-y|\leq 2^{k+1}t}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda}\frac{\chi_{\Gamma(z)}(y,t)t^{-n-3}dydt}{(|x-z|-2^{k+3}t)^{2n-2}}\right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^{1/2}}\left[\int_{|x-z|/2}^\infty\frac{dt}{(|x-z|-3t)^{2n}}\right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$+C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^{1/2}}\left[\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{-2-k}|x-z|}^\infty 2^{-kn\lambda}(2^kt)^n t^{-n}\frac{2^kdt}{(|x-z|-2^{k+3}t)^{2n}}\right]^{1/2} dz$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz + C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz\left[\sum_{k=0}^\infty 2^{kn(1-\lambda)}\right]^{1/2} = C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz;$$

Now, the proof holds by the result of [1].

Lemma 2.4. **(Main Lemma)**: *Let $D^\alpha A_j \in BMO(\mathbb{R}^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ and $j = 1,\cdots,l$. Then there exists a constant $C > 0$ such that for any $1 < q < \infty$ and any function $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

(a) $(g_\lambda^A(f))^\#(x) \leq C\prod_{j=1}^l\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(x)$;

(b) $(\mu_\lambda^A(f))^\#(x) \leq C\prod_{j=1}^l\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(x)$,

at any $x \in \mathbb{R}^n$.

Proof. (a) It suffices to prove that for $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ with some constant $C_0 > 0$, the following inequality holds:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |g_\lambda^A(f)(x) - C_0|dx \leq C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} ||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right) M_q(f)(\tilde{x}).$$

Without loss of generality we can assume $l = 2$. Fix a cube $Q = Q(x_0, d)$ and a point $\tilde{x} \in Q$. Let $\tilde{Q} = 5\sqrt{n}Q$ and

$$\tilde{A}_j(x) = A_j(x) - \sum_{|\alpha|=m_j} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}} x^\alpha.$$

Observe that $R_{m_j}(A_j; x, y) = R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)$ and

$$D^\alpha \tilde{A}_j = D^\alpha A_j - (D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}}$$

for any α with $|\alpha| = m_j$. Denoting $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}}$ and $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\tilde{Q}}$, we get

$$\begin{aligned}
&F_t^A(f)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{A}_j; x, z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{A}_j; x, z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)dz \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_1(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, z)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)\psi_t(y-z)f_1(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, z)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\psi_t(y-z)f_1(z)dz \\
&+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_1(z)dz.
\end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
&\left|g_\lambda^A(f)(x) - g_\lambda^{\widetilde{A}}(f_2)(x_0)\right| \\
&= \left|\left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^A(f)(x,y)\right\| - \left\|\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\|\right| \\
&\le \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^A(f)(x,y) - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\| \\
&\le \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\widetilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f_1(z)dz\right\| \\
&+ \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \times\right. \\
&\times \left.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\widetilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m} D^{\alpha_1}\widetilde{A}_1(z)\psi_t(y-z) f_1(z)dz\right\| \\
&+ \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \times\right. \\
&\times \left.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\widetilde{A}_1;x,z)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m} D^{\alpha_2}\widetilde{A}_2(z)\psi_t(y-z) f_1(z)dz\right\| \\
&+ \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \times\right. \\
&\times \left.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1}\widetilde{A}_1(z) D^{\alpha_2}\widetilde{A}_2(z)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f_1(z)dz\right\| \\
&+ \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(x,y) - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\| \\
&:= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x) + I_5(x),
\end{aligned}$$

Thus, we obtain

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g_\lambda^A(f)(x) - g_\lambda^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)\right| dx \le \frac{1}{|Q|}\int_Q I_1(x)dx + \frac{C}{|Q|}\int_Q I_2(x)dx +$$

$$+\frac{C}{|Q|}\int_Q I_3(x)dx + \frac{C}{|Q|}\int_Q I_4(x)dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q I_5(x)dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

We estimate I_1, I_2, I_3, I_4 and I_5 separately. By Lemma 2.1 we have the inequality

$$R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,y) \le C|x-y|^{m_j} \sum_{|\alpha_j|=m_j} ||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}, \quad x \in Q \quad and \quad y \in \tilde{Q}.$$

Hence, by the L^q-boundedness of g_λ for any $1<q<\infty$ we get

$$\begin{aligned} I_1 &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)\frac{1}{|Q|}\int_Q |g_\lambda(f_1)(x)|dx \\ &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |g_\lambda(f_1)(x)|^q dx\right)^{1/q} \\ &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)|Q|^{-1/q}\left(\int_Q |f_1(x)|^q dx\right)^{1/q} \\ &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x}); \end{aligned}$$

For I_2, denoting $q=pr$ for any $1<p,r<\infty$, and assuming that $1/r+1/r'=1$, by Hölder's inequality we get

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{|Q|}\int_Q |g_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 f_1)(x)|dx \\ &\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|g_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}|Q|^{-1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(x)f_1(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}}|D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(x)|^{pr'}dx\right)^{\frac{1}{pr'}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)|^{pr}dx\right)^{\frac{1}{pr}} \\ &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x}). \end{aligned}$$

For I_3, similar to I_2, we get

$$I_3 \le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x});$$

For I_4, denoting $q=pr_3$ for any $1<p<\infty$ and $r_1,r_2,r_3>1$ such that $1/r_1+1/r_2+1/r_3=1$, we similarly obtain

$$\begin{aligned} I_4 &\le C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{|Q|}\int_Q |g_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 D^{\alpha_2}\tilde{A}_2 f_1)(x)|dx \\ &\le C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|g_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1 D^{\alpha_2}\tilde{A}_2 f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2} |Q|^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(x)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(x)f_1(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq C \sum_{\substack{|\alpha_1|=m_1,\\ |\alpha_2|=m_2}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(x)|^{pr_1}dx\right)^{\frac{1}{pr_1}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(x)|^{pr_2}dx\right)^{1/pr_2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^{pr_3}dx\right)^{1/pr_3} \leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha A_j||_{BMO}\right) M_q(f)(\tilde{x}).$$

