

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2010

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА
ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С
ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ. IV

А. В. АБРАМЯН

Ванадзорский государственный педагогический институт

Аннотация. Работа посвящена изучению асимптотического поведения ортогональных на единичной окружности рациональных функций с фиксированными полюсами.

MSC2010 number: 26C15.

Ключевые слова: рациональные функции; ортогональные системы.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($|z_k| < 1$, $k = 0, 1, \dots$) - произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим систему Такенака-Мальмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ассоциированную с последовательностью чисел $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$(1.1) \quad r_0(z) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad r_n(z) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_0 z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \varepsilon_k,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{|z_k|}{z_k}, & \text{если } z_k \neq 0 \\ -1, & \text{если } z_k = 0, \end{cases} \quad n, k = 0, 1, \dots$$

Известно, что система (1.1) ортонормальна на единичной окружности $T = \{\xi : |\xi| = 1\}$ относительно меры $(2\pi)^{-1} d\theta$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{r_m(\xi)} |d\xi| = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Пусть $\mu(\theta)$ - произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[0, 2\pi]$ с бесконечным множеством точек роста. Ортогонализируя упорядоченную последовательность (1.1) на T относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu(\theta)$, получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \alpha_n r_n(z) + \dots, \quad \varphi_n^*(0) > 0, \quad n = 0, 1, \dots \\ \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_m(\xi)} d\mu(\xi) &= \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

где

$$\varphi_n^*(z) = \frac{B_n(z)}{z} \overline{r_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=0}^n \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \cdot \varepsilon_k.$$

Рациональные функции $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ были введены М. М. Джрбашяном [1], где и были получены аналоги некоторых хорошо известных соотношений теории ортогональных на единичной окружности многочленов. Рациональным функциям $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ посвящены также работы [2]–[5]. Отметим, что в частном случае, когда $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, система Такенака-Мальмквиста $\{r_k(z)\}_{k=0}^\infty$ переходит в систему $\{z^k\}_{k=0}^\infty$, а система рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ переходит в систему ортогональных на единичной окружности (относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu$) многочленов Г. Сеге, т. е. при $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$\varphi_n(z) = \alpha_n z^n + \dots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_m(\xi)} d\mu(\theta) = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad \xi = e^{i\theta}.$$

Известно, что так называемые асимптотические формулы для ортогональных многочленов полезны при исследовании многих задач связанных с теорией ортогональных многочленов (например, проблемы теории вероятностных процессов, см. [6]), т.е. полезно иметь характеристику поведения ортогональных многочленов при безграничном возрастании их номеров. Поэтому нижеследующая теорема из теории ортогональных многочленов, имеет важное значение.

Теорема 1. Если сходится ряд $\sum_{k=0}^\infty |\Phi_k(0)|^2$, где $\Phi_0(0) = 1$, $\Phi_k(0) = \frac{\varphi_k(0)}{\alpha_k}$, то ряд $\sum_{k=0}^\infty |\varphi_k(z)|^2$ и последовательность $\varphi_k^*(z) = z^k \overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $k = 0, 1, \dots$ сходятся равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$.

Для случая, когда функция $\mu(\theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ абсолютно непрерывна, первоначально теорема доказана Г. Сеге [7] (для общего случая см. Я. Л. Геронимус [8], [9], а также [10]).

Настоящая работа посвящена доказательству аналогичной теоремы (см. §2, теорема 3) для ортогональных на единичной окружности рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$. В работе потребуются некоторые соотношения, которые для удобства приведены ниже.

Справедливы соотношения (см. [2], [3], [5])

$$(1.2) \quad S_n(\xi, z) = \frac{1 - z_n \bar{\xi}}{1 - |z_n|^2} \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{\xi} z} \{ \overline{\varphi_n^*(\xi)} \varphi_n^*(z) - \overline{U_n(\xi)} U_n(z) \overline{\varphi_n(\xi)} \varphi_n(z) \},$$

где

$$S_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z), \quad U_n(z) = \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}, \quad \xi, z \in \mathbb{C},$$

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

$$(1.3) \quad \varphi_n^*(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

$$(1.4) \quad |\tau_n|^2 = |\tau_0|^2 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |z_{k+1}|^2}{1 - |z_k|^2} \frac{1 - |z_k \omega_k|^2}{1 - |\omega_{k+1}|^2}$$

где τ_k и ω_k определяются из следующих соотношений:

$$\varphi_n(z) = \frac{\tau_n \omega_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad \pi_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 - \bar{z}_k z), \quad \omega_n(z) = z^n + \dots, \quad \omega_0 = 1, \quad \omega_k = \omega_k(0).$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ $\varphi_n(z)$ ПРИ $|z| > 1$

Для удобства обозначим

$$(2.1) \quad h_n = |\tau_0|^{-2} \prod_{k=1}^n \frac{1 - |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad h_0 = 1.$$

Так как (см. [2]) $|\omega_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots$, то $h_k \geq h_{k+1} > 0$, $k = 0, 1, \dots$, и следовательно, существует предел $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$.

Теорема 2. Ряд

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$(2.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2}.$$

Доказательство. Из (1.2) при $\xi = z = 0$ следует

$$\sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \frac{|\varphi_n^*(0)|^2 - |z_n \varphi_n(0)|^2}{1 - |z_n|^2}$$

откуда с учетом (2.1), (1.3) имеем

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2} = \frac{1}{h_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если учесть, что

$$h_n = |\tau_0|^2 \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{(1 - |z_k|^2) |\omega_k|^2}{1 - |z_k \omega_k|^2} \right\},$$

то справедливость теоремы следует из признака сходимости бесконечного произведения и из равенств (2.4). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Если расходится ряд

$$(2.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |z_k|),$$

то ряд (2.2) сходится тогда и только тогда когда сходится ряд

$$(2.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |z_k|) |\omega_k|^2.$$

Доказательство. Из расходимости ряда (2.5) и из сходимости ряда (2.6) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$. Очевидно, что тогда сходимость ряда (2.3) эквивалентна сходимости ряда (2.6), остальное следует из теоремы 2. Следствие доказано. $\square$

Теорема 3. Если ряд (2.5) расходится, а ряд (2.6) сходится, то ряд

$$(2.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$$

и последовательность

$$(2.8) \quad \left\{ \frac{1 - \bar{z}_k z}{\sqrt{1 - |z_k|^2}} \varphi_k^*(z) \right\}_{k=0}^{\infty}$$

сходятся равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$.

Доказательство. Из формулы (1.2) при $\xi = z$ следует

$$(2.9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 = \frac{|1 - \bar{z}_n z|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z_n|^2)} |\varphi_n^*(z)|^2 - \frac{|z_n - z|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z_n|^2)} |\varphi_n(z)|^2.$$

Из этой формулы вытекает, что при $|z| < 1$

$$\frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{|1 - \bar{z}_k z|} \frac{1}{|\varphi_k^*(z)|} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}} \frac{1}{|\varphi_0^*(z)|},$$

откуда следует, что последовательность

$$(2.10) \quad \left\{ \frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{1 - \bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

равномерно ограничена в каждом круге $|z| \leq r < 1$. На основании теоремы Стильтеса-Витали из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$(2.11) \quad \left\{ \frac{\sqrt{1 - |z_k|^2}}{1 - \bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right\}_{k \in \Lambda}, \quad \Lambda = \{n_1, n_2, \dots\}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \dots,$$

которая равномерно сходится в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Ни одна функция последовательности (2.10) не обращается в нуль в круге $|z| \leq 1$, следовательно,

на основании теоремы Гурвица (см. [11], стр. 299) предельная функция подпоследовательности (2.11) не может обращаться в нуль внутри этой области и эта функция не равняется нулю тождественно, так как

$$\left(\frac{\sqrt{1-|z_k|^2}}{1-\bar{z}_k z} \frac{1}{\varphi_k^*(z)} \right) \bigg|_{z=0} = \frac{\sqrt{1-|z_k|^2}}{|T_k|^2} = \sqrt{1-|z_k \omega_k|^2}, \quad h_k \rightarrow h > 0$$

(см. следствие 1). Из сказанного следует, что подпоследовательность

$$(2.12) \quad \left\{ \frac{1-\bar{z}_k z}{\sqrt{1-|z_k|^2}} \varphi_k^*(z) \right\}_{k \in \Lambda}$$

стремится к пределу равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. На основании (2.9) отсюда следует, что сумма ряда (2.7) непрерывна в круге $|z| < 1$. Так как члены этого ряда неотрицательны, то по теореме Дини (см. [12], стр. 431) ряд (2.7) сходится равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Первое утверждение теоремы доказано. Далее, из этого утверждения следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)} \varphi_k(z)$$

