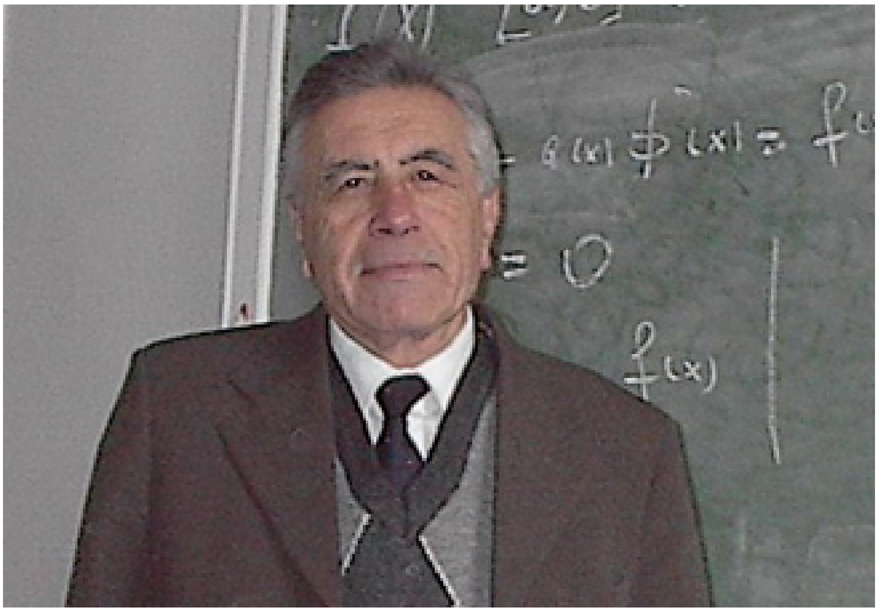
ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2010



Назарет Ервандович Товмасян
(1934 – 2010)

В городе Глендора (Калифорния, США) 23 июля 2010 года ушел из жизни заслуженный деятель науки Армении, член-корреспондент НАН Армении, ведущий специалист в области теории дифференциальных уравнений Назарет Ервандович Товмасян.

Назарет Ервандович Товмасян родился в 1934 году в с. Бжни Разданского района Армянской ССР. В 1956 году, по окончании Ереванского госуниверситета, он поступает на работу в Институт математики и механики АН Арм. ССР. В 1959 году, с целью развития в Армении теории дифференциальных уравнений, Н.Е.Товмасян командируется в аспирантуру в Институт математики и механики им. Стеклова АН СССР. Научным руководителем Н. Е. Товмасяна становится выдающийся ученый Илья Несторович Векуа. Через год И. Н. Векуа назначают ректором недавно созданного университета Сибирского Отделения Академии Наук СССР, и Назарет Ервандович продолжает обучение в аспирантуре института гидродинамики СО АН СССР в городе Новосибирске.

Далее следует почти десятилетний период жизни в Новосибирске, в знаменитом Академгородке, вписавшем много блестящих страниц в историю советской науки. В эти годы Товмасян работает рядом с С. Л. Соболевым, М. А. Лаврентьевым, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе и другими видными советскими учеными. Именно в это время сформировались научные интересы Назарета Ервандовича, была заложена основа его дальнейших исследований. Первые работы ученого посвящены исследованию уравнений Лапласа и Трикоми в классах разрывных функций. Были получены явные формулы решений граничных задач для этих уравнений в подходящих классах. Особенно следует отметить результаты, полученные для уравнений Трикоми с вырождением. Эти результаты имеют важные приложения в задачах газовой динамики.

Докторская диссертация “К теории граничных задач для эллиптических систем второго порядка”, которую Н. Е. Товмасян в 1967 году защищает в Новосибирском Университете, была посвящена фундаментальному исследованию эллиптических краевых задач. Им были получены новые интегральные представления решений эллиптических систем, удобные при решении классических граничных задач. В его диссертации особое место занимали краевые задачи с нарушением известного условия нормальности Шапиро - Лопатинского. Н. Е. Товмасян описал широкий класс таких задач, которые при подходящем выборе области решений и граничных данных являются корректными, а также указал метод их решения.

Работы Н. Е. Товмасяна явились существенным вкладом в только что зародившуюся тогда теорию эллиптических краевых задач. Как писал академик С. Л. Соболев, “Н. Е. Товмасян выполнил ряд глубоких оригинальных исследований в области теории уравнений с частными производными. Его исследования получили широкие отклики среди специалистов, как в Советском Союзе, так и за рубежом”.

В 1969 году, по приглашению ректора Ереванского политехнического института Назарет Ервандович возвращается в Армению и с тех пор его творческая жизнь неразрывно связана с этим институтом (сейчас это Государственный Инженерный Университет Армении, ГИУА). Н. Е. Товмасян возглавил кафедру прикладной математики (впоследствии кафедру высшей математики-2), которой и руководил до 1990-го года. В эти годы ярко проявилась другая сторона его многогранного таланта. Выдающийся педагогический дар неразрывно связал научную деятельность Назарета Ервандовича с его работой по подготовке научных кадров. Под его руководством подготовлены и защищены более 20 кандидатских. Трое из его учеников защитили докторские диссертации. Большая часть его учеников работает сейчас в ГИУА и в Ереванском государственном университете. Многие математики, прошедшие школу Н. Е. Товмасяна, работают в Израиле, России, Украине, Германии.

С 1990 по 2007 г. Н. Е. Товмасян - профессор департамента математики ГИУА и руководитель научной темы "Краевые задачи и их приложения". В эти годы проф. Товмасян активно разрабатывает теорию эллиптических дифференциальных уравнений. Глубокие исследования, развивающие теоретико-функциональные методы в теории граничных задач, легли в основу его двух монографий, опубликованных им на английском языке в 1994 и 1998 годах. В 2000-м году Н. Е. Товмасян был избран член-корреспондентом Национальной Академии Наук Армении. Научная и педагогическая деятельность проф. Товмасяна была высоко оценена правительством Армении. В 2003 году ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки Республики Армении.

Память о Назарете Ервандовиче - яркой личности, выдающемся математике, талантливом педагоге навсегда останется в наших сердцах.

Редколлегия

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 5-16.

СЛУЧАЙНАЯ КОПИЯ ОТРЕЗКА ВНУТРИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Н. Г. АГАРОНЯН, Г. С. АРУТЮНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: victo@aua.am

Аннотация. Пусть S – отрезок длины l, а $\mathbf{D}$ – ограниченная выпуклая область на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Мы рассматриваем случайную копию L отрезка S при условии, что она пересекает $\mathbf{D}$. Обозначим через $|L|$ длину отрезка $L \cap \mathbf{D}$. В статье приводится явное выражение для функции распределения $F_{|L|}(x)$ случайной величины $|L|$. Отметим, что $F_{|L|}(x)$ может иметь скачок в точке l, или быть непрерывной функцией в зависимости от параметра l и области $\mathbf{D}$. В частности, устанавливается связь между функцией распределения длины хорды области $\mathbf{D}$ и $F_{|L|}(x)$. Кроме того, приводятся элементарные выражения функции распределения $F_{|L|}(x)$ для круга и правильных n-угольников при $n = 3 - 7$. В статье приводятся также графики $F_{|L|}(x)$ для правильных n-угольников со стороной 1 и $l = 1$ при $n = 3 - 7$.

MSC2000 number: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: функция распределения длины хорды, случайная копия отрезка, кинематическая мера.

1. Введение

Пусть S – отрезок длины l, а $\mathbf{D}$ – ограниченная выпуклая область на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Мы рассматриваем случайную копию $L(\omega)$ отрезка S при условии, что она пересекает область $\mathbf{D}$, то есть случайный отрезок из следующего множества

$$\Omega = \{\text{множество всех положений отрезка } S, \text{ пересекающих область } \mathbf{D}\}.$$

Обозначим через $|L|(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ длину отрезка $L(\omega) \cap \mathbf{D}$. Случайный отрезок $L(\omega)$ мы можем задавать двумя координатами (g, t), где $g \in \mathbb{G}$ ($\mathbb{G}$ – множество всех прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$) прямая, на которой лежит отрезок L, а t – одномерная координата центра отрезка L на прямой g. Отметим, что началом координат на прямой g берется одна из точек пересечений g с областью $\mathbf{D}$. Множество всевозможных положений $L(\omega)$ в координатах (g, t) есть следующая область:

$$\Omega = \{(g,t) : L(g,t) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\} = \left\{(g,t) : g \in [\mathbf{D}], \quad t \in \left[-\frac{l}{2}, \chi(g) + \frac{l}{2}\right]\right\},$$

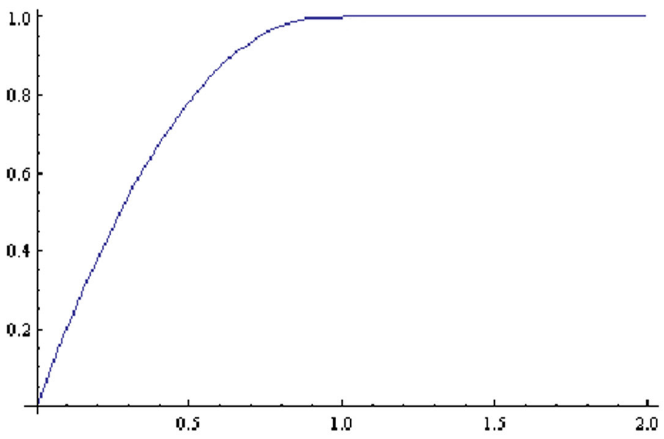


Рис. 1. **Функция распределения случайной величины $|L|$ для правильного треугольника со стороной 1 и $l = 1$.**

где $\chi(g) = |g \cap \mathbf{D}|$ – длина хорды, полученной пересечением прямой g с областью $\mathbf{D}$, а

$$[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} : g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}.$$

На множестве $\mathbb{G} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – ось действительных чисел) определим меру m следующим образом:

$$m(dL) = dg\, dt,$$

где dg – локально-конечная мера в пространстве $\mathbb{G}$, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости (т.е. группы вращений и параллельных переносов), а dt – одномерная лебегова мера на g. Мера $m(\cdot)$ называется кинематической мерой на группе всех евклидовых движений плоскости (см. [1]—[4]). Случайный отрезок пересекающий область $\mathbf{D}$ есть отрезок с распределением, пропорциональным сужению меры m на Ω. Следовательно,

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} \quad \text{для любого борелевского множества} \quad B \subset \Omega.$$

Далее, пусть

$$B_{\mathbf{D}}^x = \{(g,t) \in \Omega : \ |L|(g,t) \leq x\}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

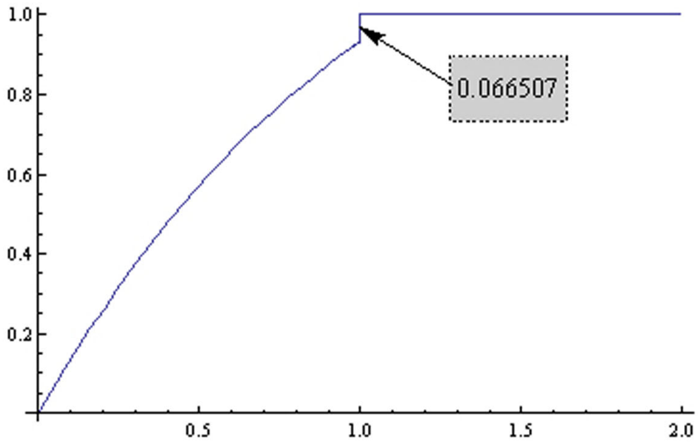


Рис. 2. **Функция распределения случайной величины $|L|$ для квадрата со стороной 1 и $l = 1$.**

Функция распределения случайной величины $|L|$ имеет следующий вид:

$$F_{|L|}(x) = P(|L| \leq x) = \frac{m(B^x_{\mathbf{D}})}{m(\Omega)} = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{B^x_{\mathbf{D}}} dg\, dt.$$

Поскольку (см. [1]—[4])

$$\int_{[\mathbf{D}]} \chi(g)\, dg = \pi\, ||\mathbf{D}|| \quad \text{и} \quad \int_{[\mathbf{D}]} dg = |\partial \mathbf{D}|,$$

то получаем

$$m(\Omega) = \int_{[\mathbf{D}]} dg \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} dt = \int_{[\mathbf{D}]} (\chi(g) + l)\, dg = \pi\, ||\mathbf{D}|| + l\, |\partial \mathbf{D}|, \tag{1.1}$$

где $||\mathbf{D}||$ есть площадь, а $|\partial \mathbf{D}|$ – периметр области $\mathbf{D}$ (т.е. длина границы $\mathbf{D}$).

2. Функция распределения случайной величины $|L|$

Очевидно, что $F_{|L|}(x) = 0$, если $x \leq 0$ и $F_{|L|}(x) = 1$, если $x \geq l$. В случае $0 < x < l$, имеем

$$F_{|L|}(x) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{B^x_{\mathbf{D}}} dg\, dt = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{[\mathbf{D}]} dg \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} I(|L| \leq x)\, dt,$$

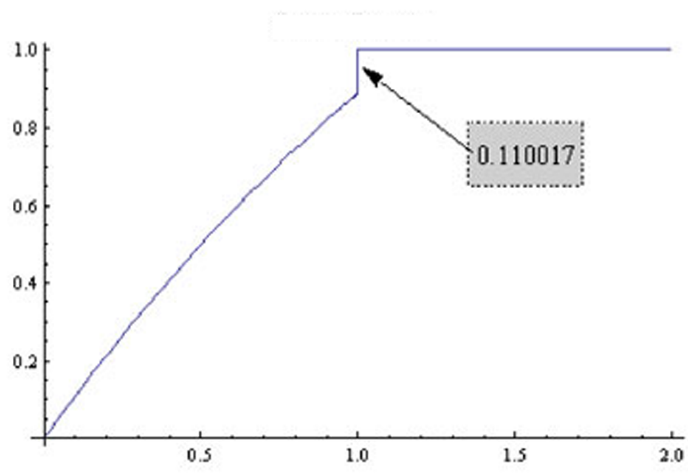


Рис. 3. **Функция распределения случайной величины $|L|$ для правильного пятиугольника со стороной 1 и $l = 1$.**

где I есть индикатор, т. е. $I(A) = 1$, если имеет место событие A и 0, в противном случае. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{m(\Omega)}\int_{[\mathbf{D}]} dg \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} I(|L| \le x)\, dt = \frac{1}{m(\Omega)}\left[\int_{\chi(g)\le x} (\chi(g)+l)\, dg + \int_{\chi(g)>x} 2x\, dg\right] =$$

$$= \frac{1}{m(\Omega)}\left[\int_{\chi(g)\le x} \chi(g)\, dg + l\,|\partial D|\, F(x) + 2x\,|\partial D|\,(1-F(x))\right],$$

где $F(x)$ – функция распределения длины хорды области $\mathbf{D}$. По определению (см. [2], [3] и [9]):

$$F(x) = \frac{1}{|\partial D|}\int_{\chi(g)\le x} dg.$$

В [13] приводится явное выражение для функции распределения длины хорды правильного многоугольника. Аналогичные выражения для случаев правильного треугольника, квадрата, правильного пятиугольника и правильного шестиугольника приведены в [5] – [8], соответственно.

Таким образом, мы получаем следующую формулу для функции распределения случайной величины $|L(\omega)|$.

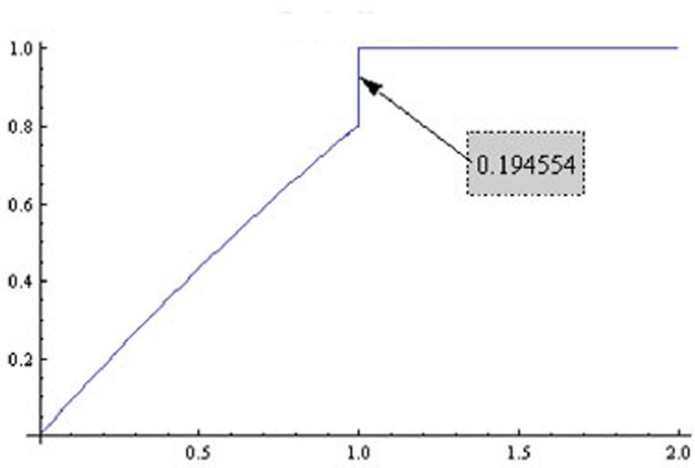


Рис. 4. **Функция распределения случайной величины $|L|$ для правильного шестиугольника со стороной 1 и $l = 1$.**

Лемма 1. *Функция распределения случайной величины $|L(\omega)|$ имеет вид:*

$$F_{|L|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{\pi\,||\mathbf{D}||+l\,|\partial \mathbf{D}|}\left[\int_{\chi(g)\leq x}\chi(g)\,dg + \right. & \\ \left. + \, l\,|\partial D|\,F(x) + 2x\,|\partial D|\,(1-F(x))\right], & \text{если} \quad 0 < x < l \\ 1, & \text{если} \quad x \geq l \end{cases} \tag{2.1}$$

Следовательно, (2.1) устанавливает связь между функциями распределения $F(x)$ и $F_{|L|}(x)$.

Чтобы преобразовать функцию $F_{|L|}(x)$, докажем следующую формулу

$$G(x) = \int_{\chi(g)\leq x}\chi(g)dg = |\partial\mathbf{D}|\int_0^x uf(u)\,du, \tag{2.2}$$

где $f(x)$ – плотность распределения длины хорды области $\mathbf{D}$ (т.е $f(x) = F'(x)$). Вычислим производную функции $G(x)$:

$$\frac{G(x+\triangle x)-G(x)}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x}\int_{x<\chi(g)\leq x+\triangle x}\chi(g)\,dg =$$

$$= (x+\theta\triangle x)\,|\partial\mathbf{D}|\,\frac{F(x+\triangle x)-F(x)}{\triangle x}. \tag{2.3}$$

Полагая, что функция распределения $F(x)$ имеет плотность $f(x)$, в обеих частях (2.3) переходя к пределу при $\triangle x \to 0$ получаем $G'(x) = |\partial\mathbf{D}|\,x\,f(x)$. Поэтому

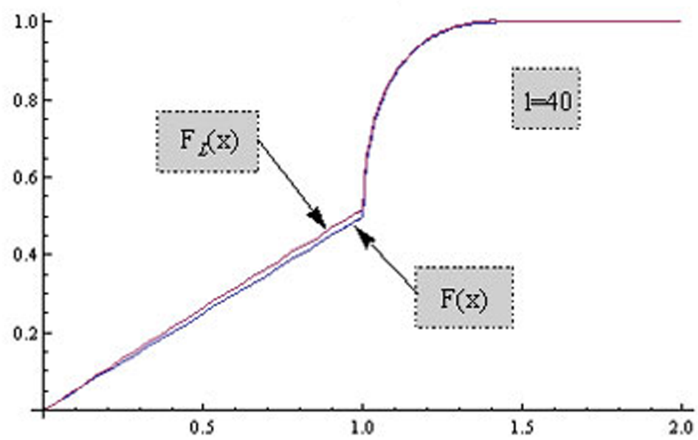


Рис. 5. **Функции распределения** $F(x)$ **и** $F_{|L|}(x)$ **в случае квадрата со стороной 1 и** $l = 40$**.**

имеем

$$G(x) = G(0) + |\partial \mathbf{D}| \int_0^x uf(u)\,du = |\partial \mathbf{D}| \int_0^x uf(u)\,du,$$

поскольку $G(0) = \int_{\chi(g) \le 0} \chi(g)\,dg = 0$.

Окончательно, для $F_{|L|}(x)$ получаем следующий результат.

Теорема 1. *Функция распределения случайной величины* $|L(\omega)|$ *имеет следующий вид:*

$$F_{|L|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0 \\ \frac{|\partial \mathbf{D}|}{\pi\,||\mathbf{D}||+l\,|\partial \mathbf{D}|} \left[\int_0^x uf(u)\,du + \right. & \\ \left. +l\,F(x) + 2x\,(1-F(x))\right], & \text{если} \quad 0 < x < l \\ 1, & \text{если} \quad x \ge l \end{cases} \tag{2.4}$$

Как видно из (2.4), мы можем вычислить функцию распределения $F_{|L|}(x)$, если известна функция распределения длины хорды $F(x)$.

Очевидно, что если в точке l сложить значение $F_L(l)$ и скачок $J(l)$ функции в точке l, то получим $1 = F_L(l) + J(l)$. В статье приводятся графики $F_{|L|}(x)$ для правильных n-угольников (в случае $n = 3, 4, 5, 6, 7$) со стороной 1 и $l = 1$.

Нетрудно проверить (см. (2.4)), что если l стремится к ∞, функция распределения $F_{|L|}(x)$ стремится к $F(x)$. Кроме того, если в формуле (2.4) подставить $x = 0$, получим $F_L(0) = 0$, то есть $F_{|L|}(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Однако, $F_{|L|}(x)$

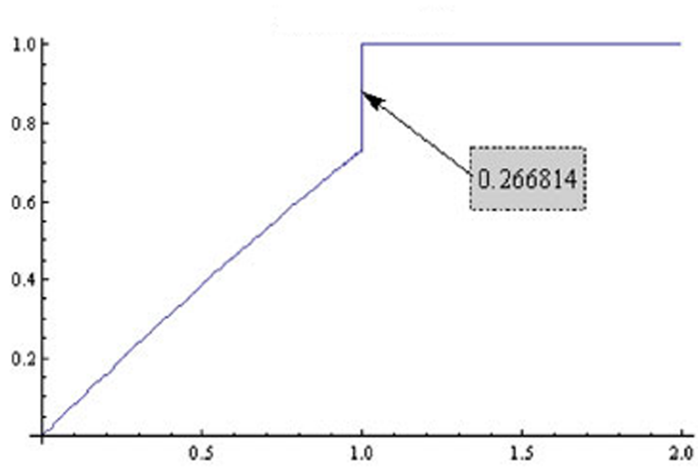


Рис. 6. **Функция распределения случайной величины $|L|$ для правильного семиугольника со стороной 1 и $l = 1$.**

может иметь скачок в точке $x = l$, равный

$$J(l) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\chi(g)>l} (\chi(g) - l)\, dg.$$

Поэтому, в точке $x = l$ возможный скачок функции $F_{|L|}(x)$ равен

$$J(l) = \frac{1}{m(\Omega)} \left[\pi \,||\mathbf{D}|| - G(l) - l\,|\partial D|\,(1 - F(l))\right].$$

Используя формулу (2.4), мы можем получить функцию распределения $F(x)$, имея функцию распределения $F_{|L|}(x)$. На Рис. 5 приведены графики функции распределения длины хорды $F(x)$ и функции распределения $F_{|L|}(x)$ для квадрата со стороной 1 и $l = 40$.

Отметим, что некоторые модели применения явного вида функции распределения $F(x)$ в вопросах кристаллографии приведены в [10] - [12].

