

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2011

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 1, 2011, стр. 3-16.

О ЖАДНОМ АЛГОРИТМЕ В $L^1(0, 1)$ ПО РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

С. Л. ГОГЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: gogyan@instmath.sci.am

Аннотация. В работе в $L^1(0, 1)$ описаны все квази-гриды подсистемы регулярной системы Хаара.

MSC2000 number: 42C10, 42C20

Ключевые слова: Подсистема системы Хаара, регулярная система Хаара, жадный алгоритм, квази-гриды система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ базис в Банаховом пространстве X и $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|\psi_k\|_X > 0$. Тогда для каждого элемента $f \in X$ имеем

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k,$$

где $c_k(f, \Psi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Положим $\Lambda_0 = \emptyset$ и для каждого $m \geq 1$ индуктивным методом построим множества $\Lambda_m \subset \mathbb{N}$ удовлетворяющие условиям

$$(1.1) \quad \#\Lambda_m = m, \quad \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m \quad \text{и} \quad \min_{k \in \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)| \geq \max_{k \notin \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)|.$$

Заметим, что множества Λ_m могут определяться не однозначно. Через $D(f)$ обозначим множества всех таких последовательностей $\{\Lambda_m\}$. Для любого $\Lambda = \{\Lambda_m\} \in D(f)$ положим

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi) = G_m(f, \Psi, \Lambda) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Полином $G_m(f, \Psi)$ известен как m -членное жадное приближение элемента f по системе Ψ , а этот нелинейный метод приближения – жадным алгоритмом (см. [5]).

Определение 1.1. Базис $\Psi = \{\psi_k\}$ называется квази-гриды базисом в X если существует число $C > 0$ такое, что для любого элемента $f \in X$ существует

$\Lambda \in D(f)$ для которого выполняется следующее неравенство

$$(1.2) \quad \|G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X \leq C\|f\|_X.$$

Очевидно, что всякий нормированный и безусловный базис является также квази-гриди базисом.

Определение 1.2. Подсистему $F \subset \Psi$ назовем квази-гриди системой в X , если F является квази-гриди базисом в $\overline{\text{span}\{F\}}$.

В работе [9] была доказана следующая теорема.

Теорема А. Базис Ψ является квази-гриди базисом X , тогда и только тогда, когда

$$(1.3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X = 0,$$

для любых $f \in X$ и $\Lambda \in D(f)$.

В работе [5] отмечена, что если Ψ является квази-гриди базисом, тогда условие (1.2) выполняется для всех $\Lambda \in D(f)$. В работах [6] и [7] был рассмотрен алгоритм, где условие (1.1) было заменено более слабым условием. Для любых $0 < t \leq 1$ и $f \in X$ обозначим через Λ_m^t множество m натуральных чисел, удовлетворяющее условию

$$\min_{k \in \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X \geq t \max_{k \notin \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X,$$

и положим

$$(1.4) \quad G_m^t(f) = G_m^t(f, \Psi) = \sum_{k \in \Lambda_m^t} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Заметим, что при $t = 1$ получается жадный алгоритм. В работе [6] (см. также [7]) доказано, что для квази-гриди базисов последовательность $\{G_m^t(f)\}$ сходится к f .

Теорема Б. Пусть Ψ квази-гриди базис в Банаховом пространстве X . Тогда для фиксированного $0 < t \leq 1$ и для любых $m \in \mathbb{N}$ и $f \in X$ имеет место следующее неравенство

$$\|G_m^t(f, \Psi)\|_X \leq C(t)\|f\|_X.$$

В настоящей работе мы рассмотрим жадный алгоритм в $L^1(0, 1)$ по общим системам Хаара. Напомним их определение. Для начала положим $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\Delta_0^{(1)} = [0, 1)$. Далее, выберем любую внутреннюю точку $t_2 \in \Delta_0^{(1)}$ и положим $\Delta_1^{(1)} = [0, t_2)$ и $\Delta_1^{(2)} = [t_2, 1)$. В общем случае выберем любую внутреннюю точку $t_{2^i+j} \in \Delta_i^{(j)} = [a, b)$ для любого $i = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^i$ и положим

$\Delta_{i+1}^{(2j-1)} = [a, t_{2^i+j})$ и $\Delta_{i+1}^{(2j)} = [t_{2^i+j}, b)$. Единственное требование, которое налагается на интервалы $\{\Delta_i^{(j)}\}$ это то, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq j \leq 2^i} |\Delta_i^{(j)}| = 0,$$

где $|A|$ мера Лебега мера множества A , т.е. множество точек $\{t_i\}$ должно быть плотным в $[0, 1]$. Обозначим $h_1 = h_0^{(0)} \equiv 1$, $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = [0, 1)$, $\gamma_1 = 1$ и для всех $n = 2^i + j$; $j = 1, 2, \dots, 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$h_n(t) = h_i^{(j)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_{i+1}^{(2j-1)}|}, & \text{при } t \in \Delta_{i+1}^{(2j-1)}; \\ -\frac{1}{2|\Delta_{i+1}^{(2j)}|}, & \text{при } t \in \Delta_{i+1}^{(2j)}; \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \Delta_n = \Delta_i^{(j)}; \quad \gamma_n = \gamma_n(\mathcal{H}) = \frac{|\Delta_{2n-1}|}{|\Delta_{2n}|}.$$

Система функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \{h_n\}$ есть нормированная в $L^1(0, 1)$ общая система Хаара, соответствующая делению $\mathcal{T} = \{t_n\}$. Общая система Хаара называется регулярной, если

$$(1.6) \quad \gamma = \gamma(\mathcal{H}) = \inf_{n \geq 2} (\gamma_n(\mathcal{H}), \gamma_n(\mathcal{H})^{-1}) > 0.$$

В случае, когда $\mathcal{T} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots\}$ получается двоичная система Хаара. Для системы Хаара имеем, что $\gamma = 1$.

Коэффициенты $c_n(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ определяются согласно следующим формулам:

$$c_1(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) = \int_0^1 f(t) dt,$$

$$(1.7) \quad c_n(f, \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) = \frac{2}{1 + \gamma_n} \left[\int_{\Delta_{2n-1}} f(t) dt - \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} f(t) dt \right] \quad n = 2, 3, \dots$$

Об эффективности жадного алгоритма в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ по системе Хаара и по общим системам Хаара можно читать соответственно в [8] и [4]. Здесь только отметим, что в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ общая система Хаара является безусловным базисом, следовательно, нормированная в $L^p(0, 1)$ общая система Хаара является квази-гриди базисом. Но ситуация другая в $L^1(0, 1)$. В работе [1] была отмечена, что (нормированная в $L^1(0, 1)$) система Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$. Аналогичный результат для общей системы Хаара была получена в работе [2].

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{M}$ подмножество множества натуральных чисел. Скажем, что подсистема общей системы Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ содержит цепь длиной H если существуют числа $k_1, k_2, \dots, k_H \in \mathcal{M}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, H-1$ имеет место либо $k_{i+1} = 2k_i - 1$ либо $k_{i+1} = 2k_i$.

Для подсистемы общей системы Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ положим

$$H(\mathcal{M}) = \sup\{H : \text{в } \{h_i\}_{i \in \mathcal{M}} \text{ содержится цепь длиной } H\}.$$

В работе [3] была доказана следующая теорема:

Теорема В. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$. Тогда подсистема двоичной системы Хаара является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$(1.8) \quad H(\mathcal{M}) < \infty.$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ и $\{h_i\}$ регулярная система Хаара. Тогда подсистема $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{M}) < \infty$.

Заметим, что в [2] была построена общая система Хаара (не регулярная) для которой существует подсистема $\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}$ с $H(\mathcal{M}) = 1$, которая не является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Через $\|f\|_\Delta$ обозначим L^1 норму функции f на интервале Δ , т.е.

$$\|f\|_\Delta = \int_\Delta |f(t)| dt$$

и используем запись $\|f\|$ в случае $\Delta = [0, 1)$. Обозначим $c_k(f) = c_k(f, \mathcal{H})$ и $sp(\mathcal{H}, f) = \{k \in \mathbb{N} : c_k(f) \neq 0\}$. Напомним, что система Хаара имеет следующее свойство монотонности: из $m > n$ следует, что $\|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|$, где

$$S_m(f) = \sum_{i=1}^m c_i(f) h_i.$$

Лемма 2.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L^1(0, 1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ с $\Delta_n \subseteq \Delta_k$ имеет место следующее неравенство

$$\|f\|_{\Delta_k} \geq \frac{1+\gamma}{2} |c_n(f)|.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n > 1$. Учитывая (1.6) и (1.7) получим, что

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq \frac{2}{1+\gamma_n} (\|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}}) \\ &\leq \frac{2}{1+\gamma} (\|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \|f\|_{\Delta_{2n}}) = \frac{2\|f\|_{\Delta_n}}{1+\gamma} \leq \frac{2\|f\|_{\Delta_k}}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $n = 1$. В этом случае имеем, что $\Delta_k = [0, 1)$, следовательно

$$|c_1(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \|f\| \leq \frac{2}{1+\gamma} \|f\|.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $f \in L^1(0, 1)$ и $\max\{|c_n(f)| : \Delta_n \supset \Delta_m\} \leq 1$ для некоторого натурального $m > 1$. Тогда

$$\|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma}.$$

Доказательство. По индукции по k докажем, что если выполняется условие леммы при некотором m , $2^k < m \leq 2^{k+1}$, то

$$\|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k}.$$

Пусть $k = 0$ и условие леммы выполняется при $m = 2$. Имеем, что $|c_1(f)| \leq 1$, следовательно

$$\|S_1(f)\| = |c_1(f)| \leq 1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma}.$$

Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором k и докажем для $k+1$. Пусть условие леммы выполняются при некотором m , $2^{k+1} < m \leq 2^{k+2}$. Определим число j из условия $\Delta_j \supset \Delta_m$ и $2^k < j \leq 2^{k+1}$. Ясно, что число j удовлетворяет условиям леммы, следовательно, согласно предположению индукции имеем, что

$$\|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_j} \leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k}.$$

С учетом вышесказанного и (1.5) заключаем, что

$$\begin{aligned} \|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} &= \|S_{j-1}(f) + c_j(f)h_j\|_{\Delta_m} \leq \|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_m} + \|c_j(f)h_j\|_{\Delta_m} \leq \\ &\leq \frac{|\Delta_m|}{|\Delta_j|} \|S_{j-1}(f)\|_{\Delta_j} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k} \right) + \frac{1}{2} \leq \\ &\leq \frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} (1+\gamma)^{-k-1}. \end{aligned}$$

Предположение индукции доказано, откуда следует утверждение леммы 2.2. $\square$

Для любой $f \in L^1(0, 1)$, $n > 1$ и общей системы Хаара $\mathcal{H}$ положим

$$L_1(f, \mathcal{H}, n)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \notin \Delta_{2n}, \\ f(a + \gamma_n(x - t_n)), & \text{при } x \in \Delta_{2n}, \end{cases}$$

$$L_2(f, \mathcal{H}, n)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \notin \Delta_{2n-1}, \\ f(t_n + \frac{x-t_n}{\gamma_n}), & \text{при } x \in \Delta_{2n-1}, \end{cases}$$

где $[a, b) = \Delta_n$. Заметим, что $\Delta_{2n-1} = [a, t_n)$ и $\Delta_{2n} = [t_n, b)$.

Лемма 2.3. Пусть $f, g \in L^1(0, 1)$ и $\|f + g\| > 0$. Тогда для любого интервала $\Delta_n = [a, b)$ с $n > 1$ справедливо хотя бы одно из следующих неравенств

$$(2.1) \quad \|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| \geq \frac{\|f\|}{\|f + g\|} \cdot \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\|,$$

$$(2.2) \quad \|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| \geq \frac{\|f\|}{\|f + g\|} \cdot \|L_2(f + g, \mathcal{H}, n)\|.$$

Более того, равенства в (2.1) и в (2.2) выполняются одновременно.

Доказательство. Для краткости положим

$$B = \frac{\|f\|}{\|f + g\|}.$$

Очевидно, что справедливо хотя бы одно из следующих неравенств (а равенства выполняются одновременно)

$$(2.3) \quad \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n} \geq B \left(\|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f + g\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n} \right),$$

$$(2.4) \quad \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}} \geq B \left(\|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f + g\|_{\Delta_{2n}} \right).$$

С учетом того, что

$$\|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| = \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n},$$

$$\|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| = \|f\| - \|f\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f\|_{\Delta_{2n}},$$

$$\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = \|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n}} + \frac{\|f + g\|_{\Delta_{2n-1}}}{\gamma_n},$$

$$\|L_2(f + g, \mathcal{H}, n)\| = \|f + g\| - \|f + g\|_{\Delta_{2n-1}} + \gamma_n \|f + g\|_{\Delta_{2n}},$$

становится ясно, что из (2.3) следует (2.1), а из (2.4) следует (2.2). Лемма 2.3 доказана. $\square$

Для нормированной общей системы Хаара $\mathcal{H}$ и для натурального числа $n > 1$ положим

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n) = \{h_k\}_{\Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}} \cup \{\gamma_n L_1(h_k, \mathcal{H}, n)\}_{\Delta_k \subseteq \Delta_{2n-1}},$$

и

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n) = \{h_k\}_{\Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n-1}} \cup \left\{ \frac{L_2(h_k, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n} \right\}_{\Delta_k \subseteq \Delta_{2n}}.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n)$ и $\mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n)$ являются нормированными обобщениями систем Хаара.

Для любых $f, g \in L^1(0, 1)$, $\|f + g\| > 0$, общей системы Хаара $\mathcal{H}$ и натурального $n > 1$, положим

$$L((f, g, \mathcal{H}), n) = \begin{cases} (L_1(f, \mathcal{H}, n), L_1(g, \mathcal{H}, n), \mathcal{H}_1(\mathcal{H}, n)) , & \text{если имеет место (2.1) и} \\ & \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0, \\ (L_2(f, \mathcal{H}, n), L_2(g, \mathcal{H}, n), \mathcal{H}_2(\mathcal{H}, n)) , & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и

$$E((f, g, \mathcal{H}), n) = \begin{cases} \Delta_{2n} , & \text{если имеет место (2.1) и} \\ & \|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0, \\ \Delta_{2n-1} , & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2.4. Пусть функции $f, g \in L^1(0, 1)$ общая система Хаара $\mathcal{H}$ и число $n \geq 2$ таковы, что

- i) $c_n(\mathcal{H}, f) = c_n(\mathcal{H}, g) = 0$,
- ii) $sp(\mathcal{H}, f) \cap sp(\mathcal{H}, g) = \emptyset$,
- iii) $\|f\| > 0, \|f + g\| > 0$.

Тогда для $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\mathcal{H}}) = L((f, g, \mathcal{H}), n)$ и $\tilde{E} = E((f, g, \mathcal{H}), n)$ справедливы следующие утверждения

- 1) $c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$,
- 2) $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = c_k(\mathcal{H}, g)$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$,
- 3) $sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cap sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = \emptyset$,
- 4) $\gamma(\tilde{\mathcal{H}}) \geq \gamma(\mathcal{H})$,
- 5) $\|\tilde{f}\| > 0, \|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$,
- 6) $\frac{\|f\|}{\|f+g\|} \leq \frac{\|\tilde{f}\|}{\|\tilde{f}+\tilde{g}\|}$.
- 7) $H(sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g})) \leq H(sp(\mathcal{H}, f + g))$.

Доказательство. 1) - 2). Носитель i -той функции системы $\tilde{\mathcal{H}}$ обозначим через $\tilde{\Delta}_i$. Также положим $\tilde{\gamma}_i = \frac{|\tilde{\Delta}_{2i-1}|}{|\tilde{\Delta}_{2i}|}$. Согласно определению функции $\tilde{f}$ имеем, что

$$\int_{\Delta_{2n-1}} \tilde{f} = \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} \tilde{f}.$$

Из условия i) следует, что

$$(2.5) \quad \int_{\Delta_{2n-1}} f = \gamma_n \int_{\Delta_{2n}} f.$$

Учитывая две последние равенства, а также то, что функции f и $\tilde{f}$ совпадают либо на Δ_{2n-1} либо на Δ_{2n} , можно заключить, что

$$\int_{\Delta_{2n-1}} f = \int_{\Delta_{2n-1}} \tilde{f} \quad \text{и} \quad \int_{\Delta_{2n}} f = \int_{\Delta_{2n}} \tilde{f}.$$

Итак имеем, что функции f и $\tilde{f}$ совпадают вне интервала $\tilde{E}$, а на $\tilde{E}$ имеют равные интегралы. Следовательно, для любого натурального k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$ будем иметь, что

$$\int_{\Delta_{2k-1}} f = \int_{\Delta_{2k-1}} \tilde{f}, \quad \text{и} \quad \int_{\Delta_{2k}} f = \int_{\Delta_{2k}} \tilde{f}.$$

Также заметим, что $\Delta_{2k-1} = \tilde{\Delta}_{2k-1}$, $\Delta_{2k} = \tilde{\Delta}_{2k}$ и $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$. С учетом всего вышесказанного и (1.7) заключаем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$. Аналогичные утверждения справедливы также для функций g и $\tilde{g}$.

3) - 4). Покажем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$ и $\tilde{\gamma}_k \in \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ для любого натурального k . Для этого рассмотрим два случая.

Случай 1: $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$. Согласно утверждению 2) леммы имеем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = c_k(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = c_k(\mathcal{H}, g)$. С учетом условия ii) получаем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$. Также в пункте 2) мы показали, что $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ для всех k с $\Delta_k \not\subseteq \tilde{E}$.

Случай 2: $\Delta_k \subseteq \tilde{E}$. Для определенности предположим, что $\tilde{E} = \Delta_{2n-1}$. Тогда при некотором натуральном j с $\Delta_j \subseteq \Delta_{2n}$ имеем, что $\tilde{h}_k = \frac{L_2(h_j, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n}$. Заметим, что $|\tilde{\Delta}_{2j-1}| = \gamma_n |\Delta_{2k-1}|$ и $|\tilde{\Delta}_{2j}| = \gamma_n |\Delta_{2k}|$, следовательно $\tilde{\gamma}_k = \gamma_j$. Также легко проверить, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) = \gamma_n c_j(\mathcal{H}, f)$ и $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = \gamma_n c_j(\mathcal{H}, g)$. Итак имеем, что $c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f}) \cdot c_k(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{g}) = 0$ и $\tilde{\gamma}_k \in \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что в случае, когда $\tilde{E} = \Delta_{2n}$ все вышесказанное остается верным, только γ_n меняется на $\frac{1}{\gamma_n}$.

5) - 6). Для краткости положим $B = \frac{\|f\|}{\|f+g\|}$. В случае, когда

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (L_1(f, \mathcal{H}, n), L_1(g, \mathcal{H}, n))$$

имеем, что $\|\tilde{f}\| \geq B\|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$. Отсюда следуют утверждения пунктов 5) и 6). Рассмотрим случай, когда $(\tilde{f}, \tilde{g}) = (L_2(f, \mathcal{H}, n), L_2(g, \mathcal{H}, n))$. В этом случае имеем, что либо $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = 0$, либо $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| > 0$ но не выполняется неравенство (2.1). Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Случай 1: $\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\| = 0$. Это означает, что $f + g = 0$ вне интервала Δ_{2n} . и согласно (2.5), а также аналогичной формулы для функции g получаем, что

$$c_k(f + g) = 0 \quad \text{для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}.$$

С учетом данного свойства и условия ii) получаем, что

$$c_k(f) = 0 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq \Delta_{2n}.$$

Следовательно, $f = 0$ вне множества Δ_{2n} и поэтому

$$\|\tilde{f}\| = \|L_2(f, \mathcal{H}, n)\| = (1 + \gamma_n)\|f\|.$$

Также имеем, что $\|\tilde{f} + \tilde{g}\| = (1 + \gamma_n)\|f + g\|$. Из последних двух равенств следуют утверждения 5) и 6) леммы.

Случай 2: $\|L_1(f, \mathcal{H}, n)\| < B\|L_1(f + g, \mathcal{H}, n)\|$. В этом случае, согласно лемме 2.3 имеем, что $\|\tilde{f}\| > B\|\tilde{f} + \tilde{g}\|$. Остается показать, что $\|\tilde{f} + \tilde{g}\| > 0$. Это следует из того, что $\|\tilde{f}\| > 0$ и из утверждения пункта 3) данной леммы.

7) Пусть $\tilde{\Delta}_{\alpha_1} \supset \tilde{\Delta}_{\alpha_2} \supset \dots \supset \tilde{\Delta}_{\alpha_r}$ является цепью в $\{\tilde{h}_i\}_{i \in sp(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g})}$. Покажем, что в $\{h_i\}_{i \in sp(\mathcal{H}, f + g)}$ содержится цепь длиной r . Имеем, что

$$c_{\alpha_1}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0, c_{\alpha_2}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0, \dots, c_{\alpha_r}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0.$$

Согласно утверждению пункта 1) имеем, что $c_n(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) = 0$, поэтому возможны следующие два случая:

Случай 1: $\tilde{\Delta}_{\alpha_r} \not\subseteq \tilde{E}$. Тогда $\Delta_{\alpha_i} = \tilde{\Delta}_{\alpha_i} \not\subseteq \tilde{E}$ для всех $1 \leq i \leq r$. С учетом утверждения пункта 2) получим, что

$$c_{\alpha_i}(\mathcal{H}, f + g) = c_{\alpha_i}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{f} + \tilde{g}) \neq 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Следовательно $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_2} \supset \dots \supset \Delta_{\alpha_r}$ является цепью в $\{h_i\}_{i \in sp(\mathcal{H}, f + g)}$.

Случай 2: $\tilde{\Delta}_{\alpha_1} \subseteq \tilde{E}$. Для определенности предположим, что $\tilde{E} = \Delta_{2n-1}$. Определим числа $\beta_1, \dots, \beta_r$ из условий $\tilde{h}_{\alpha_i} = \frac{L_2(h_{\beta_i}, \mathcal{H}, n)}{\gamma_n}$ для $1 \leq i \leq r$. Повторяя рассуждения, сделанные при рассмотрении второго случая при доказательстве пунктов 3) и 4) данной леммы заключаем, что $\Delta_{\beta_1} \supset \Delta_{\beta_2} \supset \dots \supset \Delta_{\beta_r}$ образует цепь в $sp(\mathcal{H}, f + g)$. Лемма 2.4 доказана. $\square$

3. ПОДСИСТЕМЫ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ХААРА КАК КВАЗИ-ГРИДИ БАЗИС

Пусть $\mathcal{M}$ последовательность натуральных чисел. Скажем, что интервал Δ_n , $n \notin \mathcal{M}$ имеет k -тый уровень в $\mathcal{M}$, если

$$\#\{i > 1 : i \notin \mathcal{M}, \Delta_n \subseteq \Delta_i\} = k.$$

Заметим, что если $H(\mathcal{M}) < \infty$, то

1. Любой интервал k -го уровня является объединением не более чем $2^{H(\mathcal{M})+1}$ интервалов $(k+1)$ -ого уровня.

2. Все интервалы k -того уровня не пересекаются, а их объединение дает интервал $[0, 1)$.

Для функций $f, g \in L^1(0, 1)$, общей системы Хаара $\mathcal{H}$, измеримого множества $S \subset [0, 1)$ и натурального $n > 1$, положим

$$\tilde{L}((f, g, \mathcal{H}), S, \Delta_n) = (L((f, g, \mathcal{H}), n), S \cup E(f, g, \mathcal{H}, n)).$$

Лемма 3.1. Пусть p полином по регулярной системе Хаара $\mathcal{H}$. Далее пусть функция $q \in L^1(0, 1)$ такова, что

- 1) $sp(\mathcal{H}, p) \cap sp(\mathcal{H}, q) = \emptyset$,
- 2) $\|p\| > 0, \|p + q\| > 0$,
- 3) $H = H(sp(\mathcal{H}, p + q)) < \infty$,
- 4) $1 \notin sp(\mathcal{H}, p + q), 2 \notin sp(\mathcal{H}, p + q)$,
- 5) $|c_i(\mathcal{H}, p)| \geq |c_j(\mathcal{H}, q)|$ для всех $i \in sp(\mathcal{H}, p)$ и $j \in sp(\mathcal{H}, q)$.

Тогда

$$\frac{\|p\|}{\|p + q\|} \leq 2^H \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right)^2$$

где $\gamma = \gamma(\mathcal{H})$.

Доказательство. Лемма очевидна в случае $q = 0$. Рассмотрим случай $\|q\| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{j \in \mathbb{N}} |c_j(q)| = 1$.

Интервалы i -го уровня в $sp(\mathcal{H}, p + q)$ обозначим через $\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, \dots, \delta_i^{(d_i)}$. Заметим, что из условия 4) следует, что $\delta_1^{(1)} = [0, 1)$ и $d_1 = 1$. Через k обозначим наименьшее натуральное число, для которого полином p постоянен на всех интервалах k -того уровня. Положим

$$\begin{aligned} & ((p', q', \mathcal{H}'), E) = \\ & = \tilde{L}(\tilde{L}(\dots \tilde{L}(\tilde{L}((p, q, \mathcal{H}), \emptyset), \delta_{k-1}^{(1)}), \delta_{k-1}^{(2)}), \dots), \delta_{k-1}^{(d_{k-1})}, \delta_{k-2}^{(1)}, \delta_{k-2}^{(2)}, \dots), \delta_1^{(1)}). \end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.4 имеем, что

$$(3.1) \quad \frac{\|p\|}{\|p + q\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p' + q'\|},$$

$$(3.2) \quad \|p'\| > 0,$$

$$(3.3) \quad sp(\mathcal{H}', p') \cap sp(\mathcal{H}', q') = \emptyset \quad \text{и} \quad \{1, 2\} \cap sp(\mathcal{H}', p' + q') = \emptyset.$$

$$(3.4) \quad c_k(\mathcal{H}', p') = c_k(\mathcal{H}, p) \quad \text{и} \quad c_k(\mathcal{H}', q') = c_k(\mathcal{H}, q) \quad \text{для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E',$$

$$(3.5) \quad \gamma' := \gamma(\mathcal{H}') \geq \gamma(\mathcal{H}),$$

$$H(sp(\mathcal{H}', p' + q')) \leq H(\mathcal{H}, sp(p + q)).$$

Из условий леммы и из (3.4) следует, что

$$(3.6) \quad |c_k(\mathcal{H}', q')| \leq 1 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E',$$

и

$$|c_k(\mathcal{H}', p')| \geq 1 \text{ для всех } k \text{ с } \Delta_k \not\subseteq E', c_k(\mathcal{H}', p') \neq 0,$$

Заметим, что

А) E' является объединением интервалов k -того уровня.