в каждом круге $|z| \leq r < 1$, сходится равномерно, а из (1.2) при $\xi = 0$ следует

$$\sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(0)} \varphi_k(z) = \frac{1-\bar{z}_n z}{1-|z_n|^2} \overline{\varphi_n^*(0)} \varphi_n^*(z) - \frac{z_n(z_n - z)}{1-|z_n|^2} \overline{\varphi_n(0)} \varphi_n(z),$$

откуда в свою очередь следует, что не только подпоследовательность (2.12), но и вся последовательность (2.8) сходится равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Теорема доказана полностью. $\square$

Следствие 2. Если ряд (2.5) расходится, а ряд (2.6) сходится, то существует функция $\Delta(z)$ аналитическая в области $|z| > 1$, нигде в этой области не обращающаяся в нуль и такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z - z_n}{\sqrt{1-|z_n|^2}} \frac{\varphi_n(z)}{B_n(z)} = \Delta(z)$$

в каждой точке z области $|z| > 1$ и притом сходимость равномерна внутри этой области.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\bar{z}_n z}{\sqrt{1-|z_n|^2}} \varphi_n^*(z) = g(z), \quad |z| < 1, \quad \Delta(z) = \overline{g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| > 1,$$

как существование так и свойства функции $\Delta(z)$, указанные в формулировке следствия, вытекают из теоремы 3. Следствие 2 доказано. $\square$

Abstract. The paper is devoted to investigation of the asymptotic behavior of orthogonal on the unit circle rational functions with fixed poles.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Джрбашян, “Ортогональные системы рациональных функций на окружности”, Изв. АН. Арм. ССР, серия Математика, **1**, часть 1, стр. 3-24, часть 2, стр. 106-125, (1966).
- [2] А. В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **41**, N 3, 3 – 12 (2006).
- [3] А. В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. II”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **43**, N 2, 3 – 16, (2008).
- [4] А.В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. III”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **45**, N 1, 3 – 10, (2010).
- [5] А. В. Абрамян, “Рекуррентные формулы ортогональных на единичной окружности рациональных функций с фиксированными полюсами”, Тезисы докладов научной межвузовской конференции, посвященной 80-летию академика С. Н. Мергеляна, Ванадзор, стр. 59–62 (2008).
- [6] У. Гренандер, Г. Сеге. Теплицевы формы и их Приложения. М; ИЛ, 1961.
- [7] Г. Сеге. Ортогональные Многочлены. М; Физматгиз, 1962.
- [8] Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложения, Сообщ. Харьк. матем. общества XIX, 1948.
- [9] Я. Л. Геронимус. Многочлены, Ортогональные на Окружности и на Отрезке. М; Физматгиз, 1958.
- [10] Н. И. Ахиезер. Классическая Проблема Моментов. М; Физматгиз, 1961.
- [11] А. И. Маркушевич. Краткий курс Теории Аналитических Функций. М; Наука, 1979.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления. Том II, М; Наука, 1970.

Поступила 17 сентября 2008

ЛАКУНАРНЫЕ РЯДЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В КРУГЕ

К. Л. АВЕТИСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. В статье установлено необходимое и достаточное условие принадлежности лакунарных степенных рядов пространствам со смешанной нормой в единичном круге. В качестве приложения получены точные поточечные оценки лакунарных рядов.

MSC2010 number: 30B10, 30H05, 30D55.

Ключевые слова: Лакунарные ряды; пропуски Адамара; пространства со смешанной нормой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\mathbb{T}$ – его граница. Через $H(\mathbb{D})$ обозначим множество голоморфных функций в $\mathbb{D}$. Для измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = f(r\zeta)$ ее интегральные средние порядка p обозначаются, как обычно, через

$$M_p(f; r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}; dm)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где dm – мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Семейство голоморфных функций $f(z)$, для которых $\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(f; r) < +\infty$, есть обычное пространство Харди H^p . Квазинормированное пространство $H(p, q, \alpha) (0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0)$ – это множество тех функций $f(z)$, голоморфных в круге $\mathbb{D}$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p, q, \alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f; r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{0 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(f; r), & q = \infty. \end{cases}$$

Пространства $H(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой тесно связаны со многими известными функциональными пространствами такими, как весовые пространства

Харди ($q = \infty$), аналитические пространства Бесова, Соболева, Блоха, Дирихле и др., см. [1], [2]. Если $(1 - r)^\alpha M_p(f; r) = o(1)$ при $r \rightarrow 1^-$, то говорят, что голоморфная функция f принадлежит малому пространству $H_0(p, \infty, \alpha)$.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных формулах и зависящие только от указанных параметров $\alpha, \beta, \dots$. Символ $A \approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 (несущественные по своим значениям) такие, что $C_1|A| \leq |B| \leq C_2|A|$.

Лемма 1. Пусть $f \in H(p, q, \alpha)$ для некоторых $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0$, и $f_\rho(z) = f(\rho z)$ – растянутая функция. Тогда $\|f - f_\rho\|_{p, q, \alpha} = o(1)$ при $\rho \rightarrow 1^-$.

Доказательство леммы довольно стандартно, и его можно найти, например, в [3, Глор. 2.3], см. также [4] при $p = q$.

Лемма 2. Пусть $\alpha > 0, p > 0, a_k \geq 0, I_k = \{j \in \mathbb{N}; 2^k \leq j < 2^{k+1}\}, k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int_0^1 (1 - r)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \right)^p dr \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha k}} \left(\sum_{j \in I_k} a_j \right)^p,$$

где участвующие в двусторонней оценке постоянные $C_i = C_i(p, \alpha)$, $i = 1, 2$ зависят только от p и α .

Лемма 3. Пусть $p > 0, a_k \geq 0, N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\min\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right) \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^p \leq \max\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right).$$

Лемма 2 доказана Мательевичем и Павловичем [5], а лемма 3 является следствием неравенства Гельдера.

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geq \lambda$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Соответствующий степенной ряд называется лакунарным. Классическая теорема Пэли характеризует лакунарные ряды в пространствах Харди.

Теорема А. (Пэли, [6, Глава V, Теорема 8.20]) Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда для любого $p, 0 < p < \infty$,

функция f принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Лакунарные ряды в классических функциональных пространствах, таких как пространства Блоха, Бесова, Дирихле, Q-пространства, широко изучались в последнее время, см. [7]–[17]. В недавней работе автора [18] доказана версия следующей теоремы (для высших размерностей см. [19]), которая характеризует лакунарные ряды в весовых пространствах Харди–Блоха.

Теорема В. ([18], [19]) Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^\alpha} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty, \infty, \alpha} \approx \|f\|_{p, \infty, \alpha} \approx \sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^\alpha}.$$

Основная цель настоящей статьи – распространить Теорему В на все значения $q \in (0, \infty)$, т.е. на случай пространств со смешанной нормой $H(p, q, \alpha)$. В качестве приложения, затем мы выводим точные поточечные оценки лакунарных рядов из $H(p, q, \alpha)$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Недавно Стевич [14, 15] получил характеризацию лакунарных рядов и их производных в $H(p, q, \alpha)$ для конечных значений p . Ниже в теоремах 1 и 2 мы обобщаем и уточняем его результаты с использованием дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка.

Теорема 1. Пусть $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся

лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;
- (b) $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна ввиду элементарного вложения $H(\infty, q, \alpha) \subset H(p, q, \alpha)$.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (c) следует из неравенств Пэли Теоремы А, которая утверждает, что $M_p(f; r) \approx M_s(f; r)$ для любого $s, 0 < s < \infty$. Докажем импликацию (c) $\Rightarrow$ (d). По условию (c), в частности, имеем $f(z) \in H(2, q, \alpha)$. Тогда по леммам 2 и 3

$$\begin{aligned} \|f\|_{2, q, \alpha}^q &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k \theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr \geq \\ &\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2m_k} \right)^{q/2} dr \geq \\ &\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{m_k} \right)^{q/2} dr \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^2 \right)^{q/2} \geq \\ &\geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^q \right) \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j \in I_k} \frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}} \right) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}}, \end{aligned}$$

где $C = C(p, q, \alpha, \lambda)$.

Для доказательства импликации (d) $\Rightarrow$ (a), вновь применим леммы 2 и 3, учитывая, что количество целых чисел m_j , содержащихся в интервале I_k , не превышает $N = 1 + [\log_{\lambda} 2]$,

$$\|f\|_{\infty, q, \alpha}^q = \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_{\infty}^q(f; r) dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k \theta} \right| \right)^q dr \leq \\
&\leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{m_k} \right)^q dr \leq \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j| \right)^q \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^q \right) \leq \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j \in I_k} \frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}} \right) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}},
\end{aligned}$$

где $C = C(q, \alpha, \lambda)$. Это завершает доказательство теоремы 1. $\square$

Определим оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-\alpha} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha > 0, \\
\mathcal{D}^{\alpha} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha > 0,
\end{aligned}$$

ср. [2], [20, Раздел 22, (22.51)].