For I_5, we write

$$\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x,y) - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\right]\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$+\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\int_{R^n}\left(\frac{1}{|x-z|^m}-\frac{1}{|x_0-z|^m}\right)\prod_{j=1}^{2}R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$+\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z)-R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)\Big)\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)}{|x_0-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$+\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)-R_{m_2}(\tilde{A}_2;x_0,z)\Big)\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)}{|x_0-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$-\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{\alpha_1!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x_0,z)(x_0-z)^{\alpha_1}}{|x_0-z|^m}\right]D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$-\sum_{|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)(x_0-z)^{\alpha_2}}{|x_0-z|^m}\right]D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\psi_t(y-z)f_2(z)dz$$

$$+\sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x_0-z|^m}\right]D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\psi_t(y-z)f_2(z)dz :=$$

$$= I_5^{(1)}+I_5^{(2)}+I_5^{(3)}+I_5^{(4)}+I_5^{(5)}+I_5^{(6)}+I_5^{(7)};$$

To evaluate these quantities, first recall (see [20]), that

$$|b_{Q_1}-b_{Q_2}|\le C\log(|Q_2|/|Q_1|)||b||_{BMO}\quad\text{for}\quad Q_1\subset Q_2,$$

and hence by Lemma 2.1

$$\begin{aligned}|R_m(\tilde{A};x,z)| &\le C|x-z|^m\sum_{|\alpha|=m}(||D^\alpha A||_{BMO}+|(D^\alpha A)_{\tilde{Q}(x,z)}-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}|)\\ &\le Ck|x-z|^m\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{BMO},\end{aligned}$$

for any $x\in Q$ and $z\in 2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}$. Note that $|x-z|\approx|x_0-z|$ for $x\in Q$ and $z\in R^n\setminus\tilde{Q}$. Then using the inequality $a^{1/2}-b^{1/2}\le(a-b)^{1/2}$ for $a\ge b>0$, as in the proof of Lemma 2.3, we obtain

$$||I_5^{(1)}||\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left[\frac{t^{n\lambda/2}|x-x_0|^{1/2}|\psi_t(y-z)||f_2(z)|}{(t+|x-y|)^{(n\lambda+1)/2}}\frac{\prod_{j=1}^2|R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)|}{|x-z|^m}\right]^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{1/2}dz$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-x_0|^{1/2}|f_2(z)|\prod_{j=1}^2|R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)|}{|x-z|^m}$$

$$\times\left(\int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda+1}\frac{t^{-n}dydt}{(t+|y-z|)^{2n+2}}\right)^{1/2}dz$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-x_0|^{1/2}|f_2(z)|\prod_{j=1}^2|R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)|}{|x-z|^m}\left(\int_0^\infty\frac{dt}{(t+|x-z|)^{2n+2}}\right)^{1/2}dz$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod_{j=1}^2R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)|f_2(z)||x-x_0|^{1/2}}{|x_0-z|^{m+n+1/2}}dz$$

$$\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}}k^2\frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x_0-z|^{n+1/2}}|f(z)|dz$$

$$\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^\infty k^2 2^{-k/2}\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|}\int_{2^k\tilde{Q}}|f(z)|dz$$

$$\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)M(f)(\tilde{x});$$

$$||I_5^{(2)}||\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-x_0|}{|x_0-z|^{m+n+1-\delta}}\prod_{j=1}^2|R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)||f_2(z)|dz$$

$$\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}}k^2\frac{|x-x_0|}{|x_0-z|^{n+1}}|f(z)|dz$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2 2^{-k}\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|}\int_{2^k\tilde{Q}}|f(z)|dz$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M(f)(\tilde{x}).$$

To evaluate $I_5^{(3)}$ and $I_5^{(4)}$, we use the formula (see [5])

$$R_m(\tilde{A};x,z)-R_m(\tilde{A};x_0,z)=\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{\beta!}R_{m-|\beta|}(D^{\beta}\tilde{A};x,x_0)(x-z)^{\beta}$$

and Lemma 2.1, we have

$$|R_m(\tilde{A};x,z)-R_m(\tilde{A};x_0,z)|\leq C\sum_{|\beta|<m}\sum_{|\alpha|=m}|x-x_0|^{m-|\beta|}|x-z|^{|\beta|}||D^{\alpha}A||_{BMO}.$$

Thus, similar to the proof of Lemma 2.3, we get

$$\begin{aligned}
||I_5^{(3)}|| &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}}k\frac{|x-x_0|}{|x_0-z|^{n+1}}|f(y)|dy\\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M(f)(\tilde{x});\\
||I_5^{(4)}|| &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M(f)(\tilde{x});
\end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
||I_5^{(5)}|| &\leq C\sum_{|\alpha_1|=m_1}\int_{R^n}\left|\left|\left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x_0,z)(x_0-z)^{\alpha_1}}{|x_0-z|^m}\right]\psi_t(y-z)\right|\right||D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)||f_2(z)|dz\\
&\leq C\sum_{|\alpha|=m_2}||D^{\alpha}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\sum_{k=1}^{\infty}k(2^{-k/2}+2^{-k})\\
&\quad\times\left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|}\int_{2^k\tilde{Q}}|D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(y)|^{q'}dy\right)^{1/q'}\left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|}\int_{2^k\tilde{Q}}|f(y)|^q dy\right)^{1/q}\\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x});\\
||I_5^{(6)}|| &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x});
\end{aligned}$$