3. Случай круга

Рассмотрим круг радиуса R. В этом случае функция распределения и плотность длины хорды имеют следующий вид:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0 \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{4R^2}}, & \text{если} \quad 0 < y \le 2R \\ 1, & \text{если} \quad y > 2R, \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0 \text{ или } y > 2R \\ \frac{y}{4R^2\sqrt{1-\frac{y^2}{4R^2}}}, & \text{если} \quad 0 < y \le 2R. \end{cases}$$

Поскольку

$$\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{4R^2}}}\, du = 4R^2 \left[R \arcsin \frac{x}{2R} - \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} \right],$$

то для круга радиуса R имеем

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0 \\ 2\pi R^2 \arcsin \frac{x}{2R} - \frac{\pi x}{2} \sqrt{4R^2 - x^2}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2R \\ \pi^2 R^2, & \text{если} \quad x \ge 2R. \end{cases}$$

Поэтому в этом случае функция распределения случайной величины $|L|$, когда $0 < x \le \min(l, 2R)$, имеет следующий вид:

$$F_{|L|}(x) =$$

$$= \frac{2\pi R}{\pi^2 R^2 + 2\pi R l} \left[\frac{1}{4R^2} \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{4R^2}}}\, du + l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} \right) + 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} \right].$$

Окончательно получаем

$$F_{|L|}(x) = \frac{2\pi R}{\pi^2 R^2 + 2\pi R l} \left[R \arcsin \frac{x}{2R} + l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} \right) + \frac{3x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} \right].$$

График функции $F_{|L|}(x)$ при $R = 1$ и $l = 1$, приведен на Рис. 7.

4. Моменты случайной величины $|L|$ для произвольной области $\mathbf{D}$

Не трудно убедиться, что в случае $\chi(g) \le l$ имеем

$$|L| = \begin{cases} \frac{l}{2} + t, & \text{если} \quad t \in (-\frac{l}{2}, \chi(g) - \frac{l}{2}) \\ \chi(g), & \text{если} \quad t \in (\chi(g) - \frac{l}{2}, \frac{l}{2})) \\ \frac{l}{2} + \chi(g) - t, & \text{если} \quad t \in (\frac{l}{2}, \chi(g) + \frac{l}{2}), \end{cases}$$

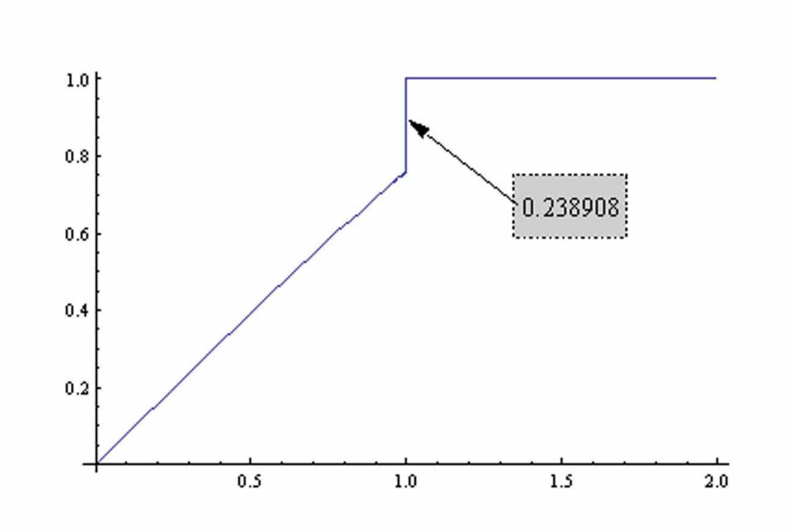


Рис. 7. **Функция распределения отрезка $|L|$ для круга радиуса $R = 1$ и $l = 1$.**

а если $\chi(g) > l$, то

$$|L| = \begin{cases} \frac{l}{2} + t, & \text{если} \quad t \in (-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}) \\ l, & \text{если} \quad t \in (\frac{l}{2}, \chi(g) - \frac{l}{2}) \\ \frac{l}{2} + \chi(g) - t, & \text{если} \quad t \in (\chi(g) - \frac{l}{2}, \chi(g) + \frac{l}{2}). \end{cases}$$

Следовательно,

$$a_k = \mathbf{E}(|L|^k) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{[\mathbf{D}]} dg \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} |L|^k \, dt =$$

$$= \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\chi(g) \le l} dg \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(g)-\frac{l}{2}} (\frac{l}{2} + t)^k \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\chi(g)-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \chi(g)^k \, dt + \int_{\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} (\chi(g) + \frac{l}{2} - t)^k \, dt \right] +$$

$$+ \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\chi(g) > l} dg \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\frac{l}{2} + t)^k \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{l}{2}}^{\chi(g)-\frac{l}{2}} l^k \, dt + \int_{\chi(g)-\frac{l}{2}}^{\chi(g)+\frac{l}{2}} (\chi(g) + \frac{l}{2} - t)^k \, dt \right]$$

Окончательно получаем

$$a_k = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\chi(g) \le l} \left[\chi^k(g) \, l + \chi^{k+1}(g) \, \frac{1-k}{k+1} \right] dg + \tag{4.1}$$

$$+\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)>l}\left[l^k\,\chi(g)+l^{k+1}\,\frac{1-k}{k+1}\right]\,dg.$$

При $k=1$ имеем

$$a_1=\mathbf{E}(|L|)=\frac{1}{m(\Omega)}\int_{[\mathbf{D}]}l\,\chi(g)\,dg=\frac{l\pi||\mathbf{D}||}{\pi\,||\mathbf{D}||+l\,|\partial\mathbf{D}|}. \tag{4.2}$$

Используя (2.4), можем вычислить плотность распределения $f_{|L|}(x)$ случайной величины $|L|$. Имеем

$$f_L(x)=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[(l-x)f(x)+2(1-F(x))\right].$$

Обозначим через M_k k-ый момент длины хорды, а через d – диаметр области $\mathbf{D}$ (т.е. максимальное расстояние между двумя точками области $\mathbf{D}$). Пусть $l\geq d$, тогда

$$a_k=E(|L|^k)=\int_0^d x^k\,f_L(x)\,dx=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[\int_0^d x^k(l-x)f(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+2\int_0^d x^k(1-F(x))\,dx\right]=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[l\,M_k-M_{k+1}+\frac{2}{k+1}M_{k+1}\right]=$$

$$=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[l\,M_k-\frac{k-1}{k+1}M_{k+1}\right].$$

При $k=1$ имеем

$$a_1=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\,l\,M_1=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\,l\,\frac{\pi\,||D||}{|\partial D|}=\frac{l\,\pi\,||D||}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|},$$

т.е. (4.2).

Теперь пусть $l<d$. В этом случае

$$a_k=\int_0^l x^k\,f_L(x)dx=$$

$$=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[\int_0^l x^k(l-x)f(x)\,dx+2\int_0^l x^k(1-F(x))dx\right]+l^k\,J(l)=$$

$$=\frac{|\partial D|}{\pi\,||D||+l\,|\partial D|}\left[l\int_0^l x^k f(x)\,dx-\frac{k-1}{k+1}\int_0^l x^{k+1}f(x)\,dx\right]+l^k\,J(l).$$

Подставляя $k=1$ в этом случае, мы снова получаем (4.2).

Нетрудно проверить, что последние два выражения полученные для a_k совпадают с выражением (4.1). Действительно, если $l\geq d$, второй интеграл в (4.1) равен 0 и мы имеем

$$\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)\leq l}\left[\chi^k(g)l+\chi^{k+1}(g)\frac{1-k}{k+1}\right]dg=$$

$$= \frac{|\partial D|}{\pi\,||D|| + l\,|\partial D|}\left[l\,M_k - \frac{k-1}{k+1}M_{k+1}\right] = a_k.$$

Теперь пусть $l < d$. Из (4.1) имеем

$$\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)\le l}\left[\chi^k(g)\,l + \chi^{k+1}(g)\,\frac{1-k}{k+1}\right]dg+$$
$$+\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)>l}\left[l^k\,\chi(g) + l^{k+1}\,\frac{1-k}{k+1}\right]dg =$$
$$= \frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)\le l}\left[\chi^k(g)\,l + \chi^{k+1}(g)\,\frac{1-k}{k+1}\right]dg+$$
$$+\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\chi(g)>l}\left[l^k\,\chi(g) + l^{k+1}\,\frac{1-k}{k+1} + l^{k+1} - l^{k+1}\right]dg =$$
$$= \frac{1}{m(\Omega)}\left[\int_{\chi(g)\le l}\left[\chi^k(g)\,l + \chi^{k+1}(g)\,\frac{1-k}{k+1}\right]dg+\right.$$
$$\left.+\int_{\chi(g)>l}\left[l^k\,l + l^{k+1}\,\frac{1-k}{k+1}\right]dg\right]+$$
$$= \frac{|\partial D|}{\pi\,||D|| + l\,|\partial D|}\left[l\int_0^l x^k f(x)\,dx - \frac{k-1}{k+1}\int_0^l x^{k+1} f(x)\,dx\right] + l^k\,J(l) = a_k.$$

Abstract. Under the assumption that S is a segment of the length l and $\mathbf{D}$ is a bounded, convex domain in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, the paper considers the randomly moving copy L of S, under the condition that it hits $\mathbf{D}$. Denote by $|L|$ the length of $L\cap\mathbf{D}$. In the paper an elementary expression for the distribution function $F_{|L|}(x)$ of the random variable $|L|$ is obtained. Note that $F_{|L|}(x)$ can have a jump at the point l or can be a continuous function depending on l and the domain $\mathbf{D}$. In particular, a relation between chord length distribution functions of $\mathbf{D}$ and $F_{|L|}(x)$ is given. Moreover, we derive explicit forms of $F_{|L|}(x)$ for the disk and regular n-gons with $n = 3 \div 7$.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester (1982).

[2] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[3] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley,Reading, Mass. (1976).

[4] R. Schneider and W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).

[5] R. Sulanke, “Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren”, Math. Nachr. **23,** 51 – 74 (1961).

[6] W. Gille, "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases", Exp. Techn. Phys., **36**, 197 – 208 (1988).

[7] N. G. Aharonyan and V. K. Ohanyan, "Chord length distribution functions for polygons". Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences). **40**, (4), 43 – 56 (2005).

[8] H. S. Harutyunyan, "Chord length distribution function for regular hexagon", Uchenie Zapiski, Yerevan State University, **1**, 17 – 24 (2007).

[9] D. Stoyan and H. Stoyan, Fractals, Random Shapes and Point Fields, John Wiley& Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore (1994).

[10] W. Gille, "Cross-section structure functions in terms of the three-dimensional structure functions of infinitely long cylinders". Powder Technology, **138**, 124 – 131 (2003).

[11] H. S. Sukiasian and W. Gille, "Relation between the chord length distribution of an infinitely long cylinder and that of its base", J. Math. Physics, **48**, 53305 – 53312 (2007).

[12] W. Gille, N. G. Aharonyan and H. S. Haruttyunyan, "Chord length distribution of pentagonal and hexagonal rods: relation to small-angle scattering", Journal of Applied Cristallography, **42**, 326 – 328 (2009).

[13] H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, "Chord length distribution function for regular polygons", Advances in Applied Probability, **41**, 358 – 366 (2009).

Поступила 28 апреля 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 17-26.

О β-РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ДИРИХЛЕ

С. А. ГРИГОРЯН, М. И. КАРАХАНЯН, Т. А. ХОРЬКОВА

Казанский государственный энергетический университет
E-mail: *gsuren@inbox.ru*
Ереванский государственный университет
E-mail: *karakhanyan@yahoo.com*

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию свойств β-равномерных алгебр Дирихле и максимальных β-равномерных алгебр. Приводится метод, позволяющий по раномерной алгебре Дирихле (соответственно по максимальной равномерной алгебре) построить β-равномерную алгебру Дирихле (соответственно максимальную β-равномерную алгебру). Как следствие получен соответствующий аналог теоремы Бишопа-Шилова об антисимметричном разбиении.

MSC2010 number: 46J45; 46H35

Ключевые слова: β- равномерные алгебры; максимальные алгебры; алгебры Дирихле.

Пусть Ω – локально компактное пространство, допускающее компактное исчерпание $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где $K_n \subset K_{n+1}$ и каждое K_n есть компакт. Обозначим через $C_\infty(\Omega)$ алгебру всех ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на Ω. Если в алгебре $C_\infty(\Omega)$ ввести топологию при помощи нормы

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\},$$

то получим коммутативную банахову алгебру $C_b(\Omega)$ у которой пространство максимальных идеалов $M_{C_b(\Omega)} = \beta\Omega$, где $\beta\Omega$ есть Стоун-Чеховская компактификация для Ω (см. [1], [2]). Напомним, что если $\varphi \in M_{C_b(\Omega)}$, то φ – мультипликативный функционал с единичной нормой. Каждая точка $x \in \Omega$ порождает мультипликативный функционал δ_x, полагая $\delta_x(f) = f(x)$, для всех $f \in C_b(\Omega)$.

Преобразованием Гельфанда $f \in C_b(\Omega)$ называется функция $\hat{f}$ на $\beta\Omega$, где $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Из определения $*$-слабой топологии следует, что $\hat{f} \in C(\beta\Omega)$, поэтому преобразование Гельфанда порождает гомоморфизм между алгебрами $C_b(\Omega)$ и $C(\beta\Omega)$, где $C(\beta\Omega)$ – алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на компакте $\beta\Omega$. Отметим, что "нарост"$\beta\Omega \setminus \Omega$ имеет достаточно сложную структуру, хотя бы потому, что в каждой точке "нароста"не выполняется первая аксиома счетности (см. [3]).

Пусть $C_{00}(\Omega)$ есть подалгебра из $C_b(\Omega)$, состоящая из функций с компактными носителями, а $C_0(\Omega)$ – подалгебра $C_b(\Omega)$, содержащая все функции, которые обращаются в нуль в "бесконечности". Так как Ω является σ-компактным множеством (что предлагается везде ниже), то $C_{00}(\Omega) \subsetneq C_0(\Omega)$. Отметим, что $C_0(\Omega)$ есть замкнутый в равномерной норме идеал в банаховой алгебре $C_b(\Omega)$, а $C_{00}(\Omega)$ в этой норме плотна в $C_0(\Omega)$. Кроме того алгебра $C_b(\Omega)$ является $C_0(\Omega)$-модулем.

Так как $C_\infty(\Omega)$ есть $C_0(\Omega)$-модуль, то на $C_\infty(\Omega)$ определим семейство полунорм $\{P_g\}_{g\in C_0(\Omega)}$, полагая

$$P_g(f) = \|T_g f\|_\infty ,$$

где $T_g : C_b(\Omega) \to C_b(\Omega)$ – мультипликативный оператор $T_g f = fg$.

Определим топологию на $C_\infty(\Omega)$ при помощи этого семейства полунорм, где в качестве базиса окрестностей нулевой функции O рассматриваются множества вида

$$U\left(P_1, \ldots, P_n; \varepsilon\right) = \left\{f \in C_\infty(\Omega) :\ P_i(f) < \varepsilon,\ (i = 1, \ldots, n)\right\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\{P_1, \ldots, P_n\}$ – произвольное конечное семейство полунорм из $\{P_g\}_{g\in C_0(\Omega)}$. Определенная таким образом топология будет называться β-топологией на $C_\infty(\Omega)$ и в дальнейшем алгебра $C_\infty(\Omega)$ наделенная β-топологией будет обозначаться через $C_\beta(\Omega)$. Отметим, что β-топология является *локально выпуклой топологией.*

Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \Omega$, сходится к "бесконечности если для любого n найдется такое k, что $x_\ell \notin K_n$, для всех $\ell > k$.

Напомним, что сеть функций $\{f_i\}_{i\in I}$ является β-сетью Коши, если

$$\lim_{i,j\in I} \|f_i g - f_j g\|_\infty = 0,$$

для любого $g \in C_0(\Omega)$.Из σ-компактности Ω, следует что каждая β-сеть Коши, является сетью Коши в равномерной топологии на каждом K_n. Поэтому всякая β-сеть Коши сходится к некоторой непрерывной функции на Ω.

Отметим, что верны следующие утверждения

(а) $C_\beta(\Omega)$ есть β-полная локально выпуклая алгебра.
(б) $C_0(\Omega)$ всюду плотна в $C_\beta(\Omega)$.
(в) $C_\beta(\Omega)^* = M(\Omega)$, где $M(\Omega)$ есть пространство всех регулярных конечных боролевских мер на локально компактном пространстве Ω (см. [4]-[9]).

Заметим, что если $C_k(\Omega)$ есть пополнение $C_\infty(\Omega)$ в топологии, порожденной семейством полунорм $\{P_g\}_{g\in C_{00}(\Omega)}$, тогда $C_k(\Omega)$ – *топологическая алгебра, а пространство всех непрерывных линейных функционалов на* $C_k(\Omega)$ *совпадает с пространством всех конечных мер из* $M(\Omega)$ *у которых компактный носитель.*

Хорошо известно, что каждый линейный мультипликативный функционал на банаховой алгебре непрерывен. С другой стороны из утверждения (в) следует:

Предложение 1. *Существует линейный мультипликативный функционал $\varphi : C_\beta(\Omega) \to \mathbb{C}$, который в β-топологии не является непрерывным.*

Доказательство. Отметим, что если Ω-компакт, что пространство всех мультипликативных функционалов совпадает с Ω так как $M_{C(\Omega)} = \Omega$, т.е. каждый мультипликативный функционал φ есть функционал Дирака δ_{x_0}, где $x_0 \in \Omega$. Заметим, что φ имеет единственную представляющую меру на Ω, которая совпадает с атомарной мерой Дирака, сосредоточенной в точке x_0. С другой стороны если Ω – локально компактное пространство, тогда $C_\beta(\Omega)$ изоморфно $C(\beta\Omega)$.

Пусть $x_0 \in \beta\Omega \setminus \Omega$, тогда мультипликативный функционал $\varphi : C(\beta\Omega) \to \mathbb{C}$, такой, что $\varphi(f) = \hat{f}(x_0)$, является также мультипликативным функционалом на $C_\beta(\Omega)$. Так как у функционала φ существует единственная представляющая мера, сосредоточенная в точке x_0, то в силу утверждения (в), функционал φ не является непрерывным. $\square$

Отметим, что предложение 1 можно также доказать, используя утверждение (б). *Отсюда получаем, что множество всех разрывных мультипликативных функционалов на алгебре $C_\beta(\Omega)$ совпадает с "наростом" $\beta\Omega \setminus \Omega$.*

Напомним, что замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $C_\beta(\Omega)$ называется β-равномерной, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω (т.е. для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$, существует функция $f \in \mathcal{A}$, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Поскольку равномерная топология сильнее β-топологии, β-равномерная алгебра является замкнутой подалгеброй алгебры $C_b(\Omega)$ в sup-норме. В дальнейшем алгебру $\mathcal{A}$ наделенную равномерной топологией будем обозначать через $\mathcal{A}_\infty$, а ее пространство максимальных идеалов через $M_{\mathcal{A}_\infty}$.

Каждый мультипликативный функционал на $\mathcal{A}_\infty$ непрерывен в равномерной норме и $M_{\mathcal{A}_\infty}$ есть компактное в $*$-слабой топологии подмножество единичного шара в $\mathcal{A}_\infty^*$-пространстве, сопряженным к $\mathcal{A}_\infty$.

Так как $C_\beta(\Omega) = C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} + iC_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$, то будем говорить, что $\mathcal{A}$ *есть β-равномерная алгебра Дирихле, если пространство*

$$Re(\mathcal{A}) = \{Re(f) \in C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} : \ f \in \mathcal{A}\}$$

всюду плотно в $C_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$.

$\mathcal{A}$- компактификацией Стоуна-Чеха для Ω называется замыкание в $*$-слабой топологии пространства Ω в пространстве максимальных идеалов $M_{\mathcal{A}_\infty}$. Через $M_\mathcal{A}$ обозначим множество всех β-непрерывных линейных мультипликативных функционалов β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Ясно, что $M_\mathcal{A} \subset M_{\mathcal{A}_\infty}$. Границу Шилова алгебры $\mathcal{A}_\infty$, обозначим через $\partial\mathcal{A}_\infty$, а множество $\partial\mathcal{A}_\infty \cap \Omega$ будет называться

β-границей Шилова алгебры $\mathcal{A}$ и обозначим через $\partial\mathcal{A}$, которое может быть и пустым, соответствующий пример приведен ниже.

Предложение 2. *Пусть* $\partial\mathcal{A}_\infty = \partial\mathcal{A}$, *тогда* $M_\mathcal{A} = M_{\mathcal{A}_\infty}$.

Доказательство. Для $\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty}$ существует представляющая мера μ, сосредоточенная на $\partial\mathcal{A}_\infty$. Из условия $\partial\mathcal{A}_\infty = \partial A \subseteq \Omega$ следует, что мера $\mu \in M(\Omega)$, поэтому φ есть β-непрерывный функционал и поэтому, в силу утверждения (в), получаем, что $\varphi \in M_\mathcal{A}$.

Рассмотрим нетривиальный пример β-равномерной алгебры. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $H^\infty(\Delta)$-алгебра всех ограниченных аналитических функций на Δ. Пусть сеть $\{f_i\}_{i\in I} \subset H^\infty(\Delta)$ является β-сетью Коши, тогда она сходится в β-топологии к непрерывной ограниченной на Δ функции f. Покажем, что $f \in H^\infty(\Delta)$. Для $z_0 \in \Delta$ пусть U – такая окрестность z_0, что $\bar{U} \subset \Delta$, где $\bar{U}$ – замыкание U в $\mathbb{C}$. Тогда существует функция $g \in C_0(\Delta)$, которая равна единице на U. Из определения β-топологии имеем, что сеть $\{gf_i\}_{i\in I}$ равномерно на Δ сходится к f. Отсюда имеем, что сеть аналитических функций $\{f_i\}_{i\in I}$ равномерно на U сходится к функции gf. Но тогда f – аналитическая функция на U, а в силу произвольности точки z_0, функция f аналитическая, ограниченная на Δ, т.е. $f \in H^\infty(\Delta)$. □

В связи с проблемой короны, отметим, что β-равномерная алгебра $H^\infty(\Delta)$ не имеет короны, так как пространство β-непрерывных мультипликативных линейных функционалов данной алгебры есть Δ. Одновременно отметим, что ее β-граница Шилова $\partial H^\infty(\Delta) = \emptyset$.

Пусть $\mathcal{A}^\perp$ – пространство всех мер из $M(\Omega)$, которые ортогональны к алгебре $\mathcal{A}$. По теореме о биполяре (см. [10], стр. 160) $\mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}$, так как $\mathcal{A}$ замкнуто в β-топологии. Как и в [11] обозначим через M_φ множество всех представляющих мер для $\varphi \in M_\mathcal{A}$, то есть, множество всех вероятностных мер μ на Ω таких, что $\varphi(f) = \int\limits_\Omega f\, d\mu$. Ясно, что M_φ – замкнутое, выпуклое подмножество в $M(\Omega)$.

Замкнутое подмножество E локально компактного пространства Ω будет называться *множеством пика для алгебры* $\mathcal{A}$, если существует функция $f \in \mathcal{A}$, такая, что $f(x) = 1$ для всех $x \in E$ и $|f(x)| < 1$, если $x \in \Omega \setminus E$. Множество E будет называться *p-множеством*, если оно есть пересечение множеств пика. В дальнейшем μ_E будет обозначать сужение меры $\mu \in M(\Omega)$ на множество E. Если $\mu \in \mathcal{A}^\perp$, а E – произвольное замкнутое множество в Ω, то мера μ_E не обязана принадлежать $\mathcal{A}^\perp$.

Теорема 1. *Пусть E – замкнутое множество в локально компактном пространстве Ω, и E есть p-множество для β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$ на Ω. Тогда для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^{\perp}$, мера $\mu_E \in \mathcal{A}^{\perp}$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что E – множество пика для алгебры $\mathcal{A}$. Если функция f пикует на E, то $\|f\|_{\infty} = 1$.

Определим множество $\mathcal{E} = \{\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty} : \varphi(f) = 1\}$. Если отождествить точки $x \in \Omega$ с мультипликативным функционалом Дирака δ_x, $\delta_x(f) = f(x)$, то можно считать что $\Omega \subset M_{\mathcal{A}_\infty}$ и значит $E \subset \mathcal{E}$.

