

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

ОПТИМАЛЬНО РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПОЛОСЕ

С. Г. АЛЕКСАНИЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *asargis@instmath.sci.am*

Аннотация. Пусть функция f непрерывна в замкнутой полосе S_h и голоморфна в ее внутренности. Исследуется задача оптимально равномерного приближения f на S_h мероморфными функциями g . Рост функций g оценивается в терминах их неванлиневской характеристики $T(r, g)$. Этот рост зависит от роста функции f в данной полосе и от ее дифференциальных свойств на границе. При этом рассматривается возможное расположение полюсов g на комплексной плоскости.

MSC2000 number: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: Равномерные приближения, полоса, мероморфные функции.

1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача оптимально равномерного приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ мероморфными функциями исследовалась в работе [1] Н. Аракелян и Р. Аветисяном. Здесь рассматривается задача оптимально равномерного приближения в замкнутой полосе мероморфными функциями. Целью этой работы является конструирование мероморфных функций, аппроксимирующих заданную функцию f в полосе и при этом имеют возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в терминах их неванлиневской характеристики). Очевидно, что приближаемая функция f должна быть голоморфной во внутренности данной полосы. Здесь мы улучшаем и одновременно уточняем результаты, полученные в работе [2]. Аналогичная задача о равномерном приближении *целыми* функциями исследовалась в [3].

В этой работе мы вводим классы мероморфных функций, которые иллюстрируют возможность оптимально равномерного приближения данной функции мероморфными функциями в полосе. Такие классы рассмотрены также в работе [2], но полученные здесь результаты более точные, так как в некотором смысле они обратимые.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и вспомогательные сведения, а второй - основные результаты и их доказательства.

1.1. Обозначения и определения. *Замыкание, внутренность и границу* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим соответственно через $\overline{E}$, E° и ∂E .

Положим также

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}; \\ D_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \text{ для } a \in \mathbb{C}, r > 0 - \text{открытый круг, } D_r = D_r(0); \\ S_h &:= \mathbb{R} \times [-h, h] \text{ для } h > 0 - \text{полоса}; \\ \Delta_\alpha &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \alpha/2\} \text{ для } \alpha \in (0, 2\pi) - \text{угол}; \\ \Delta_\alpha(\beta) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta - \beta| \leq \alpha/2\} \text{ для } \alpha, \beta \in (0, 2\pi); \\ \Delta_\alpha(\beta, a) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta - a) \in \Delta_\alpha(\beta)\} \text{ для } a \in \mathbb{C} - \text{угол с вершиной } a; \\ \Omega_h^\alpha &:= \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^\circ \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^\circ) \cup S_{2h} \text{ для } h > 0; \\ \Omega_{h,r}^\alpha &:= \Omega_h^\alpha \cap \overline{D}_r \text{ для } h > 0, r > 0.\end{aligned}$$

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$ и E относительно замкнутое множество в Ω . Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ рассмотрим равномерную норму

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$$

и положим

$$\begin{aligned}M_f(r) &= M_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r}, \\ C_b(E) &:= \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.\end{aligned}$$

Пусть $C^p(\Omega)$ – класс p -раз непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций на Ω . Для жордановой области D с положительно ориентированной кусочно гладкой границей и C^1 -функции u в окрестности $\overline{D}$, следующая формула является комплексной версией известной теоремы о дивергенции:

$$(1.1) \quad \int_{\partial D} u(z) dz = i \int_D 2\bar{\partial}u d\sigma,$$

где σ – плоская мера Лебега на D и

$$(1.2) \quad 2\bar{\partial}u = \partial_1 u + \partial_2 u.$$

Как обычно, обозначим через $H(\Omega)$ класс голоморфных функций в Ω , так что условие $f \in H(\Omega)$ означает, что $f \in C^1(\Omega)$ и $\bar{\partial}f \equiv 0$ в Ω . Для относительно замкнутого множества $E \subset \Omega$ положим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^\circ) \quad \text{и} \quad A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ).$$

Пусть $A'(E)$ и $A''(E)$ классы функций $E \rightarrow \mathbb{C}$, которые соответственно один и два раза непрерывно дифференцируемы на E в смысле $\mathbb{C}$.

Мы будем использовать функцию Р. Неванлины $\log^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, определяемую формулой:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\log^+$ неотрицательная и неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$. Пусть $T(r, g)$ неванлиновская характеристика мероморфной функции g , $g(0) \neq \infty$:

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^r n(t, g) t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ число *полюсов* g в D_t (с учетом их кратностей).

1.2. Приближение на S_h функциями из $A(\Omega_h^\alpha)$. В этом пункте мы построим голоморфные функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, которые аппроксимируют функцию f в полосе S_h и имеют возможно медленный рост на Ω_h^α . Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1.1. Пусть $0 < 2h < \pi$ и $\alpha \in (0, \pi)$. Тогда существует функция $q(\zeta, z)$, такая что

$$(1.3) \quad q(\zeta, \zeta) \equiv 1 \quad \text{для } \zeta \in \Omega_h^\alpha$$

и $q(\zeta, z)$ удовлетворяет неравенству

$$(1.4) \quad |q(\zeta, z)| \leq k \left(|\ln(|\xi| + 1) - \ln(|z| + 1)|^2 + 1 \right)^{-1},$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ и $k = k(h, \alpha) > 0$.

Доказательство. Пусть

$$z = G(w) = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w})$$

конформное отображение полосы $S_{\pi/2}$ на

$$\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = 0 \text{ и } |\operatorname{Im} \zeta| \geq 1\}$$

Представляя $z = x + iy = G(u + iv)$ получим

$$x = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \cos v \quad \text{и} \quad y = (e^u + e^{-u}) \sin v.$$

Для $\alpha \in (0, \pi)$ существует постоянная $h = h(\beta) \in (0, \pi/2)$ ($\alpha = \pi - \beta$), такая что $G^{-1}(\Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi)) \subset S_h$. Искомую функцию можно определить формулой:

$$(1.5) \quad q(\zeta, z) = 25 \left((G^{-1}(\zeta) - G^{-1}(z))^2 + 25 \right)^{-1} \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha \text{ и } \zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h.$$

Из (1.5) следует $q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$. Очевидно, что $q(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_h^\alpha)$ для фиксированного $\zeta \in \Omega_h^\alpha$. Теперь мы должны оценить рост функции $q(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h^o$ и $z \in \Omega_h^\alpha$. Учитывая, что $G^{-1}(\zeta) \leq \ln(|\zeta| + 1) + 2$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} |q(\zeta, z)| &\leq \frac{25}{(\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta) - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2 + 3} \leq \\ (1.6) \quad &\leq c((\ln(|\zeta| + 1) - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2 + 1)^{-1}, \end{aligned}$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$.

Таким образом из (1.5)-(1.6) приходим к (1.3)-(1.4). $\square$

Следующая лемма улучшает и одновременно уточняет Лемму 1 работы [2].

Лемма 1.2. Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, такая что

$$(1.7) \quad \|f - F\|_{S_h} < \varepsilon,$$

$$(1.8) \quad M_f(r) < 3M_f(lr + h) + c\varepsilon \exp\{ca_{2r}\},$$

где

$$(1.9) \quad a_r(f) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \{|z| |f''_\partial(z)| + |z| |f'_\partial(z)|\}$$

для $l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$, f_∂ сужение f на ∂S_h и $c = c(h, \alpha) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от α и h .

Доказательство. Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можем свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Мы докажем лемму для случая $2h < \pi$; если $2h \geq \pi$, то выберем $n = n(h) > 0$ так, чтобы $2h/n < \pi$ и как легко видеть доказательство сведется к рассматриваемому случаю.

Продолжим f как в Лемме 5 из [3]: пусть $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in S_h$ и

$$(1.10) \quad f_*(\zeta) := if(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) + (1 - i)f(\xi + ih\sigma_\eta), \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h,$$

где σ_η функция знака, то есть $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\eta = \eta/|\eta|$ для $\eta \neq 0$. Из (1.10) следует, что $f_* \in C^1(\mathbb{C})$. Рост функции f_* на Ω_h^α согласно (1.10) удовлетворяет неравенству

$$(1.11) \quad M_{f_*}(r, \Omega_h^\alpha) \leq 3M_f(lr + h, S_h) \quad \text{для } r \geq 0.$$

Из (1.10) следует также $\bar{\partial}f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S_h$. При этом из (1.2) и (1.10) имеем

$$(1.12) \quad 2\bar{\partial}f_*(\zeta) = (1 - i)[f'(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) - f'(\xi + ih\sigma_\eta)]$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h$. Очевидно, что $f_* \in C''(\Omega_h^\alpha)$ и из (1.12) получим оценку

$$(1.13) \quad |\bar{\partial}f_*(\zeta)| \leq (|\eta| - h)M_{f'}(l|\xi| + h, \partial S_h) \quad \text{для } \zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h.$$

Следующее неравенство следует из (1.9) и (1.13):

$$(1.14) \quad |(\bar{\partial} f_*)(\zeta)| \leq c(|\eta| - h) a_{|\xi|} / |\xi| \quad \text{для } \zeta = \xi + i\eta \in \Omega_h^\alpha,$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$.

Теперь перейдем к построению искомым функций. Пусть $\zeta \rightarrow n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ - кусочно постоянная функция; фиксируем $n(|\zeta|)$ условием

$$(1.15) \quad 0 \leq a_{|\zeta|} - n(|\zeta|) < 1 \quad \text{для } \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha.$$

Для $(\zeta, z) \in (\Omega_h^\alpha)^2$ определим функцию $Q_\zeta(z) = Q(\zeta, z) \in H(\Omega_h^\alpha)$, такую что $Q_\zeta(\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha$:

$$(1.16) \quad Q(\zeta, z) := \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0} \right)^{n(|\zeta|)} \times q(\zeta, z),$$

где ζ_0 для ζ выберем так, что $\operatorname{Re} \zeta_0 = \operatorname{Re} \zeta$ для любого $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ и $2d(\zeta, \partial S_h) = d(\zeta_0, \partial S_h)$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$; в качестве $q(\zeta, z)$ возьмем функцию из Леммы 1.1, удовлетворяющую условиям (1.3) и (1.4).

Из формулы и теоремы Коши следует, что

$$(1.17) \quad \int_{\partial D} Q_\zeta(z) C_\zeta(z) dz = \begin{cases} -2\pi i, & \text{если } \zeta \in D \\ 0, & \text{если } \zeta \in \Omega_h^\alpha - \bar{D} \end{cases}$$

для любой жордановой области $D \subset \Omega_h^\alpha$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$ рассмотрим интегралы

$$(1.18) \quad I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_{h,r}^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \quad \text{для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha,$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = (\bar{\partial} f_*)(\zeta) Q_\zeta(z) C_\zeta(z)$.

Введем функции $F_r \in C(\Omega_{h,r}^\alpha)$ следующим образом

$$(1.19) \quad F_r(z) = (\varphi f_*)(z) + I_r(z) \quad \text{для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha.$$

Из (1.1), условия $\bar{\partial}\varphi = 0$ и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H\left(\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)^o\right)$.

Очевидно также, что $F_r \in A(\Omega_{h,r}^\alpha)$ для любого $r > 0$.

Докажем, что при $r \rightarrow \infty$ интеграл I_r локально-равномерно сходится на Ω_h^α к несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_h^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Тогда в силу (1.19), искомую функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ можно определить формулой

$$(1.20) \quad F(z) := (f_*)(z) + I_\infty(z) \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Из определения (1.20) следует, что

$$(1.21) \quad \|f - F\|_{S_h} = \|I_\infty\|_{S_h},$$

$$(1.22) \quad |F(z)| \leq |(f_*)(z)| + |I_\infty(z)| \quad \text{для } z \in \Omega_h^\alpha,$$

так что приближение функции f на S_h функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ и оценка роста F на Ω_h^α сводится в этой схеме к оценке I_∞ .

Перейдем к доказательству локально-равномерной сходимости интеграла I_r (при $r \rightarrow \infty$) на Ω_h^α . Из (1.16) для $z \in \Omega_h^\alpha$ и $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ имеем оценку

$$(1.23) \quad |G_\zeta(z)| \leq \frac{|\bar{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left[\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta} \right]^{n(|\xi|)} \times |q(\zeta, z)|,$$

где $\delta = \tan(\alpha/2) > 0$.

Пусть $K \subset \Omega_h^\alpha$ - компактное множество. Существует $r_0 > \max\{1, h\}$, такое что $K \subset \bar{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e|z - \zeta_0|$. Поскольку

$$(1.24) \quad \int_h^{h+|\xi|\delta} \left(\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta} \right)^{n(|\xi|)} d|\xi| < \frac{h + |\xi|\delta}{n(|\xi|) + 1},$$

то с учетом (1.4) и (1.13) получим

$$(1.25) \quad |I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \leq c_1 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} \frac{1}{u(\ln u - \operatorname{Re} G^{-1}(z))^2} du < \\ < c_1 \left(\frac{1}{\ln(r' - r_0)} - \frac{1}{\ln(r'' - r_0)} \right) \rightarrow 0$$

равномерно по $z \in K$, при $r'', r' \rightarrow \infty$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость интеграла I_r для $z \in \Omega_h^\alpha$ и что $I_\infty \in A(\Omega_h^\alpha)$. Здесь и в дальнейшем через c_j , $j = 1, 2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от α и h .

Для доказательства (1.7) мы должны оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in S_h$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.26) \quad I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_{B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{E \setminus B(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z),$$

где $B(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 2|z|\delta\}$.

Для $\zeta \in E \setminus B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \leq p|z - \zeta_0|$, где $p = p(\alpha, h) > 0$. Так, что из (1.23) - (1.26) получим

$$(1.27) \quad |J_2(z)| < \int_h^\infty \frac{1}{u \ln^2 u} du < c_2.$$

Пусть $z_0 \in \partial S_h$ такое, что $\text{dist}(z, z_0) = \text{dist}(z, \partial S_h) \geq 0$. Обозначим для $z \in S_h$ множество $C(z) = \{[z_0 - 1, z_0 + 1] \times \mathbb{R}\} \cap B(z)$. Из (1.23) - (1.24), учитывая также, что $|Q(\zeta, z)| \leq 1$, будем иметь

$$(1.28) \quad \int_{C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < c_4 \int_{|z_0|-1}^{|z_0|+1} du = 2c_4.$$

Так как $|\zeta - z| \leq |u - |z_0||$ для $\zeta \in B(z)/C(z)$, то получим

$$(1.29) \quad \int_{B(z)/C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < \int_{a|z|}^{b|z|} \frac{1}{|u - |z_0|| + 1} du < c_5,$$

где $a > 0$ и $b > 0$ постоянные зависящие лишь от α и h . Таким образом, суммируя (1.27) - (1.29), мы, по (1.26) и с учетом (1.11) и (1.20), приходим к оценке (1.7).

Пусть теперь $z \in \Omega_h^\alpha$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(1.30) \quad I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \int_{E \setminus D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z),$$

где $D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 3|z|\delta\}$. Второй интеграл оценивается как в (1.27).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_6 \sqrt{mesD(z)},$$

из (1.24) и неравенства $|\zeta| > \delta|z|$ получаем

$$(1.31) \quad J_3(z) < \exp\{c_7 n(3l|z| + h)\}.$$

Из (1.30) - (1.31), с учетом (1.11) и (1.20), мы приходим к требуемой оценке (1.8).

Лемма доказана. $\square$

Замечание 1.1. Если в Лемме 1.2 предположить, что $f \in A'(S_h)$, то в (1.9) величину $a_r(f)$ можно заменить на

$$a_r^*(f) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \{|z| |f'_\partial(z)| \ln(|z| |f'_\partial(z)|)\}.$$

2. ОПТИМАЛЬНО МЕРОМОРФНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПОЛОСЕ

Настоящий параграф посвящен вопросам о наилучших равномерных приближениях мероморфными функциями в полосе.

2.1. Мероморфное приближение в полосе. Процесс оптимально равномерного приближения в полосе мероморфными функциями реализуется двумя шагами: первый из них Лемма 1.2. Второй шаг это приближение функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями, доказанное в [2].

Теорема 2.1. Для $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$, существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси, такая что

$$(2.1) \quad |F(z) - G(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in S_h$$

и

$$(2.2) \quad T(r, \varepsilon^{-1}G) < c \int_h^{pr} \int_h^t \log^+ \frac{M_F(\tau)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^2(pr) \quad \text{для } r \geq 2h,$$

где $c = c(h, p, \alpha) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от h , α и p .

Следующая теорема является аналогом Теоремы 1 работы [1] для полосы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in A''(S_h)$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$. Тогда существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, такая что

$$(2.3) \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in S_h,$$

$$(2.4) \quad T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(pr),$$

для $r \geq 2h$, где $k = k(p, h) > 0$.

Доказательство. По Лемме 1.2 существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, удовлетворяющая условиям (1.7)-(1.9). Применив к F Теорему 1.1, с учетом (1.8) и оценки

$$\log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < c \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon} \right],$$

где $c = c(\alpha, h) > 0$, завершаем доказательство Теоремы 2.2. $\square$

2.2. Представление классов M^ρ . В работе [3] было показано, что если функция $f \in A_b''(S_h)$ и равномерно непрерывна на ∂S_h , то ее можно на S_h равномерно приблизить целыми функциями порядка 1 и нормального типа, и этот порядок нельзя уменьшить. С помощью теоремы 2.2 мы можем указать новые условия на граничные значения функции f , из которых следует, что f можно равномерно приблизить на S_h мероморфными функциями g порядка $\rho \in (0, 1)$.

Определение 2.1. Мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси принадлежит классу M^ρ для $\rho \in (0, 1)$, если g ограничена на S_h и

$$T(r, g) = O(r^\rho) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.3. Пусть $\nu(r) = r^\rho$ на $\mathbb{R}^+$ для $\rho \in (0, 1)$ и доопределим ν на $\mathbb{R}$ так, что $\nu(r) = -\nu(-r)$; положим $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$ для $z = x + iy \in S_h$, где $\mu_0 = \nu^{-1}$ на $\mathbb{R}$. Если $f \in A_b''(S_h)$ и функции $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h , то функцию f можно равномерно приблизить на S_h функциями из M^ρ .

Доказательство. По теореме 2.2 для любого $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, удовлетворяющая (2.3) и (2.4). Из условий теоремы следует, что $|(f \circ \mu)'| \leq M$ и $|(f \circ \mu)''| \leq M$ на ∂S_h .

Учитывая, что $\mu'(r) = 1/\nu'(r)$, получим $|zf'(z)| \leq M|z|^\rho$ для $z \in \partial S_h$. Из определения μ имеем, что $|f'(z)\mu''(z)| \leq M_0$; откуда следует, что $|zf''(z)| \leq M_1|z|^\rho$ для $z \in \partial S_h$. Таким образом, из определения $a_\tau(f)$ по (1.9) и из (2.4) получим $T(r, g) = O(r^\rho)$, при $r \rightarrow \infty$. $\square$

В случае вещественной оси аналогичный теореме 2.3 результат был обратимым (см. [1]). Для доказательства частичной обратимости теоремы 2.3 нам понадобятся следующие леммы из работы [1].

Лемма 2.1. Пусть мероморфная функция g не имеет полюсов в $\Delta_\alpha(\theta)$ для $\alpha, \theta \in (0, 2\pi)$. Тогда для произвольных чисел $p > 1$ и $\beta \in (0, \alpha)$ имеем оценку

$$(2.5) \quad \log^+ |g(z)| < cT(p|z|, g) \text{ при } z \in \Delta_{\alpha-\beta}(\theta),$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от β и p .

Лемма 2.2. Пусть $g \in H(D_R)$ и $|g(\zeta)| \leq M$ для $\zeta \in D_R$ и $|g(t)| \leq 1$ для $-R < t < R$. Тогда

$$(2.6) \quad |g'(0)| < \frac{6}{R} (1 + \log^+ M).$$

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют доказать для функций класса M^ρ следующий аналог Леммы 5 работы [1].

Лемма 2.3. Пусть $g \in M^\rho$, $\rho \in (0, 1)$. Тогда для $z \in \partial S_h$

$$(2.7) \quad \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g'(z)|}{\nu'(|z|)} < +\infty.$$

Доказательство. Пусть функция $g \in M^\rho$, тогда g не имеет полюсов в $\Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi)$ для $\alpha \in (0, \pi)$. Применим к g и к углам Δ_α и $\Delta_\alpha(\pi)$ Лемму 2.1 при $p = 2$. Из (2.5) с учетом того, что $g \in M^\rho$, получаем

$$(2.8) \quad \log |g(z)| < c_1 \nu(|z|) \text{ для } z \in \Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi).$$

Пусть $z \in \partial S_h$. Рассмотрим голоморфную функцию $g_z : g_z(\zeta) = g(z + \zeta)$ для $\zeta \in D_R$, где $R = |z|$. Из (2.8) следует, что

$$|g_z(\zeta)| \leq M = \exp\{c_1 \nu(2|z|)\} \text{ для } \zeta \in D_R.$$

Применяя к g_z Лемму 2.2, с учетом (2.6) получаем

$$|g'(z)| \leq \frac{6}{|z|} (1 + c_1 \nu(2|z|)) < c_2 \frac{\nu(|z|)}{|z|} < c_3 \nu'(|z|),$$

что доказывает оценку (2.7), так как $c_j = c_j(h, \rho) > 0$ для $j = \overline{1, 3}$. $\square$

Следующая теорема частично обращает теорему 2.3, то есть указывает необходимые условия на приближаемую функцию f , при которых возможно равномерное приближение функции f на S_h мероморфными функциями данного роста.

Теорема 2.4. Пусть $f \in A_b(S_h)$ допускает равномерное приближение на S_h функциями из класса M^ρ . Тогда композиция $f \circ \mu$ должна быть равномерно непрерывной на ∂S_h .

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует последовательность функций $\{g_n\}_1^\infty$, $g_n \in M^\rho$ такая, что $g_n \rightarrow f$ равномерно на S_h , при $n \rightarrow \infty$. Тогда $g_n \circ \mu \rightarrow f \circ \mu$ также равномерно на S_h . Если мы докажем, что $(g_n \circ \mu)'$ ограничена на ∂S_h , то $(f \circ \mu)'$ также будет ограничена на ∂S_h . Это означает, что $f \circ \mu$ равномерно непрерывна на ∂S_h . Из (2.7) следует, что для $z \in \partial S_h$ имеем

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} |(g \circ \mu)'(z)| = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} |\mu'(z) g'(\mu(z))| = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g'(\mu(z))|}{\nu'(|\mu(z)|)} < \infty.$$

Это доказывает теорему. $\square$

Abstract. The paper studies the uniform approximation problem of functions f , which are continuous in a closed strip S_h and holomorphic in its interior. Such functions are approximated on S_h by meromorphic functions g , the growth of which is estimated in the terms of the Nevanlinna characteristic $T(r, g)$ and depends on the growth of f in the strip and the differential properties of f on the boundary of the strip. Also, the possible location of the poles of g in the complex plane is studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси”, Известия АН Арм.ССР, серия Математика, **25**, No 6, 534 – 548 (1990).
- [2] С. Г. Алексанян, “Равномерная и касательная аппроксимации на полосе мероморфными функциями имеющими оптимальный рост”, Известия НАН Армении, серия Математика, **43**, No 6, 6 – 19 (2008).
- [3] N. H. Arakelian, H. Shahgholian, “Uniform and tangential approximation on a strip by entire functions, having optimal growth”, Computational Methods and Function theory, **3**, No 1, 359 – 381 (2003).

Поступила 15 мая 2010

ГИПОТЕЗЫ О GC_n МНОЖЕСТВАХ

А. АПОЗЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *aapozyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе мы даем обобщение контрпримера, приведенного К. Де Буром для $\mathbb{R}^d$ и приводим пример множества GC_2 в $\mathbb{R}^4$ с тремя максимальными гиперплоскостями. Мы также обсуждаем гипотезу, касающуюся числа максимальных прямых множеств GC_n в $\mathbb{R}^d$ и доказываем ее правдивость в случае $n = 2, d = 3$.