To evaluate $I_5^{(7)}$, we take $r_1, r_2 > 1$ such that $1/q + 1/r_1 + 1/r_2 = 1$, then

$$
\begin{aligned}
&||I_5^{(7)}|| \le C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \left|\left| \left[\left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{n\lambda/2} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|} \right)^{n\lambda/2} \frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x_0-z|^m} \right] \psi_t(y-z) \right|\right| |D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)||D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)||f_2(z)|dz \\
\le\ & C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{-k/2}+2^{-k}) \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |f(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
&\times \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(y)|^{r_1} dy \right)^{1/r_1} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(y)|^{r_2} dy \right)^{1/r_2} \\
\le\ & C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha A_j||_{BMO} \right) M_q(f)(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

Thus

$$
||I_5|| \le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha A_j||_{BMO} \right) M_q(f)(\tilde{x}).
$$

(b) Let Q, $\tilde{Q}$, $\tilde{A}_j(x)$, f_1 and f_2 be the same as the proof of (a), we write

$$
\begin{aligned}
&F_t^A(f)(x,y) = \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)dz \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z)(x-z)^{\alpha_2} D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)dz \\
&+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_1(z)dz.
\end{aligned}
$$

Consequently,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\mu_\lambda^A(f)(x)-\mu_\lambda^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)\right|dx \\
\le\ & \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^A(f)(x,y)-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\| dx \\
\le\ & \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\int_{R^n}\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}f_1(z)dz\right\| dx \\
+\ & \frac{C}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\frac{n\lambda}{2}}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)}{|x-z|^m}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}f_1(z)dz\right\| dx \\
+\ & \frac{C}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\frac{n\lambda}{2}}\sum_{|\alpha_2|=m_2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z)(x-z)^{\alpha_2}D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)}{|x-z|^m}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}f_1(z)dz\right\| dx \\
+\ & \frac{C}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2}\sum_{\substack{|\alpha_1|=m_1,\\ |\alpha_2|=m_2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z)D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z)\Omega(y-z)}{|x-z|^m|y-z|^{n-1}}f_1(z)dz\right\| dx \\
+\ & \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x,y)-\left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y)\right\| dx \\
:=\ & J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.
\end{aligned}
$$

Similar to the proof of (a), we get

$$
\begin{aligned}
& J_1+J_2+J_3+J_4 \le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}A_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|\mu_\lambda(f_1)(x)|^q dx\right)^{1/q} \\
& +C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}A_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|\mu_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
& +C\sum_{|\alpha_1|=m_1}||D^{\alpha_1}A_1||_{BMO}\sum_{|\alpha_2|=m_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|\mu_\lambda(D^{\alpha_2}\tilde{A}_2f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
& +C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|\mu_\lambda(D^{\alpha_1}\tilde{A}_1D^{\alpha_2}\tilde{A}_2f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
\le\ & C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}A_j||_{BMO}\right)M_q(f)(\tilde{x});
\end{aligned}
$$

For J_5 we have

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x,y) - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0,y) \\
= &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2}\right) \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z)}{|x-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)dz \\
&+ \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \int_{R^n} \left(\frac{1}{|x-z|^m} - \frac{1}{|x_0-z|^m}\right) \prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j;x,z) \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)dz \\
&+ \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z) - R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)\Big) \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)}{|x_0-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)dz \\
&+ \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \int_{R^n} \Big(R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z) - R_{m_2}(\tilde{A}_2;x_0,z)\Big) \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)}{|x_0-z|^m} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f_2(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x,z)(x-z)^{\alpha_1}}{|x-z|^m}\right. \\
&\left. - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2;x_0,z)(x_0-z)^{\alpha_1}}{|x_0-z|^m}\right] \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) f_2(z)dz \\
&- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x,z)(x-z)^{\alpha_2}}{|x-z|^m}\right. \\
&\left. - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1;x_0,z)(x_0-z)^{\alpha_2}}{|x_0-z|^m}\right] \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) f_2(z)dz \\
&+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{(x-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-z|^m} - \right. \\
&\left. - \left(\frac{t}{t+|x_0-y|}\right)^{n\lambda/2} \frac{(x_0-z)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x_0-z|^m}\right] \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} D^{\alpha_1}\tilde{A}_1(z) D^{\alpha_2}\tilde{A}_2(z) f_2(z)dz.
\end{aligned}
$$

Therefore, similar to the proof of Lemma 2.3 we get

$$||J_5|| \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha A_j||_{BMO}\right) M_q(f)(\tilde{x}).$$

This completes the proof of the Main Lemma. □

Proof of Theorem 1.1. Taking $1 < q < p$ in Main Lemma and by Lemma 2.2 we obtain

$$\begin{aligned}||g_\lambda^A(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} &\leq C||M(g_\lambda^A(f))||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||(g_\lambda^A(f))^{\#}||_{L^{p,\varphi}(w)} \\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)||M_q(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha A_j||_{BMO}\right)||f||_{L^{p,\varphi}(w)}.\end{aligned}$$

A similar argument gives the proof of (2), which we omit. □

Список литературы

[1] S. Chanillo, "A note on commutators", Indiana Univ. Math. J., **31**, 7 – 16 (1982).

[2] F. Chiarenza and M. Frasca, "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function", Rend. Mat., **7**, 273 – 279 (1987).

[3] J. Cohen, "A sharp estimate for a multilinear singular integral on R^n", Indiana Univ. Math. J., **30**, 693 – 702 (1981).

[4] J. Cohen and J. Gosselin, "On multilinear singular integral operators on R^n", Studia Math., **72**, 199 – 223 (1982).

[5] J. Cohen and J. Gosselin, "A BMO estimate for multilinear singular integral operators", Illinois J. Math., **30**, 445 – 465 (1986).

[6] R. Coifman and Y. Meyer, Wavelets, Calderon-Zygmund and multilinear operators, Cambridge Studies in Advanced Math. 48, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[7] R. Coifman and R. Rochberg, "Another characterization of BMO", Proc. Amer. Math. Soc., **79**, 249 – 254 (1980).

[8] Y. Ding and S. Z. Lu, "Weighted boundedness for a class rough multilinear operators", Acta Math. Sinica, **17**, 517 – 526 (2001).