Теорема 2. Пусть $0 < q < \infty, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H(p, q, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^{\beta} f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|\mathcal{D}^{\beta} f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Разложение в ряд функции $\mathcal{D}^{\beta} f(z)$ также лакунарно. Поэтому, мы можем применить теорему 1 к каждой из функций

$$\mathcal{D}^{\beta} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_k+1+\beta)}{\Gamma(m_k+1)} a_k z^{m_k},$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_k + 1)}{\Gamma(m_k + 1 + \beta)} a_k z^{m_k}.$$

Далее, формула Стирлинга утверждает, что для $\beta > 0$

$$\frac{\Gamma(m_k + 1 + \beta)}{\Gamma(m_k + 1)} \sim m_k^\beta \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{p,q,\alpha}^q \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m_k + 1 + \beta)}{\Gamma(m_k + 1)} \right)^q \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}}.$$

□

Замечание 1. Легко видеть, что теорема 2 остается верной, если мы заменим оператор Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^\beta$ на дробный оператор Адамара

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^\alpha a_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Подставляя $\beta - \alpha$ вместо α , убеждаемся, что теорема 2 покрывает все пространства Бесова и обобщает предыдущие аналогичные результаты из [7, 8, 13, 17].

Теоремы А и В допускают аналогичные обобщения с дробными производными, доказательства которых мы опустим.

Теорема 3. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда для любого p , $0 < p < \infty$, функция $\mathcal{D}^\beta f$ принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{m_k^\beta a_k\} \in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны: $\|\mathcal{D}^\beta f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{2\beta} |a_k|^2 \right)^{1/2}$.

Теорема 4. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{\infty, \infty, \alpha} \approx \|\mathcal{D}^\beta f\|_{p, \infty, \alpha} \approx \sup_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}}.$$

Теорема 5. Пусть $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(\infty, \infty, \alpha)$;
- (b) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;
- (c) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$;
- (d) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} = 0$.

Замечание 3. Следует отметить, что теорема 3 включает случай голоморфных пространств Харди–Соболева [21], содержащих те голоморфные функции, чьи производные из H^p . Теоремы 4 и 5 покрывают все весовые пространства Блоха и малые пространства Блоха, обобщая предыдущие известные результаты из [7], [8], [10], [13], [17], [22].

3. ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

Хорошо известно, что произвольная функция $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ удовлетворяет поточечной оценке

$$(3.1) \quad |f(z)| \leq C(p, q, \alpha) \frac{\|f\|_{p, q, \alpha}}{(1 - |z|)^{\alpha+1/p}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Неравенство (3.1) следует из оценки Харди–Литтлвуда

$$M_\infty(f; \rho) \leq C(1 - \rho)^{-1/p} M_p(f; \rho), \quad 0 < \rho < 1,$$

которую можно найти в [1, Теор.5.9], или в [3, Прор.2.1]. Действительно, достаточно возвести последнее неравенство в степень $q < \infty$ и проинтегрировать с весом $(1 - \rho)^{\alpha q - 1}$ по интервалу $(r, 1)$,

$$\int_r^1 (1 - \rho)^{q/p + \alpha q - 1} M_\infty^q(f; \rho) d\rho \leq C \int_r^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(f; \rho) d\rho, \quad 0 < r < 1.$$

Ввиду монотонности величины $M_\infty(f; \rho)$ получаем

$$M_\infty^q(f; r) \int_r^1 (1 - \rho)^{q/p + \alpha q - 1} d\rho \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q,$$

что немедленно влечет (3.1).

Показатель $\alpha + 1/p$ в (3.1) наилучший для произвольных функций. Действительно, вложение $H(p, q, \alpha) \subset H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$ ложно для любого малого $\varepsilon > 0$. Можно проверить, что функция

$$g(z) = (1 - z)^{-(\alpha + 1/p)} \left(\log \frac{e}{1 - z} \right)^{-2/q}, \quad z \in \mathbb{D},$$

принадлежит $H(p, q, \alpha)$, но не принадлежит $H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$.

Следующая теорема показывает, что лакунарные ряды из $H(p, q, \alpha)$ имеют более медленный рост вблизи границы, чем произвольные функции из $H(p, q, \alpha)$.

Теорема 6. Пусть $0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ — произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ — функция из $H(p, q, \alpha)$, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$. Тогда

$$(3.2) \quad |f(z)| \leq C(\lambda, p, q, \alpha) \frac{\|f\|_{p, q, \alpha}}{(1 - |z|)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где показатель α не может быть уменьшен.

Доказательство. Для функции $f \in H(p, q, \alpha)$ с $0 < q < \infty$, по теореме 1 имеем

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q, \quad \text{и} \quad \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha}^q, \quad k \geq 0,$$

или

$$(3.3) \quad |a_k| \leq C \|f\|_{p, q, \alpha} m_k^\alpha \quad \text{для всех} \quad k \geq 0,$$

где $C = C(\lambda, p, q, \alpha)$ независима от f . Для $q = \infty$ и функции $f \in H(p, \infty, \alpha)$, последнее неравенство следует непосредственно из Теоремы В. Таким образом, любой лакунарный ряд f из $H(p, q, \alpha)$ с $0 < q \leq \infty$ удовлетворяет оценке (3.3). Следовательно,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{k=0}^\infty |a_k| |z|^{m_k} \leq C \|f\|_{p, q, \alpha} \sum_{k=0}^\infty m_k^\alpha |z|^{m_k} = \\ &= C \|f\|_{p, q, \alpha} \sum_{k=0}^\infty \sum_{m_j \in I_k} m_j^\alpha |z|^{m_j}, \end{aligned}$$

где $I_k = \{i \in \mathbb{N}; 2^k \leq i < 2^{k+1}\}$. Количество целых чисел m_j , содержащихся в I_k , не превышает $N = 1 + [\log_\lambda 2]$. Поэтому внутренняя сумма в (3.4) может быть оценена следующим образом

$$\sum_{m_j \in I_k} m_j^\alpha |z|^{m_j} \leq N 2^{(k+1)\alpha} |z|^{2^k}.$$

Значит, из (3.4) следует, что

$$|f(z)| \leq CN \|f\|_{p,q,\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)\alpha} |z|^{2^k} \approx \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\alpha}.$$

Последнюю оценку можно найти, например, в [1, стр. 66].

Теперь покажем, что показатель α в (3.2) наилучший. Предположим, что существует показатель $\beta, 0 < \beta < \alpha$, такой, что для каждого лакунарного ряда $f \in H(p, q, \alpha)$ найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$(3.5) \quad |f(z)| \leq \frac{C \|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in \mathbb{D},$$

т.е. $f \in H(\infty, \infty, \beta)$. Выбирая γ таким, что $\beta < \gamma < \alpha$, определим контрпример

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\gamma} z^{2^k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

По Теоремам В и 1 функция $f_0(z)$ принадлежит $H(p, q, \alpha)$, но, с другой стороны, $f_0(z) \notin H(\infty, \infty, \beta)$. Это противоречит (3.5) и завершает доказательство теоремы. $\square$

Хотя мы не можем уменьшить показатель α в (3.2), тем не менее, мы можем уточнить оценки (3.2) в следующем смысле.

Теорема 7. Пусть $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – функция из $H(p, q, \alpha)$, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда

$$(3.6) \quad f(z) = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow 1^-.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по Лемме 1 можем выбрать $\rho_0 \in (0, 1)$ настолько близким к 1, чтобы

$$\|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha} < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \rho \in (\rho_0, 1),$$

и, кроме того, $(1-r)^\alpha < \varepsilon$ для всех $r \in (\rho_0, 1)$. По теореме 6 для функции $f - f_\rho \in H(p, q, \alpha)$ будем иметь оценку

$$|f(z) - f_\rho(z)| \leq C(\lambda, p, q, \alpha) \frac{\|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Для фиксированного $\rho \in (\rho_0, 1)$ получим

$$\begin{aligned} (1-|z|)^\alpha |f(z)| &\leq (1-r)^\alpha |f(z) - f_\rho(z)| + (1-r)^\alpha |f_\rho(z)| \leq \\ &\leq C \|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha} + C_\rho (1-r)^\alpha < C\varepsilon \end{aligned}$$

для всех $r \in (\rho_0, 1)$. $\square$

Разумеется, показатель α в (3.6) не может быть уменьшен ввиду теоремы 6.