MSC2000 number: 12E10

Ключевые слова: геометрическая характеристика, максимальная гиперплоскость, фундаментальный многочлен, естественная сеть, 1-сеть, GC_n множество.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с некоторых стандартных обозначений:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in Z_+^d,$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d.$$

Через $\Pi_n^d = \Pi_n^d(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство многочленов d переменных, степени не больше n :

$$\Pi_n^d = \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Получаем

$$N := N(n, d) := \dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{d}.$$

Задача интерполяции с множеством узлов $\mathcal{X}_s := \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^d$ называется точной в Π_n^d , если для любых заданных чисел $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ существует единственный многочлен $p \in \Pi_n^d$, называемый интерполяционным многочленом, такой что

$$(1.1) \quad p(\mathbf{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Эти условия образуют систему s линейных уравнений с N переменными (коэффициенты многочлена). Точность означает что эта система имеет единственное решение для любой правой части. Отсюда следует необходимое условие точности

$s = N$, т.е. число уравнений равно числу переменных. Впредь будем предполагать, что это условие имеет место.

Многочлен $p_A^* \in \Pi_n^d$ называется фундаментальным многочленом узла $A = \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} \in \mathcal{X}$ для множества $\mathcal{X} := \mathcal{X}_N$, если

$$p_A^*(\mathbf{x}^{(k)}) = 1, \quad p_A^*(\mathbf{x}^{(j)}) = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad j \neq k.$$

Отметим, что задача интерполяции точна тогда и только тогда, когда для всех узлов существуют фундаментальные многочлены. Заметим, что в случае точности все фундаментальные многочлены единственны, так как они интерполяционные многочлены. Легко заметить, что фундаментальные многочлены имеют степень равную n . Действительно, в противном случае, если степень многочлена p_A^* будет меньше, чем n , то умножая его на линейный многочлен принимающий значение 0 в точке A , получим нетривиальный многочлен из Π_n^d принимающий значение 0 на всем множестве $\mathcal{X}$, что противоречит точности $\mathcal{X}$.

В случае точности мы имеем формулу Лагранжа для интерполяционного многочлена

$$p = \sum_{i=1}^N c_i p_{\mathbf{x}^{(i)}}^*.$$

В дальнейшем, если гиперплоскость задаётся уравнением $h(x) = 0$, где $h \in \Pi_1^d$, то через h мы будем обозначать как гиперплоскость, так и многочлен h .

Определение 1.1. *Перемещение линейного пространства имеющего измерения k в $\mathbb{R}^d$ называется k -мерной плоскостью, или короче k -плоскостью.*

Например точка, прямая и гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ являются 0, 1 и $(d-1)$ -мерными плоскостями соответственно. Пустое множество мы назовем (-1) -плоскостью. k -плоскость h мы обозначим через $h\{k\}$. Если h есть гиперплоскость, т.е. $k = d-1$, то мы так же используем обозначение $h := h\{d-1\}$.

Определение 1.2. *Пусть дана k -плоскость $h\{k\}$. Множество узлов $\mathcal{X} \subset h\{k\}$ удовлетворяет геометрической характеристике для Π_n^k (GC_n для краткости), если:*

1. $\#\mathcal{X} = N(n, k)$,
2. Для любого фиксированного узла $A \in \mathcal{X}$ существует не более чем n $(k-1)$ -плоскостей $h_1^A, h_2^A, \dots, h_m^A$ ($m = m_A \leq n$) лежащих в $h\{k\}$, объединение которых содержит все узлы $\mathcal{X}$, за исключением A .

При выполнении условия 2 будем говорить, что узел A использует каждый из гиперплоскостей $h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A$.

Как мы увидим каждая k -плоскость может содержать не более $N(n, k)$ узлов множества GC_n .

В частности, если $h\{k\} = \mathbb{R}^d$, т.е. $k = d$, то говорят, что $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ является GC_n множеством, если $\#\mathcal{X} = N$ и для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существуют не более чем n гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, объединение которых содержит все узлы $\mathcal{X}$ за исключением A .

Отметим, что условие 2 в этом случае означает, что фундаментальный многочлен узла A можно представить в виде произведения линейных множителей

$$p_A^* = \gamma_A \cdot h_1^A \cdot h_2^A \cdots h_k^A,$$

где $h_1^A, h_2^A, \dots, h_k^A$ – гиперплоскости, используемые узлом A , а γ_A – постоянная. Таким образом, каждое GC_n множество точно. Поэтому число гиперплоскостей, используемых каждым узлом, равно n , т.е. $m_A = n$ для любого $A \in \mathcal{X}$.

М. Гаска и Дж. Маезту (см. [2]) сформулировали следующую гипотезу для GC_n множеств в $\mathbb{R}^2$:

Гипотеза - GM . Если $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ есть GC_n множество, то существует прямая, содержащая $n + 1$ узлов $\mathcal{X}$.

С. Боор обобщил эту гипотезу для $\mathbb{R}^d$ (см. [1]):

Гипотеза - GM_d . Если $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ есть GC_n множество, то существует гиперплоскость, содержащая $N(n, d - 1)$ узлов $\mathcal{X}$.

Указанные выше прямая и гиперплоскость называются максимальными или просто максималами. Ниже мы обобщаем понятие максимала.

Из Леммы 2.1 работы [8] следует, что $\#(h\{k\} \cap \mathcal{X}) \leq N(n, k)$ для любой k -плоскости $h\{k\}$.

Определение 1.3. k -плоскость $h\{k\}$ называется максимальной для GC_n множества $\mathcal{X}$, если $h\{k\}$ содержит ровно $N(n, k)$ узлов из $\mathcal{X}$.

Таким образом, каждая прямая содержащая $n + 1$ узлов, называется максимальной прямой, т.е. максимальной 1-плоскостью в $\mathbb{R}^d$.

Определение 1.4. Множество гиперплоскостей $H = \{h_1, h_2, \dots, h_l\}$, $l \geq d$ находится в общем положении в $\mathbb{R}^d$, если пересечение любых попарно разных d

гиперплоскостей из H есть точка, а пересечение любых $d + 1$ гиперплоскостей пусто.

Ниже мы приводим определение естественной решётки, введенное Чанг и Яо [3]:

Определение 1.5. Допустим, что множество $n + d$ гиперплоскостей $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n+d}\}$ находится в общем положении. Множество всех $N(n, d)$ точек пересечения каждой d гиперплоскостей из H называется естественной сетью степени n в $\mathbb{R}^d$ или короче NL_n .

Легко заметить, что каждая NL_n сеть удовлетворяет условиям GC_n и все гиперплоскости $h_i, i = 1, 2, \dots, n + d$ максимальные для нее. Более того, число $n + d$ есть максимальное количество максимальных гиперплоскостей для любого GC_n множества. Это вытекает из приведённого ниже Предложения 2.1.

Определение 1.6. Будем говорить, что GC_n множество $X \subset \mathbb{R}^d$ имеет дефект r или X есть r -сеть, если число максимальных гиперплоскостей X равно $n + d - r$.

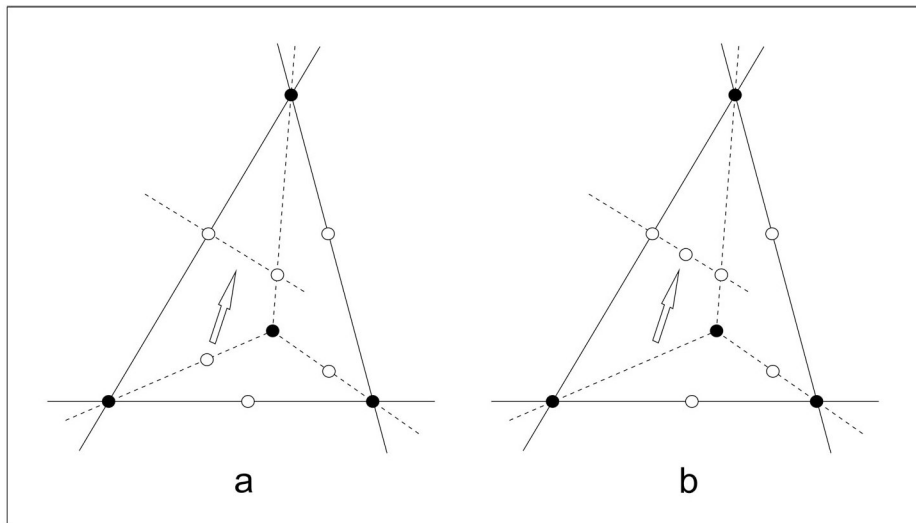
Таким образом NL_n представляет собой 0-сеть. Используя указанное Предложение 2.1, можно доказать, что каждая 0-сеть натуральная. Поэтому сети NL_n характеризуются тем фактом, что они 0-сети.

Ниже мы описываем характеристику 1-сетей в $\mathbb{R}^d$, которую мы дали в [8]. Мы начинаем с естественной сети степени $n - 1$, т.е. с точек пересечения $n + d - 1$ максимальных гиперплоскостей. Мы назовем эти узлы черными. Далее мы добавляем $\binom{n+d-1}{d-1}$ произвольных узлов по одной на прямой пересечения каждой $d - 1$ гиперплоскостей и назовем эти узлы белыми. Мы ставим условие: все белые точки не содержатся в одной гиперплоскости. В противном случае мы получили бы 0-сеть.

2. ПРИМЕР GC_2 множества в $\mathbb{R}^d$ с d МАКСИМАЛЬНЫМИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

Приведем некоторые начальные сведения. Начнем с результата полученного Карникер и Гаска в [7].

Теорема 2.1. Если каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^2$ имеет максимальную прямую, то оно имеет не менее трех максимальных прямых.


 Рис. 1. GC_2 множества с 4-мя и 3-мя максимальными плоскостями.

В [1] С. Боор обобщая этот результат сформулировал гипотезу:

Гипотеза 2.1. Каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^d$, имеющее максимальную гиперплоскость, имеет не менее $d + 1$ максимальных гиперплоскостей.

В той же работе С. Боор приводит контрпример: GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ с тремя максимальными плоскостями, таким образом, опровергнув гипотезу 2.1 в случае $d = 3$. Он начинает построение контрпримера с 1-сетью степени 2 в $\mathbb{R}^3$ с четырьмя максимальными плоскостями. Далее, он уменьшает количество узлов на одной из максимальных плоскостей на единицу удаляя из нее одну белую точку, тем самым сделав ее не максимальной (см. Рис. 1). Ниже мы приводим обобщение этого примера для $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 4$), точнее, мы приводим способ получения GC_2 множества с d максимальными гиперплоскостями из GC_2 множества с $d + 1$ максималами, тем самым опровергнув Гипотезу 2.1 в общем случае.

В дальнейшем нам необходимы следующие результаты, доказанные в [8].

Предложение 2.1. Максимальные гиперплоскости каждого GC_n множества X находятся в общем положении, более того, пересечение любых k из них представляет собой максимальную $(d - k)$ -плоскость для X , ($k = 1, 2, \dots, d + 1$).

Предложение 2.2. *k -плоскость $h\{k\}$ максимальна для GC_n множества $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда каждый узел $x \in \mathcal{X} \setminus h\{k\}$ использует гиперплоскость содержащую $h\{k\}$.*

В частности, если $k = d - 1$, то имеют место следующие результаты.

Следствие 2.1. *Гиперплоскость h максимальна для GC_n множества, или более общо, для любого Π_n^d -точного множества $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда каждый узел $x \in \mathcal{X} \setminus h$ использует h (фундаментальный многочлен узла x имеет линейный фактор h).*

Следствие 2.2. *Каждый многочлен степени n принимающий значение 0 во всех узлах максимальной гиперплоскости h Π_n^d -точного множества $\mathcal{X}$ имеет линейный множитель h .*

Предложение 2.3. (см. [8]). *Пусть гиперплоскости $h_1, h_2, \dots, h_d$ находятся в общем положении в $\mathbb{R}^d$. Тогда линии пересечения (1-плоскости)*

$$l_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^d h_j, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

этих гиперплоскостей не содержатся в одной гиперплоскости.

Предложение 2.4. (см. [8]). *Пусть $h\{k\}$ максимальная k -плоскость GC_n множества $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда множество $\mathcal{X} \cap h\{k\}$ есть GC_n множество в $h\{k\}$.*

Вернемся к построению контрпримера. Мы начнем с 1-сети $\mathcal{X}$ степени 2 в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$). Обозначим через $H = \{h_0, h_1, \dots, h_d\}$ множество максимальных гиперплоскостей этой 1-сети.

Предложение 2.5. *Пусть $\mathcal{X}$ Π_2^d -точное множество, и существует максимальная гиперплоскость h , не содержащая A . Тогда фундаментальный многочлен узла $A \in \mathcal{X}$ представляется в виде произведения линейных множителей.*

Доказательство. Легко заметить, что $\#\mathcal{X} \setminus h = d$. Обозначив через h' гиперплоскость содержащую эти узлы, получим, что многочлен $P = hh'$ фундаментальный для A . Действительно, $P(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X} \setminus A$. С другой стороны, $\mathcal{X}$, $P(A) \neq 0$ в силу точности. $\square$

В силу Предложения 2.1 максимальные гиперплоскости находятся в общем положении. Следовательно, пересечение любых $(d - 2)$ из них представляет собой

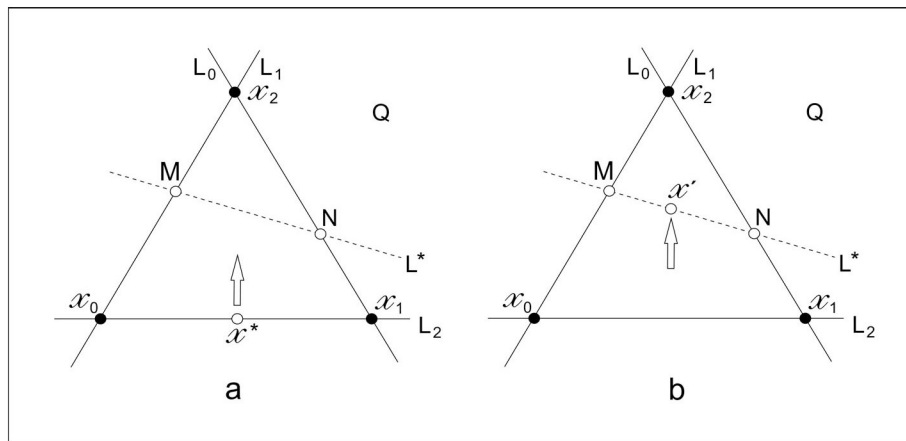


РИС. 2. Максимальная 2-плоскость.

максимальную плоскость (2-плоскость). Пусть пересечение

$$Q := \bigcap_{i=3}^d h_i$$

есть максимальная плоскость изображенная на Рис. 2 и

$$L_j := h_j \bigcap Q, \quad j = 0, 1, 2$$

есть линии пересечения в Q . Обозначим точки пересечения через

$$x_k := \bigcap_{i=0, i \neq k}^d h_i \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

В силу Следствия 2.1, узел x_2 использует максимальную гиперплоскость h_2 . Другой гиперплоскостью используемой им и обозначенной через h^* , является гиперплоскость, содержащая остальные d белые узлы. Очевидно h^* содержит прямую L^* и, в силу точности множества узлов, не содержит x_2 .

Предложение 2.6. *Может существовать только одна гиперплоскость содержащая $\binom{d+1}{2} - 1$ узлов множества X . Если такая гиперплоскость существует, то все содержащиеся в ней узлы белые.*

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из второй. Действительно, количество всех белых узлов равно $M := \binom{d+1}{2}$. Предположим, что существуют две разные гиперплоскости h_1 и h_2 содержащие по $M - 1$ белых узлов. Очевидно, в этом случае их пересечение содержит по крайней мере $M - 2$ узлов.

С другой стороны, это пересечение или пусто, или представляет собой $(d-2)$ -плоскость (см. [8], Предложение 1.1), следовательно, ввиду [8, Лемма 2.1], оно может содержать не более $\binom{d}{2} = M - d$ узлов, что и является противоречием в рассматриваемом нами случае $d \geq 3$.

Таким образом, остается убедиться, что если гиперплоскость h содержит ровно $M-1$ узлов, то они все белые. Предположим, что гиперплоскость h содержит $r \geq 0$ черных узлов. Поскольку h не является максимальным, можно рассматривать только случай $r < d$. Получаем, $0 \leq r \leq d-1$. При этом $d+1-r$ черные узлы не содержатся в h . Очевидно, h не содержит те белые узлы, которые лежат на прямых, соединяющих два черных узла, один из которых принадлежит h , а другой нет. Количество этих белых узлов равно $r(d+1-r)$. Получаем, что h может содержать не более

$$\varphi(r) = \binom{d+2}{2} - (d+1-r) - r(d+1-r) = \binom{d+2}{2} - (r+1)(d+1-r), \quad r = 0, 1, \dots, d-1$$

узлов. Имеем

$$\varphi(0) = \varphi(d) = M,$$

$$\varphi(1) = \varphi(d-1) = M - d + 1.$$

Так как $\varphi(r)$ квадратная форма от r , то ее максимальное значение для $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ равно M . Таким образом, значение $r = 0$ – единственное, для которого h может содержать $M-1$ узлов. Что и означает, что все узлы белые. $\square$

Заметим, что мы доказали больше, чем утверждает вторая часть Предложения 2.6. Если гиперплоскость h содержит по крайней мере $M-d+2$ узлов, то все узлы белые.

Чтобы из $\mathcal{X}$ получить множество GC_2 с d максимальными гиперплоскостями, мы перемещаем узел x^* прямой L_2 на прямую L^* (см. Рис. 2). Обозначим полученное множество через $\mathcal{X}'$. Отметим, что если h^* содержит $\binom{d+1}{2} - 1$ белых узлов, то после перемещения она становится максимальной и мы получаем, что $\mathcal{X}'$ имеет $d+1$ максимальных гиперплоскостей. В силу Предложения 2.6, избежать этого можно передвижением другого белого узла из Q (или $\mathcal{X}$) на соответствующую прямую.

Таким образом, не теряя общности, мы можем предположить, что h^* содержит не более чем $\binom{d+1}{2} - 2$ узла и поэтому после перемещения одного из белых узлов h^* не становится максимальной.

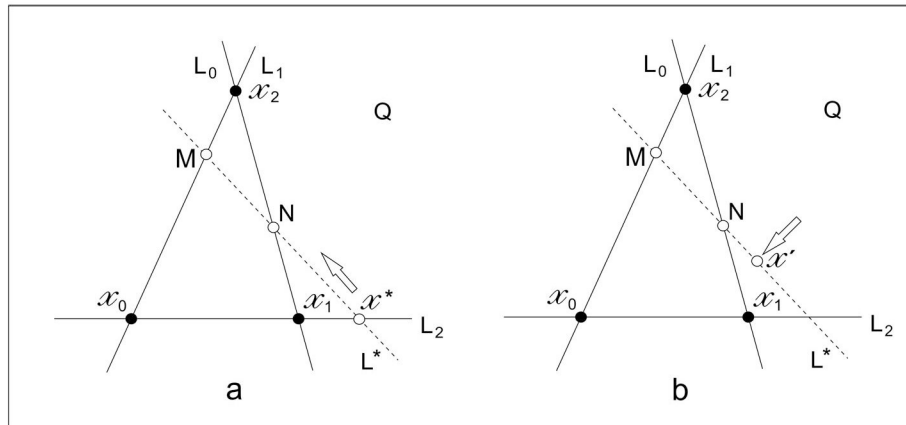


Рис. 3

Отметим еще, что если узлы плоскости Q формируют не 1-сеть, а 0-сеть, то мы можем перемещать узел x^* вдоль прямой L^* так, что x' не будет лежать на L_2 (см. Рис. 3).

Предложение 2.7. *Множество $\mathcal{X}'$ является CG_2 множеством.*

Доказательство. Сперва покажем, что множество $\mathcal{X}'$ Π_2^d -точно. Действительно, гиперплоскости h_0 и h_1 максимальны, поэтому каждый многочлен степени два, принимающий значение 0 на всем множестве $\mathcal{X}'$, имеет представление $p = \gamma h_0 h_1$ при некоторой постоянной γ . Перемещенный узел $\mathcal{X}'$ не лежит ни на одном из этих двух гиперплоскостей. Таким образом, p принимает значение 0 и в точке x' , что означает $\gamma = 0$ и поэтому $p = 0$.

Теперь покажем, что множество $\mathcal{X}'$ удовлетворяет условиям GC_2 множеств. Гиперплоскости $\{h_i; i = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{2\}\}$ максимальны для $\mathcal{X}'$. Ввиду Следствия 2.1, узлы не лежащие на одной из этих гиперплоскостей используют ее. Следовательно, в силу Предложения 2.5, эти узлы имеют фундаментальные многочлены, которые представляются в виде произведения линейных множителей. Узел x_2 является пересечением всех этих гиперплоскостей. Следовательно, все остальные узлы используют по крайней мере одну максимальную гиперплоскость. Фундаментальный многочлен узла x_2 в $\mathcal{X}'$ совпадает с его фундаментальным многочленом в $\mathcal{X}$, поскольку мы переместили узел из одной используемой x_2 гиперплоскостью на другую. Следовательно и фундаментальный многочлен узла

x_2 представляется в виде произведения линейных множителей. Следовательно, X' есть GC_2 множество. $\square$

Отметим, что в силу Предложения 2.2 фундаментальные многочлены узлов не содержащихся в Q не изменяются, поскольку после перемещения Q остается максимальной.

Отметим еще, что после перемещения гиперплоскость h_2 больше не является максимальной. Таким образом, мы получили следующее утверждение:

Множество X' удовлетворяет условиям GC_2 в $\mathbb{R}^d$ и имеет только d максимальных гиперплоскостей: $\{h_i; i = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{2\}\}$. Предложением 2.6 мы предотвратили появление новой максимальной гиперплоскости.

3. ПРИМЕР МНОЖЕСТВА GC_2 В $\mathbb{R}^4$ С ТРЕМЯ МАКСИМАЛЬНЫМИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

Начнем с определений Δ_2 и Δ_3 структур (см. [9]).

Определение 3.1. Будем говорить, что шесть узлов в $\mathbb{R}^2$ формируют Δ_2 -структуру, если три из них являются вершинами треугольника, а остальные три лежат по одному на прямых содержащих стороны этого треугольника (см. Рис. 2, а)).

Определение 3.2. Будем говорить, что десять узлов в $\mathbb{R}^3$ формируют Δ_3 -структуру, если четыре из них являются вершинами пирамиды, а остальные шесть лежат по одному на прямых содержащих стороны пирамиды (см. Рис. 1, а)).

В силу [9] Утверждения 3.3, каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^2$ формирует Δ_2 -структуру. А в силу [8, Теорема 4.1 и Утверждение 3.1], каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ с 4 или 5 максимальными гиперплоскостями (0 или 1-сеть) формирует Δ_3 -структуру.

Возьмем 1-сеть второй степени X в $\mathbb{R}^4$. Она имеет 5 максимальных гиперплоскостей (3-плоскостей). Узлы, принадлежащие каждой из этих максимальных гиперплоскостей, формируют Δ_3 -структуру. Ввиду Предложения 2.1, каждые две из этих 5-и максимальных гиперплоскостей имеют общую максимальную 2-плоскость, т.е., Δ_2 -структуру. Указанное выше множество изображено на Рис. 4 а), где черные узлы множества X обозначены через A, B, C, D и E . Обозначим максимальные гиперплоскости формирующие Δ_3 -структуры через $H_1 := ABCD, H_2 := ABCE, H_3 := ABDE, H_4 := ACDE, H_5 := BCDE$.