[9] G. Di Fazio and M. A. Ragusa, "Commutators and Morrey spaces", Boll. Un. Mat. Ital., **(7)5-A**, 323 – 332 (1991).

[10] G. Di Fazio and M. A. Ragusa, "Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients", J. Func. Anal., **112**, 241 – 256 (1993).

[11] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North-Holland Math. 116, Amsterdam (1985).

[12] G. Hu and D. C. Yang, "A variant sharp estimate for multilinear singular integral operators", Studia Math., **141**, 25 – 42 (2000).

[13] L. Z. Liu, "Weighted weak type estimates for commutators of Littlewood-Paley operator", Japanese J. of Math., **29** (1), 1 – 13 (2003).

[14] T. Mizuhara, "Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, in "Harmonic Analysis", Proceedings of a conference held in Sendai, Japan, 183 – 189 (1990).

[15] J. Peetre, "On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$-spaces invariant", Ann. Mat. Pura. Appl., **72**, 295 – 304 (1966).

[16] J. Peetre, "On the theory of $L^{p,\lambda}$-spaces", J. Func. Anal., **4**, 71 – 87 (1969).

[17] C. Pérez, "Endpoint estimate for commutators of singular integral operators", J. Func. Anal., **128**, 163 – 185 (1995).

[18] C. Pérez and G. Pradolini, "Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integral operators", Michigan Math. J., **49**, 23 – 37 (2001).

[19] C. Pérez and R. Trujillo-Gonzalez, "Sharp weighted estimates for multilinear commutators", J. London Math. Soc., **65**, 672 – 692 (2002).

[20] E. M. Stein, Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton NJ (1993).
[21] A. Torchinsky, Real Variable Methods in Harmonic Analysis, Pure and Applied Math. 123, Academic Press, New York (1986).
[22] A. Torchinsky and S.Wang, "A note on the Marcinkiewicz integral", Colloq. Math., **60/61**, 235 – 243 (1990).

Поступила 26 января 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 3, 2011, стр. 65 – 78.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ СВЕРХТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ В ПОЛУГРУППАХ

Ю. М. МОВСИСЯН, Т. А. АКОПЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *yurimovsisyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности. Доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечнобазируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества всех многообразий.

MSC2000 number: 20M07, 08A05, 08A40, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: Полугруппа, сверхтождество ассоциативности, существенная выполняемость, многообразие полугрупп.

1. Введение

Напомним, что сверхтождеством [1] называется формула второго порядка вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2) \tag{$*$}$$

где ω, ω – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \dots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре (Q, Σ), если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же арности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q.

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра этого многообразия удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V.

Сверхтождество $(*)$ называется нетривиальным, если $m > 1$, и тривиальным, если $m = 1$. Число m называется функциональным рангом сверхтождества $(*)$.

Бинарная алгебра (Q,Σ) называется q-алгеброй (e-алгеброй), если существует операция $A\in\Sigma$ такая, что $Q(A)$ – квазигруппа (группоид с единицей). Бинарную алгебру (Q,Σ) назовем нетривиальной, если $|\Sigma|>1$. Известно [1, 2] (см. также [3, 4]), что если нетривиальное сверхтождество ассоциативности выполняется в нетривиальной q-алгебре (e-алгебре), тогда оно может быть только функционального ранга 2 и одного из следующих видов:

$$X(x,Y(y,z))=Y(X(x,y),z), \tag{1.1}$$

$$X(x,Y(y,z))=X(Y(x,y),z), \tag{1.2}$$

$$Y(x,Y(y,z))=X(X(x,y),z), \tag{1.3}$$

причем в классе q-алгебр (e-алгебр) из сверхтождества (1.3) следует сверхтождество (1.2), а из (1.2) следует сверхтождество (1.1).

Пусть $Q(\cdot)$ – полугруппа. Следующая функция называется бинарным полиномом (многочленом, термом) полугруппы $Q(\cdot)$:

$$f(x,y)=z_1^{\varepsilon_1}z_2^{\varepsilon_2}\dots z_n^{\varepsilon_n},$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\in\mathbb{N}$, $z_1,z_2,\dots,z_n\in\{x,y\}$ и $z_i\neq z_{i+1}$.

Совокупность всех бинарных полиномов полугруппы $Q(\cdot)$ обозначим через Q^2_{pol}.

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ полиномиально выполняется сверхтождество $(*)$, если в бинарной алгебре $\left(Q,Q^2_{pol}\right)$ выполняется это сверхтождество. В работе [5] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых полиномиально выполняется тривиальное сверхтождество ассоциативности

$$X(x,X(y,z))=X(X(x,y),z)\,, \tag{$*,*$}$$

образует конечно-базируемое многообразие (причем указывается базис, содержащий около 1000 тождеств). В работе [6] (см. также [7]) указывается базис тождеств этого многообразия, содержащий 5 тождеств.

Через Q^2_{epol} обозначим множество всех бинарных полиномов $f(x,y)$ полугруппы $Q(\cdot)$, каждый из которых существенно зависит от обоих аргументов x, y (см. определения 2.1 и 2.2 ниже).

Будем говорить, что в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество $(*)$, если в алгебре $\left(Q,Q^2_{epol}\right)$ выполняется это сверхтождество. В работе [8] доказывается, что класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется тривиальное сверхтождество $(*,*)$, образует многообразие, определяемое четырьмя тождествами (см. также [9, 10]).