Abstract. The paper establishes a necessary and sufficient condition under which a lacunary series belong to a mixed norm space of functions holomorphic in the unit disc. As a corollary, some sharp pointwise estimates for lacunary series are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York (1970).
- [2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York / Berlin / Heidelberg (2000).
- [3] S. Gadbois, “Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, 1171 – 1180 (1988).
- [4] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, *Сообщ. Инст. Матем. Мех. АН Арм. ССР*, **2**, 3 – 40 (1948).
- [5] M. Mateljević and M. Pavlović, “ L^p -behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**, 309 – 316 (1983).
- [6] А. Зигмунд, *Тригонометрические Ряды*, Мир, М. (1965).
- [7] R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao, “On subspaces and subsets of BMOA and UBC”, *Analysis*, **15**, 101 – 121 (1995).
- [8] R. Aulaskari and G. Csordas, “Besov spaces and the $Q_{q,0}$ classes”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**, 31 – 48 (1995).
- [9] D. Girela, M. Pavlović and J. A. Peláez, “Spaces of analytic functions of Hardy–Bloch type”, *J. d’Analyse Math.*, **100**, 53 – 83 (2006).
- [10] D. Girela and J. A. Peláez, “Integral means of analytic functions”, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **29**, 459 – 469 (2004).
- [11] D. Girela and J. A. Peláez, “Growth properties and sequences of zeros of analytic functions in spaces of Dirichlet type”, *J. Austral. Math. Soc.*, **80**, 397 – 418 (2006).
- [12] D. Girela and J. A. Peláez, “Carleson measures for spaces of Dirichlet type”, *Integral Equations Oper. Theory*, **55**, 415 – 427 (2006).
- [13] J. Miao, “A property of analytic functions with Hadamard gaps”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **45**, 105 – 112 (1992).
- [14] S. Stević, “A generalization of a result of Choa on analytic functions with Hadamard gaps”, *J. Korean Math. Soc.*, **43**, 579 – 591 (2006).
- [15] S. Stević, “On Bloch-type functions with Hadamard gaps”, *Abstract Appl. Anal.*, **2007**, Article ID 39176, 8 pages (2007).
- [16] H. Wulan and K. Zhu, “Bloch and BMO functions in the unit ball”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **53**, 1009 – 1019 (2008).
- [17] K. Zhu, “A class of Möbius invariant function spaces”, *Illinois J. Math.*, **51**, 977 – 1002 (2007).
- [18] К. Л. Аветисян, “Лакунарные ряды и точные оценки в весовых пространствах голоморфных функций”, *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42**, (2), 3 – 9 (2007).
- [19] K. L. Avetisyan, “Hardy-Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk”, *Glasgow Math. J.*, **49**, 345 – 356 (2007).
- [20] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения*, Минск, Наука и техника (1987).
- [21] F. Beatrous and J. Burbea, “Holomorphic Sobolev spaces on the ball”, *Diss. Math.*, **276**, 1 – 57 (1989).
- [22] S. Yamashita, “Gap series and α -Bloch functions”, *Yokohama Math. J.*, **28**, 31 – 36 (1980).

Поступила 21 декабря 2009

**ОЦЕНКА ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ
ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ**

С. Р. АЙРАПЕТЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско-армянский государственный университет
E-mail: *sofia31337@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются регулярные, почти гипоэллиптические уравнения в бесконечной полосе. Доказывается, что все решения почти гипоэллиптического уравнения из определенного пространства принадлежат классу Жевре.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический; частично гипоэллиптический; гипоэллиптический по группе переменных; регулярный оператор (многочлен); весовые пространства Соболева.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Один из первых результатов о бесконечной дифференцируемости и аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка получено С.Н.Бернштейном в работе [1]. В работе [2] Г. Вейлом доказана, что обобщенные решения эллиптического уравнения второго порядка являются аналитическими функциями. В работе [3] И.Г.Петровский доказал, что все классические решения эллиптического уравнения и систем эллиптических уравнений любого порядка являются аналитическими функциями.

В работе [4] (см. также [5]) Л. Хермандером получены алгебраические критерии для того, чтобы все обобщенные решения дифференциального уравнения $P(D)u = 0$ с постоянными коэффициентами были бесконечно дифференцируемыми функциями. Такие уравнения называются гипоэллиптическими. Там же он показал, что для любого гипоэллиптического оператора $P(D)$ существует вектор $\lambda = \lambda(P) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_j \geq 1, j = 1, \dots, n$) такой, что все обобщенные решения данного однородного уравнения принадлежат классу Жевре Γ^λ , при этом в таких классах полученный результат является не улучшаемым.

В работе [6] введено понятие веса гипоеллиптичности для дифференциальных операторов с частными производными и на основе этого понятия в работах [7]–[8] введены мультианизотропные классы Жевре и доказано, что в общем случае решения гипоеллиптических уравнений принадлежат таким классам.

В работе [9] В. И. Буренковым рассмотрен класс дифференциальных уравнений $P(D)u = 0$ в бесконечной полосе и получены условия для того, чтобы все решения уравнения, которые определенным образом стремятся к нулю в бесконечности были бы бесконечно дифференцируемыми функциями. Такие операторы мы будем называть гипоеллиптическими по Буренкову.

В работе [10] доказано, что решения (из определенного пространства Соболева) гипоеллиптических по Буренкову уравнений $P(D)u = 0$ принадлежат классическим классам Жевре.

В работе [11] улучшен этот результат. Именно там показано, что эти решения принадлежат мультианизотропным классам Жевре.

В работах [12],[13] исследованы свойства мультианизотропных классов Жевре и для одного общего класса слабо гиперболических систем доказано, что решение задачи Коши для такой системы принадлежит мультианизотропным классам Жевре.

Наша цель в настоящей заметке получить аналогичный работе [11] результат для другого подкласса решений гипоеллиптических по Буренкову уравнений, являющихся одновременно почти гипоеллиптическими.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N – множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ – множество двумерных мультииндексов, E^2 и R^2 – двумерные вещественные евклидовы пространства точек $x = (x_1, x_2)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Далее

$$C^2 = R^2 \times iR^2 \quad (i^2 = -1),$$

$$R_+^2 = \{\xi \in R^2; \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}, \quad R_0^2 = \{\xi \in R^2, \xi_1 \cdot \xi_2 \neq 0\}.$$

Для $\xi, \eta \in R^2$, $x \in E^2$, $\alpha \in N_0^2$ и $\nu \in R_+^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad (\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2}, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdot |\xi_2|^{\nu_2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2},$$

где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ либо $D_j = i^{-1} \cdot \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$.

Пусть

$$P(D) = P(D_1, D_2) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$$

его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору $(P) \equiv \{\alpha; \alpha \in N_0^2, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Характеристическим многоугольником или многоугольником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$, набора (P)) называется минимальный выпуклый многоугольник $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(P) \subset R_+^2$ содержащий множество $(P) \cup \{0\}$. Многоугольник $\mathfrak{N}$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей одномерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ не отрицательны (положительны).

Определение 1. (см. [9]). Оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ (многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$) назовем гипоеллиптическим по Буренкову относительно первой компоненты (относительно ξ_1), если при $|\xi| \rightarrow \infty$ ($\xi \in R^2$).

$$P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi) \equiv D_1^{\alpha_1} P(\xi)/P(\xi) \longrightarrow 0 \quad \forall \alpha_1 \in N.$$

Определение 2. (см. [14]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоеллиптическим, если с некоторой постоянной $c > 0$

$$\sum_{\alpha \in N_0^2} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq c(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^2.$$

Для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ будем обозначать

$$\mathcal{D}(P) = \{\zeta \in C^2, P(\zeta) = 0\}, \quad d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in \mathcal{D}(P)} |\xi - \zeta|.$$

Известно (см., например, [4]), что для любого многочлена P существует постоянная $c = c(P) > 0$, для которой при всех $\xi \in R^2$ таких, что $P(\xi) \neq 0$

$$c^{-1} \leq d_P(\xi) \cdot \sum_{0 \neq \alpha \in N_0^2} \left| P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \right|^{1/|\alpha|} \leq c.$$

Нетрудно доказать, что если с некоторыми постоянными $\varepsilon > 0$, $M > 0$

$$(1.1) \quad |P(\xi)| \geq \varepsilon \quad \text{при} \quad \xi \in R^2, \quad |\xi| \geq M,$$

то многочлен P почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда

$$(1.2) \quad \rho_P := \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0.$$

В дальнейшем не оговаривая это каждый раз мы будем считать, что для многочлена P выполняется соотношение (1.1).

Определение 3. *Весовым множеством гипозеллиптичности относительно первой компоненты (относительно ξ_1) оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ (многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$) назовем множество*

$$\mathfrak{M}(P) = \left\{ \nu \in R_+^2, \sup_{|\xi| \geq M} |\xi|^\nu \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} \left| P^{(\alpha_1, 0)}(\xi) / P(\xi) \right|^{1/\alpha_1} < \infty \right\}.$$

Известно (см., например, [11]), что если многочлен P гипозеллиптичен по Буренкову относительно ξ_1 , то множество $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным множеством, т.е. для любой точки $\nu \in \mathfrak{M}(P)$, $\nu_1 \cdot \nu_2 \neq 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta_1, 0), (0, \beta_2) \in \mathfrak{M}(P)$ при $|\beta_1 - \nu_1| < \varepsilon, |\beta_2 - \nu_2| < \varepsilon$.