Рассмотрим функцию $h = \dfrac{1+f}{2}$, тогда $\varphi(h) = 1$ для всех $\varphi \in \mathcal{E}$, и $|\varphi(h)| < 1$ для $\varphi \in M_{\mathcal{A}_\infty} \setminus \mathcal{E}$. Поэтому преобразование Гельфанда $\hat{h}$ функции h имеет пик на множество $\mathcal{E}$. В силу теоремы Гликсберга о множествах пика (см. [11]) мера $\mu_\varepsilon \in \mathcal{A}_\infty^{\perp}$, для любой меры $\mu \in \mathcal{A}_\infty^{\perp}$. Ввиду того, что

$$\mathcal{A}^{\perp} = \left\{\mu \in \mathcal{A}_\infty^{\perp} : \operatorname{supp}(\mu) = \Omega\right\}$$

и $\mathcal{E} \cap \Omega = E$, то для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^{\perp}$ имеем, что $\mu_E \in \mathcal{A}^{\perp}$. □

Заметим, что если E есть p-множество, то сужение $\mathcal{A}$ на E замкнуто в равномерной норме. Из теоремы 1 следует, что *если $E_1, \ldots, E_n$ есть конечное семейство p-множеств для алгебры $\mathcal{A}$, то $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ также будет p-множеством для алгебры $\mathcal{A}$.*

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны*

(а) *$\mathcal{A}$-алгебра Дирихле.*

(б) *Единственная вещественная конечная борелевская мера на Ω, ортогональная к β-равномерной алгебре $\mathcal{A}$, есть нулевая мера.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Допустим противное. Пусть μ есть вещественная мера, ортогональная к $\operatorname{Re}(\mathcal{A})$. Тогда $\operatorname{Re}(\mathcal{A})$ содержится в пространстве $C_\mu(\Omega) = \{f \in C_\beta(\Omega)_{\mathbb{R}} : f \perp \mu\}$. Так как $C_\mu(\Omega)^{\perp} = \mathbb{C}\mu$ и $(\mathbb{C}\mu)^{\perp} = C_\mu(\Omega)$, то $C_\mu(\Omega)$ есть β-замкнутое подпространство в $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$, содержащее $\operatorname{Re}(\mathcal{A})$, что есть противоречие. (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $\mathcal{A}$ не есть алгебра Дирихле. Тогда β-замыкание $\operatorname{Re}(\mathcal{A})$ есть замкнутое подпространство в $C_\beta(\Omega)_{\mathbb{R}}$. Поэтому найдется ненулевая конечная борелевская вещественная мера μ на Ω, ортогональная к $\operatorname{Re}(\mathcal{A})$. Так как $\mathcal{A}$ есть подпространство в $\operatorname{Re}(\mathcal{A}) + i\operatorname{Re}(\mathcal{A})$ и эта мера ортогональна к $\operatorname{Re}(\mathcal{A}) + i\operatorname{Re}(\mathcal{A})$, то она ортогональна к $\mathcal{A}$, а это есть противоречие. □

Напомним, что если $\mathcal{A}_\infty$ – равномерная алгебра на компакте Ω, то она называется *максимальной* ($\mathcal{A}_\infty \neq C(\Omega)$), если из того, что $\mathcal{B}$ –равномерная алгебра и $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{B} \subsetneq C(\Omega)$ следует, что $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{B}$.

Аналогично β-равномерная алгебра $\mathcal{A}$ на локально компактном пространстве Ω будет называться *максимальной*, если $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$ и не существует β-равномерной алгебры, заключенной строго между $\mathcal{A}$ и $C_\beta(\Omega)$.

Заметим, что из максимальности β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$ не следует, что соответствующая равномерная алгебра $\mathcal{A}_\infty$ максимальна в $C_b(\Omega)$.

Отметим, что если F – замкнутое подмножество в Ω, то F и $Y = \Omega \setminus F$ являются локально компактными множествами в индуцированной топологии Ω.

Обозначим через $\mathcal{A}_Y$ (соответственно $\mathcal{A}_F$) замыкание в $C_\beta(Y)$ (соответственно в $C_\beta(F)$) сужения β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$ на Y (соответственно F). Ясно, что $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_F$ есть β-равномерные алгебры на Y и F соответственно.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ есть β-равномерная алгебра Дирихле, $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$, где Ω – локально компактное пространство, а F есть p-множество для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_Y$, $\mathcal{A}_F$ являются алгебрами Дирихле соответственно на Y и F. Если при этом $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$, то $\mathcal{A}_Y$ есть собственная подалгебра алгебры $C_\beta(Y)$.*

Доказательство. Пусть μ есть вещественная конечная борелевская мера, ортогональная к $\mathcal{A}_Y$ $(\mathcal{A}_F)$, тогда она ортогональна и к алгебре $\mathcal{A}$, а поэтому, $\mu = 0$ и значит алгебры $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_F$ есть алгебры Дирихле.

Пусть $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$, тогда $\mu_F = 0$ для любой меры $\mu \in A^\perp$. Откуда для любого $f \in A$ имеем

$$\int\limits_\Omega f\, d\mu = \int\limits_Y f\, d\mu = 0\,,$$

т.е. $\mu \in \mathcal{A}_Y^\perp$. Так как $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$, то множество $\mathcal{A}^\perp$ нетривиально и следовательно $\mathcal{A}_Y^\perp$ не тривиальное подпространство в $M(Y)$ и поэтому $\mathcal{A}_Y \neq C_\beta(Y)$. □

Заметим, что для β-равномерных алгебр Дирихле $\mathcal{A}$ могут выполняться сразу два условия $\mathcal{A}_F \neq C_\beta(F)$ и $\mathcal{A}_Y \neq C_\beta(Y)$. Однако для максимальных алгебр ситуация несколько иная.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – максимальная β-равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω, а F есть p-множество. Тогда либо $\mathcal{A}_Y$ есть максимальная β-равномерная алгебра на Y, и $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$ $(Y = \Omega \setminus F)$, либо $\mathcal{A}_F$ есть максимальная β-равномерная алгебра на F, и $\mathcal{A}_Y = C_\beta(Y)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что F – множество пика для алгебры $\mathcal{A}$. Пусть h есть пикующая на множестве F функция из алгебры $\mathcal{A}$. Тогда последовательность $\{e_n = 1 - h^n; n = 1, 2, \ldots\}$ есть аппроксимативная единица в идеале $J_F = \{f \in \mathcal{A} : f|_F = 0\}$. Предположим, что $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$. В таком случае, для любой меры $\mathcal{A}^\perp$, имеем, что $\mu_F = 0$, т.е. для любой функции

$f \in C_\beta(\Omega)$, выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mu = \int\limits_{Y} f\,d\mu.$$

Пусть $\mathcal{A}_Y$ не является максимальной β-равномерной алгеброй на Y. Тогда существует β-равномерная алгебра $\mathcal{B}$ на Y такая, что

$$\mathcal{A}_Y \subsetneqq \mathcal{B} \subsetneqq C_\beta(Y).$$

Отсюда имеем, что

$$\{0\} \neq \mathcal{B}^\perp \subsetneqq \mathcal{A}_Y^\perp \subsetneqq M(Y).$$

Так как $\mathcal{B}$ – алгебра, то имеем, что для любой функции $f \in \mathcal{B}$ и меры $\mu \in \mathcal{B}^\perp$, произведение $f\mu \in \mathcal{B}^\perp$. Для любого $f \in \mathcal{B}$, функции fe_n непрерывны на Ω и, следовательно, принадлежат алгебре $C_\beta(\Omega)$. Пусть μ – нетривиальная мера из $\mathcal{B}^\perp$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} fe_n\,d\mu = \int\limits_{Y} fe_n\,d\mu = 0,$$

для любого $f \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим β-равномерную алгебру $\check{\mathcal{B}}$, порожденную функциями из $\mathcal{A}$ и функциями вида fe_n, где $f \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$. Из вышесказанного следует, что $\check{\mathcal{B}} \subsetneqq C_\beta(\Omega)$. Из максимальности $\mathcal{A}$ следует, что $\mathcal{A} = \check{\mathcal{B}}$, откуда имеем, что $fe_n \in \mathcal{A}$ для любого $f \in \mathcal{B}$ и $n \in \mathbb{N}$. При $n \to \infty$ последовательность $\{fe_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $C_\beta(Y)$ к функции f. Отсюда следует, что $f \in \mathcal{A}_Y$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}_Y$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{A}_Y$-максимальная алгебра.

Пусть $\mathcal{A}_F \neq C_\beta(F)$. Тогда $\mathcal{A}_F^\perp = (J_F + \mathcal{A})^\perp \neq \{0\}$, где $J_F = \{f \in C_\beta(\Omega) : f|_F = 0\}$.

Так как $J_F + \mathcal{A}$ – алгебра и существует нетривиальная мера на F, ортогональная к алгебре $J_F + \mathcal{A}$, то замыкание $J_F + \mathcal{A}$ в алгебре $C_\beta(\Omega)$ будет β-равномерной алгеброй, строго содержащейся в $C_\beta(\Omega)$. Из максимальности $\mathcal{A}$ следует, что замыкание $J_F + \mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A} = \mathcal{A} + J_F$, то J_F есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Отметим, что J_F плотно в $C_\beta(Y)$, поэтому $\mathcal{A}_Y = C_\beta(Y)$. Теперь убедимся в том, что $\mathcal{A}_F$ есть β-равномерная максимальная подалгебра в алгебре $C_\beta(F)$. Пусть это не так, т.е. существует β-равномерная алгебра $\mathcal{B}$ на F такая, что, что

$$\mathcal{A}_F \subsetneqq \mathcal{B} \subsetneqq C_\beta(F).$$

Продолжим каждую функцию $f \in \mathcal{B}$ до непрерывной функции $\check{f}$ на Ω. Множество таких продолжений обозначим через $\check{\mathcal{B}}$, тогда $J_F + \check{\mathcal{B}}$ есть алгебра, содержащая акгебру $\mathcal{A}$. Из условия $\mathcal{A}_F \subsetneqq \mathcal{B} \subsetneqq C_\beta(F)$ следует, что $\mathcal{A} \subsetneqq J_F + \check{\mathcal{B}} \subsetneqq C_\beta(\Omega)$. Так как $\left(J_F + \check{\mathcal{B}}\right)^\perp = \mathcal{B}_F^\perp$, то замыкание $J_F + \check{\mathcal{B}}$ в алгебре $C_\beta(\Omega)$ не совпадает с

$C_\beta(\Omega)$. Поскольку $\mathcal{A}$ есть максимальная β-равномерная алгебра, то $\mathcal{A} = J_F + \check{\mathcal{B}}$ и значит $\mathcal{A}_F = \mathcal{B}$. Получили противоречие. Теорема 4 доказана. $\square$

Ниже предлагается метод построения максимальной β-равномерной алгебры (теорема 5) с помощью максимальной равномерной алгебры.

Напомним, что если $\mathcal{A}$-равномерная алгебра на метризуемом компакте X, то множество пика E в X, для которого сужение $\mathcal{A}|_E = C(E)$, называется *интерполяционным множеством пика для алгебры* $\mathcal{A}$. Так как E – интерполяционное множество пика для алгебры $\mathcal{A}$, то в силу теоремы 2 $\mu_E = 0$ для всех $\mu \in \mathcal{A}^\perp$.

Пусть $\Omega = X \setminus E$ и $\mathcal{A}_0$ есть замыкание сужения $\mathcal{A}|_\Omega$ в $C_\beta(\Omega)$. Так как для любой меры $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ имеем, что $\mu_E = 0$, то можно считать, что $\mathcal{A}^\perp$ есть подпространство в $M(\Omega)$. Так как $\mathcal{A}|_\Omega \subset \mathcal{A}_0$, то $\mathcal{A}_0^\perp \subset (\mathcal{A}|_\Omega)^\perp = \mathcal{A}^\perp$. С другой стороны, если $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ и сеть функций $\{f_j\}_{j\in J}$ из $\mathcal{A}|_\Omega$ β-сходится к f_0, то из равенства $P_g(f_j - f_0) = P_g\left(\bar{f}_j - \bar{f}_0\right)$ следует, что

$$\lim_J \int\limits_\Omega \left(g\left(f_j - \bar{f}_0\right)\right) g^{-1} d\mu = 0,$$

где g – такая функция из $C_0(\Omega)$, что $g^{-1}\mu \in M(\Omega)$. Отсюда $\int\limits_\Omega \bar{f}_0 d\mu = 0$, т.е. $\mathcal{A}^\perp \subset (\mathcal{A}|_\Omega)^\perp$ и значит $\mathcal{A}_0^\perp = \mathcal{A}^\perp$.

Теорема 5. *Если $\mathcal{A}$ — равномерная максимальная алгебра на X, то алгебра $\mathcal{A}_0$ есть β-равномерная максимальная алгебра на Ω.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ есть β-равномерная алгебра на Ω, содержащая алгебру $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B} \neq C_\beta(\Omega)$.

Рассмотрим семейство функций $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, где $e_n(x) = 1 - h(x)^n \in \mathcal{A}$, порождена функцией $h \in \mathcal{A}$, которая имеет пик на E, т.е. $h(x) \equiv 1$ на E и $|h(x)| < 1$, если $x \in \Omega \setminus E$. Это семейство является ограниченной аппроксимативной единицей для алгебры $C_0(\Omega)$. Поэтому семейство $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ есть аппроксимативная единица (в β-топологии) и для алгебры $\mathcal{A}_0$. В самом деле, для любой функции $g \in C_0(\Omega)$ и $f \in \mathcal{A}_0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_g(e_n f - f) = \lim_{n\to\infty} P_g(h^n f) = \lim_{n\to\infty} \sup_\Omega |g h^n f| = 0.$$

Отсюда, $e_n f \to f$ в β-топологии. Так как $\mathcal{A}_0^\perp = \mathcal{A}^\perp$ и $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq C_\beta(\Omega)$, то пространство мер $\mathcal{B}^\perp$ есть нетривиальное подпространство в $\mathcal{A}^\perp$. Пусть μ есть нетривиальная мера из $\mathcal{B}^\perp$. Убедимся в том, что $e_n f \in \mathcal{A}$ для любого f. Так как e_n – непрерывная функция на X, равная нулю на E, а f – непрерывная и ограниченная функция на $\Omega \setminus E$, то $e_n f$ – непрерывные функции на X. Ввиду того, что $\mathcal{A}_0\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, то нетривиальная мера μ ортогональна к равномерной алгебре на X, порожденной функциями из $\mathcal{A}$ и функциями $e_n f$. Из максимальности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что $e_n f \in \mathcal{A}$. Отсюда получаем, что $e_n f \in \mathcal{A}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Используя тот факт, что в β-топологии $e_n f \to f$, получим $f \in \mathcal{A}$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$. Теорема доказана. □

Можно, аналогично убедиться в том, что если $\mathcal{A}$ равномерная алгебра Дирихле, то $\mathcal{A}_0$ есть β-равномерная алгебра Дирихле.

Теперь исходя из вышеуказанных результатов, обсудим известную теорему Бишопа-Шилова об антисиметичном разбиении для β-равномерных алгебр, которая ранее была доказана И. Гликсбергом в работе [12].

Пусть $\mathcal{A}$ есть β-равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω. Замкнутое подмножество E множества Ω называется *множеством антисимметрии для β-равномерной алгебры* $\mathcal{A}$, если алгебра $\mathcal{A}|_F$ не содержит вещественных функций отличных от постоянной. Множество антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$ можно упорядочить по вложению, образуя частично упорядоченное множество. Максимальные элементы это множества называются максимальными множествами антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому, каждое множество антисимметрии алгебры $\mathcal{A}$ содержится в некотором максимальном множестве антисимметрии.

Теорема 6 (И. Гликсберг)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ есть β-равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω. Тогда*

а) *каждое максимальное множество антисимметрии является p-множеством для алгебры $\mathcal{A}$;*
б) *все максимальные множества антисимметрии попарно не пересекаются, и их объединение есть Ω.*

Доказательство. Пусть Ω_0 есть $\mathcal{A}$-компактификация Стоуна-Чеха. Тогда множество Ω всюду плотно в компакте Ω_0 и каждая функция из $\mathcal{A}$ однозначно расширяется до функции на Ω_0. Это расширение порождает такую алгебру $\mathcal{A}_0$ на Ω_0, что сужение $\mathcal{A}_0$ на Ω совпадает с $\mathcal{A}$. По теореме Бишопа-Шилова об антисимметричном разбиении для равномерных алгебр, множество Ω_0 представляются в виде объеденения $\Omega_0 = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$, где $\{F_i\}_{i\in I}$ есть попарно непересекающие максимальные множества антисимметрии для алгебры $\mathcal{A}_0$, которые есть p-множества. Тогда множества $E_i = F_i \cap \Omega$, попарно не пересекаются, их объеденение есть Ω, и они являются максимальными и p-множествами для β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Теорема доказана. □

Отсюда как следствие имеет место

Теорема 7. *Пусть* $\{E_i\}_{i\in I}$ *– разбиение локально компактного пространства* Ω *на максимальные множества антисимметрии для* β*-равномерной алгебры* $\mathcal{A}$*. Пусть функция* $f \in C_\beta(\Omega)$ *такая, что ее сужение на каждое множество* E_i *принадлежит* $\mathcal{A}|_{E_i}$*. Тогда* $f \in \mathcal{A}$*.*

Замечание. Отметим, что исследования проведенные в данной работе и в работах [8], [9] можно продолжить в направлении замены условия локальной компактности в Ω условием вполне регулярности, где вместо идеала $C_0(\Omega)$ естественно рассмотреть идеал $B_0(\Omega)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на Ω, которые обращаются в нуль на "бесконечности", поскольку в этом случае запас полунорм порожденных идеалом $C_0(\Omega)$ может оказаться тривиальным.

Abstract. The paper studies the properties of β-uniform Dirichlet algebras and maximal β-uniform algebras. A method is given for construction of a β-uniform Dirichlet algebra and a maximal β-uniform algebra by means of a uniform Dirichlet algebra and a maximal uniform algebra respectively. As a consequence, an analog of the Bishop-Shilov theorem on antisymmetric partition is obtained.

Список литературы

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные Нормированные Кольца, Госуд. изд. физ-мат. лит., Москва (1960).
[2] М. А. Наймарк, Нормированные Кольца, Наука, Москва (1968).
[3] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, Основы Общей Топологии в Задачах и Упражнениях, Наука (1974).
[4] R. C. Buck, "Bounder continuous functions on a locally compact space", Michigan, Math. J., **5**, 95 – 104 (1958).
[5] R. Giles, "A generalization of the strict topology", Trans. of the Amer. Math. Soc., **161**, 467 – 474 (1971).
[6] F. D. Sentilles, "Bounded continuous functions on a completely regular space", Trans. of the Amer. Math. Soc., **168**, 311 – 336 (1972).
[7] J. B. Conway, "The strict topology and compactness in the space of measures", Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 75 – 78 (1966).
[8] M. I. Karakhanyan, T. A. Khor'kova, "A characterization of the algebra $C_\beta(\Omega)$", Functional Anal. and its Applic., **13** (1), 69 – 71 (2009).
[9] M. I. Karakhanyan, T. A. Khor'kova, "A characteristic property of the algebra $C(\Omega)_\beta$", Siberian Math. J., **50** (1), 77 – 85 (2009).
[10] Х. Шефер, Топологические Векторные Пространства, Мир, Москва (1971).
[11] T. W. Gamelin, Uniform Algebras, PRENTICE-HALL, INC, Englewood Cliffs, N.J. (1969).
[12] I. Gliksberg, "Bishops generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology", Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 329 – 333 (1963).

Поступила 21 апреля 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 27-32.

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ

С. С. КАЗАРЯН

Институт математики НАН Армении

Аннотация. Доказывается, что системы функций $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и система функций $\{\cos(n-\beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ не являются безусловными базисами ни в одном из пространств $L^p(0,\pi)$, $p \neq 2$.

MSC2010 number: 42A10, 42A15, 42A20

Ключевые слова: Тригонометрические системы; коэффициенты Фурье; не гармонические ряды.

Следующая теорема была доказана Е. И. Моисеевым [1].

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$.*Система функций* $\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, 2-\frac{1}{p}\right)$. *Система функций* $\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta \in \left(-1-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right)$.

Отметим, что системы $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos(n-\beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ не являются базисами в $L^1(0,\pi)$ для $\beta \in \mathbb{R}$, так как равномерно ограниченная нормированная система не может быть базисом в $L^1(0,\pi)$ (см.[2], [3], [12]).