Однако характеризация полугрупп, в которых существенно выполняется одно из следующих нетривиальных сверхтождеств ассоциативности, оставалось открытой: (1.1)–(1.3),

$$Y(Y(x,y),z) = X(x,Y(y,z)), \tag{1.4}$$

$$Y(X(x,y),z) = Y(x,Y(y,z)), \tag{1.5}$$

$$X(Y(x,y),z) = Y(x,Y(y,z)), \tag{1.6}$$

$$Y(Y(x,y),z) = Y(x,X(y,z)), \tag{1.7}$$

$$X(Y(x,y),z) = Z(x,X(y,z)), \tag{1.8}$$

$$X(Y(x,y),z) = Z(x,Y(y,z)), \tag{1.9}$$

$$X(Y(x,y),z) = X(x,Z(y,z)), \tag{1.10}$$

$$X(Y(x,y),z) = Y(x,Z(y,z)), \tag{1.11}$$

$$X(Y(x,y),z) = Z(x,T(y,z)); \tag{1.12}$$

В настоящей работе доказывается, что в отличие от тривиального сверхтождества ассоциативности, класс всех полугрупп, в которых существенно выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности – конечное объединение конечно-базируемых многообразий полугрупп. Причем, явно выписываются базисные тождества этих многообразий. В результате, классифицируются нетривиальные сверхтождества ассоциативности с точностью до существенной выполнимости. Оказывается, что в смысле существенной выполнимости, в полугруппах каждое нетривиальное сверхтождество ассоциативности эквивалентно одному из сверхтождеств (1.1)–(1.5).

2. Сверхтождество (1.1) в полугруппах

Определение 2.1. *Будем говорить, что бинарный многочлен $F(x,y)$ в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно зависит от предметной переменной x, если существуют $x_1, x_2, y \in Q$ такие, что $F(x_1,y) \neq F(x_2,y)$.*

Точно так же определяется существенная зависимость бинарного многочлена $F(x,y)$ от предметной переменной y.

Определение 2.2. *Назовем бинарный многочлен $F(x,y)$ существенным, если он существенно зависит от обоих переменных x и y.*

Определение 2.3. *Два сверхтождества назовем эквивалентыми, если в любой полугруппе $Q(\cdot)$ эти сверхтождества либо одновременно существенно выполняются, либо ни одно из них существенно не выполняется. Будем говорить, что сверхтождество (h_2) вытекает из сверхождества (h_1) (и обозначим $(h_1) \to (h_2)$), если во всех полугруппах, где существенно выполняется сверхтождество (h_1), существенно выполняется также и сверхтождество (h_2).*

Докажем следующую вспомогательную лемму, которой воспользуемся при доказательстве основных результатов.

Рассмотрим следующее множество тождеств:

$$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Любой существенный многочлен $X(x,y)$ полугруппы $Q(\cdot)$ с тождествами* (2.1)*, равен одному из многочленов множества*

$$P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}.$$

Доказательство. Выражение x^0 будем считать пустым. Если многочлен $X(x,y) = AtBtC$, где $t \in \{x,y\}$ и A, B, C суть слова (могут быть и пустыми), то $X(x,y) = A(tBt)C = At^2BC$. Отсюда вытекает, что любой существенный многочлен может быть представлен в одном из следующих видов: $X(x,y) = x^m y^n$, где $n, m \in \mathbb{N}$ или $X(x,y) = yx$.

Пусть $X(x,y)$ – любой существенный многочлен полугруппы $Q(\cdot)$. Если $X(x,y) = yx$, то лемма доказана. Если $X(x,y) \neq yx$, то этот многочлен можно привести к виду: $X(x,y) = x^m y^n$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Если $m, n \leqslant 2$, то $X(x,y) \in P$. Предположим, что $n \geqslant 3$ (если $m \geqslant 3$, то этот случай доказывается аналогично). В третьем тождестве (2.1) принимая $z = y$, получим $x^3y^2 = x^2y^2$. Поскольку из первого тождества следует $x^2z = zx^2$, то $x^2y^3 = y^3x^2 = y^2x^2 = x^2y^2$. Если $m \geqslant 2$, то $X(x,y) = x^m y^n = x^{m-2}x^2y^3y^{n-3} = x^{m-2}x^2y^2y^{n-3} = x^m y^{n-1}$.

А если $m = 1$, то $X(x,y) = xy^n = xy^3y^{n-3} = (xy^2y)y^{n-3} = (x^2yy)y^{n-3} = x^2y^{n-1}$, т.е. сводится к предыдущему случаю. Такими шагами степени переменных в многочлене $X(x,y)$ можно снизить до двух. Тогда многочлен $X(x,y)$ будет равным одному из многочленов множества P. $\square$

Теорема 2.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.1) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$\left\{\begin{array}{l} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz\,, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

$$\{\ xy = x^2\ , \tag{2.3}$$

$$\{\ xy = y^2\ , \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = x^3\,, \end{array}\right. \tag{2.5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = y^3\,. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда многочлен xy несущественный. В этом случае $xy = x^2$ или $xy = y^2$ и выполняется условие (2.3) или (2.4). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.1) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = yx$, будем иметь $yxz = yzx$, т.е. $xyz = xzy$. Принимая в (1.1) $X(x,y) = yx$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь $zxy = xzy$, т.е. $xzy = zxy$. Итак, $xyz = xzy = zxy$. Рассмотрим случай, когда многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$, или $x^2y = y^3$. Следовательно, имеет место (2.5) или (2.6).

Теперь предположим, что многочлены xy, yx, x^2y существенные. В этом случае $xy^2 = xyy = yxy = yyx = y^2x$ и поэтому многочлен xy^2 существенный.

Принимая в (1.1) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = xy^2$, будем иметь $xy^2z = xy^2z^2$. Следовательно

$$x^2yz = x^2zy = zx^2y = zx^2y^2 = zy^2x^2 = zy^2x = zxy^2 = xzy^2 = xy^2z.$$

Тем самым доказаны первое и второе тождества в (2.2).

Докажем третье тождество в (2.2). Принимая $z = x$ во втором тождестве (2.2), получим

$$x^2y^2 = xxy^2 = xy^2x = x^2yx = x^2xy = x^3y,$$

т.е. $x^3yz = x^2y^2z = zx^2y^2 = zx^2y = x^2yz$, которое и есть третье тождество.