Для любого набора $\{\nu^j\}_1^k \subset \mathfrak{M}(P)$, $k \in N$ функция $h(\xi) = \sum_{j=1}^k |\xi|^{\nu^j}$ называется весом гипозеллиптичности по ξ_1 многочлена P . Если для многочлена P $\mathfrak{M}(P)$ многоугольник с вершинами $\{\nu^j\}_1^k$, то функцию $h_p(\xi) = \sum_{j=1}^k |\xi|^{\nu^j}$ назовем точным весом гипозеллиптичности по ξ_1 многочлена P .

Определение 4. (см. [15] или [16]). *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется регулярным, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $\nu \in \mathfrak{N}(P)$*

$$(1.3) \quad |\xi|^\nu \leq c(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^2.$$

Будем рассматривать регулярные операторы $P(D) = P(D_1, D_2)$ характеристические многоугольники которых имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N}(P) &= \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^j) \leq d_j, j = 1, \dots, k \quad (k \geq 2), \lambda^j = (1, \lambda_2^j), \\ 0 &= \lambda_2^1 < \dots < \lambda_2^k, 0 < d_1 < \dots < d_k, \\ \exists \nu^0 &\in R_0^2 \cap R_+^2, (\nu^0, \lambda^j) < d_j, j = 0, \dots, k-1, (\nu^0, \lambda^k) = d_k. \end{aligned}$$

Многоугольники вида (1.4) являются правильными, но не являются вполне правильными, так как $\lambda_2^1 = 0$.

Известно (см., например, [17]), что регулярный оператор $P(D_1, D_2)$ характеристический многоугольник которого имеет вид (1.4) является почти гипозеллиптическим и гипозеллиптическим по Буренкову относительно ξ_1 .

Лемма 1. *Если характеристический многоугольник регулярного оператора $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ имеет вид (1.4), то функция $h_p(\xi) = 1 + |\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda_2^k}$ является точным весом гипозеллиптичности P относительно ξ_1 .*

Доказательство. Очевидно достаточно показать, что

$$\mathfrak{M}(P) = \{\nu, \nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) \leq 1\}.$$

Из выпуклости $\mathfrak{M}(P)$ в силу вышесказанного (P – почти гипоеллиптичен, $0 \in \mathfrak{M}(P)$) достаточно показать, что $(1, 0), (0, 1/\lambda_2^k) \in \mathfrak{M}(P)$ и если $\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) > 1$, то $\nu \notin \mathfrak{M}(P)$.

Для некоторого постоянного $c_1 = c_1(P) > 0$ имеем

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k} \right) |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)| = \\ & \sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k} \right) \left| \sum_{\substack{\beta \in (P) \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \gamma_\beta \cdot \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} \xi_1^{\beta_1 - \alpha_1} \xi_2^{\beta_2} \right| \leq \\ & \leq c_1 \cdot \sum_{\alpha_1 \in N_0} \sum_{\substack{\beta \in (P) \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \left(|\xi|^\beta + |\xi_1|^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot |\xi_2|^{\beta_2 + \alpha_1/\lambda_2^k} \right) \end{aligned}$$

Так как $\beta_1 \geq \alpha_1$ и

$$((\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 + \alpha_1/\lambda_2^k), \lambda^j) = (\beta, \lambda^j) - \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda_2^j/\lambda_2^k \leq (\beta, \lambda^j) \leq d_j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

то $((\beta_1 - \alpha_1), (\beta_2 + \alpha_1/\lambda_2^k)) \in \mathfrak{N}(P)$ и в силу регулярности оператора $P(D)$ (см. (1.3)) с некоторой постоянной $c_2 = c_2(P) > 0$ из (1.5) получаем

$$\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k} \right) |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)| \leq c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^2.$$

Для регулярного многочлена P с характеристическим многоугольником вида (1.4) $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и, очевидно, с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$\sum_{\alpha_1 \in N} \left(|\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda_2^k} \right)^{\alpha_1} \cdot |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)| \leq c_3 \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} \left(|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_1/\lambda_2^k} \right) \cdot |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)|.$$

Следовательно, при $|\alpha_1| \neq 0$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$

$$\sum_{\alpha_1 \in N_0} \left(|\xi_1| + |\xi_2|^{1/\lambda_2^k} \right) |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha_1|} \leq c_4 \quad \forall \xi \in R^2, |P(\xi)| \geq 1.$$

Это означает, что $(1, 0) \quad (0, 1/\lambda_2^k) \in \mathfrak{M}(P)$.

Пусть теперь $\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) > 1$. Покажем, что $\nu \notin \mathfrak{M}(P)$. Для этого достаточно доказать, что при всех $M > 0$

$$(1.6) \quad \sup_{|\xi| \geq M} |\xi|^\nu \cdot \sum_{\alpha_1 \in N} |P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi)|^{1/\alpha_1} = \infty.$$

Обозначим

$$P_k(\xi) \equiv \sum_{(\beta, \lambda^k) = d_k} \gamma_\beta \xi^\beta.$$

Пусть $a \in R^2$, $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ такая точка, что $P_k^{(1,0)}(a) \neq 0$. Существование такой точки непосредственно следует из вида $\mathfrak{N}(P)$ и определения P_k , так как, тогда $P_k^{(1,0)}(\xi) \neq 0$.

Пусть $\xi^s = (a_1 s, a_2 s^{\lambda_2^k})$, $s = 1, 2, \dots$. Так как для любого $\beta \in (P - P_k) = \{\beta \in (P) : (\beta, \lambda^k) < d_k\}$, и $\beta_1 \geq 1$ $\beta_1 - 1 + \beta_2 \cdot \lambda_2^k < d_k - 1$, то при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{|\xi^s|^\nu |P^{(1,0)}(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} &= \frac{|a|^\nu s^{(\nu, \lambda^k)} |P_k^{(1,0)}(\xi^s) + (P - P_k)^{(1,0)}(\xi^s)|}{1 + |P_k(\xi^s) + (P - P_k)(\xi^s)|} = \\ &= \frac{|a|^\nu s^{(\nu, \lambda^k)} \left| s^{d_k-1} P_k^{(1,0)}(a) + \sum_{\substack{\beta \in (P-P_k) \\ \beta_1 \geq 1}} \gamma_\beta \cdot \beta_1 \cdot (\xi_1^s)^{\beta_1-1} (\xi_2^s)^{\beta_2} \right|}{1 + \left| s^{d_k} P_k(a) + \sum_{\beta \in (P-P_k)} \gamma_\beta \cdot (\xi_1^s)^{\beta_1} (\xi_2^s)^{\beta_2} \right|} = \\ &= \frac{|a|^\nu s^{(\nu, \lambda^k)} s^{d_k-1} |P_k^{(1,0)}(a) + o(1)|}{1 + |s^{d_k} P_k(a) + o(s^{d_k})|} \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, $(\nu, \lambda^k) > 1$ и $P_k^{(1,0)}(a) \neq 0$ получаем соотношение (1.6). Лемма 1 доказана. $\square$

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{N}$ многоугольник вида (1.4), $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) \leq 1\}$,
а

$$\mathfrak{M}^j = \{\nu \in R_+^2, \nu/j \in \mathfrak{M}\} = \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) \leq j\} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Тогда для любого $j \in N$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j &:= \{\nu \in R_+^2, \nu = \beta + \mu, \beta \in \mathfrak{N}, \mu \in \mathfrak{M}^j\} \subset \\ &\subset \mathcal{A}_j := \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^\ell) \leq d_\ell + j \mid \ell = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Доказательство. следует из того, что для любых $\ell : 1 \leq \ell \leq k$ и $\nu \in \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j$ ($j = 1, 2, \dots$)

$$(\nu, \lambda^\ell) = (\beta + \mu, \lambda^\ell) = (\beta, \lambda^\ell) + (\mu, \lambda^\ell) \leq (\beta, \lambda^\ell) + (\mu, \lambda^k) \leq d_\ell + j.$$

$\square$

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{N}$ многоугольник вида (1.4) с вершинами из N_0^2 , а $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda^k) \leq 1\}$. Тогда для любого $j \in N$

$$\mathcal{A}_j \cap N_0^2 = (\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^j) \cap N_0^2.$$

Доказательство. В силу предложения 1 достаточно показать, что для любых $j \in N$ и $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ ($\mathcal{A}_0 := \{0\}$) существуют мультииндексы $\beta \in \mathfrak{N}$ и $\gamma \in \mathfrak{M}^j$ такие, что $\alpha = \beta + \gamma$.

Пусть $j \in N$, $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ и $(0, \beta_2^{k+1})$ вершина многоугольника $\mathfrak{N}$ лежащая на оси ординат, т.е. $\beta_2^{k+1} \lambda_2^k = d_k$. Если $\alpha_2 \geq \beta_2^{k+1}$, то $\alpha - (0, \beta_2^{k+1}) \in N_0^2$ (в силу условия леммы на многоугольник $\mathfrak{N}$) и

$$(\alpha - (0, \beta_2^{k+1}), \lambda^k) = (\alpha, \lambda^k) - \beta_2^{k+2} \lambda_2^k \leq d_k + j - d_k = j,$$

т.е. $\gamma \equiv \alpha - (0, \beta_2^{k+1}) \in \mathfrak{M}^j$.