Легко проверить, что если для некоторого числа $\beta \in \mathbb{R}$ системы $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(n-\beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ являются базисами в пространстве $L^p(0,\pi)$, то система $\left\{e^{i(n-\beta\,\mathrm{sign}\,n)\,x}\right\}$ является базисом в $L^p(-\pi,\pi)$. С результатами теории негармонических рядов можно познакомиться в [4] – [6]. Условия для безусловной базисности систем синусов и косинусов были изучены в [7]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда система функций* $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ *и система функций* $\{\cos(n-\beta)x\}_{n=0}^{\infty}$ *не являются безусловными базисами ни в одном из пространств* $L^p(0,\pi)$, $p \neq 2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай системы $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что $1<p<2$. Согласно теоремы Моисеева, $\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{2}\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ может быть безусловным базисом в $L^p(0,\pi)$ только если $\beta\in\left(-\frac{1}{p},2-\frac{1}{p}\right)$. Возьмем $2\,\pi$-периодическую нечетную функцию f такую, что $f\in L^p(-\pi,\pi)$. Для коэффициентов Фурье функции f по тригонометрической системе имеем, что

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\cos(n\,t)\,dt,\quad n=0,1,...;$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\sin(n\,t)\,dt,\quad n=1,2,....$$

Равенство Парсеваля в этом случае имеет следующий вид

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2(f)+b_n^2(f)\right]=\pi^{-1}\|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}.$$

Используя формулу $\sin(n-\beta)\,x=\sin(n\,x)\,\cos(\beta\,x)-\cos(n\,x)\,\sin(\beta\,x)$, легко получаем, что для любой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$ и для всех $m\in N$

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}c_n\,\sin[(n-\beta)\,x]\right\|^2_{L^2(0,\pi)}\le\sigma\,\|\{c_n\}\|^2_{l^2}. \tag{1}$$

Если бы система $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ была бы безусловным базисом в $L^p(0,\pi)$, $1<p<2$, то по теореме Орлича [9] получили бы, что для любой функции $f\in L^p(-\pi,\pi)$, $1<p<2$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\,\sin[(n-\beta)\,x]\quad\text{в}\quad L^p(0,\pi)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\,\|\sin[(n-\beta)\,x]\|^2_{L^p(0,\pi)}<\infty.$$

Из последнего условия следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2<\infty$$

для всех $f\in L^p(0,\pi)$, что противоречит условию (1), так как можем выбрать $f\in L^p(0,\pi)$ такую, что $f\notin L^2(0,\pi)$. Перед тем как перейти к доказательству теоремы 1 для случая $2<p<\infty$ рассмотрим функции

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1/2}\sin[k\,x],$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \cos[k\,x],$$

которые принадлежат пространству $L^p(0,\pi)$ для всех $1 \le p < 2$ (см. [10], стр. 298). Посчитаем кощффициенты $b_n^*(\varphi)$, $b_n^*(\psi)$, где

$$b_n^*(f) = \int_0^{\pi} f(t)\, \sin[(n-\beta)\,t]\,dt.$$

Для этого воспользуемся равенствами

$$\int_0^{\pi} \sin[k\,x]\, \sin[(n-\beta)\,x]\,dx = \begin{cases} \frac{\sin[\beta\,\pi]}{k^2-(n-\beta)^2}\cdot k, & \text{когда} \quad k+n=2l,\ l\in N \\ -\frac{\sin[\beta\,\pi]}{k^2-(n-\beta)^2}\cdot k, & \text{когда} \quad k+n=2l-1,\ l\in N \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos[k\,x]\, \sin[(n-\beta)\,x]\,dx = \begin{cases} \frac{1-\cos[\beta\,\pi]}{k^2-(n-\beta)^2}\cdot k, & \text{когда} \quad k+n=2l,\ l\in N \\ \frac{1+\cos[\beta\,\pi]}{k^2-(n-\beta)^2}\cdot k, & \text{когда} \quad k+n=2l-1,\ l\in N \end{cases}$$

Из полученных формул сразу получаем, что для любого $\nu \in N$

$$b_{2\nu-1}^*(\varphi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}\,\sin[\beta\,\pi]}{(2\,k)^2-(2\,\nu-1-\beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}\,\sin[\beta\,\pi]}{(2\,k+1)^2-(2\,\nu-1-\beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}\,\sin[\beta\,\pi]}{(2\,k)^2-(2\,\nu-\beta)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}\,\sin[\beta\,\pi]}{(2\,k+1)^2-(2\,\nu-\beta)^2},$$

$$b_{2\nu-1}^*(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}\,(1+\cos[\beta\,\pi])}{(2\,k)^2-(2\,\nu-1-\beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}\,(1-\cos[\beta\,\pi])}{(2\,k+1)^2-(2\,\nu-1-\beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}\,(1-\cos[\beta\,\pi])}{(2\,k)^2-(2\,\nu-\beta)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}\,(1+\cos[\beta\,\pi])}{(2\,k+1)^2-(2\,\nu-\beta)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\beta^{(1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{\sin(\beta\,\pi)} + \frac{\psi(x)}{1+\cos(\beta\,\pi)}.$$

Для этой функции имеем, что

$$b_{2\nu-1}^*(f_\beta^{(1)}) = \lambda_\beta^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}}{(2\,k+1)^2-(2\,\nu-1-\beta)^2},$$

$$b_{2\nu}^*(f_\beta^{(1)}) = \lambda_\beta^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}}{(2\,k)^2-(2\,\nu-\beta)^2},$$

где

$$\lambda_\beta^{(1)} = 1 + \frac{1-\cos(\beta\,\pi)}{1+\cos(\beta\,\pi)} = \frac{2}{1+\cos(\beta\,\pi)}.$$

Для функции

$$f_\beta^{(2)}(x) = -\frac{\varphi(x)}{\sin[\beta\,\pi]} + \frac{\psi}{1-\cos(\beta\,\pi)}$$

будем иметь

$$b^*_{2\nu-1}(f^{(2)}_\beta) = \lambda^{(2)}_\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,k)^{1/2}}{(2\,k)^2 - (2\,\nu - 1 - \beta)^2},$$

$$b^*_{2\nu}(f^{(2)}_\beta) = \lambda^{(2)}_\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,k+1)^{1/2}}{(2\,k+1)^2 - (2\,\nu - \beta)^2},$$

где

$$\lambda^{(2)}_\beta = \frac{2}{1-\cos(\beta\,\pi)}.$$

Когда $0 < \beta < 1$ мы имеем, что для любого $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\lambda^{(1)}_\beta}\, b^*_{2\nu-1}(f^{(1)}_\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)^{1/2}}{(2l-1)^2 - (2\nu-1-\beta)^2} \geq \int_1^{2\nu-3} \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt +$$

$$+ \int_{2\nu-1}^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt + \frac{(2\nu-3)^{1/2}}{(2\nu-3)^2-(2\nu-1-\beta)^2}.$$

Так как

$$\int_0^1 \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt < 0 \quad \text{и} \quad \int_{2\nu-3}^{2\nu-1} \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt < 0,$$

то мы приходим к следующему неравенству

$$\frac{1}{\lambda^{(1)}_\beta}\, b^*_{2\nu-1}(f^{(1)}_\beta) \geq \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt - \frac{(2\nu-3)^{1/2}}{(2-\beta)\,(2\nu-\beta-4)}.$$

Имеем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2-(2\nu-1-\beta)^2}\, dt = \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}},$$

где последний интеграл является значением преобразования Меллина функции $(x^2-1)^{-1}$ в точке $3/2$ (см. [11], стр. 337). Откуда следует, что для некоторого числа N_0

$$\frac{1}{\lambda^{(1)}_\beta}\, b^*_{2\nu-1}(f^{(1)}_\beta) \geq \frac{\pi-1}{2}\, \frac{1}{(2\nu-1-\beta)^{1/2}}$$

для всех $\nu \geq N_0$.

Отсюда сразу следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b^*_k(f^{(1)}_\beta)|^2 = \infty. \tag{2}$$

Когда $-1/4 < \beta < 0$ аналогичным образом получаем, что

$$\frac{1}{\lambda^{(2)}_\beta}\, b^*_{2\nu}(f^{(2)}_\beta) \geq \frac{\pi-2}{2}\, \frac{1}{(2\nu-\beta)^{1/2}}$$

для всех $\nu \geq N_1$, где N_1– некоторое число. Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k^*(f_\beta^{(2)})|^2 = \infty. \tag{3}$$

Условия (2) и (3) нам дают возможность завершить доказательство теоремы 1 для системы $\{\sin[(n-\beta)\,x]\}_{n=1}^{\infty}$.

Действительно, предположим, что система $\{\sin[(n-\beta)\,x]\}_{n=1}^{\infty}$ для некоторого $2 < p < \infty$ является безусловным базисом в $L^p(0,\pi)$. Тогда сопряженная система $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет безусловным базисом в $L^{p'}(0,\pi)$.

Заметим, что (см. [1])

$$0 < \inf_n \|h_n\|_{L^{p'}(0,\pi)} \leq \sup_n \|h_n\|_{L^{p'}(0,\pi)} < \infty.$$

Отсюда, применяя теоремы Орлича, приходим к противоречию с условиями (2) и (3). Таким образом, теорема 1 полностью доказана для системы $\{\sin[(n-\beta)\,x]\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство теоремы 1 для случая системы $\{\cos[(n-\beta)\,x]\}_{n=1}^{\infty}$ аналогично, поэтому мы не будем приводить детали. $\square$

Из теоремы 1 сразу следует

Следствие. Система функций $\left\{e^{i(n-\beta\,\mathrm{sign}\,n)\,x}\right\}$ не является безусловным базисом ни в одном из пространств $L^p(-\pi,\pi)$, $p \neq 2$.

Abstract. We prove that systems of functions $\{\sin(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos(n-\beta)x\}_{n=1}^{\infty}$ are not unconditional bases in not any space $L^p(0,\pi)$, $p \neq 2$.

Список литературы

[1] Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов”, ДАН СССР, **275**, 794 – 798 (1984).
[2] К. С. Казарян, “Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем”, Докл. АН Арм.ССР, **64**, 140 – 145 (1979).
[3] S. Kwapien, S. Szarek, “An estimation of the Lebesque functions of biortogonal systems with an application to the nonexistence of some bases in C and L'”, Studia Math., **66**, 185 – 200 (1979).
[4] R. M. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1980).
[5] А. М. Седлецкий, “Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси”, УМН, **37**, 51– 95 (1982).
[6] А. М. Седлецкий, Негармонический Анализ, Итоги Науки и Техники, **96** (2001).
[7] X. He, H. Volkmer, “Riesz bases of solutions of Sturm-L iouville equations”, Journ. of Fourier Anal. and Appl., **7**, 297 – 307 (2001).
[8] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Гос. Изд. Физ.-Мат., Лит. (1961).

[9] W. Orlicz, “Über unbedingte Konvergenz in Funktionen Raumen I”, Studia Math., **4**, 33 – 37 (1933).

[10] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **1**, М., Мир (1965).

[11] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений, Гос. Изд. Физ.-Мат., Лит., Москва (1963).

[12] А. М. Олевский, “Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормированным системам”, Изв. АН СССР, сер. Математика, **30** (3), 387 – 432 (1966).

Поступила 7 сентября 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 33-50.

ПОЛНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВ ТОЧЕК РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

Г. А. КАРАГУЛЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *g.karagulyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказывается следующая теорема: Для того, чтобы $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль.

MSC2010 number: 42A20

Ключевые слова: Ряды Фурье-Хаара, множества расходимости, множества $G_{\delta\sigma}$.

1. Введение

Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

множество $E \subset [0,1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0,1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1).

Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [14], [7]): *для того чтобы $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ).*

В 1910г. А. Хаар (см. [6] или [10] часть 3.4) доказал, что ряды Фурье-Хаара непрерывных функций сходятся равномерно, и что для произвольных рядов Фурье-Хаара имеет место сходимость почти всюду на интервале $[0,1]$. Отсюда ясно, что множества точек расходимости рядов Фурье-Хаара могут иметь только нулевые меры. Класс множеств неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью была охарактеризована в работе М. А. Лунины [12]. Там доказывается, что *во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа* $\tilde{G}_\delta$, *и наоборот любое множество типа* $\tilde{G}_\delta$ *может быть множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции*. При этом эта функция может иметь сколь угодно медленно растущую функцию распределения. Отметим, что в более ранней работе В. И. Прохоренко [13] было установлено *существование функции*

$$f(x) \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p$$

ряд Фурье-Хаара которой неограниченно расходится на данном множестве E *меры нуль*, а в 1992 В. М. Бугадзе [1] доказал, что *для любого множества меры нуль существует функция из класса* $L^\infty[0,1]$ *ряд Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве*.

Аналогичные задачи рассмотрены также для тригонометрических рядов Фурье ([15], [16], [8], [3], [4],[20]) а также для рядов Фурье по системе Уолша([18], [19], [2], [5]). Мы не будем обсуждать результаты этих работ. Отметим лишь работу Целлера [20], где дается полная характеристика множеств точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов Фурье, основываясь на знаменитом примере А. Н. Колмогорова [11]. В [20] доказывается, что *для любого множества* $E\subset[0,2\pi]$ *типа* G_δ *существует ряд Фурье, который неограниченно расходится в каждой точке* E *и сходится в каждой точке его дополнения*. Отметим, что вопрос о характеризации множеств точек расходимости рядов Фурье остается открытым. Об этой а также о других задачах аналогичного характера обсуждается в обзорной статье П. Л. Ульянова [17].

И наконец отметим, что недавно в работе [9] установлена теорема общего характера из которой следуют некоторые из результатов упомянутых выше работ. В [9] доказывается, что *если последовательность линейных операторов* $U_n : L^1 \to L^\infty$ *обладает свойством локализации, то для любого множества* E *меры нуль существует функция* $f \in L^\infty$, *для которой* $U_n f(x)$ *расходится в каждой точке* E. В настоящей работе доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$-множеством меры нуль.*

2. Определения и Вспомогательные леммы

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x),\, n = 1,2,\ldots\}$ (см. [10] часть 3.1). Если ω есть некоторый интервал с концами α и β , то обозначим $\mathring{\omega} = (\alpha,\beta)$, $\bar{\omega} = [\alpha,\beta]$. Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\omega_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$, а при $n \geq 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \omega_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \omega_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \bar{\omega}_k^i, \end{cases} \tag{2.1}$$

если $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0,1,2\ldots$, а в точках разрыва функция $\chi_n(x)$ определяется равенствами

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi_n(x+) + \chi_n(x-)), \quad x \in (0,1), \chi_n(0) = \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-).$$

Через $S_n(x,f)$ обозначим n-ую частичную сумму ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1[0,1]$. Если $\omega = (\alpha,\beta)$ есть некоторый двоичный интервал из $[0,1]$, то обозначим

$$\omega_- = \begin{cases} (2\alpha-\beta,\alpha) & \text{при} \quad \alpha \neq 0, \\ \varnothing & \text{при} \quad \alpha = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\omega_+ = \begin{cases} (\beta,2\beta-\alpha) & \text{при} \quad \beta \neq 1, \\ \varnothing & \text{при} \quad \beta = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Отметим, что если ω_- и ω_+ непустые, то они являются двоичными интервалами смежными для ω и при этом $|\omega_+| = |\omega_-| = |\omega|$. Формулы для частичных сумм $S_n(x,f)$ соответствующие номерам $n = |\omega|^{-1} = 2^k$ можно записывать в виде

$$\begin{aligned} S_{|\omega|^{-1}}(x,f) &= \tfrac{1}{|\omega|}\textstyle\int_\omega f(t)dt, \quad x \in \omega, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\alpha,f) &= \tfrac{1}{|\omega\cup\omega_-|}\textstyle\int_{\omega\cup\omega_-} f(t)dt, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\beta,f) &= \tfrac{1}{|\omega\cup\omega_+|}\textstyle\int_{\omega\cup\omega_+} f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\omega = (\alpha,\beta) \subset [0,1]$ есть двоичный интервал (см. [10], часть 3.1).

Мы будем иметь дело с множествами из метрического пространства $[0,1]$. Открытыми в нем будут множества, которые представимы в виде $G \cap [0,1]$, где G-открытое множество в $\mathbb{R}$. Множества, которые можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств отрезка $[0,1]$, называются множествами типа G_δ. Всевозможные счетные объединения множеств G_δ дает класс множеств типа $G_{\delta\sigma}$. В вышеупомянутой теореме Лунини были рассмотрены множества типа $\tilde{G}_\delta$. Этот класс чуть шире класса множеств типа G_δ. Множества этого класса являются счетными пересечениями множеств, представимых в виде

$$G = \big(\cup_k (a_k, b_k)\big) \cup A,$$

где $\{(a_k, b_k)\}$-конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов, а A составлено из некоторых двоично рациональных точек, содержащихся в множестве $\{a_k, b_k\}$. В Теореме 1 искажение от обычных $G_{\delta\sigma}$ множеств не будет. Причина в том, что счетные пересечения множеств типа $\tilde{G}_\delta$ в точности совпадают с классом множеств типа $G_{\delta\sigma}$, что будет показано при доказательстве Теоремы 1 в параграфе 3.

Для $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ обозначим

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J f(t)dt, \quad \underline{D}f(x) = \liminf_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J f(t)dt$$

где J является интервалом в $\mathbb{R}$. Если имеем $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$, то эту величину обозначим через $Df(x)$. Если $A \subset [0,1]$ есть некоторое измеримое множество, то обозначим

$$\lambda(A) = A \cup \left\{ x \in [0,1] : \overline{D}\mathbb{I}_A(x) = \limsup_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{|A\cap J|}{|J|} > 0 \right\},$$

По теореме Лебега, $Df(x)$ существует и равен $f(x)$ почти всюду. Отсюда следует, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство $|\lambda(A)\setminus A| = 0$. Если I – интервал, то через kI обозначим интервал концентрический с I и имеющий длину $k|I|$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого измеримиго множества $A \subset \Delta = (a, b)$ существует открытое множество G такое, что*

$$A \subset G \subset \Delta,$$

$$|G \cap J| \le |A \cap 4J| + \varepsilon|J|^2 \tag{2.5}$$

для любого интервала J, с $J \not\subset \Delta$.

Доказательство. Отметим, что полуоткрытые интервалы

$$I_0 = \left[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4}\right), \; I_k = \left[b - \frac{b-a}{2^{k+1}}, b - \frac{b-a}{2^{k+2}}\right),$$

$$I_{-k} = \left[a + \frac{b-a}{2^{k+2}}, a + \frac{b-a}{2^{k+1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

образуют разбиение интервала $\Delta = (a, b)$. Очевидно существуют открытые множества E_k такие, что

$$A \cap I_k \subset E_k \subset I_k \cup I_{k-1} \cup I_{k+1}, \quad |E_k| \le |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16}|I_k|^2. \tag{2.6}$$

Обозначим $G = \bigcup_k E_k$. Пусть $J \not\subset (a, b)$ есть некоторый интервал. Если $J \cap (a, b) = \varnothing$, то (2.5) очевидно. В случае $(a, b) \subset J$ имеем

$$|G \cap J| = |G| \le \sum_k |E_k| \le \sum_k |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_k |I_k|^2 \le |A \cap J| + \frac{\varepsilon}{16}|J|^2$$

и получим (2.5). Итак, без ограничения общности можно предполагать $a \in J$, $b \notin J$. Пусть $m \in \mathbb{Z}$ есть максимальное число удовлетворяющее условию $E_m \cap J \ne \varnothing$. Для такого m очевидно имеем

$$\bigcup_{k \le m} I_k \subset 4J.$$

Отсюда, с учетом (2.6), получим

$$|G \cap J| \le \sum_{k \le m} |E_k| \le \sum_{k \le m} |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_{k \le m} |I_k|^2 \le |A \cap 4J| + \varepsilon |J|^2.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Если $B \subset \mathbb{R}$ есть открытое, а $A \subset B$ измеримое множества, с $\lambda(A) \subset B$, $0 \le |A| < |B|$, то существует другое открытое множество $G \subset B$ такое, что*

$$\lambda(A) \subset G, \quad \lambda(G) \subset B, \tag{2.7}$$

$$|G| = \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Предположим $B = \bigcup_k \Delta_k$, где $\{\Delta_k = (a_k, b_k),\ k = 1, 2, \dots\}$ – конечное или счетное семейство попарно не пересекающиеся интервалов. Обозначим $A_k = A \cap \Delta_k$. Из соотношения $\lambda(A) \subset B$ следует $\lambda(A_k) \subset \Delta_k$. Поэтому, применив лемму 1, можно определить открытые множества G_k такие, что справедливы соотношения

$$\lambda(A_k) \subset G_k \subset \Delta_k, \quad |G_k \cap J| \le |A_k \cap 4J| + |\Delta_k||J|^2 \tag{2.9}$$

для любого интервала J, с $J \not\subset \Delta_k$. При этом очевидно дополнительно можно предполагать также, что

$$|G_k| < |A_k| + \frac{|B \setminus A|}{2^{k+1}}. \tag{2.10}$$

Существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{2.11}$$

Если семейство $\{\Delta_k\}$ конечно, то берем p равным количеству интервалов Δ_k. Обозначим

$$G(t) = \left(\bigcup_k G_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{p} (t\Delta_k)\right), \quad 0 \le t \le 1. \tag{2.12}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. С учетом (2.10) и (2.11), имеем

$$f(0) = \sum_k |G_k| < \sum_k |A_k| + |B \setminus A| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{|A| + |B|}{2},$$

$$f(1) > \sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $0 < t_0 < 1$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A| + |B|}{2},$$

т.е. множество $G = G(t_0)$ удовлетворяет условию (2.8). Докажем первое из соотношений (2.7). Если $x \in \lambda(A)$, то имея в виду включение $\lambda(A) \subset B$, имеем $x \in \lambda(A) \cap \Delta_k$ при некотором k. Отсюда легко усмотреть, что $x \in \lambda(A_k) \subset G_k \subset G$ и получим $\lambda(A) \subset G$. Остается доказать $\lambda(G) \subset B$. Возьмем произвольную точку $x \notin B$. Так как $0 < t_0 < 1$, имеем

$$x \notin \overline{\bigcup_{k=1}^{p} (t_0\Delta_k)}.$$

Следовательно, если интервал $J \ni x$ имеет достаточно малую длину, то, с учетом (2.12), получаем

$$G \cap J = \left(\bigcup_k G_k\right) \bigcap J.$$

Отсюда и из неравенств (2.9) и (2.10) вытекает

$$|G \cap J| = \sum_k |G_k \cap J| \le \sum_k |A_k \cap 4J| + |J|^2 \sum_k |\Delta_k| \le |A \cap 4J| + |B||J|^2. \tag{2.13}$$

Так как $x \notin \lambda(A)$ имеем

$$\lim_{|J| \to 0} \frac{|A \cap 4J|}{|J|} \to 0,$$

которое вместе с (2.13) дает

$$\lim_{|J| \to 0} \frac{|G \cap J|}{|J|} \to 0,$$

а это значит, что $x \notin \lambda(G)$. Лемма 2 доказана. $\square$

Семейство открытых множеств $\{G_r : r \in E\}$, где $E \subset \mathbb{R}$-некоторое множество индексов, является цепью, если $\lambda(G_r) \subset G_{r'}$ при любых $r, r' \in E$, с $r < r'$.

Лемма 3. *Если A и B-открытые множества в $\mathbb{R}$, с условиями $\lambda(A) \subset B$ и $\alpha = |A| < |B| = \beta$, то существует цепь открытых множеств $\{G_r : \alpha \le r \le \beta\}$ такая, что*

$$G_\alpha = A,\, G_\beta = B, \quad |G_r| = r. \tag{2.14}$$

Доказательство. Определим $G_\alpha = A$, $G_\beta = B$ и применим лемму 2 к паре открытых множеств G_α, G_β. Этим определяется открытое множество $G = G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (2.7) и (2.8), а это означает, что множества G_α, $G_{(\alpha+\beta)/2}$, G_β образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha, \beta] = \{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\, 0 \le i \le 2^k\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r, для всех $r \in \mathcal{D}_k[\alpha,\beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r| = r$. Каждое из множеств $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0 \le i \le 2^k - 1$ получается очередным применением леммы 2 к паре множеств $G_{i/2^k}$, $G_{(i+1)/2^k}$. Ясно, что полученное таким путем семейство $\{G_r,\, r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r| = r$ теперь уже при $r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}| = \frac{1}{2}(|G_{i/2^k}| + |G_{(i+1)/2^k}|) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}\right) = \frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r, определенных при всех

$$r \in \mathcal{D} = \left\{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\, 0 \le i \le 2^k,\, k = 0, 1, \dots\right\},$$

которое будет цепью и $|G_r| = r$. Если же $r \in [\alpha,\beta]$-произвольное число, то определим

$$G(r) = \bigcup_{r' \in \mathcal{D}:\, r' < r} G(r'), \quad r \in [\alpha, \beta].$$

Легко проверить, что $\{G(r) : r \in [\alpha,\beta]\}$ станет цепью и удовлетворяет условию (2.14). Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть открытые множества $A \subset B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha = |A| < |B| = \beta$ и $\lambda(A) \subset B$. Тогда, если $f(x) \in C[0,\beta]$ и $f(x) = 1$ при $x \in [0,\alpha]$, то* *существует функция* $h(x)$, $x \in B$ *такая, что*

$$h(x) = 1,\ x \in A, \tag{2.15}$$

$$|\{x \in B:\ h(x) > t\}| = |\{x \in [0,\beta]:\ f(x) > t\}|, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

$$Dh(x) = h(x) \text{ в каждой точке } x \in B. \tag{2.17}$$

Доказательство. Согласно лемме 3, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in [\alpha,\beta]\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A,\ G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Определим функцию

$$\tau(x) = \inf\{r:\ x \in G_r\}, \quad x \in B \setminus A,$$

которая отображает множество $B \setminus A$ на $[\alpha,\beta]$. Легко проверить соотношение

$$\tau(x) \le c \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x \in \bigcap_{r>c} G_r,$$

из которого следует

$$\tau^{-1}(a,b] = \{x:\ a < \tau(x) \le b\} = \left(\bigcap_{r>b} G_r\right) \setminus \left(\bigcap_{r>a} G_r\right).$$

Отсюда, в силу (2.14), вытекает $|\tau^{-1}(a,b]| = b - a$ и следовательно

$$|\tau^{-1}(E)| = |E| \tag{2.18}$$

для любого открытого множества $E \subset [\alpha,\beta]$. Определим

$$h(x) = \begin{cases} f(\tau(x)) & \text{при} \quad x \in B \setminus A, \\ 1 & \text{при} \quad x \in A. \end{cases} \tag{2.19}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\{x \in B \setminus A:\ h(x) > t\}| &= |\{x \in B \setminus A:\ f(\tau(x)) > t\}| = \\ = |\tau^{-1}\{x \in [\alpha,\beta]:\ f(x) > t\}| &= |\{x \in [\alpha,\beta]:\ f(x) > t\}|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Последнее равенство следует из (2.18) и из того, что $\{x \in [\alpha,\beta] : f(x) > t\}$ есть открытое множество в $[\alpha,\beta]$. Так как функции $h(x)$ и $f(x)$ равны единице соответственно на множествах A и $[0,\alpha]$, причем $|A| = \alpha$, то из (2.20) получаем

$$|\{x \in B:\ h(x) > t\}| = |\{x \in [0,\beta]:\ f(x) > t\}|.$$

Остается проверить условие (2.17). Возьмем произвольную точку $x \in B = G_\beta$. В случае

$$x \in \bigcap_{r>\alpha} G_r,$$

имеем $x \in G_r$ для любого фиксированного $r > \alpha$. Из определения τ следует $\tau(t) < r$ при $t \in G_r$. Отсюда, учитывая (2.19), получаем, что числа 1 и $h(t)$ при $t \in G_r$ заключены между величинами

$$\inf_{t\in[0,r]} f(t), \quad \text{и} \sup_{t\in[0,r]} f(t). \tag{2.21}$$

Из непрерывности $f(t)$ следует, что величины (2.21) стремятся к 1 при $r \to \alpha+$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)du = 1 = h(x),$$

так как $h(u) = 1$ на множестве $A = G_\alpha$. Если же

$$x \in G_\beta \setminus \left(\bigcap_{r>\alpha} G_r\right),$$

то имеем $x \in G_{r+\delta} \setminus G_r$ при некотором r и при этом $r - \delta > \alpha$.