Если некоторый интервал Δ_j с уровнем $1 \leq i < k$ не содержится в множестве E' , то

$$\text{В) } L_1(p', \mathcal{H}', j) = L_2(p', \mathcal{H}', j) \text{ и } L_1(q', \mathcal{H}', j) = L_2(q', \mathcal{H}', j)$$

С) Либо Δ_{2j-1} , либо Δ_{2j} можно представить в виде объединения интервалов $(i+1)$ -го уровня, каждый из которых не содержится в E' .

Докажем, что для любого интервала $\delta_i^{(s)}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq s \leq d_i$ с $\delta_i^{(s)} \not\subseteq E'$ справедливы соотношения

$$(3.7) \quad \|p'\|_{\delta_i^{(s)}} \leq \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\delta_i^{(s)}} + \frac{1+\gamma'}{2\gamma'} \quad \text{если } p' \text{ постоянна на } \delta_i^{(s)}$$

$$(3.8) \quad \|p'\|_{\delta_i^{(s)}} \leq \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\delta_i^{(s)}} - 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 \quad \text{если } p' \text{ не постоянна на } \delta_i^{(s)}.$$

Доказательство проведем индукцией по $i = k, k-1, \dots, 1$. Предположим $i = k$. Пусть интервал k -того уровня $\Delta_j = \delta_k^{(s)}$ не содержится в множестве E' . Тогда, согласно первому свойству множества E' имеем, что $\Delta_j \cap E' = \emptyset$. Следовательно, p' постоянна на Δ_j . С учетом монотонности системы Хаара, Леммы 2.2 и (3.6) получим, что

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_j} &= \|S_{j-1}(p')\|_{\Delta_j} \leq \|S_{j-1}(p' + q')\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \leq \\ &\leq \|p' + q'\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'}\right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_j} + \frac{1+\gamma'}{2\gamma'}. \end{aligned}$$

Предположим, что (3.7) и (3.8) справедливы при некотором $1 < i \leq k$ и докажем для $i-1$. Пусть $\delta_{i-1}^{(s)} \not\subseteq E'$ при некотором $1 \leq s \leq d_{i-1}$. Определим число j из условия $\Delta_j = \delta_{i-1}^{(s)}$. В случае, когда p' постоянна на интервале Δ_j , неравенство (3.7) получается аналогично случаю $i = k$. Рассмотрим случай, когда p' не постоянна на интервале Δ_j . С учетом свойства В множества E' имеем, что p' не постоянна на интервалах Δ_{2j-1} и Δ_{2j} . С учетом свойства С множества E' заключаем, что

$$(3.10) \quad \Delta_m = \delta_i^{(\alpha_1)} \cup \delta_i^{(\alpha_1)} \cup \dots \cup \delta_i^{(\alpha_r)}$$

где $m = 2j - 1$ или $m = 2j$, а каждый интервал правой части (3.10) не содержится в E' . Также заметим, что согласно условию 3) данной леммы имеем, что $r \leq 2^H$. Для всех интервалов правой части (3.10) имеет место либо (3.7), либо (3.8). Через b обозначим количество интервалов, на которых справедливо (3.8). Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. $b = 0$. В этом случае p' постоянна на всех интервалах правой части (3.10). Положим

$$\tilde{q} = \sum_{\Delta'_n \not\subseteq \delta_i^{(\alpha_t)}, 1 \leq t \leq r} c_n(\mathcal{H}', q') h_n'.$$

Согласно монотонности общей системы Хаара имеем

$$(3.11) \quad \|p' + q'\|_{\Delta_m} \geq \|p' + \tilde{q}\|_{\Delta_m}.$$

Также, согласно (3.4) и лемме 2.2 имеем, что

$$\|\tilde{q}\|_{\delta_i^{(\alpha_t)}} \leq \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'} \quad \text{для всех } 1 \leq t \leq r,$$

следовательно

$$(3.12) \quad \|\tilde{q}\|_{\Delta_m} \leq 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'}.$$

Комбинируя (3.11) и (3.12) получим, что

$$(3.13) \quad \|p'\|_{\Delta_m} - \|p' + q'\|_{\Delta_m} \leq 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'}.$$

Из того, что p' не постоянна на Δ_m , но постоянна на всех интервалах правой части (3.10), следует, что $c_\beta(\mathcal{H}', p') \neq 0$ при некотором β , для которой $\Delta_\beta \subset \Delta_m$ и Δ_β содержит один из интервалов правой части (3.10). Следовательно, согласно (3.4) и лемме 2.1 имеем, что

$$\|p'\|_{\Delta_m} \geq \frac{1 + \gamma'}{2}.$$

Учитывая (3.3) получаем, что

$$\|p' + q'\|_{\Delta_m} \geq \frac{1 + \gamma'}{2}.$$

С учетом (3.13) заключаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \gamma'}{\gamma'} \right)^2 2^H \|p' + q'\|_{\Delta_m} - \|p'\|_{\Delta_m} \geq \\ & \geq \left[\left(\frac{1 + \gamma'}{\gamma'} \right)^2 2^H - 1 \right] \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^H \frac{1 + \gamma'}{2\gamma'} > 2^{H-1} \frac{1 + \gamma'}{\gamma'^2}. \end{aligned}$$

Случай 2. $b > 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_m} &= \sum_{t=1}^r \|p'\|_{\delta_i^{(\alpha_t)}} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \sum_{t=1}^r \|p' + q'\|_{\delta_i^{(\beta_t)}} - \\ &- b \cdot 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 + (r-b) \frac{1+\gamma'}{2\gamma'} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^{H-1} \frac{1+\gamma'}{\gamma'^2}. \end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях имеем, что

$$(3.14) \quad \|p'\|_{\Delta_m} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_m} - 2^{H-1} \frac{1+\gamma'}{\gamma'^2}.$$

Учитывая свойство В, (3.14) и то, что $\frac{|\Delta_j \setminus \Delta_m|}{|\Delta_m|} \geq \gamma'$ заключаем, что

$$\|p'\|_{\Delta_j} \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|_{\Delta_j} - 2^{H-1} \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2.$$

Предположение индукции доказано. Имеем, что $\delta_1^{(1)} = [0, 1)$, а из (3.2) следует, что p' не постоянна на $[0, 1)$. Следовательно, согласно (3.8) имеем, что

$$\|p'\| \leq 2^H \left(\frac{1+\gamma'}{\gamma'} \right)^2 \|p' + q'\|.$$

С учетом (3.1) и (3.5) лемма 3.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Достаточность. Пусть последовательность $\mathcal{M}$ такова, что $H(\mathcal{M}) < \infty$ и $1; 2 \notin \mathcal{M}$. Пусть $f \in \overline{\text{span}\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}}$. Очевидно, что полином $G_m(f)$ и функция $f - G_m(f)$ удовлетворяют всем требованиям леммы 3.1, следовательно

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right)^2 2^{H(\mathcal{M})}.$$

Достаточность условия $H(\mathcal{M})$ доказана.

Необходимость. Пусть $H(\mathcal{M}) = \infty$. Для любого натурального B выберем числа $k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2B} \in \mathcal{N}$ так, чтобы

$$\Delta_{k+1}^{(\alpha_1)} \supset \Delta_{k+2}^{(\alpha_2)} \supset \dots \supset \Delta_{k+2B}^{(\alpha_{2B})},$$

являлась цепью в $\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}$. Для простоты предположим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2B} = 1$. Положим

$$f = \sum_{j=1}^{2B} \frac{h_{k+j}^{(\alpha_j)}}{1 + \gamma_{k+j}^{(\alpha_j)}} = \frac{\mathcal{J}_{\Delta_{k+2B+1}^{(1)}} - \mathcal{J}_{\Delta_{k+1}^{(1)}}}{2},$$

где

$$\mathcal{J}_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|E|} & , \quad \text{при } x \in E, \\ 0 & , \quad \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Заметим, что при некотором $\Lambda \in D(f, \gamma)$ имеем, что (см (1.4))

$$G_B^\gamma(f, \Lambda) = \sum_{j=1}^B \frac{h_{k+2j}^{(1)}}{1 + \gamma_{k+2j}^{(1)}}.$$

Легко проверить, что

$$\|f\| < 1 \quad \text{и} \quad \|G_B^\gamma(f)\| > \frac{B\gamma^2}{2(1+\gamma)^2},$$

следовательно

$$\|G_B^\gamma(f)\| > B \cdot \frac{\gamma^2}{2(1+\gamma)^2} \cdot \|f\|.$$

Ввиду произвольности B и теоремы Б заключаем, что система $\{h_n\}_{n \in \mathbb{M}}$ не является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$. Теорема 1.1 доказана.

Abstract. The paper describes all quasi-greedy subsystems of the regular Haar system in $L^1(0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.J. Dilworth, D. Kutzarova and P. Wojtaszczyk, “On Approximate l_1 systems in Banach spaces”, Journal of Approximation Theory **114** (2), 214 – 241 (2002).
- [2] S. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, East Journal on Approximations, **11** (2), 221 – 236 (2005).
- [3] С. Гогян, “О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам системы Хаара и о ω -квази-гриди базисах”, Матем. Заметки, **88** (1), 18–29, (2010).
- [4] A. Kamont, “General Haar systems and greedy approximation”, Studia Mathematica, **145** (2), 165 – 184 (2010).
- [5] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, East J. Approx. **5**, 365 – 379 (1999).
- [6] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Convergence of greedy approximation I. General Systems”, Studia Mathematica **159** (1), 143 – 160 (2003).
- [7] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Greedy approximation with regard to bases and general minimal systems”, Serdica math. j. **28** (4), 305 – 328 (2002).
- [8] V. N. Temlyakov, “The best m -term approximation and Greedy Algorithms, Advances in Comp. Math., **8** (3), 249-265 (1998).
- [9] P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithms for general biorthogonal systems, J. Approx Theory **107** (2), 293 – 314 (2000).

Поступила 21 июня 2010

РАСШИРЕНИЕ ГРОТЕНДИКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ГАЛУА В ОБЩИХ КАТЕГОРИЯХ

С. Г. ДАЛАЛЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *dalalyan@ysu.am*

Аннотация. Строятся контравариантные присоединения Галуа и две ассоциированные антиэквивалентности. С помощью полумонадического функтора пополнения получаются аналоги расширения Гротендика основной теоремы теории Галуа в общих категориях.

MSC2000 number: 12F10, 18A40, 18A30, 18C20.

Ключевые слова: теория Галуа, присоединения, пополнения, расширение Гротендика теории Галуа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория Галуа была расширена и обобщена в различных направлениях, параллельные теории были созданы в разных областях математики (краткий обзор старых работ имеется в [3], из новых работ укажем [1] - [4], [9] - [13]). Как наиболее широкое обобщение теории Галуа может быть рассмотрена категорная теория сопряженных функторов ([14], IV). Основная конструкция классической теории Галуа суть контравариантное сопряжение (см. первую часть этой статьи) и аналоги первой части основной теоремы классической теории Галуа доказываются для произвольных контравариантных сопряжений (Предложение 3.2 и Следствие 3.1).

Главная цель настоящей статьи - обобщить вышеупомянутые результаты подобно тому, как Гротендик расширил основную теорему классической теории Галуа в [8]. Используя результаты статьи [6], мы строим полумонадический функтор из данной категории в ее свободное пополнение относительно (ко)произведений малых и конечных семейств объектов (§4). Применяя функтор пополнения, мы получаем Предложения 5.1 и 5.2. Эти результаты подобны результатам статей [10-12].

Несколько соглашений об обозначениях:

Морфизм $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ обозначается также $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$. Композиция морфизмов $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}G\mathcal{Z}$ обозначается $F \circ G$. Образ X относительно отображения F обозначается как через $F(X)$, так и через XF . Если $(Pr_X X, Pr_Y Y)$ - произведение объектов X и Y , а (ZfX, ZgY) - произвольная пара морфизмов, то $\langle f, g \rangle$ означает морфизм, однозначно определяемый условием

$$\langle f, g \rangle \circ p_X = f, \quad \langle f, g \rangle \circ p_Y = g.$$

Автор признателен Ж.-П. Оливье за многообразную поддержку.

2. СОПРЯЖЕНИЕ ГАЛУА

Пусть $\mathcal{C}$ - произвольная категория, $A\varphi B$ - ее морфизм. С φ ассоциируются две категории:

- (i) категория $\mathcal{X} = [\varphi]$ разложений морфизма φ ,
- (ii) категория $\mathcal{A} = (\mathbf{Sgrp} \downarrow S)$ действий полугрупп $R\rho S$ на B .

Здесь $\mathbf{Sgrp}$ - категория полугрупп с 1, $S = \text{End}_\varphi B$ - полугруппа эндоморфизмов $B\beta B$, для которых $\varphi \circ \beta = \varphi$, а $R\rho S$ - гомоморфизм полугрупп (с единицей).

Объекты в категории $[\varphi]$ - все разложения $\varphi = \psi \circ \chi$. Морфизм из разложения $\varphi = \psi \circ \chi$ в разложение $\varphi = \psi' \circ \chi'$ в категории $[\varphi]$ есть морфизм γ категории $\mathcal{C}$ такой, что $\psi \circ \gamma = \psi'$ и $\gamma \circ \chi' = \chi$.

Мы построим пару сопряженных функторов $\mathcal{X}FA$ и $AG\mathcal{X}$, которую будем называть сопряжением Галуа.

Функтор F сопоставляет каждому разложению $\varphi = \psi \circ \chi$ объект $\text{End}_\chi B \hookrightarrow S$ категории $\mathcal{A}$, а морфизму γ из $\varphi = \psi \circ \chi$ в $\varphi = \psi' \circ \chi'$ категории $[\varphi]$ - естественное вложение $\text{End}_{\chi'} B \hookrightarrow \text{End}_\chi B$. Для того, чтобы построить правый сопряженный функтор G к F , необходимо наложить некоторое ограничение на B .

Определение 2.1. *Стабилизацией B относительно действия полугруппы $R\rho\text{End}B$ назовем морфизм $C\sigma B$, который удовлетворяет следующим условиям:*

- (a) $\sigma \circ (a\rho) = \sigma$ для любого $a \in R$;
- (b) *если морфизм $A\varphi B$ удовлетворяет соотношению $\varphi \circ (a\rho) = \varphi$ для всех $a \in R$, то существует единственный морфизм $A\tau C$ такой, что*

$$\tau \circ \sigma = \varphi.$$

Если стабилизация $C\sigma B$ объекта B относительно действия ρ существует, то является мономорфизмом и определена однозначно, с точностью до изоморфизма объекта C . Очевидно, стабилизация объекта B относительно действия полугруппы эндоморфизмов объекта B совпадает с уравнивателем семейства всех эндоморфизмов этой полугруппы.

Предположим, что стабилизации объекта B относительно всех $R\rho S$ существуют. По определению, функтор G сопоставляет каждому действию $R\rho S$ разложение $\varphi = \tau \circ \sigma$. Если $R\alpha R'$ - морфизм категории $\mathcal{A}$ из объекта $R\rho S$ в объект $R'\rho' S$ и $\varphi = \tau \circ \sigma$, $\varphi' = \tau' \circ \sigma'$ - соответствующие разложения, то из равенства $\alpha \circ \rho' = \rho$ следует, что существует единственный морфизм γ такой, что $\tau' \circ \gamma = \tau$, $\gamma \circ \sigma = \sigma'$. Положим $\alpha G = \gamma$.

Пусть $\varphi = \psi \circ \chi$ - объект категории $\mathcal{X}$, $\varphi = \tau \circ \sigma$ - его образ относительно композиции функторов $F \circ G = T$.

Из Определения 2.1, b) можно заключить, что существует единственный морфизм $\eta_{\psi\chi}$ такой, что $\chi = \eta_{\psi\chi} \circ \sigma$ и, следовательно, $\tau = \psi \circ \eta_{\psi\chi}$. Таким образом, $1_{\mathcal{X}}\eta T$ - естественное преобразование.

С другой стороны, если $R\rho S$ - объект категории $\mathcal{A}$ и $\text{End}_{\sigma} B \hookrightarrow S$ - его образ относительно композиции $L = G \circ F$, то, очевидно, образ ρ лежит в $\text{End}_{\sigma} B$ (напомним, что σ - стабилизация B относительно ρ). Поэтому для каждого $\rho \in \text{Ob } \mathcal{A}$ в категории $\mathcal{A}$ существует единственный морфизм $R\varepsilon_{\rho} \text{End}_{\sigma} B$ из объекта $R\rho S$ в объект $\text{End}_{\sigma} B \hookrightarrow S$. Эта система задает естественное преобразование $1_{\mathcal{A}}\varepsilon L$.

Предложение 2.1. $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - контравариантное сопряжение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$.

Отметим, что существует биекция между контравариантными сопряжениями $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ и ковариантными сопряжениями $(F^{\circ}, G^{\circ}, \eta, \varepsilon^{\text{op}}) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{op}}$. В ковариантном сопряжении $(F^{\circ}, G^{\circ}, \eta, \varepsilon^{\text{op}})$ η - единица, тогда как ε^{op} - коединица. В контравариантном сопряжении $(F, G, \eta, \varepsilon)$ как η , так и ε являются единицами.

Замечание 2.1. В [3] $\text{End}_{\varphi} B$ называется изотропной полугруппой $A\varphi B$. Двойственно определяются коизотропная полугруппа $\text{End}^{\varphi} A$, костабилизация относительно полугруппового действия $R\rho \text{End} A$, и аналогично может быть построено косопряжение Галуа. Все результаты, двойственные к результатам этой статьи, конечно, справедливы для косопряжений Галуа.

3. ПОДКАТЕГОРИИ ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕКТОВ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СОПРЯЖЕНИЕМ, И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Пусть $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - произвольное контравариантное сопряжение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$, $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ и $\mathcal{L} = (L, \varepsilon, \delta)$ - соответствующие монады. Объект X категории $\mathcal{X}$ называется замкнутым относительно монады $\mathcal{T}$, если $X\eta_X XT$ - изоморфизм. Обозначим полную подкатегорию $\mathcal{T}$ -замкнутых объектов категории $\mathcal{X}$ через $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$. Аналогично определяется полная подкатегория $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}$ -замкнутых объектов категории $\mathcal{A}$.

Предложение 3.1. *Ограничением $(F, G, \eta, \varepsilon)$ определяется антиэквивалентность $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$ между $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Проверим, что для всех $X \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ образ XF принадлежит $\text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Так как η_X - изоморфизм, $\eta_X F$ - так же изоморфизм. Для сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$ имеем $(\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$, где $\cdot$ означает умножение преобразований (в [14] это умножение называется горизонтальным). Следовательно, $\eta_X F \circ \varepsilon_{XF} = 1_{XF}$. Поэтому $\varepsilon_{XF} = (\eta_X F)^{-1}$ - изоморфизм, то есть $XF \in \text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Таким же образом можно получить, что $AG \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ для каждого $A \in \text{Ob}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Таким образом, имеем функторы $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \hat{F} \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \hat{G} \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$. Естественные преобразования $\hat{\eta} : 1_{\mathcal{X}_{\mathcal{T}}} \rightarrow \hat{F} \circ \hat{G}$ и $\hat{\varepsilon} : \hat{G} \circ \hat{F} \rightarrow 1_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}$ согласно определению замкнутых объектов являются функторными изоморфизмами. Предложение 3.1 доказано $\square$

Пусть $\mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ - категория $\mathcal{T}$ -алгебр, $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} K \mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ - следующий функтор. Для $X \in \text{Ob}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ положим $XK = (X, h)$ с $h = \eta_X^{-1}$. Тогда из свойства

$$(\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$$

сопряжений следует $hT \circ h = \mu_X \circ h$. Используя свойство единицы $1\eta T$, получаем $\eta_X \circ fT = f \circ \eta_Y$ для любого XfY , отсюда $fT \circ \eta_Y^{-1} = \eta_X^{-1} \circ f$. Это означает, что $fK = f$ определяет морфизм из XK в YK . Аналогично строится функтор $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} Q \mathcal{A}^{\mathcal{L}}$.

Предложение 3.2. *Если $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - сопряжение Галуа, то функторы K и Q обратимы (т. е. имеем изоморфизмы категорий $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \cong \mathcal{X}^{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \cong \mathcal{A}^{\mathcal{L}}$).*

Доказательство. Пусть (X, h) - $\mathcal{T}$ -алгебра. Для сопряжения Галуа морфизм $(XT)hX$ - монический. Тогда из равенства $\eta_X \circ h = 1_X$ $\mathcal{T}$ -алгебр следует, что

h - изоморфизм, поэтому $h = \eta_X^{-1}$. Итак, K - биекция на объектах. Но тогда K - биекция также на морфизмах. $\square$

Следствие 3.1. *Если $(F, G, \eta, \varepsilon)$ - сопряжение Галуа из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{A}$, то категории алгебр $\mathcal{X}^T$ и $\mathcal{A}^L$ антиэквивалентны.*

Эти результаты унифицируют и обобщают часть результатов различных конкретных теорий Галуа. Тем самым основной задачей и привилегией конкретных теорий Галуа остается описание замкнутых объектов.

Замечание 3.1. *Ограничение на замкнутые относительно рассматриваемого сопряжения объекты присутствует и в построениях Джанелидзе [10] - [12]. С одной стороны, определение I -нормального объекта содержит условие, что в сопряжении $(I^c, H^c, \eta^c, \varepsilon^c)$ коединица ε^c является изоморфизмом. С другой стороны, полная подкатегория $\mathbf{Spl}_I(c)$ состоит из объектов, которые распадаются над c , то есть соответствующий η^c - изоморфизм.*

4. СВОБОДНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ КАТЕГОРИЙ

Пусть $\mathbf{Cat}$ - 2-категория всех больших категорий, $\mathcal{S}$ - произвольная подкатегория $\mathbf{Cat}$. Любой функтор $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с $\mathcal{U} \in \mathbf{Ob}\mathcal{S}$ называется $\mathcal{S}$ -семейством в $\mathcal{X}$. Подчеркнем, что морфизмами $\mathbf{Cat}$ являются все ковариантные функторы.

(Ко)предел любого $\mathcal{S}$ -семейства есть (ко)универсальный (ко)конус, который определяется однозначно, с точностью до изоморфизма вершины. Говорят, что функтор $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ сохраняет (ко)пределы $\mathcal{S}$ -семейств, если F -образ любого (ко)предельного (ко)конуса для произвольного $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ является (ко)предельным (ко)конусом для образа $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$. Обозначим через $\mathbf{Cat}_{\mathcal{S}}$ (соотв., $\mathbf{Cat}^{\mathcal{S}}$) 2-категорию, для которой

- (i) объектами являются все $\mathcal{S}$ -семейства с фиксированным (ко)пределом;
- (ii) морфизмами являются все сохраняющие (ко)пределы функторы;
- (iii) преобразованиями (= морфизмами ранга 2) являются все естественные преобразования сохраняющих (ко)пределы функторов.

Если $\mathcal{S}$ содержит терминальный объект T (как категория, имеющая единственный объект и единственный морфизм), то для любого $\mathcal{S}$ -семейства $T\tau\mathcal{X}$ в качестве фиксированного (ко)предела мы берем тождественный морфизм.

(Ковариантный) функтор $\mathcal{X}J\bar{\mathcal{X}}$ называется свободным пополнением категории $\mathcal{X}$ относительно (ко)пределов $\mathcal{S}$ -семейств или, кратко, свободным $\mathcal{S}$ -(ко)предельным пополнением, если выполняются следующие условия.

- (а) Любое $\mathcal{S}$ -семейство в $\bar{\mathcal{X}}$ имеет фиксированный (ко)предел.
- (б) Пусть $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ - произвольный функтор в категорию $\mathcal{Y}$ с системой фиксированных (ко)пределов для каждого $\mathcal{S}$ -семейства в $\mathcal{Y}$. Тогда существует единственный сохраняющий пределы $\mathcal{S}$ -семейств функтор $\bar{\mathcal{X}}B\mathcal{Y}$ со свойствами:
 - (i)_b $F = J \circ B$;
 - (ii)_b для любого $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ образ фиксированного (ко)предела семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ J)\bar{\mathcal{X}}$ относительно B совпадает с фиксированным (ко)пределом семейства $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$.
- (в) Пусть F и G - произвольные функторы из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, B и C - функторы из $\bar{\mathcal{X}}$ в $\mathcal{Y}$, соответствующие F и G согласно (б), и $F\xi G$ - произвольное естественное преобразование. Тогда существует единственное естественное преобразование $B\zeta C$ со свойствами:
 - (i)_c $1_J \cdot \zeta = \xi$;
 - (ii)_c для любого $\mathcal{S}$ -семейства $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ две диаграммы, которые получаются
 - ◇ из (ко)предельного (ко)конуса $\mathcal{U}(\varphi \circ J)\bar{\mathcal{X}}$ с помощью естественного преобразования ζ и
 - ◇ посредством (ко)предела диаграммы, получающейся из $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с помощью естественного преобразования ξ
 совпадают.

Мы называем J *свободным* пополнением, потому что мы не требуем, чтобы он сохранял существующие в $\mathcal{X}$ (ко)произведения.

Очевидно, что если свободное $\mathcal{S}$ -(ко)предельное пополнение категории $\mathcal{X}$ существует, то оно определяется однозначно, с точностью до изоморфизма категории $\bar{\mathcal{X}}$.