Пусть $\alpha_2 \leq \beta_2^{k+1} - 1$, покажем, что тогда $\alpha_1 \geq j$. Предположим обратное, что $\alpha_1 < j$ $\alpha_1 \leq j - 1$. Тогда для любого $\ell : 1 \leq \ell \leq k$

$$(\alpha, \lambda^\ell) \leq j - 1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^\ell \leq j - 1 + (\beta_2^{k+2} - 1) \lambda_2^\ell \leq j + d_\ell - 1 - \lambda_2^\ell < d_\ell + j - 1.$$

Это противоречит условию $\alpha \in (\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) \cap N_0^2$ и показывает, что при $\alpha_2 \leq \beta_2^{k+1} - 1$ $\alpha_1 \geq j$. Тогда $\beta := \alpha - (j, 0) \in N_0^2$ и для любого $\ell : 1 \leq \ell \leq k$, $(\beta, \lambda^\ell) = (\alpha, \lambda^\ell) - j \leq d_\ell + j - j = d_\ell$, т.е. $\beta \in \mathfrak{N}$. Этим утверждение леммы доказано. $\square$

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{N}$ – многоугольник вида (1.4) с вершинами из N_0^2 , а $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2 : (\nu, \lambda^k) \leq 1\}$. Тогда для любого $j \in N$, $\mathfrak{M}^j \subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^{j-1}$.

Доказательство. Так как в силу условия предложения вершины $\mathfrak{N}$ лежат в N_0^2 , то $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1/\lambda_2^k) \in \mathfrak{N}$, следовательно $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Поэтому

$$\mathfrak{M}^j = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{j-1} \subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}^{j-1}.$$

$\square$

Для произвольной области $\Omega \subset E^2$ и регулярного оператора $P(D)$ с характеристическим многоугольником вида (1.4) обозначим через $\dot{H}^P(\Omega)$ пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|P(D) \cdot\|_{L_2(\Omega)} + \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Лемма 3. Пусть $\Omega \subset E^2$ область, а $P(D) = P(D_1, D_2)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником вида (1.4). Тогда существует постоянная $c = c(P) > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq c (\|P(D) \varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}) \quad \forall \varphi \in \dot{H}^P(\Omega).$$

Доказательство. получается непосредственно применением преобразования Фурье, равенства Парсеваля и оценки (1.3). $\square$

Предложение 3. Для любых σ и $\delta > 0$ существуют функция $\psi(t) \in C_0^\infty(E^1)$ и постоянные $c_j > 0$, $j = 0, 1, \dots$ не зависящие от σ и $\delta > 0$ такие, что $\psi(t) = 1$ при $|t| \leq \sigma$, $\psi(t) = 0$ при $|t| \geq \sigma + \delta$ и

$$|D^j \psi(t)| \leq c_j \delta^{-j} \quad j = 0, 1, \dots, \forall t \in E^1.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(-1, 1), \quad \varphi > 0, \quad \int \varphi(t) dt = 1,$$

а $\chi(t)$ характеристическая функция множества $\{t : |t| \leq \sigma + \frac{\delta}{2}\}$. Обозначим $\psi(t) = \frac{2}{\delta} \int \chi(t - \tau) \varphi(\frac{2}{\delta} \cdot \tau) d\tau$. Прямые вычисления можно убедиться, что функция ψ удовлетворяет всем условиям предложения, при этом

$$c_j \leq 2^j \int |D^j \varphi(t)| dt, \quad j = 0, 1, \dots$$

□

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\kappa > 0$, $\Omega_\kappa = \{x \in E^2, |x_1| < \kappa, x_2 \in E^1\}$. Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$ и вполне правильного многоугольника $\mathfrak{N}$ через $\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$, $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa)$, $\Gamma^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa)$ обозначим следующие классы Жевре

$\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa) = \{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого компакта } K \subset \Omega_\kappa, \text{ существует } c = c(K, f) > 0, \text{ такая, что } \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\lambda_1 \cdot \alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2 \cdot \alpha_2}, \text{ для любого } \alpha \in N_0^2\}$

$\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) = \{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого } \kappa_1 \in (0, \kappa), \text{ существует } c = c(\kappa_1, f) > 0, \text{ такая, что } \left(\int_{\Omega_{\kappa_1}} |D^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\lambda_1 \cdot \alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2 \cdot \alpha_2}, \text{ для любого } \alpha \in N_0^2\}$

$\Gamma^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa) = \{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого компакта } K \subset \Omega_\kappa, \text{ существует } c = c(K, f) > 0, \text{ такая, что } \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{j+1} \cdot j^j, \text{ для любого } \alpha \in \mathfrak{N}^j \cap N_0^2, j \in N_0\}$

$\tilde{\Gamma}^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa) = \{f \in C^\infty(\Omega_\kappa), \text{ для любого } \kappa_1 \in (0, \kappa), \text{ существует } c = c(\kappa_1, f) > 0, \text{ такая, что } \left(\int_{\Omega_{\kappa_1}} |D^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c^{j+1} \cdot j^j \text{ для любого } \alpha \in \mathfrak{N}^j \cap N_0^2, j \in N_0\}$.

Замечание 1. Пользуясь неравенством Фридрикса (см., [4], (11.4.7)) легко заметить, что $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) \subset \Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa) \subset \Gamma^\mathfrak{N}(\Omega_\kappa)$.

Лемма 4. Пусть $\lambda = (1, \lambda_2)$, $\lambda_2 > 0$, а $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2, (\nu, \lambda) \leq 1\}$. Тогда $\Gamma^\lambda(\Omega_\kappa) = \Gamma^\mathfrak{M}(\Omega_\kappa)$ и $\tilde{\Gamma}^\lambda(\Omega_\kappa) = \tilde{\Gamma}^\mathfrak{M}(\Omega_\kappa)$.

Доказательство. Так как оба утверждения доказываются аналогично, то мы докажем только первое из них.

Пусть $f \in \Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$, т.е. для любого компакта $K \subset \Omega_\kappa$ с некоторой постоянной $c_1 = c_1(K, f) > 0$

$$(2.1) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c_1^{|\alpha|+1} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\lambda_2 \alpha_2}, \quad \alpha \in N_0^2.$$

Так как при всех $\alpha \in N_0^2$

$$(2.2) \quad \min\{1; \lambda_2\} \cdot (|\alpha| + 1) \leq (\alpha, \lambda) + 1 \leq \max\{1; \lambda_2\} \cdot (|\alpha| + 1),$$

то для любых $j \in N_0$ и $\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2$ ($(\alpha, \lambda) \leq j$) из (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| &\leq c_1^{[(\alpha, \lambda) + 1] / \min\{1; \lambda_2\}} \cdot (\alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2)^{\alpha_1} \cdot (\alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2)^{\lambda_2 \alpha_2} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{\lambda_2 \alpha_2} \leq \left(\left(\frac{c_1}{\min\{1, \lambda_2\}}\right)^{1 / \min\{1, \lambda_2\}}\right)^{j+1} j^j. \end{aligned}$$

Это в силу произвольности компакта $K \subset \Omega_\kappa$ означает, что $f \in \Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega_\kappa)$.

Пусть теперь $f \in \Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega_\kappa)$, т.е. для любого компонента $K \subset \Omega_\kappa$ существует постоянная $c_2 = c_2(K, f) > 0$ такая, что

$$(2.3) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c_2^{j+1} \cdot j^j, \quad \alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2, \quad j \in N_0.$$

Пусть $j \in N$. Тогда $\alpha_1 = j$ при $\alpha = (\alpha_1, 0) \in (\mathfrak{M}^j \setminus \mathfrak{M}^{j-1}) \cap N_0^2$ и поэтому из (2.3) непосредственно следует

$$(2.4) \quad \sup_{x \in K} |D_1^{\alpha_1} f(x)| \leq c_2^{j+1} \cdot j^j = c_2^{\alpha_1+1} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \quad \forall \alpha_1 \in N_0.$$

Так как для любого $j > 0$

$$\sup_{0 < \alpha_1 < j} \frac{j^j}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot (j - \alpha_1)^{j - \alpha_1}} \leq 2^j,$$