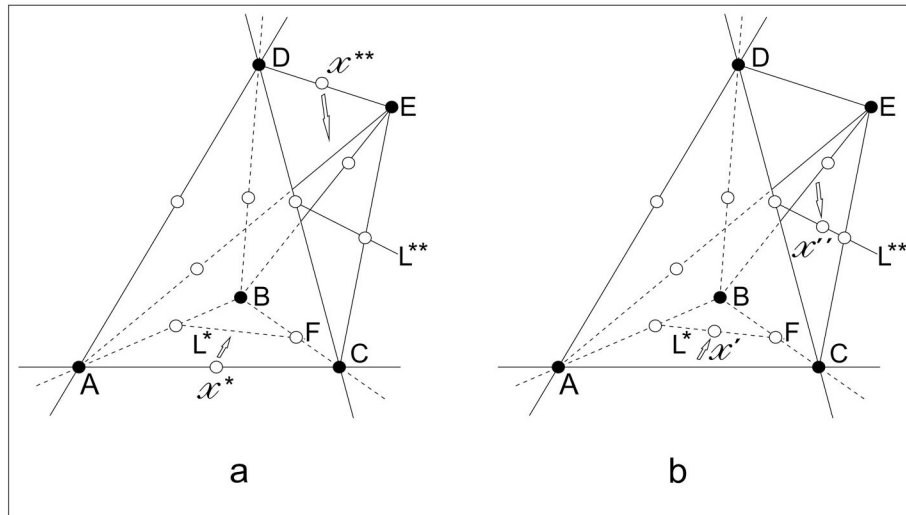


Рис. 4

Чтобы получить множество GC_2 с тремя максимальными гиперплоскостями, мы перемещаем два белых узла следующим образом. Первое перемещение мы делаем внутри максимальной плоскости ABC , где мы перемещаем белый узел x^* лежащий на прямой AC на прямую L^* , проходящую через оставшиеся два белых узла этой плоскости. Второе перемещение мы делаем внутри плоскости CDE . Мы перемещаем белый узел x^{**} , лежащий на прямой DE на прямую L^{**} , проходящую через оставшиеся два белых узла плоскости CDE . Полученное множество $\mathcal{X}'$ изображено на Рис. 4 b). Легко заметить, что гиперплоскости H_3 и H_4 содержат по 9 узлов и являются максимальными. В самом деле, достаточно отметить два обстоятельства. Первое: $x', x'' \notin H_3$, поскольку, в противном случае, если $x' \in H_3$ или $x'' \in H_3$, то H_3 содержал бы ABC или CDE соответственно. Следовательно, $C \in H_3$ в обоих случаях, что является противоречием. Второе обстоятельство: $x' \notin H_4$, так как в противном случае H_4 содержал бы плоскость ABC , следовательно $B \in H_4$, что является противоречием.

Заметим, что мы можем предполагать, что после перемещений не возникает новая максимальная гиперплоскость. Действительно, в силу Предложения 2.6, новая максимальная гиперплоскость может возникнуть как после только одного перемещения, так и только после двух. В первом случае, как мы видели в Предложении 2.6, второе перемещение не приводит к возникновению максимальной

плоскости, следовательно, нужно менять только первое перемещение. Если первое перемещение происходит на плоскости ABC , то мы можем рассматривать перемещение точки F на соответствующую прямую (см. Рис. 4), а если оно происходит на плоскости CDE , то можно рассматривать перемещение любого другого белого узла этой плоскости на соответствующей прямой. Каждый из этих двух решений проблемы решает проблему так же и во втором случае.

Следующий результат улучшает результат, полученный в §2, уменьшая количество максимальных гиперплоскостей множества GC_2 на два.

Предложение 3.1. *Множество $\mathcal{X}'$ является GC_2 множеством.*

Доказательство. Покажем, что множество $\mathcal{X}'$ P_2^4 -точна. Гиперплоскости H_1 и H_2 максимальны, поэтому, ввиду Следствия 2.2, каждый многочлен второй степени p , принимающий значение 0 во всех точках множества $\mathcal{X}'$ имеет представление $p = \gamma H_1 H_2$, где γ – некоторая постоянная. Узел x'' не содержится ни в одном из этих двух гиперплоскостей. Следовательно, $p(x'') = 0$ означает, что $\gamma = 0$ и соответственно $p = 0$.

Теперь проверим, что $\mathcal{X}'$ является GC_2 множеством. Гиперплоскости H_1, H_2 и H_5 максимальны для $\mathcal{X}'$. В силу Следствия 2.1 и Предложения 2.5, узлы, не лежащие на одной из этих гиперплоскостей, используют ее, следовательно, имеют фундаментальные многочлены, представляемые в виде произведения линейных множителей. Таким образом, остается проверить условия GC_2 множества для узлов B, C и F , которые принадлежат линии пересечения вышеуказанных трех максимальных гиперплоскостей. Наконец, узлы B, C и F используют гиперплоскости H_4, H_3 и H_3 , соответственно, и гиперплоскость содержащая остальные 5 узлов. Заметим, что такая гиперплоскость существует, так как три из пяти узлов во всех случаях лежат на одной прямой. $\square$

4. РЕЗУЛЬТАТ КАСАЮЩИЙСЯ ГИПОТЕЗЫ

В этой главе мы воспользуемся результатом полученным Г. Ктрыном в [9].

Теорема 4.1. *Каждое GC_2 множество в $\mathbb{R}^3$ имеет по крайней мере три максимальные плоскости.*

Как мы видели в параграфах 2 и 3, Гипотеза 2.1 не верна в $\mathbb{R}^d$, более того, мы уменьшили количество максимальных гиперплоскостей на два для $\mathbb{R}^4$. С

другой стороны, легко заметить, что в этих случаях рассмотренные перемещения белых узлов не меняют минимальное количество максимальных прямых (1-плоскостей). Имеет место следующая гипотеза, составленная совместно с А. Акопяном на основании Теоремы 2.1.

Гипотеза 4.1. *Каждое GC_n множество в $\mathbb{R}^d$ имеет по крайней мере $\binom{d+1}{d-1}$ максимальных прямых.*

Ввиду Теоремы 2.1, в случае $d = 2$ Гипотеза 4.1 совпадает с Гипотезой - GM . Очевидно Гипотеза 4.1 верна для GC_1 множеств в $\mathbb{R}^3$. Как мы показали в [5], Гипотеза - GM_3 верна в $\mathbb{R}^3$ для GC_2 множеств. Ниже мы доказываем, что Гипотеза 4.1 так же имеет место для этих множеств.

Теорема 4.2. *Гипотеза 4.1 верна для GC_2 множеств в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. В силу Теоремы 4.1, каждое GC_2 множество имеет по крайней мере 3 максимальных плоскости. Обозначим их через h_1, h_2, h_3 . Ввиду Предложения 2.1, пересечение любых двух максимальных плоскостей является максимальной прямой, т.е., прямой содержащей три узла. Обозначим эти прямые через

$$l_1 := h_2 \cap h_3, \quad l_2 := h_1 \cap h_3, \quad l_3 := h_1 \cap h_2.$$

Таким образом, плоскость h_i содержит максимальные прямые l_j и l_k , где $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j$, $i \neq k$. В силу Предложения 2.4 множество узлов каждой максимальной плоскости является GC_n множеством на плоскости. Следовательно, ввиду Теоремы 2.1, каждая максимальная плоскость содержит по крайней мере еще одну максимальную прямую, которая не содержится в других максимальных плоскостях. Получаем, что количество максимальных прямых не менее шести. $\square$

Автор выражает свою благодарность профессору Акопу Акопяну за полезные дискуссии по теме этой работы.

Abstract. The paper gives a generalization of the counterexample of C. de Boer on $\mathbb{R}^d$ and provides an example of GC_2 set in $\mathbb{R}^4$ with three maximal hyperplanes. Also, a conjecture on the number of maximal lines of GC_n sets in $\mathbb{R}^d$ is discussed and proved that it is true in the case when $n = 2$, $d = 3$.

А. АПОЗЯН

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. de Boor, “Multivariate polynomial interpolation: Conjectures concerning GC-sets”, Numer. Alg., **45**, 113 – 125 (2007).
- [2] M. Gasca and J. I. Maeztu, “On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$ ”, Numer. Math., **39**, 1 – 14 (1982).
- [3] K. C. Chung and T.H. Yao, “On lattices admitting unique Lagrange representations”, SIAM J. Numer. Anal., **14**, 735 – 743 (1977).
- [4] C. de Boor, “Multivariate polynomial interpolation: Aitken-Neville sets and generalized principal lattices”, Journal of Approximation Theory, **161**(1), 411 – 420 (2009).
- [5] A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, “On the Gasca-Maeztu conjecture in $\mathbb{R}^3$ ”, East Journal on Approximations, **16**(1), 25 – 33 (2010).
- [6] J. M. Carnicer and M. Gasca, “Planar Configurations with Simple Lagrange Interpolation Formula”, Mathematical Methods in CAGD, Oslo, 55 – 62 (2001).
- [7] J. M. Carnicer and M. Gasca, “On Chung and Yao’s geometric characterization for bivariate polynomial interpolation”, Curve and Surface Design, Saint-Malo, 11 – 30 (2002).
- [8] A. Apozyan, “ GC_n sets in $\mathbb{R}^d$ with $n + d - 1$ maximal hyperplanes”, East J. Approx., **16**, no. 3, 235 – 246 (2010).
- [9] G. Ktryan, “On the number of maximal planes of GC_2 sets in $\mathbb{R}^3$ ”, Jaen J. Approx, **2**(1), 129 – 143 (2010).

Поступила 1 декабря 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 27-36.

DESCRIPTION OF RANDOM FIELDS BY MEANS OF ONE-POINT FINITE-CONDITIONAL DISTRIBUTIONS

A. S. DALALYAN AND B. S. NAHAPETIAN

*Ecole des Ponts ParisTech, Université Paris-Est, France
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia
E-mails: nahapet@instmath.sci.am, dalalyan@certis.enpc.fr*

АННОТАЦИЯ. The aim of this note is to investigate the relationship between strictly positive random fields on a lattice $\mathbb{Z}^{\nu}$ and the conditional probability measures at one point given the values on a finite subset of the lattice $\mathbb{Z}^{\nu}$. We exhibit necessary and sufficient conditions for a one-point finite-conditional system to correspond to a unique strictly positive probability measure. It is noteworthy that the construction of the aforementioned probability measure is done explicitly by some simple procedure. Finally, we introduce a condition on the one-point finite conditional system that is sufficient for ensuring the mixing of the underlying random field.

MSC2000 number: 12E10

Ключевые слова: Random field; one-point conditional distribution; mixing properties.

1. INTRODUCTION

The mathematical theory of random fields is an active area of research aimed at study of the probabilistic properties of systems of interacting particles. In recent years, random fields have been successfully applied to the analysis of biological sequences, text and image processing, as well as to many areas of computer vision and artificial intelligence. In most of these applications, a random field is defined by its finite-dimensional, conditional distributions and is therefore often termed conditional random field. The reconstruction of distributions of random fields from such conditional probabilities is the subject of the present paper.

The description of a random field by means of its conditional distributions is an old problem, most important contributions to which date back to Dobrushin [5, 6]. In his seminal paper [6], Dobrushin considered some systems of conditional distributions on finite sets under the condition that the values of the field are known outside that sets and he proved that, under some assumptions, there exists a random field with the given conditional distributions. This line of research has been developed in recent

papers [4, 2, 1, 3, 8], while the present paper is complementing the mentioned works by an exhaustive description of one-point finite-conditional distributions that give rise to positive random fields.

To be more precise, we consider a random field $\mathbf{X}$ on the ν -dimensional regular grid $\mathbb{Z}^\nu$ and with values in a finite set $\mathcal{X}$. Given the distribution of $\mathbf{X}$, the conditional probabilities $Q_t^{X_\Lambda}(x) = \mathbf{P}(X_t = x | X_\Lambda)$ can be easily computed for every $x \in \mathcal{X}$ and for every finite set $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$. In some situations, however, the random field may be unavailable, and only a set of conditional distributions $\{Q_t^{x_\Lambda}\}$ can be defined. In image segmentation, for instance, it is more convenient [11, 9] to define a random field $\mathbf{X}$ by specifying the conditional distribution of $\mathbf{X}$ at any lattice point t given its values on the neighboring points. Then, the segmentation is obtained by assigning to each point t the most likely value taken by X_t (cf. Figure 1, an example). In such a situation, it is relevant to raise the question of the existence of a random field corresponding to a set of conditional distributions $\{Q_t^{x_\Lambda}\}$. This is the main issue studied in this work. We prove that under some consistency assumptions on the collection $\{Q_t^{x_\Lambda}\}$ there exists a random field corresponding to the mentioned collection. Furthermore, the distribution of this random field is uniquely determined by the collection $\{Q_t^{x_\Lambda}\}$.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the main notation used throughout the paper and present the mathematical formulation of the questions which are of our interest. The main result of the paper is stated and proved in Section 3. We briefly discuss the mixing properties in Section 4 and summarize the main results of the paper in Section 5.

2. NOTATION AND PROBLEM STATEMENT

Let $\mathbf{X}$ be a random field on $\mathbb{Z}^\nu$ with a finite state space $\mathcal{X}$ drawn from a probability distribution $\mathbf{P}$ on $(\mathcal{X}^{\mathbb{Z}^\nu}, \mathcal{A})$, where the σ -algebra $\mathcal{A}$ is defined as $(2^\mathcal{X})^{\mathbb{Z}^\nu}$, with $2^\mathcal{X}$ being the set of all subsets of $\mathcal{X}$. Note that $\mathbf{P}$ is a probability measure acting on an infinite-dimensional space. A classical way of characterizing such probability measures passes through the collection of its finite-dimensional distributions

$$\{\mathbf{P}_\Lambda, \Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu \text{ and } \text{Card}(\Lambda) < \infty\}.$$

The famous result of Kolmogorov states that a collection of finite-dimensional distributions corresponds to a unique probability measure on $(\mathcal{X}^{\mathbb{Z}^\nu}, \mathcal{A})$ if and only if it satisfies Kolmogorov's consistency condition.

In this paper, we focus our attention on strictly positive random fields, i.e. random

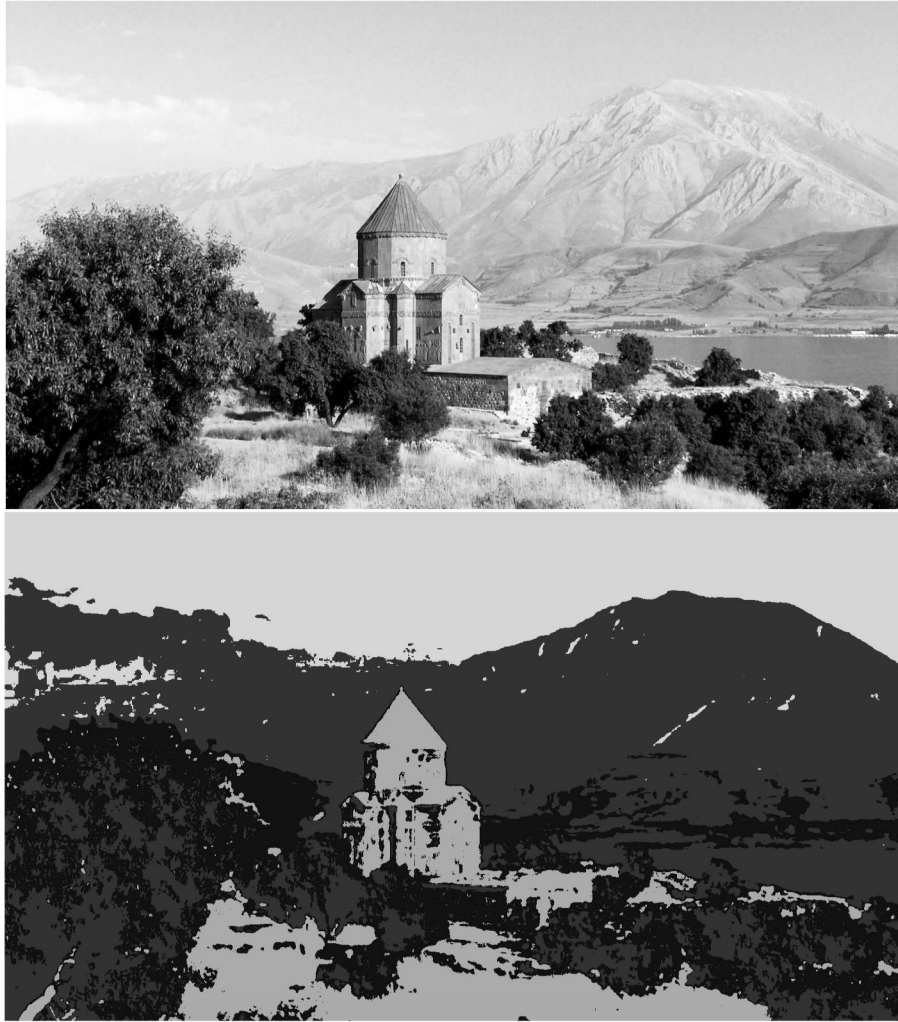


Fig. 1. A natural image and its segmentation into 4 regions. The segmented image is obtained as the most likely configuration with respect to a probability measure corresponding to a random field on $\mathbb{Z}^2$ with state space $\{1, 2, 3, 4\}$.

fields $\mathbf{X}$ satisfying $\mathbf{P}(X_\Lambda = x_\Lambda) > 0$ for all non-empty, finite sets $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ and for all $x_\Lambda \in \mathcal{X}^\Lambda$. For such a random field, the one-point finite-conditional probabilities are defined as follows. For any $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $\widetilde{\mathcal{X}}^\Lambda$ stands for the set of all functions $\widetilde{\mathbf{x}}$ defined on some non-empty, finite subset J of $\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$ and take values in $\mathcal{X}$: $\widetilde{\mathbf{x}} : J \rightarrow \mathcal{X}$. We will refer to J as the support of $\widetilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}^\Lambda$. For every $t \in \mathbb{Z}^\nu$ and for every $\widetilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}^t$ the

following conditional probability measure can be defined on $\mathcal{X}$:

$$Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(\cdot) = \mathbf{P}(X_t = \cdot \mid X_J = \tilde{\mathbf{x}}), \quad \text{where } J = \text{supp}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

The set $\mathbf{q}(\mathbf{P}) = \{Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}, t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ and } \tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^t}\}$ is called one-point finite-conditional distribution of $\mathbf{P}$. The problems, we are interested in, can be formulated as those related to the inversion of the operator $\mathbf{q}$.

To be more precise, let $\tilde{\mathbf{q}} = \{Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}, t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ and } \tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^t}\}$ be a system of probability distributions on $\mathcal{X}$, such that $Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(x) > 0$ for all $x \in \mathcal{X}$. We define $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{q}})$ the set of all strictly positive probability measures $\mathbf{P}$, such that $\mathbf{q}(\mathbf{P}) = \tilde{\mathbf{q}}$, or in other terms, $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}})$. The main goal of the present paper is to accomplish the following tasks:

- (a) Determine necessary and sufficient conditions on $\tilde{\mathbf{q}}$, under which the set $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{q}})$ is non-empty.
- (b) Prove that if $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{q}})$ is non-empty, then it is a singleton, which means that there is a unique random field having $\tilde{\mathbf{q}}$ as a one-point finite-conditional distribution.
- (c) Describe some conditions on $\tilde{\mathbf{q}}$, entailing that the corresponding random field, if exists, possesses mixing properties.

3. NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR EXISTENCE AND UNIQUENESS

It is quite clear that not every one-point finite-conditional distribution $\tilde{\mathbf{q}}$ corresponds to a random field. For instance, it is obvious that any random field with strictly positive probability distribution the following property

$$(3.1) \quad \mathbf{P}((X_t, X_s) = (x, y) \mid X_J = \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}(X_t = x \mid X_J = \tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{P}(X_s = y \mid X_J = \tilde{\mathbf{x}}, X_t = x)$$

should be satisfied for any $t, s \in \mathbb{Z}^\nu$, $(x, y) \in \mathcal{X}^{\{t, s\}}$ and for all $\tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^{\{t, s\}}}$. Therefore, if for $\tilde{\mathbf{q}}$ the condition $Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(x) Q_s^{\tilde{\mathbf{q}}}(y) = Q_s^{\tilde{\mathbf{q}}}(y) Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(x)$ fails for some $(s, t, x, y, \tilde{\mathbf{x}})$, then there is no random field having $\tilde{\mathbf{q}}$ as its one-point finite-conditional distribution. The next theorem provides a precise characterization of systems $\tilde{\mathbf{q}}$ that can be extended to strictly positive random fields. Moreover, it shows that the corresponding random field is unique and can be constructed by a simple procedure.

Theorem 3.1. *Let $\tilde{\mathbf{q}} = \{Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}, t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ and } \tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^t}\}$ be a one-dimensional finite-conditional distribution on $\mathcal{X}$. Then, there exists a strictly positive random field having*

$\tilde{\mathbf{q}}$ as its system of conditional probabilities, i.e. $\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{q}}) \neq \emptyset$, if and only if the following conditions are fulfilled:

[C1] $Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(x) > 0$ for all $t \in \mathbb{Z}^\nu$, $x \in \mathcal{X}$ and $\tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^t}$.

[C2] For all $t, s \in \mathbb{Z}^\nu$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{X}$ and $\tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}^{\{t,s\}}}$ it holds that

$$Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}}(x)Q_s^{\tilde{\mathbf{q}}x}(y) = Q_s^{\tilde{\mathbf{q}}}(y)Q_t^{\tilde{\mathbf{q}}y}(x).$$

[C3] For all $t, s \in \mathbb{Z}^\nu$, $x, x' \in \mathcal{X}^t$ and $y, y' \in \mathcal{X}^s$ it holds that

$$(3.2) \quad Q_t^y(x)Q_s^{x'}(y)Q_t^{y'}(x')Q_s^x(y') = Q_t^{y'}(x)Q_s^{x'}(y')Q_t^y(x')Q_s^x(y).$$

Under these conditions all random fields, having $\tilde{\mathbf{q}}$ as conditional distributions, possess the same distribution.

Proof. We start by proving that all three conditions are necessary. This is obvious for the first condition. For the second one, the necessity follows from the property (3.1) of random fields. Further, note that if P is a probability measure and A, B, C, D are any events, then

$$(3.3) \quad P(A|B)P(B|C)P(C|D)P(D|A) = P(A|D)P(D|C)P(C|B)P(B|A).$$

Applying this identity to the random field $\mathbf{X}$ drawn from $\mathbf{P}$ and to the events $A = \{X_t = x\}$, $B = \{X_s = y\}$, $C = \{X_t = x'\}$ and $D = \{X_s = y'\}$, we get the necessity of condition (3.2).