В статье [6] условия существования свободного $\mathcal{S}$ -(ко)предельного пополнения исследуются в более общей ситуации, когда $\mathcal{X}$ - внутренняя категория. Используя эти результаты, можно получить, что каждая (обычная) категория $\mathcal{X}$ имеет $\mathcal{S}$ -(ко)предельное пополнение в случае, когда $\mathcal{S}$ - скелет полной подкатегории всех малых или конечных дискретных объектов категории **Cat**. Обозначим эти

категории, соответственно, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В этих случаях (ко)предел $\mathcal{S}$ -семейства есть (ко)произведение данного (малого или конечного) дискретного семейства. Таким образом, любая категория $\mathcal{X}$ имеет пополнение (ко)произведениями как конечных, так и малых семейств. Более того, в этих случаях существует стандартное пополнение (ко)произведениями $\mathcal{X}J_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})$ (соотв., $\mathcal{X}J^{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \searrow \mathcal{X})$), определяемое следующим образом.

Объектами этой категории являются все (ковариантные) функторы $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ с $\mathcal{U} \in \text{Ob}\mathcal{S}$. Морфизм $\tilde{f}$ в $\mathcal{S} \searrow \mathcal{X}$ (соотв., $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$) из $\mathcal{U}\varphi$ в $\mathcal{V}\psi$ есть пара (f, f') , где $\mathcal{U}f\mathcal{V}$ (соотв., $\mathcal{V}f\mathcal{U}$) - функтор категории $\mathcal{S}$ и f' - естественное преобразование из φ в $f \circ \psi$ (соотв., из $f \circ \varphi$ в ψ). Композиция морфизмов $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{f}(\mathcal{V}\psi)$ и $(\mathcal{V}\psi)\tilde{g}(\mathcal{W}\chi)$ есть морфизм $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{h}(\mathcal{W}\chi)$ с $h = f \circ g$ и $h' = \langle f', f_O \circ g' \rangle \circ m_{\mathcal{X}}$ (соотв., $h = g \circ f$ и $h' = \langle g_O \circ f', g' \rangle \circ m_{\mathcal{X}}$), где f_O и g_O суть соответствующие отображения объектов и $m_{\mathcal{X}}$ - отображение композиции. Тожественный морфизм $1_{\mathcal{U}\varphi}$ состоит из тождественного морфизма $1_{\mathcal{U}}$ и $1'_{\mathcal{U}\varphi} = \varphi_O \circ i_{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{X}_O i_{\mathcal{X}}$ - отображение, сопоставляющее объекту соответствующий тождественный морфизм.

Для каждого функтора $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ определим функтор

$$\mathcal{S} \nearrow F : \mathcal{S} \nearrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \nearrow \mathcal{Y} \text{ (соотв., для } \searrow)$$

следующим образом. Образ объекта $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ есть $\mathcal{U}(\varphi \circ F)\mathcal{Y}$. Образ морфизма $(\mathcal{U}\varphi)\tilde{f}(\mathcal{V}\psi)$ есть пара $(f, f'F)$.

Наконец, для каждого естественного преобразования $F\xi G$ между функторами $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ определим естественное преобразование $\mathcal{S} \nearrow \xi : \mathcal{S} \nearrow F \rightarrow \mathcal{S} \nearrow G$, положив $(\mathcal{S} \nearrow \xi)_{\mathcal{U}\varphi} = (1_{\mathcal{U}}, 1_{\varphi} \cdot \xi)$ для любого объекта $\mathcal{U}\varphi$ in $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$ (аналогично для $\searrow$).

Предложение 4.1. $\mathcal{S} \nearrow$ и $\mathcal{S} \searrow$ - эндофункторы 2-категории **Cat**.

Свободное $\mathcal{S}$ -(ко)пополнение является частным случаем более общего понятия $\mathcal{S}$ -универсальности. Пусть $\mathcal{S} = (S_M, S_T)$, где S_M и S_T - некоторые свойства для морфизмов и преобразований, соответственно. Для 2-функтора $\mathcal{D}u\mathcal{C}$ и объекта $\mathcal{X}$ категории $\mathcal{C}$ пара $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}J_{\mathcal{X}}(\tilde{\mathcal{X}}u))$, состоящая из объекта $\tilde{\mathcal{X}}$ категории $\mathcal{D}$ и морфизма $J_{\mathcal{X}}$ категории $\mathcal{C}$, называется $\mathcal{S}$ -универсальной парой из $\mathcal{X}$ в u , если

- (i) для любого объекта $\mathcal{P}$ категории $\mathcal{D}$ и любого морфизма $\mathcal{X}F(\mathcal{P}u)$ существует единственный морфизм $\tilde{\mathcal{X}}\tilde{F}\mathcal{P}$ категории $\mathcal{D}$ со свойством S_M и такой, что $J_{\mathcal{X}} \circ \tilde{F}u = F$;

- (ii) пусть $\mathcal{P}$ - произвольный объект категории $\mathcal{D}$, F и G - произвольные морфизмы из $\tilde{X}$ в $\mathcal{P}u$, $F\xi G$ - произвольное преобразование; тогда существует единственное преобразование $\tilde{F}\tilde{\xi}\tilde{G}$, которое удовлетворяет свойству S_T и $1_J \cdot \tilde{\xi} = \xi$.

Обычно мы предполагаем, что пара свойств S унитарна и мультипликативна, т. е. соответственно тождественный морфизм и преобразование, а также композиция любых двух морфизмов и любых двух преобразований, со свойствами, соответственно, S_M и S_T удовлетворяют этим же свойствам.

Определение свободного (ко)пополнения получим, если взять в качестве $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$, $\mathcal{D} = \mathbf{Cat}_s$ (или $\mathbf{Cat}^s$) и $Du\mathcal{C}$ забывающий функтор. Отметим, что свойства $(ii)_b \equiv S_M$ и $(ii)_c \equiv S_T$ унитарны и мультипликативны.

Как теория сопряженных функторов, монад и алгебр над монадами строится для универсальных морфизмов (в [14] для обычных категорий, а в [7] для 2-категорий), точно так же теория полусопряженных функторов, полумонад и алгебр над полумонадами строится для S -универсальных морфизмов и аналогичные утверждения получаются в этом случае ([5] и [6]). Так, полусопряжение из 2-категории $\mathcal{X}$ в 2-категорию $\mathcal{A}$ - это шестерка

$$(F, G, \varphi_M, \psi_M, \varphi_T, \psi_T),$$

состоящая

- (i) из функторов 2-категорий $\mathcal{X}F\mathcal{A}$, $\mathcal{A}G\mathcal{X}$;
(ii) из семейства отображений

$$\varphi_M : \mathcal{A}(xF, a) \rightarrow \mathcal{X}(x, aG), \psi_M : \mathcal{X}(x, aG) \rightarrow \mathcal{A}(xF, a),$$

для любых объектов $x \in \text{Ob}\mathcal{X}$, $a \in \text{Ob}\mathcal{A}$, которые естественны как по x , так и a , и удовлетворяют условию $\psi_M \circ \varphi_M = 1$;

- (iii) для произвольных морфизмов f, g из x в aG из отображений

$$\varphi_T : \mathcal{A}(fF, gF) \rightarrow \mathcal{X}(f, g), \psi_T : \mathcal{X}(f, g) \rightarrow \mathcal{A}(fF, gF),$$

которые совместимы (согласованы) с φ_M и ψ_M , естественны по x и a , и удовлетворяют условию $\psi_T \circ \varphi_T = 1$.

Каждое полусопряжение определяет полумонаду $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$, которая отличается от монады тем условием, что $(1_T \cdot \eta) \circ \mu$ - тождественный морфизм, но $(\eta \cdot 1_T) \circ \mu$ - всего лишь идемпотент. Аналогично (точнее, двойственно) определяются полумонада и т.д.

В [5] доказывается, что каждая система фиксированных S -универсальных пар $(\tilde{X}, \mathcal{X}J_{\mathcal{X}}(\tilde{X}u))$ из всех объектов $\mathcal{X}$ 2-категории $\mathcal{C}$ в 2-функтор $\mathcal{D}u\mathcal{C}$ определяет полусопряжение между 2-функторами $\mathcal{C}c\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}u\mathcal{C}$ с полуединицей J , состоящей из $J_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Применяя этот результат к пополнениям по (ко)произведениям, получаем

Предложение 4.2. *Для $\mathcal{S} = \mathcal{M}, \mathcal{N}$ существуют стандартные полусопряжения малых, если $\mathcal{S} = \mathcal{M}$, и конечных, если $\mathcal{S} = \mathcal{N}$, пополнений по (ко)произведениям*

$$(c_{\mathcal{S}}, u_{\mathcal{S}}, (J_{\mathcal{S}})_M, (H_{\mathcal{S}})_M, (J_{\mathcal{S}})_T, (H_{\mathcal{S}})_T)$$

или соответственно

$$(c^{\mathcal{S}}, u^{\mathcal{S}}, (J^{\mathcal{S}})_M, (H^{\mathcal{S}})_M, (J^{\mathcal{S}})_T, (H^{\mathcal{S}})_T).$$

из $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ в $\mathcal{D} = \mathbf{Cat}_{\mathcal{S}}$ (или соответственно, $\mathbf{Cat}^{\mathcal{S}}$).

Здесь u - забывающий функтор, c - функтор пополнения. Ниже доказывается, что это - полумонадической функтор.

Пусть $t = c \circ u$ и $\mathbf{t}$ - полумонада (t, J, μ) , где естественное преобразование $\mu : t \circ t \rightarrow t$ 2-функторов определяется с помощью

$$\mu(\mathcal{X}) = (H(\mathcal{X}c))u \text{ для всех } \mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$$

или, иначе говоря, $\mu = 1_c \cdot H \cdot 1_u$. Категория $\mathcal{C}^t$ $\mathbf{t}$ -алгебр в $\mathcal{C}$ имеет

- (i)' в качестве объектов - все пары $(\mathcal{X}, A)$ с $\mathcal{X} \in \text{Ob}\mathcal{C}$, а 2-функтор $(\mathcal{X}\mathbf{t})A\mathcal{X}$ удовлетворяет условию $At \circ A = \mu(\mathcal{X}) \circ A$ и $J(\mathcal{X}) \circ A = 1_{\mathcal{X}}$;
- (ii)' в качестве морфизмов $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - все морфизмы $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$, удовлетворяющие условию $A \circ F = Ft \circ B$;
- (iii)' в качестве преобразований $F\xi G$ для $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$ - все преобразования $(\mathcal{X}F\mathcal{Y})\xi(\mathcal{X}G\mathcal{Y})$, такие что $1_A \cdot \xi = \xi t \cdot 1_B$.

Сравнивающий функтор $\mathcal{D}K\mathcal{C}^t$ определяется условиями

- (i)' $\mathcal{P}K = (\mathcal{P}u, (H(\mathcal{P}))u)$ для всех $\mathcal{P} \in \text{Ob}\mathcal{D}$;
- (ii)' $RK = Ru$ для всех $R \in \mathcal{D}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$;
- (iii)' $\zeta K = \zeta u$ для всех $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{P}R\mathcal{P}', \mathcal{P}R'\mathcal{P}')$.

С помощью функтора A каждое фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}t_{\mathcal{S}} = \mathcal{X}_{\mathcal{S}}$ (соотв., $\mathcal{X}t^{\mathcal{S}} = \mathcal{X}^{\mathcal{S}}$) индуцирует фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}$ следующим образом.

Пусть $\mathcal{U}\varphi\mathcal{X}$ - малое или конечное дискретное семейство в $\mathcal{X}$. Тогда $\varphi \circ J_S$ (соответственно, $\varphi \circ J^S$) - малое или конечное дискретное семейство в $\mathcal{X}_S$ (соответственно, $\mathcal{X}^S$). Оно имеет фиксированное (ко)произведение в $\mathcal{X}_S$ (соотв.. $\mathcal{X}^S$) и образ этого (ко)произведения относительно A - (ко)произведение $\mathcal{U}\varphi$ в $\mathcal{X}$. Зафиксировав это (ко)произведение для каждого $\mathcal{U}\varphi$, получим систему фиксированных (ко)произведений на $\mathcal{X}$.

Нетрудно проверить, что

- (i) если $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - морфизм $\mathbf{t}$ -алгебр, то $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$ сохраняет (ко)пределы на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, индуцированные, соответственно, с помощью A и B ;
- (ii) если $F\zeta G$ - естественное преобразование между $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$, то оно - естественное преобразование между сохраняющими (ко)пределы функторами $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Предложение 4.3. *Сопоставляя*

- (i) каждой $\mathbf{t}$ -алгебре $(\mathcal{X}, A)$ категорию $\mathcal{X}$ с системой фиксированных (ко)пределов на $\mathcal{X}$, индуцированных посредством A ;
- (ii) каждому морфизму $\mathbf{t}$ -алгебр $(\mathcal{X}, A)F(\mathcal{Y}, B)$ - соответствующий сохраняющий (ко)пределы морфизм $\mathcal{X}F\mathcal{Y}$;
- (iii) каждому естественному преобразованию $F\zeta G$ между $F, G : (\mathcal{X}, A) \rightarrow (\mathcal{Y}, B)$ - то же самое преобразование, рассматриваемое как естественное преобразование сохраняющих (ко)пределы функторов $F, G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$

получаем обратные к сравнивающим функторам функторы

$$(K_S)^{-1} : \mathbf{Cat}^{\mathbf{t}^S} \rightarrow \mathbf{Cat}_S, \quad (\mathbf{K}^S)^{-1} : \mathbf{Cat}^{\mathbf{t}^S} \rightarrow \mathbf{Cat}^S.$$

Следствие 4.1. *Функторы пополнения по (ко)произведениям c_S и c^S , где $S = \mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$, полумонадические.*

5. РАСШИРЕНИЕ ГРОТЕНДИКА СОПРЯЖЕНИЯ ГАЛУА

Для произвольного ковариантного сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$ между категориями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ и для любого эндифунктора c 2-категории $\mathbf{Cat}$ образ $(Fc, Gc, \eta c, \varepsilon c)$ является ковариантным сопряжением между $\mathcal{X}c$ и $\mathcal{A}c$.

Действительно, равенства

$$(1_G \cdot \eta) \circ (\varepsilon \cdot 1_G) = 1_G, \quad (\eta \cdot 1_F) \circ (1_F \cdot \varepsilon) = 1_F$$

влекут равенства

$$(1_{Gc} \cdot \eta c) \circ (\varepsilon c \cdot 1_{Gc}) = 1_{Gc}, (\eta c \cdot 1_{Fc}) \circ (1_{Fc} \cdot \varepsilon c) = 1_{Fc}.$$

С контравариантным сопряжением несколько посложнее. Чтобы вычислить образ, необходимо предварительно перейти к соответствующему ковариантному сопряжению $(F^o, G^o, \eta, \varepsilon^{op})$ между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}^{op}$. Затем, используя предыдущий результат, можно получить ковариантное сопряжение $(F^oc, G^oc, \eta c, \varepsilon^{op}c)$ между $\mathcal{X}c$ и $\mathcal{A}^{op}c$. Наконец, надо вернуться к контравариантному сопряжению $((F^oc)^o, (G^oc)^o, \eta c, (\varepsilon^{op}c)^{op})$ между $\mathcal{X}c$ и $(\mathcal{A}^{op}c)^{op}$.

Исследуем случай, когда c - 2-функтор $\mathcal{S} \nearrow$ или $\mathcal{S} \searrow$. Нетрудно заметить, что

$$(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{S} \searrow \mathcal{A}, \quad (\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}.$$

Для контравариантного функтора $\mathcal{X}FA$ введем обозначения

$$\mathcal{S} \nearrow F = (\mathcal{S} \nearrow F^o)^o, \quad \mathcal{S} \searrow F = (\mathcal{S} \searrow F^o)^o.$$

Они определяются по тем же формулам, что и в случае ковариантного функтора F . Можно проверить, что

$$(\mathcal{S} \nearrow \varepsilon^{op})^{op} = \mathcal{S} \searrow \varepsilon, \quad (\mathcal{S} \searrow \varepsilon^{op})^{op} = \mathcal{S} \nearrow \varepsilon.$$

Таким образом, для каждого контравариантного функтора $\mathcal{X}FA$ получаем два ассоциированных контравариантных функтора

$$(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})(\mathcal{S} \nearrow F)(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}) \quad \text{и} \quad (\mathcal{S} \searrow \mathcal{X})(\mathcal{S} \searrow F)(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}).$$

Предложение 5.1. *С любым контравариантным сопряжением $(F, G, \eta, \varepsilon)$ между категориями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ канонически ассоциируются два контравариантных сопряжения*

$$(\mathcal{S} \nearrow F, \mathcal{S} \searrow G, \mathcal{S} \nearrow \eta, \mathcal{S} \searrow \varepsilon) \quad \text{между} \quad \mathcal{S} \nearrow \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} \searrow \mathcal{A},$$

$$(\mathcal{S} \searrow F, \mathcal{S} \nearrow G, \mathcal{S} \searrow \eta, \mathcal{S} \nearrow \varepsilon) \quad \text{между} \quad \mathcal{S} \searrow \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} \nearrow \mathcal{A}.$$

Их можно назвать, соответственно, расширением и корасширением Гротендика сопряжения $(F, G, \eta, \varepsilon)$, поскольку первый пример такого расширения появился в [8] как расширение классического сопряжения Галуа для категории полей. Впоследствии результаты Гротендика были обобщены в различных направлениях (см. [10] - [13], [15]).

Пусть $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}$ и $\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}$ - монады, соответственно, в $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X}$ и $\mathcal{S} \searrow \mathcal{A}$, ассоциированные с контравариантным сопряжением

$$(\mathcal{S} \nearrow F, \mathcal{X} \searrow G, \mathcal{S} \nearrow \eta, \mathcal{S} \searrow \varepsilon).$$

С применением результатов предложений 3.2 и 3.3 получается

Предложение 5.2. *Существует антиэквивалентность между категориями*

- (i) $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})_{\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}}$ - объектов, замкнутых относительно $\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}$ и $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A})_{\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}}$ - объектов, замкнутых относительно $\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}$;
- (ii) $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T})$ -алгебр $(\mathcal{S} \nearrow \mathcal{X})^{\mathcal{S} \nearrow \mathcal{T}}$ и $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{L})$ -алгебр $(\mathcal{S} \searrow \mathcal{A})^{\mathcal{S} \searrow \mathcal{L}}$.

Abstract. The contravariant Galois adjunctions and two associated antiequivalences are constructed. By semimonadic functors of completions the analogs of Grothendieck's extension of the fundamental theorem of Galois theory are obtained in abstract categories.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Barr, "Abstract Galois theory", J. Pure Appl. Algebra, **19**, 21 – 42 (1980).
- [2] M. Barr, "Abstract Galois theory, II, J. Pure Appl. Algebra, **25**, 227 – 247 (1982).
- [3] S. H. Dalalyan, "Main theorem in categorial Galois theory", J. Contemp. Math. Analysis (Armen. Acad. Sci.), **27** (4), 1 - 26 (1992).
- [4] S. H. Dalalyan, "Main theorem in categorial Galois theory in regular case", J. Contemp. Math. Analysis (Armen. Acad. Sci.), **27** (6), 23 - 47 (1992).
- [5] S. H. Dalalyan, "S-universality in 2-categories", Proc. of the Yerevan State Univ., no. 1 (2011).
- [6] S. H. Dalalyan, "Semijunctions, semimonads and algebras over them", (in print).
- [7] S. H. Dalalyan, "The semimonads of completions", (in print).
- [8] J. Gray, "Formal Category Theory: Adjointness for 2-categories", Lecture Notes in Math., **391**, Springer-Verlag (1974).
- [9] A. Grothendieck, "Revêtements étales et groupe fondamental", SGA I, Lecture Notes in Math., **269**, Springer-Verlag (1972).
- [10] A. Grothendieck, "La longue marche a travers la theorie de Galois", **1**, Univ. Montpellier II (1995).
- [11] G. Janelidze, "The fundamental theorem of Galois theory", Math. USSR sbornik, **64** (2), 359 - 374 (1989).
- [12] G. Janelidze, "Pure Galois theory in categories", J. Algebra, **132**, 270 – 286 (1990).
- [13] G. Janelidze, "Precategories and Galois theory", Lecture Notes in Math., **1488**, Springer-Verlag, 157 - 173 (1991).
- [14] A. Joyal, M. Tierny, "An extension of the Galois theory of Grothendieck", Memoirs AMS., **309** (1984).
- [15] S. Mac Lane, "Categories for the Working Mathematician", Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1971). (Русский пер.: Теория категорий для работающих математиков, М., Физматлит. 2004.)
- [16] A. R. Magid, The Separable Galois Theory of Commutative Rings", Marcel Dekker (1974).

Поступила 11 октября 2010

THE GENERALIZED ENTROPIC PROPERTY FOR THE PAIR OF OPERATIONS

AMIR EHSANI

Islamic Azad University, Mahshahr Branch, Iran
E-mail: *Amirehsany@yahoo.com*

Abstract. In this paper, we define the generalized entropic property for a pair of operations. We show that for an idempotent algebra, $A = (A, f, g)$, with two ternary operations, if one of f or g is commutative and the pair of operations (f, g) satisfies the generalized entropic property, then (f, g) is entropic. Also we prove that every idempotent and commutative algebra $A = (A, f, g)$, with a ternary and a binary operation, satisfying the generalized entropic property, is entropic.

MSC2010 number: 20N10, 20N15, 20N99, 03C05.

Keywords: Complex algebra, mode, entropic algebra, generalized entropic property.

1. INTRODUCTION

The algebra $A = (A, F)$ is called entropic or medial if it satisfies the identity of mediality

$$(1) \quad g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) = f(g(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, g(x_{n1}, \dots, x_{nm}))$$

for every n -ary $f \in F$ and m -ary $g \in F$.

In other words, A is medial if it satisfies the hyperidentity of mediality ([1], [2]).

Note that a groupoid is entropic if and only if it satisfies the identity of mediality: $xy.uv \approx xu.yv$ [3].

An algebra $A = (A, f)$ with a single ternary operation is entropic if it satisfies the following identity:

$$\begin{aligned} &f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})). \end{aligned}$$

A variety V is called entropic (or medial) if every algebra in V is entropic. The Algebra A is called idempotent (commutative), if every operation of A is idempotent (commutative). An n -ary operation f is called commutative if

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \dots, x_{\alpha(n)}),$$

where $\alpha \in S_n$. An n -ary operation f is called idempotent if the identity $f(x, \dots, x) = x$ is true. An idempotent entropic algebra is called a mode [4].

We say that the variety V (respectively, the algebra A) satisfies the generalized entropic property if for every n -ary operation f and m -ary operation g of V (of A) there exist m -ary terms $t_1, \dots, t_n$ such that the identity:

$$(2) \quad g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) = f(t_1(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, t_n(x_{n1}, \dots, x_{nm}))$$

holds in V (in A) [5].

For example, a groupoid satisfies the generalized entropic property if there are binary terms t and s such that the identity $xy.uv \approx t(x, u).s(y, v)$ holds.

An algebra $A = (A, f)$ with a ternary operation satisfies the generalized entropic property if there are ternary terms t , s and r such that

$$\begin{aligned} &f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r(x_{31}, x_{32}, x_{33})). \end{aligned}$$

It was proved by T. Evans [6] that any groupoid in a variety V of groupoids has the complex algebra of subalgebras if and only if V satisfies the above identity for some t and s .

Every algebra in a variety V has a complex algebra of subalgebras if and only if the variety V satisfies the generalized entropic property [5] (see also [7-11]).

2. MAIN RESULTS

The immediate consequences of the generalized entropic property in the idempotent algebra $A = (A, f)$ with a ternary operation are the following identities, that can be treated as pseudo-distributivity laws:

$$\begin{aligned} &f(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(f(x, \alpha, \beta), f(y, \alpha, \beta), f(z, \alpha, \beta)), \\ &f(\beta, s(x, y, z), \alpha) \approx f(f(\beta, x, \alpha), f(\beta, y, \alpha), f(\beta, z, \alpha)), \\ &f(\alpha, \beta, r(x, y, z)) \approx f(f(\alpha, \beta, x), f(\alpha, \beta, y), f(\alpha, \beta, z)). \end{aligned}$$

Theorem 2.1. *An idempotent and commutative algebra $A = (A, f)$ with a ternary operation satisfying the generalized entropic property is entropic.*

Proof. Using pseudo-distributivity and the commutativity, we obtain

$$\begin{aligned} &f(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(f(x, \alpha, \beta), f(y, \alpha, \beta), f(z, \alpha, \beta)) \approx \\ &\approx f(f(\alpha, \beta, x), f(\alpha, \beta, y), f(\alpha, \beta, z)) \approx f(\alpha, \beta, r(x, y, z)) \approx f(r(x, y, z), \alpha, \beta), \end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned} f(t(x, y, z), \alpha, \beta) &\approx f(f(x, \alpha, \beta), f(y, \alpha, \beta), f(z, \alpha, \beta)) \approx \\ &\approx f(f(\beta, x, \alpha), f(\beta, y, \alpha), f(\beta, z, \alpha)) \approx f(\beta, s(x, y, z), \alpha). \end{aligned}$$

Thus

$$f(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(\alpha, \beta, t(x, y, z)) \approx f(r(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(\beta, s(x, y, z), \alpha).$$

Now, using idempotency and the above identity we get

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &\approx f(t(x, y, z), t(x, y, z), t(x, y, z)) \approx f(r(x, y, z), t(x, y, z), t(x, y, z)) \approx \\ &\approx f(t(x, y, z), s(x, y, z), r(x, y, z)) \approx f(x, y, z). \end{aligned}$$

Similarly, for s and r we have $s(x, y, z) \approx f(x, y, z)$ and $r(x, y, z) \approx f(x, y, z)$. Thus, by the generalized entropic property and the last three identities we have

$$\begin{aligned} &f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r(x_{31}, x_{32}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})). \end{aligned}$$

Theorem 2.1 is proved. $\square$

The generalized entropic property for an algebra $A = (A, f, g)$ with two ternary operations means that the following identities are true:

$$\begin{aligned} &f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(t_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_1(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r_1(x_{31}, x_{32}, x_{33})), \\ &f(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx g(t_2(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r_2(x_{31}, x_{32}, x_{33})), \\ &g(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx g(t_3(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_3(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r_3(x_{31}, x_{32}, x_{33})), \\ &g(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ &\approx f(t_4(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_4(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r_4(x_{31}, x_{32}, x_{33})). \end{aligned}$$

The immediate consequences of the generalized entropic property in an idempotent algebra $A = (A, f, g)$ with two ternary operations are the following identities that can be treated as pseudo-distributivity laws:

$$\begin{aligned} g(t(x, y, z), \alpha, \beta) &\approx f(g(x, \alpha, \beta), g(y, \alpha, \beta), g(z, \alpha, \beta)), \\ g(\beta, s(x, y, z), \alpha) &\approx f(g(\beta, x, \alpha), g(\beta, y, \alpha), g(\beta, z, \alpha)), \\ g(\alpha, \beta, r(x, y, z)) &\approx f(g(\alpha, \beta, x), g(\alpha, \beta, y), g(\alpha, \beta, z)). \end{aligned}$$

At last, the entropic law for an algebra $A = (A, f, g)$ with two ternary operations means the following identities:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\
 & \approx f(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})) \\
 (b) \quad & g(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\
 & \approx g(g(x_{11}, x_{12}, x_{13}), g(x_{21}, x_{22}, x_{23}), g(x_{31}, x_{32}, x_{33})) \\
 (c) \quad & f(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\
 & \approx g(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})).
 \end{aligned}$$

Definition 2.1. Let g and f be an m -ary and an n -ary operation on the set A . We say that the pair of operations (f, g) satisfies the generalized entropic property if there exist terms $t_1, \dots, t_n$ of the algebra $A = (A, f, g)$ such that identity (2) holds in the algebra, $A = (A, f, g)$. The pair of operations (f, g) is called entropic or medial, if identity (1) in the algebra $A = (A, f, g)$ is true. If $f = g$, then we say that the operation f satisfies the generalized entropic property.