и $j - \alpha_1 \geq \lambda_2 \alpha_2 > 0$ при $\alpha_2 \neq 0, \alpha \in (\mathfrak{M}^j \setminus \mathfrak{M}^{j-1}) \cap N_0^2$, то в силу (2.2) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| &\leq c_2^{j+1} \cdot j^j \leq c_2^{(\alpha, \lambda) + 2} \cdot 2^j \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (j - \alpha_1)^{j - \alpha_1} \leq \\ &\leq (2c_2)^{(\alpha, \lambda) + 2} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (\lambda_2 \alpha_2 + 1)^{\lambda_2 \alpha_2 + 1} \leq \\ &\leq (2c_2)^{(\alpha, \lambda) + 2} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot (2 \cdot \max\{1, \lambda_2\} \alpha_2)^{\lambda_2 \alpha_2 + 1} \leq \\ &\leq (4 \cdot c_2 \max\{1, \lambda_2\})^{(\alpha, \lambda) + 2} \cdot 2 \cdot \max\{1, \lambda_2\} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\lambda_2 \alpha_2} \leq \\ &\leq [(4 \cdot c_2 \max\{1, \lambda_2\})^{2 \max\{1, \lambda_2\}}]^{|\alpha| + 1} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\lambda_2 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_2 \leq 2^{|\alpha|+1}$ при всех $\alpha_2 \in N$, то отсюда вместе с оценкой (2.4) получаем, что $f \in \Gamma^\lambda(\Omega_\kappa)$. Лемма 4 доказана. $\square$

Из теоремы 3.2 работы [17] непосредственно следует, что если $\kappa > 0$ достаточно большое, а $P(D)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником вида (1.4), то для любого $\kappa_1 \in (0, \kappa)$

$$(2.5) \quad N(P, \kappa) \equiv \left\{ u, P(D)u = 0 \text{ в } \Omega_\kappa, \sum_{j=0}^{m_2} \|D_2^j u\|_{L_2}(\Omega_\kappa) < \infty \right\} \subset H_{(\Omega_{\kappa_1})}^\infty \subset C_{(\Omega_{\kappa_1})}^\infty$$

где $m_2 = \text{ord}_{\xi_2} P = d_k / \lambda_2^k$, а $H_{(\Omega_{\kappa_1})}^\infty = \{f : D^\alpha f \in L_2(\Omega_{\kappa_1}), \forall \alpha \in N_0^2\}$.

В дальнейшем будем считать, что κ настолько большое, что для регулярного оператора $P(D)$ с характеристическим многоугольником вида (1.4) выполняется вложение (2.5).

Для $u \in N(P, \kappa)$ и $\sigma \in (0, \kappa)$ обозначим

$$\begin{aligned} |||u, \sigma||| &\equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega_\sigma)} \\ |||u, \sigma|||_t &= \begin{cases} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}^t \cap N_0^2} |||D^\alpha u, \sigma||| & \text{при } t > 0 \\ |||u, \sigma||| & \text{при } t \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

где $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(P)$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{N}$ многоугольник вида (1.4) с вершинами из N_0^2 , $\mathfrak{M} = \{\nu \in R_+^2 : (\nu, \lambda^k) \leq 1\}$, $\alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2$, $\gamma_1 \leq \alpha_1$ ($\gamma_1 \in N_0$), $j \in N$ и $\beta \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2$, а ψ функция из предложения 3. Тогда при всех

$$u \in \bigcap_{0 < \theta < \kappa} H^\infty(\Omega_\theta) \quad \text{и} \quad \delta \in (0, \kappa - \sigma), \quad \sigma \in (0, \kappa)$$

$$(2.6) \quad \left\| D_1^{\gamma_1} \psi(x_1) \cdot D_1^{\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1} D_2^{\alpha_2 + \beta_2} u(x) \right\|_{L(E^2)} \leq c \delta^{-\gamma_1} |||u, \sigma + \delta|||_{j - \gamma_1},$$

где $c = \max_{1 \leq r \leq d_1} c_r$, а c_r , $r = 0, 1, \dots$ постоянные из предложения 3.

Доказательство. Если $j \leq \gamma_1$, то для любого $\ell : 1 \leq \ell \leq k$

$$((\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), \lambda^\ell) = (\alpha, \lambda^\ell) - ((\gamma_1, 0), \lambda^\ell) + (\beta, \lambda^\ell) \leq d_\ell - \gamma_1 + j \leq d_\ell,$$

т.е. $(\alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \in \mathfrak{N} \cap N_0^2$. Тогда оценка (2.6) непосредственно следует из предложения 3 и определения нормы $|||\cdot|||_t$ при $t \leq 0$. Если же $j - \gamma_1 > 0$, то $(\alpha + \beta - (\gamma_1, 0), \lambda^\ell) \leq d_\ell + j - \gamma_1$, $\ell = 1, \dots, k$, т.е. $\alpha + \beta - (\gamma_1, 0) \in \mathcal{A}_{j - \gamma_1} \cap N_0^2$. Тогда в силу леммы 2 имеем, что $\alpha + \beta - (\gamma_1, 0) = \mu + \nu$, где $\mu \in \mathfrak{N} \cap N_0^2$, а

$v \in \mathfrak{M}^{j-\gamma_1} \cap N_0^2$. Тогда в силу предложения 3

$$\begin{aligned} \left\| D_1^{\gamma_1} \psi(x_1) \cdot D_1^{\alpha_1-\gamma_1+\beta_1} D_2^{\alpha_2+\beta_2} u(x) \right\|_{L_2(E^2)} &= \| D_1^{\gamma_1} \psi(x_1) D^\nu D^\mu u \|_{L_2((\Omega_{\sigma+\delta}))} \leq \\ &\leq c_{\gamma_1} \delta^{-\gamma_1} \| D^\nu D^\mu u \|_{L_2(\Omega_{\sigma+\delta})} \leq c \delta^{-\gamma_1} \| u, \sigma + \delta \|_{j-\gamma_1}, \end{aligned}$$

где $c = \max_{1 \leq j \leq \gamma_1} c_j$, c_j постоянные из предложения 3. Лемма 5 доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $P(D)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником вида (1.4), ψ функция из предложения 3, а $[P(D), \psi]$ оператор коммутирования, т.е. $[P(D), \psi]v \equiv P(D)(\psi v) - (P(D)\psi)v$. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$ при $\delta \in (0, \kappa - \sigma)$ ($\sigma \in (0, \kappa)$)

$$(2.7) \quad \|[P(D), \psi] D^\alpha u\|_{L_2(E^2)} \leq c \sum_{\ell=1}^{d_1} \delta^{-\ell} \|u, \sigma + \delta\|_{j-\ell}, \quad \forall u \in N(P, \kappa).$$

Доказательство. Так как $[P(D), \psi]$ представляется в виде линейной комбинации выражений

$$D_1^{\gamma_1} \psi(x_1) D_1^{\alpha_1-\gamma_1} D_2^{\alpha_1} \quad \alpha \in \mathfrak{N} \cap N_0^2, \quad \gamma_1 \leq \alpha_1,$$

то оценка (2.7) непосредственно следует из вложения (2.5) и леммы 5. $\square$

Лемма 6. Пусть $m \in N$, $c > 0$, $w_{s,j} \geq 0$, $s = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, s$ и $w_{s,j} \leq c$ при $j \leq 0$ для всех s . Если с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для любых s и $j \geq 0$

$$(2.8) \quad w_{s,j} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^m w_{s,j-\ell},$$

то

$$(2.9) \quad w_{s,j} \leq c_2^{j+1}, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $c_2 = \max\{c_1 \cdot m; c; 1\}$.

Доказательство. проведем методом индукции по j для любого фиксированного s . Если $j = 1$, то в силу (2.8) имеем

$$w_{s,1} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^m w_{s,1-\ell} \leq c_1 \cdot c \cdot m = (c_1 \cdot m) \cdot c \leq c_2^{1+1}.$$

Пусть оценка (2.9) верна при $1 \leq j \leq r \leq s-1$. Докажем его для $j = r+1$. Из оценки (2.8), в силу предположения индукции, учитывая что $c_2 \geq 1$, имеем

$$w_{s,r+1} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^m w_{s,r+1-\ell} \leq c_1 \cdot \sum_{\ell=1}^m c_2^{r+2-\ell} \leq (c_1 \cdot m) \cdot c_2^{r+1} \leq c_2^{(r+1)+1}.$$

Лемма 6 доказана. $\square$

Теорема 1. Если $P(D)$ регулярный оператор с характеристическим многоугольником $\mathfrak{N}$ вида (1.4), то при достаточно больших $\kappa > 0$

$$N(P, \kappa) \subset \tilde{\Gamma}^{\mathfrak{N}}(\Omega_{\kappa}).$$

Доказательство. Пусть $\kappa > 0$ такое число для которого верно (2.5) и $\sigma \in (0, \kappa)$.