Достаточность. А) Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место (2.2). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x,y)$ принадлежит множеству

$$P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}.$$

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

(1) При $X(x,y) = xy$ сверхтождество (1.1) принимает вид $X(Y(x,y),z) = Y(x,X(y,z))$ и сводится к равенству: $Y(x,y)z = Y(x,yz)$. Проверим справедливость полученного равенства при всех значениях $Y(x,y) \in P$.

1.1. $Y(x,y) = xy \to xyz = xyz$;

1.2. $Y(x,y) = yx \to yxz = yzx$;

1.3. $Y(x,y) = x^2y \to x^2yz = x^2yz$;

1.4. $Y(x,y) = xy^2 \to xy^2z = xy^2z^2$;

1.5. $Y(x,y) = x^2y^2 \to x^2y^2z = x^2y^2z^2$;

(2) При $X(x,y) = yx$ сверхтождество (1.1) принимает вид $zY(x,y) = Y(x,zy)$.

(3) При $X(x,y) = x^2y$ сверхтождество (1.1) принимает вид $(Y(x,y))^2z = Y(x,y^2z)$.

Справедливость сверхтождества (1.1) доказывается подстановкой в полученные тождества всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

(4) Пусть $X(x,y) = xy^2$. Необходимо доказать, что $Y(x,y)z^2 = Y(x,yz^2)$. Из (1) имеем $Y(x,y)z = Y(x,yz) \to Y(x,y)z^2 = Y(x,yz^2)$.

(5) Пусть $X(x,y) = x^2y^2$. Необходимо доказать, что $(Y(x,y))^2z^2 = Y(x,y^2z^2)$. Из (3) имеем $(Y(x,y))^2z = Y(x,y^2z) \to (Y(x,y))^2z^2 = Y(x,y^2z^2)$.

Б) Если выполнены условия (2.3) или (2.4), то не существует существенного многочлена.

В) Пусть имеет место условие (2.5). В этом случае, только многочлены xy и yx могут быть существенными, а по первому тождеству (2.5), сверхтождество (1.1) существенно выполняется в $Q(\cdot)$.

Г) Пусть имеет место условие (2.6). В этом случае, только многочлены xy и yx могут быть существенными, а по первому тождеству (2.6) сверхтождество (1.1) существенно выполняется в $Q(\cdot)$. □

3. Сверхтождество (1.2) в полугруппах

Теорема 3.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.2) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$\left\{ \begin{array}{l} xyz = zxy, \\ x^2yz = xy^2z, \\ x^3yz = x^2yz\,, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} xy = x^2 \end{cases}, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} xy = y^2 \end{cases}, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = x^3, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = y^3. \end{cases} \tag{3.5}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (3.2) или (3.3). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.2) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = yx$, будем иметь $yxz = xzy$ и $xyz = yzx = zxy$. Рассмотрим случай, когда многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, в полугруппе $Q(\cdot)$ удовлетворяется или (3.4) или (3.5). Предположим, что многочлены xy, yx, x^2y существенные. Принимая в (1.2) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = x^2y$, будем иметь $x^2yz = xy^2z$.

Тем самым доказаны первое и второе тождество в (3.1). Докажем третье тождество в (3.1). Принимая $z = y$ во втором тождестве (3.1), получим

$$x^2y^2 = xy^3 = xyy^2 = y^2xy = yy^2x = y^3x.$$

Так как $x^2y^2 = x^2yy = yx^2y = yyx^2 = y^2x^2$, получим $x^2y^2 = y^2x^2 = x^3y$. Принимая в (1.2) $X(x,y) = x^2y$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь: $xyxyz = x^2yz$, т.е. $x^2yz = (xyx)yz = x^2y^2z = x^3yz$, которое и есть третье тождество.

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (3.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x,y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$.

Обсудим эти случаи в отдельности.

(1) При $X(x,y) = xy$ сверхтождество (1.2) принимает вид $Y(x,y)z = xY(y,z)$. Справедливость сверхтождества (1.2) доказывается подстановкой в полученное тождество всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

(2) Пусть $X(x,y) = yx$. Необходимо доказать, что $zY(x,y) = Y(y,z)x$. По первому тождеству (3.1) $zX(x,y) = Y(x,y)z$ и $Y(y,z)x = xY(y,z)$, а по пункту 1: $Y(x,y)z = xY(y,z)$, т.е. $zY(x,y) = Y(y,z)x$, что и требовалось доказать.

(3) При $X(x,y) = x^2y$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x^2Y(y,z) = (Y(x,y))^2z$.

(4) При $X(x,y) = xy^2$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x(Y(y,z))^2 = Y(x,y)z^2$.

(5) При $X(x,y) = x^2y^2$ сверхтождество (1.2) принимает вид $x^2(Y(y,z))^2 = (Y(x,y))^2z^2$.

Справедливость сверхтождества (1.2) доказывается подстановкой в полученные тождества всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

В остальных случаях, т.е. в условиях (3.2)–(3.5), справедливость сверхтождества (1.2) доказывается точно также, как доказывается справедливость (1.1) в пунктах Б) -Г) теоремы 2.1. □

4. Сверхтождество (1.3) в полугруппах

Теорема 4.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.3) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$\left\{ \begin{array}{l} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz\,, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

$$\left\{ \quad xy = x^2 \quad , \right. \tag{4.2}$$

$$\left\{ \quad xy = y^2 \quad , \right. \tag{4.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xyz = zyx, \\ x^2y = x^3\,, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xyz = zyx, \\ x^2y = y^3\,. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (4.2) или (4.3). Пусть многочлен xy существенный. Тогда и многочлен yx будет существенным. Принимая в (1.3) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = yx$, будем иметь $xyz = zyx$.

Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, удовлетворяется или (4.4) или (4.5).