Из соотношений $\lambda(G_{r-\delta}) \subset G_r$ и $x \notin G_r$ следует

$$\lim_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{|J \cap G_{r-\delta}|}{|J|} = 0. \tag{2.22}$$

Так как $G_{r+\delta}$ открыто и $x \in G_{r+\delta}$ имеем

$$\lim_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{|J \cap (G_\beta \setminus G_{r+\delta})|}{|J|} = 0.$$

Отсюда и из (2.22) получаем

$$\lim_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{|J \cap (G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta})|}{|J|} = 1. \tag{2.23}$$

С другой стороны

$$\inf_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t) \le h(u) \le \sup_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t), \quad u \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}.$$

Отсюда, учитывая (2.23) и ограниченность функции $h(x)$, получим

$$\overline{D}h(x) = \limsup_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)du = \limsup_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)\cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}}(u)du \le$$
$$\le \sup_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \le \sup_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t),$$

а также

$$\underline{D}h(x) = \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)du = \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)\cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}}(u)du \ge$$
$$\ge \inf_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{|J \cap (G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta})|}{|J|} =$$
$$= \inf_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \ge \inf_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t).$$

В итоге получаем

$$\inf_{t\in[r-\delta,r+\delta]}|f(t)|\le \overline{D}h(x),\, \underline{D}h(x),\, h(x)\le \sup_{t\in[r-\delta,r+\delta]}|f(t)|.$$

В силу непрерывности $f(x)$ разность между правой и левой частями можно сделать сколь угодно малой выбором δ, а это значит $Dh(x)=h(x)$. □

Пусть $g(x)$ есть некоторая функция, определенная на $[a,b]$. Скажем, что значение $Dg(x)$ существует на $[a,b]$, если оно существует в обычном смысле при $x\in(a,b)$, а в точках a и b определяется равенствами

$$D^+g(a)=\lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\int_a^{a+u}g(t)dt,\quad D^-g(b)=\lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\int_{b-u}^{b}g(t)dt.$$

Лемма 5. *Если $A\subset\mathbb{R}$ есть открытое множество и $|A\cap[a,b]|<(b-a)/10$ для некоторого отрезка $[a,b]$, то существует функция $g(x)$, $x\in[a,b]$, такая, что*

$$g(x)=1,\quad x\in A\cap[a,b], \tag{2.24}$$

$$|g(x)|\le 1,\quad x\in[a,b], \tag{2.25}$$

$$\int_a^b g(x)dx=0, \tag{2.26}$$

$$Dg(x)=g(x)\ \text{ внутри }\ [a,b]. \tag{2.27}$$

Доказательство. Обозначим

$$I=(a,b),\, B=\frac{11}{10}\cdot I,\quad A'=A\cap\left(\frac{21}{20}\cdot I\right),\quad \alpha=|A'|,\quad \beta=|B|.$$

Имеем

$$\alpha\le\frac{b-a}{20}+|A\cap[a,b]|<\frac{b-a}{20}+\frac{b-a}{10}=\frac{3(b-a)}{20},\quad \text{и}\quad \beta=\frac{11(b-a)}{10}.$$

Исходя из этих неравенств, легко усмотреть, что существует функция $f\in C[0,\beta]$, для которой имеем

$$f(x)=1,\ \ x\in[0,\alpha],$$

$$\frac{1}{2}\le f(x)\le 1,\quad x\in[0,\beta], \tag{2.28}$$

$$\int_0^\beta f(x)dx=0. \tag{2.29}$$

Так как $\lambda(A')\subset B$, то применив лемму 4, найдем функцию $h(x)$, $x\in B$, которая удовлетворяет условиям (2.15)-(2.17). Из (2.16) следует, что $h(x)$ обладает свойствами аналогичными (2.28) и (2.29), т.е. имеем

$$-\frac{1}{2}\le h(x)\le 1,\quad x\in B, \tag{2.30}$$

$$\int_B h(x)dx=0. \tag{2.31}$$

Определим

$$g(x)=\frac{h(x)+\gamma}{1+\gamma},\quad \text{где}\quad \gamma=\frac{1}{b-a}\int_{B\setminus[a,b]}h(t)dt. \tag{2.32}$$

Отметим, что из (2.15) следует формула (2.24), а из (2.17) следует (2.27). Из неравенства

$$|\gamma|\le\frac{|B\setminus[a,b]|}{b-a}=1/10$$

и (2.30) вытекают неравенства

$$g(x)\le 1\quad \text{и}\quad g(x)\ge\frac{-1/2-1/10}{1-1/10}>-1,$$

из которых следует (2.25). Далее, из (2.31) и (2.32) получаем

$$\int_a^b g(x)dx=\frac{1}{1+\gamma}\left(\int_a^b h(t)dt+\gamma(b-a)\right)=\frac{1}{1+\gamma}\int_B h(t)dt=0,$$

которое дает (2.26). Лемма 5 доказана. □

Скажем, что семейство попарно непересекающихся двоичных полуоткрытых интервалов $\Omega=\{\omega_k=[\alpha_k,\beta_k)\}$ является двоичным разбиением открытого множества $G\subset\mathbb{R}$, если

$$G=\bigcup_{\omega\in\Omega}\omega\quad \text{и}\quad \operatorname{dist}(\omega,G^c)>0,\quad \omega\in\Omega.$$

Если Ω такое, что

$$1\ge\frac{|\omega|}{\operatorname{dist}(G^c,\omega)}\to 0,\ \text{при}\ \operatorname{dist}(G^c,\omega)\to 0,$$

то скажем, что оно является регулярным разбиением. Легко усмотреть, что любое открытое множество обладает регулярным двоичным разбиением. Пусть Ω' и Ω'' являются двоичными разбиениями открытых множеств G' и G'', с $G'\subset G''$. Обозначим $\Omega'<\Omega''$, если любой интервал $\omega''\in\Omega''$, а также его два смежных интервала той же длины, не входят целиком ни в один из интервалов $\omega'\in\Omega'$.

Лемма 6. *Пусть B есть открытое множество в $\mathbb{R}$, а $\Omega = \{\omega_k\}$ его регулярное разбиение на двоичные интервалы. Тогда, если открытое множество $A \subset B$ таково, что $\lambda(A) \subset B$ и*

$$|A \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega,$$

то существует измеримая функция $g(x)$, $x \in [0,1]$, такая, что

$$\operatorname{supp} g \in B \cap [0,1], \quad g(x) = 1,\ x \in A \cap [0,1], \tag{2.33}$$

$$|g(x)| \le 1, \quad x \in [0,1], \tag{2.34}$$

$$\int_{\omega_k} g(x)dx = 0, \ \text{\textit{если}}\ \omega_k \subset [0,1], \tag{2.35}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,g) = g(x) \ \text{\textit{в каждой точке}}\ x \in [0,1]. \tag{2.36}$$

Доказательство. Предположим $\omega_k = [a_k, b_k)$. Обозначим $A_k = A \cap \omega_k$. Применив лемму 5 определим функции $g_k(x)$, $x \in \omega_k$, со свойствами

$$g_k(x) = 1,\ x \in A_k, \tag{2.37}$$

$$|g_k(x)| \le 1, \quad x \in \omega_k, \tag{2.38}$$

$$\int_{\omega_k} g_k(x)dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.39}$$

$$Dg_k(x) = g_k(x) \ \text{внутри}\ [a_k, b_k]. \tag{2.40}$$

Определим $g(x) = g_k(x)$, при $x \in \mathring{\omega}_k = (a_k, b_k) \subset (0,1)$, а если x является концом одного из интервалов ω_k, то предположим, что

$$g(x) = (D^+ g(x) + D^- g(x))/2$$

при $x \ne 0, 1$, и $D^+ g(x)$ или $D^- g(x)$, когда соответственно x равно 0 или 1. В точках $x \in [0,1] \setminus B$ определяется $g(x) = 0$. Этим $g(x)$ будет корректно определена на $[0,1]$ и очевидно она удовлетворяет условиям (2.33)-(2.35). Проверке нуждается лишь свойство (2.36). Если $x \in B \cap [0,1]$ то либо имеем $x \in (a_k, b_k) \subset (0,1)$ либо x равно одному из a_k или b_k. В первом случае (2.36) немедленно следует из (2.40), а при $x = a_k$, b_k надо также учитывать следующее свойство системы Хаара:

$S_n(x,g) \to (D^+ g(x) + D^- g(x)))/2$, если $D^+ g(x)$ и $D^- g(x)$ существуют.

Пусть теперь $x \in [0,1]\setminus B$, а $J \ni x$ некоторый интервал. Для любого интервала ω_k, кроме быть может $\omega_{k'}$ и $\omega_{k''}$, имеем либо $\omega_k \subset J$ либо $\omega_k \cap J = \varnothing$. Тогда из (2.38), (2.39) и регулярности разбиения Ω следует

$$\frac{1}{|J|}\left|\int_J g(t)dt\right| = \frac{1}{|J|}\left|\int_{J\cap\omega_{k'}} g_{k'}(t)dt + \int_{J\cap\omega_{k''}} g_{k''}(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\omega_{k'}|}{\operatorname{dist}(B^c, \omega_{k'})} + \frac{|\omega_{k''}|}{\operatorname{dist}(B^c, \omega_{k''})} \to 0$$

когда $|J| \to 0$. Отсюда следует, что (2.36) выполняется при всех $x \in [0,1]$. □

Лемма 7. *Если $E \subset [0,1]$ есть множество типа G_δ в $[0,1]$, имеющее меру нуль, то существуют конечное или счетное число открытых множеств $G_k \subset \mathbb{R}$, с регулярными двоичными разбиениями Ω_k, такие, что*

$$E = [0,1] \cap (\cap_k G_k)\,, \tag{2.41}$$

$$\Omega_{k+1} < \Omega_k, \quad \lambda(G_{k+1}) \subset G_k, \tag{2.42}$$

$$|G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.43}$$

Доказательство. Имеем

$$E = [0,1] \bigcap \left(\bigcap_k E_k\right),$$

где $E_k \subset \mathbb{R}$-открытые множества. Множества G_k будут определены по индукции. Возьмем $G_1 = E_1$ и пусть Ω_1 есть произвольное регулярное двоичное разбиение множества G_1. Предположим, что уже выбраны множества G_k, с соответствующими двоичными разбиениями Ω_k, для $k = 1, 2, \ldots, p$, при этом они удовлетворяют условиям (2.42),(2.43) и дополнительно имеем $G_k \subset E_k$ при $k \leq p$.

Так как $|E| = 0$, имеем $\lambda(E) = E$. Применив лемму 2 для множеств $B = G_p$ и $A = E$, найдем множество G' такое, что $E \subset G'$ и $\lambda(G') \subset G_p$. Существует также множество $G'' \supset E$ такое, что

$$|G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

Возьмем $G_{p+1} = G' \cap G'' \cap E_{p+1}$. Очевидно имеем

$$\lambda(G_{p+1}) \subset \lambda(G') \subset G_p, \quad G_{p+1} \subset E_{p+1}$$

$$|G_{p+1} \cap \omega| \leq |G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

В силу $G_{p+1} \subset G_p$ существует регулярное двоичное разбиение Ω_{p+1} множества G_{p+1} такое, что $\Omega_{p+1} < \Omega_p$. Итак полученная таким образом последовательность

G_k в месте с разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям (2.42), (2.43) и $E \subset G_k \subset E_k$, из которого следует (2.41). Лемма доказана. $\square$

Лемма 8. *Для любого множества $E \subset [0,1]$ меры нуль, имеющее тип G_δ в $[0,1]$, существует функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям*

a) $|g(x)| \le 2$,

b) $S_n(x,g) \to g(x)$ в каждой точке $x \in [0,1] \setminus E$,

c) для любой точки $x \in E$ имеем

$$\delta(x,g) = \limsup_{n\to\infty} S_n(x,g) - \liminf_{n\to\infty} S_n(x,g) \ge 1.$$

Доказательство. Применив лемму 7, множество E можно представить в виде

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где $G_k \subset [0,1]$-открытые множества, которые в месте с некоторыми регулярными двоичными разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям

$$\lambda(G_{k+1}) \subset G_k,$$

$$|G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для пары множеств $B = G_k$ и $A = G_{k+1}$ можно применить лемму 6. В итоге получим последовательность функций $g_k(x)$, $x \in [0,1]$, с условиями

$$\operatorname{supp} g_k \in G_k \cap [0,1], \quad g_k(x) = 1,\ x \in G_{k+1} \cap [0,1], \tag{2.44}$$

$$|g_k(x)| \le 1, \quad x \in [0,1],$$

$$\int_\omega g_k(x)dx = 0, \quad \omega \in \Omega_k, \quad \omega \subset [0,1], \tag{2.45}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,g_k) = g_k(x), \text{ в каждой точке } x \in [0,1]. \tag{2.46}$$

Будем предполагать $G_0 = [0,1]$. Во первых заметим, что при условии

$$x \in (G_k \setminus G_{k+1}) \cap [0,1], \quad k = 0,1,\dots, \tag{2.47}$$

из (2.44) вытекает

$$g_i(x) = 1, \quad i < k, \quad g_i(x) = 0, \quad i > k, \tag{2.48}$$

$$S_n(x,g_i) = 0, \quad i > k. \tag{2.49}$$

Соотношения (2.48) сразу же следуют из (2.44). Докажем (2.49). Из (2.47) следует, что если $I \subset [0,1]$-некоторый двоичный интервал, с $x \in \bar{I}$, то для любого двоичного интервала $\omega \subset G_{k+1}$, в частности для интервалов $\omega \in \Omega_i$, $i > k$, либо $\omega \cap I = \varnothing$ либо $\omega \subset I$. Отсюда, с учетом (2.45), получаем равенство

$$\int_I g_i(t)dt = 0, \quad i > k,$$

из которого следует (2.49). Если $x \in [0,1] \setminus E$, то имеем (2.47) для некоторого $k = 0, 1, \ldots$. Отсюда функция

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} g_k(x)$$

определена при $x \in [0,1] \setminus E$, т.е. почти всюду. Определим $g(x) = 0$ при $x \in E$. Если $x \in [0,1] \setminus E$, то имеем (2.47) при некотором $k = 0, 1, \ldots$ и следовательно (2.48). Отсюда следует

$$|g(x)| = |\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_i(x) + (-1)^{k+1} g_k(x)| \leq |\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1}| + |g_k(x)| \leq 2,$$

и получаем $|g(x)| \leq 2$, $x \in (0,1)$, что дает a). Далее вновь предположим $x \in [0,1] \setminus E$. Тогда имеем (2.47). Отсюда, с учетом (2.48) и (2.49), получаем

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} g_i(x), \quad \text{и} \quad S_n(x, g) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} S_n(x, g_i),$$

которые вместе с (2.46) дает b). Теперь пусть $x \in E$. Тогда имеем $x \in \bar{\omega}_k$ для некоторой последовательности $\omega_k \in \Omega_k$, $\omega_k \subset [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Из (2.45), регулярности разбиений Ω_i и соотношения $\Omega_i < \Omega_k$, $i > k$, следует

$$\int_{\omega_k} g_i(t)dt = \int_{\omega_k^+} g_i(t)dt = \int_{\omega_k^-} g_i(t)dt = 0, \quad i \geq k,$$

$$g_i(x) = 1, \quad x \in \omega_k \cup \omega_k^+ \cup \omega_k^-, \quad i < k.$$

Отсюда следует, что

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = 0, \quad i \geq k,$$

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = 1, \quad i < k.$$

Следовательно, имеем

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1},$$

а это значит, что

$$\delta(x, g) \geq 1, \quad x \in E.$$

Итак функция $g(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и c) и лемма 8 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Для данной функции $f \in L^1[0,1]$ рассмотрим множества

$$A_{n,m}(f) = \bigcup_{i,j>n} \left\{ x \in [0,1] : |S_i(x,f) - S_j(x,f)| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Докажем, что множество

$$A(f) = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} A_{n,m}(f)$$

в точности состоит из точек расходимости ряда Фурье-Хаара функции f. Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

(i) $x \in A(f)$;

(ii) существует число $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in A_{n,m_0}(f)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) существует число $m_0 \in \mathbb{N}$ и последовательности p_k, $q_k \subset \mathbb{N}$ такие, что p_k, $q_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и

$$|S_{p_k}(x,f) - S_{q_k}(x,f)| > \frac{1}{m_0};$$

(iv) $S_n(x,f)$ расходится.

Отметим, что множества

$$\left\{ x \in [0,1] : |S_i(x,f) - S_j(x,f)| > \frac{1}{m} \right\}$$

можно представить в виде объединения конечного числа двоичных отрезков разного типа (открытых, замкнутых или полуоткрытых). Из этого следует, что

$$A_{n,m}(f) = G_{n,m} \cup d_{n,m}$$

где $G_{n,m}$-открытое множество, а $d_{n,m}$ конечно. Отсюда легко вытекает, что

$$A(f) \supset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} G_{n,m},$$

а разность

$$A(f) \setminus \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} G_{n,m}$$

есть не более чем счетное множество. Так как любое счетное или конечное множество имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то получим, что $A(f)$ тоже является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из сходимости почти всюду рядов Фурье-Хаара. □

Достаточность. Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ в $[0,1]$, имеющее меру нуль, и представим его в виде $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k \subset [0,1]$-множества типа G_δ меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k \subset E_{k+1}$. В противном случае могли бы рассматривать множества $E'_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, которые тоже являются множествами типа G_δ и их объединение равно E. Применив лемму 3, каждому множеству E_k сопоставим функцию $f_k(x)$, такую, что

a*) $|f_k(x)| \leq 2$,

b*) ряд Фурье-Хаара функции f_k сходится в каждой точке $x \in [0,1] \setminus E_k$,

c*) для любой точки $x \in E_k$ имеем $\delta(x, f_k) \geq 1$.

Докажем, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}$$

является искомой функцией. Ее ограниченность следует из свойства a*). Возьмем любую точку $x \in E$. Для некоторого k имеем $x \in E_k \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\big)$. Отсюда вытекает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n \left(x, \sum_{i=1}^{k-1} 10^{-k} f_k \right),$$

а также

$$\delta(x, f_k) \geq 1, \quad \delta(x, f_i) \leq 2 \sup_n |S_n(x, f_i)| \leq 2\|f_i\|_\infty \leq 4, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Далее имеем

$$\delta(x, f) \geq \frac{\delta(x, f_k)}{10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta(x, f_i)}{10^i} \geq \frac{1}{2 \cdot 10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{4}{10^i} = \frac{1}{18 \cdot 10^k} > 0.$$

Это значит, что ряд Фурье-Хаара расходится в любой точке $x \in E$. Теперь возьмем точку $x \notin E$. При любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$ имеем сходимость частичных сумм $S_n(x, f_i)$. Отсюда получим

$$\delta(x, f) = \delta \left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} f_i \right) \leq 2 \sup_n \left| S_n \left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{10^i} \right) \right| \leq 4 \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} < \frac{1}{2 \cdot 10^k}.$$

Так как последнее имеет место при любом k, то получим $\delta(x, f) = 0$. Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность К. Навасардяну за полезные замечания по поводу оформления статьи.

Abstract. The paper proves that $E \subset [0,1]$ is a set of divergence points of Fourier-Haar series of a function $f \in L^\infty[0,1]$ if and only if E is a $G_{\delta\sigma}$ type set of zero measure.

Список литературы

[1] В. М. Бугадзе, "О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль", Мат. сборник, **185** (7), 119 – 127 (1994).

[2] В. М. Бугадзе, "О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль", Мат. заметки, **51** (5), 20 – 26 (1992).

[3] В. В. Буздалин, "О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций", Мат. заметки, **7** (1), 7 – 18 (1970).

[4] В. В. Буздалин, "Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве", Математический сборник, **95(137)**, 1(9), 84 – 107 (1974).

[5] U. Goginava, "On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero", Acta Math. Hungarica, **121** (3), 359 – 369 (2008).

[6] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Math. Ann., **69**, 331 – 371 (1910).

[7] H. Hahn, "Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge", Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34 – 45 (1919).

[8] J-P. Kahane, Y. Katznelson, "Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques", Studia math., **XXVI**, 305 – 306 (1966).

[9] G. A. Karagulyan, "Divergence of general operators on the sets of measure zero", Colloq. Math., **121** (1), 113 –119 (2010).

[10] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука (1999).

[11] A. N. Kolmogoroff, "Une serie de Fourier-Lebesque divergente presgue partout", Fund. Math., **4**, 324 – 328 (1923).

[12] М. А. Лунина, "О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара", Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., **4**, 13 – 20 (1976).

[13] В. И. Прохоренко, "О расходящихся рядах по системе Хаара", Изв. вузов. Мат., **1**, 62 – 68 (1971).

[14] W. Sierpinski, "Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues", Fund. Math., **2**, 41 – 49 (1921).

[15] Б. С. Стечкин, "О сходимости и расходимости тригонометрических рядов", Успехи матем. наук, VI, **42** (2), 148 – 149 (1951).

[16] Л. В. Тайков, "О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе", Успехи матем. наук, XVIII, **113** (5), 191 – 198 (1963).

[17] П. Л. Ульянов, "А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды фурье", Успехи мат. наук, **38** (4), 57 – 100 (1983).

[18] Ш. В. Хеладзе, "О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина", Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, **58**, 225 – 242 (1978).

[19] Ш. В. Хеладзе, "О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша", Сообщ. АН Груз, ССР, **77** (2), 305 – 307 (1975).

[20] K. Zeller, "Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen", Arch. Math., **6**, 335 – 340 (1955).