To prove that all three conditions [C1-C3] are sufficient, assume that $\tilde{\mathbf{q}}$ is a one-point finite-conditional system satisfying these conditions. Then for any $t \in \mathbb{Z}^\nu$, we choose $s \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \{t\}$, $y \in \mathcal{X}^s$ and set

$$(3.4) \quad \mathbf{P}_t(x) = \frac{Q_t^y(x)}{Q_s^x(y)} \left[\sum_{u \in \mathcal{X}^t} \frac{Q_t^y(u)}{Q_s^u(y)} \right]^{-1}, \quad x \in \mathcal{X}^t.$$

Under condition [C2] and [C3], $P_t(x)$ defined as above is independent of s and of y . Indeed, it follows from [C2] that for any distinct points $t, s, r \in \mathbb{Z}^\nu$ and any $x \in \mathcal{X}^t$, $y \in \mathcal{X}^s$, $z \in \mathcal{X}^r$

$$Q_t^z(x)Q_s^{zx}(y) = Q_s^z(y)Q_t^{zy}(x),$$

$$Q_r^y(z)Q_t^{zy}(x) = Q_t^y(x)Q_r^{yx}(z),$$

$$Q_s^x(y)Q_r^{yx}(z) = Q_r^x(z)Q_s^{zx}(y).$$

Multiplying these equations, one can see that many terms vanish, and the result is the identity

$$(3.5) \quad Q_t^z(x)Q_s^x(y)Q_r^y(z) = Q_s^z(y)Q_r^x(z)Q_t^y(x).$$

Since (3.5) holds for any $x \in \mathcal{X}^t$, we have also

$$(3.6) \quad Q_t^z(u)Q_s^u(y)Q_r^y(z) = Q_s^z(y)Q_r^u(z)Q_t^y(u), \quad u \in \mathcal{X}^t.$$

Dividing (3.5) by (3.6), we come to the equality

$$(3.7) \quad \frac{Q_t^z(x)Q_s^x(y)}{Q_t^z(u)Q_s^u(y)} = \frac{Q_r^x(z)Q_t^y(x)}{Q_r^u(z)Q_t^y(u)}.$$

Rearranging the terms, we come to the equality

$$(3.8) \quad \frac{Q_t^z(x)Q_t^y(u)}{Q_r^x(z)Q_s^u(y)} = \frac{Q_t^y(x)Q_t^z(u)}{Q_s^x(y)Q_r^u(z)}$$

which implies

$$(3.9) \quad \frac{Q_t^z(x)}{Q_r^x(z)} \sum_u \frac{Q_t^y(u)}{Q_s^u(y)} = \frac{Q_t^y(x)}{Q_s^x(y)} \sum_u \frac{Q_t^z(u)}{Q_r^u(z)}$$

after summing with respect to $u \in \mathcal{X}^t$. In other terms,

$$(3.10) \quad \frac{Q_t^z(x)}{Q_r^x(z)} \left[\sum_u \frac{Q_t^z(u)}{Q_r^u(z)} \right]^{-1} = \frac{Q_t^y(x)}{Q_s^x(y)} \left[\sum_u \frac{Q_t^y(u)}{Q_s^u(y)} \right]^{-1}.$$

This equality proves that the definition of $\mathbf{P}_t$ given by (3.4) does not depend on the choice of s and y , i.e. taking $r \neq s$ instead of s and z instead of y does not affect the result. The independence of the right-hand side of (3.4) of y follows directly from [C3].

So far, we proved that for any one-point finite-conditional distribution $\tilde{q}$ satisfying [C1-C3] one can uniquely determine one-point unconditional distributions. Let us now look at what happens with the remaining finite-dimensional unconditional distributions. To this end, let Λ be a finite subset of $\mathbb{Z}^d$, the elements of which are somehow enumerated as $\Lambda = \{t_1, \dots, t_n\}$. Then, for every $\mathbf{x}_\Lambda \in \mathcal{X}^\Lambda$ we define

$$(3.11) \quad \mathbf{P}_\Lambda(\mathbf{x}_\Lambda) = \mathbf{P}_{t_1}(x_{t_1})Q_{t_2}^{x_{t_1}}(x_{t_2}) \cdot \dots \cdot Q_{t_n}^{x_{t_1} \dots x_{t_{n-1}}}(x_{t_n}),$$

where $\mathbf{P}_{t_1}(x_{t_1})$ is well defined by (3.4). We prove below that this definition is independent of the enumeration of elements of Λ and that the family $\{\mathbf{P}_\Lambda : \Lambda \text{ is a finite subset of } \mathbb{Z}^\nu\}$ is a collection of probability measures that are consistent in the Kolmogorov sense.

To prove that the definition of $\mathbf{P}_\Lambda$ is invariant w.r.t. the order on the elements of Λ , we use the fact that any permutation of $t_1, \dots, t_n$ can be obtained as a composition of a finite set of permutations of two successive elements. Therefore, it is sufficient to prove that the replacement of $\{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\}$ by the ordered set

$\{t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k-1}, \dots, t_n\}$ does not affect the definition of $\mathbf{P}_\Lambda$. Thus, we aim at showing that

$$(3.12) \quad \mathbf{Q}_{t_{k-1}}^{x_{t_1} \dots x_{t_{k-2}}}(x_{t_{k-1}}) \mathbf{Q}_{t_k}^{x_{t_1} \dots x_{t_{k-1}}}(x_{t_k}) = \mathbf{Q}_{t_k}^{x_{t_1} \dots x_{t_{k-2}}}(x_{t_k}) \mathbf{Q}_{t_{k-1}}^{x_{t_1} \dots x_{t_{k-2}}, x_{t_k}}(x_{t_{k-1}}), \quad k > 2,$$

and that

$$(3.13) \quad \mathbf{P}_{t_1}(x_{t_1}) \mathbf{Q}_{t_2}^{x_{t_1}}(x_{t_2}) = \mathbf{P}_{t_2}(x_{t_2}) \mathbf{Q}_{t_1}^{x_{t_2}}(x_{t_1}).$$

Observe that (3.12) is reduced to the condition [C2] by setting $t = t_{k-1}$, $s = t_k$, $\tilde{x} = \{x_{t_1}, \dots, x_{t_{k-2}}\}$, $x = x_{t_{k-1}}$ and $y = x_{t_k}$. The case of (3.13) is a bit more delicate and requires the use of [C3]. To simplify notation, we set $t = t_1$, $s = t_2$, $x_{t_1} = x$ and $x_{t_2} = y$ and intend to show that $\mathbf{P}_t(x) \mathbf{Q}_s^x(y) = \mathbf{P}_s(y) \mathbf{Q}_t^y(x)$, which amounts to

$$\mathbf{Q}_t^y(x) \left[\sum_{x' \in \mathcal{X}^t} \frac{\mathbf{Q}_t^y(x')}{\mathbf{Q}_s^{x'}(y)} \right]^{-1} = \mathbf{Q}_s^x(y) \left[\sum_{y' \in \mathcal{X}^s} \frac{\mathbf{Q}_s^x(y')}{\mathbf{Q}_t^{y'}(x)} \right]^{-1}.$$

This can be equivalently written as

$$(3.14) \quad \sum_{y' \in \mathcal{X}^s} \frac{\mathbf{Q}_s^x(y') \mathbf{Q}_t^y(x)}{\mathbf{Q}_t^{y'}(x)} = \sum_{x' \in \mathcal{X}^t} \frac{\mathbf{Q}_t^y(x') \mathbf{Q}_s^x(y)}{\mathbf{Q}_s^{x'}(y)}.$$

Using the equality $\sum_{x'} \mathbf{Q}_t^{y'}(x') = \sum_{y'} \mathbf{Q}_s^{x'}(y') = 1$, one can rewrite (3.14) as follows:

$$(3.15) \quad \sum_{x' \in \mathcal{X}^t} \sum_{y' \in \mathcal{X}^s} \frac{\mathbf{Q}_s^x(y') \mathbf{Q}_t^y(x) \mathbf{Q}_s^{x'}(y) \mathbf{Q}_t^{y'}(x')}{\mathbf{Q}_t^{y'}(x) \mathbf{Q}_s^{x'}(y)} = \sum_{y' \in \mathcal{X}^s} \sum_{x' \in \mathcal{X}^t} \frac{\mathbf{Q}_t^y(x') \mathbf{Q}_s^x(y) \mathbf{Q}_t^{y'}(x) \mathbf{Q}_s^{x'}(y')}{\mathbf{Q}_t^{y'}(x) \mathbf{Q}_s^{x'}(y)}.$$

Now, it follows from [C3] that the equality (3.15) is true. Thus, if conditions [C2] and [C3] are fulfilled, then the distribution $\mathbf{P}_\Lambda$ remains the same for any enumeration.

In order to prove the consistency in Kolmogorov's sense, we use the fact that $\mathbf{Q}_t^{\tilde{x}}(\cdot)$ is a probability measure on $\mathcal{X}$. This provides the equality $\sum_{x \in \mathcal{X}^t} \mathbf{Q}_t^{\tilde{x}}(x) = 1$ which implies that

$$\sum_{x \in \mathcal{X}^t} \mathbf{P}_{\Lambda \cup \{t\}}(\tilde{x}x) = \sum_{x \in \mathcal{X}^t} \mathbf{P}_\Lambda(\tilde{x}) \mathbf{Q}_t^{\tilde{x}}(x) = \mathbf{P}_\Lambda(\tilde{x})$$

for any finite $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, any $t \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$ and any $\tilde{x} \in \mathcal{X}^\Lambda$. This concludes the proof.

4. SUFFICIENT CONDITION FOR MIXING

The study of the mixing properties [7] of random fields is of primary interest in probability theory, since they characterize the behavior of additive functionals of the random field by means of central limit theorems [10]. The aim of this section is to describe a simple condition on a one-point finite-conditional distribution satisfying

conditions [C1-C3], that allows to evaluate the mixing properties of the underlying random field. To this end we introduce the notation

$$(4.1) \quad \rho_{s,t} = \sup_{\substack{\Lambda: s \in \Lambda, t \notin \Lambda, |\Lambda| < \infty \\ \tilde{\mathbf{x}}: \text{supp}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Lambda \setminus \{s\}}} \max_{\substack{\mathbf{y}, z \in \mathcal{X}^s \\ x \in \mathcal{X}^t}} |Q_t^{\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y}}(x) - Q_t^{\tilde{\mathbf{x}}z}(x)|$$

for every pair of distinct points $t, s \in \mathbb{Z}^\nu$ and prove the following theorem.

Theorem 4.1. *Let $\tilde{\mathbf{q}} = \{Q_t^{\tilde{\mathbf{x}}}, t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ and } \tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}^t\}$ be a one-dimensional finite-conditional distribution on $\mathcal{X}$, which satisfies the conditions of Theorem 3.1. For every pair of disjoint finite subsets I and V from $\mathbb{Z}^\nu$ the reconstructed from $\tilde{\mathbf{q}}$ random field $\mathbf{P}$ satisfies the inequality*

$$(4.2) \quad \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^V \\ \mathbf{y} \in \mathcal{X}^I}} |\mathbf{P}_V(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq \sum_{s \in I} \sum_{t \in V} \rho_{s,t}.$$

Proof. Denoting the cardinalities of I and V by m and n respectively, we perform induction on $m + n$. First suppose that $m + n = 2$. Then $m = n = 1$ and hence $V = \{t\}$ and $I = \{s\}$. Therefore,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} |\mathbf{P}_t(x) - \mathbf{P}_{t|s}(x|y)| &= \left| \sum_{z \in \mathcal{X}^s} Q_t^z(x) \mathbf{P}_s(z) - Q_t^y(x) \right| \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{X}^s} \mathbf{P}_s(z) |Q_t^z(x) - Q_t^y(x)| \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{X}^s} |Q_t^z(x) - Q_t^y(x)| \leq \rho_{s,t}, \end{aligned}$$

which proves our statement for $m + n = 2$.

Now, we suppose our statement is true for every pair of strictly positive integers (m, n) , such that $m + n \leq k$ and prove (4.2) for $m + n = k + 1$. To this end, we choose an arbitrarily point u in I and set $J = I \setminus \{u\}$. Then

$$(4.4) \quad \begin{aligned} |\mathbf{P}_V(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y})| &\leq |\mathbf{P}_V(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J)| + |\mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \\ &\leq \sum_{s \in J} \sum_{t \in V} \rho_{s,t} + |\mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y})|, \end{aligned}$$

since our statement is assumed to be true for the pair (V, J) . One can easily verify that

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) &= Q_{t'}^{\mathbf{y}_J, \mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}}} (x_{t'}) \mathbf{P}_{V \setminus \{t'\} | J}(\mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}} | \mathbf{y}_J) \\ \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= Q_{t'}^{\mathbf{y}, \mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}}} (x_{t'}) \mathbf{P}_{V \setminus \{t'\} | I}(\mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}} | \mathbf{y}) \end{aligned}$$

for every $t' \in V$, and hence

$$(4.5) \quad \left| \mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right| \leq \left| Q_{t'}^{\mathbf{y}_J, \mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}}} (x_{t'}) - Q_{t'}^{\mathbf{y}, \mathbf{x}_{V \setminus \{t'\}}} (x_{t'}) \right| \\ + \left| \mathbf{P}_{V \setminus t'|J}(\mathbf{x}_{V \setminus t'}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V \setminus t'|I}(\mathbf{x}_{V \setminus t'}|\mathbf{y}) \right|.$$

It follows from the total probabilities formula that

$$\left| Q_{t'}^{\mathbf{y}_J, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) - Q_{t'}^{\mathbf{y}, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) \right| \\ = \left| \sum_{z \in \mathcal{X}^u} \left(Q_{t'}^{\mathbf{y}_J, z, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) - Q_{t'}^{\mathbf{y}, z, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) \right) \mathbf{P}(z|\mathbf{y}_J, \mathbf{x}_{V \setminus t'}) \right| \\ \leq \max_{z \in \mathcal{X}^u} \left| Q_{t'}^{\mathbf{y}_J, z, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) - Q_{t'}^{\mathbf{y}, z, \mathbf{x}_{V \setminus t'}} (x_{t'}) \right| \leq \rho_{u, t'}.$$

Combining with (4.5), we get

$$\left| \mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right| \leq \rho_{u, t'} + \left| \mathbf{P}_{V \setminus t'|J}(\mathbf{x}_{V \setminus t'}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V \setminus t'|I}(\mathbf{x}_{V \setminus t'}|\mathbf{y}) \right|.$$

Repeating the same argument, we obtain

$$\left| \mathbf{P}_{V|J}(\mathbf{x}|\mathbf{y}_J) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right| \leq \sum_{t' \in V} \rho_{u, t'}.$$

Joining this estimate with (4.4), we complete the proof.

As an application of Theorem 4.1, let us consider the one-dimensional case $\nu = 1$. Assume that there exist $\rho_* < 1$ and $d_* > 0$, such that $\rho_{s, t} \leq \rho_*^{|t-s|}$ as soon as $|t-s| \geq d_*$. Then, one can easily verify that

$$\sum_{s \in I} \sum_{t \in V} \rho_{s, t} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_*^{d+i+j} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \rho_*^{d+k} = \frac{\rho_*^d}{(1-\rho_*)^2}$$

for every pair of finite intervals $V, I \subset \mathbb{Z}$ such that

$$d = d(V, I) = \min_{t \in V, s \in I} |t-s| \geq d_*.$$

This short computation shows that the quantity $|\mathbf{P}_V(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{V|I}(\mathbf{x}|\mathbf{y})|$ exponentially decreases to zero when the distance between the intervals V and I tends to infinity.

5. CONCLUSION

In the present paper, we have introduced the notion of the one-point finite-conditional distributions and established necessary and sufficient conditions (cf. [C1-C3] in Theorem 3.1) for which such a system to be the set of conditional probabilities of a strictly positive random field on $\mathbb{Z}^\nu$ and with finite state-space. The conditions [C2-C3], which are the most important ones, can be observed as consistency conditions in the same spirit as the Kolmogorov consistency conditions for finite-dimensional distributions

of random processes indexed by infinite sets. It is demonstrated that it is possible to assess the rate of mixing of a random field by evaluating some characteristics of one-point finite-conditional distributions, without resorting to the computation of the unconditional distributions of the random field.

The relaxation of the assumption of strong positiveness, *e.g.* by introducing a notion of weakly positive random fields in the spirit of [2], is an essential open problem.

We wish to thank Sergueï Dashyan for his careful reading of the initial version of the manuscript and his numerous valuable suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, "Description of random fields by means of one-point conditional distributions and some applications", *Markov Process. Related Fields*, **7**(2), 193-214 (2001).
- [2] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, "Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very weak positivity", *J. Statist. Phys.*, **117** (1-2), 281-300 (2004).
- [3] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, "On Gibbsianness of random fields. Markov Process. Related Fields", **15** (1), 81-104 (2009).
- [4] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, "Inclusion-exclusion description of random fields", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **30** (6), 50-61 (1995).
- [5] R. L. Dobrushin, "The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions", *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **2** (4), 44-57 (1968).
- [6] R. L. Dobrushin, "Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularity", *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **13**, 201-229 (1968).
- [7] P. Doukhan, *Mixing. Properties and examples*, *Lecture Notes in Statistics*, **85** (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [8] R. Fernández, R., G. Maillard, "Construction of a specification from its singleton part", *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **2**, 297-315 (2006).
- [9] S. Geman, D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images", *IEEE Transl. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **6**, 721-741 (1984).
- [10] B. Nahapetian, *Limit theorems and some applications in statistical physics*, *Teubner-Texte zur Mathematik* **123** (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1991).
- [11] N. Shental, A. Zomet, T. Hertz, Y. Weiss, "Learning and inferring image segmentations using the GBP typical cut algorithm", in **2** (Proceedings of ICCV, October 13-16, 2003).

Поступила 19 октября 2010

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *duman@ysu.am*

Аннотация. Получены условия разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q, \\ u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q).$$

Доказано, в частности, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и f, F из соответствующих функциональных пространств существует решение неоднородной задачи, оно принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r |\nabla u|^2 dx \leq \\ \leq C (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3 (1 + |\ln r|)^{\frac{3}{2}} f^2 dx + \int_Q r (1 + |\ln r|)^{\frac{3}{2}} |F|^2 dx),$$

где $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q , а постоянная C не зависит от u_0, f, F .

MSC2000 number: 35B60, 35D99, 35J25

Ключевые слова: эллиптические уравнения, задача Дирихле, разрешимость задачи Дирихле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$, для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = \\ &= f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad u|_{\partial Q} = u_0,$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и почти всех $x \in Q$ с положительной постоянной γ , а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Результаты настоящей работы анонсированы в работе [1]. Как и в работах [2], [3], посвященных изучению поведения вблизи границы области Q решения задачи Дирихле для уравнения без младших членов, будем предполагать, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини

$$(1.3) \quad \left| \bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y) \right| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех x и y из ∂Q , где $\omega \geq 0$ — монотонная функция такая, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе: можно так изменить их значения на множестве нулевой (лебеговой) меры, что будет выполняться оценка

$$(1.4) \quad |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Можно считать, что функция ω в условиях (1.3) и (1.4) одна и та же.

Относительно коэффициентов $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ и правой части будем предполагать выполнение следующих условий:

существует постоянная $M > 0$, такая что

$$(1.5) \quad |\bar{b}(x)| \leq \frac{M}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}}, \quad x \in Q,$$

$$(1.6) \quad \int_0^1 t(1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) = \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|,$$

$$(1.7) \quad \int_0^1 t^3(1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) = \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|,$$

$$(1.8) \quad r^{3/2}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4} f(x) \in L_2(Q)$$

$$(1.9) \quad r^{1/2}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/4} F(x) \in (L_2(Q))^n,$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию u из $W_{2,loc}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле обобщенных функций (см. [4]), т.е. такую, что для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x) \nabla u + \bar{c}(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((\bar{b}(x), \nabla u) + d(x)u) \eta dx = \int_Q (f\eta + (F, \nabla \eta)) dx,$$

и удовлетворяющую условию (1.2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x) \right)^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0.$$

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задачи (1.1), (1.2).

В работах [5] – [7] установлено, что решение u задачи (1.1), (1.2) (если оно существует) принадлежит пространству Гуцина $C_{n-1}(\bar{Q})$ $(n-1)$ -мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций и имеет ограниченный весовой интеграл Дирихле:

$$\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Напомним, что банахово пространство $(n-1)$ -мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций является пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, порожденной (точнее см. [2]) функционалом

$$\ell(v) = \int_0^\infty M_{n-1}(\{x \in \bar{Q} : |v(x)|^2 > \lambda\}) d\lambda, \quad v \in C(\bar{Q}),$$

в котором

$$M_{n-1}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^{n-1} : \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{B}_{r_i} \supset E \right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $\mathcal{B}_{r_i}$ радиуса r_i . Отметим только, что функции из $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$ имеют следы на любом замкнутом множестве $\Gamma \subset \bar{Q}$ положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, и если $\Gamma \subset \partial Q \in C^1$, то множество таких следов совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим следующие задачи Дирихле:

$$(1.10) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla v) = 0 \\ v|_{\partial Q} = u_0 \end{cases}$$

и

$$(1.11) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = -(\bar{b}, \nabla w) + \operatorname{div}(\bar{c}w) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + \operatorname{div}(\bar{c}v) - dv + f - \operatorname{div}F \\ w|_{\partial Q} = 0, \end{cases}$$

где функция v в правой части уравнения (1.11) есть решение задачи (1.10).

Справедливость следующего утверждения очевидна.

Утверждение 1.1. Пусть функция v является решением задачи (1.10). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (1.11).

Задача (1.10) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [2]), ее решение v принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива следующая оценка

$$\|v\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \operatorname{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2,$$

с независимой от u_0 постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1.1, задача (1.1), (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (1.11).

Введем следующие пространства:

$$\mathcal{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W_{2,loc}^1 : \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty, u \in C_{n-1}(\bar{Q}) \right\},$$

$$\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}^2 = \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$\mathring{\mathcal{U}}(Q) \equiv \left\{ u \in \mathcal{U}(Q), u|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Следуя [3], обозначим через $\mathring{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r(1 + |\ln r|)^{3/2}} dx,$$

а через $\mathring{H}(Q)$ - пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}(Q)} = \int_Q \left(r(1 + |\ln r|)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r(1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx.$$

Напомним, что $r(x)$ - расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Имеют место следующие вложения

$$\mathring{H}_1(Q) \subset \mathring{W}_2^1(Q) \subset \mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q).$$

Справедливость вложения $\mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q)$ установлена в работе [3], остальные вложения вытекают из следующих оценок для функций из $C_0^\infty(Q)$:

$$\|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{H}_1(Q)} \quad \text{и} \quad \|\eta\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \text{const} \|\eta\|_{\mathring{W}_2^1(Q)},$$

где постоянные не зависят от η . Справедливость первой оценки очевидна, а вторую оценку можно получить применением неравенства Харди, см. [8] (подробнее см. доказательство теоремы 1).

Так как решение задачи (1.1), (1.2) и решение задачи (1.10) принадлежат пространству $\mathcal{U}(Q)$, см. [7], [2], то из утверждения 1.1 следует, что решение w задачи (1.11) принадлежит пространству $\mathring{\mathcal{U}}(Q)$.

Рассмотрим далее выражение

$$Tu \equiv -(\bar{b}, \nabla u) + \text{div}(\bar{c}u) - du$$

из правой части уравнения (1.11).

Теорема 1.1. *T является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в сопряженное к $\mathring{H}_1(Q)$ пространство $[\mathring{H}_1(Q)]^*$.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку граница области гладкая, $\partial Q \in C^1$, то существует $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условию:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } x' \in R_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром $U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$ радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = \frac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}$, $m = 1, \dots, p$. Обозначим

$$U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}, \quad r_m = r_{x^m}, \quad \ell_m = \ell_{x^m}, \quad \varphi_m = \varphi_{x^m}, \quad \text{где } m = 1, \dots, p.$$

Пусть

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(r_1, \dots, r_p).$$

Тогда каждый из криволинейных "цилиндров"

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, m = 1, \dots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m , также как и в $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > \ell_0\}$$

содержится в объединении "цилиндров" $\Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$: т.е.

$$Q^{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) \leq \ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \dots, p$, имеем:

$$r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер m , $1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства R_n на себя соотношениями

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')), \quad x = (x', x_n) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')), \quad y = (y', y_n).$$

Образ $\Pi_m^{\ell_m, h}$ при отображении $\mathcal{L}$ будем обозначать через $\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$, т.е. $\mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}$.