Предположим, что многочлены xy,yx, x^2y существенные. В этом случае $xy^2 = xyy = yyx = y^2x$ и поэтому многочлен xy^2 существенный. Принимая в (1.3) $X(x,y) = xy^2$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь $xy^2z^2 = xyz$. Следовательно,

$$xyz = xy^2z^2 = x(yyz^2) = xz^2y^2 = xzy,$$

т.е. $xyz = zyx = zxy$. Тем самым доказано первое тождество в (4.1).

Для доказательтсва второго тождества в (4.1) заметим, что

$$x^3yz = xx^2yz = xx^2y^2z^2 = xy^2z^2x^2 = xy^2zx = x^2y^2z = xyz,$$

т.е.

$$x^2yz = xxyz = xx^3yz = x^4yz = x^3xyz = x^3x^3yz = x^6yz = x^4x^2yz =$$

$$= (x^2)^2x^2(yz) = x^2x(yz) = x^3yz = xyz,$$

которое и есть второе тождество.

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (4.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен $X(x,y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но

$$x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yxx = yx^2 = x^2y \quad \text{и} \quad xy^2 = xyy = x^2yy = x^2y^2 = x^2y,$$

поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Кроме того

$$xyz = x^2yz = x(xyz) = xzxy = xz(xy) = xyxz = xzyx = x^2zy = xzy$$

и $zyx = xzy = xyz$. Обсудим все случаи в отдельности.

(1) При $X(x,y) = xy$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y,z)) = xyz$. Справедливость сверхтождества (1.3) доказывается подстановкой в полученное тождество всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

(2) При $X(x,y) = yx$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y,z)) = zyx = xyz$. Поэтому этот случай совпадает с предыдущим.

(3) При $X(x,y) = x^2y$ сверхтождество (1.3) принимает вид $Y(x, Y(y,z)) = x^2y^2z = xyz$. Поэтому этот случай совпадает с предыдущим случаем.

В остальных случаях, т.е. в условиях (4.2)–(4.5), справедливость сверхтождества (1.3) доказывается точно также, как доказывается справедливость (1.1) в пунктах Б) - Г) теоремы 2.1. $\square$

5. Сверхтождества (1.4) и (1.6) в полугруппах

Теорема 5.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.6) тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из* *следующих систем тождеств:*

(5.1) $$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz\,, \end{cases}$$

(5.2) $$\{\ xy = x^2\ ,$$

(5.3) $$\{\ xy = y^2\ ,$$

(5.4) $$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = x^3\,, \end{cases}$$

(5.5) $$\begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2y = y^3\,. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то как и в предыдущих теоремах, выполняется условие (5.2) или (5.3). Если же многочлен xy существенный, тогда и многочлен yx будет существенным, поэтому принимая в (1.6) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = yx$, будем иметь $xyz = zxy$.
Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно удовлетворяется или (5.4) или (5.5). Предположим, что многочлены xy, yx, x^2y существенные. В этом случае

$$xy^2 = xyy = yxy = yyx = y^2x$$

и поэтому многочлен xy^2 существенный. Принимая в (1.6) $X(x,y) = xy^2$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь $xyz^2 = xyz$, т.е. $z^2xy = zxy$, что совпадает со вторым тождеством из (5.1).
Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (5.1). Согласно лемме 2.1, любой существенный многочлен этой полугруппы принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но $x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yx^2 = x^2y$ и $xy^2 = xyy = x^2yy = x^2y^2 = x^2y$, поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Обсудим все три случая в отдельности.

(1) При $Y(x,y) = xy$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(xy,z) = xyz$.
(2) При $Y(x,y) = yx$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(yx,z) = zyx$.
(3) При $Y(x,y) = x^2y$ сверхтождество (1.6) принимает вид $X(x^2y,z) = x^2y^2z$.

Справедливость сверхтождества (1.6) доказывается подстановкой в полученных тождествах всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

В остальных случаях, т.е. в условиях (5.2)–(5.5), справедливость сверхтождества (1.6) доказывается точно также, как доказывается справедливость сверхтождества (1.1) в пунктах Б)-Г) теоремы 2.1. $\square$

Предложение 5.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество* (1.4) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.6), *т.е. сверхтождества* (1.4) *и* (1.6) *эквивалентны.*

Доказательство. Сверхтождества (1.6) запишем в виде

$$X(Y(z,y),x) = Y(z,X(y,x)).$$

Заменяя здесь многочлен $X(x,y)$ на $X(y,x)$ (поскольку эти два многочлена существенны или не существенны одновременно) и многочлен $Y(x,y)$ – на $Y(y,x)$ получим:

$$X(x,Y(y,z)) = Y(Y(x,y),z),$$

что является сверхтождеством (1.4). $\square$

6. Сверхтождества (1.5) и (1.7) в полугруппах

Теорема 6.1. *В полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество* (1.5) *тогда и только тогда, когда эта полугруппа удовлетворяет одному из следующих систем тождеств:*

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} xyz = zxy, \\ x^2yz = xyz\,, \end{cases}$$

$$\text{(6.2)} \qquad \{\ xy = x^2\ ,$$

$$\text{(6.3)} \qquad \{\ xy = y^2\ ,$$

$$\text{(6.4)} \qquad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = x^3\,, \end{cases}$$

$$\text{(6.5)} \qquad \begin{cases} xyz = xzy = zxy, \\ x^2y = y^3\,. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Если многочлен xy несущественный, то выполняется условие (6.2) или (6.3). Если же многочлен xy существенный, тогда и многочлен yx будет существенным и принимая в (1.5) $X(x,y) = yx$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь $yxz = xyz$. Подставляя в (1.5) $X(x,y) = xy$ и $Y(x,y) = yx$, будем иметь $zxy = zyx$, т.е. $xyz = xzy = zxy$.

Пусть многочлен x^2y несущественный. Тогда, или $x^2y = x^3$ или $x^2y = y^3$. Следовательно, удовлетворяется или (6.4) или (6.5). Предположим, что многочлены xy, yx, x^2y существенные. Принимая в (1.5) $X(x,y) = x^2y$ и $Y(x,y) = xy$, будем иметь $x^2yz = xyz$, отсюда и вытекает второе тождество в (6.1).