Theorem 2.2. Let $A = (A, f, g)$ be an idempotent algebra with two ternary operations. If g is commutative and the pair (f, g) satisfies the generalized entropic property, then (f, g) is entropic.

Proof. To prove (c), observe that by the generalized entropic property:

$$\begin{aligned}
 & f(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\
 & \approx g(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r(x_{31}, x_{32}, x_{33})).
 \end{aligned}$$

Using the pseudo-distributivities and the commutativity of g , we obtain:

$$\begin{aligned}
 & g(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(g(x, \alpha, \beta), g(y, \alpha, \beta), g(z, \alpha, \beta)) \approx \\
 & \approx f(g(\alpha, \beta, x), g(\alpha, \beta, y), g(\alpha, \beta, z)) \approx g(\alpha, \beta, r(x, y, z)) \approx g(r(x, y, z), \alpha, \beta),
 \end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned}
 & g(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx f(g(x, \alpha, \beta), g(y, \alpha, \beta), g(z, \alpha, \beta)) \approx \\
 & \approx f(g(\beta, x, \alpha), g(\beta, y, \alpha), g(\beta, z, \alpha)) \approx g(\beta, s(x, y, z), \alpha).
 \end{aligned}$$

But $g(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx b(\alpha, \beta, t(x, y, z))$. So, we have

$$g(t(x, y, z), \alpha, \beta) \approx g(\alpha, t(x, y, z), \beta) \approx g(r(x, y, z), \alpha, \beta) \approx g(\beta, s(x, y, z), \alpha).$$

By idempotency and the above identities we have

$$t(x, y, z) \approx g(t(x, y, z), t(x, y, z), t(x, y, z)) \approx g(r(x, y, z), t(x, y, z), t(x, y, z)) \approx$$

$$g(t(x, y, z), s(x, y, z), r(x, y, z)) \approx f(g(x, x, x), g(y, y, y), g(z, z, z)) \approx f(x, y, z)$$

In the same manner $s(x, y, z) \approx f(x, y, z)$ and $r(x, y, z) \approx f(x, y, z)$. Thus, by the generalized entropic property and the last three identities we have

$$\begin{aligned} & f(g(x_{11}, x_{21}, x_{31}), g(x_{12}, x_{22}, x_{32}), g(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ & \approx g(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r(x_{31}, x_{32}, x_{33})) \approx \\ & \approx g(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})). \end{aligned} \quad \square$$

The generalized entropic property for an algebra $A = (A, f, g)$ with a ternary and one binary operation (respectively f, g) means that the following identities are true

$$\begin{aligned} & f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ & f(t_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_1(x_{21}, x_{22}, x_{23}), r_1(x_{31}, x_{32}, x_{33})), \\ & g(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22})) \approx g(t_2(x_{11}, x_{12}), s_2(x_{21}, x_{22})), \\ & f(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22}), g(x_{13}, x_{23})) \approx g(t_3(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s_3(x_{21}, x_{22}, x_{23})), \\ & g(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32})) \approx f(t_4(x_{11}, x_{12}), s_4(x_{21}, x_{22}), r_4(x_{31}, x_{32})). \end{aligned}$$

The immediate consequences of the generalized entropic property in the idempotent algebra $A = (a, f, g)$ with a ternary and a binary operation (respectively f, g) are the following identities that can be treated as pseudo-distributivity laws:

$$\begin{aligned} & g(t(x, y, z), \alpha) \approx f(g(x, \alpha), g(y, \alpha), g(z, \alpha)), \\ & g(\beta, s(x, y, z)) \approx f(g(\beta, x), g(\beta, y), g(\beta, z)). \end{aligned}$$

At last, the entropic law for an algebra $A = (A, f, g)$ with a ternary and a binary operation (respectively f, g) means the validity of the following identities

$$\begin{aligned} (d) \quad & f(f(x_{11}, x_{21}, x_{31}), f(x_{12}, x_{22}, x_{32}), f(x_{13}, x_{23}, x_{33})) \approx \\ & \approx f(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23}), f(x_{31}, x_{32}, x_{33})) \\ (e) \quad & g(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22})) \approx g(g(x_{11}, x_{12}), g(x_{21}, x_{22})) \\ (f) \quad & f(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22}), g(x_{13}, x_{23})) \approx g(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23})). \end{aligned}$$

Theorem 2.3. *Let $A = (A, f, g)$ be an idempotent algebra with a ternary operation f and a binary operation g . If g is commutative and the pair (f, g) satisfies the generalized entropic property, then (f, g) is entropic.*

Proof. To prove (f) observe that by the generalized entropic property

$$f(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22}), g(x_{13}, x_{23})) \approx g(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23})).$$

Using the pseudo-distributivities and the commutativity of g we obtain

$$\begin{aligned} g(t(x, y, z), \alpha) &\approx f(g(x, \alpha), g(y, \alpha), g(z, \alpha)) \approx \\ &\approx f(g(\alpha, x), g(\alpha, y), g(\alpha, z)) \approx g(\alpha, s(x, y, z)). \end{aligned}$$

On the other hand, by idempotency and above identities we have

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &\approx g(t(x, y, z), t(x, y, z)) \approx g(t(x, y, z), s(x, y, z)) \approx \\ &\approx f(g(x, x), g(y, y), g(z, z)) \approx f(x, y, z). \end{aligned}$$

In the same manner we get $s(x, y, z) \approx f(x, y, z)$. Thus, by the generalized entropic property and the last two identities we have

$$\begin{aligned} f(g(x_{11}, x_{21}), g(x_{12}, x_{22}), g(x_{13}, x_{23})) &\approx g(t(x_{11}, x_{12}, x_{13}), s(x_{21}, x_{22}, x_{23})) \approx \\ &\approx g(f(x_{11}, x_{12}, x_{13}), f(x_{21}, x_{22}, x_{23})). \end{aligned} \quad \square$$

Corollary 2.1. *Every idempotent and commutative algebra $A = (A, f, g)$ with a ternary and a binary operations satisfying the generalized entropic property is entropic.*

Proof. We have to show that identities (d), (e) and (f) hold in the algebra $A = (A, f, g)$. The identity (d) is proved in Theorem 2.1, the identity (e) is proved analogically, and the identity (f) is proved in Theorem 2.3. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu. M. Movsisyan, Introduction to the theory of algebras with hyperidentities, YSU Press (1986).
- [2] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities in algebras and varieties", Uspekhi Math. Nauk. **53**, 61 - 114 (1998), English transl. in Russ. Math. Surveys **53**, no. 1, 57 - 108 (1998).
- [3] J. Jezek, T. Kepka, Medial groupoids, Rozprawy CSAV 93/2 (1983).
- [4] A. Romanowska, J. D. H. Smith, Modes. World Scientific (2002).
- [5] K. Adaricheva, A. Pilitowska, D. Stanovsky, "On complex algebras of subalgebras", arXiv:math/0610832v1 [math.RA] (2006).
- [6] T. Evans, "Properties of algebras almost equivalent to identities", J. London Math. Soc. **35**, 53 - 59 (1962).
- [7] I. Bosnjak and R. Madarsz, "On power structures", Algebra and Discr. Math., **2**, 14 - 35 (2003).
- [8] C. Brink, "Power structures", Algebra Universe, **30**, 177 - 216 (1993).
- [9] G. Gratzner, H. Lakser, "Identities for globals (complex algebra) of algebras", Colloq. Math., **56**, 19 - 29 (1988).
- [10] A. Romanowska, J. D. H. Smith, Modal Theory-an Algebraic Approach to Order, Geometry, and Convexity, Heldermann Verlag, Berlin (1985).
- [11] A. Romanowska, J. D. H. Smith, "On the structure of the subalgebra systems of idempotent entropic algebras", J. Algebra, **12**, 263 - 283 (1989).

Поступила 7 мая 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 46, н. 1, 2011, стр. 35-48.

**О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ТИПА ОДНОМЕРНЫХ
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В
ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА-СЛОБОДЕЦКОГО**

А. Г. КАМАЛЯН, В. В. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *katalyan_armen@yahoo.com*, *vahan@simonyans.com*

Аннотация. В работе исследуются однородные одномерные псевдодифференциальные уравнения неотрицательного порядка с символами вида $\sum_{i=1}^N th(k_i x + \omega_i) A_i(\xi)$. Используя связь с системами сингулярных интегральных уравнений, получены оценки для количества решений этих уравнений в пространстве Соболева-Слободецкого.

MSC2000 number: 45E05, 47G30

Ключевые слова: Псевдодифференциальное уравнение, матричное сцепление, факторизация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S_r^0 - множество локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций f , удовлетворяющих условию $|f(x)| \leq c(1+|x|)^r$, где $r \in \mathbb{R}$, а $H_r(\mathbb{R})$ -пространство Соболева-Слободецкого обобщенных функций u , преобразование Фурье $\hat{u}$ которых принадлежат весовому пространству $L_2(\mathbb{R}, (1+|\xi|)^r)$.

Определим функции

$$A^{(1)}(x, \xi) = 1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^N \varphi(x, \lambda_k) A_k(\xi)$$

$$A^{(2)}(x, \xi) = 1 + P(\varphi(x, \lambda)) \tilde{A}(\xi), \quad x, \xi, \lambda \in \mathbb{R},$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = th \frac{\pi}{\alpha} \left(x - \lambda + i \frac{\alpha\beta}{2} \right), \quad A_m, \tilde{A} \in S_r^0, \quad P(z) = \prod_{k=1}^N (z - \nu_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C},$$

причем $\{\lambda_k\}_1^N \in \mathbb{R}$ и $\{\nu_k\}_1^N \in \mathbb{C}$ суть конечные последовательности, $(m = 0, 1, \dots, N)$, $\alpha > 0$, $-1 < \beta < 1$. Как известно (см. [1]) псевдодифференциальный оператор

$A^{(i)}(x, D)$ действующий по формуле

$$A^{(i)}(x, D)y = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} A^{(i)}(x, \xi) F_{x \rightarrow \xi} y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} A^{(i)}(x, \xi) \widehat{y}(\xi) d\xi \quad i = 1, 2,$$

является ограниченным оператором из $H_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Заметим, что в случае $N = 1$ и $r = 0$ оператор $A^{(1)}(x, D)$, также как оператор $A^{(2)}(x, D)$ в случае $r = 0$ и $\deg P = 1$, становится известным интегральным оператором “плавного перехода” (более подробно см. [2]-[6]). В случае когда $N = 1$, а A_0 и A_1 - многочлены ($\deg P = 1$, $\tilde{A}$ - многочлен), дифференциальное уравнение $A^{(1)}(x, D)y = 0$ ($A^{(2)}(x, D)y = 0$) может быть записано в виде $(P_1(D) + e^x P_2(D))y = 0$, где $D = i \frac{d}{dx}$, а P_1 и P_2 некоторые многочлены. Последнее с помощью замены переменной сводится к хорошо известному дифференциальному уравнению

$$\epsilon t \prod_{j=1}^p \left(t \frac{d}{dt} - a_j + 1 \right) y + \prod_{j=1}^q \left(t \frac{d}{dt} - b_j \right) y = 0,$$

где $\epsilon = \pm 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, а $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Решения этого уравнения записываются с помощью G - функции Мейера (см. [7]-[10]).

Случай $N = 1$ $r \geq 0$ при некоторых дополнительных условиях подробно рассмотрен в [11], где, в частности, получены все решения однородного уравнения $A^{(1)}(x, D)y = 0$ в классе $H_r(\mathbb{R})$. В работе [12] результаты полученные в [11] переведены на случай одной системы псевдодифференциальных уравнений. В случае $N > 1$ исследование операторов $A^{(i)}(x, D)$ ($i = 1, 2$) сводится к исследованию матричных сингулярных интегральных операторов (см. [13]).

На основе этой связи в данной работе приводятся достаточные условия обеспечивающие существование нетривиальных решений уравнений $A^{(i)}(x, D)y = 0$ ($i = 1, 2$) из класса $H_r(\mathbb{R})$. Получены оценки снизу для количества таких решений. Отдельно рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^N e^{kx} P_k(D)y = 0,$$

где $P_k(D)$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $D = i \frac{d}{dx}$) – дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

2. УРАВНЕНИЕ $A^{(1)}(x, D)y = 0$.

Пусть $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность комплексной плоскости, а $S_{\mathbb{T}}$ -оператор сингулярного интегрирования вдоль контура $\mathbb{T}$:

$$(S_{\mathbb{T}}y)(t) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{\mathbb{T}} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Оператор $S_{\mathbb{T}}$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$, где $\tau(\zeta) = i(\zeta + 1)/(1 - \zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{T}$) (см. [14]). Пусть $P_{\mathbb{T}}^\pm$ действующие в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ проекторы, определенные равенствами $P_{\mathbb{T}}^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_{\mathbb{T}})$, а $L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta) = P_{\mathbb{T}}^\pm L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$.

Аналогично, через $S_{\mathbb{R}}$ будем обозначать оператор сингулярного интегрирования вдоль $\mathbb{R}$:

$$(S_{\mathbb{R}}y)(t) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть $\rho_0(t) = |t|^\beta$ ($t \in \mathbb{R}$), а $B : L_2(\mathbb{R}, \rho_0) \rightarrow L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ -оператор “пересадки”, определенный равенством $(B\varphi)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1} \varphi(\tau(\zeta))$ (см. [14]). Из ограниченности оператора B и равенства $B^{-1}S_{\mathbb{T}}B = S_{\mathbb{R}}$ следует ограниченность операторов $S_{\mathbb{R}}$ и $P_{\mathbb{R}}^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm S_{\mathbb{R}})$ (см. [14]).

Обозначая $h(x) = \alpha^{-1} \ln x$ ($x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$), определим следующие функции

$$\Psi_k = A_k \circ h, \quad \tilde{\Psi} = \left(1 + \Psi_0 - \sum_{i=1}^N \Psi_i\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \Delta_{l,k} = \exp \left\{ i \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\alpha} \ln x \right\},$$

где $l = 1, 2, \dots, N$; $k = 0, 1, \dots, N$, а λ_0 – произвольное действительное число.

Пусть матрица-функция $G_{\mathbb{R}}$ совпадает с единичной матрицей E_N на $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, и на $\mathbb{R}_+$

$$G_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 1 + 2\Psi_1\tilde{\Psi} & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,2} & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,3} & \cdots & 2\Psi_1\tilde{\Psi}\Delta_{1,N} \\ 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,1} & 1 + 2\Psi_2\tilde{\Psi} & 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,3} & \cdots & 2\Psi_2\tilde{\Psi}\Delta_{2,N} \\ 2\Psi_3\tilde{\Psi}\Delta_{3,1} & 2\Psi_3\tilde{\Psi}\Delta_{3,2} & 1 + 2\Psi_3\tilde{\Psi} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 2\Psi_N\tilde{\Psi}\Delta_{N,1} & 2\Psi_N\tilde{\Psi}\Delta_{N,2} & & & 1 + 2\Psi_N\tilde{\Psi} \end{bmatrix}.$$

Пусть $G_{\mathbb{T}}(\xi) = G_{\mathbb{R}}(\tau(\xi))$. Под обобщенной правой факторизацией матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ мы будем понимать представление

$$(2.1) \quad G_{\mathbb{T}} = G_- \Lambda G_+,$$

где

$$G_-^{\pm 1} \in L_2^-(\mathbb{T}, |\tau|^{\pm\beta}), \quad G_+^{\pm 1} \in L_2^+(\mathbb{T}, |\tau|^{\mp\beta}), \quad \Lambda(t) = \text{diag}(t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_N})$$

и $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n \geq 0 \geq \kappa_{n+1} \geq \dots \geq \kappa_N$ - целые числа называемые правыми частными индексами матрицы-функции. Заметим, что оператор $G_- S_{\mathbb{T}} G_-^{-1}$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$.

Здесь и далее принадлежность матриц-функций функциональным классам понимается поэлементно, а действие оператора $S_{\mathbb{T}}$ ($S_{\mathbb{R}}$) на вектор-функции понимается покомпонентно.

Следуя схеме предложенной в [15] введем функции

$$\begin{aligned} \rho_+(z) &= z^{\beta/2}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad \rho_-(z) = z^{\beta/2}, \quad -\pi \leq \arg z < \pi, \\ \rho'_+(z) &= \rho_+(\tau(z)), \quad (|z| < 1), \quad \rho'_-(z) = \rho_-(\tau(z)), \quad (|z| > 1) \end{aligned}$$

и квадратные матрицы-функции порядка N

$$\hat{\rho}_{\pm} = \text{diag}(\rho_{\pm}, \dots, \rho_{\pm}), \quad \hat{\rho}'_{\pm} = \text{diag}(\rho'_{\pm}, \dots, \rho'_{\pm}).$$

Определим также матрицы-функции

$$G' = \hat{\rho}'_- G_{\mathbb{T}} (\hat{\rho}'_+)^{-1}, \quad G'_- = \hat{\rho}'_- G_- \quad \text{и} \quad G'_+ = G_+ (\hat{\rho}'_+)^{-1}.$$

Пользуясь равенством $\rho_{\pm} L_2^{\pm}(\mathbb{T}, |t|^{\beta}) = L_2^{\pm}(\mathbb{T})$ (см. более подробно [11]) нетрудно убедиться, что представление (2.1) является обобщенной правой факторизацией в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta})$ тогда и только тогда, когда представление $G' = G'_- \Lambda G'_+$ является обобщенной правой факторизацией G' в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Переходя в последнем представлении к транспонированным матрицам, получим что представление $G'^{Tr} = G'^{Tr}_+ \Lambda G'^{Tr}_-$ является обобщенной левой факторизацией матрицы-функции G'^{Tr} в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ (см. [16]).

Определим следующие функции

$$Q_i(x) = 1 + A_0(x) - (-1)^i \sum_{k=1}^N A_k(x), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad Q(x) = Q_1(x) Q_2^{-1}(x).$$

Ниже в теоремах 2.1 и 3.1 предполагается, что значения $\arg$ принимаются в интервале $(-\pi, \pi]$.

Теорема 2.1. Пусть $r \geq 0$, $A_k \in C(\mathbb{R}) \cap S_r^0$ ($k = 0, 1, \dots, N$), $Q_i^{-1} \in S_{-r}^0$ ($i = 1, 2$), существуют не нулевые конечные пределы $q_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x)$ и $\theta_{\pm} = \arg(e^{i\pi\beta} q_{\pm}) \neq \pi$. Если целое число

$$(2.2) \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \theta_+ + \theta_- \right)$$

меньше нуля, то уравнение $A^{(1)}(x, D) y = 0$ имеет по крайней мере $|\kappa|$ решений из класса $H_r(\mathbb{R})$.

В случае дифференциального оператора т.е. когда функции A_k ($k = 0, 1, \dots, N$) являются многочленами, число k равно $l_1 - l_2$, где l_i - количество нулей многочлена Q_i ($i = 1, 2$) в верхней полуплоскости.

Заметим, что в теореме 2.1 одно из условий $Q_1^{-1} \in S_{-r}^0$ и $Q_2^{-1} \in S_{-r}^0$ может быть опущено. Действительно, нетрудно убедиться, что выполнение одного из этих условий наряду с существованием не нулевых $q_{\pm}$ обеспечивает выполнение второго условия.

Доказательство. Определим сингулярный интегральный оператор

$$K = P_{\mathbb{R}}^+ \Xi_{M+N} + P_{\mathbb{R}}^- \Xi_{M-N},$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \Psi^{-1} \Delta_{1,0} + \Psi_0 \Psi^{-1} \Delta_{1,0} & -\Delta_{1,2} & \cdots & -\Delta_{1,N} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi^{-1} \Delta_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \Psi_2 \Psi^{-1} \Delta_{2,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_N \Psi^{-1} \Delta_{N,0} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и ниже Ξ_{Φ} означает оператор умножения на матрицу-функцию Φ : $\Xi_{\Phi} y = \Phi y$.

Нетрудно вычислить, что

$$\det(M \pm N)^{-1} = \Psi \left[\Delta_{1,0} \left(1 + \Psi_0 \pm \sum_{k=1}^N \Psi_k \right) \right]^{-1}.$$

Из условий $Q_i^{-1} \in S_{-r}^0$, $i = 1, 2$ следует, что $Q_i(x) \neq 0$ $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ и что $(M \pm N)^{-1} \in L_{\infty}$. Нетрудно убедиться, что $G_{\mathbb{R}} = (M + N)(M - N)^{-1}$ и кроме того для $x > 0$ $\det G_{\mathbb{R}}(x) = Q(h(x))$, а для $x < 0$ $\det G_{\mathbb{R}}(x) = 1$. Поскольку $K = K_{\mathbb{R}} \Xi_{M-N}$, где $K_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}^+ \Xi_{G_{\mathbb{R}}} + P_{\mathbb{R}}^-$, то $\dim \text{Ker} K = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}$. Из лемм 1 и 2 работы [13] следует, что количество линейно независимых решений, из класса $H_r(\mathbb{R})$, уравнения $A(x, D)y = 0$ совпадает с размерностью пространства $\text{Ker} K_{\mathbb{R}}$. Определим оператор

$$K_{\mathbb{T}} = B K_{\mathbb{R}} B^{-1} = P_{\mathbb{T}}^+ \Xi_{G_{\mathbb{T}}} + P_{\mathbb{T}}^-,$$

где $G_{\mathbb{T}}(\xi) = G_{\mathbb{R}}(\tau(\xi))$ ($\xi \in \mathbb{T}$). Очевидно, что $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{T}}$. Элементы матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$ являются непрерывными всюду на $\mathbb{T}$, за исключением

быть может точек $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$, в которых существуют односторонние пределы $G_{\mathbb{T}}(t_j \pm 0)$ ($j = 1, 2$). Очевидно аналогичное утверждение справедливо и для матрицы-функции $G'^{Tr}(t)$. Для $t \in \mathbb{T}^+ = \{t : t \in \mathbb{T}; \text{Im} t > 0\}$ справедливо равенство $G'^{Tr}(t) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta})$ и потому $\det G'^{Tr}(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{T}^+$). Кроме того $\det G'^{Tr}(1+0) \neq 0$ и $\det G'^{Tr}(-1-0) \neq 0$. Для $t \in \mathbb{T}^- = \{t : t \in \mathbb{T}; \text{Im} t < 0\}$ имеет место равенство $G'^{Tr}(t) = G_{\mathbb{R}}^{Tr}(\tau(t))$. Поскольку $\det G_{\mathbb{R}}(\xi) = Q(h(\xi))$ при $\xi > 0$, то из условия теоремы следует, что $\det G'^{Tr}(t) \neq 0$ для $t \in \mathbb{T}^-$ и кроме того $\det G'^{Tr}(1-0) \neq 0$, $\det G'^{Tr}(-1+0) \neq 0$.

Собственные значения матриц $(G'^{Tr}(t_j - 0))^{-1} G'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$) обозначим через λ_{jk} . Непосредственным подсчетом несложно убедиться, что

$$\lambda_{11} = e^{-i\pi\beta} \frac{1 + \Psi_0(+\infty) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(+\infty)}{1 + \Psi_0(+\infty) + \sum_{k=1}^N \Psi_k(+\infty)} = e^{-i\pi\beta} q_+^{-1},$$

$$\lambda_{1k} = e^{-i\pi\beta} \quad (k = 2, \dots, N),$$

$$\lambda_{21} = e^{i\pi\beta} \frac{1 + \Psi_0(+0) + \sum_{k=1}^N \Psi_k(+0)}{1 + \Psi_0(+0) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(+0)} = e^{i\pi\beta} q_-,$$

$$\lambda_{2k} = e^{i\pi\beta} \quad (k = 2, \dots, N).$$

Заметим, что $\arg \lambda_{11} = -\theta_+ \neq \pi$ и $\arg \lambda_{21} = \theta_- \neq \pi$, $\arg \lambda_{jk} \neq \pi$ ($j = 1, 2; k = 2, \dots, N$).