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Обозначим $u(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{u}(y)$, $\eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y)$. Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta \rangle \equiv - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx.$$

В силу (1.5)

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq M \int_Q \frac{|\nabla u(x)| |\eta(x)|}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \leq \\ & \leq M \left(\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq M \|u\|_{U(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{1/2}.$$

Далее, применяя неравенство Харди, имеем

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx &\leq \int_{Q_{i_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \leq \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^3 (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy = \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \frac{\left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2}{y_n^3 (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy' \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\frac{\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau}{y_n^{3/2} (1 + |\ln y_n|)^{3/4}} \right)^2 dy_n \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \frac{\tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n)}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy_n \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{|\nabla \tilde{\eta}(y)|^2}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{3/2}} dy \right) \leq \\ (1.12) \quad &\leq \text{const} \int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{U(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (1.6)

$$\left| \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \int_Q C(r(x)) |u(x)| |\nabla \eta(x)| dx \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left(\int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq (C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx + \\
& + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) u^2(x) dx)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq (C^2(\ell_0) \max_{x \in \bar{Q}_{\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \\
& + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{3/2} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) dy_n \times \\
& \quad \times \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy')^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
& \leq \text{const} (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

И наконец, в силу (1.7) и (1.12), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx \right| \leq \int_Q D(r(x)) |u(x)| |\eta(x)| dx \leq \\
& \leq \left(\int_Q r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}(D^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_{\ell_m, h}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) u^2(x) dx)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const}(D^2(\ell_0) \max_{x \in Q_{\ell_0}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \\
&+ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_{\ell_m, h}} y_n^3 \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{\frac{3}{2}} D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const}(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^3 \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{3/2} D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \times \\
&\quad \times \max_{\substack{0 \leq y_n \leq h \\ |y'| < \ell_m}} \int \tilde{u}^2(y', y_n) dy')^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{\substack{0 \leq y_n \leq h \\ |y'| < \ell_m}} \int \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
\end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, для произвольных $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка

$$|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}$$

с независимой от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в $\dot{H}_1(Q)$, то из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность рассматриваемого оператора $T : \mathcal{U}(Q) \rightarrow [\dot{H}_1(Q)]^*$. Теорема доказана. $\square$

В [3] установлено, что для любой правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ существует решение задачи

$$(1.13) \quad -\text{div}(A \nabla u) = g', \quad u|_{\partial Q} = 0,$$

оно принадлежит пространству $\dot{H}(Q)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_{\dot{H}(Q)} \leq C \|g'\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}$$

с независимой от g' постоянной. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ решение $u \in \dot{H}(Q)$

задачи (1.13), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$.

Пусть w является решением задачи (1.11). Тогда нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения

$$w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - \operatorname{div}F)$$

в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$, где v – решение задачи (1.10), (1.11). С другой стороны, если функция w из пространства $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$ является решением операторного уравнения

$$w = \mathcal{L}_0^{-1}(Tw + Tv + f - \operatorname{div}F),$$

то очевидно w является решением задачи (1.11). Таким образом справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.2. Функция w является решением задачи (1.11) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения

$$(1.14) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \quad w \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q),$$

в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$, где $g = Tv + f - \operatorname{div}F$, а v – решение задачи (1.10).

Заметим, что при выполнении условий (1.8), (1.9) слагаемое $f - \operatorname{div}F$ в правой части уравнения (1.11) принадлежит $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ (см. [3]). Далее, наряду с уравнением (1.14) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$:

$$(1.15) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \overset{\circ}{H}(Q).$$

Из теоремы 1.2 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.3. Если $g \in \left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$, то решение (в $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$) уравнения (1.14) является решением (в $\overset{\circ}{H}(Q)$) уравнения (1.15) с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.

Замечание 1.1. На самом деле справедливо более сильное утверждение, а именно, если правая часть уравнения (1.14) из $\overset{\circ}{H}(Q)$, то решение также принадлежит $\overset{\circ}{H}(Q)$.

Объединяя утверждения 1.2 и 1.3, получаем

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция w являлась решением задачи (1.11) необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (1.15) в пространстве $\mathring{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v решение задачи (1.10).*

Далее, если рассмотреть оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовом пространстве $\mathring{H}(Q)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\mathring{H}(Q)$ в $\mathring{H}(Q)$.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является ограниченным линейным оператором, действующим из пространства $[\mathring{H}_1(Q)]^*$ в пространство $\mathring{H}(Q)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор T является вполне непрерывным линейным оператором из $\mathring{H}(Q)$ в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Рассмотрим последовательность операторов

$$T_k w = -(\bar{b}_k(x), \nabla w(x)) + \operatorname{div}(\bar{c}_k(x)w(x)) - d_k(x)w(x), \quad w \in \mathring{H}(Q), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b}_k(x) &= \begin{cases} \bar{b}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ \bar{c}_k(x) &= \begin{cases} \bar{c}(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ d_k(x) &= \begin{cases} d(x), & \text{если } r(x) > \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } r(x) \leq \frac{1}{k}. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко видеть, что оператор T_k , $k \geq 1$, является вполне непрерывным линейным оператором из $\mathring{H}(Q)$ в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Действительно, пусть $\{w(x)\}$ - ограниченное множество в $\mathring{H}(Q)$. Тогда, очевидно, множества $\{(\bar{b}_k(x), \nabla w(x))\}$, $\{\bar{c}_k(x)w(x)\}$, $\{d_k(x)w(x)\}$ ограничены в $L_2(Q)$, тем самым компактны в $\mathring{W}_2^{-1}(Q)$ (см., например [9]) и, следовательно, в $[\mathring{H}_1(Q)]^*$. Покажем, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для произвольных $w \in \mathring{H}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle (T - T_k)w, \eta \rangle &= - \int_{Q^{1/k}} (\bar{b}(x), \nabla w(x)) \eta(x) dx - \int_{Q^{1/k}} (\bar{c}(x)w(x), \nabla \eta(x)) dx - \\ &\quad - \int_{Q^{1/k}} d(x)w(x) \eta(x) dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Далее будем следовать схеме доказательства теоремы 1.1. Будем считать $k > \frac{1}{\ell_0}$.

В силу (1.5), (1.12)

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq M \int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla w(x)| |\eta(x)|}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/4}} dx \leq \\ &\leq M \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{1/2} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{const}{(1 + |\ln \frac{1}{k}|)^{1/4}} \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} = \varepsilon_1(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу (1.6)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{|\nabla \eta(x)|^2}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{3/2} C^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/2k} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{\frac{3}{2}} C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \left(\frac{5}{4} \int_0^{1/k} t(1 + |\ln t|)^{3/2} C^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/2k} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \varepsilon_2(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

И наконец, в силу (1.7), (1.12), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq \left(\int_{Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\quad \times \left(\int_{Q^{1/k}} \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h} \cap Q^{1/k}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} D^2(r(x)) w^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\sum_{m=1}^p \int_0^{\sqrt{5}/2k} dy_n \int_{|y'| < \ell_m} y_n^3 \left(1 + \left| \ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right| \right)^{\frac{3}{2}} D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n \right) \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\quad \times \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{3/2} D^2(t) dt \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq \sqrt{5}/2k} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{w}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\int_0^{1/k} t^3 (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)} \leq \varepsilon_3(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеет место оценка

$$|\langle (T - T_k)w, \eta \rangle| \leq \varepsilon(k) \|w\|_{\dot{H}(Q)} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)},$$

где $\varepsilon(k) = \varepsilon_1(k) + \varepsilon_2(k) + \varepsilon_3(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\|T - T_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, как предел вполне непрерывных линейных операторов, оператор T также является вполне непрерывным линейным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, изучение разрешимости задачи (1.1), (1.2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (1.15) в гильбертовом пространстве $\dot{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма, для разрешимости уравнения (1.15) в пространстве $\dot{H}(Q)$ необходимо и достаточно

условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, операторное уравнение (1.15) в гильбертовом пространстве $\mathring{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\mathring{H}(Q)$, если однородное уравнение

$$(1.16) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \mathring{H}(Q).$$

имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Но, в силу теоремы 1.3, решение уравнения (1.16) является решением однородной задачи

$$(1.17) \quad \mathcal{L}w = 0, \quad w|_{\partial Q} = 0.$$

Тем самым для задачи (1.1), (1.2) имеет место следующая теорема об однозначной разрешимости.

Теорема 1.5. *Пусть однородная задача (1.17) имеет только тривиальное решение. Тогда для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$, f и F , удовлетворяющих условиям (1.8), (1.9), существует решение задачи (1.1), (1.2). Оно принадлежит пространству $\mathcal{U}(Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx &\leq \text{const} (\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \\ &+ \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx + \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx), \end{aligned}$$

с независимой от u_0 , f и F постоянной.

Доказательство. Существование решения задачи (1.1), (1.2) мы уже доказали выше. Установим справедливость оценки для решения. Пусть u - решение задачи (1.1), (1.2). Тогда $u = v + w$, где v - решение задачи (1.10), w - решение задачи (1.11). Следовательно $\|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|w\|_{\mathcal{U}(Q)}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|w\|_{\mathcal{U}(Q)} &\leq \|w\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \text{const} \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \text{div}F)\|_{\mathring{H}(Q)} \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|f\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*} + \|\text{div}F\|_{[\mathring{H}_1(Q)]^*} \right), \end{aligned}$$

$$\|v\|_{\mathcal{U}(Q)} \leq \text{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}.$$

В силу (1.8), (1.9) и (1.12), для произвольной функции η из $C_0^\infty(Q)$ имеем

$$|\langle f, \eta \rangle| = \left| \int_Q f(x) \eta(x) dx \right| \leq \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx \right)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq \text{const} \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}, \\
 & |\langle \text{div} F, \eta \rangle| = \left| \int_Q (F(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \\
 & \leq \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |F(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\dot{H}_1(Q)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{U(Q)} & \leq \text{const} \left(\|v\|_{U(Q)} + \|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} + \|\text{div} F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} \right) \leq \\
 & \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(Q)} + \left(\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right)
 \end{aligned}$$

с независимой от u_0, f, F постоянной. Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper gives some solvability conditions of the Dirichlet problem for the second order elliptic equation

$$\begin{aligned}
 & -\text{div} (A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \text{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \text{div} F(x), \quad x \in Q, \\
 & u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q)
 \end{aligned}$$

in bounded domain $Q \subset R_n$ ($n \geq 2$) with smooth boundary $\partial Q \in C^1$. In particular, it is proved that if the homogeneous problem has only the trivial solution, then for any $u_0 \in L_2(\partial Q)$ and f, F from the corresponding functional spaces the solution of the non-homogeneous problem exists, from Gushchin's space $C_{n-1}(\bar{Q})$ and the following

inequality is true:

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r |\nabla u|^2 dx \leq \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q r^3 (1 + |\ln r|)^{3/2} f^2 dx + \int_Q r (1 + |\ln r|)^{3/2} |F|^2 dx \right), \end{aligned}$$

where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q and the constant C does not depend on u_0 , f and F .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ж. Думанян, “О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **110**, no. 2, 120 – 127 (2010).
- [2] А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., **137(179)**, no. 1(9), 19 – 64 (1988).
- [3] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., **182**, no. 6, 787 – 810 (1991).
- [4] В. П. Михайлов, Дифференциальные Уравнения в Частных Производных, М., Наука, 424 с (1983).
- [5] В. Ж. Думанян, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **108**, no. 2, 110 – 116 (2008).
- [6] В. Ж. Думанян, “Об оценке весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, 2008, **108**, no. 1, 45 – 49 (2008).
- [7] В. Ж. Думанян, “О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Известия НАН Армении, серия Математика, **45**, no. 1, 31 – 52 (2010).
- [8] В. Г. Мазья, Пространства С. Л. Соболева, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 416 с. (1985).
- [9] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”, Лекционные курсы НОЦ, Вып.7, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН (МИАН), М., МИАН, 2007, 146 с. (2007).

Поступила 7 сентября 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 53-58.

ОБРАТИМЫЕ МЕДИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И ГРУППА ОПЕРАЦИЙ

Э. НАЗАРИ

Пайами Нуур Университет, Гасершерин, Иран
E-mail: nazari_ibrahim2008@yahoo.com

Аннотация. В работе изучается связь медиальных обратимых справа (слева) бинарных алгебр с правой (левой) группой бинарных операций.

MSC2000 number: 03C05, 20N05, 20M99, 20B99.

Ключевые слова: Медиальная алгебра, правая (левая) квазигруппа, правая (левая) группа бинарных операций, правая (левая) полугруппа бинарных операций.

1. ВВЕДЕНИЕ

n -арная операция f , определенная на множестве Q , называется идемпотентной, если выполняется тождество $f(x, \dots, x) = x$. Алгебра $(Q; \Sigma)$ называется идемпотентной, если каждая операция $f \in \Sigma$ идемпотентна.

Пусть f – n -арная и g – m -арная операция определенные на множестве Q . Пара (f, g) называется медиальной (иногда абелевой, энтропичной, биссиметричной, бикоммутативной), если выполняется тождество:

$$f(g(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, g(x_{n1}, \dots, x_{nm})) = g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})).$$

В случае бинарных операций f, g имеем тождество:

$$f(g(x, y), g(u, v)) = g(f(x, u), f(y, v)).$$

Операция f называется медиальной, если пара (f, f) медиальна. В случае бинарного f имеем тождество (см. [1],[2]):

$$f(f(x, y), f(u, v)) = f(f(x, u), f(y, v)).$$

Алгебра $(Q; \Sigma)$ называется медиальной, если для любых операций $f, g \in \Sigma$ пара (f, g) медиальна [3]. Другими словами, в алгебре $(Q; \Sigma)$ выполняется сверхтождество медиальности (абелевости) [4]. Идемпотентная и медиальная алгебра называется модой [5]. О приложениях таких алгебр в выпуклом анализе и статистической механике см. [5].

В [1] характеризуются все непрерывные бинарные функции $f : I^2 \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$, которые строго монотонны по каждому аргументу, коммутативны, идемпотентны и медиальны. Однако, легко заметить, что если пара (f, g) n -арных коммутативных и идемпотентных операций медиальна, тогда $f = g$. Например, в бинарном случае:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(g(x, x), g(y, y)) = g(f(x, y), f(x, y)) = g(f(y, x), f(x, y)) = \\ &= f(g(y, x), g(x, y)) = f(g(x, y), g(x, y)) = g(x, y). \end{aligned}$$

Поэтому, если пара (f, g) различных коммутативных и идемпотентных операций медиальна, то их арности различны.

Первый известный результат о медиальных операциях (алгебрах) относится к квазигруппам [6, 7]. Более общий результат содержится в [8], где характеризуются медиальные пары (f, g) бинарных квазигрупповых операций. Откуда в качестве следствия возникает характеристика медиальных алгебр с квазигрупповыми операциями: *если $(Q; \Sigma)$ – бинарная медиальная алгебра с квазигрупповыми операциями, тогда существует абелева группа $Q(+)$ такая, что каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу:*

$$A_i(x, y) = \varphi_i x + c_i + \psi_i y,$$

где $c_i \in Q$, $\varphi_i, \psi_i \in \text{Aut } Q(+)$. В частности, если операция $A_i \in \Sigma$ еще и идемпотентна, тогда $A_i(x, y) = \varphi_i x + \psi_i y$, где $\varphi_i, \psi_i \in \text{Aut } Q(+)$.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В §2 вводятся предварительные понятия и результаты. Здесь определяются правое и левое умножение бинарных операций. В §3 изучается связь медиальных и обратимых справа (слева) бинарных алгебр с правой (левой) группой бинарных операций. В результате, исходя из обратимых медиальных алгебр, можно получить как обратимые справа так и обратимые слева медиальные алгебры.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Множество всех бинарных операций, определенных на множестве Q , обозначим через $\mathcal{F}_Q^2$, и на этом множестве определим следующие две операции:

$$A \cdot B(x, y) = A(x, B(x, y)),$$

$$A \circ B(x, y) = A(B(x, y), y),$$

где $A, B \in \mathcal{F}_Q^2$, $x, y \in Q$. Операции $(\cdot)$ и $(\circ)$ называются правым и левым умножением операций и изучались в работах многих авторов (см. [9] – [15]).

Лемма 2.1. Множество $\mathcal{F}_Q^2$ образует моноиды относительно левого и правого умножения операций. Эти два моноида изоморфны. Единичным элементом моноида $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$ служит элемент $E \in \mathcal{F}_Q^2$, определенный по правилу $E(x, y) = y$, а единичным элементом моноида $\mathcal{F}_Q^2(\circ)$ – элемент $F \in \mathcal{F}_Q^2$, определенный по правилу $F(x, y) = x$. Изоморфизм между указанными моноидами устанавливается соответствием $A \rightarrow A^*$, где $A^*(x, y) = A(y, x)$. Множество всех бинарных идемпотентных операций на Q образует подполугруппу в полугруппах $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$ и $\mathcal{F}_Q^2(\circ)$.

Бинарная операция $A \in \mathcal{F}_Q^2$ называется обратимой справа (слева), если для любых $a, b \in Q$ уравнение $A(a, x) = b$ (соответственно $A(y, a) = b$) имеет единственное решение в Q . Для однозначно определенных решений $x, y \in Q$ приняты обозначения: $x = A^{-1}(a, b)$, $y = {}^{-1}A(b, a)$. Таким образом, для любых $a, b \in Q$ имеем

$$A(a, A^{-1}(a, b)) = b, \quad A^{-1}(a, A(a, b)) = b,$$

если A – обратима слева, и

$$A({}^{-1}A(b, a), a) = b, \quad {}^{-1}A(A(b, a), a) = b,$$

если A – обратима справа. Операция A^{-1} (соответственно, ${}^{-1}A$) называется правой (левой) обратной для обратимой справа (слева) операции A . Легко заметить, что операция A^{-1} (соответственно, ${}^{-1}A$) также обратима справа (слева), причем

$$(A^{-1})^{-1} = A = {}^{-1}({}^{-1}A), \quad (A^{-1})^* = {}^{-1}(A^*), \quad ({}^{-1}A)^* = (A^*)^{-1}.$$

Бинарная операция $A \in \mathcal{F}_Q^2$ будет обратимой справа (слева) тогда и только тогда, когда она обратима в моноиде $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$ (соответственно, $\mathcal{F}_Q^2(\circ)$).

Бинарная операция $A \in \mathcal{F}_Q^2$ называется обратимой, если она обратима справа и слева. В этом случае, операция A имеет правую и левую обратные и для них справедливы равенства:

$$({}^{-1}({}^{-1}A))^{-1} = (({}^{-1}A)^{-1}) = A^*.$$

Если операция $A \in \mathcal{F}_Q^2$ обратима (справа, слева), то группоид $Q(A)$ называется (левой, правой) квазигруппой. Квазигруппа (левая, правая) с единицей называется лупой (левой, правой).

О приложениях правых (левых) квазигрупп в геометрии и топологии (теории узлов) см. [16, 17].

Множество всех обратимых справа (слева) операций, определенных на Q , обозначим через $\mathcal{F}_Q^r$ (соответственно, $\mathcal{F}_Q^l$).

Лемма 2.2 (см., напрмер, [13]). *Множество $\mathcal{F}_Q^r$ образует группу относительно правого умножения операций. Множество $\mathcal{F}_Q^\ell$ образует группу относительно левого умножения операций. Эти две группы изоморфны.*

Группы $\mathcal{F}_Q^r(\cdot)$ и $\mathcal{F}_Q^\ell(\circ)$ называются соответственно правой и левой группой операций.

Обратимость операций можно определять и с помощью ортогональности операций [18, 19].

Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется обратимой (справа, слева), если каждая операция $A \in \Sigma$ обратима (справа, слева).

Каждая обратимая справа (слева) алгебра $(Q; \Sigma)$ порождает обратимую справа (слева) алгебру $(Q; \Sigma^{-1})$ (соответственно алгебру $(Q; {}^{-1}\Sigma)$), где

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} &= \{A^{-1} \mid A \in \Sigma\}, \\ {}^{-1}\Sigma &= \{{}^{-1}A \mid A \in \Sigma\}.\end{aligned}$$

Следовательно, каждая обратимая алгебра $(Q; \Sigma)$ порождает еще пять обратимых алгебр: $(Q; \Sigma^{-1})$, $(Q; {}^{-1}\Sigma)$, $(Q; {}^{-1}(\Sigma^{-1}))$, $(Q; ({}^{-1}\Sigma)^{-1})$ и $(Q; \Sigma^*)$, где

$$\Sigma^* = \{A^* \mid A \in \Sigma\}.$$

Причем алгебра $(Q; \Sigma^*)$ имеет смысл для любой алгебры $(Q; \Sigma)$.

3. МЕДИАЛЬНОСТЬ И ПРАВАЯ (ЛЕВАЯ) ГРУППА ОПЕРАЦИЙ

Если $\Sigma \subseteq \mathcal{F}_Q^r$, то через (Σ) обозначим подгруппу группы $\mathcal{F}_Q^r(\cdot)$, порожденную подмножеством Σ . Если же $\Sigma \subseteq \mathcal{F}_Q^\ell$, то через $((\Sigma))$ обозначим подгруппу группы $\mathcal{F}_Q^\ell(\circ)$, порожденную Σ .

Лемма 3.1. *Если обратимая справа алгебра $(Q; \Sigma)$ медиальна, тогда алгебра $(Q; \Sigma \cup \Sigma^{-1})$ также будет медиальной.*

Доказательство. Для любых $A, B \in \Sigma$ и для любых $x, y, u, v \in Q$ рассмотрим следующее равенство

$$A^{-1}(B(x, y), B(u, v')) = B(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v))$$

(существование элемента $v' \in Q$ вытекает из обратимости справа операций A^{-1} и B). Откуда, по определению A^{-1} , имеем

$$A(B(x, y), B(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v))) = B(u, v')$$

и по определению медиальности

$$B(A(x, A^{-1}(x, u)), A(y, A^{-1}(y, v))) = B(u, v'),$$

т.е. $B(u, v) = B(u, v')$ и $v = v'$. Итак,

$$A^{-1}(B(x, y), B(u, v)) = B(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v)).$$

Из доказанного тождества теперь следует тождество

$$A^{-1}(B^{-1}(x, y), B^{-1}(u, v)) = B^{-1}(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v)).$$

Лемма 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. *Если обратимая слева алгебра $(Q; \Sigma)$ медиальна, то алгебра $(Q; \Sigma \cup^{-1} \Sigma)$ также будет медиальной.*

Теорема 3.1. *Если обратимая справа алгебра $(Q; \Sigma)$ медиальна, тогда расширенная алгебра $(Q; (\Sigma))$ также будет медиальной.*

Доказательство. По индукции докажем справедливость тождества

$$S(P(x, y), P(u, v)) = P(S(x, u), S(y, v))$$

для любых $S, P \in (\Sigma)$. Пусть

$$(3.1) \quad \begin{aligned} S &= A_1^{\varepsilon_1} \dots A_m^{\varepsilon_m}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \\ P &= B_1^{\delta_1} \dots B_k^{\delta_k}, \quad \delta_j = \pm 1, \end{aligned}$$

где $A_i, B_j \in \Sigma$. Длиной $\partial(S)$ операции $S \in (\Sigma)$ назовем число операций $A_i \in \Sigma$ в каком-нибудь представлении (3.1). Когда $\partial(S) = \partial(P) = 1$, тогда $S, P \in \Sigma \cup^{-1} \Sigma$, и утверждение следует из леммы 3.1. Предположим справедливость утверждения в случае $\partial(S), \partial(P) \leq n - 1$. Далее возможны три случая

- 1) $\partial(S) = n, \partial(P) < n$. Тогда $S = S_1 \cdot S_2$, где $\partial(S_1) < n$ и $\partial(S_2) < n$, и по предположению индукции:

$$\begin{aligned} S(P(x, y), P(u, v)) &= S_1 \cdot S_2(P(x, y), P(u, v)) = \\ S_1(P(x, y), S_2(P(x, y), P(u, v))) &= S_1(P(x, y), P(S_2(x, u), S_2(y, v))) = \\ P(S_1(x, S_2(x, u)), S_1(y, S_2(y, v))) &= \\ = P(S_1 \cdot S_2(x, u), S_1 \cdot S_2(y, v)) &= P(S(x, u), S(y, v)). \end{aligned}$$

- 2) $\partial(S) < n, \partial(P) = n$. Здесь имеем $P = P_1 \cdot P_2$, где $\partial(P_1) < n$ и $\partial(P_2) < n$, и рассмотрение сводится к случаю 1).
- 3) $\partial(S) = \partial(P) = n$. Полагая $S = S_1 \cdot S_2$, где $\partial(S_1) < n$ и $\partial(S_2) < n$, и рассмотрение сводится к случаю 2).