Поступила 11 февраля 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 51-62.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ C^*-АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ СЧЕТНЫМ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ

А. Ю. КУЗНЕЦОВА

Казанский государственный университет
E-mail: *alla_kuznetsova@rambler.ru*

Аннотация. В работе исследуются свойства оператора T_φ на гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z})$, индуцированного отображением φ множества $\mathbb{Z}$ в себя. Показывается, что если относительно этого отображения мощность прообраза каждого элемента из $\mathbb{Z}$ конечна, но не равностепенно ограничена, то оператор T_φ допускает замыкание и представляется в виде суммы счетного числа операторов частичной изометрии. Рассматриваются C^*-алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi$ и $\mathfrak{U}_\varphi$, связанные с заданным отображением и порожденные с помощью этих операторов. Приводятся некоторые свойства алгебр и соотношения между ними.

MSC2010 number: 46L05; 46L35; 47L80

Ключевые слова: C^*-алгебры; частичные изометрии; Теплицевы операторы.

1. Введение

Начиная с 70-х годов прошлого века публиковались статьи, посвященные различным обобщениям операторов Тёплица и C^*-алгебр, порожденных этими операторами (алгебра Тёплица). Интерес к этим алгебрам вызван тем, что они имеют широкое применение в различных областях математики, в частности K-теории и некоммутативной геометрии ([1]– [7]). Не менее широкое применение алгебра Тёплица нашла и в физике, особенно в квантовой оптике ([8], [9]).

Напомним классическое определение оператора Тёплица. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $T : H \longrightarrow H$ называется оператором одностороннего сдвига, или оператором Тёплица, если найдется ортонормированный базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H, такой, что $Th_n = h_{n+1}$. Каждый оператор сдвига является изометрическим, т.е. $\|Th\| = \|h\|$ для любого $h \in H$ ($\|.\|$ – норма в H). Согласно теореме Уолда-фон Неймана, каждый изометрический оператор есть прямая сумма унитарного оператора и копий оператора сдвига. C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов $B(H)$, порожденная оператором Тёплица, называется алгеброй Тёплица. Основные свойства этой алгебры можно найти в [15], стр.132.

В работах [10]– [13] был предложен подход, обобщающий понятие оператора Тёплица и исследован ряд свойств соответствующей алгебры. Каждое отображение $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ множества целых чисел в себя порождает отображение

$T_\varphi : \{h_n\} \longrightarrow \{h_n\}$ ортонормированного базиса $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства $H = l^2(\mathbb{Z})$ в себя: $T_\varphi h_n = h_{\varphi(n)}$. Возникает естественная задача: описать все отображения $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, при которых оператор T_φ можно продолжить на все H и исследовать C^*-алгебру, порожденную этим оператором. В частности, когда задано отображение $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n+1$, то оператор T_φ является оператором Тёплица. Алгебра Тёплица возникает и в ряде других случаев ([11], [12]). Оказалось, что оператор $T_\varphi : \{h_n\} \longrightarrow \{h_n\}$ можно расширить до ограниченного линейного оператора на H тогда и только тогда, когда $\gamma(\varphi) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{card} E_n < \infty$, где $E_n = \{m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = n\}$, если $n \in \varphi(\mathbb{Z})$, и $E_n = \emptyset$ для $n \notin \varphi(\mathbb{Z})$.

Данная работа посвящена исследованию оператора T_φ в случае, когда $\gamma(\varphi) = \infty$, хотя $\mathrm{card} E_n < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказывается, что в этом случае оператор T_φ расширяется до замкнутого оператора, исследуются его свойства и свойства C^*-алгебр, связанных с данным отображением.

2. Необходимые сведения

Пусть задано отображение $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, элементы множества целых чисел будем обозначать латинскими буквами x, y, z. Пусть $l^2(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} |f(x)|^2 < \infty\}$ – гильбертово пространство функций со скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} f(x)\overline{g(x)}$. Семейство функций $\{e_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$ на $\mathbb{Z}$, таких, что

$$e_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = y, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq y, \end{cases}$$

образует ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z})$. Отображение φ индуцирует отображение $T_\varphi : \{e_x\} \to \{e_x\}$ по правилу $T_\varphi e_x = e_{\varphi(x)}$.

Пусть $E_y = \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = y\}$ – полный прообраз элемента $y \in \mathbb{Z}$, и пусть $\gamma(y) = \mathrm{card} E_y$. Если $E_y = \emptyset$, то мы предполагаем, что $\mathrm{card} E_y = 0$. Элементы множества $\mathbb{Z}$, для которых $\gamma(y) = 0$, назовем *начальными*. Множество $\mathbb{Z}$ представляется в виде дизъюнктного обьединения $\mathbb{Z}_k$, где $\mathbb{Z}_k = \{y \in \mathbb{Z}, \mathrm{card} E_y = k\}$.

Приведем основные свойства оператора T_φ и сопряженного к нему.

Теорема 1. *Пусть $\gamma(y) < \infty$ для любого $y \in \varphi(\mathbb{Z})$. Тогда отображение T_φ : $\{e_x\} \to \{e_x\}$ расширяется до замкнутого линейного оператора.*

Доказательство. Пусть $P(\mathbb{Z})$ – пространство всех конечных линейных комбинаций функций из $\{e_x\}_{x\in\mathbb{Z}}$. Поскольку $\{e_x\}$ есть ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z})$, то это пространство плотно в $l^2(\mathbb{Z})$. Отображение T_φ продолжим до линейного оператора на $P(\mathbb{Z})$, полагая

$$T_\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\varphi(x_i)}.$$

Таким образом получим линейный оператор (обозначим его также T_φ) с плотной областью определения $P(\mathbb{Z})$. Покажем, что он расширяется до замкнутого оператора на $l^2(\mathbb{Z})$. Для этого достаточно показать, что область определения сопряженного к нему оператора T_φ^* плотна в $l^2(\mathbb{Z})$ ([14], 278). Покажем, что для любого f из $P(\mathbb{Z})$ линейный функционал $F(g) = (g, T_\varphi^* f)$ продолжается до ограниченного линейного функционала на $l^2(\mathbb{Z})$. Действительно, пусть $f = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_{y_i}$, и $g = \sum\limits_{j=1}^m \beta_j e_{x_j}$ – такая функция из $P(\mathbb{Z})$, что каждый индекс x_j в представлении функции g принадлежит множеству $\bigcup\limits_{i=1}^n E_{y_i}$. Тогда очевидно, что $m < \sum\limits_{i=1}^n \mathrm{card} E_{y_i}$. Поэтому

$$|(T_\varphi g, f)| = |\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{\alpha}_i \beta_j (T_\varphi e_{x_j}, e_{y_i})| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i \beta_j||(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})| \leq$$

$$\leq c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\beta_j||(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})|,$$

где $c = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. Теперь, воспользовавшись тем, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, получим

$$\sum_{j=1}^m |\beta_j||(e_{\varphi(x_j)}, e_{y_i})| \leq \sum_{j=1}^m |\beta_j| \leq c(y_1, y_2, \ldots, y_n)(\sum_{j=1}^m |\beta_j|^2)^{\frac{1}{2}} = c(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|g\|_2.$$

Здесь $c(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ зависит от $\sum\limits_{i=1}^n \mathrm{card} E_{y_i} < \infty$. Следовательно, в случае, когда $g = \sum\limits_{j=1}^m \beta_j e_{x_j}$, и все $x_j \in \bigcup\limits_{i=1}^n E_{y_i}$, выполнено неравенство $|(T_\varphi g, f)| \leq M\|g\|_2$, где число M не зависит от выбора g из $l^2(\bigcup\limits_{i=1}^n E_{y_i})$. Пусть теперь $g = \sum\limits_{i=1}^l \gamma_i e_{x_i}$. Представим эту функцию в виде суммы двух функций $g = g_1 + g_2$, где g_1 и g_2 взаимно ортогональны, и g_2 есть сумма всех тех $\gamma_i e_{x_i}$, у которых x_i принадлежит объединению $\bigcup E_{y_i}$. Тогда $(T_\varphi g_1, f) = 0$. Поэтому

$$|(T_\varphi g, f)| = |(T_\varphi g_2, f)| \leq M\|g\|_2 \leq M\|g\|.$$

Следовательно, функционал

$$F(g) = (g, T_\varphi^* f) = (T_\varphi g, f)$$

ограничен на всюду плотном множестве $P(\mathbb{Z})$ и его норма не превышает M. Таким образом, сопряженный оператор T_φ^* имеет всюду плотную область определения. Следовательно, оператор T_φ допускает замыкание. $\square$

Теперь, показав, что T_φ допускает замыкание (а T_φ^* является замкнутым как сопряженный к оператору с плотной областью определения), приведем ряд достаточно очевидных свойств этих операторов. Для любого $y \in \varphi(\mathbb{Z})$ определим функцию с единичной нормой

$$g_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma(y)}} \sum_{x \in E_y} e_x.$$

Эти функции попарно ортогональны, поскольку из $y_1 \neq y_2$ следует, что

$$E_{y_1} \cap E_{y_2} = \emptyset.$$

Легко проверить, что $T_\varphi g_y = \sqrt{\gamma(y)} e_y$.

Лемма 1. *Оператор T_φ^* удовлетворяет следующим равенствам:*

1) $T_\varphi^* e_y = \sum\limits_{x \in E_y} e_x = \sqrt{\gamma(y)} g_y$,

2) $T_\varphi T_\varphi^* e_y = \gamma(y) e_y$,

3) $T_\varphi^* T_\varphi g_y = \gamma(y) g_y$,

4) $T_\varphi^* T_\varphi e_y = \sum\limits_{x \in \mathrm{E}_{\varphi(y)}} e_x = \sqrt{\gamma(\varphi(y))} g_{\varphi(y)}$.

Доказательство. **1)** Скалярное произведение $\big(T_\varphi^* e_y, e_x\big) = \big(e_y, e_{\varphi(x)}\big)$ равно 1, если $\varphi(x) = y$, то есть $x \in E_y$, и равно 0 в противном случае. Этим свойством обладает и вектор $\sqrt{\gamma(y)} g_y$, который является суммой элементов множества E_y, так как $(e_{x_1} + e_{x_2} + \ldots + e_{x_n}, e_x) = 1$, если $e_{x_i} \in E_y$, и 0 для любого $e_{x_i} \notin E_y$. Поэтому имеем $T_\varphi^* e_y = \sum\limits_{x \in E_y} e_x$, если $\gamma(y) \neq 0$. Если же $\gamma(y) = 0$, то есть $E_y = \emptyset$, то $T_\varphi^* e_y = 0$.

2), **3**), **4)** проверяются непосредственной подстановкой. $\square$

Теперь рассмотрим операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ более подробно. Очевидно, что на области $P(\mathbb{Z})$ они являются симметричными, поскольку выполняются равенства

$$(T_\varphi T_\varphi^* f_1, f_2) = (f_1, T_\varphi T_\varphi^* f_2) \quad \text{и} \quad (T_\varphi^* T_\varphi f_1, f_2) = (f_1, T_\varphi^* T_\varphi f_2)$$

для любых функций f_1 и f_2 из $P(\mathbb{Z})$.

Теорема 2. *Операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$, заданные на $P(\mathbb{Z})$, являются в существенном самосопряженными и представляются в виде:*

$$T_\varphi T_\varphi^* = \sum_{k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)} k P_k, \quad T_\varphi^* T_\varphi = \sum_{k \in \sigma(T_\varphi^* T_\varphi)} k Q_k,$$

где P_k *и* Q_k *– взаимноортогональные проекторы.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_\varphi T_\varphi^*$. Поскольку он является симметричным оператором, он обладает замкнутым расширением. Пусть $A = \overline{T_\varphi T_\varphi^*}$ – замыкание оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ и $D(A)$ – его область определения, и A^* – оператор, сопряженный к A с областью определения $D(A^*)$. Чтобы показать, что $D(A) = D(A^*)$, т.е. оператор A является самосопряженным, достаточно показать, что $\ker(A^* \mp i) = 0$ ([14],283). Пусть существует $f \in \ker(A^* \mp i)$ и $f \neq 0$. Рассмотрим $((A^* \mp i)f, e_x) = (f, (A \pm i)e_x)$. Но для любого e_x $(A \pm i)e_x = (n \pm i)e_x$, где $n = \mathrm{card}E_{\varphi(x)}$ – целое число (лемма 1). Таким образом, $(f, (n \pm i)e_x) = (f, e_x) = 0$ для любого e_x из $l^2(\mathbb{Z})$, что означает, что $f = 0$. Таким образом, оператор $(A^* \mp i)$ имеет нулевое ядро. □

Аналогичное утверждение можно доказать и для оператора $T_\varphi^* T_\varphi$. Для этого нужно рассмотреть скалярное произведение $((B^* \mp i)f, g_y) = 0$, где B^* – замыкание $T_\varphi^* T_\varphi$, а f принадлежит ядру оператора $B^* \mp i$. Таким образом, операторы $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ являются в существенном самосопряженными.

Из леммы 1 видно, что точечный спектр операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ содержится в $\mathbb{Z}_+$. Гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z})$ можно представить в виде прямой суммы попарно ортогональных гильбертовых пространств $l^2(\mathbb{Z}_k)$, где $l^2(\mathbb{Z}_k)$ – это множество всех функций из $l^2(\mathbb{Z})$, являющихся собственными векторами для оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ и имеющих собственное значение k, базис в нем образуют те e_y, для которых $\gamma(y) = k$. Таким образом,

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)} l^2(\mathbb{Z}_k).$$

В дальнейшем для удобства будем записывать

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_k),$$

полагая $l^2(\mathbb{Z}_k) = \{0\}$ если $k \notin \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)$.

Аналогично, с помощью $T_\varphi^* T_\varphi$ пространство $l^2(\mathbb{Z})$ разбивается на инвариантные подпространства l_k^2, состоящие из собственных векторов оператора $T_\varphi^* T_\varphi$ с собственным значением k, $k \geq 1$. Очевидно, что семейство g_y, для которых $\gamma(y) = k$, образует ортонормированный базис в l_k^2. Определив l_0^2 как ортогональное дополнение ко всем l_k^2, можно разбить $l^2(\mathbb{Z})$ на прямую сумму подпространств

$$l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l_k^2.$$

Таким образом, P_k и Q_k являются проекторами на $l^2(\mathbb{Z}_k)$ и l_k^2 соответственно.

В дальнейшем, говоря о неограниченных операторах T_φ, T_φ^*, $T_\varphi T_\varphi^*$, $T_\varphi^* T_\varphi$, и т.д., будем подразумевать их замыкания и, в силу самосопряженности в существенном операторов $T_\varphi T_\varphi^*$, $T_\varphi^* T_\varphi$, не рассматривать детально их области определения.

3. C^*-алгебры, порожденные отображением

В этом параграфе мы определим C^*-алгебры, связанные с заданным отображением, и укажем их свойства. Сначала рассмотрим структуру оператора T_φ.

Лемма 2. $T_\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$, *где* U_k *– операторы частичной изометрии, и* $U_k^* U_l = 0$, *если* $k \neq l$.

Доказательство. Определим оператор частичной изометрии U на $l^2(\mathbb{Z})$, полагая на базисных элементах

$$Ue_y = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \gamma(y) = 0, \\ g_y, & \text{если} \quad \gamma(y) \neq 0, \end{cases}$$

и продолжая по линейности на $l^2(\mathbb{Z})$. Нетрудно убедиться, что сопряженный к нему оператор будет действовать следующим образом:

$$\begin{cases} U^* g_y = e_y & \text{если} \quad \gamma(y) \geq 1, \\ U^* f = 0 & \text{если} \quad f \in l_0^2. \end{cases}$$

Применив оператор UU^* к векторам g_y, которые являются базисными в l_k^2 при $k \neq 0$, увидим, что он является проектором на подпространство $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} l_k^2$. Оператор U^*U является проектором на подпространство $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_k)$ (достаточно рассмотреть его действие на векторах e_x). Полагая $U^*U = P$ и $UU^* = Q$, получим

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_m + \ldots = P, \quad Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_m + \ldots = Q.$$

Тогда $U_k = U^* Q_k$, $U_k^* U_k = Q_k U U^* Q_k = Q_k$, поскольку Q_k есть проектор на l_k^2, а UU^* проектор на $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} l_k^2$. Соответственно, оператор

$$U_k U_k^* = (U_k U_k^*)^* = U^* Q_k U = (U^* Q_k U)^2 = P_k,$$

что следует из леммы 1.

Рассмотрим оператор $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$. Можно показать, что операторы T_φ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$ совпадают на $P(\mathbb{Z})$, следовательно, $T_\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} U_k$. □

Пусть $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ – C^*-алгебра, порожденная оператором частичной изометрии U_1; $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ – C^*-алгебра, порожденная операторами U_1, U_2; $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ – C^*-алгебра, порожденная набором операторов $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ соответственно. Под C^*-*алгеброй,* *порожденной отображением*, будем понимать индуктивный предел алгебр $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$, $\mathfrak{A}_\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} \mathfrak{A}_{\varphi_k}$.

Помимо $\mathfrak{A}_\varphi$ можно определить и другие C^*-алгебры, связанные с заданным отображением. Пусть $\mathfrak{P}_\varphi$ – C^*-алгебра, порожденная набором операторов $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ и проекторами P и Q, а $\mathfrak{U}_\varphi$ – C^*-алгебра, порожденная набором операторов $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ и оператором U.

Если мощность прообраза ограничена в совокупности (т.е. $\gamma(\varphi) = m < \infty$), то все эти алгебры, очевидно, совпадают. В нашем случае $\mathfrak{A}_\varphi \subset \mathfrak{P}_\varphi \subset \mathfrak{U}_\varphi$. Стоит указать на еще одно отличие. Если $\gamma(\varphi) = m < \infty$, то алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ является унитальной (см.ниже). Если же $\gamma(\varphi) = \infty$, то не только $\mathfrak{A}_\varphi$, но и $\mathfrak{P}_\varphi$ и $\mathfrak{U}_\varphi$ могут быть, вообще говоря, не унитальными. Однако каждая подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ обладает единицей. Для доказательства этого утверждения сформулируем простую лемму.

Лемма 3. *Пусть A – такой самосопряженный оператор на конечномерном пространстве, что для любого элемента x из этого пространства $Ax \neq 0$. Тогда оператор A обратим.*

Доказательство. Каждый самосопряженный оператор в некотором базисе приводится к диагональному виду. Если A нигде не обращается в 0, то все его собственные значения отличны от 0. Следовательно, оператор A обратим. $\square$

Теорема 3. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ унитальна.*

Доказательство. Гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z})$ можно представить в виде прямой суммы, $l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus\limits_{y\in\mathbb{Z}} l^2(E_y)$, причем все $l^2(E_y)$ конечномерные подпространства размерности $\gamma(y)$. Рассмотрим операторы

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \widetilde{P_k} \in \mathfrak{A}_{\varphi_k} \quad \text{и} \quad Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k = \widetilde{Q_k} \in \mathfrak{A}_{\varphi_k}.$$

Очевидно, что оператор $\widetilde{P_k} + \widetilde{Q_k}$ является положительным. Мы хотим показать, что в алгебре $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ этот оператор обратим. Элементы алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ нетривиально действуют на подпространстве

$$\left(\bigoplus_{y\in\mathbb{Z},\gamma(y)\le k} l^2(E_y)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{y\in\mathbb{Z},\gamma(y)>k} l^2(E_y \bigcap (\bigsqcup_{1\le p\le k} \mathbb{Z}_p))\right).$$

На каждом подпространстве

$$l^2(E_y \bigcap (\bigsqcup_{1\le p\le k} \mathbb{Z}_p)), \quad \gamma(y) > k$$

оператор $\widetilde{Q_k}$ равен 0, а оператор $\widetilde{P_k}$ действует как тождественный.

Рассмотрим действие $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ на $\bigoplus\limits_{y\in\mathbb{Z},\gamma(y)\le k} l^2(E_y)$. Каждое $l^2(E_y)$ является для него инвариантным. В общем случае любое из этих подпространств можно представить в виде $l^2(E_y)=H_{1y}\oplus H_{2y}$, где H_{1y} – те элементы $l^2(E_y)$, на которых и $\widetilde{P_k}$ и $\widetilde{Q_k}$ равны 0, т.е. элементы, принадлежащие одновременно и $l^2(\mathbb{Z}_0)$ и l^2_0, а на пространстве H_{2y} оператор $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ нигде не обращается в 0. Но $H_{1y}\subset\ker T_\varphi\cap\ker T^*_\varphi$, поэтому пространство H_{1y} можно не рассматривать.

Обозначим сужение оператора $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ на H_{2y} через A_y. Рассмотрим произвольный элемент e_y, $\gamma(y)=l\le k$, и действие $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ на $l^2(E_y)$. Пусть на первых m элементах из E_y оператор $\widetilde{P_k}$ равен 0, т.е. эти элементы либо начальные , либо принадлежат $\bigoplus\limits_{i=k+1}^{\infty} l^2(\mathbb{Z}_i)$, $0\le m\le l$. Тогда базисными в H_{2y} будут элементы $\{f,e_{m+1},e_{m+2},\ldots,e_l\}$, где $f=\frac{e_1+e_2+\ldots+e_m}{\sqrt{m}}$, элементы же вида, к примеру, e_1-e_2, принадлежат H_{1y}. Запишем действие A_y на базисных элементах (лемма 1, теорема 2):
$A_yf=\frac{\sqrt{m}}{l}(\sqrt{m}f+e_{m+1}+e_{m+2}+\ldots+e_l)$;
$A_ye_i=e_i+\frac{1}{l}(\sqrt{m}f+e_{m+1}+e_{m+2}+\ldots+e_l)=\frac{1}{l}(\sqrt{m}f+e_{m+1}+e_{m+2}+\ldots+(l+1)e_i+\ldots+e_l)$.

Таким образом, оператор A_y описывается матрицей размерности $l-m+1\times l-m+1$, $l\le k$, $0\le m\le l$, с указанными выше матричными коэффициентами. Причем, поскольку k – фиксированное число, количество таких матриц, отличных друг от друга, ограничено. Отсюда следует, что оператор $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ можно представить в следующем виде:

$$\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}=\bigoplus_{i=1}^{d}\Big(\bigoplus_{y,\gamma(y)\le k} A_{yi}\Big),$$

где операторы A_{yi} действуют каждый на своем подространстве $l^2(E_y)$ и имеют одинаковое матричное представление. Оператору $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ сопоставим конечномерный оператор $\bigoplus\limits_{i=1}^{d} A_i$, где каждый A_i удовлетворят условию леммы 3. Этот оператор обратим, значит, обратим и оператор $\widetilde{P_k}+\widetilde{Q_k}$ в алгебре $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. □

Обозначим через I_k единицу алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. В общем случае последовательность $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ является аппроксимативной единицей алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$.

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*
1) $\mathfrak{A}_\varphi$ – унитальная алгебра;
2) существует такой номер n, что для любого $y\in\mathbb{Z}$ сужение оператора $\widetilde{P_n}+\widetilde{Q_n}$ на $l^2(E_y)$ обратим.

Доказательство. **1) ⇒ 2)** Из унитальности $\mathfrak{A}_\varphi$ следует, что последовательность $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к единице I. Это значит, что существует такой номер n, что единица алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_n}$ совпадает с I (поскольку $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность проекторов, и если она сходится, то имеет вид $\{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I, I, \ldots\}$). Следовательно, сужение оператора $\widetilde{P_n} + \widetilde{Q_n}$ обратим на каждом $l^2(E_y)$, $y \in \mathbb{Z}$.