Таким образом выполнены условия:

- (1) для всех $t \in \mathbb{T}$ $\det G'^{Tr}(t \pm 0) \neq 0$,
- (2) все собственные значения матриц $(G'^{Tr}(t_j - 0))^{-1} G'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$) лежат вне $\mathbb{R}_-$.

Из теоремы 5.16 работы [16] следует, что матрица-функция G'^{Tr} допускает левую обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, причем левый суммарный индекс матрицы-функции G'^{Tr} вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2\pi} \{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^-} + \frac{1}{2\pi} \{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^+} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N \arg \lambda_{jk} = \frac{1}{2\pi} \left(\{ \text{Arg} \det G'^{Tr}(t) \}_{t \in \mathbb{T}^-} - \theta_+ + \theta_- \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x) |_{-\infty}^{+\infty} - \theta_+ + \theta_- \right). \end{aligned}$$

Как было уже отмечено выше, тогда матрица-функция $G_{\mathbb{T}}$ обладает правой обобщенной факторизацией в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$, причем правые частные индексы (соответственно правый суммарный индекс) $G_{\mathbb{T}}$ совпадают с левыми частными индексами (соответственно с левым суммарным индексом) G'^{Tr} . Из теоремы 4.2 работы [17] следует, что число $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{T}}$ равно модулю суммы отрицательных правых частных индексов матрицы-функции $G_{\mathbb{T}}$, которая в случае $\kappa < 0$, не меньше чем $|\kappa|$.

В случае дифференциального оператора имеет место равенство $q_+ = q_-$, а число $\frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} Q(x) \right)_{-\infty}^{+\infty}$ равно разности нулей и полюсов в верхней полуплоскости рациональной функции Q . Теорема 2.1 доказана. $\square$

3. УРАВНЕНИЕ $A^{(2)}(x, D)y = 0$.

Функция $A^{(2)}(x, \xi)$ при подходящем выборе чисел λ_k ($k = 1, \dots, N$) и функций $A_k(\xi)$ может быть записана в виде

$$1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^N \varphi(x, \lambda_k) A_k(\xi).$$

Тем не менее применение теоремы 2.1 к уравнению $A^{(2)}(x, D)y = 0$ осложнено в связи с необходимостью явного нахождения упомянутых переменных λ_k , $A_k(\xi)$. Для оценки количества решений уравнения $A^{(2)}(x, D)y = 0$ мы здесь предлагаем прямой подход не опирающийся на теорему 2.1.

Теорема 3.1. Пусть $r > 0$, $\tilde{A} \in S_r^0 \cap C(\mathbb{R})$, $\tilde{A}^{-1} \in S_{-r}^0 \cap C(\mathbb{R})$, $P(\pm 1) \neq 0$, $1 + P(\pm 1)\tilde{A}(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), $\arg \left(e^{-i\pi\beta \frac{\nu_k+1}{\nu_k-1}} \right) \neq \pi$ ($k = 1, \dots, N$) и целое число κ определяется равенством

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \text{Arg} \frac{1 + P(1)\tilde{A}(x)}{1 + P(-1)\tilde{A}(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Тогда, если $\kappa < 0$, то уравнение $A^{(2)}(x, D)y = 0$ имеет по крайней мере $|\kappa|$ решений из $H_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $M_r(\mathbb{R})$ – некоторое прямое дополнение к линейному пространству $H_r(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а $\pi_1 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H_r(\mathbb{R})$, $\pi_2 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_r(\mathbb{R})$ операторы проектирования связанные соотношением $\pi_1 y + \pi_2 y = y$ для $y \in L_2(\mathbb{R})$.

Очевидно, что оператор $\gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ определенный равенством $\gamma y = e^{sx} y(e^{\alpha x})$ ($\sigma = \alpha(\beta + 1)/2$; $s = \sigma + i\lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$) является ограниченным и обратимым.

Определим операторы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \pi_1 F^{-1} \gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow H_r(\mathbb{R}), \\ \omega_2 &= \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \gamma^{-1} F \tilde{A}(D) : H_r(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0), \\ \omega_3 &= \pi_2 F^{-1} \gamma : L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \rightarrow M_r(\mathbb{R}), \\ \omega_4 &= \Lambda_{\Psi^{-1}} : W \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0),\end{aligned}$$

где $W = \left\{ f : \tilde{A}^{-1}(h)f \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \right\}$.

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что

$$\begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} + \omega_1 \omega_2 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_3 \omega_2 & -\omega_3 & I_{M_r(\mathbb{R})} \\ -\omega_4^{-1} \omega_2 & \omega_4^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} & 0 & \omega_1 \omega_4 \\ \omega_2 & 0 & \omega_4 + \omega_2 \omega_1 \omega_4 \\ 0 & I_{M_r(\mathbb{R})} & \omega_3 \omega_4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку оператор $A^{(2)}(x, D)$ может быть представлен равенством

$$A^{(2)}(x, D) = \begin{bmatrix} I_{H_r(\mathbb{R})} + \omega_1 \omega_2 \\ \omega_3 \omega_2 \end{bmatrix} : H_r(\mathbb{R}) \rightarrow \begin{matrix} H_r(\mathbb{R}) \\ \oplus \\ M_r(\mathbb{R}) \end{matrix},$$

то полученное матричное тождество осуществляет матричное сцепление (см. [18]) между оператором $A^{(2)}(x, D)$ и

$$K' = \begin{bmatrix} \omega_4 + \omega_2 \omega_1 \omega_4 \\ \omega_3 \omega_4 \end{bmatrix} : W \rightarrow \begin{matrix} L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \\ \oplus \\ M_r(\mathbb{R}) \end{matrix}.$$

Из свойств матричного сцепления следует, что $\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} K'$.

Пусть $z \in W$ и $K'z = 0$. Последнее в раскрытой форме означает справедливость следующий двух равенств

$$(3.1) \quad \Xi_{\Psi^{-1}} z + \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \gamma^{-1} F \tilde{A}(D) \pi_1 F^{-1} \gamma \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0,$$

$$(3.2) \quad \pi_2 F^{-1} \gamma \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0.$$

Равенство (3.2) эквивалентно тому, что $z \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ (см. например доказательство леммы 2 из [13]). Из равенства (3.2) следует, что равенство (3.1) может быть записано в виде

$$(3.3) \quad \Xi_{\Psi^{-1}} z + \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k \Xi_{\tilde{A} \circ h} \Xi_{\Psi^{-1}} z = 0.$$

Умножив обе части равенства (3.3) на $A' = \tilde{A} \circ h$ и обозначив $A'\Psi^{-1}z$ через u получим, что $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$, где $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = u + A' \sum_{k=0}^N c_k S_{\mathbb{R}_+}^k u$. Поскольку $\tilde{A} \in S_r^0$, то $A'\Psi^{-1}$ ограничена и потому $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$. Из условия $\tilde{A}^{-1} \in S_{-r}^0$ следует, что $z = \Psi A'^{-1}u$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ как только $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$. Отсюда следует, что если $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$ и $u \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$, то $K'z = 0$, где $z = \Psi A'^{-1}u$. Таким образом $\dim \text{Ker} K'$ совпадает с количеством линейно независимых решений из $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ уравнения $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$.

Обозначая $u_1 = u$, $u_N = (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_N I) u_1$ и $u_i = (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_i I) u_{i+1}$ ($i = 2, \dots, N-1$) легко видеть, что количество линейно независимых решений из $L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ уравнения $K_{\mathbb{R}_+}^{(1)}u = 0$ совпадает с количеством линейно независимых решений системы уравнений

$$(3.4) \quad \begin{cases} u_1 + A' (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_1 I) u_2 = 0 \\ u_2 - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_2 I) u_3 = 0 \\ \dots \\ u_{N-1} - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_{N-1} I) u_N = 0 \\ u_N - (S_{\mathbb{R}_+} - \nu_N I) u_1 = 0 \end{cases}$$

из $L_2^N(\mathbb{R}_+, \rho_0) = L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0) \oplus \dots \oplus L_2(\mathbb{R}_+, \rho_0)$.

Введем матрицы

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -A'\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \nu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \nu_{N-1} \\ \nu_N & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N' = \begin{bmatrix} 0 & A' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и оператор $K_{\mathbb{R}_+}^{(N)}$ действующий в пространстве $L_2^N(\mathbb{R}_+, \rho_0)$ по формуле

$$K_{\mathbb{R}_+}^{(N)} \bar{u} = M' \bar{u} + N' S_{\mathbb{R}_+} \bar{u}.$$

Систему (3.4) можно записать в виде $K_{\mathbb{R}_+}^{(N)} \bar{u} = 0$.

Пусть

$$\widetilde{M}(x) = \begin{cases} M'(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ E_N & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \quad \widetilde{N}(x) = \begin{cases} N'(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Определим оператор $K_{\mathbb{R}}^{(N)}$ действующий в пространстве $L_2^N(\mathbb{R}, \rho_0)$ по формуле

$$K_{\mathbb{R}}^{(N)} \bar{u} = \Xi_{\widetilde{M}} \bar{u} + \Xi_{\widetilde{N}} S_{\mathbb{R}} \bar{u}.$$

Очевидно, что $\dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}^{(N)} = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}_+}^{(N)}$. Следовательно

$$\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} K_{\mathbb{R}}^{(N)}.$$

Обозначив $\tilde{G}^\pm = \tilde{M} \pm \tilde{N}$ и $\tilde{G}_\mathbb{R} = \left(\tilde{G}^-\right)^{-1} \tilde{G}^+$, получим, что

$$K_\mathbb{R}^{(N)} \bar{u} = \Xi_{\tilde{G}^+} P_\mathbb{R}^+ \bar{u} + \Xi_{\tilde{G}^-} P_\mathbb{R}^- \bar{u} = \Xi_{\tilde{G}^-} \tilde{K}_\mathbb{R} \bar{u},$$

где $\tilde{K}_\mathbb{R} = \Xi_{\tilde{G}_\mathbb{R}} P_\mathbb{R}^+ + P_\mathbb{R}^-$.

Учитывая, что на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство $\det \tilde{G}^- = 1 + P(-1) A'$ нетрудно убедиться, что элементы матрицы-функции $\left(\tilde{G}^-\right)^{-1} = \|g_{ij}^-\|_{i,j=1}^N$, на $\mathbb{R}_+$ допускают представление $g_{ij}^- = \frac{\sigma_{ij} + k_{ij} A'}{1 + P(-1) A'}$, где $\sigma_{ij}, k_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, \dots, N$), причем $k_{i1} = 0$ ($i = 1, \dots, N$). Учитывая также, что на $\mathbb{R}_+$ все элементы матрицы $\tilde{G}^+ = \|g_{ij}^+\|_{i,j=1}^N$ постоянные числа кроме $g_{1,2}^+ = (1 - \nu_1) A'$, нетрудно видеть, что элементы матрицы $\tilde{G}_\mathbb{R} = \|g_{ij}\|_{i,j=1}^N$ на $\mathbb{R}_+$ могут быть представлены в виде $g_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + \delta_{ij} A'}{1 + P(-1) A'}$, где $\gamma_{ij}, \delta_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, \dots, N$). Поскольку $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{A}(x) = \infty$, то отсюда следует существование пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_{ij}(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +0} g_{ij}(x)$.

Определим оператор

$$\tilde{K}_\mathbb{T} = B \tilde{K}_\mathbb{R} B^{-1} = \Xi_{\tilde{G}_\mathbb{T}} P_\mathbb{T}^+ + P_\mathbb{T}^-,$$

где $\tilde{G}_\mathbb{T}(\xi) = \tilde{G}_\mathbb{T}(\tau(\xi))$ ($\xi \in \mathbb{T}$). Очевидно, что $\dim \text{Ker} A^{(2)}(x, D) = \dim \text{Ker} \tilde{K}_\mathbb{T}$.

Определим

$$\tilde{G}'^{Tr}(t) = \begin{cases} \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}) & t \in \mathbb{T}^+ \\ \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(\tau(t)) & t \in \mathbb{T}^- \end{cases}.$$

Легко видеть, что матрица-функция $\tilde{G}'^{Tr}$ непрерывна всюду на $\mathbb{T}$, быть может за исключением точек $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. В силу условий $1 + P(\pm 1) \tilde{A}(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) следует, что $\det \tilde{G}'^{Tr}(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$). Кроме того, справедливы равенства

$$\tilde{G}'^{Tr}(1-0) = \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+\infty), \quad \tilde{G}'^{Tr}(1+0) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}),$$

$$\tilde{G}'^{Tr}(-1-0) = \text{diag}(e^{-i\pi\beta}, \dots, e^{-i\pi\beta}), \quad \tilde{G}'^{Tr}(-1+0) = \tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+0).$$

Поскольку $r > 0$, то

$$\tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + P(1) A'(x)}{1 + P(-1) A'(x)} = \frac{P(1)}{P(-1)},$$

$$\tilde{G}_\mathbb{R}^{Tr}(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 + P(1) A'(x)}{1 + P(-1) A'(x)} = \frac{P(1)}{P(-1)}.$$

Таким образом можно утверждать, что $\det \tilde{G}'^{Tr}(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$.

Вычислим собственные значения матриц $\left(\tilde{G}'^{Tr}(t_j - 0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(t_j + 0)$ ($j = 1, 2$).

Заметим, что

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(1+0) = \left[\left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_\mathbb{R}(+\infty)\right)^{Tr}\right]^{-1},$$

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(-1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(-1+0) = \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+0)\right)^{Tr}.$$

Поскольку

$$\det \left\{ \left[\left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) \right)^{Tr} \right]^{-1} - \lambda E_N \right\} = \frac{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right)}{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) \right) \det \left(-\frac{1}{\lambda} E_N \right)},$$

то собственное значение матрицы $\left(\tilde{G}'^{Tr}(1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(1+0)$ совпадает с корнями уравнения $\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = 0$.

Для $x > 0$ имеет место равенство

$$\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(x) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = \frac{\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}^+(x) - \frac{1}{\lambda} \tilde{G}^-(x) \right)}{\det \left(\tilde{G}^-(x) \right)}.$$

Обозначим $\eta_{\pm} = e^{i\pi\beta} \pm \frac{1}{\lambda}$. Вычисляя определитель матрицы

$$e^{i\pi\beta} \tilde{G}^+(x) - \frac{1}{\lambda} \tilde{G}^-(x) = \begin{bmatrix} \eta_- & A'(x)[\eta_+ - \nu_1 \eta_-] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_- & \nu_2 \eta_- - \eta_+ & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \eta_- & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \nu_{N-1} \eta_- - \eta_+ \\ \nu_N \eta_- - \eta_+ & 0 & \cdots & 0 & \eta_- \end{bmatrix}$$

для $x > 0$ и учитывая равенство $\det \tilde{G}^-(x) = 1 + P(-1) A'(x)$ ($x > 0$) получим

$$(3.5) \quad \det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(x) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = \frac{\eta_-^N + (-1)^N A'(x) \prod_{k=1}^N [\nu_k \eta_- - \eta_+]}{1 + P(-1) A'(x)}.$$

Заметив, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + P(-1) \tilde{A}(x) \right]^{-1} = 0$, и переходя в (3.5) к пределу $x \rightarrow +\infty$, получим что уравнение

$$\det \left(e^{i\pi\beta} \tilde{G}_{\mathbb{R}}(+\infty) - \frac{1}{\lambda} E_N \right) = 0$$

эквивалентно соотношению

$$\prod_{k=1}^N [\lambda e^{i\pi\beta} (1 - \nu_k) + (1 + \nu_k)] = 0.$$

Таким образом $\lambda_{1k} = e^{-i\pi\beta} \frac{\nu_k + 1}{\nu_k - 1}$ ($k = 1, \dots, N$).

Аналогично, нетрудно убедиться, что собственные значения матрицы

$$\left(\tilde{G}'^{Tr}(-1-0)\right)^{-1} \tilde{G}'^{Tr}(-1+0)$$

совпадают с числами $\lambda_{2k} = e^{i\pi\beta} \frac{\nu_k - 1}{\nu_k + 1}$ ($k = 1, \dots, N$).

Из теоремы 5.16 [16] следует что матрица-функция $\tilde{G}'^{Tr}$ допускает левую обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, причем левый суммарный индекс матрицы-функции $\tilde{G}'^{Tr}$ вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{Arg} \det \tilde{G}'^{Tr}(t) \right\}_{t \in \mathbb{T}^-} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{Arg} \det \tilde{G}'^{Tr}(t) \right\}_{t \in \mathbb{T}^+} + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N \arg \lambda_{jk} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{1 + P(1) \tilde{A}(x)}{1 + P(-1) \tilde{A}(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается повторить рассуждения сделанные в конце теоремы 2.1, при этом вновь пользуясь теоремой 4.2 из [17]. $\square$

В качестве иллюстрации теоремы 3.1 приведем следующее замечание.

Замечание. Пусть $\beta = 0$, P -многочлен, корни которого находятся вне отрезка $[-1; 1]$ и существуют числа w_1, w_2 такие что $\operatorname{Im} w_1 > 1$, $0 < \operatorname{Im} w_2 < 1$ а $P(1) = 4(w_1^2 + 1)^{-1}$, $P(-1) = 4(w_2^2 + 1)^{-1}$.

Тогда уравнение $y'' - y' + \frac{1}{P(\varphi)}y = 0$ имеет решение в $H_2(\mathbb{R})$. Примером такого многочлена служит $P(z) = q(z^2)(kz + b)$, где корни многочлена q находятся вне отрезка $[0; 1]$, и кроме того $q(1) = 1$, $k = \frac{2}{w_1^2 + 1} - \frac{2}{w_2^2 + 1}$, $b = \frac{2}{w_1^2 + 1} + \frac{2}{w_2^2 + 1}$, $b/k \in [-1; 1]$.

4. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В качестве следствия теоремы 2.1 докажем следующий результат.

Теорема 4.1. Пусть $P_k(D)$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $D = i \frac{d}{dx}$) - дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и $r = \max_{k=0, \dots, N} \deg P_k$. Если $P_0(x) \neq 0$, $P_N(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $\deg P_0 = \deg P_N = r$ и количество корней l_0 многочлена P_0 в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ больше чем количество корней l_N многочлена P_N в верхней полуплоскости, то дифференциальное уравнение

$$(4.1) \quad [P_0(D) + e^x P_1(D) + e^{2x} P_2(D) + \dots + e^{Nx} P_N(D)] y = 0$$

имеет по крайней мере $l_0 - l_N$ решений в классе $H_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть σ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) комплексные числа удовлетворяющие условию $\arg \sigma_k = -\pi\beta$.

Пусть $S_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ ($k = 1, \dots, N$) элементарные симметрические функции. Введем также числа $u_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N$; $l = 0, \dots, N$) определенные равенствами

$$u_{k,0} = S_k(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \quad (k = 1, \dots, N),$$

$$u_{k,l} = S_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}, -\sigma_l, \sigma_{l+1}, \dots, \sigma_N) \quad (k, l = 1, \dots, N).$$

Определим матрицу

$$U = \begin{bmatrix} u_{N,0} & u_{N,1} & u_{N,2} & \cdots & u_{N,N} \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,1} & u_{N-1,2} & \cdots & u_{N-1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $U^{-1} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{N+1}$, где числа $b_{i,j}$ определены по формулам

$$b_{1,1} = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_N}, \quad b_{1,l} = 0 \quad (l = 2, \dots, N), \quad b_{1,N+1} = \frac{1}{2},$$

$$b_{k+1,l} = \frac{-(\sigma_k)^{l-1}}{2\sigma_k(\sigma_1 - \sigma_k) \cdots (\sigma_{k-1} - \sigma_k)(\sigma_{k+1} - \sigma_k) \cdots (\sigma_N - \sigma_k)}$$

($k = 1, \dots, N$; $l = 1, \dots, N+1$). Дифференциальные операторы $A_k(D)$ определим с помощью равенств

$$[A_0(D), \dots, A_N(D)]^{Tr} = U^{-1} [P_0(D), \dots, P_N(D)]^{Tr}.$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что функция $y(x)$ удовлетворяет (4.1) тогда и только тогда, когда справедливо

$$\left[A_0(D) + \sum_{k=1}^N \frac{e^x - \sigma_k}{e^x + \sigma_k} A_k(D) \right] y = 0.$$

Поскольку $\frac{e^x - \sigma_k}{e^x + \sigma_k} = th \frac{1}{2}(x - s_k + i\pi\beta)$, где $s_k = \ln |\sigma_k| \in \mathbb{R}$, то в силу теоремы 2.1 количество решений дифференциального уравнения (4.1) из класса $H_r(\mathbb{R})$ (r -степень дифференциального уравнения) не меньше чем $l_1 - l_2$, где l_1 - количество нулей многочлена $A_0 + \sum_{i=1}^N A_i$ в верхней полуплоскости, а l_2 - количество нулей в верхней полуплоскости многочлена $A_0 - \sum_{i=1}^N A_i$.

Из равенства $[P_0(D), \dots, P_N(D)]^{Tr} = U [A_0(D), \dots, A_N(D)]^{Tr}$ следует, что

$$A_0 + \sum_{i=1}^N A_i = P_N, \quad A_0 - \sum_{i=1}^N A_i = \frac{1}{\sigma_1 \cdots \sigma_N} P_0.$$

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Abstract. The paper considers homogeneous one-dimensional pseudodifferential equations of nonnegative order with symbols of the form $\sum_{i=1}^N th(k_i x + \omega_i) A_i(\xi)$. Using a relationship between these equations and systems of singular equations, estimates for the number of solutions pseudodifferential equations in the Sobolev-Slobodetski space are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. И. Эскин, Краевые Задачи Для Эллиптических Псевдодифференциальных Уравнений, М., Наука (1973).
- [2] Ю. И. Черский, “Нормально разложимое уравнение плавного перехода”, ДАН СССР, **190** (1), 57 – 60 (1970).
- [3] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения Типа Свертки, М., Наука (1978).
- [4] Да. Фан Танг, “Об одном интегральном уравнении типа плавного перехода”, Диф. уравнения, **8** (6), 1058 – 1067 (1972).
- [5] Да. Фан Танг, “Об одной краевой задаче Газемана для полуплоскости и интегральных уравнениях типа свертки с аналитическими ядрами”, Изв. вузов. Мат., **10**, 73 – 82 (1973).
- [6] А. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян, “Интегральные операторы типа плавного перехода”, АН СССР, Функ. анализ и его прилож., М., **23** (2), 32 – 39 (1989).
- [7] C. S. Meijer, “On the G-Function. II-VIII”, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, 344 - 456, 457 - 469, 632 - 641, 765 - 772, 936 - 943, 1063 - 1072, 1165 - 1175 (1946).
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие Трансцендентные Функции, **1**, М., Наука (1973).
- [9] A. M. Mathai, R. K. Saxena, “Generalized Hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences”, Lecture Notes in Mathematics, **348**, Berlin: Springer (1973).
- [10] Y. A. Brychkov, Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas, CRC Press (2008).
- [11] А. Г. Камалян, В. В. Симонян, “О разрешимости одного типа одномерных псевдодифференциальных операторов”, Изв. НАН Армении, Математика, **43** (4), 233 – 245, (2008).
- [12] В. В. Симонян, “Об одной системе псевдодифференциальных уравнений”, Математика в высш. шк., **5** (3), 5 – 13 (2009).
- [13] V. V. Simonyan, “On connection of one class of one-dimensional pseudodifferential operators with singular integral operators”, Proceedings of the Yerevan State University, **2**, 8 – 15 (2009).
- [14] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, Штинца (1973).
- [15] В. А. Пааташвили, “О разрывной задаче линейного сопряжения”, Сообщ. АН ГССР, **36** (3), 539 – 540 (1964).
- [16] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Berlin, Akademie - Verlag (1987).
- [17] Н. Я. Крупник, “Некоторые общие вопросы теории одномерных сингулярных операторов с матричными коэффициентами”, Мат. исслед., **42**, 91 – 112 (1976).
- [18] H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, “The coupling method for solving integral equations”, Advances and Applications, **12**, Birkhauser, Verlag, Basel, 39 – 73 (1984).

Поступила 15 сентября 2010

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: jolisourire@yandex.ru

Аннотация. В работе найдены критерии для почти гипоеллиптических многочленов двух и трех переменных при которых $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

MSC2000 number: 12E10, 26C05

Ключевые слова: Почти гипоеллипτικότητα, поведение многочленов на бесконечности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N -множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n -множество n -мерных мультииндексов, $R^n(E^n)$ - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$), $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, C - множество комплексных чисел. Для $\xi \in R^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть $A \equiv \{\nu^j\}_{j=1}^k \subset R_+^n$ ($k \in N$) конечный набор. Многогранником Ньютона (характеристическим многогранником) набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$, содержащий множество $A \cup \{0\}$.

Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется полным (правильным), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат (компоненты внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней неотрицательны).

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору

$$(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}, \quad \text{ord} P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|, \quad \text{ord}_j P \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Многогранником Ньютона (характеристическим многогранником) оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) называется многогранник Ньютона (характеристический многогранник) набора (P) .

Хорошо известна (см. [1]) зависимость регулярности решений уравнения $P(D)u = 0$ от поведения символа $P(\xi)$ на бесконечности. Если символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ эллиптичен, то есть для некоторой постоянной $C > 1$

$$C^{-1}|\xi|^m \leq |P(\xi)| + 1 \leq C(|\xi|^m + 1) \quad \forall \xi \in R^n, m = \text{ord} P,$$

то (см. [2]) все решения уравнения $P(D)u = 0$ являются аналитическими функциями вещественных переменных. Если $P(\xi)$ является гипоеллиптическим многочленом, то есть

$$\sum_{\alpha \neq 0} D^\alpha P(\xi) / P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

то (см. [1] или [2]) все решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

В работе [4] введено понятие почти гипоеллиптического многочлена, именно, многочлен P называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(1.1) \quad \sum_{\alpha \in N_0^n} |D^\alpha P(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

и доказано, что если для почти гипоеллиптического многочлена

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad \gamma_{(m,0)} \cdot \gamma_{(0,m)} \neq 0,$$

существуют последовательность $\{(\xi_1^s, \xi_2^s)\}_{s=1}^\infty$, $(\xi_1^s)^2 + (\xi_2^s)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$|P(\xi_1^s, \xi_2^s)| \leq C_1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

то многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ представляется в следующем виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j (\xi_1 - a\xi_2)^j,$$

где $a \neq 0$, B_j ($j = 0, 1, \dots, m$) – некоторые числа.