Теорема 3.1 доказана. □

Теорема 3.2. *Если обратимая слева алгебра $(Q; \Sigma)$ медиальна, тогда расширенная алгебра $(Q; ((\Sigma)))$ также будет медиальной.*

Если $\Sigma \subseteq \mathcal{F}_Q^2$, то через $\Sigma(\cdot)$ обозначим подполугруппу полугруппы $\mathcal{F}_Q^2(\cdot)$, порожденную подмножеством Σ , а через $\Sigma((\cdot))$ – подполугруппу полугруппы $\mathcal{F}_Q^2(\circ)$ порожденную подмножеством Σ .

Следствие 3.1. *Если алгебра $(Q; \Sigma)$ медиальна, тогда расширенные алгебры $(Q; \Sigma(\cdot))$ и $(Q; \Sigma((\cdot)))$ также будут медиальными.*

Abstract. The paper studies the connection between right and left invertible binary algebras and right and left groups of binary operations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Я. Ацел, Ж. Домбр, Функциональные Уравнения с Несколькими Переменными, М., Физматлит (2003).
- [2] J. Jezek, T. Kepka, Medial groupoids, Praha (1983).
- [3] А. Г. Курош, Общая алгебра, М. (1974).
- [4] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во ЕГУ (1986).
- [5] A. B. Romanowska, J. D. H. Smith, Modes, Singapore: World Scientific (2002).
- [6] K. Toyoda, “On axioms of linear functions”, *Pror. Imp. Acad. Tokyo*, **17**, 221 – 227 (1941).
- [7] D. G. Murdoch, “Structure of abelian quasigroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49**, 392 – 409 (1941).
- [8] Yu. M. Movsisyan, “Generalization of Toyoda theorem”, *Loops’99*, Praha, July 27 - August 1, 26 – 27 (1999).
- [9] S. K. Stein, “On the foundation of quasigroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85**, 228 – 256 (1957).
- [10] K. Urbanik, “On algebraic operations in idempotent algebras”, *Colloquium Math.* **XIII**, 129 – 157 (1965).
- [11] В. Д. Белоусов, “Системы квазигрупп с обобщенными тождествами”, *УМН*, **20**, 75 – 146 (1965).
- [12] Ю. М. Мовсисян, “Мультипликативная группа поля и сверхтождества”, *Изв. АН СССР, сер. Матем.*, **53** (5), 1040 – 1055 (1989).
- [13] Ю. М. Мовсисян, “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, *УМН*, **53** (1), 61 – 114 (1998).
- [14] Yu. M. Movsisyan, “Binary representations of algebras with at most two binary operations. A Cayley theorem for distributive lattices”, *International Journal of Algebra and Computation*, **19**, no. 1, 97 – 106 (2009).
- [15] S. L. Bloom, Z. Esik, E. G. Manes, “A cayley theorem for Boolean algebras”, *Amer. Math. Monthly*, **97**, 831 – 833 (1990).
- [16] V. Pambuccian, “Euclidean geometry problems rephrased in terms of midpoints and point-reflections”, *Elem. Math.*, **60**, 19 – 24 (2005).
- [17] С. В. Матвеев, “Дистрибутивные группоиды в теории узлов”, *Мат. Сб.* **119** (1), 78 – 88 (1982).
- [18] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York (1981).
- [19] J. Denes, A. D. Keedwell, *Lattin Squares and Their Applications*, Budapest, Akademiai Kiado (1974).

Поступила 28 апреля 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 59-70.

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ И ВЛОЖЕНИЯХ СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

А. С. ПАЙЛЕВАНЯН, Х. Р. РОСТАМИ

Ереванский государственный университет
E-mails: *apahlevanyan@ysu.am*, *hrrostami@ysu.am*

Аннотация. Пусть $B(m, n)$ - свободная периодическая группа периода n и произвольного ранга $m > 1$. В работе строится свободный моноид ранга 2 в группе автоморфизмов группы $B(m, n)$ для любого нечетного периода $n \geq 665$. Также, при простых $n > 1003$ доказывается, что если группа $B(m, n)$ вкладывается в некоторую n -периодическую группу G в качестве нормальной подгруппы, то она выделяется в G прямым множителем.

MSC2000 number: 20F50, 20F05, 20F28, 20M05, 20E36

Ключевые слова: свободная бернсайдова группа, группа автоморфизмов, свободная полугруппа, свободный моноид, периодическая группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть F_m - абсолютно свободная группа произвольного ранга m , n - натуральное число, F_m^n - подгруппа порожденная всевозможными n -ми степенями элементов из F_m . Фактор-группа F_m/F_m^n , обозначается через $B(m, n)$ и называется свободной периодической или **свободной бернсайдовой группой** периода n и ранга m . Более просто, свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ имеет следующее задание:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid A^n = 1 \text{ для всех слов } A = A(a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}) \rangle.$$

Поскольку F_m^n - порожденная словом x^n вербальная подгруппа группы F_m , то группа $B(m, n)$ свободна в многообразии всех n -периодических групп, т.е. всех групп, в которых выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$.

Известная теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех $m > 1$ и нечетных $n \geq 665$ группа $B(m, n)$ бесконечна (решение знаменитой проблемы Бернсайда, см [1], [2]).

Другая теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех нечётных $n \geq 665$ и $m > 1$ центр группы $B(m, n)$ тривиален (см. [1, гл. VI, теорема 3.3]). Отсюда следует, что группа $B(m, n)$ изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов.

В терминах групповых гомоморфизмов это означает, что последовательность гомоморфизмов

$$0 \rightarrow B(m, n) \hookrightarrow \text{Aut}(B(m, n)) \twoheadrightarrow \text{Aut}(B(m, n))/\text{Inn}(B(m, n)) \rightarrow 0,$$

где $\text{Inn}(B(m, n))$ есть группа внутренних автоморфизмов группы $B(m, n)$, является точной. Отметим, что фактор-группа $\text{Aut}(B(m, n))/\text{Inn}(B(m, n))$ обозначается через $\text{Out}(B(m, n))$ и называется группой внешних автоморфизмов группы $B(m, n)$.

В работе Е. Черепанова [3] доказано, что при нечётных $n > 10^{78}$ каждый нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$ является внутренним автоморфизмом. Напомним, что автоморфизм φ группы G называется **нормальным**, если для любой нормальной подгруппы N группы G выполнено равенство $\varphi(N) = N$. Ясно, что если N есть нормальная подгруппа группы G и $\varphi(N) = N$, то автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм фактор группы G/N .

Далее, для нечетных $n \geq 1003$ в работе [4] показано, что если φ - нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ группы $B(m, n)$ существует такое целое число k , что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^k для каждого i .

Эти результаты об автоморфизмах свободных бернсайдовых групп усилены в работе [5], где доказано, что для произвольного нечётного $n \geq 1003$ и $m > 1$ каждый автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, который стабилизирует любую максимальную нормальную подгруппу $N \trianglelefteq B(m, n)$ бесконечного индекса, является внутренним автоморфизмом.

Некоторые другие результаты об автоморфизмах свободных периодических групп были получены в работах [6]-[9].

Первым основным результатом настоящей работы является

Теорема 1.1. *Для любого $m > 1$ и нечетного $n \geq 665$ группа автоморфизмов $\text{Aut}(B(m, n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ содержит свободный моноид ранга 2.*

Эта теорема будет доказана в параграфе 2. Теорема 1.1 усиливает аналогичный результат Е. Черепанова для нечетных $n > 10^{10}$ из работы [6] и результаты первого автора из работ [7]-[9].

Следствие 1.1. *Для любого $m \geq 1$ и нечетного $n \geq 665$ обе группы $Aut(B(s, n))$ и $Out(B(s, n))$, $s \geq 2m$, содержат подгруппу изоморфную свободной абелевой группе Z^m ранга m .*

Доказательство. Пусть $\{a_1, a_2\}$ пара свободных порождающих группы $B(2, n)$. Выберем элемент ψ бесконечного порядка группы $Aut(B(2, n))$, который существует согласно теореме 1.1. Рассмотрим группу $B(s, n)$, $s \geq 2m$, со свободными порождающими $\{a_i | i = 1, \dots, s\}$ и автоморфизмы $\psi_i, i = 1, \dots, m$, такие, что для любого i автоморфизм ψ_i действует на $\{a_{2i-1}, a_{2i}\}$ как ψ действует на $\{a_1, a_2\}$, и тождественно на остальных порождающих. Легко видеть, что эти автоморфизмы порождают упомянутую свободную абелеву группу ранга m . $\square$

Заметим, что из следствия 1.1 непосредственно вытекает теорема 4 работы [10] и теорема IV.5.4 работы [11].

Второй результат относится к вложениям свободных бернсайдовых групп. Как было отмечено выше, свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ вкладывается в группу автоморфизмов $Aut(B(m, n))$ как нормальная подгруппа внутренних автоморфизмов. Хорошо известная теорема Гелдера-Бэра (см. теорему 13.5.7 в [12]) утверждает, что если совершенная группа вкладывается в некоторую группу в качестве нормальной подгруппы, то выделяется в ней прямым множителем (группа называется *совершенной*, если она без центра и не имеет внешних автоморфизмов). Хотя группа $B(m, n)$ – без центра (теорема С. И. Адяна из [1, гл. VI., теорема 3.3]), тем не менее из теоремы 1.1 немедленно следует, что она не совершенна. Действительно, все внутренние автоморфизмы группы $B(m, n)$, очевидно, имеют порядок n , в то время как, по теореме 1.1, группа $B(m, n)$ имеет автоморфизмы бесконечного порядка, которые тем самым, будут внешними автоморфизмами. Но оказывается, что в многообразии n -периодических групп простого периода группы $B(m, n)$ ведут себя как совершенные группы.

Теорема 1.2. *Пусть G произвольная периодическая группа простого периода $n > 1003$, которая содержит нормальную подгруппу N , изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(m, n)$ для некоторого ранга $m > 1$. Тогда группа G разлагается в прямое произведение $G = N \times C$, где C – централизатор подгруппы N в G .*

В частности, из теоремы 1.2 следует, что при $m \neq k$ и простых $n > 1003$ группа $B(m, n)$ не может быть вложена в какую либо группу $B(k, n)$ в качестве нормальной подгруппы, что впервые было доказано в работах [13], [14] (см. также [15]). Заметим также, что при простых $n > 1003$ теорема 1.2 усиливает теорему 1.2 работы [3].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Рассмотрим свободную группу $F(a, b)$ с порождающими a, b , и определим автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 на порождающих следующим образом: $\psi_1(a) = ab, \psi_1(b) = ab^2$ и $\psi_2(a) = ba, \psi_2(b) = ba^2$. Их обратными являются автоморфизмы $\varphi_1(a) = ab^{-1}a, \varphi_1(b) = a^{-1}b$ и $\varphi_2(a) = a^{-1}b, \varphi_2(b) = ab^{-1}a$ соответственно.

Для доказательства теоремы 1.1, очевидно, достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 2.1. *Для любого нечетного $n \geq 665$ автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 составляют базис свободной полугруппы ранга 2 в группе автоморфизмов $\text{Aut}(B(m, n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$.*

Пусть ψ_S обозначает композицию $\psi_S = \psi_{i_1}\psi_{i_2}\dots\psi_{i_l}$, где $S = i_1i_2\dots i_l$ является конечной последовательностью из двух символов 1 и 2. Везде в тексте знак $\equiv$ означает графическое равенство слов. По определению для любого слова W имеем $\psi_S(W) \equiv \psi_{i_l}(\psi_{i_{l-1}}\dots(\psi_{i_2}(\psi_{i_1}(W)))\dots)$. Обозначим $U_S = \psi_S(a), V_S = \psi_S(b)$. Все слова U_S, V_S являются положительными, т.е. они не содержат букв a^{-1} и b^{-1} . Следовательно, они представляют элементы свободной полугруппы с базисом $\{a, b\}$.

Отметим некоторые первые члены последовательностей U_S, V_S , которые нам понадобятся:

$$\begin{aligned} U_1 &= ab, V_1 = ab^2, U_2 = ba, V_2 = ba^2, \\ U_{11} &= abab^2, V_{11} = abab^2ab^2, U_{12} = baba^2, V_{12} = baba^2ba^2, \\ U_{21} &= ab^2ab, V_{21} = ab^2abab, U_{22} = ba^2ba, V_{22} = ba^2baba. \\ U_{111} &= abab^2abab^2ab^2 = U_{11}V_{11}, V_{111} = abab^2abab^2ab^2abab^2ab^2 = U_{11}V_{11}V_{11}, \\ U_{112} &= baba^2baba^2ba^2 = U_{12}V_{12}, V_{112} = baba^2baba^2ba^2baba^2ba^2 = U_{12}V_{12}V_{12}, \\ U_{121} &= ab^2abab^2abab = U_{21}V_{21}, V_{121} = ab^2abab^2ababab^2abab = U_{21}V_{21}V_{21}, \\ U_{122} &= ba^2baba^2baba = U_{22}V_{22}, V_{122} = ba^2baba^2bababa^2baba = U_{22}V_{22}V_{22}, \\ U_{211} &= abab^2ab^2abab^2 = V_{11}U_{11}, V_{211} = abab^2ab^2abab^2abab^2 = V_{11}U_{11}U_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{212} &= baba^2ba^2baba^2 = V_{12}U_{12}, V_{212} = baba^2ba^2baba^2baba^2 = V_{12}U_{12}U_{12}, \\ U_{221} &= ab^2ababab^2ab = V_{21}U_{21}, V_{221} = ab^2ababab^2abb^2ab = V_{21}U_{21}U_{21}, \end{aligned}$$

$$(2.1) \quad U_{222} = ba^2bababa^2ba = V_{22}U_{22}, V_{222} = ba^2bababa^2baba^2ba = V_{22}U_{22}U_{22}.$$

Легко проверить, что если слово T имеет вид $T \equiv W_{S_1}W_{S_2} \dots W_{S_k}$, где $W \in \{U, V\}$, а $S_1, S_2, \dots, S_k$ – произвольные последовательности символов 1 и 2, то имеем $\psi_{i_t}(T) = \psi_{i_t}(W_{S_1}W_{S_2} \dots W_{S_k}) = W_{S_1i_t}W_{S_2i_t} \dots W_{S_ki_t}$.

В дальнейшем, через $\partial(X)$ будем обозначать длину слова X , а через $\overline{X}$ – слово X написанное на окружности не фиксируя его начало. Если $S = i_1i_2 \dots i_t$ – произвольная последовательность, то обозначим $S' = i_2 \dots i_{t-1}i_t$. Таким образом, имеем $S = i_1S' = i_1i_2S''$.

Из сделанных выше замечаний вытекают следующие две леммы.

Лемма 2.1. (см. [6], Лемма 2) Для любой непустой последовательности $S = i_1i_2 \dots i_t$ имеем следующие возможные случаи для слов U_S и V_S :

$$(2.2) \quad U_S = U_{S'}V_{S'}, V_S = U_{S'}V_{S'}V_{S'}$$

при $S = 1S'$, и

$$(2.3) \quad U_S = V_{S'}U_{S'}, V_S = V_{S'}U_{S'}U_{S'}.$$

при $S = 2S'$.

Лемма 2.2. (см. [6], Следствие 2.0 п.(2)) Для любой непустой последовательности S имеют место неравенства

$$4 \cdot \partial(U_S) < 3 \cdot \partial(V_S) < 5 \cdot \partial(U_S).$$

Определение 2.1. Слово Z называется простым, если оно не представимо в виде $Z = D^r$ для $r > 1$.

Нам понадобится также следующая лемма из монографии [1].

Лемма 2.3. (см. [1], Лемма I.2.9) Если $A^tA' \equiv B^rB'$, где слово A' есть начало A , B' есть начало B и $\partial(A^tA') \geq \partial(AB)$, то можно указать такое слово D , что $A \equiv D^k$ и $B \equiv D^s$ при некоторых k и s . В частности, если A – простое слово, то $B \equiv A^k$.

Лемма 2.4. Для любой непустой последовательности $S = pqS''$, $p, q \in \{1, 2\}$ имеем

$$\begin{aligned} U_{11S''} &= \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}}, V_{11S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}}, \\ U_{12S''} &= \underbrace{V_{S''}U_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}}, V_{12S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}}, \\ U_{21S''} &= \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}}, V_{21S''} = \underbrace{U_{S''}V_{S''}V_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}} \underbrace{U_{S''}V_{S''}}_{U_{1S''}}, \\ U_{22S''} &= \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}}, V_{22S''} = \underbrace{V_{S''}U_{S''}U_{S''}}_{V_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}} \underbrace{V_{S''}U_{S''}}_{U_{1S''}}. \end{aligned}$$

Доказательство непосредственно следует из определения ψ_S и соотношений (2.2) и (2.3) леммы 2.1. $\square$

Соотношения (2.2) и (2.3) показывают, что для любой последовательности S слово U_S является началом слова V_S и $\partial(U_S) < \partial(V_S)$. Отсюда, используя лемму 2.2, получаем $\partial(V_{11S''}) \geq \partial(V_{12S''})$. Кроме того, из леммы 2.4 следует, что длина слова $V_{11S''}$ меньше $34/3 \cdot \partial(U_{S''})$. Итак, мы получили, что для любой последовательности $S = pqS''$, $p, q \in \{1, 2\}$, длины слов U_S и V_S удовлетворяют неравенствам $\partial(U_S) < \partial(V_S) < 12\partial(U_{S''})$. Отсюда получаем

Лемма 2.5. Если слово Z^{12} входит в одно из слов $\overline{U_S}$ или $\overline{V_S}$, то $\partial(Z) < \partial(U_{S''}), \partial(V_{S''})$, в частности, $U_{S''}^{12}$ не входит в слова $\overline{U_S}$ и $\overline{V_S}$.

Обозначим $V_{S'} \Leftarrow A$, $U_{S'} \Leftarrow B$, $V_{S''} \Leftarrow C$, $U_{S''} \Leftarrow D$. В силу леммы 2.2 имеем $5/3 \cdot \partial(B) > \partial(A)$ и $5/3 \cdot \partial(D) > \partial(C)$.

Зафиксируем некоторую последовательность $S = i_1 \dots i_l$. В дальнейшем тексте везде под буквой Z будем подразумевать простое слово.

Лемма 2.6. U_S и V_S не являются полными степенями.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по длине $\partial(S) = l$ последовательности S . При $l \leq 3$ прямая проверка показывает, что слова U_S и V_S не являются полными степенями (см. соотношения (2.1)). Пусть $l \geq 3$. Предположим, что утверждение верно для всех последовательностей длины $\partial(S) < l$, и докажем утверждение для $\partial(S) = l$.

1. Пусть $U_S \equiv Z^k$ и $k \geq 2$. Рассмотрим, например, случай

$$U_S = U_{11S''} = U_{S''}V_{S''}U_{S''}V_{S''}V_{S''}.$$

Имеем

$$U_S = U_{11S''} = BAA \equiv DCDC \equiv \underbrace{ZZ \dots Z}_k.$$

Поскольку, очевидно, циклический сдвиг полной степени является полной степенью, то сдвигая последнюю букву C в начало получаем

$$CDCDC \equiv (CD)^2C \equiv \underbrace{Z_1Z_1 \dots Z_1}_k,$$

где Z_1 есть циклический сдвиг слова Z . Отсюда, учитывая $k \geq 2$, имеем $\partial(CDC) > \partial(Z_1)$. Поскольку Z_1 простое слово, то применяя лемму 2.3 получаем $CD \equiv Z_1^p$. В случае $p = 1$ имеем $CD = Z_1$, что противоречит условию $(CD)^2C \equiv Z_1^k$ поскольку $D \neq \Lambda$. В случае $p > 1$ для $S' = 2S''$, $\partial(S') < l$, имеем $CD \equiv \overline{U_{S'}} = \overline{B} = Z_1^p$ есть полная степень, что противоречит индуктивному предположению.

2. Все остальные случаи выражений слов U_S и V_S из леммы 2.4 рассматриваются совершенно аналогично. А именно, для слова $U_{12S''} = CDCDD$ сдвигаем конец D в начало, а для всех остальных случаев сдвигаем начало длины 2 слов U_S, V_S в конец и продолжаем как в пункте 1. В результате получаем

$$\begin{aligned} U_{11S''} &= DCDC\underline{C}, (CD)^2C = Z_1^k, CD = Z_1^p, \\ V_{11S''} &= \underline{DC}DCDC, (DCC)^2DC = Z_1^k, DCC = Z_1^p, \\ U_{12S''} &= CDCD\underline{D}, (DC)^2D = Z_1^k, DC = Z_1^p, \\ V_{12S''} &= \underline{CD}CDDCDD, (CDD)^2CD = Z_1^k, CDD = Z_1^p, \\ U_{21S''} &= \underline{DCC}DC, (CD)^2C = Z_1^k, CD = Z_1^p, \\ V_{21S''} &= \underline{DCC}DCDC, (CD)^3C = Z_1^k, CD = Z_1^p, \\ U_{22S''} &= \underline{CD}DCD, (DC)^2D = Z_1^k, DC = Z_1^p, \\ V_{22S''} &= \underline{CD}DCDCD, (DC)^3D = Z_1^k, DC = Z_1^p. \end{aligned}$$

Второе равенство каждой строки получается сдвигом подчеркнутой части первого равенства в другой конец слова. Третье равенство каждой строки получается из второго равенства той-же строки применением леммы 2.3. Далее, в случае $p = 1$ или $p > 1$, как и в пункте 1, получаем противоречия. Этим и завершается доказательство леммы. $\square$

Пусть $\overline{X}$ означает циклическое слово, т.е. слово X написанное на окружности.

Лемма 2.7. Если $\overline{U_S}, \overline{V_S}$ содержат Z^k , то $k < 12$.

Доказательство. Проведем индукцию по длине последовательности S с очевидной базой. Допустим, что некоторое слово Z^{12} входит в одно из слов $\overline{U_S}, \overline{V_S}$. Заметим, что Z^{12} не может входить в слова $\overline{DCC}$ и $\overline{CDD}$, так как в таком случае оно бы входило в $\overline{A}$, что противоречит предположению индукции. Тогда Z^{12} не входит в подслова слов $\overline{U_S}, \overline{V_S}$ длины 3 над алфавитом $\{C, D\}$. Следовательно, оно содержит подслово длины 2 слова $\overline{U_S}$ или $\overline{V_S}$ над алфавитом $\{C, D\}$. Из неравенств $4 \cdot \partial(U_S) < 3 \cdot \partial(V_S) < 5 \cdot \partial(U_S)$ леммы 2.2 следует, что $\partial(U_S) < \partial(V_S)$. Следовательно $\partial(Z) < \partial(D) < \partial(C)$. Слов длины 2 над алфавитом $\{C, D\}$ четыре - CC, CD, DC, DD . Следовательно, в каждое из слов, входящих в Z^{12} , входит слово Z_1^2 , где Z_1 является циклическим сдвигом слова Z . Тогда имеет место хотя бы одно из следующих равенств:

$$CC = Z_1^r Z_1', \quad CD = DXD = Z_1^r Z_1', \quad DC = DDZ = Z_1^r Z_1', \quad DD = Z_1^r Z_1',$$

где Z_1 есть некоторый циклический сдвиг слова Z , $r \geq 2$, D есть начало C , а X есть начало D . Согласно лемме 2.3 имеем или $C = Z_1^p$, или $D = Z_1^p$, что противоречит лемме 2.6 для $p > 1$ и лемме 2.5 для $p = 1$. $\square$

Лемма 2.8. *В свободной группе $F(a, b)$ выполнено равенство $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$, $x \in F(a, b) \setminus \{1\}$ тогда и только тогда, когда $S_1 \equiv S_2$.*

Доказательство. При $S_1 \equiv S_2$ очевидно имеем $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$. Докажем обратное утверждение индукцией по длине S_1 . Для $\partial(S_1) = 1$ утверждение следует из определений автоморфизмов ψ_1, ψ_2 . Пусть $\psi_{S_1}(x) = \psi_{S_2}(x)$ и $S_1 \equiv T_1 i_k, S_2 = T_2 j_t$. Если $i_k = j_t$, то из обратимости ψ_{i_k} и равенства $\psi_{i_k}(\psi_{T_1}(x)) = \psi_{i_k}(\psi_{T_2}(x))$ следует $\psi_{T_1}(x) = \psi_{T_2}(x)$. Тогда, по индуктивному предположению, имеем $T_1 \equiv T_2$ и, тем самым, $S_1 \equiv S_2$. Пусть теперь $i_k \neq j_t$. Поскольку для любого непустого слова A слово $\psi_1(A)$ заканчивается буквой b , а слово $\psi_2(A)$ - буквой a , то при $i_k \neq j_t$ имеет место $\psi_{i_k}(A) \neq \psi_{j_t}(B)$ для любых положительных слов A, B . Лемма доказана. $\square$

Следующая лемма была доказана В. С. Атабекианом. Здесь $q = 90$.