2) ⇒ 1) Если существует такой номер n, что сужение $\widetilde{P_n} + \widetilde{Q_n}$ обратим на каждом $l^2(E_y)$, значит, он обратим на $l^2(\mathbb{Z}) \setminus \ker T_\varphi \cap \ker T_\varphi^*$. (Согласно теореме 3, оператор $\widetilde{P_n} + \widetilde{Q_n}$ обратим на $\bigoplus\limits_{y, \gamma(y) \leq n} (l^2(E_y))$. Но на каждом $l^2(E_y)$, $\gamma(y) > n$, оператор $\widetilde{Q_n}$ будет равен 0. Значит, чтобы $\widetilde{P_n} + \widetilde{Q_n}$ был обратим, $\widetilde{P_n}$ должен действовать как тождественный оператор на каждом элементе из $l^2(E_y)$.) Таким образом, $\mathfrak{A}_\varphi$ – унитальная алгебра. □

Следствие 1. *Пусть φ – такое отображение, что, начиная с некоторого n, для любого y, с $\gamma(y) > n$,*

$$l^2(E_y) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} l^2(\mathbb{Z}_k).$$

Тогда алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ унитальна.

Теперь перейдем к алгебре $\mathfrak{P}_\varphi$. Если для отображения φ нет начальных элементов, то $\mathfrak{P}_\varphi$ унитальна, поскольку содержит $P = I$. Поэтому считаем, что множество $\mathbb{Z}_0 \neq \emptyset$. Опять рассмотрим оператор $P + Q$. Это самосопряженный оператор и каждое $l^2(E_y)$ является для него инвариантным подпространством. Возьмем произвольное множество E_y, $\gamma(y) = n$. Возможны два крайних случая: либо все элементы E_y являются начальными; либо оно не содержит ни одного начального элемента. В первом случае имеем $(P+Q)g_y = g_y$, все остальные элементы принадлежат $l_0^2 \cap l^2(\mathbb{Z}_0)$ (см. теорему 3). Во втором случае $(P+Q)g_y = 2g_y$.

Пусть теперь первые k элементов E_y – начальные. Тогда сужение оператора $P + Q$ на подпространство, натянутое на вектора $\{f, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\}$, $f = \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_k}{\sqrt{k}}$, описывается матрицей размерности $n - k + 1 \times n - k + 1$ (см. теорему 3). Перейдем к новому ортонормированному базису $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-k+1}\}$, где

$$f_1 = \frac{e_{k+1} - e_{k+2}}{\sqrt{2}};$$

$$f_2 = \frac{e_{k+1} + e_{k+2} - e_{k+3}}{\sqrt{6}};$$

$$f_{n-k-1} = \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots + e_{n-1} - (n-k-1)e_n}{\sqrt{n-k-1+(n-k-1)^2}};$$

$$f_{n-k} = \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots + e_n - \frac{(n-k)}{k}\sqrt{k} f}{\sqrt{n-k+\frac{(n-k)^2}{k}}};$$

$$f_{n-k+1} = \frac{e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots + e_n + \sqrt{k} f}{\sqrt{n}}.$$

Нетрудно проверить, что в этом базисе матрица оператора $P+Q$ имеет вид:

$$P+Q \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{k}{n} & \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} & 2-\frac{k}{n} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно сформулировать критерий унитальности $\mathfrak{P}_\varphi$.

Теорема 5. *Если φ – сюрьекция, то алгебра $\mathfrak{P}_\varphi$ унитальна. Если φ не является сюрьекцией, то для того, чтобы алгебра $\mathfrak{P}_\varphi$ была унитальна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sup_{y, l^2(E_y)\cap l^2(\mathbb{Z}_0)\neq\emptyset} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{k(y)}{n(y)}} < 1.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, поэтому докажем второе. Используя матричное представление оператора $P+Q$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_{n-k+1}\}$, легко получить его собственные значения , это 1 и $1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{n}}$. Обобщая рассуждения, приведенные выше, можно утверждать, что спектр оператора $P+Q$ – это множество чисел $\{1, 2, 1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{n}}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$. Допустим, что выполнено условие теоремы 4. Тогда спектр оператора $P+Q$ ограничен снизу, следовательно, он обратим. Пусть теперь

$$\sup_{y, l^2(E_y)\cap l^2(\mathbb{Z}_0)\neq\emptyset} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{k(y)}{n(Y)}} = 1.$$

Для простоты рассуждений допустим, что для любого n найдется такой e_{y_n}, $\gamma(y) = n$, что множество E_{y_n} содержит ровно один начальный элемент. Для удобства обозначим его $e_1(n)$. Предположим, что $\mathfrak{P}_\varphi$ унитальна. Множество C^*-алгебр $\mathfrak{P}_{\varphi_k} = \langle \mathfrak{A}_{\varphi_k} P, \mathfrak{A}_{\varphi_k} Q, \mathfrak{A}_{\varphi_k} \rangle + \langle P, Q\rangle$ плотно в $\mathfrak{P}_\varphi$. Значит, единицу можно приблизить полиномами из $\mathfrak{P}_{\varphi_k}$, т.е. для любого $\epsilon > 0$ должно найтись $k \in \mathbb{N}$ и полином $A_k \in \mathfrak{P}_{\varphi_k}$, что $\|I - A_k\| < \epsilon$. Полином A_k может состоять из слагаемых вида $A_1 A'$, $A_2 P$, $A_3 Q$, где A_i – конечное произведение операторов из $\mathfrak{P}_{\varphi_k}$, а A' – элемент алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. Выберем элемент $e_1(n)$, причем возьмем $n \gg k$, и рассмотрим на нем действие каждого слагаемого по отдельности.

Любой элемент A' из $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ можно представить в виде $A' I_k$, где I_k – единица алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$. Но в алгебре $\mathfrak{A}_\varphi$ I_k – проектор (условие теоремы 4 не выполняется), и $I_k e_1(n) = 0$. Значит, $A_1 A' e_1(n) = 0$. Очевидно, что и $A_2 P e_1(n) = 0$, так как $e_1(n)$

– начальный элемент. Осталось рассмотреть слагаемые вида A_3Q. Допустим, $A_3Qe_1(n) \neq 0$. Имеем

$$Qe_1(n) = \frac{1}{n}(e_1(n) + e_2 + \ldots + e_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} g_{y_n}, \quad \text{и} \quad \|Qe_1(n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Но A_3 – конечное произведение ограниченных операторов, поэтому при $n \to \infty$ $\|A_3Qe_1(n)\| \to 0$. Таким образом, с одной стороны имеем $A_ke_1(n) = f$, причем $\|f\| \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $Ie_1(n) = e_1(n)$, $\|e_1(n)\| = 1$. Пришли к противоречию. Значит, алгебра $\mathfrak{P}_\varphi$ не может содержать единицу. Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ проектор P_k конечного ранга. Тогда:*
***1)** алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ является AF-алгеброй;*
***2)** алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ – идеал для алгебры $\mathfrak{P}_\varphi$;*
***3)** алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ – идеал для алгебры $\mathfrak{U}_\varphi$.*

Доказательство. Поскольку P_k – проектор на подпространство $l^2(\mathbb{Z}_k)$, то оно является конечномерным. Значит, и оператор U_k тоже конечного ранга, так как имеет конечномерный образ, $U_k(l^2(\mathbb{Z})) = l^2(\mathbb{Z}_k)$. Соответственно, и U_k^* тоже конечного ранга. Каждая $\mathfrak{A}_{\varphi_k}$ есть конечномерная алгебра, таким образом алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ есть AF-алгебра, как замыкание объединения вложенных друг в друга конечномерных алгебр.

Для доказательства утверждений **2)** и **3)** достаточно рассмотреть элементы U_kP, PU_k, U_kU, UU_k. Равенство $PU_k = U_k$ выполняется в силу определения проектора P, а $U_kP \in \mathfrak{A}_{\varphi_n} \subset \mathfrak{A}_\varphi$ как оператор конечного ранга, $n \geq k$. Отсюда же и операторы U_kU и UU_k принадлежат $\mathfrak{A}_\varphi$. □

Следствие 2. Если выполнено условие теоремы 5 и отображение φ сюръективно, то:
***1)** алгебра $\mathfrak{P}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ двумерна;*
***2)** алгебра $\mathfrak{U}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ изоморфна алгебре Тёплица.*

Доказательство. Если φ – сюрьекция, то для него на $\mathbb{Z}$ нет начальных элементов. Тогда в этом случае $P = I$, и алгебра $\mathfrak{P}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ порождается двумя взаимно ортогональными проекторами Q и $I - Q$. Оператор U в этом случае является изометрией, поскольку удовлетворяет соотношениям: $U^*U = I$; $UU^* = Q$. Следовательно, по теореме Кобурна, алгебра $\mathfrak{U}_\varphi/\mathfrak{A}_\varphi$ изоморфна алгебре Тёплица. □

Abstract. The paper investigates the properties of an operator T_φ on Hilbert space $l^2(\mathbb{Z})$ induced by the mapping φ of set $\mathbb{Z}$ into itself. It is shown if the mapping φ is such that every preimage has finite, but not equipotentially bounded cardinality,

then the operator T_φ allows a closure and can be represented as a countable sum of partial isometries. The C^*-algebras $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi$ and $\mathfrak{U}_\varphi$ associated with given mapping and generated by the mentioned partial isometries are considered. Some properties of these algebras and some relations between them are given.

Список литературы

[1] L. A. Coburn, "The C^*-algebras generated by an isometry", I. Bull. Am. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967); II Trans. Am. Math. Soc., **137**, 211 – 217 (1969).

[2] R. G. Douglas, "On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries", Acfa. Math., **128**, 143 – 152 (1972).

[3] G. J. Murphy, "Ordered groups and Toeplitz algebras", J. Oper. Theory, **18**, 303 – 326 (1987).

[4] J. Xia, "The K-theory and the invertibility of almost periodic Toeplitz operators", Integral Equations Oper. Theory, **11**, 267 – 286 (1988).

[5] R. Ji, On the smoothed Toeplitz exthesions and K-theory", Proc.Amer. Math. Soc., **109**, 31 – 38 (1990).

[6] H. M. Carmen, J. P. Pedro, "Properties of generalized Toeplitz operators", Integral Equations Oper. Theory, **40**, 106 – 126 (2001).

[7] I. Cho, P. Jorgensen, "C^*-algebras generated by partial isometries", J. Appl. Math. Comput, **26**, 1 – 48 (2008).

[8] А. В. Лебедев, А. Одзиевич, "Расширения C^*-алгебр частичнуми изометриями", Мат. Сборник, **195** (7), 37 – 70 (2004).

[9] M. Horowski, A. Odzijewicz, A. Tereszkiewicz, "Some integrable systems in nonlinear quantum optics", arXiv:math-ph/0207031 (2002).

[10] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, "C^*-алгебры, порожденные отображениями", материалы школы-семинара "Волга-2006", **28** (2006).

[11] S. Grigoryan, A. Kuznetsova, "C^*-algebras generated by mappings", Lobachevskii Journal of Mathematics, **29** (1), 5 – 8 (2008).

[12] А. Ю. Кузнецова, "Примеры C^*-алгебр, порожденных отображениями", Новейшие проблемы теории поля 2005-2006, Казань: издательство Казанского государственного университета, 170 – 175 (2007).

[13] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, "AF-подалгебры C^*-алгебр, порожденных отображениями", Известия ВУЗов. Математика, **3**, 82 – 87 (2010).

[14] М. Рид, Б. Саймон, "Методы современной математической физики. 1", Функциональный анализ, Мир, Москва (1977).

[15] Дж. Мёрфи, "C^*-алгебры и теория операторов", перевод с английского под редакцией проф. А. Я. Хелемского, Факториал, Москва (1997).

Поступила 17 апреля 2010

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 6, 2010, стр. 63-76.

INHOMOGENEOUS RANDOM PLANAR TESSELLATIONS GENERATED BY LINES

JOSEPH MECKE

University of Jena, Germany
E-mail: *joseph.mecke@uni-jena.de*

Аннотация. Random planar tessellations in bounded convex windows are generated by dividing random cells with random lines. It is suggested that the random STIT tessellations of Nagel and Weiss, if restricted to a bounded convex window, can be interpreted as a special case.

MSC2010 number: 60D05, 52A22

Keywords: Stochastic geometry, random tessellation, random STIT tessellation, random crack tessellation, random line-generated tessellation, process of cell division, tessellation-valued Markov chain.

1. Introduction

The Euclidean plane is represented by $\mathbb{R}^2$ and addressed simply as the "plane". Let W be a non-empty, bounded, convex, polygonal, open subset of R^2, called window. Loosely speaking, our random tessellations in W will be constructed in a way of the following kind:

By help of a sequence of independent, identically distributed random lines $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ in the plane that intersect W, a sequence of random tessellations $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2, \ldots$ in W will be generated. It is supposed that γ_1, γ_2, γ_3 cannot meet in one point a. s. The number ζ_k of cells in $\mathcal{T}_k$ will be less or equal to $k+1$.
The initial tessellation $\mathcal{T}_0$ has only the single cell W, it is called the empty tessellation. Hence, $\zeta_0 = 1$.

The tessellation $\mathcal{T}_1$ consists of two cells, namely of the two parts into which W is divided by the line γ_1. The intersection $\gamma_1 \cap W$ of the line γ_1 with the window is called an I-segment. We have $\zeta_1 = 2$.

The line γ_2 chooses randomly with probability $1/2$ one of the two cells of $\mathcal{T}_1$, say C. If the intersection of γ_2 with C is empty, the line γ_2 will be discarded. Otherwise, C is divided into two cells. The unaffected cells of $\mathcal{T}_1$ together with the possibly new cells form the tessellation $\mathcal{T}_2$. If the line γ_2 is not rejected, the intersection of that line with C is said to be an I-segment. Note $\zeta_2 \leq 3$.

In the n-th step, the line γ_n intersects some cells of $\mathcal{T}_{n-1}$, say $D_1, \ldots, D_m$. It is clear that $1 \le m \le n$ a. s. Independently of the past, now some random decisions will be made. With probability $1 - m/n$, the line γ_n leaves the tessellation $\mathcal{T}_{n-1}$ unchanged; we would say that γ_n is rejected. With the complementary probability m/n, a member of the set of cells $\{D_1, \ldots, D_m\}$ is selected for further treatment, where each of them has equal chance of being chosen. If the cell D_k is selected, it is divided by γ_n into two parts which are considered as cells of $\mathcal{T}_n$ as well as the unaffected cells of $\mathcal{T}_{n-1}$. The intersection $\gamma_n \cap D_k$ is called an I-segment of $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n+1}, \ldots$. The number ζ_n of cells of $\mathcal{T}_n$ fulfills $\zeta_n = \zeta_{n-1}$ with probability $(n-m)/n$, and $\zeta_n = \zeta_{n-1} + 1$ with probability m/n.

The sequence $(\zeta_k)_{k=0,1,\ldots}$ is non-decreasing with $\zeta_k \le k + 1$.

A more formalized description of the construction is presented in section 2.

A large variety of similar models for creating random tessellations by cell division is treated by Cowan in [3]. Our selection of cells is "perimeter-weighted" in the sense of Cowan, where "perimeter" means a pseudo-perimeter according to Ambartzumian [1, 2], cf. subsection 3.2 and [9].

Note that in our terminology cells and edges are non-empty *open* sets. The union of all cells and their boundaries is equal to the closure of W.

The random tessellations $\mathcal{T}_k$ are addressed as "random line-generated tessellations"; $k = 0, 1, \ldots$.

Some mean values for the random line-generated tessellations $\mathcal{T}_k$ are calculated in Section 3.

The sequence $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots$ may be considered as a Markov chain with discrete time and the set of tessellations in W as state space. Note that then the transition probabilities are *not* time-homogeneous. The Markov chain $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots$ can be interpreted as a process of cell division. In contrast to the Markovian process of cell division treated in [7, 8], it lives on a *discrete* time axis, and in this way, many technical difficulties can be avoided. Cowan also prefers a discrete time axis for the Markovian processes in [3] producing random cells and random tessellations.

Not only the random states $\mathcal{T}_n$ of the chain at fixed time instants n can be investigated, but also the states $\mathcal{T}_\nu$ at a random time instant ν.

We are only interested in the special case that the random non-negative integer ν is independent of the sequence $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots$ and has a geometric distribution. Such random tessellations T_ν could be called mixed random line-generated tessellations; we simply speak of "mixed line-generated tessellations". For a strong definition and treatment, see Section 4.

If the distribution of the random lines $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ can be obtained by the restriction of a *shift-invariant* line measure to the set of lines intersecting W, then we get an interesting subclass of mixed line-generated tessellations. We speak of the *homogeneous case.* The mean values evaluated in Section 5 coincide in the homogeneous case with that for corresponding random STIT tessellations in W of NAGEL AND WEISS [4, 5, 6]. Relying on unpublished results, the author expects that in the homogeneous case, the mixed line-generated tessellation $\mathcal{T}_\nu$ has the same distribution as a corresponding random STIT tessellation in W. A related conjecture is formulated in Section 5.

One of the main achievements of NAGEL AND WEISS [5], the construction of a spatially homogeneous random tessellation in the *whole* plane, is beyond the scope of this paper. But for many characteristics of such unbounded random STIT tessellations, there exist unbiased estimators depending on bounded regions only. Hence, if conjecture 3 of Section 5 is true, on principle, all those characteristics can be calculated by the methods presented in the following. These procedures are not very elegant, but are almost elementary.

2. A sequence of random tessellations

As in the introduction, let W be a non-empty, bounded, convex, polygonal open subset of the plane, called *window.*

Denote by $\mathbb{N}$ the set of positive integers, by $\mathbb{N}_0$ the set of non-negative integers, by $\mathcal{G}$ the set of all lines in the plane, by $\mathfrak{G}$ the common $\sigma-$algebra over $\mathcal{G}$ [10, 9], by $\mathcal{G}_x$ the set of lines containing $x \in \mathbb{R}^2$, and given any subset $B \subset \mathbb{R}^2$, by $\mathcal{G}_B$ the set of all lines having points in B,

$$\mathcal{G}_B = \{g \in \mathcal{G} : g \cap B \neq \varnothing\}.$$

The $\sigma-$algebra $\mathfrak{G} \cap \mathcal{G}_B$ over $\mathcal{G}_B$ is denoted by $\mathfrak{G}_B$.
Let Q be a probability measure on the measurable space $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ with $Q(\mathcal{G}_W) = 1$, i.e. $Q(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_W) = 0$. Furthermore, it is assumed that $Q(\mathcal{G}_x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^2$. Such measures are said to be *bundleless*; they are in particular atomless.

Furthermore, let

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

be a system of random variables with the property of maximal independence, defined on a probability space $[\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}]$, where α_n is a random non-negative integer uniformly distributed in the finite set $\{0, \ldots, n-1\}$ and γ_n is a random line distributed according to Q; $n \in \mathbb{N}$.

If γ is a line not containing the origin O, denote by $\overline{\gamma}$ the open halfplane bounded by γ and containing O and by $\underline{\gamma}$ the other open halfplane bounded by γ. It doesn't matter how the halfplanes are denoted when the line γ goes through O, because our line measure Q is assumed to be bundleless.

We define recursively a sequence of $(n+1)$- tuples

$$(C_{00}), (C_{10}, C_{11}), \dots (C_{n0}, \dots C_{nn}), \dots$$

of so-called *quasi-cells* by

$$C_{00} = W, \quad C_{10} = \underline{\gamma}_1 \cap W, \quad C_{11} = \overline{\gamma}_1 \cap W$$

and for $n = 2, 3, \dots$:

$$C_{nj} \quad = \quad \begin{cases} C_{n-1,j} & \text{if } j \in \{0, \dots, n-1\}\,; \quad j \neq \alpha_n, \\ C_{n-1,\alpha_n} \cap \underline{\gamma}_n & \text{if } j = \alpha_n, \\ C_{n-1,\alpha_n} \cap \overline{\gamma}_n & \text{if } j = n. \end{cases}$$

Many of the quasi-cells are empty. The lines by which they are produced do not contribute in a visible way to the system of boundary lines of the random tessellation. In the language of simulation theory, one would say that these lines are rejected. The non-empty quasi-cells are called *cells.*

The *cells* belonging to the $(n+1)-$tuple $(C_{n0}, C_{n1}, \dots, C_{nn})$ form the tessellation $\mathcal{T}_n$ of the plane we are interested in; $n \in \mathbb{N}_0$.

By a *cell* C in W we mean a non-empty convex polygonal *open* subset of W, and by a *tessellation* $\mathcal{T}$ in W a finite set of non-overlapping cells in W with the property that the union of the closures of these cells is equal to the closure of W.

Remark 1. *By a suitable definition of the state space, the random sequence*

$$(C_{00}),\ (C_{10}, C_{11}),\ (C_{20}, C_{21}, C_{22}),\ (C_{30}, C_{31}, C_{32}, C_{33}), \cdots$$

can be interpreted as a Markov chain on the discrete time-axis $\mathbb{N}_0$ *with time-homogeneous transition probabilities.*

A sequence $J_1,\ J_2,\ J_3, \dots$ of so-called quasi-segments is given by $J_1 = \gamma_1 \cap W$, and in general

$$J_n = \gamma_n \cap C_{n-1,\alpha_n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Many of the quasi-segments are empty. If J_n is non-empty, it is called an *I-segment* of $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n+1}, \dots$. The non-empty members of $\{J_1, \dots, J_n\}$ are the I-segments of $\mathcal{T}_n$; $n \in \mathbb{N}$.

Remark 2. *Analogous random tessellations on the sphere can be generated by random great circles.*

3. Some mean values

3.1. Mean total edge length . Let E_k be the mean total length of all edges in the random tessellation $\mathcal{T}_k$; $k = 0, 1, \ldots$. Then it is equal to the mean total length of all I-segments in $\mathcal{T}_k$.

Obviously, $E_0 = 0$ and

$$E_1 = \int Q(dg)|g \cap W|,$$

where $|g \cap W|$ denotes the length of the segment $g \cap W$.

Relying on the construction of $\mathcal{T}_k$ described in Section 2, we obtain

$$E_2 = \int Q(dg_1) \left(|g_1 \cap W| + \frac{1}{2} \int Q(dg_2) \left(|g_2 \cap \overline{g}_1 \cap W| + |g_2 \cap \underline{g}_1 \cap W| \right) \right)$$

or

$$E_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) E_1.$$

Analogously,

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}\right) E_1; \quad n \in \mathbb{N}.$$

The generating function $G_E : [0, 1) \to [0, \infty)$ for the sequence $E_0, E_1, \ldots$ is defined by

$$G_E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k E_k.$$

We obtain

$$G_E(z) = E_1 \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} = E_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{\infty} z^k = \frac{E_1}{1-z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}.$$

Finally,

$$G_E(z) = -E_1 \frac{\ln(1-z)}{1-z}. \tag{3.1}$$

Remark 3. *Analogously, the entire intensity measure of total edge length can be evaluated for $\mathcal{T}_k$. The total mass of this finite measure is then the mean total edge length E_k; $k \in \mathbb{N}_0$, cf. proposition 1.*

3.2. Mean total Ambartzumian length of edges . The results in this subsection are not only interesting for its own; they are also helpful for calculating the mean values in subsection 3.3.

Let R be a locally finite bundleless measure on $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$. The $R-$pseudo-length $|\mathfrak{s}|_R$ in the sense of Ambartzumian [1, 2] of a segment $\mathfrak{s}$ in the plane is defined by

$$|\mathfrak{s}|_R = \frac{1}{2} R(\mathcal{G}_{\mathfrak{s}}).$$

Although for certain R, a non-empty segment can have the $R-$pseudo-length 0, we simply speak of "R-length" for short.

It is important for us that the R-length as a function on the set of segments is additive on lines.

If R is shift- and rotation-invariant, the $R-$length is proportional to the Euclidean length, and the results in this subsection reduce to that in subsection 3.1.

In the case $R = Q$, we speak of the *intrinsic* length belonging to the random tessellations $\mathcal{T}_k$; $k \in \mathbb{N}_0$.