В работе [5] доказано, что если $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то многочлен P является почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta > 0$

$$\left\{ u : ue^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), P(D)u = 0 \right\} \subset \left\{ u : (D^\alpha u)e^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), \forall \alpha \in N_0^n \right\}.$$

В работах [6], [7] в разных терминах введено понятие регулярного многочлена, и доказано, что регулярный многочлен $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда многогранник Ньютона (характеристический многогранник) многочлена P полный.

В работе [8] найден критерий того, что многочлен двух переменных стремился бы к бесконечности при стремлении его аргументов к бесконечности.

Цель настоящей работы – найти критерий для почти гипоеллиптических многочленов P не более трех переменных при котором $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\sum(P)$ множество вещественных нулей многочлена P , а через

$$\sum_k(P) = \left\{ \tau \in \sum(P); D^\alpha P(\tau) = 0, |\alpha| < k, \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha P(\tau)| \neq 0 \right\} \quad k \in N.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые предложения.

Предложение 1.1. Пусть T невырожденная матрица порядка $n \times n$. Тогда

I) многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда почти гипоеллиптичен многочлен $Q(\xi) \equiv P(T\xi)$,

II) $\text{ord} Q = \text{ord} P$,

III) если $\tau \in \sum_k(P)$, то $T^{-1}\tau \in \sum_k(Q)$ ($k \in N$).

Пример. Пусть $n=2$, $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2 - 1$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$Q(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1^2 - 1 \quad \text{для любого } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

$$\sum_1(P) = \{(t \pm 1, t), t \in R\}, \quad \sum_k(P) = \emptyset \quad \text{при } k \geq 2,$$

$$\sum_1(Q) = \left\{ \pm \left(\frac{1}{2}, t \right), t \in R \right\}, \quad \sum_k(Q) = \emptyset \quad \text{при } k \geq 2 \text{ и}$$

$$T : \pm \left(\frac{1}{2}, t \right) = \pm \left(t + \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} \right) = \pm \left(\left(t - \frac{1}{2} \right) + 1, t - \frac{1}{2} \right).$$

Предложение 1.2. Пусть $R_m(\xi_1, \xi_2)$ однородный многочлен порядка m и $\tau \in \sum_k(R_m)$ ($k \in N$). Тогда существует однородный многочлен $R_{m-k}(\xi_1, \xi_2)$ порядка $m-k$ такой, что $R_{m-k}(\tau) \neq 0$ и

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^k R_{m-k}(\xi_1, \xi_2) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Доказательство. Утверждение предложения непосредственно следует из основной теоремы алгебры, если заметить, что при $\tau_1 \neq 0$ ($\tau_2 \neq 0$) в силу однородности

многочлена R_m

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^m R_m \left(1, \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^2, \quad \xi_1 \neq 0$$

или, соответственно,

$$(R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^m R_m \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^2, \quad \xi_2 \neq 0),$$

при этом точка τ_2/τ_1 (τ_1/τ_2) является k -кратным корнем многочлена $Q(t) \equiv R_m(1, t)$ ($Q(t) \equiv R_m(t, 1)$). Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.3. Пусть $P(\xi_1, \xi_2)$ многочлен с постоянными коэффициентами, $\tau \in R^2$ и $m \in N$. Если с некоторой постоянной $C > 0$

$$(1.2) \quad |P(\xi_1, \xi_2)| \leq C(|\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2|^m + 1) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

то существуют числа $B_j \in C$ ($j = 0, \dots, m$) такие, что

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^j.$$

Доказательство. Так как при $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$, с помощью обратимой замены переменных $\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2 = \eta_1$, $\tau_1 \xi_1 + \tau_2 \xi_2 = \eta_2$ оценка (1.2) сводится к оценке

$$|Q(\eta_1, \eta_2)| \leq C(|\eta_1|^m + 1) \quad \text{для любых } (\eta_1, \eta_2) \in R^2,$$

где

$$Q(\eta_1, \eta_2) \equiv P \left(\frac{\tau_2 \eta_1 + \tau_1 \eta_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}, \frac{\tau_2 \eta_2 - \tau_1 \eta_1}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \right),$$

то достаточно рассмотреть случай $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$.

Но в этом случае многочлен P не зависит от ξ_2 , $\text{ord} P \leq m$ и, следовательно,

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m B_j \xi_1^j \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где B_j , $j = 0, \dots, m$ – некоторые числа. Предложение доказано. $\square$

Обозначим через $r_j(t)$, $j = 2, \dots, n$ произвольный многочлен одной переменной $t \in R^1$, а через $q_j(t_1, \dots, t_j)$ – многочлен j ($2 \leq j \leq n$) переменных $t_k \in R^1$ ($k = 1, \dots, j$).

Предложение 1.4. Пусть для многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $q_j(\xi_1, \dots, \xi_j)$ и $r_j(\xi_j)$, $\text{ord} r_j > \text{ord}_j q_j$ ($j = 2, \dots, n$), существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(1.3) \quad |\xi_1| + \sum_{j=2}^n |r_j(\xi_j) + q_j(\xi_1, \dots, \xi_j)| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любых } \xi \in R^n,$$

тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть, наоборот, при выполнении оценки (1.3) существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$, $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$(1.4) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots$$

Из оценки (1.3) в силу (1.4) имеем, что существует постоянная $C_1 > 0$, для которого

$$|\xi_1^s| \leq C_1, \quad s = 1, 2, \dots$$

За счет выбора подпоследовательности можно считать, что

$$|\xi_j^s| \leq C_j, \quad s = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, k-1, \quad |\xi_k^s| \rightarrow \infty \text{ при } s \rightarrow \infty \ (k < n).$$

Тогда в силу условия предложения при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |r_k(\xi_k^s) + q_k(\xi_1^s, \dots, \xi_{k-1}^s, \xi_k^s)| &\geq |r_k(\xi_k^s)| - |q_k(\xi_1^s, \dots, \xi_{k-1}^s, \xi_k^s)| \geq \\ &\geq \varkappa_0 |\xi_k^s|^{\text{ord}_k} - \varkappa_1 |\xi_k^s|^{\text{ord}_k q_k} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa_0(r_k) > 0$, $\varkappa_1 = \varkappa_1(q_k, c_1, \dots, c_{k-1}) > 0$ некоторые постоянные. Это противоречит оценке (1.3). Предложение 1.4 доказано. $\square$

Предложение 1.5. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ почти гипоеллиптичен, то для любого j ($1 \leq j \leq n$) многочлен

$$P(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$$

также почти гипоеллиптичен.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Представим многочлен $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ порядка $m \geq 1$ в виде суммы однородных многочленов

$$(2.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi) \equiv \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Лемма 2.1. Пусть для почти гипоеллиптического многочлена P порядка $m \in \mathbb{N}$, представленного в виде (2.1), существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ и постоянная $C > 0$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$(2.2) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда для любой предельной точки τ последовательности $\{\tau^s\}_{s=1}^\infty = \{\xi^s / |\xi^s|\}_{s=1}^\infty$

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha R_m(\tau)| = 0, \quad \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha R_m(\tau)| \neq 0,$$

то есть $\tau \in \sum_m (R_m)$.

Доказательство. Пусть τ предельная точка последовательности $\{\tau^s\}_{s=1}^\infty$. Не умаляя общности, (за счет выбора подпоследовательности) можно считать, что $\tau^s \rightarrow \tau$ при $s \rightarrow \infty$.

Пусть $\alpha \in N_0^n$, $|\alpha| \leq m-1$, любой мультииндекс. Тогда в силу почти гипоеллиптичности многочлена P и оценки (2.2) с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} |D^\alpha R_m(\tau)| &= \lim_{s \rightarrow \infty} |D^\alpha R_m(\tau^s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| D^\alpha P(\xi^s) - \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} D^\alpha R_j(\xi^s) \right|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} \leq C_1 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(|P(\xi^s)| + 1)}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} + \\ &+ \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_j(\xi^s)|}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = \sum_{j=|\alpha|}^{m-1} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|D^\alpha R_j(\tau^s)| \cdot |\xi^s|^{j-|\alpha|}}{|\xi^s|^{m-|\alpha|}} = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условия $\text{ord} P = m$ существует мультииндекс $\beta \in N_0^n$, $|\beta| = m$, для которого $D^\beta R_m(\xi) = \text{const} \neq 0$. Этим утверждение леммы доказано. $\square$

Лемма 2.2. Для любого однородного многочлена $R_m \neq 0$ порядка m от n переменных

- I) $\sum_m (R_m)$ -линейное многообразие,
- II) $k \equiv \dim \sum_m (R_m) \leq n-1$,
- III) существует матрица T порядка $(n-k) \times n$, $\text{rank } T = n-k$, и однородный многочлен $n-k$ переменных $\tilde{Q}_m$ порядка m такие, что $R_m(\xi) = \tilde{Q}_m(T\xi)$.

Доказательство. Для доказательства пункта I) в силу однородности R_m достаточно показать, что $\tau^1 + \tau^2 \in \sum_m (R_m)$ при всех $\tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m)$.

Пусть

$$R_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \delta_\alpha \xi^\alpha \quad \text{и} \quad \tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m).$$

Тогда для любого мультииндекса $\beta \in N_0^n$, $|\beta| \leq m-1$, в силу формулы Тейлора из условия $\tau^1, \tau^2 \in \sum_m (R_m)$ имеем

$$\begin{aligned} D^\beta R_m(\tau^1 + \tau^2) &= \sum_{\gamma} \frac{D^{\gamma+\beta} R_m(\tau^1)}{\gamma!} (\tau^2)^\gamma = \sum_{|\gamma|=m-|\beta|} \delta_{(\beta+\gamma)} \frac{(\beta+\gamma)!}{\gamma!} (\tau^2)^\gamma = \\ &= \sum_{|\alpha|=m, \alpha \geq \beta} \delta_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} (\tau^2)^{\alpha-\beta} = D^\beta R_m(\tau^2) = 0. \end{aligned}$$

Так как $R_m \neq 0$, то $\tau^1 + \tau^2 \in \sum_m (R_m)$. Этим утверждение пункта I) доказано.

В силу пункта I) $\sum_m (R_m) \subset R^n$ – линейное многообразие и по условию леммы $R_m \neq 0$, то $k \leq n - 1$.

Докажем утверждение пункта III). При $k = 0$ утверждение непосредственно следует из пункта II) предложения 1.1.

Пусть $k \geq 1$, $\tau^1, \dots, \tau^k$ базис в $\sum_m (R_m)$, а $\tau^1, \dots, \tau^k, \tau^{k+1}, \dots, \tau^n$ базис в R^n и

$$V = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \dots & \tau_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^n & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det V \neq 0$, то V отображает R^n на R^n . Сделаем замену переменных $\xi = V^{-1}\eta$ и обозначим

$$Q_m(\eta) \equiv R_m(V^{-1}\eta) = R_m(\xi).$$

Согласно пункту II) предложения 1.1 Q_m является однородным многочленом порядка m , а в силу пункта III) предложения 1.1 и уже доказанного пункта I) леммы имеем

$$\sum_m (Q_m) = \{(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0); \eta_j \in R, j = 1, \dots, k\}.$$

Покажем, что из условия $e^1 \equiv (1, 0, \dots, 0) \in \sum_m (Q_m)$ следует, что

$$(2.3) \quad Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

По формуле Тейлора многочлен Q_m представим в виде

$$(2.4) \quad Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^m \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n$$

и по индукции покажем, что $D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$ при $j = 1, \dots, m$.

Так как $D_1^j Q_m$ однородный многочлен порядка $m-j$, то $D_1^j Q_m(0) = 0$ при $j \leq m-1$.

Поэтому из условия $e^1 \in \sum_m (Q_m)$, используя представление (2.4), имеем

$$0 = Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^m 1^j \frac{D_1^j Q_m(0)}{j!} = D_1^m Q_m(0).$$

Так как $\text{ord} Q_m = m$, то $D_1^m Q_m(\xi) \equiv \text{const}$. Следовательно,

$$D_1^m Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) = D_1^m Q_m(0) = 0 \quad \text{для любых } (\eta_2, \dots, \eta_n) \in R^{n-1}.$$

Тогда из представления (2.4) имеем

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Предположим, что $D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$ при всех j , $r \leq j \leq m$, ($r \geq 2$). Докажем, что $D_1^{r-1} Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) \equiv 0$. Из предположения индукции в силу представления (2.4) имеем

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^r \eta_1^j \frac{D_1^j Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n)}{j!} \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Так как $e^1 \in \sum_m(Q_m)$, то для любого мультииндекса $\beta = (0, \beta_2, \dots, \beta_n) \in N_0^n$, $|\beta| = m - r (\leq m - 1)$ имеем

$$0 = D^\beta Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^r 1^j \frac{D^\beta D_1^j Q_m(0)}{j!} = \frac{D^\beta D_1^r Q_m(0)}{r!}.$$

Так как для любого однородного многочлена R_ℓ порядка ℓ в силу формулы Эйлера

$$R_\ell(\xi) = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{D^\alpha R_\ell(0)}{\alpha!} \xi^\alpha \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

то отсюда имеем, что

$$D_1^r Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{|\beta|=m-r} \frac{D^\beta D_1^r Q_m(0)}{\beta!} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} = 0 \quad \text{для любых } (\eta_2, \dots, \eta_n) \in R^{n-1}.$$

Этим из представления (2.4) по индукции получаем

$$Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Так как $e^j \equiv (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \sum_m(Q_m)$ ($j = 1, \dots, k$), то аналогичным образом можно доказать, что

$$Q_m(\eta) = Q_m(0, \dots, 0, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \quad \text{для любого } \eta \in R^n.$$

Обозначим $\tilde{Q}_m(t_1, \dots, t_{n-k}) = Q_m(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k})$. Так как $\eta = V\xi$, то $(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n) = T\xi$, где

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1^{k+1} & \dots & \tau_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^n & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R_m(\xi) = \tilde{Q}_m(T\xi)$ при всех $\xi \in R^n$. Этим утверждение пункта III) доказано. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ эллиптический многочлен порядка $m > 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(2.5) \quad |\xi| \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi)| + 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^n.$$

Доказательство. Представим многочлен P в виде

$$\sum_{j=0}^m R_j(\xi),$$

где R_j -однородный многочлен порядка j ($j = 0, \dots, m$). Очевидно, оценка (2.5) эквивалентна следующей оценке

$$(2.6) \quad |\xi| \leq C_1 \left(\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\xi)| + 1 \right) \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

где $C_1 > 0$ некоторая постоянная.

Покажем справедливость оценки (2.6). Предположим обратное, что существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$ такая, что

$$(2.7) \quad |\xi^s| \rightarrow \infty, \quad \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|} \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Не умаляя общности, (за счет выбора подпоследовательности) можно считать, что последовательность $\tau^s = \xi^s / |\xi^s|$, $s = 1, 2, \dots$, сходится к некоторой точке τ , $|\tau| = 1$. Тогда в силу непрерывности многочленов и из (2.7) получаем

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\tau)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R_m(\tau^s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{|D^\alpha R_m(\xi^s)|}{|\xi^s|} = 0.$$

Так как в силу формулы Эйлера для однородных функций

$$R_m(\xi) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\xi) \xi^\alpha \quad \text{для любого } \xi \in R^n,$$

то отсюда получаем

$$R_m(\tau) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\tau) \tau^\alpha = 0,$$

что противоречит эллиптичности многочлена R_m . Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (2.6) и тем самым оценки (2.5). Лемма доказана. $\square$

3. Почти гипоеллиптические многочлены двух переменных

Лемма 3.1. Пусть

$$P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2), \quad m \in N, \quad D_2 P \neq 0 \quad (\text{ord}_2 P \geq 1),$$

$$j + \text{ord} r_j \leq m-1, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1),$$

почти гипоеллиптический многочлен. Тогда $P(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \infty$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу условия $j + \text{ord} r_j \leq m - 1$ ($j = 0, \dots, m - 1$) $r_{m-1}(\xi_2) \equiv \text{const}$, и из почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \frac{|D_1^{m-1} \xi_1^m|}{m!} = \frac{1}{m!} \left| D_1^{m-1} P(\xi_1, \xi_2) - D_1^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2) \right) \right| \leq \\ (3.1) \quad &\leq \frac{1}{m!} |D_1^{m-1} P(\xi_1, \xi_2)| + \frac{1}{m} |r_{m-1}(\xi_2)| \leq C_1 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1), \end{aligned}$$

для любых $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$. Так как для любого j , $0 \leq j \leq m - 1$, в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} \left| j! r_j(\xi_2) + \sum_{k=j+1}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} \xi_1^{k-j} r_k(\xi_2) + \frac{m!}{(m-j)!} \xi_1^{m-j} \right| &= |D_1^j P(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ &\leq C_2 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2 \end{aligned}$$

($\sum'$ считаем равным нулю при $j = m - 1$), то отсюда и из оценки (3.1) имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\begin{aligned} |\xi_1| + \left| j! r_j(\xi_2) + \sum_{k=j+1}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} \xi_1^{k-j} r_k(\xi_2) + \frac{m!}{(m-j)!} \xi_1^{m-j} \right| &\leq \\ (3.2) \quad &\leq C_3 (|P(\xi_1, \xi_2)| + 1) \quad \text{для любого } (\xi_1, \xi_2) \in R^2, j = 0, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

Пусть $r = \max_{0 \leq j \leq m-1} \text{ord} r_j$ и $j_0 = \max \{j; \text{ord} r_j = r\}$. В силу условия $D_2 P \neq 0$ леммы $r \geq 1$, а по определению $j_0 \text{ord} r_j < \text{ord} r_{j_0}$, $j = j_0 + 1, \dots, m - 1$. Поэтому из оценки (3.2) при $j = j_0$ и предложения 1.4 следует утверждение леммы. $\square$

Для любого $n \in N$ обозначим через I_n множество многочленов P n переменных, для которых $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Теорема 3.1. I) Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) \notin I_2$ почти гипоеллиiptический многочлен порядка m , для которого $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$, то есть $\text{ord}_1 P \geq 1$ и $\text{ord}_2 P \geq 1$. Тогда существуют числа $a, b \in R$, $a \cdot b \neq 0$, и многочлен Q одной переменной порядка m такие, что

$$(3.3) \quad P(\xi_1, \xi_2) = Q(a\xi_1 - b\xi_2) \quad \text{для любых } (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

II) Для любых $a, b \in R$, $a \cdot b \neq 0$, и многочлена Q одной переменной порядка $m \geq 1$ многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, определенный по формуле (3.3), является почти гипоеллиiptическим многочленом, $P \notin I_2$ и $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение пункта II). Очевидно, что любой многочлен одной переменной почти гипоеллиптичен. Поэтому в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, определенный по формуле (3.3), почти гипоеллиптичен.

При $a \cdot b \neq 0$ $P\left(\frac{s}{a}, \frac{s}{b}\right) = Q(0)$, $s = 1, 2, \dots$, и $\left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{s}{b}\right)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Следовательно, $P \notin I_2$.

Так как $DQ \neq 0$ ($m \geq 1$), то $D_1P \cdot D_2P = -ab(DQ)^2 \neq 0$.

Докажем утверждение пункта I). Представим многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi_1, \xi_2),$$

где R_j - однородный многочлен порядка j ($j = 0, \dots, m$). Так как $P \notin I_2$ почти гипоеллиптический многочлен, то в силу леммы 2.1 существует точка $\tau \in \sum_m(R_m)$ такая, что $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$.

Сначала покажем, что из условия $D_1P \cdot D_2P \neq 0$ следует, что $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Пусть, наоборот, $\tau_1 \cdot \tau_2 = 0$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $\tau = (0, 1)$. Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве представления (2.3), можно показать, что $R_m(\xi_1, \xi_2) = C'_m \xi_1^m$ при всех $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$, где $C'_m \neq 0$ ($\text{ord}P = m$). Следовательно, многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = C'_m \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j r_j(\xi_2),$$

где $j + \text{ord}r_j \leq m-1$, $j = 0, \dots, m-1$. Так как по условию теоремы $D_2P \neq 0$, то в силу леммы 3.1 получим, что $P \in I_2$. Полученное противоречие доказывает, что $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$.

Итак, имеем, что существует точка $\tau \in \sum_m(P_m)$, $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$ и $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Тогда в силу предложения 1.2 многочлен $R_m(\xi_1, \xi_2)$ представляется в виде

$$(3.4) \quad R_m(\xi_1, \xi_2) = C_m(\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^m \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где $C_m \neq 0$ ($\text{ord}P = m$) некоторая постоянная.

Обозначим $\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2 = \eta_1$, $\tau_2 \xi_1 + \tau_1 \xi_2 = \eta_2$ и положим

$$Q(\eta_1, \eta_2) = P\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2\tau_2}, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\tau_1}\right) \quad \text{для любого } (\eta_1, \eta_2) \in R^2.$$

Очевидно, что $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\eta| \rightarrow \infty$. Поэтому из условия теоремы $P \notin I_2$ следует, что $Q \notin I_2$.

На основании пункта II) предложения 1.1 и представления (3.4) многочлен Q можно представить в следующем виде

$$Q(\eta_1, \eta_2) = C_m \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \eta_1^j \tilde{r}_j(\eta_2),$$

где $j + \text{ord} \tilde{r}_j \leq m - 1$, $j = 0, \dots, m - 1$.

Так как многочлен Q в силу пункта I) предложения 1.1 почти гипоеллиптичен, то при $D_2 Q \neq 0$ согласно лемме 3.1 имеем, что $Q \in I_2$. Отсюда получаем, что

$$P(\xi_1, \xi_2) = Q(\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2, \tau_2 \xi_1 + \tau_1 \xi_2) \in I_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $D_2 Q = 0$, то есть $\tilde{r}_j(\eta_2) \equiv C_j$, $j = 0, \dots, m - 1$, где $C_j \in C$ ($j = 0, \dots, m - 1$) некоторые постоянные, и поэтому

$$Q(\eta_1, \eta_2) = \sum_{j=0}^m C_j \eta_1^j \text{ и } P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m C_j (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^j \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Теорема доказана. $\square$

4. ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лемма 4.1. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен с постоянными коэффициентами можно представить в виде

$$(4.1) \quad P(\xi) = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j P_j(\xi_2, \xi_3),$$

где $m \in N$ и

$$(4.2) \quad P_0(\xi_2, \xi_3) = \sum_{j=0}^{m_1} B_j (a\xi_2 - b\xi_3)^j, \quad m_1 \in N, \quad a, b \in R, \quad B_j \in C \quad (j = 0, \dots, m_1).$$

Тогда многочлен P ограничен при ограниченных $|\xi_1| + |a\xi_2 - b\xi_3|$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$.

Доказательство. Сначала заметим, что если многочлен P вида (4.1) почти гипоеллиптичен, то существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$(4.3) \quad |P_j(\xi_2, \xi_3)| = \frac{|D_1^j P(0, \xi_2, \xi_3)|}{j!} \leq C_1 (|P(0, \xi_2, \xi_3)| + 1) = \\ = C_1 (|P_0(\xi_2, \xi_3)| + 1) \quad (\xi_2, \xi_3) \in R^2, \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Из оценки (4.3) и представления (4.2) в силу предложения 1.3 имеем с некоторыми числами $A_{k,j} \in C$, $k = 0, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m - 1$

$$(4.4) \quad P_j(\xi_2, \xi_3) = \sum_{k=0}^{m_1} A_{k,j} (a\xi_2 - b\xi_3)^k \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Тогда для любого $d > 0$ при всех $\xi \in R^3$ таких, что $|\xi_1| + |a\xi_2 - b\xi_3| \leq d$, в силу (4.2), (4.4) и представления (4.1) имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| &\leq |\xi_1|^m + \sum_{j=0}^{m-1} |\xi_1|^j |P_j(\xi_2, \xi_3)| \leq \\ &\leq d^m + \sum_{j=1}^{m-1} d^j \sum_{k=0}^{m_1} |A_{k,j}| d^k + \sum_{k=0}^{m_1} |B_k| d^k < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \notin I_3$ почти гипоеллиiptический многочлен вида (4.1), для которого $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1$. Тогда многочлены $P_j(\xi_2, \xi_3)$, $j = 0, \dots, m-1$, представляются в виде (4.4).