Достаточность. Пусть в полугруппе $Q(\cdot)$ имеет место условие (6.1). Согласно лемме 2.2, любой существенный многочлен $X(x,y)$ принадлежит множеству $P = \{xy, yx, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$. Но $x^2y^2 = xxy^2 = y^2xx = yxx = yx^2 = x^2y$ и $xy^2 = xyy = x^2yy = x^2y^2 = x^2y$, поэтому $P = \{xy, yx, x^2y\}$. Еще имеем, что $xyz = x^2yz = x(xyz) = xzxy = xz(xy) = xyxz = xzyx = x^2zy$ и $zyx = xzy = xyz$. Сейчас обсудим эти случаи в отдельности.

(1) При $Y(x,y) = xy$ сверхтождество (1.5) принимает вид $X(x,y)z = xyz$.

(2) При $Y(x,y) = yx$ сверхтождество (1.5) принимает вид $zX(x,y) = xyz$. Справедливость сверхтождества (1.5) доказывается подстановкой в полученных тождествах всевозможных значений $Y(x,y) \in P$.

(3) При $Y(x,y) = x^2y$ сверхтождество (1.5) принимает вид $(X(x,y))^2z = xyz$. Согласно случаю 1, получим

$$X(x,y)^2 = (X(x,y)X(x,y))z = (xyX(x,y))z = (xyxy)z = x^2y^2z = xyz.$$

В остальных случаях, т.е. в условиях (6.2)–(6.5), справедливость сверхтождества (1.5) доказывается точно также, как доказывается справедливость сверхтождества (1.1) в пунктах Б)-Г) теоремы 2.1. □

Предложение 6.1. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.7) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.5), *т.е. сверхтождества* (1.7) *и* (1.5) *эквивалентны.* □

Доказательство. Сверхтождества (1.5) запишем в виде

$$Y(X(z,y),x) = Y(z,Y(y,x)).$$

Заменяя здесь многочлен $X(x,y)$ на $X(y,x)$, получим

$$Y(X(y,z),x) = Y(z,Y(y,x)).$$

Наконец, заменяя здесь многочлен $Y(x,y)$ на $Y(y,x)$, получим

$$Y(x,X(y,z)) = Y(Y(x,y),z),$$

что является сверхтождеством (1.7). □

7. Сверхтождества ассоциативности ранга 3, 4 в полугруппах

Теперь рассмотрим сверхтождества ассоциативности, ранга 3 или 4, т.е. рассмотрим сверхтождества (1.8)–(1.12) в полугруппах.

Предложение 7.1. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.8) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.5), *т.е. сверхтождества* (1.8) *и* (1.5) *эквивалентны.*

Доказательство. Необходимость. В сверхтождестве (1.8) полагая $Z(x,y) = X(x,y)$ получим сверхтождество (1.5):

$$X(Y(x,y),z) = X(x, X(y,z)).$$

Достаточность. Если в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество (1.5), тогда с помощью теорем 6.1 и 5.1, а также предложения 6.1 выводим, что в $Q(\cdot)$ существенно выполняются и сверхтождества (1.3) и (1.7). Поэтому в полугруппе $Q(\cdot)$ существенно выполняется сверхтождество:

$$X(Y(x,y),z) = X(x, X(y,z)) = Z(Z(x,y),z) = Z(x, X(y,z)),$$

что является сверхтождеством (1.8). □

Аналогично доказываются следующие предложения.

Предложение 7.2. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.9) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.6), *т.е. сверхтождества* (1.9) *и* (1.6) *эквивалентны.*

Предложение 7.3. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.10) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.5), *т.е. сверхтождества* (1.10) *и* (1.5) *эквивалентны.*

Предложение 7.4. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.11) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.7), *т.е. сверхтождества* (1.11) *и* (1.7) *эквивалентны.*

Предложение 7.5. *В полугруппе* $Q(\cdot)$ *существенно выполняется сверхтождество* (1.12) *тогда и только тогда, когда в этой полугруппе существенно выполняется сверхтождество* (1.7), *т.е. сверхтождества* (1.12) *и* (1.7) *эквивалентны.*

Следствие. Любое сверхтождество ассоциативности ранга 2, 3 или 4 эквивалентно одному из сверхтождеств (1.1) – (1.5). Причем выполнены следующие импликации:

(1.5) $\to$ (1.1) $\to$ (1.2),

(1.5) $\to$ (1.4) $\to$ (1.2),

(1.5) $\to$ (1.3).

Abstract. The paper gives a characterization of the class of semigroups in which the nontrivial associative hyperidentity is essentially satisfied. It is proved that, in difference to the case of trivial associative hyperidentity, the class of all semigroups, in which a nontrivial associative hyperidentity is essentially satisfied, is a finite union of finitely based varieties of semigroups, and the basis identities of all varieties are explicitly inscribed.

Список литературы

[1] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).

[2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).

[3] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи мат. Наук, **53**, (1(319)), 61 – 114 (1998).

[4] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and hypervarieties", Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, no. 3, 595 – 640 (2001).

[5] K. Deneck, J. Koppitz, "Hyperassociative varieties of semigroups", Semigroup Forum, **49**, 41 – 49 (1994).

[6] L. Polak, "On hyperassociativity", Algebra Universalis, **36**, 363 – 378 (1996).

[7] L. Polak, "All solid varieties of semigroups", Journal of Algebra, **219**, 421 – 436 (1999).

[8] G. Paseman, A small basis for Hyperassociativity, preprint, Berkeley (1993).

[9] K. Denecke and Sh. L. Wismath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).

[10] J. Koppitz and K. Denecke, M-Solid Varieties of Algebras, Springer (2006).

Поступила 25 августа 2010

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 3, 2011

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 3, 2011

Contents