Denote the mean total R-length of edges of $\mathcal{T}_k$ by $A_k(R)$.

Analogously to subsection 3.1, we obtain

$$\begin{aligned} A_0(R) &= 0, \\ A_1(R) &= \int Q(dg)|g \cap W|_R \\ &= \frac{1}{2}\int Q(dg)R(\mathcal{G}_{g\cap W}), \\ \ldots &= \ldots, \\ A_n(R) &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)A_1(R); \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

The result for $n = 1$ can be written in the form

$$A_1(R) = \frac{1}{2}\int Q(dg)\int R(dh)M(g,h),$$

where $M(g,h) = 1$ if $g, h \in \mathcal{G}$ meet in W and $M(g,h) = 0$ otherwise.

Analogously to formula (3.1), the generating function $G_R : [0,1) \to [0,\infty)$ for the sequence $A_0(R), A_1(R), A_2(R), \ldots$ is given by

$$G_R(z) = -A_1(R)\frac{\ln(1-z)}{1-z}. \tag{3.2}$$

3.3. **Mean number of nodes .** Denote by N_k the mean number of nodes of $\mathcal{T}_k$ in W; $k \in \mathbb{N}_0$. It is easily seen that

$$N_0 = 0,\ N_1 = 0,\ N_2 = 2A_1(Q),$$

where $A_1(Q)$ is the mean intrinsic length, i.e. the mean $Q-$length, of the single I-segment in $\mathcal{T}_1$. Generally, we find

$$N_{n+1} = N_n + \frac{4}{n+1}A_n; \quad n \in \mathbb{N},$$

where $A_n = A_n(Q)$ is the mean total intrinsic length of all edges in $\mathcal{T}_n$, which was evaluated in subsection 3.2. This recursion formula leads to

$$N_{n+1} = 4\sum_{m=1}^{n}\frac{A_m}{m+1}; \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

The generating function $G_N : [0,1) \to [0,\infty)$ for the sequence $(N_k)_{k=0,1,\dots}$ is defined by

$$G_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k N_k = \sum_{k=2}^{\infty} z^k N_k.$$

Formula (3.3) implies

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{n+1} z^{n+1} = 4\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{m+1} =$$

$$= 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} z^{n+1} = \frac{4}{1-z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} z^{m+1}$$

or

$$(1-z)G_N(z) = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} z^{m+1}.$$

Differentiation leads to

$$\frac{d}{dz}\Big((1-z)G_N(z)\Big) = 4\sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m.$$

The power series on the right hand side is equal to $G_Q(z)$ provided by formula (3.2), hence

$$(1-z)G_N(z) = -4A_1(Q)\int_0^z du \frac{\ln(1-u)}{1-u}$$

and finally

$$G_N(z) = \frac{2}{1-z} A_1(Q) \ln^2(1-z); \quad 0 \le z < 1, \tag{3.4}$$

where

$$A_1(Q) = \frac{1}{2}(Q \times Q)\left\{(g,h) \in \mathcal{G}^2 : g \cap h \cap W \neq \varnothing\right\}$$

The numbers N_k itself can be derived from (3.4) by representing the analytical function in z on the right-hand side as a power series.

Remark 4. *Even the entire intensity measure for nodes can be evaluated by similar methods. The total mass of such an intensity measure is then equal to the corresponding mean value calculated above, cf. proposition 2.*

3.4. **A restricted capacity functional.** Let K be a compact convex subset of W and S_k the probability that K is contained in exactly one cell of the random tessellation $\mathcal{T}_k$, i. e. that no I-segment of $\mathcal{T}_k$ intersects K; $\quad k \in \mathbb{N}_0$. Obviously,

$$S_0 = 1,\ S_1 = Q(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_K)$$

and

$$S_2 = \int_{\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_K} Q(dg_1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_K} Q(dg_2)\right) = S_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}S_1\right).$$

Analogously,

$$S_n = S_{n-1}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}S_1\right)$$

or

$$S_n = \left(\frac{S_1 + n - 1}{n}\right)S_{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finally,

$$S_n = \left(\frac{S_1 + n - 1}{n}\right)\left(\frac{S_1 + n - 2}{n-1}\right)\dots\left(\frac{S_1 + 1}{2}\right)S_1; \quad n \in \mathbb{N}$$

or

$$S_k = (-1)^k\binom{-S_1}{k}; \quad k = 0, 1, \dots.$$

Let $G_S : [0,1) \to [0,1]$ be the generating function for the sequence $S_0, S_1, \dots$, i.e.

$$G_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k S_k.$$

We obtain

$$G_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (-1)^k \binom{-S_1}{k}.$$

The right hand side is the well-known binomial series, and hence

$$G_S(z) = (1-z)^{-S_1}; \quad 0 < z < 1. \tag{3.5}$$

4. Mixed line-generated tessellations

4.1. **Definition.** Let ν be a random non-negative integer independent of the sequences

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

and geometrically distributed with parameter $0 < p < 1$:

$$\mathcal{P}(\nu = k) = p(1-p)^k; \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

It is convenient for our purposes to introduce the new parameter $t = -\ln p$ for the geometric distribution, i.e.

$$\mathcal{P}(\nu = k) = e^{-t}(1 - e^{-t})^k; \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

We are interested in the random tessellation $\mathcal{T}_\nu$. Let $\mathcal{T}^t$ be a random tessellation distributed as $\mathcal{T}_\nu$, where ν has a geometric distribution with the new parameter t; $0 < t < \infty$.

Formally, the random tessellations $\mathcal{T}_k$ are mappings from the probability space $[\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}]$ into the space of tessellations; $k \in \mathbb{N}_0$. These mappings induce a σ−algebra over the space of tessellations. The distributions P_k (laws) of the $\mathcal{T}_k$ are probability measures on that $\sigma-$algebra. The law P^t of $\mathcal{T}^t$ is given by

$$P^t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^k P_k.$$

The random tessellation $\mathcal{T}^t$ is addressed as a *mixed line generated tessellation* with characteristics Q, t.

In addition to theorem 1 in Subsection 4.2.4 and corollary 6 in Section 5, the following observation may be regarded as a motivation for investigating such mixtures.

Conjecture 1. *Let $\mathcal{T}$ be a mixed line-generated tessellation in W with characteristics Q, t and $\widehat{W}$ a window in the sense of section 2 with $\widehat{W} \subset W$ and $Q(\mathcal{G}_{\widehat{W}}) > 0$. Then the cutout of $\mathcal{T}$ in $\widehat{W}$ can be interpreted as a mixed line-generated tessellation in $\widehat{W}$ with characteristics*

$$\widehat{Q} = \frac{1}{Q(\mathcal{G}_{\widehat{W}})} Q(\cdot \cap \mathcal{G}_{\widehat{W}}), \quad \widehat{t} = tQ(\mathcal{G}_{\widehat{W}}).$$

4.2. **Mean values .**

4.2.1. *General formula.* If M_k is one of the mean values for $\mathcal{T}_k$ treated in section 3, the corresponding mean value of $\mathcal{T}^t$ is denoted by M^t, and we get

$$M^t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^k M_k$$

or

$$M^t = e^{-t} G_M(1-e^{-t}), \tag{4.1}$$

where $G_M : (0,1) \to [0,\infty)$ means the generating function for the sequence $(M_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$:

$$G_M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k M_k.$$

Now, the characteristics can be easily deduced from that in Section 3.

4.2.2. *Edge length intensity measure.* According to formula (4.1), the mean total edge length E^t of $\mathcal{T}^t$ is equal to $e^{-t}G_E(1-e^{-t})$. Combining this with (3.1), we find

$$E^t = t \int Q(dg)|g \cap W|.$$

Obviously, in an analogous manner the entire edge length intensity measure can be deduced.

For easy formulation, the intensity measures are described as measures on $\mathbb{R}^2$ having zero mass at $\mathbb{R}^2 \setminus W$. A measure on $\mathbb{R}^2$ in our sense is a measure on the measurable space $[\mathbb{R}^2, \mathfrak{R}_2]$, where $\mathfrak{R}_2$ denotes the Borel $\sigma-$algebra over $\mathbb{R}^2$. In this manner, we often do not mention the $\sigma-$algebra involved if there is no danger of confusion.

Proposition 1. *The edge length intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is given by*

$$t \int Q(dg)\mu(g; \centerdot \cap W),$$

where $\mu(g; \centerdot)$ *is a special measure on* $\mathbb{R}^2$*, namely the 1-dimensional Hausdorff-measure concentrated at* g.

Note that the total mass of this intensity measure is equal to E^t.

Corollary 1. *The edge length intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is equal to* $\beta_t(\centerdot \cap W)$*, where* β_t *denotes the edge length intensity measure of a Poisson line field in* $\mathbb{R}^2$*with intensity measure* tQ *(on* $\mathcal{G}$*).*

A Poisson line field in $\mathbb{R}^2$ is a Poisson hyperplane process (mosaic) in the case of dimension $d = 2$ in the sense of Schneider and Weil [10].

4.2.3. *Node intensity measure.* According to formula (4.1), the mean number of nodes N^t of $\mathcal{T}^t$ is equal to $e^{-t}G_N(1 - e^{-t})$. Combining this with (3.4), we find

$$N^t = t^2 c(Q),$$

where

$$c(Q) = (Q \times Q) \left\{(g,h) \in \mathcal{G}^2 : g \cap h \cap W \neq \varnothing\right\}. \tag{4.2}$$

Analogously, the complete node intensity measure can be calculated.

Proposition 2. *The node intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is given by*

$$t^2 \int Q(dg) \int Q(dh)\delta(g,h; \centerdot),$$

where $\delta(g,h; \centerdot)$ *denotes the Dirac measure on* $\mathbb{R}^2$*concentrated at the intersection point* $g \cap h$ *of the lines* g, h*, if this intersection point exists and is contained in* W*, and* $\delta(g,h; \centerdot)$ *is equal to the zero-measure otherwise.*

Note that the total mass of this node intensity measure is equal to N^t.

Corollary 2. *The node intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is equal to* $2\nu_t(\centerdot \cap W)$*, where* ν_t *denotes the node intensity measure of a Poisson line field in* $\mathbb{R}^2$ *with intensity measure* tQ *(on* $\mathcal{G}$*).*

4.2.4. *Restricted capacity functional.* As a consequence of formulas (3.5), (4.1) we have

$$S^t(K) = \exp\left(-tQ(\mathcal{G}_K)\right), \tag{4.3}$$

where $K \subset W$ is convex and compact.

Proposition 3. *The restricted capacity functional for $\mathcal{T}^t$ is equal to that for the cutout in W of a Poisson line tessellation with intensity measure tQ (on $\mathcal{G}$).*

A remarkable consequence should be pointed out.

Theorem 1. *The cell of $\mathcal{T}^t$ containing a fixed point $x \in W$ has the same distribution as the intersection with W of the cell containing x of a Poisson line tessellation with intensity measure tQ (on $\mathcal{G}$).*

4.3. **Remark on iterations.** The following considerations are devoted to specialists already familiar with the notions of iteration (nesting) of random tessellations and stability under iteration [5], [7] .

The leading normalized line measure Q is fixed in this subsection.
Given the mixed line-generated tessellations $\mathcal{T}^t$ with law P^t and $\mathcal{T}^s$ with law P^s, let $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots$ be a sequence of i. i. d. copies of $\mathcal{T}^s$, independent of $\mathcal{T}^t$. If $\{Z_1, \ldots, Z_\kappa\}$ is the set of cells of $\mathcal{T}^t$ and $\mathfrak{Y}_n$ the set of cells of $\mathcal{Y}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then the set of cells

$$\bigcup_{n=1}^{\kappa} (\mathfrak{Y}_n \cap Z_n)$$

forms a new tessellation, the law of which is denoted by $P^t \boxplus P^s$.

Conjecture 2. *The class of all mixed line-generated tessellations (related to Q) as a whole is stable under iteration in the following sense: Every operation of iteration maps the mentioned class into itself, i. e. an iterated mixed line-generated tessellation is again a mixed line-generated tessellation. If the mixed line-generated tessellation $\mathcal{T}^t$ is iterated according to the law P^s of $\mathcal{T}^s$, then the law $P^t \boxplus P^s$ of the outcome fulfils*

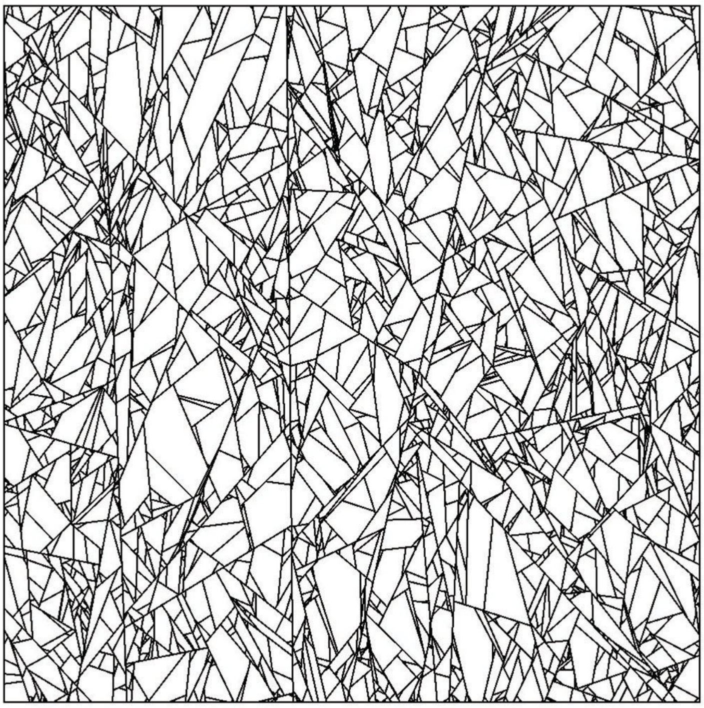
$$P^t \boxplus P^s = P^{t+s}.$$

5. Homogeneous case

Let Λ be a *shift-invariant*, locally finite measure on the space of lines $[\mathcal{G}, \mathfrak{G}]$ with $\Lambda(\mathcal{G}_W) = 1$, not concentrated on a set of parallel lines.

Denote by $\mathcal{T}^t$ the mixed line-generated tessellation in W in the sense of Section 4, now related to the line measure $Q = \Lambda(. \cap \mathcal{G}_W)$.

As a consequence of proposition 1, we obtain the following result.



Proposition 4. *The edge length intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is equal to*

$$\frac{t}{2}\Lambda(\mathcal{G}_B)\mu_2(\cdot \cap W),$$

where B *is the unit disk, and* μ_2 *denotes the Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^2$.

Let $\mathcal{H}^t$ be a random STIT tessellation [5] in the whole plane related to the line measure $t\Lambda$.

Corollary 3. *According to* [6] *and proposition 4, the cutout in* W *of the random STIT tessellation* $\mathcal{H}^t$ *has the same edge length intensity measure as* $\mathcal{T}^t$.

Now, proposition 2 is applied to the homogeneous case.

Proposition 5. *The node intensity measure of* $\mathcal{T}^t$ *is equal to*

$$\frac{t^2}{4}\int_{\mathcal{G}_B}\Lambda(dg)\int_{\mathcal{G}_B}\Lambda(dh)\,|\sin\measuredangle(g,h)|\,\mu_2(\cdot \cap W).$$

Corollary 4. *According to* [6] *and proposition 5, the cutout in* W *of the random STIT tessellation* $\mathcal{H}^t$ *has the same node intensity measure as* $\mathcal{T}^t$.

Proposition 6. *The restricted capacity functional of $\mathcal{T}^t$ in formula (4.3) can be written in the form*

$$S^t(K) = \exp(-t\Lambda(\mathcal{G}_K)); \quad K \subset W \text{ compact, convex.}$$

Corollary 5. *According to* [6] *and proposition 6, the cutout in W of the random STIT tessellation $\mathcal{H}^t$ has the same restricted capacity functional as $\mathcal{T}^t$.*

Note also the following consequence.

Corollary 6. *The cell of $\mathcal{T}^t$ containing the point $x \in W$ as well as the intersection with W of the cell in $\mathcal{H}^t$ containing x are distributed as the intersection with W of the Crofton cell related to Λ, x.*

If conjecture 2 could be verified, also the following conjecture is true.

Conjecture 3. *The random tessellations $\mathcal{H}^t$ restricted to W and $\mathcal{T}^t$ are identically distributed.*

The following two additional ways are proposed for proving the conjecture:

(1) Comparing the algorithms for producing the tessellations.
(2) Evaluating the capacity functional.

In the case of random STIT tessellations, the capacity functional is already known as a recursion formula [5]; the stability under iteration even was the starting point for all investigations.

The above Figure is related to the homogeneous case. It shows a simulation of an anisotropic random STIT tessellation according to an algorithm of Nagel and Weiss [4, 5, 10] and was provided by Joachim Ohser, Hochschule Darmstadt.

Note added after submission

The present paper was submitted on December 31, 2009. On February 16, 2010, the author received the profound and very important preprint of Tomasz Schreiber and Christoph Thaele: "Typical Geometry, Second-Order Properties and Central Limit Theory for Iteration Stable Tessellations" from Werner Nagel.

In the article of Schreiber and Thaele, the process of cell division living on the *continuous* time axis that was introduced in [7, 8] and the related STIT tessellations are treated with the efficient and very powerful methods of martingale theory.

Because also inhomogeneous counterparts are considered, probably the conjectures above can be easily verified by the methods of Schreiber and Thaele.

In the present paper, the focus is on a tessellation-valued Markov chain living on a *discrete* time axis and producing STIT tessellations and inhomogeneous counterparts. Furthermore, the aim of the present paper is to provide an easy access to the theory.

Notes added in proof

1. Remark 2 in the present paper is influenced by an idea of Matthias Reitzner.

2. The argument in the exponential function in formula (4.3) may be addressed as the Ambartzumian perimeter related to the line measure tQ of the compact convex set K.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, "A note on pseudometrics on the plane", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **37**, 145 – 155 (1976).

[2] R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester (1982).

[3] R. Cowan, "New classes of random tessellations arising from iterative division of cells", preprint (2009).

[4] W. Nagel and V. Weiss, "Crack STIT tessellations - Existence and uniqueness of tessellations that are stable with respect to iterations", Izvestiya NAN Armenii, Matematika, **39** (4), 84 – 114 (2004).

[5] W. Nagel and V. Weiss, "Crack STIT tessellations: Characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration", Adv. Appl. Prob. (SGSA), **37**, 859 – 883 (2005).

[6] W. Nagel and V. Weiss, "STIT tessellations in the plane", Rendiconti del circulo matematico di Palermo, Serie II, **77**, 441 – 458 (2006).

[7] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "The iteration of random tessellations and a construction of a homogeneous process of cell divisions", Adv. Appl. Prob. (SGSA), **40**, 49 – 59 (2008).

[8] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "Some distributions for I-segments of planar random homogeneous STIT tessellations", Math. Nachr. , in print.

[9] J. Mecke, "Joint distribution of direction and length of the typical I-segment in a homogeneous random planar tessellation stable under iteration", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **44** (1), 45 – 53 (2009), Internet: ISSN 1068-3623. Original in Izvestiya NAN Armenii, Matematika **44** (1), 73 – 84 (2009).

[10] R. Schneider and W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer (2008).

Поступила 31 декабря 2009

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 45

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
серия Математика

номер

О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. III
А. В. Абрамян 1

О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. IV
А. В. Абрамян 5

Сильно подвижные категории и сильная подвижность топологических пространств
Т. А. Авакян, П. С. Геворкян 1

О кратности точки пересечения двух плоских алгебраических кривых
Г. С. Авагян 3

Лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой в круге
К. Л. Аветисян 5

Случайная копия отрезка внутри выпуклой области
Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян 6

Оценка высших производных решений для одного класса почти гипоэллиптических уравнений в бесконечной полосе
С. Р. Айрапетян, В. Н. Маргарян 5

О гладкости решений одного класса регулярных уравнений в полосе
С. Р. Айрапетян 4

Задача типа Римана-Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго порядка в весовых пространствах
Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян 2

О жадном алгоритме по системе Хаара
А. Алексанян 3

Не φ-допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп
В. С. Атабекян 2

Сопряжённые голоморфных пространств Бесова на полидисках и диагональных отображениях
А. В. Арутюнян, В. Луски 3

Точные решения уравнения Бельтрами в некоторых частных случаях
С. К. Афян 3

On groups acting by cohomogeneity one on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$
P. Ahmadi 3

Пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости как "B–произведения"
А. Г. Багдасарян 2

О задаче разделения частот
С. Вагаршакян 4

Дискретизация теоремы Лебега-Колмогорова
А. Л. Григорян 1

О β-равномерных алгебрах Дирихле
С. А. Григорян, М. И. Караханян, Т. А. Хорькова ... 6

О $\{2,3\}$-сверхтождествах в обратимых $\{2,3\}$-алгебрах с тернарной групповой операцией
Г. Э. Гумашян 3

О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка
В. Ж. Думанян 1

О безусловной базисности систем синусов и косинусов
С. С. Казарян 6

О решениях почти гипоэллиптических уравнений в весовых пространствах Соболева
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян 4

Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара
Г. А. Карагулян 6

Вырождение полуэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде
Г. А. Карапетян, О. Г. Тананян 2

Examples of homogeneous vectors on the Fiber space of the associated and the tangent bundles
R. Chavosh Khatamy 1

Об одном классе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий
А. Ю. Кузнецова 6

Sharp and weighted boundedness for multilinear operators of pseudo-differential operators on Morrey space
L. Liu 3

Sharp Function boundedness for vector-valued multilinear singular integral operators with non-smooth kernels
L. Liu 4

Об одном классе частично гипоэллиптических операторов в весовых пространствах Соболева
В. Н. Маргарян 5

О безусловной и абсолютной сходимости рядов по всплеск системам
А. С. Мартиросян 5

О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-каратеодориевых областях
В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян 3

Неоднородные случайные плоские мозаики, порожденные прямыми
Й. Мекке 6

Обобщенная проблема Каца для Бозе газа в многоугольной области
С. Погосян 1

Интегральная характеризация случайных перестановок с точки зрения точечных процессов
С. Погосян, Г. Цессин 5

О линиях уровня гладких функций
Г. А. Сукиасян 4

Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с интерполяцией. Тригонометрический полином Тейлора
Р. М. Тригуб 1

New stability and boundedness results of Liénard type equations with multiple deviating arguments
Cemil Tunc 4

Построение нетривиального решения одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений
Х. А. Хачатрян 2

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 6, 2010

Содержание

Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, Случайная копия отрезка внутри выпуклой области 5

С. А. Григорян, М. И. Караханян, Т. А. Хорькова, О β-равномерных алгебрах Дирихле 17

С. С. Казарян, О безусловной базисности систем синусов и косинусов 27

Г. А. Карагулян, Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара 33

А. Ю. Кузнецова, Об одном классе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий 51

Й. Мекке, Неоднородные случайные плоские мозаики, порожденные прямыми 63

Содержание тома 45, номера 1 – 6, 2010 77

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 6, 2010

Contents

N. G. Aharonyan, H. S. Harutyunyan, V. K. Ohanyan, A random copy of a segment within a domain 5

S. A. Grigoryan, M. I. Karakhanyan and T. A. Khorkova, About β-uniform Dirichlet algebra 17

S. S. Ghazaryan, On unconditional basis property of sine and cosine systems 27

G. A. Karagulyan, On complete characterization of divergence sets of Fourier-Haar series 33

A. Yu. Kuznetsova, On a class of C^*-algebras, generated by a countable family of partial isometries 51

J. Mecke, Inhomogeneous random planar tessellations generated by lines 63

Author Index to Volume 45, numbers 1 – 6, 2010 77