Доказательство. Из условия $P \notin I_3$ имеем, что существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^3$ и постоянная $C > 0$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$(4.5) \quad |P(\xi^s)| \leq C, \quad s = 1, 2, \dots,$$

а из условия $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m-1$ леммы имеем

$$(4.6) \quad P_{m-1}(\xi_2, \xi_3) = \text{const} \quad (\xi_2, \xi_3) \in R^2.$$

Покажем, что при условиях леммы многочлены P_j , $j = 1, \dots, m-1$, ограничены на последовательности $\{(\xi_2^s, \xi_3^s)\}_{s=1}^\infty$, то есть для любого $j = 1, \dots, m-1$ существует постоянная $C_j > 0$ такая, что

$$(4.7) \quad |P_{m-j}(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq C_j, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Оценку (4.7) докажем методом индукции по j . При $j = 1$ оценка (4.7) следует из (4.6). Пусть оценка (4.7) верна при $j \leq r$ ($1 \leq r \leq m-2$). Докажем его для $j = r+1$. Из условия почти гипоеллиiptичности многочлена P для любого $j \geq 1$ в силу оценки (4.5) с некоторой постоянной $d_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{m!}{(m-j)!} (\xi_1^s)^{m-j} + \frac{(m-1)!}{(m-1-j)!} (\xi_1^s)^{m-1-j} P_{m-1}(\xi_2^s, \xi_3^s) + \dots + j! P_{m-j}(\xi_2^s, \xi_3^s) \right| = \\ (4.8) \quad &= \left| D_1^j P(\xi^s) \right| \leq d_1 (|P(\xi^s)| + 1) \leq d_1 (C + 1), \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Из (4.8) при $j = m-1$ в силу (4.6) имеем с некоторой постоянной $d_2 > 0$

$$(4.9) \quad |\xi_1^s| \leq d_2, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда из (4.8) при $j = r + 1$ в силу предположения индукции и оценки (4.9) имеем с некоторой постоянной $d_3 > 0$

$$\begin{aligned} (r+1)! |P_{m-(r+1)}(\xi_2^s, \xi_3^s)| &\leq d_1 (C+1) + \frac{m!}{(m-(r+1))!} |\xi_1^s|^{m-(r+1)} + \\ &+ \frac{(m-1)!}{(m-1-(r+1))!} |\xi_1^s|^{m-1-(r+1)} |P_{m-1}(\xi_2^s, \xi_3^s)| + \dots + \\ &+ \frac{(r+2)!}{2!} |\xi_1^s| |P_{m-r}(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq d_1 (C+1) + \frac{m!}{(m-(r+1))!} d_2^{m-(r+1)} + \\ &+ \frac{(m-1)!}{(m-1-(r+1))!} d_2^{m-1-(r+1)} C_1 + \dots + \frac{(r+2)!}{2!} d_2 C_r \leq d_3, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку (4.7) при $j = r + 1$ с постоянной $C_{r+1} = d_3/(r+1)!$. Этим по методу индукции оценка (4.7) доказана.

Из представления (4.1) многочлена P в силу оценок (4.5), (4.7) и (4.9) имеем с некоторой постоянной $C_m > 0$

$$\begin{aligned} |P_0(\xi_2^s, \xi_3^s)| &\leq |P(\xi^s)| + |\xi_1^s|^m + \sum_{j=1}^{m-1} |\xi_1^s|^j |P_j(\xi_2^s, \xi_3^s)| \leq \\ (4.10) \quad &\leq C + d_2^m + \sum_{j=1}^{m-1} d_2^j C_j \leq C_m, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то в силу (4.9) $(\xi_2^s)^2 + (\xi_3^s)^2 \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда из (4.10) в силу предложения 1.1 и теоремы 1.1 при $D_2 P_0 \cdot D_3 P_0 \neq 0$ ($\text{ord}_2 P_0 \geq 1$, $\text{ord}_3 P_0 \geq 1$) имеем, что многочлен P_0 представляется в виде (4.2), где $a \cdot b \neq 0$. Так как при условиях леммы с некоторой постоянной $d_4 > 0$ (см. оценку (4.3))

$$(4.11) \quad |P_j(\xi_2, \xi_3)| \leq d_4 (|P_0(\xi_2, \xi_3)| + 1) \quad \text{для любого } (\xi_2, \xi_3) \in R^2,$$

то в силу предложения 1.3 многочлены P_j , $j = 1, \dots, m-1$, представляются в виде (4.4).

Если же $D_2 P_0 \cdot D_3 P_0 = 0$, то в силу аналитичности многочленов либо $D_2 P_0 = 0$, либо $D_3 P_0 = 0$, либо $D_2 P_0 = 0$ и $D_3 P_0 = 0$. Если $D_2 P_0 = 0$, то есть $P_0(\xi_2, \xi_3) = P_0(0, \xi_3)$ при всех $(\xi_2, \xi_3) \in R^2$, то из оценки (4.11) следует, что

$$P_j(\xi_2, \xi_3) = P_j(0, \xi_3), \quad j = 1, \dots, m-1,$$

при всех $(\xi_2, \xi_3) \in R^2$.

Следовательно, многочлены P_j представляются в виде (4.4) с $a = 0$, $b \neq 0$. Утверждение леммы в случаях $D_3 P_0 = 0$ или $D_2 P_0 = 0$ и $D_3 P_0 = 0$ доказывается

аналогичным образом с $a \neq 0, b = 0$ или с $a = 0, b = 0$ соответственно. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 4.1 и 4.2 непосредственно следует:

Следствие 4.1. *Для того, чтобы почти гипозеллиптический многочлен P вида (4.1) с $\text{ord}(P - \xi_1^m) \leq m - 1$ не принадлежал I_3 , необходимо и достаточно, чтобы многочлены $P_j, j = 0, \dots, m - 1$, представлялись в виде (4.4).*

Предложение 4.1. *Пусть $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ многоугольник, лежащий в $\{\nu \in \mathbb{R}_+^2, |\nu| \leq m\}$, для которого существует мультииндекс $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^2$ такой, что $|\alpha| = m$. Если для любого $\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, |\beta| = m, \beta_1 \geq 1 (\beta_2 \geq 1)$, то существует $\gamma \in \mathfrak{R} \cap N_0^2$, для которого*

$$B(\gamma) \equiv \{\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, \beta \geq (\gamma_1 - 1, \gamma_2)\} \subset \{(\gamma_1 - 1, \gamma_2), \gamma\} \equiv D(\gamma)$$

$$(B(\gamma) \equiv \{\beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, \beta \geq (\gamma_1, \gamma_2 - 1)\} \subset \{(\gamma_1, \gamma_2 - 1), \gamma\} \equiv D(\gamma)).$$

Доказательство. Пусть $r = \min\{\beta_1, \beta \in \mathfrak{R} \cap N_0^2, |\beta| = m\}$. Из условия предложения имеем, что $r \geq 1$. С другой стороны, в силу определения числа r имеем, что

(4.12)

$$\gamma \equiv (r, m - r) \in \mathfrak{R} \cap N_0^2 \text{ и } (\beta_1, m - \beta_1) \notin \mathfrak{R}, \text{ для любого } \beta_1 \in N_0, \beta_1 \leq r - 1.$$

Покажем, что $B(\gamma) \setminus D(\gamma) = \emptyset$. Пусть, наоборот, существует мультииндекс $\beta \in B(\gamma) \setminus D(\gamma)$. Из условия $\beta \in B(\gamma)$ ($B(\gamma) \subset \mathfrak{R}$) имеем $r - 1 \leq \beta_1 \leq r, m - r \leq \beta_2 \leq m - r + 1$. Так как $(r, m - r + 1) \notin \mathfrak{R}$, то из условия $\beta \in B(\gamma) \setminus D(\gamma)$ имеем, что $\beta = (r - 1, m - r + 1) \in \mathfrak{R}$. Это противоречит (4.12) и доказывает, что $B(\gamma) \subset D(\gamma)$. Предложение доказано. $\square$

Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha \in (P)} \delta_\alpha \xi^\alpha$ порядка $m \geq 2$ представляется в виде

$$(4.13) \quad P(\xi) = R_m(\xi_1, \xi_2) + \sum_{j=0}^r \xi_3^j P_j(\xi_1, \xi_2),$$

где $1 \leq r \leq m - 1$,

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, 0) \in (P), \alpha_1 + \alpha_2 = m} \delta_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \equiv \sum_{\alpha \in (R_m)} \delta_{(\alpha, 0)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$$

однородный многочлен порядка m , $D_1 R_m \cdot D_2 R_m \neq 0$ ($\text{ord}_1 R_m \geq 1, \text{ord}_2 R_m \geq 1$), $P_r \neq 0, \text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$.

Лемма 4.3. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоэллиптический многочлен представляется в виде (4.13). Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$ ($\delta_{(m,0,0)} \cdot \delta_{(0,m,0)} = 0$), то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ характеристический многогранник многочлена P , а $\mathfrak{R}_0$ его проекция на плоскость $\alpha_3 = 0$.

Так как характеристический многогранник почти гипоэллиптического многочлена правильный (см. [4]), то

$$\mathfrak{R}_0 = \{(\nu_1, \nu_2, 0) \in \mathfrak{R}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} = \{(\nu_1, \nu_2); (\nu_1, \nu_2, 0) \in \mathfrak{R}_0\} = \mathfrak{R}(R_m + P_0).$$

Очевидно, многоугольник $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям многоугольника $\mathfrak{R}$ предложения 4.1. Ради определенности (см. условие леммы) будем считать, что $R_m(0, 1) = 0$ ($\delta_{(0,m,0)} = 0$). Следовательно, если $(\beta_1, m - \beta_1) \in \mathfrak{R}$, то $\beta_1 \geq 1$. Тогда в силу предложения 4.1 существует мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{M}$, $|\gamma| = m$ такой, что $B(\gamma) \subset D(\gamma)$ (обозначения см. в предложении 4.1).

Так как в силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ $D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P_j(\xi_1, \xi_2) \equiv 0$, $j = 1, \dots, m - 1$, и для некоторого C_1 $D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P_0(\xi_1, \xi_2) \equiv C_1$, то

$$(4.14) \quad D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P(\xi) = D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} R_m(\xi_1, \xi_2) + C_1 \quad \text{для всех} \quad \xi \in R^3.$$

В силу предложения 4.1 $B(\gamma) \subset D(\gamma)$ и, очевидно, что $\{\gamma\} = D(\gamma) \cap (R_m)$. Поэтому

$$\begin{aligned} D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} R_m(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{\beta \in B(\gamma) \cap (R_m)} \delta_{(\beta,0)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta_1 - \gamma_1 + 1)! (\beta_2 - \gamma_2)!} \xi_1^{\beta_1 - \gamma_1 + 1} \xi_2^{\beta_2} = \\ &= \sum_{\beta \in D(\gamma) \cap (R_m)} \delta_{(\beta,0)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta_1 - \gamma_1 + 1)! (\beta_2 - \gamma_2)!} \xi_1^{\beta_1 - \gamma_1 + 1} \xi_2^{\beta_2} = \delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1. \end{aligned}$$

Поскольку в силу определения мультииндекса γ $\delta_{(\gamma,0)} \neq 0$, то отсюда, из (4.14) и почти гипоэллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \left| \frac{\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1}{\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!} \right| \leq \frac{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_1 + C_1| + |C_1|}{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!|} = \\ (4.15) \quad &= \frac{|D_1^{\gamma_1-1} D_2^{\gamma_2} P(\xi)| + |C_1|}{|\delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma!|} \leq C_2 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{для всех} \quad \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_1 + (\gamma_2 - 1) = m - 1$, то в силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} D_1^{\gamma_1} D_2^{\gamma_2-1} P(\xi) &= D_1^{\gamma_1} D_2^{\gamma_2-1} R_m(\xi_1, \xi_2) + C_3 = \\ &= \delta_{(\gamma,0)} \cdot \gamma! \xi_2 + \delta_{(\gamma_1+1, \gamma_2-1, 0)} \cdot (\gamma_1 + 1)! (\gamma_2 - 1)! \xi_1 + C_3 \quad \forall \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$(4.16) \quad |\xi_2 + d_1 \xi_1| \leq C_4 (|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^3,$$

где $d_1 = (\gamma_1 + 1) \delta_{(\gamma_1+1, \gamma_2-1, 0)} / \gamma_1 \delta_{(\gamma, 0)}$.

Так как $P_r \neq 0$, то существует мультииндекс $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ и постоянная $C_5 \neq 0$ такая, что

$$D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} P_r(\xi_1, \xi_2) = C_5 \quad \text{при всех} \quad (\xi_1, \xi_2) \in R^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D^\beta D_3^{r-1} P(\xi) &= D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) + \sum_{j=r-1}^r D_3^{r-1} \xi_3^j D^\beta P_j(\xi_1, \xi_2) = \\ &= r! C_5 \xi_3 + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Отсюда ($C_5 \neq 0$) в силу почти гипоеллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $C_6 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} &|\xi_3 + d_2 D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + d_3 D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ (4.17) \quad &\leq C_6 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^3, \end{aligned}$$

где $d_2 = 1/rC_5$, $d_3 = 1/r!C_5$.

Из оценок (4.15)-(4.17) с некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} &|\xi_1| + |\xi_2 + d_1 \xi_1| + |\xi_3 + d_2 D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + d_3 D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ &\leq C_7 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу предложения 1.4 непосредственно получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. $\square$

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.4. Пусть для почти гипоеллиптического многочлена P вида (4.13) вместо условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ выполняется условие $\text{ord} P_j \leq m - 2$, $j = 1, \dots, r$. Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$, то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Лемма 4.5. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиптический многочлен вида (4.13), где $R_m(\xi_1, \xi_2)$ однородный эллиптический многочлен. Тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу условия $\text{ord}(P - R_m) \leq m - 1$ имеем, что

$$(4.18) \quad \sum_{j=1}^r |D^\alpha P_j(\xi_1, \xi_2)| \equiv 0$$

$$(4.19) \quad D^\alpha P_0(\xi_1, \xi_2) \equiv C_\alpha,$$

для любого $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$, и любого $\alpha \in N_0^2$, $|\alpha| = m - 1$.

Из условия почти гипоеллиптичности многочлена P в силу (4.18) и (4.19) имеем с некоторой постоянной $d_1 > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} R_m(\xi_1, \xi_2)| = \\ & = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P(\xi) - D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P_0(\xi_1, \xi_2)| \leq \\ & \leq \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} P(\xi)| + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m-1} |C_{\alpha_1, \alpha_2}| \leq d_1 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех } \xi \in R^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 2.3 с некоторой постоянной $d_2 > 0$ имеем, что

$$(4.20) \quad |\xi_1| + |\xi_2| \leq d_2 (|P(\xi)| + 1) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Так как $P_r \neq 0$, то существуют мультииндекс $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ и постоянная $\varkappa \neq 0$ такие, что $D^\beta P_r(\xi_1, \xi_2) \equiv \varkappa$. Тогда из почти гипоеллиптичности многочлена P в силу того, что

$$\begin{aligned} D^\beta D_3^{r-1} P(\xi) &= \xi_3 r! D^\beta P_r(\xi_1, \xi_2) + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) = \xi_3 r! \varkappa + (r-1)! D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) \quad \text{при всех } \xi \in R^3, \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $d_3 > 0$, при всех $\xi \in R^3$, имеем

$$\left| \xi_3 + \frac{1}{r\varkappa} D^\beta P_{r-1}(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{r!\varkappa} D^\beta D_3^{r-1} R_m(\xi_1, \xi_2) \right| \leq d_3 (|P(\xi)| + 1).$$

Отсюда и из оценки (4.20) в силу предложения 1.3 получаем утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.6. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен вида (4.13), для которого $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$, $\sum (R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ и $\sum_m (R_m) = \{0\}$. Тогда $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \sum (R_m) \setminus \{0\}$. Тогда в силу предложения 1.2 многочлен R_m можно представить в следующем виде

$$R_m(\xi_1, \xi_2) = (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^k R_{m-k}(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

где $1 \leq k < m$ ($0 \neq \tau \in \sum (R_m) \setminus \sum_m (R_m)$) порядок нуля многочлена R_m в точке τ , R_{m-k} - однородный многочлен порядка $m-k$ и $R_{m-k}(\tau) \neq 0$.

Так как $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$, то $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0$. Тогда в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен

$$Q(\eta) = Q(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = P\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2\tau_2}, \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\tau_1}, \eta_3\right)$$

почти гипоеллиптичен.

Из представления (4.13) многочлена P в силу пункта II) предложения 1.1 следует, что многочлен Q можно представить в следующем виде

$$Q(\eta) = Q_m(\eta_1, \eta_2) + \sum_{j=0}^{r_1} \eta_3^j q_j(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^k Q_{m-k}(\eta_1, \eta_2) + \sum_{j=0}^{r_1} \eta_3^j q_j(\eta_1, \eta_2),$$

где $r_1 \in N$, Q_{m-k} - однородный многочлен порядка $m-k$, $q_{r_1} \neq 0$ и $\text{ord}(Q - Q_m) \leq m-1$. Так как в силу пункта III) предложения 1.1 порядок нуля многочлена R_m равно k , при этом $k < m$, то $\text{ord}_2 Q_m \geq 1$. Поэтому, учитывая также, что $Q_m(0, 1) = 0$ и $\text{ord}_1 Q_m \geq 1$, в силу леммы 4.3 имеем, что $Q(\eta) \rightarrow \infty$ при $|\eta| \rightarrow \infty$. Так как $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\eta| \rightarrow \infty$, то отсюда получаем утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.1. *Для того, чтобы почти гипоеллиiptический многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $D_1 P \cdot D_2 P \cdot D_3 P \neq 0$ ($\text{ord}_j P \geq 1$, $j = 1, 2, 3$), не принадлежал множеству I_3 , необходимо и достаточно, чтобы существовали почти гипоеллиiptический многочлен $Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $D_1 Q \cdot D_2 Q \cdot D_3 Q = 0$ (то есть многочлен Q на самом деле зависит от одного или двух переменных) и невырожденная матрица T порядка 3×3 такие, что*

$$P(\xi) = Q(T\xi) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ почти гипоеллиiptический многочлен, $D_1 Q \cdot D_2 Q \cdot D_3 Q = 0$, $T = (t_{ij})$ невырожденная матрица порядка 3×3 и $P(\xi) = Q(T\xi)$. Тогда в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен P почти гипоеллиiptичен. Ради определенности предположим, что $D_1 Q = 0$,

то есть $Q(\eta) = Q(0, \eta_2, \eta_3)$ при всех $\eta \in R^3$. Пусть $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такое решение системы

$$\begin{cases} t_{21}\xi_1 + t_{22}\xi_2 + t_{23}\xi_3 = 0 \\ t_{31}\xi_1 + t_{32}\xi_2 + t_{33}\xi_3 = 0 \end{cases},$$

что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Существование таких решений очевидно.

Обозначим через $\eta_2^s = t_{21}\xi_1^s + t_{22}\xi_2^s + t_{23}\xi_3^s$, $\eta_3^s = t_{31}\xi_1^s + t_{32}\xi_2^s + t_{33}\xi_3^s$, $s = 1, 2, \dots$

Тогда $P(\xi^s) = Q(T\xi^s) = Q(0, \eta_2^s, \eta_3^s) = Q(0)$, $s = 1, 2, \dots$, то есть $P \notin I_3$.

Необходимость. Пусть $m \equiv \text{ord} P = 1$, то есть $P(\xi) = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + d$, $abc \neq 0$.

Очевидно, существуют $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \neq 0$ такие, что $h_1a + h_2b + h_3c = 0$.

Для определенности $h_1 \neq 0$, $(h_1 = 1)$. Тогда $P(\xi) = b(-h_2\xi_1 + \xi_2) + c(-h_3\xi_1 + \xi_3) + d$ и $P \notin I_3$. Обозначим

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h_2 & 1 & 0 \\ -h_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T\xi = \eta.$$

Тогда $P(\xi) = Q(\eta)|_{\eta=T\xi} = Q(T\xi)$. Так как любой многочлен первого порядка почти гипоеллиптичен, то этим утверждение теоремы для многочленов первого порядка доказана.

Пусть для почти гипоеллиптического многочлена $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \notin I_3$ $m \geq 2$. Представим многочлен $P(\xi)$ в следующем виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m R_j(\xi),$$

где R_j — однородный многочлен порядка j , $j = 0, \dots, m$. Из условия теоремы в силу леммы 2.1 имеем, что $\sum_m (R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующие возможные случаи (см. пункт II) леммы 2.2):

I) $\dim \sum_m (R_m) = 2$, II) $\dim \sum_m (R_m) = 1$.

Пусть в случае I) τ^1, τ^2 базис в $\sum_m (R_m)$, а τ^1, τ^2, τ^3 базис в R^3 . Обозначим через T_1 матрицу

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 & \tau_3^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \tau_3^2 \\ \tau_1^3 & \tau_2^3 & \tau_3^3 \end{pmatrix}^{-1}$$

и положим $Q(\xi) = P(T_1\xi)$. Так как T_1 отображает R^3 на R^3 , то $Q(T_1^{-1}\xi) = P(\xi)$. В силу пункта I) предложения 1.1 многочлен Q почти гипоеллиптичен, а в силу пункта III) леммы 2.2 и пункта II) предложения 1.1 многочлен Q можно представить в следующем виде

$$(4.21) \quad Q(\xi) = d\xi_3^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_3^j Q_j(\xi_1, \xi_2) \quad \forall \xi \in R^3,$$

где $d \neq 0$, $\text{ord}(Q - d\xi_3^m) \leq m - 1$.

Так как $P \notin I_3$, и $|T\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q \notin I_3$.

Из представления (4.21) и условий $Q \notin I_3$, $\text{ord}(Q - d\xi_3^m) \leq m - 1$ в силу следствия 4.1 имеем, что многочлен Q представляется в следующем виде

$$Q(\xi) = d\xi_3^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_3^j \sum_{k=0}^{m-1-j} A_{k,j} (a\xi_1 - b\xi_2)^k,$$

где $A_{k,j} \in C$, $k = 0, \dots, m - 1 - j$, $j = 0, \dots, m - 1$, некоторые числа.

Отсюда непосредственно следует необходимая часть теоремы в случае I).

Рассмотрим случай II). Пусть $0 \neq \tau^1 \in \sum_m(R_m)$ и τ^1, τ^2, τ^3 базис в R^3 . Тогда в силу пункта III) леммы 2.2 и пункта II) предложения 1.1 многочлен $Q(\xi) = P(T_1\xi)$ можно представить в следующем виде

$$Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_1^j q_j(\xi_2, \xi_3),$$

где R_m - однородный многочлен порядка m , $D_2R_m \cdot D_3R_m \neq 0$ (случай II) и $\text{ord}(Q - R_m) \leq m - 1$.

Пусть для некоторого $1 \leq r \leq m - 1$, $q_r \neq 0$, $q_j = 0$, $j = r + 1, \dots, m - 1$. Тогда

$$(4.22) \quad Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + \sum_{j=0}^r \xi_1^j q_j(\xi_2, \xi_3), \quad q_r \neq 0, \quad D_2R_m \cdot D_3R_m \neq 0.$$

Из условия почти гипоеллиптичности многочлена P в силу пункта I) предложения 1.1 многочлен Q почти гипоеллиптичен. Так как $P \notin I_3$, и $|T_1\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q \notin I_3$.

Если R_m эллиптический многочлен, то в силу леммы 4.5 $Q(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, что противоречит вышесказанному.

Если $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) \neq 0$ и R_m не эллиптивен, то $\sum(R_m) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ и $\sum_m(R_m) = \{0\}$ (случай II), тогда противоречие вышесказанному следует из леммы 4.6.

Если же $R_m(1, 0) \cdot R_m(0, 1) = 0$, то противоречие с условием теоремы получим в силу леммы 4.3. Полученные противоречия доказывают, что при условиях теоремы в случае II) $r = 0$ (см. представление (4.22)), то есть

$$Q(\xi) = R_m(\xi_2, \xi_3) + q_0(\xi_2, \xi_3) \quad \text{при всех } \xi \in R^3.$$

Следовательно, $D_1Q = 0$. Так как матрица T_1 обратима, то этим утверждение необходимой части теоремы в случае II) также доказана. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 4.1 непосредственно следует

Следствие 4.2. *Почти гипозэллиптический многочлен P не более трех переменных стремится к бесконечности при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда не существуют многочлен Q $r \leq n - 1$ переменных и матрица T размерности $r \times n$ такие, что*

$$P(\xi) = Q(T\xi) \quad \text{при всех } \xi \in R^n.$$

Abstract. The paper gives criteria for almost hypoelliptic polynomials of two and three variables, providing that $P(\xi) \rightarrow \infty$ as $|\xi| \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer-Verlag (1983).
- [2] I. G. Petrowsky, "Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles", Rec. Math N. S., **5**(47), no. 1, 3 - 70 (1939).
- [3] L. Hörmander, "On interior regularity of solutions of partial differential equations", Comm. Pure. Appl. Math., **11**, 197 - 218 (1956).
- [4] Г. Г. Казарян, "О почти гипозэллиптических многочленах", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 - 703 (2004).
- [5] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипозэллиптических операторов", Изв. НАН Арм., **41**, no. 6, 39 - 56 (2006).
- [6] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **150**, no. 4, 143 - 159 (1965).
- [7] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
- [8] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of polynomials of two variable", Kluwer Acad. Publ. NATO Since Series. Dordrecht-Boston-London, Topics in Analysis an Applications, 163 - 190 (2004).

Поступила 26 мая 2010

BIVARIATE MEAN VALUE INTERPOLATION ON CIRCLES

KHEIROLLAH RAHSEPAR FARD

Department of Computer Engineering, Qom University, Qom, Iran
E-mail: rahseparfard@gmail.com

Abstract. In this paper we prove that the bivariate mean-value interpolation problem, where part of the interpolation parameters are integrals over concentric circles is not poised.

MSC2010 number: 13F20, 11C08

Keywords: Bivariate polynomials, poised interpolation, mean-value interpolation.

1. INTRODUCTION

Denote by $\Pi_n = \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ the space of bivariate polynomials of total degree not exceeding n

$$\Pi_n = \left\{ p(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j : i, j \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Set

$$N := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Let

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}^{(n)} = \{D_k : k = 1, \dots, N\}$$

be a collection of Lebesgue measurable sets of finite nonzero measure.

In this paper the following mean-value interpolation problem is considered.

Find a unique polynomial $p \in \Pi_n$ whose mean-values over the sets D_k are equal to given numbers c_k , $k = 1, \dots, N$

$$(1.1) \quad \frac{1}{\mu(D_k)} \int \int_{D_k} p(x, y) dx dy = c_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

where μ is the Lebesgue measure. Denote this interpolation problem by $(\Pi_n, \mathbb{D})$. More precisely we consider the mean-value interpolation problem (1.1), where part of sets of $\mathbb{D}$ are concentric circles.