Лемма 2.9. *Если X - непустое несократимое слово и $X \stackrel{B(m,n)}{=} 1$, то X содержит подслово вида A^{q-1} .*

Доказательство. Пусть X - непустое несократимое слово и $X \stackrel{B(m,n)}{=} 1$. По теореме VI.2.9 монографии [1] для некоторого ранга β имеем $X = 1$ в группе

$B(m, n, \beta)$. В силу [1, гл.IV, §2, лемма 2.16], тогда для некоторого α имеем $X \notin \mathcal{R}_\alpha$. Но так как $X \in \mathcal{R}_0$ (X – несократимое слово), то $X \in \mathcal{R}_{\gamma-1} \setminus \mathcal{R}_\gamma$ для некоторого ранга γ . Согласно [1, гл.IV, §1, лемма 1.19], можно указать некоторое вхождение $V \in \text{Норм}(\gamma, X, n - 175)$. Если основа вхождения V является периодическим словом, то в слово X входит слово вида A^{n-176} и лемма доказана. В противном случае, согласно [1, гл.II, §4, лемма 4.8] в слово $E = \text{Осн}(V)$ входит некоторая элементарная q -степень E_1 ранга $\delta < \gamma$. Выбрав ранг δ с указанным условием минимальным, получим что в соответствующее элементарное слово E_1 не входит никакая элементарная q -степень ранга $\mu < \delta$, причем $l_\delta(E_1) \geq q$. Опять применяя [1, гл.II, §4, лемма 4.8], получаем, что слово E_1 является периодической q -степенью. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем перейти к доказательству предложения 2.1.

Рассмотрим автоморфизмы ψ_1 и ψ_2 группы $B(m, n)$, определенные в начале параграфа. Полугруппу, порожденную в $\text{Aut}(B(m, n))$ этими автоморфизмами обозначим через G . Полугруппа G является несвободной тогда и только тогда, когда существуют разные последовательности S_1 и S_2 из символов 1 и 2, такие, что $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $\text{Aut}(B(m, n))$. Если $S_1 \neq S_2$, но $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $\text{Aut}(B(m, n))$, то по лемме 2.8, циклически несократимая в свободной группе $F(a, b)$ форма слова $\psi_{S_1}(a)(\psi_{S_2}(a))^{-1}$ непуста и, согласно лемме 2.7, не содержит никакого слова вида Z^{24} . По лемме 2.9 это слово не равно 1 в $B(m, n)$. Следовательно, $\psi_{S_1} = \psi_{S_2}$ в $\text{Aut}(B(m, n))$ только в случае $S_1 \equiv S_2$.

Таким образом, Предложение 2.1 и Теорема 1.1 доказаны.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть H – максимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $H \cap N = \{e\}$ (существование подгруппы H следует из леммы Цорна). Тогда, очевидно, канонический образ N_1 подгруппы N в группе $G_1 = G/H$ изоморфен N . Таким образом, мы имеем две нормальные подгруппы H и N группы G такие, что $H \cap N = \{e\}$. Докажем, что $G = N \times H$. Для этого, достаточно показать, что $G/H = N_1$, т.е. $G_1 = N_1$.

Если бы в группе G_1 существовала нетривиальная нормальная подгруппа, которая имеет тривиальное пересечение с подгруппой N_1 , то это противоречило бы условию, что H максимальная подгруппа среди всех подгрупп, тривиально

пересекающихся с N . Легко проверяется, что централизатор произвольной нормальной подгруппы является нормальной подгруппой. Поэтому, если централизатор C_1 подгруппы N_1 в группе G_1 нетривиален, то он имеет с подгруппой N_1 нетривиальное пересечение, содержащееся в центре группы N_1 . Но по теореме С.И.Адяна (см. [1, гл.VI, теорема 3.4]), центр группы $B(m, n)$ тривиален. Так как $N_1 \simeq B(m, n)$, то немедленно заключаем, что $C_1 = \{e\}$, т.е. централизатор C_1 подгруппы N_1 в группе G_1 тривиален.

Прежде всего заметим, что порядок каждого элемента группы G_1 равен n . Предположим, что $G_1 \neq N_1$.

Пусть фактор группа G_1/N_1 порождается смежным классом gN_1 . Таким образом $g \notin N_1$ и $g^n \in N_1$. Рассмотрим автоморфизм $\phi_g : N_1 \rightarrow N_1$ группы N_1 , определенный формулой $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ для любого элемента $x \in N_1$. Предположим, что автоморфизм ϕ_g является внутренним автоморфизмом группы N_1 . Тогда для некоторого элемента $y \in N_1$ и для всех $x \in N_1$ имеет место равенство $\phi_g(x) = yxy^{-1}$, т.е. $gxg^{-1} = yxy^{-1}$, и поэтому элемент $y^{-1}g$ принадлежит централизатору C_1 подгруппы N_1 в группе G_1 .

Но, как было доказано, $C_1 = \{e\}$. Следовательно, $y^{-1}g = 1$, что противоречит условию $g \notin N_1$. Значит наше предположение не верно, т.е. ϕ_g не является внутренним автоморфизмом группы N_1 .

Теперь воспользуемся следующим результатом, доказанным в работе [5]

Лемма 3.1. (см. следствие 1 из [5]) Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечётное число и φ – автоморфизм группы $B(m, n)$ такой, что $\varphi(N) = N$ для каждой максимальной нормальной подгруппы $N \trianglelefteq B(m, n)$, для которой $B(m, n)/N$ – бесконечная группа (содержащая элементы порядка n). Тогда φ – внутренний автоморфизм.

Согласно лемме 3.1, существует такая нормальная подгруппа L группы N_1 , что $\phi_g(L) \neq L$ и N_1/L – неабелева простая группа, содержащая элементы порядка n . По выбору подгруппы L , существует элемент $x \in L$ такой, что $\phi_g(x) \notin L$, т.е. $gxg^{-1} \notin L$. Это означает, что L не является нормальной подгруппой группы H . Рассмотрим нормальную подгруппу $K = \bigcap_{y \in G_1} yLy^{-1}$ группы G_1 . Для завершения доказательства теоремы 1.2 воспользуемся следующим утверждением, доказанным А. Ю. Ольшанским в работе [13].

Лемма 3.2. (см. леммы 2.1 и 2.2 из [13]) Пусть N_1 такая нормальная подгруппа группы G_1 , что G_1/N_1 - циклическая группа порядка p . Предположим также, что для некоторой нормальной в N_1 , но не нормальной в G_1 подгруппы L , фактор-группа N_1/L - неабелева простая группа, содержащая элемент порядка n . Положим $K = \bigcap_{x \in H} xLx^{-1}$. Тогда произведение pn делит порядок некоторого элемента из фактор-группы G_1/K .

Все условия леммы 3.2 в нашем случае выполнены. Поэтому можем заключить, что в фактор группе G_1/K содержится элемент порядка n^2 , что невозможно, так как по условию, группа G и, следовательно, группа G_1 , периодическая группа периода n . Полученное противоречие доказывает, что в фактор группе G_1/N_1 нет элементов простого порядка, в то время как G_1 - периодическая группа. Следовательно $G_1 = N_1$.

Таким образом, мы доказали, что $G = N \times H$. По условию теоремы, группа N изоморфна группе $B(m, n)$. Так как центр группы $B(m, n) \simeq N$ тривиален, то из равенства $G = N \times H$ очевидным образом вытекает, что централизатор C подгруппы N в группе G совпадает с H . Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper gives a construction of a free monoid of rank 2 in the group of automorphisms of free periodic groups $B(m, n)$ of any odd period $n \geq 665$ and any rank $m > 1$. Moreover, it is proved that if the period is any prime number $n > 1003$ and the group $B(m, n)$ is nested in some n -periodic group G as a normal subgroup, then $B(m, n)$ is a direct factor in G .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, М. (1975).
- [2] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. I, II, III", Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**, 212 – 244, 251 – 524, 709 – 731 (1968).
- [3] E. A. Cherepanov, "Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents", Internat. J. Algebra Comput., **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).
- [4] В. С. Атабекян, "Не φ -допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп", Изв. НАН Армении, серия Математика, **45**, no. 2, 21 – 36 (2010).
- [5] В. С. Атабекян, "Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп", Известия Российской академии наук. Сер. Математическая, **75**, no. 2, 3 – 18 (2011).
- [6] E. A. Cherepanov, "Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group", Communications in Algebra, **33:2**, 539 – 547 (2005).
- [7] A. S. Pahlevanyan, "Infinite order automorphisms of free periodic groups of sufficiently large exponent", Proceedings of the Yerevan State University, Phys. and Math. Sciences, **219**, no. 2, 38 – 42 (2009).
- [8] А. С. Пайлеванян, "О группе автоморфизмов свободных периодических групп", Юбилейная Научная Сессия посвященная 90-летию ЕГУ, **1**, 210 – 214 (2009).

- [9] А. С. Пайлеванян, “Свободная полугруппа группы автоморфизмов свободной бернсайдовой группы”, Международная конференция “Мальцевские Чтения”, посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, тезисы докладов, стр. 72 (2009).
- [10] Rémi Coulon, “Outer automorphisms of free Burnside groups”, arXiv :1008.4495, 1 – 19 (2010).
- [11] Rémi Coulon, “Automorphismes extérieurs du groupe de Burnside libre”, PhD thesis, Université de Strasbourg (2010).
- [12] Derek J. S. Robinson, A course in the theory of groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **80**, Springer-Verlag, New York (1996).
- [13] A. Yu. Ol’shanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, 179 – 187, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2003).
- [14] В. С. Атабекян, “Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geq 1003$ ”, Фундамент. и прикл. матем., **15**, no. 1, 3 – 21 (2009).
- [15] V. S. Atabekyan, “Normal subgroups in free Burnside groups of odd period”, Armen. J. Math., **1**, **2**, 25 – 29 (2008).

Поступила 6 сентября 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 2, 2011, стр. 71-86.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Х. А. ХАЧАТРЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *Khach82@rambler.ru*

Аннотация. Статья посвящена вопросам разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси в критическом случае с некомпактным оператором почти Гаммерштейновского типа. При наличии некоторых условий, накладываемых на ядро уравнения, доказывается существование ограниченного, монотонно возрастающего и положительного решения. Изучается асимптотическое поведение решения в бесконечности.

MSC2000 number: 45G10, 45M20, 47H10

Ключевые слова: Однопараметрическое семейство решений, поточечный предел, оператор Винера-Хопфа, условие критичности, условие Каратеодори.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$(1.1) \quad f(x) = R(x, f(x)) \int_0^{\infty} K(x-t)W(t, f(t))dt, \quad x \geq 0$$

относительно искомой функции $f(x)$. Здесь $R(x, \tau)$ и $W(t, \tau)$ определенные на $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, измеримые и вещественнозначные функции, удовлетворяющие определенным условиям (см. формулировку основного результата в §6). Ядро $K(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(1.2) \quad 0 \leq K \in L_1(-\infty, +\infty) \cap M(-\infty, +\infty),$$

$$(1.3) \quad K(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < 0,$$

$$(1.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau = 1, \quad \nu(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau K(\tau)d\tau < 0,$$

причем предполагается, что последний интеграл абсолютно сходится.

В случае, когда $R(x, t) \equiv 1$, уравнение (1.1) превращается в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. Исследованию нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна при различных ограничениях на ядро и на

нелинейность посвящены многочисленные работы (см. [1 – 5]). В результате созданы изящные теории разрешимости и разработаны эффективные методы численного решения вышеуказанных классов уравнений. Однако, в классической теории, как правило, рассматриваются уравнения с компактными нелинейными операторами, причем в некоторых случаях существенную роль играет также конечность пределов интегрирования.

В работах автора [6 – 11] были рассмотрены разные нелинейные интегральные уравнения на полуоси в критическом случае с некомпактным оператором и доказаны теоремы о существовании положительного решения. Отличительной особенностью этих работ является некомпактность и критичность соответствующего нелинейного интегрального оператора.

Условие критичности для нелинейных операторов понимается в следующем смысле: Пусть X – банахово пространство, $\mathfrak{K}$ – правильный конус с положительными элементами, $\mathfrak{K} \subset X$. Пусть A – некоторый нелинейный оператор действующий в $\mathfrak{K}$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = x, \quad x \in \mathfrak{K},$$

причем $A\theta = \theta$, где $\theta \in \mathfrak{K}$ – нулевой элемент.

Определение 1.1. Оператор A назовем **слабо критическим**, если уравнение $Ax = x$ кроме тривиального решения обладает хотя бы одним положительным решением.

Определение 1.2. Оператор A назовем **сильно критическим**, если уравнение $Ax = x$ кроме тривиального решения обладает однопараметрическим семейством положительных решений.

В работе [6] рассматривается нелинейное интегральное уравнение со специальной нелинейностью

$$W(t, z) = w(z) = ae^{-(z-a)^2}, \quad (R \equiv 1),$$

имеющее применение в физической кинетике. В работе [7] изучается уравнение типа Урысова

$$(1.5) \quad f(x) = \int_0^\infty K(x, t, f(t))dt = Af$$

с предположением, что существует число $\eta > 0$, такое что $A\eta \leq \eta$. Далее предполагая, что консервативное ядро Винера-Хопфа является локальной минорантой

для оператора Урысона, т.е.

$$K(x, t, \tau) \geq K_0(x - t)\tau, \quad (x, t, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \eta],$$

доказывается существование ограниченного решения уравнения (1.5).

Работа [8] посвящена исследованию интегрального уравнения типа Гаммерштейна. В отличие от настоящей работы в ней функция $W(t, z)$, описывающая нелинейность, зависит лишь от одной переменной z , на ядро $K(x, t)$ накладываются совершенно другие условия и $R \equiv 1$. В работах [9, 10] исследуются нелинейные интегральные уравнения типа Урысона (1.5). В [9] предполагается, что ядро $K_0(x)$ представляет собой вполне монотонную и четную функцию с особой структурой, а ядро Урысона удовлетворяет следующим условиям:

$$(1.6) \quad K(x, t, \tau) \geq K_0(x - t)(\tau - w(\tau + t))$$

$$\frac{1}{\delta(1 + \theta x)} \int_0^\infty K(x, t, \delta(1 + \theta t)) dt \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \theta, \delta > 0, \quad \theta, \delta = const.$$

В [10] вместо условия (1.6) накладывается более слабое условие на ядро K , а именно

$$K(x, t, \tau) \geq (K_0(x - t) - K^*(x + pt))(\tau - w(\tau + t)), \quad p \geq 1.$$

Наконец работа [11] посвящена изучению интегрального уравнения типа Гаммерштейна со специальным ядром. Эта задача возникает в кинетической теории газов. Следует отметить, что в этой работе функция $K(x, t)$ такова, что невозможно ее оценить снизу консервативным ядром оператора Винера-Хопфа. Насколько нам известно уравнение вида (1.1) ранее другими авторами не исследовалось.

В §5 в предположении $W(\tau, z) = \tau - w(\tau, z)$, $R(x, \tau) \equiv \mu(x)$, доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений нелинейного уравнения (1.1) (устанавливается критичность в сильном смысле в случае $W(\tau, 0) \equiv 0$).

В §6 накладываются некоторые условия на функцию R , для случая так называемой “сильной нелинейности”, т.е. когда $W(\tau, z) = G(z) - w(\tau, z)$, доказывается существование положительного решения для нелинейного уравнения (1.1) (устанавливается критичность в слабом смысле в случае когда $W(\tau, 0) \equiv 0$). Удастся также вычислить предел этого решения в бесконечности.

В параграфе 7 рассматривается следующее более общее нелинейное интегральное уравнение

$$(1.7) \quad \varphi(x) = R(x, \varphi(x)) \int_0^\infty K(x-t)W(t, \varphi(t))dt + \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x+t)G_0(\varphi(t))dt, \quad x \geq 0$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$. Здесь $\overset{\circ}{K}$ – неотрицательная и суммируемая на $(0, +\infty)$ функция, причем

$$(1.8) \quad \int_x^\infty \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau \leq \int_x^\infty K(\tau)d\tau, \quad x \in (0, +\infty)$$

G_0 – измеримая и вещественнозначная функция, удовлетворяющая определенным условиям (см. §7). Используя полученные результаты для уравнения (1.1), доказывается разрешимость уравнения (1.7) в классе ограниченных функций.

2. ОБ ОДНОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА СВЕРТКИ

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее линейное интегральное уравнение:

$$(2.1) \quad \chi(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\chi(t)dt, \quad x \in [0, +\infty)$$

относительно искомой функции $\chi(x)$. Здесь $\mu(x)$ монотонно возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, причем

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \beta_1) \quad & 0 < \varepsilon \leq \mu(x) \leq 1, \quad x \geq 0, \\ \beta_2) \quad & (1 - \mu(x))x^j \in L_1(0, +\infty), \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Как известно, уравнение (2.1) при условиях (1.2), (1.4), (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное и ограниченное решение $\chi_0(x)$ (см. [12]).

Ниже докажем, что это уравнение при условиях (2.2), (1.2) - (1.4) обладает положительным, монотонно возрастающим и ограниченным решением $\chi^*(x)$, причем $\chi^*(x) \geq \chi_0(x)$.

С этой целью рассмотрим следующие итерации:

$$(2.3) \quad \chi^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\chi^{(n)}(t)dt, \quad \chi^{(0)}(x) \equiv C = \operatorname{ess\,sup}_{x \geq 0} \chi_0(x),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in [0, +\infty)$, где χ_0 ограниченное, неотрицательное и ненулевое решение уравнения (2.1). По индукции нетрудно убедиться, что

$$(2.4) \quad a) \quad \chi^{(n)}(x) \text{ убывает по } n, \quad b) \quad \chi^{(n)}(x) \geq \chi_0(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно имеем

$$a) \quad \chi^{(1)}(x) = C\mu(x) \int_0^\infty K(x-t)dt \leq C \int_{-\infty}^x K(z)dz \leq C = \chi^{(0)}(x).$$

Предполагая, что $\chi^{(n)}(x) \leq \chi^{(n-1)}(x)$, из (2.3) сразу получим $\chi^{(n+1)}(x) \leq \chi^{(n)}(x)$.

b) Неравенство (2.4) следует из (2.3) в случае $n = 0-$. Пусть $\chi^{(n)}(x) \geq \chi_0(x)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, тогда из (2.3) получим

$$\chi^{(n+1)}(x) \geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\chi_0(t)dt = \chi_0(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{\chi^{(n)}(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^{(n)}(x) = \chi^*(x) \leq C$. Записывая итерации (2.3) в следующем виде

$$\chi^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int_{-\infty}^x K(\tau)\chi^{(n)}(x-\tau)d\tau, \quad \chi^{(0)} \equiv C, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$x \in (0, +\infty)$ и используя монотонность функции $\mu(x)$ по индукции легко можно убедиться, что $\chi^{(n)}(x)$ возрастает по x , $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, предельная функция $\chi^*(x)$ также возрастает по x . Таким образом, из (2.3) с учетом сказанного можем утверждать, что

$$(2.5) \quad \chi^*(x) \uparrow C \text{ когда } x \rightarrow \infty.$$

Из теоремы Б. Леви (см. [14]) следует, что χ^* удовлетворяет уравнению (2.1).

Далее заметим, что

$$(2.6) \quad \alpha \equiv \operatorname{ess\,inf}_{x \geq 0} \chi^*(x) > 0.$$

Действительно, так как $\chi^*(x) \geq 0$ и $\chi^*(x) \not\equiv 0$, то существует хотя бы одна точка $x_0 \in [0, +\infty)$, такая что $\chi^*(x_0) > 0$. Тогда из (2.1) с учетом (1.3) и условия β_1) формулы (2.2) будем иметь

$$\chi^*(x) \geq \varepsilon \int_{x_0}^\infty K(x-t)\chi^*(t)dt \geq \varepsilon\chi^*(x_0) \int_{-\infty}^{x-x_0} K(\tau)d\tau \geq \varepsilon\chi^*(x_0) \int_{-\infty}^{-x_0} K(\tau)d\tau > 0,$$

откуда следует, что (2.6) верно.

Известно также, что решение $\chi_0(x)$ представляется в виде разности следующих двух функций (см. [12]):

$$0 \leq \chi_0(x) = S(x) - \psi(x), \quad x \geq 0,$$

где $S(x)$ - ограниченное, монотонно возрастающее и положительное решение однородного уравнения Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)S(t)dt, \quad x \geq 0,$$

а $\psi(x) \in L_1(0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ представляет собой решение следующего уже неоднородного интегрального уравнения типа свертки:

$$\psi(x) = (1 - \mu(x))S(x) + \mu(x) \int_0^{\infty} K(x-t)\psi(t)dt, \quad x \geq 0.$$

Из вышеуказанных фактов следует, что

$$(2.7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \chi^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = C.$$

Полученное соотношение мы используем ниже. Заметим, что в отличие от функции $\chi_0(x)$ функция $\chi^*(x)$ обладает дополнительными свойствами (2.5) и (2.6). В дальнейших рассуждениях настоящей работы положительность числа α играет существенную роль.

3. НЕКОТОРЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\overset{\circ}{w}(x)$ определенная на $(-\infty, +\infty)$ измеримая функция, причем существует число $A > 0$ такое, что

$$(3.1) \quad 0 \leq \overset{\circ}{w}(x) \text{ убывает по } x \text{ на } [A, +\infty),$$

$$(3.2) \quad \overset{\circ}{w} \in L_1(0, +\infty) \cap C_0(0, +\infty), \quad m_1 \equiv \int_0^{\infty} x \overset{\circ}{w}(x)dx < +\infty.$$

Рассмотрим следующее линейное неоднородное интегральное уравнение:

$$(3.3) \quad Q(x) = 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \mu(x) \int_0^{\infty} K(x-t)Q(t)dt, \quad x \geq 0.$$

Используя результаты работ [12, 13], ниже покажем, что уравнение (3.3) имеет положительное, ограниченное и суммируемое решение, причем

$$(3.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0.$$

Наряду с уравнением (3.3) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение

$$(3.5) \quad Q^*(x) = 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \int_0^{\infty} K(x-t)Q^*(t)dt, \quad x \geq 0$$

относительно $Q^*(x)$.

Пусть E – одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0, +\infty)$, $M(0, +\infty)$, $C_0(0, +\infty)$, $C_M(0, +\infty) \equiv C(0, +\infty) \cap M(0, +\infty)$. Рассмотрим интегральный оператор Винера-Хопфа

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad f \in E$$

с ядром $K(x)$ удовлетворяющий условиям (1.2), (1.4).