Definition 1.1. *The mean-value interpolation problem $(\Pi_n, \mathbb{D})$ is poised if for any real values $c_k, k = 1, \dots, N$, there exists a unique polynomial $p \in \Pi_n$ satisfying the conditions (1.1).*

In the sequel we will use the following well known

Proposition 1.1. *The mean-value interpolation problem $(\Pi_n, \mathbb{D})$ is poised if and only if*

$$p \in \Pi_n, \int \int_{D_k} p(x, y) dx dy = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad \text{implies} \quad p = 0.$$

It is worth mentioning that in the case when $\mathbb{D}$ is a set of circles with the same radius, i.e.

$$\mathbb{D} = \mathbb{B} := \{B_{\mathbf{a}_i, r} : i = 1, \dots, N\}$$

where $B_{\mathbf{a}_i, r}$, is the circle of radius $r \in \mathbb{R}_+$ centered at $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$ then the following

Theorem 1.1. *(see [4]) The mean-value interpolation problem $(\Pi_n, \mathbb{B})$ is poised if and only if the pointwise Lagrange interpolation with Π_n and the centers of circles of $\mathbb{B}$ is poised.*

In the next section we use the following

Theorem 1.2. *(see [2]) The mean-value interpolation problem $(\Pi_1, \mathbb{D}^{(1)})$ is poised if and only if the centroids of sets of $\mathbb{D}^{(1)}$ are not collinear.*

For some other versions of mean-value interpolation problem we refer to [1 - 4].

2. THE RESULT

Denote by $[x]$ the greatest integer not exceeding x .

Theorem 2.1. *Suppose that among the regions of interpolation problem $(\Pi_n, \mathbb{D})$ there are $[\frac{n}{2}] + 2$ concentric circles, where $n \geq 1$. Then the mean-value interpolation problem $(\Pi_n, \mathbb{D})$ is not poised.*

To prove Theorem 2.1 we use the following lemma.

Lemma 2.1. *If Theorem 2.1 is true for $n = 2k$, then it is true also for $n = 2k + 1$.*

Proof. Assuming that the parameters related to the concentric circles are linearly dependent in the case $n = 2k$, i.e.,

$$(2.1) \quad \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} p dx dy = 0, \quad \text{for any } p \in \Pi_{2k},$$

where not all c_l are zero, we establish a similar dependence in the case $n = 2k + 1$. Without loss of generality we assume that the concentric circles are centered at the origin. For any $p \in \Pi_{2k+1}$ we set

$$p(x, y) = \sum_{i+j=2k+1} a_{ij} x^i y^j + q(x, y),$$

where $q \in \Pi_{2k}$. Then we have

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} p(x, y) dx dy &= \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} a_{2k+1,0} x^{2k+1} dx dy + \dots + \\ &+ \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} a_{0,2k+1} y^{2k+1} dx dy + \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} q(x, y) dx dy = \\ &= 0 + \dots + 0 + \sum_{l=1}^{k+2} c_l \int \int_{D_l} q(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

In the last equality we used (2.1). $\square$

Proof of Theorem 2.1. First let $n = 1$. In this case, the interpolation is not poised since according to Theorem 1.2, the center of two concentric circles along with the center of third circle are on a straight line.

Now in view of Lemma 2.1, it is sufficient to assume that $n = 2k$ where $n > 1$.

According to Proposition 1.1 it is enough to show that there exists some $p \in \Pi_n$ with

$$(2.2) \quad \int \int_{D_l} p(x, y) dx dy = 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad p \neq 0.$$

Here we assume that $D_l := B_{\mathbf{0}, r_l}$, $l = 1, \dots, k+2$, are the concentric circles with radii r_l centered at $(0, 0)$, while the remaining $N - (k+2)$ regions are arbitrary.

Let $p(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$ then we have

$$\begin{aligned} \int \int_{D_l} p(x, y) dx dy &= r_l^2 \int \int_{D: x^2+y^2 \leq 1} p(r_l x, r_l y) dx dy = \\ &= r_l^2 \int \int_D \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j r_l^{i+j} dx dy = r_l^2 \sum_{i+j \leq n} r_l^{i+j} a_{ij} \int \int_D x^i y^j dx dy. \end{aligned}$$

Using the fact that the integral of a monomial $x^i y^j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ over circles D_l , $l = 1, \dots, k+2$ vanish if i or j is odd, we get

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \int \int_{D_l} p(x, y) dx dy &= \pi r_l^2 [a_{0,0}] r_l^0 + \frac{\pi r_l^2}{4} r_l^2 [a_{2,0} + a_{0,2}] + \dots \\ &+ r_l^{2k+2} \left[a_{2k,0} \int \int_D x^{2k} dx dy + a_{2k-2,2} \int \int_D x^{2k-2} y^2 dx dy + \dots + a_{0,2k} \int \int_D y^{2k} dx dy \right]. \end{aligned}$$

Now consider the following homogeneous linear system with left-hand sides coincide with the above expressions in brackets:

$$a_{0,0} = 0$$

$$a_{2,0} + a_{0,2} = 0$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$a_{2k-2,0} \int \int_D x^{2k-2} dx dy + \cdots + a_{0,2k-2} \int \int_D y^{2k-2} dx dy = 0$$

$$a_{2k,0} \int \int_D x^{2k} dx dy + \cdots + a_{0,2k} \int \int_D y^{2k} dx dy = 0.$$

Next we add to this system the homogeneous conditions over the remaining $N - (k+2)$ arbitrary regions:

$$\int \int_{D_l} p(x, y) dx dy = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} \int \int_{D_l} x^i y^j = 0, \quad l = k+3, \dots, N.$$

The resulting system has $N - 1$ equations and N unknowns which are the coefficients of p . Therefore it has a non-trivial solution. It is easily seen that the polynomial with these coefficients satisfies (2.3). Hence the problem is not poised. $\square$

Acknowledgement. I am grateful to my adviser Professor Hakop Hakopian for his very helpful suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Bojanov, H. Hakopian and A. Sahakian, Spline Functions and Multivariate Interpolation, Kluwer Academic Publishers (1993).
- [2] G. Ktryan, "Bivariate interpolation by integrals", Physical And Mathematical Sciences, Proceedings of the Yerevan State University, **2**, 26 - 32 (2009).
- [3] Kh. Rahsepar Fard, "An approach to interpolation by integration", Physical And Mathematical Sciences, Proceedings of the Yerevan State University, **2**, 21 - 25 (2009).
- [4] Kh. Rahsepar Fard, "Mean value multivariate interpolation with shifted sets", East Journal on Approximation, Submitted.

Поступила 12 мая 2010

HOMOGENEOUS GEODESICS AND THE CRITICAL POINTS OF THE RESTRICTED FINSLER FUNCTION

PARASTOO HABIBI, DARIUSH LATIFI, MEGERDICH TOOMANIAN

Islamic Azad University, Astara branch, Iran

University of Mohaghegh Ardabili, Iran

Islamic Azad University, Karaj branch, Iran

E-mails: *p.habibi@iau-astara.ac.ir, latifi@uma.ac.ir, toomanian@kiaiu.ac.ir*

Abstract. In this paper we study the set of homogeneous geodesics of a left-invariant Finsler metric on Lie groups. We first give a simple criterion that characterizes geodesic vectors. We extend J. Szenthe's result on homogeneous geodesics to left-invariant Finsler metrics. This result gives a relation between geodesic vectors and restricted Minkowski norm in Finsler setting. We show that if a compact connected and semisimple Lie group has rank greater than 1, then for every left-invariant Finsler metric there are infinitely many homogeneous geodesics through the identity element.

MSC2010 number: 53C60, 53C30, 53C22, 22F30

Keywords: Invariant Finsler metrics; Homogeneous geodesics; geodesic vectors, Lie groups.

1. INTRODUCTION

A connected Finsler space (M, F) is called homogeneous if it admits a transitive connected Lie group G of isometries. Then M can be viewed as a coset space $\frac{G}{H}$ with a G -invariant Finsler metric, where H is the isotropy subgroup of some point in M . A geodesic $\gamma(t)$ through the origin O of $M = \frac{G}{H}$ is called homogeneous if it is an orbit of a one-parameter subgroup of G , that is

$$\gamma(t) = \exp(tZ)(O), \quad t \in \mathbb{R},$$

where Z is a nonzero vector in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G .

Homogeneous geodesics on homogeneous Riemannian manifolds have been studied by many authors. For results on homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds we refer for example to [4], [9], [12], [13], [17]. Homogeneous geodesics in a Lie group were studied by V. V. Kajzer in [11] where he proved that a Lie group G with a left-invariant metric has at least one homogeneous geodesic through the identity. In [20] J. Szenthe proved that if a compact connected and semisimple Lie group

has rank greater than 1, then for every left-invariant Riemannian metric there are infinitely many homogeneous geodesics through the identity element. A generalization of Kajzer’s result was obtained by O. Kowalski and J. Szenthe [12] who proved that every Riemannian homogeneous manifold admits at least one homogeneous geodesic through each point.

Homogeneous geodesics have important applications to mechanics. For example, the equation of motion of many systems of classical mechanics reduces to the geodesic equation in an appropriate Riemannian manifold M . Homogeneous geodesics of M correspond to “relative equilibria” of the corresponding system [2]. Geodesics of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups were studied by V. I. Arnold extending Euler’s theory of rigid-body motion [1].

Homogeneous geodesics are interesting also in pseudo-Riemannian geometry. For results on homogeneous geodesics in homogeneous pseudo-Riemannian manifolds we refer for example to [5] — [8], [18], [19]. The existence of a homogeneous geodesic in every homogeneous pseudo-Riemannian manifold (not necessarily reductive) was proved by Z. Dušek in [7], the proof is not using any advanced algebra but rather elementary facts from differential topology. In Physics, Penrose limits along null homogeneous geodesics are studied in [8] and [19]. In [19], it is shown that the Penrose limit of a Lorentzian spacetime along a homogeneous geodesic is a homogeneous plane wave and the Penrose limit of a reductive homogeneous spacetime along a homogeneous geodesic is a reductive homogeneous plane wave. Null homogeneous geodesics on Lorentzian homogeneous spaces are also studied in [18].

In [14] the second author studied homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces. In this paper we consider Lie groups with invariant Finsler metrics and give an extension of J. Szenthe’s result on homogeneous geodesics of left-invariant Finsler metrics. This result gives a relation between geodesic vectors and critical points of restricted Minkowski norms in Finsler setting.

2. PRELIMINARIES

In this section, we recall some well-known facts about Finsler geometry. See [3] for more details. Let M be an n -dimensional smooth manifold and TM denotes

its tangent bundle. A Finsler structure on a manifold M , is a continuous map $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ which has the following properties:

- (1) F is smooth on $TM \setminus \{0\}$;
- (2) $F(tv) = tF(v)$, for all $t > 0$, $v \in T_x M$ i.e. F is positively homogeneous of degree one;
- (3) For each $y \in T_x M \setminus \{0\}$, the induced symmetric bilinear form g_y on $T_x M$ is positive definite, where

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(x, y + su + tv)]|_{s=t=0}, \quad u, v \in T_x M.$$

The Chern connection on a Finsler manifold is a linear connection on the pull-back bundle $\pi^* TM$. This connection is almost g -compatible and has no torsion. Let $\sigma : [0, r] \rightarrow M$ be a smooth curve with velocity field $T = T(t) = \dot{\sigma}(t)$. Suppose that U and W are vector fields defined along σ . We define the covariant derivative $D_T U$ with *reference vector* W as

$$D_T U = \left[\frac{dU^i}{dt} + U^j T^k (\Gamma_{jk}^i)_{(\sigma, W)} \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\sigma(t)},$$

where Γ_{jk}^i are the coefficients of Chern connection.

A curve $\sigma : [0, r] \rightarrow M$, with velocity $T = \dot{\sigma}$ is a Finslerian *geodesic* if $D_T \left[\frac{T}{F(T)} \right] = 0$, with reference vector T .

We assume that all our geodesics $\sigma(t)$ have been parameterized to have constant Finslerian speed. That is, the length $F(T)$ is constant. These geodesics are characterized by the equation $D_T T = 0$, with reference vector T .

Since $T = \frac{d\sigma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$, this equation says that

$$\frac{d^2 \sigma^i}{dt^2} + \frac{d\sigma^j}{dt} \frac{d\sigma^k}{dt} (\Gamma_{jk}^i)_{(\sigma, T)} = 0.$$

If U , V and W are vector fields along a curve σ , which has velocity $T = \dot{\sigma}$, we have the derivative rule

$$\frac{d}{dt} g_w(U, V) = g_w(D_T U, V) + g_w(U, D_T V)$$

whenever $D_T U$ and $D_T V$ are with reference vector W and one of the following conditions holds:

- i): U or V is proportional to W , or
- ii): $W=T$ and σ is a geodesic.

3. LEFT-INVARIANT FINSLER METRICS OVER LIE GROUPS AND THEIR HOMOGENEOUS GEODESICS

Let G be a connected Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g} = T_e G$. We may identify the tangent bundle TG with $G \times \mathfrak{g}$ by means of the diffeomorphism that sends (g, X) to $T_e L_g X \in T_g G$.

Definition 3.1. *A Finsler function $F : TG \rightarrow R_+$ is called G -invariant if F is constant on all G -orbits in $TG = G \times \mathfrak{g}$; that is $F(g, X) = F(e, X)$ for all $g \in G$ and $X \in \mathfrak{g}$.*

The G -invariant Finsler functions on TG may be identified with the Minkowski norms on $\mathfrak{g}$. If $F : TG \rightarrow R_+$ is an G -invariant Finsler function, then we may define $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow R_+$ by $\tilde{F}(X) = F(e, X)$, where e denotes the identity in G . Conversely, if we are given a Minkowski norm $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow R_+$, then $\tilde{F}$ arises from an G -invariant Finsler function $F : TG \rightarrow R_+$ given by $F(g, X) = \tilde{F}(X)$ for all $(g, X) \in G \times \mathfrak{g}$.

Let G be a connected Lie group, $L : G \times G \rightarrow G$ the action being defined by the left-translations $L_g : G \rightarrow G$, $g \in G$ and $TL : G \times TG \rightarrow TG$ the action given by the tangent linear maps $TL_g : TG \rightarrow TG$, $g \in G$ of the left-translations.

A smooth vector field $X : TG - \{0\} \rightarrow TTG$ is said to be left-invariant if

$$TTL_g \circ X \circ TL_g^{-1} = X \quad \text{for all } g \in G.$$

By a classical argument of calculus of variation we have the following proposition.

Proposition 3.1. *If $F : TG \rightarrow R_+$ is a left-invariant Finsler metric then its geodesic spray X is left-invariant as well.*

Definition 3.2. *Let G be a connected Lie group, $\mathfrak{g} = T_e G$ its Lie algebra identified with the tangent space at the identity element, $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow R_+$ a Minkowski norm and F the left-invariant Finsler metric induced by $\tilde{F}$ on G . A geodesic $\gamma : R \rightarrow G$ is said to be homogeneous if there is a $Z \in \mathfrak{g}$ such that $\gamma(t) = \exp(tZ)\gamma(0)$, $t \in R$ holds. A tangent vector $X \in T_e G - \{0\}$ is said to be a geodesic vector if the 1-parameter subgroup $t \rightarrow \exp(tX)$, $t \in R$, is a geodesic of F .*

The geodesic defined by a geodesic vector is obviously a homogeneous one. Conversely, let γ be a geodesic with $\gamma(0) = g$ which is homogeneous with respect to a 1-parameter

group of left-translations, namely

$$\gamma(t) = \exp(tY)g, \quad t \in R,$$

then a homogeneous geodesic $\tilde{\gamma}$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= L_g^{-1} \circ \gamma(t) = L_g^{-1} \circ R_g \circ \exp(tY) \\ &= \exp(\text{Ad}(g^{-1})tY).e = \exp(\text{Ad}(g^{-1})tY)\tilde{\gamma}(0), \end{aligned}$$

which means that $X = \text{Ad}(g^{-1})Y$ is a geodesic vector.

For results on homogeneous geodesics in homogeneous Finsler manifolds we refer to [14] — [16]. The basic formula characterizing geodesic vector in the Finslerian case was derived in [14], Theorem 3.1. For Lie groups with left invariant metrics we have the following theorem.

Theorem 3.1. [14] *Let G be a connected Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, and let F be a left-invariant Finsler metric on G . Then $X \in \mathfrak{g} - \{0\}$ is a geodesic vector if and only if*

$$g_X(X, [X, Z]) = 0$$

holds for every $Z \in \mathfrak{g}$.

4. HOMOGENEOUS GEODESICS AND THE CRITICAL POINTS OF THE RESTRICTED FINSLER FUNCTION

Let G be a connected Lie group, $\mathfrak{g} = T_e G$ its Lie algebra, $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ the adjoint action, $G(X) = \{\text{Ad}(g)X \mid g \in G\} \subset \mathfrak{g}$ the orbit of an element $X \in \mathfrak{g}$ and $G_X < G$ the isometry subgroup at X . The set $\frac{G}{G_X}$ of left-cosets of G_X endowed with its canonical smooth manifold structure admits the canonical left-action

$$\Lambda : G \times \frac{G}{G_X} \rightarrow \frac{G}{G_X} \quad (g, aG_X) \rightarrow gaG_X,$$

which is also smooth. Moreover, a smooth bijection $\rho : \frac{G}{G_X} \rightarrow G(X)$ is defined by $\rho(aG_X) = \text{Ad}(a)X$ which thus yields an injective immersion into $\mathfrak{g}$ which is equivariant with respect to the actions Λ and Ad .

Now consider a Minkowski norm $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow R$, then F defines a left-invariant Finsler metric on G by

$$F(x, U) = \tilde{F}(TL_{x^{-1}}U), \quad U \in T_x G.$$

Let $Q(Z) = \tilde{F}^2(Z)$, $Z \in \mathfrak{g}$. Using the formula $\tilde{F}(Z) = \sqrt{g_Z(Z, Z)}$, we have $Q(Z) = g_Z(Z, Z)$. The smooth function $q = Q \circ \rho : \frac{G}{G_X} \rightarrow R$ is called the restricted Minkowski norm on $\frac{G}{G_X}$.

In the following, we give an extension of results of [20] to left-invariant Finsler metrics.

Theorem 4.1. *Let G be a connected Lie group and $\tilde{F}$ a Minkowski norm on its Lie algebra $\mathfrak{g}$. For $X \in \mathfrak{g} - \{0\}$ let $U \in \mathfrak{g}$ be such that $X \in G(U)$ for the corresponding adjoint orbit and let $gG_U \in \frac{G}{G_U}$ be the unique coset with $\rho(gG_U) = X$. Then X is a geodesic vector if and only if gG_U is a critical point of $q = Q \circ \rho$ the restricted Minkowski norm on $\frac{G}{G_U}$.*

Proof. The coset gG_U is a critical point of q if and only if $vq = 0$ for $v \in T_{gG_U}(\frac{G}{G_U})$. But as $\frac{G}{G_U}$ is homogeneous, for each v there is a $Z \in \mathfrak{g}$ such that $v = \tilde{Z}(gG_U)$ where $\tilde{Z} : \frac{G}{G_U} \rightarrow T(\frac{G}{G_U})$ is the infinitesimal generator of the action Λ corresponding to Z . Consider also the infinitesimal generator $\hat{Z} : \mathfrak{g} \rightarrow T\mathfrak{g}$ of the adjoint action corresponding to Z . Since the injective immersion ρ is equivariant with respect to the action Λ and Ad the following holds: $\hat{Z} \circ \rho = T\rho \circ \tilde{Z}$. But then the following is valid:

$$\begin{aligned} v(q) &= \tilde{Z}(q) \Big|_{gG_U} = \tilde{Z}(Q \circ \rho) \Big|_{gG_U} = (T\rho \tilde{Z}) \Big|_{gG_U} Q = (\hat{Z} \circ \rho) \Big|_{gG_U} Q = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Ad(\exp tZ)X) \right) Q = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Q(Ad(\exp tZ)X) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g_{Ad(\exp tZ)X} (Ad(\exp tZ)X, Ad(\exp tZ)X) = \\ &= g_X([Z, X], X) + g_X(X, [Z, X]) + 2C_X([Z, X], X, X) = 2g_X([Z, X], X), \end{aligned}$$

where C_X is the Cartan tensor of F at X . It follows from the homogeneity of F that $C_X([Z, X], X, X) = 0$. Since the map $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_{gG_U}(\frac{G}{G_U})$, $Z \rightarrow \tilde{Z}(gG_U)$ is an epimorphism, the assertion of the theorem follows. $\square$

Corollary 4.1. *Let G be a compact connected semi-simple Lie group and $\tilde{F}$ a Minkowski norm on its Lie algebra $\mathfrak{g}$. Then each orbit of the adjoint action $Ad : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ contains at least two geodesic vectors.*

Proof. Consider an orbit $G(X)$ of the adjoint action, the corresponding coset manifold $\frac{G}{G_X}$ and the injective immersion $\rho : \frac{G}{G_X} \rightarrow \mathfrak{g}$. Since G is compact and semi-simple then the manifold $\frac{G}{G_X}$ becomes compact, and the restricted Minkowski norm $q = Q \circ \rho : \frac{G}{G_X} \rightarrow R$ has at least two critical points. $\square$

The following corollary is a consequence of the preceding corollary. Two geodesics are considered different if their images are different.

Corollary 4.2. *Let G be compact connected semi-simple Lie group of rank ≥ 2 and $\tilde{F}$ a Minkowski norm on its Lie algebra. Then the left-invariant Finsler metric F induced by $\tilde{F}$ on G has infinitely many homogeneous geodesic issuing from the identity element.*

Proof. The proof is similar to the Riemannian case, so we omit it. $\square$

Acknowledgement. We are deeply grateful to the referee for a very careful reading of the manuscript and valuable suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Arnold, "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaites", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16**, 319 - 361 (1960).
- [2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical Mechanics, Springer-Verlag (1978).
- [3] D. Bao, S. S. Chern and Shen, An Introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New-York (2000).
- [4] R. Chavosh Khatamy and M. Toomanian, "Existence of homogeneous vectors on the fiber space of the tangent bundle", Acta Mathematica, Hungarica, **116**, no. 4, 285 - 294 (2007).
- [5] Z. Dušek and O. Kowalski, "Light-like homogeneous geodesic lemma for any signature", Publ. Math. Debrecen, **71**, no. 1 - 2, 245 - 252 (2007).
- [6] Z. Dušek and O. Kowalski, "On six-dimensional pseudo-Riemannian almost g.o. spaces", J. Geom. Phys., **57**, no. 10, 2014 - 2023 (2007).
- [7] Z. Dušek, "The existence of homogeneous geodesics in homogeneous pseudo-Riemannian and affine manifolds", J. Geom. Phys., **60**, 687 - 689 (2010).
- [8] J. Figueroa-O'Farrill, P. Meessen and S. Philip, "Homogeneity and plane-wave limits", J. High. Energy Physics, **5**, 050 (2005).
- [9] C. Gordon, "Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are Orbits", Prog. Nonlinear Differ. Eq. App., **20**, 155 - 174 (1996).
- [10] Helgason, Differential Geometry, Lie groups and Symmetric Spacea, Academic Press, New York (1978).
- [11] V. V. Kajzer, "Conjugate points of left-invariant metrics on Lie groups", Soviet Math., **34**, 32 - 44 (1990).
- [12] O. Kowalski and J. Szenthe, "On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds", Geom. Dedicata, **81**, 209 - 214 (2000). Erratum: Geom. Dedicata, **84**, 331 - 332 (2001).
- [13] O. Kowalski, and L. Vanhecke, Riemannian manifold s with homogeneous geodesics, Boll. Un. Math. Ital. B(7) 5 (1991), 189-246.
- [14] D. Latifi, "Homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces", J. Geom. Phys. **57**, 1421 - 1433 (2007).
- [15] D. Latifi and A. Razavi, "On homogeneous Finsler spaces", Rep. Math. Phys, **57**, 357 - 366 (2006). Erratum: Rep. Math. Phys, **60**, 347 (2007).
- [16] D. Latifi, A. Razavi, "Homogeneous geodesics of left invariant Randers metrics on a three-dimensional Lie group", Int. J. Contemp. Math. Sciences, **4**, 873 - 881 (2009).
- [17] R. A. Marinosci, "Homogeneous geodesics in a three-dimensional Lie group", Comm. Math. Univ. Carolinae, **43**, 261 - 270 (2002).

- [18] P. Meessen, "Homogeneous Lorentzian spaces whose null-geodesics are canonically homogeneous", *Lett. Math. Phys.*, **75**, 209 - 212 (2006).
- [19] S. Philip, "Penrose limits of homogeneous spaces", *J. Geom. Phys.*, **56**, 1516 - 1533 (2006).
- [20] J. Szenthe, "Homogeneous geodesics of left-invariant metrics", *Univ. Iagel. Acta Math.*, **38**, 99 - 103 (2000).

Поступила 12 июля 2010

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 46, номер 1, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

С. Л. ГОГЯН, О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по регулярной системе Хаара	3
С. Г. ДАЛАЛЯН, Расширение Гротендика основной теоремы теории Галуа в общих категориях	17
A. EHSANI, The generalized entropic property for the pair of operations	29
A. Г. КАМАЛЯН, В. В. СИМОНЯН, О количестве решений одного типа одномерных псевдодифференциальных уравнений в пространстве Соболева-Слободецкого	35
В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. ТОНОЯН, Об одном классе почти гипоеллиптических многочленов	49
K. R. FARD, Bivariate mean value interpolation on circles	71
P. HABIBI, D. LATIFI, M. TOOMANIAN, Homogeneous geodesics and the critical points of the restricted Finsler function	75

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 46, No. 1, 2011

CONTENTS

S. L. GOGYAN, On quasi-greedy algorithm in $L^1(0, 1)$ by regular Haar system	3
S. H. DALALYAN, Grothendieck's extension of the fundamental theorem of Galois theory in abstract categories	17
A. EHSANI, The generalized entropic property for the pair of operations	29
A. G. KAMALYAN, V. V. SIMONYAN, On the number of solutions of a type of one-dimensional pseudodifferential equations in Sobolev-Slobodetsky space	35
V. N. MARKARYAN, G. G. TONONIAN, On a class of almost hypoelliptic polynomials	49
K. R. FARD, Bivariate mean value interpolation on circles	71
P. HABIBI, D. LATIFI, M. TOOMANIAN, Homogeneous geodesics and the critical points of the restricted Finsler function	75