Как известно, (см. [13]) оператор $I - \mathcal{K}$ допускает следующую вольтерровую факторизацию:

$$(3.6) \quad I - \mathcal{K} = (I - V_-)(I - V_+)$$

как равенство операторов действующих в E , где $V_\mp$ – верхние и нижние вольтерровые операторы вида:

$$(V_-f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt, \quad (V_+f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad f \in E,$$

$$v_\pm(x) \geq 0, \quad v_\pm \in L_1(0, +\infty), \quad \gamma_\pm = \int_0^\infty v_\pm(x)dx, \quad \gamma_+ < 1, \quad \gamma_- = 1,$$

причем $v_\pm(x)$ представляют собой поточечный предел следующего итерационного процесса:

$$(3.7) \quad v_{n+1}^\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty v_n^\pm(t)v_n^\pm(x+t)dt, \quad v_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

(точнее $v_n^\pm \uparrow v_\pm$ при $n \rightarrow \infty$). Учитывая тот факт, что $\gamma_+ < 1$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} K(x) \equiv L < +\infty$, из (3.7) индукцией по n можно доказать, что $v_n^\pm \leq L(1 - \gamma_+)^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $v_\pm(x) \leq L(1 - \gamma_+)^{-1} < +\infty$. С использованием факторизации (3.6) решение уравнения (3.5) сводится к решению следующих двух уравнений Вольтерра:

$$(3.8) \quad Q_1^*(x) = 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \int_x^\infty v_-(t-x)Q_1^*(t)dt, \quad x \geq 0,$$

$$(3.9) \quad Q^*(x) = Q_1^*(x) + \int_0^x v_+(x-t)Q^*(t)dt, \quad x \geq 0$$

Из результатов работ [12, 13] следует, что уравнение (3.8) при условий (3.1), (3.2) имеет положительное решение из пространства $L_1(0, +\infty)$. Из ограниченности функций v_- и $\overset{\circ}{w}$ следует ограниченность функции $Q_1^*(x)$. Заметим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} Q_1^*(x) = 0$, так как

$$0 \leq Q_1^*(x) \leq 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^+} v_-(x) \int_x^\infty Q_1^*(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Поскольку $\gamma_+ < 1$, то оператор V_+ будет сжимающим в каждом из пространств E . Следовательно, из свойств функций $Q_1^*(x)$ следует, что уравнение (3.9) имеет положительное решение $Q^*(x) \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} Q^*(x) = 0$, $Q^* \in L_1(0, +\infty) \cap M(0, +\infty)$. Рассматривая следующие простые итерации

$$Q^{(n+1)}(x) = 2\overset{\circ}{w}(x+A) + \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)Q^{(n)}(t)dt, \quad Q^{(0)}(x) \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые монотонно возрастают по n и удовлетворяют неравенствам $Q^{(n)}(x) \leq Q^*(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) заключаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(x) = Q(x) \leq Q^*(x)$. Таким образом $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$, $Q \in L_1(0, +\infty) \cap M(0, +\infty)$.

Обозначим через $\kappa = \operatorname{ess\,sup}_{x \geq 0} Q(x)$. Пусть γ_0 – некоторое фиксированное число из $[A, +\infty)$, для которого $\overset{\circ}{w}(\gamma_0) < \gamma_0$. Существование такого числа сразу следует из (3.1), (3.2).

Заметим, что если γ – любое число из множества

$$(3.10) \quad \Delta \equiv \left[\frac{\max(\kappa, \gamma_0)}{\alpha}, +\infty \right)$$

то следующее решение уравнения (2.1)

$$(3.11) \quad \tilde{\chi}_\gamma(x) = \gamma \chi^*(x)$$

будет удовлетворять неравенству: $\tilde{\chi}_\gamma(x) \geq Q(x)$. Действительно, имеем

$$\tilde{\chi}_\gamma(x) \geq \gamma \alpha \geq \max(\kappa, \gamma_0) \geq \kappa \geq Q(x).$$

Из (2.7), (3.11) очевидным образом следует также, что

$$(3.12) \quad \tilde{\chi}_\gamma(x) \uparrow \gamma C, \quad x \rightarrow \infty.$$

Наряду с уравнением (3.3) рассмотрим уравнение

$$(3.13) \quad \rho(x) = 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) + \lambda(x)\mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\rho(t)dt, \quad x \geq 0,$$

где

$$\lambda(x) = 1 - \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}, \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\rho^{(n+1)}(x) = 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) + \lambda(x)\mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\rho^{(n)}(t)dt, \quad \rho^{(0)}(x) \equiv 0,$$

$n = 0, 1, 2, \dots, x \geq 0$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$(3.14) \quad \overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \overset{\circ}{w}(x + \gamma\alpha) \leq \overset{\circ}{w}(\gamma\alpha) \leq \overset{\circ}{w}(\gamma_0) < \gamma_0 \leq \alpha\gamma \leq \tilde{\chi}_\gamma(x),$$

$$(3.15) \quad \overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \overset{\circ}{w}(x + \gamma_0) \leq \overset{\circ}{w}(x + A).$$

Из (3.14), (3.15) следует, что

$$0 < 1 - \frac{\overset{\circ}{w}(\gamma_0)}{\gamma_0} \leq \lambda(x) \leq 1,$$

$$(1 - \lambda(x))x^j = \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}x^j \leq \frac{1}{\gamma_0} \overset{\circ}{w}(x + A)x^j \in L_1(0, +\infty), \quad j = 0, 1.$$

По индукции легко можно убедиться в достоверности следующих утверждений:

$$(3.16) \quad \begin{array}{ll} a) & \rho^{(n)} \text{ возрастает по } n, \\ b) & \rho^{(n)}(x) \leq Q(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ c) & \rho^{(n)}(x) \geq 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)), \quad n = 1, 2, \dots \end{array}$$

Следовательно, существует

$$(3.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(n)}(x) \equiv \rho(x) \leq Q(x).$$

Из теоремы Б. Леви следует, что предельная функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению (3.13), а из (3.16), (3.17) получаем следующую двойную оценку:

$$(3.18) \quad 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) \leq \rho(x) \leq Q(x).$$

4. ОДНО ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (2.1)

Рассмотрим уравнение:

$$(4.1) \quad E(x) = \mu(x)\lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)E(t)dt, \quad x \geq 0$$

относительно искомой функции $E(x)$.

Прямой проверкой убедимся, что функция $\tilde{E}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - \rho(x)$ удовлетворяет уравнению (4.1). Имеем

$$\mu(x)\lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)\tilde{E}(t)dt = \left(1 - \frac{\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x))}{\tilde{\chi}_\gamma(x)}\right) \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(2\tilde{\chi}_\gamma(t) - \rho(t))dt =$$

$$= 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - 2\overset{\circ}{w}(x + \tilde{\chi}_\gamma(x)) - \lambda(x)\mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\rho(t)dt = 2\tilde{\chi}_\gamma(x) - \rho(x) = \tilde{E}(x).$$

Поскольку $\rho(x) \leq Q(x) \leq \tilde{\chi}_\gamma(x)$, то $\tilde{E}(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x)$. Рассмотрим следующие итерации:

$$(4.2) \quad E^{(n+1)}(x) = \mu(x)\lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)E^{(n)}(t)dt, \quad E^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

По индукции нетрудно убедиться, что $E^{(n)}(x)$ убывает по n , $E^{(n)}(x) \geq \tilde{E}(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} E^{(n)}(x) = E(x)$, причем

$$(4.3) \quad E(x) \geq \tilde{E}(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x).$$

Из (4.2) следует, что

$$(4.4) \quad E(x) \leq 2\lambda(x)\tilde{\chi}_\gamma(x).$$

Рассмотрим уравнение:

$$(4.5) \quad F(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)F(t)dt.$$

Если $E(x)$ удовлетворяет уравнению (4.1), то функция

$$(4.6) \quad F(x) = \frac{E(x)}{\lambda(x)}.$$

будет удовлетворять уравнению (4.5). Из (4.3), (4.4) с учетом (4.6) будем иметь

$$(4.7) \quad \tilde{\chi}_\gamma(x) \leq E(x) \leq F(x) \leq 2\tilde{\chi}_\gamma(x)$$

В дальнейшем цепочка неравенств (4.7) нам понадобится.

5. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Теперь рассмотрим уравнение:

$$(5.1) \quad H(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(H(t) - w(t, H(t)))dt, \quad x \geq 0,$$

где $w(t, z) : (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет условиям:

- (i) $0 \leq w(t, z)$ убывает по z и $(0, +\infty) \times [A, +\infty) = \Omega_A$
- (ii) $w(t, z)$ удовлетворяет условию Каратеодори на Ω_A , т.е. при каждом фиксированном $z \in [A, +\infty)$ функция $w(t, z)$ измерима по $t > 0$ и почти при всех $t > 0$, $w(t, z)$ непрерывна по z на $[A, +\infty)$, (об этом

подробнее см. в [15], стр. 62 - 64).

$$(iii) \quad w(t, z) \leq \overset{\circ}{w}(t + z), \quad (t, z) \in \Omega_A.$$

Введем следующие итерации:

$$(5.2) \quad H^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(H^{(n)}(t) - w(t, H^{(n)}(t)))dt, \quad H^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x),$$

$n = 0, 1, \dots, x \geq 0$. Заметим, что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$, $n = 0, 1, \dots$, $H^{(n)}(x)$ убывает по n .

Действительно, сначала докажем, что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$. В случае $n = 0$ неравенство сразу следует из (4.7). Предположим, что $H^{(n)}(x) \geq F(x)$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. Тогда поскольку $F(x) \geq \tilde{\chi}_\gamma(x) \geq \gamma\alpha \geq \gamma_0 \geq A$, то из (5.2) будем иметь

$$\begin{aligned} H^{(n+1)}(x) &\geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(F(t) - w(t, F(t)))dt \geq \\ &\geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\overset{\circ}{w}(t + F(t))dt \geq \\ &\geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\overset{\circ}{w}(t + \tilde{\chi}_\gamma(t))dt = \\ &= \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)F(t)dt - \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(1 - \lambda(t))\tilde{\chi}_\gamma(t)dt \geq \\ &\geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)F(t)dt = F(x). \end{aligned}$$

Теперь докажем, что $H^{(n)}(x)$ убывает по n . Имеем

$$H^{(1)}(x) \leq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)H^{(0)}(t)dt = H^{(0)}(x),$$

так как $w(t, H^{(0)}(t)) \geq 0$ (ведь $H^{(0)}(x) \geq 2\gamma_0 \geq A$) и $\tilde{\chi}_\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Предположим, что $H^{(n)}(x) \leq H^{(n-1)}(x)$, тогда учитывая, что $H^{(n)}(x) \geq F(x) \geq A$ из (5.2) получим $H^{(n+1)}(x) \leq H^{(n)}(x)$. Таким образом, можем утверждать, что последовательность функции $\{H^{(n)}(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} H^{(n)}(x) = H(x)$, причем

$$(5.3) \quad F(x) \leq H(x) \leq 2\tilde{\chi}_\gamma(x).$$

Из теоремы Б. Леви следует, что предельная функция удовлетворяет уравнению (5.1). Теперь убедимся, что существует

$$(5.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 2\gamma C.$$

Действительно сначала из (3.4) и (3.18) следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$. Следовательно, существует

$$(5.5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{E}(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_\gamma(x) = 2\gamma C.$$

Комбинируя неравенства (4.3), (4.7) и предельное соотношение (5.5), приходим к равенству

$$(5.6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 2\gamma C.$$

Следовательно, используя (5.3), (5.6), (3.12) приходим к (5.4).

Таким образом справедлива

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия (1.2) - (1.4), (2.2) и (i) - (iii). Тогда уравнение (5.1) обладает однопараметрическим семейством ограниченных и положительных решений $\{H_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Delta}$, где множество Δ параметров γ задается согласно (3.10). Для каждой функции из этого семейства справедливо предельное соотношение (5.4).*

Замечание 5.1. *Если дополнительно потребовать, чтобы $w(t, z) \downarrow$ по t , то можно доказать, что полученные решения $H_\gamma(x)$ монотонно возрастают по x .*

Действительно, записывая итерации (5.2) в следующем виде

$$H^{(n+1)}(x) = \mu(x) \int_{-\infty}^x K(\tau)(H^{(n)}(x - \tau) - w(x - \tau, H^{(n)}(x - \tau)))d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$H^{(0)}(x) = 2\tilde{\chi}_\gamma(x)$$

по индукции нетрудно убедиться, что $H^{(n)}(x)$ возрастает по x . Следовательно, $H(x)$ возрастает по x .

Замечание 5.2. *Из Теоремы 5.1 с учетом определения 1.2 следует, что нелинейный оператор B , задаваемый по формуле*

$$(Bf)(x) = \mu(x) \int_0^\infty K(x - t)(f(t) - w(t, f(t)))dt, \quad f \in L_\infty(\mathbb{R}^+),$$

является сильно критическим, если $w(t, 0) \equiv 0$.

6. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Предположим, что $W(t, z)$ имеет следующую структуру:

$$W(t, z) = G(z) - w(t, z);$$

где $w(t, z)$ удовлетворяет условиям (i) – (iii), а $G(z)$ – непрерывная на отрезке $[0, \eta]$, $\eta \in [\frac{2C \max(\kappa, \gamma_0)}{\alpha}, +\infty)$ функция, причем

$$(6.1) \quad G \uparrow [0, \eta], \quad G(\eta) = \eta,$$

$$(6.2) \quad G(x) \geq x, \quad x \in [0, \eta].$$

Предположим также, что $R(x, \tau)$ измеримая функция и удовлетворяет следующим условиям:

$$j_1) \quad \mu(x) \leq R(x, \tau) \leq \left(\int_{-\infty}^x K(z) dz \right)^{-1}, \quad (x, \tau) \in (0, +\infty) \times [0, \eta] \equiv B_\eta,$$

$j_2)$ $R(x, \tau)$ – удовлетворяет условию Каратеодори на множестве B_η ,

$j_3)$ $R(x, \tau)$ возрастает по τ на отрезке $[0, \eta]$ при каждом фиксированном $x \geq 0$.

Теорема 6.1. Пусть имеют место все условия теоремы 5.1. Тогда, если функции G и R удовлетворяют условиям (6.1), (6.2), $(j_1) - (j_3)$, то уравнение (1.1) обладает положительным и ограниченным решением $f(x) \leq \eta$. Более того

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие итерации

$$(6.3) \quad f^{(n+1)}(x) = R(x, f^{(n)}(x)) \int_0^\infty K(x-t) W(t, f^{(n)}(t)) dt, \quad f^{(0)}(x) \equiv \eta,$$

$n = 0, 1, \dots, x \geq 0$. Поскольку уравнение (5.1) (по теореме 5.1) обладает однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений $\{H_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Delta}$, то если взять

$$\gamma = \frac{\eta}{2C} \in \Delta \equiv \left[\frac{\max(\kappa, \gamma_0)}{\alpha}, +\infty \right),$$

мы можем из этого семейства выбрать решение $H^*(x)$, которое стремится в бесконечности к числу η (см. формулу (5.4)), причем $H^*(x) \leq \eta$. Последнее неравенство следует из (5.3) и (3.12) в случае $\gamma = \frac{\eta}{2C}$.

Сначала докажем по индукции, что

$$(6.4) \quad \eta \geq f^{(n)}(x) \geq H^*(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

В случае $n = 0$ это очевидно. Пусть неравенства (6.4) справедливы при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (6.3) с учетом (6.1), (6.2) и (j_1) , будем иметь

$$f^{(n+1)}(x) \leq R(x, \eta) \int_0^\infty K(x-t)(G(\eta) - w(t, \eta))dt \leq \eta R(x, \eta) \int_{-\infty}^x K(z)dz \leq \eta,$$

$$\eta \geq H^*(x) \geq \frac{\eta}{2C} \alpha \geq \max(\kappa, \gamma_0) \geq A.$$

С другой стороны, используя последнее неравенство, получим

$$f^{(n+1)}(x) \geq R(x, H^*(x)) \int_0^\infty K(x-t)(G(H^*(t)) - w(t, H^*(t)))dt \geq$$

$$\geq \mu(x) \int_0^\infty K(x-t)(H^*(t) - w(t, H^*(t)))dt = H^*(x).$$

Теперь убедимся, что последовательность $\{f^{(n)}(x)\}_0^\infty$ монотонно убывает по n . Неравенство $f^{(1)}(x) \leq f^{(0)}(x)$ сразу следует из (6.4). Предполагая, что $f^{(n)}(x) \leq f^{(n-1)}(x)$ и используя (6.4), из (6.3) получим $f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n)}(x)$.

Таким образом, существует точечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = f(x)$ и

$$(6.5) \quad H^*(x) \leq f(x) \leq \eta.$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} H^*(x) = \eta$, то из (6.5) следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta$. Используя теорему Б. Леви заключаем, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). $\square$

Примеры. а) Рассмотрим следующий класс функций:

$$R(x, \tau) = \frac{L(x) - \mu(x)}{2} U(\tau) + \frac{L(x) + \mu(x)}{2},$$

где

$$L(x) \equiv \left(\int_{-\infty}^x K(\tau) d\tau \right)^{-1},$$

а $U(t)$ измеримая функция на $(-\infty, +\infty)$, причем $0 \leq U(t) \leq 1$, когда $t \in [0, \eta]$, $U \in C[0, \eta]$ и U возрастает на $[0, \eta]$.

Нетрудно убедиться, что $R(x, \tau)$ удовлетворяет всем условиям $(j_1) - (j_3)$. Действительно когда $(x, \tau) \in B_\eta$

$$R(x, \tau) \geq \frac{L(x) + \mu(x)}{2} \geq \mu(x), \quad \text{ибо} \quad L(x) \geq \mu(x)$$

$$R(x, \tau) \leq \frac{L(x) - \mu(x)}{2} + \frac{L(x) + \mu(x)}{2} = L(x), \quad R \text{ возрастает по } \tau \text{ на } [0, \eta]$$

и удовлетворяет условию Каратеодори.

b) В качестве функции G можно взять:

$$G(x) = \sqrt{\eta x e^{\frac{x}{\eta} - 1}}, \quad G(x) = x + \frac{\eta}{\pi} \sin \frac{x\pi}{\eta}, \quad G(x) = \eta \sqrt{\frac{x}{\eta}}.$$

c) Пример функции $w(t, z)$:

$$\begin{aligned} w(t, z) &= q(t, z) \overset{\circ}{w}(t + z), \quad 0 \leq q(t, z) \leq 1, \quad q \text{ убывает по } z, \\ \overset{\circ}{w}(\tau) &= \tau e^{-(\tau-a)^2}, \quad a \geq 0, \quad q(t, z) = \frac{t^2 + c}{t^2 + \alpha} e^{-z}, \quad 0 < c \leq \alpha. \end{aligned}$$

7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.7)

В настоящем параграфе мы займемся решением уравнения (1.7) с помощью доказанной теоремы 6.1.

Предполагаем, что функция G_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$(7.1) \quad G_0 \in C[0, \eta], \quad G_0 \uparrow [0, \eta], \quad G_0(\eta) = \eta,$$

$$(7.2) \quad G_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, \eta].$$

Теорема 7.1. Пусть выполнены все условия теоремы 6.1, а функции R и G удовлетворяют условиям (6.1), (6.2) и $(j_2), (j_3)$. Тогда, если $\mu(x) \leq R(x, \tau) \leq 1$, $(x, \tau) \in B_\eta$, то уравнение (1.7) обладает положительным и ограниченным решением $f(x) \leq \eta$ с пределом η в бесконечности.

Доказательство. Введем следующие итерации

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= R(x, \varphi^{(n)}(x)) \int_0^\infty K(x-t) W(t, \varphi^{(n)}(t)) dt + \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x+t) G_0(\varphi^{(n)}(t)) dt, \\ n &= 0, 1, \dots, \quad \varphi^{(0)}(x) \equiv \eta, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Используя (7.1), (7.2), (1.8), а также (6.1), (6.2), (j_1) , (i) – (iii), нетрудно убедиться по индукции, что $\eta \geq \varphi^{(n)}(x) \geq f(x)$, $n = 0, 1, \dots$, $x \geq 0$ и $\varphi^{(n)}$ убывает по n . Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(x) = \varphi(x)$, причем

$$(7.3) \quad f(x) \leq \varphi(x) \leq \eta.$$

Из (7.3) с учетом теоремы 6.1 следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \eta$. Из теоремы Б. Леви следует, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (1.7). $\square$

Ниже приведем два примера функции G_0 :

$$G_0(x) = \eta \left(\frac{x}{\eta} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad G_0(x) = \eta \sin \frac{x\pi}{2\eta}.$$

Abstract. The paper is devoted to investigation of the solvability of a class of nonlinear integral equations on the semiaxis in a critical case, which possess a noncompact

operator of almost Hammerstein type. Under some conditions on the equation kernel, the existence of a bounded, monotone increasing, positive solution is proved. The asymptotic behavior of the solution near infinity is studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Москва, Изд. физ.мат.лит., 394стр. (1962).
- [2] П. П. Забрейко, “О непрерывности нелинейного оператора”, Сибирский. мат. журнал, **5**, п. 4, 958 – 960 (1964).
- [3] П. П. Забрейко, “О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона”, Доклады АН СССР, **161**, по. 5, 1007 – 1010 (1965).
- [4] П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, “О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p ”, Успехи мат.наук, **19**, по. 2, 204 – 205 (1964).
- [5] G. Emmanuele, “An existence theorem for Hammerstein integral equations”, Portugal Mathem., **51**, по. 4, 607 - 611 (1994).
- [6] Х. А. Хачатрян, А. Н. Афян, С. А. Григорян, “Об одном интегральном уравнении типа Гаммерштейна в консервативном случае”, Матем. в высшей школе, **5**, по. 1, 44 – 49 (2009).
- [7] Х. А. Хачатрян, “Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси”, Докл. Российской Академии Наук, Математика, **425**, по. 2, 462 – 465 (2009).
- [8] Х. А. Хачатрян, “Однопараметрическое семейство решений одного класса нелинейных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси”, Докл. Российской Академии Наук, Математика, **429**, по. 5, 595 – 599 (2009).
- [9] Х. А. Хачатрян, “Существование и асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси”, Вестник РАН, **3**, по. 1, 15 – 25 (2009).
- [10] Kh. A. Khachatryan, “On solvability some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operator”, Ufimskii Matematicheskii Zhurnal, **2**, no. 2, 102 – 117 (2010).
- [11] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором”, Мат. сборник, РАН, **201**, по. 4, 125 – 136 (2010).
- [12] Л. Г. Арабаджян, “Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде”, Дифф.урав., **23**, по. 9, 1618 – 1622 (1987).
- [13] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, Итоги науки и техники. Мат. анализ., **22**, 175 – 244 (1984).
- [14] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва (1981).
- [15] А. Куфнер, С. Фучик, Нелинейные Дифференциальные Уравнения, Москва, Наука (1988).

Поступила 28 октября 2009

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 2, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

С. Г. АЛЕКСАНЯН, Оптимально равномерное приближение мероморфными функциями в полосе	3
А. АПОЗЯН, Гипотезы о GC_n множествах	13
А. С. ДАЛАЛЯН, Б. С. НАХАПЕТЯН, Описание случайных полей одноточечными конечно-условными распределениями	27
В. Ж. ДУМАНЯН, О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка	37
Э. НАЗАРИ, Обратимые медиальные алгебры и группа операций	53
А. С. ПАЙЛЕВАНЯН, Х. Р. РОСТАМИ, Об автоморфизмах и вложениях свободных периодических групп	59
Х. А. ХАЧАТРЯН, Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором	71

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 2, 2011

CONTENTS

S. H. ALEKSANYAN, Optimally uniform approximation by meromorphic functions in the strip	3
A. APOZYAN, Conjectures on GC_n sets	13
A. S. DALALYAN, B. S. NAHAPETIAN, Description of random fields by means of one-point finite-conditional distributions	27
V. ZH. DUMANYAN, On solvability of Dirichlet problem for second order elliptic equation	37
E. NAZARI, Invertible medial algebras and a group of operations	53
A. S. PAHLEVANYAN, H. R. ROSTAMI, On automorphisms and embeddings of free periodic groups	59
Kh. A. KHACHATRYAN, On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator	71