Тогда на основании (2.5) при $\delta \in (0, \kappa - \sigma)$ и $j \in N$ имеем, что

$$\begin{aligned} |||u, \sigma|||_j &= \max_{\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2} |||D^{\alpha}u, \sigma||| \leq \max_{\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2} |||\psi(x_1)D^{\alpha}u(x), \sigma||| \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2} \max_{\beta \in \mathfrak{N} \cap N_0^2} |||D^{\beta}(\psi(x_1)D^{\alpha}u(x))|||_{L_2(E^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 3 имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|||u, \sigma|||_j \leq c_1 \max_{\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2} \left[\|P(D)(\psi(x_1)D^{\alpha}u(x))\|_{L_2(E^2)} + \|\psi(x_1)D^{\alpha}u(x)\|_{L_2(E^2)} \right].$$

Так как $u \in N(P, \kappa)$, то отсюда в силу определения функции ψ имеем

(2.10)

$$|||u, \sigma|||_j \leq c_1 \left[\max_{\alpha \in \mathfrak{M}^j \cap N_0^2} \|[P(D), \psi(x_1)]D^{\alpha}u(x)\|_{L_2(E^2)} + \|D^{\alpha}u(x)\|_{L_2(\Omega_{\sigma+\delta})} \right].$$

Из (2.10) в силу следствия 1, предложения 2 и определения функции ψ имеем, с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$(2.11) \quad |||u, \sigma|||_j \leq c_2 \left(\sum_{\ell=1}^{d_1} \delta^{-\ell} |||u, \sigma + \delta|||_{j-\ell} + |||u, \sigma + \delta|||_{j-1} \right).$$

Пусть $j, s \in N$, $j \leq s$, $0 < \kappa_1 < \kappa$, $\sigma = \kappa_1 - \frac{j}{s}a$, $0 < a < \frac{\kappa - \kappa_1}{2d_1}$, $\delta = \frac{a}{s}$. Тогда из (2.11) имеем

(2.12)

$$\left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{ja}{s} \right\|_j \right\| \leq c_2 \sum_{\ell=1}^{d_1} \left(\frac{s}{a} \right)^{\ell} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}a \right\|_{j-\ell} \right\| + \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}a \right\|_{j-1} \right\|.$$

Умножив обе части неравенства (2.12) на s^{-j} получим

$$\begin{aligned} s^{-j} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{ja}{s} \right\|_j \right\| &\leq c_2 \left(\sum_{\ell=1}^{d_1} \frac{s^{-(j-\ell)}}{a^{\ell}} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}a \right\|_{j-\ell} \right\| + \right. \\ &\quad \left. + s^{-j} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{(j-1)}{s}a \right\|_{j-1} \right\| \right). \end{aligned}$$

Так как при $1 \leq \ell \leq d_1$ $\kappa_1 - \frac{j-1}{s}a \leq \kappa_1 - \frac{j-\ell}{s}a < \kappa$, то отсюда, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем

$$(2.13) \quad s^{-j} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{ja}{s} \right\|_j \right\| \leq c_3 \sum_{\ell=1}^{d_1} s^{-(j-\ell)} \left\| \left\| u, \kappa_1 - \frac{(j-\ell)a}{s} \right\|_{j-\ell} \right\|.$$

Положим

$$w_{s,j} = \begin{cases} s^{-j} |||u, \kappa_1 - \frac{ja}{s}|||_j & \text{при } s = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots \\ |||u, \frac{\kappa + \kappa_1}{2}||| & \text{при } s = 1, 2, \dots, j = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

Из оценки (2.13) получаем, что

$$w_{s,j} \leq c_3 \sum_{\ell=1}^{d_1} w_{s,j-\ell} \quad s, j = 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу леммы 6 с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем

$$(2.14) \quad w_{s,j} \leq c_4^{j+1} \quad j = 1, \dots, s.$$

При $j = s$ из (2.14) в силу наших обозначений имеем

$$j^{-j} |||u, \kappa_1 - a|||_j \leq c_4^{j+1} \quad j = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем

$$|||u, \kappa_1 - a|||_j \leq c_4^{j+1} j^j \quad j = 1, 2, \dots$$

Имея в виду, что $a \in (0, \frac{\kappa - \kappa_1}{2d})$ и в силу произвольности $\kappa_1 \in (0, \kappa)$ получаем утверждение теоремы. Теорема 1 доказана. $\square$

Следствие 2. При условиях теоремы 1 любое решение $u \in N(P, \kappa)$ является аналитической по x_1 функцией.

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 1, леммы 4 и замечания 1, так как тогда имеем $N(P, \kappa) \subset \Gamma^{(1, \lambda_2^k)}(\Omega_\kappa)$. $\square$

Abstract. The paper considers regular, almost hypoelliptic equations in an infinite strip. It is proved that all solutions almost hypoelliptic equation from some specific space belong to the Gevrey class.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. G. Bernshtaun, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivies partielles du second ordre", Math. Ann, **59**, 20 – 76 (1904).
- [2] H. Weyl, "The method of ortogonal projection in potential theory", Duke Math. J., **7**, 411 – 444 (1940).
- [3] I. G. Petrovski, "Sur l'analyticite des solutions des systemes d'equations differentielles", Mat. сб., **17** (59), 289 – 370 (1945).
- [4] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **2**, 1986.
- [5] L. Hermander, "On interior regularity of solutions of partial differential equations", Comm. Pure. Appl. Math., **11**, 197 – 218 (1956).
- [6] Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоеллиптичности", Мат сб., **11**, 339 – 356 (1985).

- [7] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, “О решениях типа Жевре гипоеллиптических уравнений” Известия НАН Армении, серия Математика, **31** (2), 33 – 47 (1996).
- [8] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, “О решениях класса Жевре гипоеллиптических уравнений”, Известия НАН Армении, серия Математика, **33** (1), 40 – 52 (1998).
- [9] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Хермандера о гипоеллиптичности для функций обращающихся в нуль на бесконечности”, Сб. докл. VIII Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [10] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Оценки решений не гипоеллиптических уравнений с данным носителем гипоеллиптичности”, Известия АН Арм.ССР, серия Математика, XXII (5), 315 – 336 (1987).
- [11] G. O. Nakobyan, V. G. Margaryan, “A behavior of huger order derivatives of the solutions of one slass non hipoelliptic equations in the infinite sylinder”, Kluwer. Acad. Publ. Proceed. of the ISAAC congres Fukuoka, Japan, **2**, 1143 – 1147 (2000).
- [12] D. Calvo, “Cauchy problem in multi-anisotropic Gevrey classes for weakly hyperbolic operators”, Preprint del Dipartimento di Matematica dell Universita di Pisa, Submitted to Boll.U.M.I., ser B.
- [13] D. Calvo, A. Morando, “Multianisotropic classes and ultradistributions”, Quaderno del Dipartimento di Matematica dell Universita di Torono, **41** (2002).
- [14] Г. Г. Казарян, “On Almost-Нypoelliptic Plynomials”, Dokl. Ross. Acad. Nauk, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [15] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
- [16] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, “The Method of Newton’s polyhedron in the theory of PDE”, Kluwer (1992).
- [17] С. Р. Айрапетян, “О гладкости решений одного класса регулярных уравнений в полосе”, Известия НАН Армении, серия Математика, **45** (4), 3 – 24 (2010).

Поступила 7 октября 2009

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧАСТИЧНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Н. МАРГАРЯН

Российско-армянский государственный университет

Аннотация. Для одного класса регулярных, частично гипоеллиптических, относительно плоскости $x_1 = 0$ уравнений, рассматриваемых в достаточно широкой полосе, выделено множество гладких решений.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: частично гипоеллиптический оператор; регулярный оператор; весовые пространства Соболева; теоремы вложения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем пользоваться следующими обозначениями: N - множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество n - мерных мультииндексов, E^n , R^n - n -мерные вещественные евклидовы пространства точек

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv (x_1, x^1), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv (\xi_1, \xi^1) \quad \text{и}$$

$$R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Для $\xi \in R^n$, $\nu \in R_+^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}, |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n, i^2 = -1).$$

Пусть $A \subset N_0^n$ конечный набор мультииндексов. Многогранником Ньютона набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(A) \subset R_+^n$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ с вершинами из N_0^n называется полным (см. [1]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат N_0^n . Полный многогранник $\mathfrak{R}$ называется правильным (вполне правильным) (см. [2] и [3]), если координаты внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей не координатных граней $\mathfrak{R}$ неотрицательны (положительны).

Пусть

$$P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

- линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами а

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$$

его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Многогранник Ньютона набора (P) называется характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см. [4], определение 11.1.2). Оператор $P(D)$ называется гипоеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий

- (1) Любое обобщенное решение уравнения $P(D)u = 0$ в Ω ($\Omega \subset E^n$ область) является бесконечно дифференцируемой функцией.
- (2) $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^{\alpha}P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Определение 2. (см. [5] или [4], определение 11.2.4). Оператор $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ называется частично гипоеллиптическим относительно ξ_1 (плоскости $x_1 = 0$), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий

- (1) $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi_1 \rightarrow \infty$, когда $|\xi^1|$ остается ограниченным,
- (2) если представить многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{\alpha^1 \in N_0^{n-1}} (\xi^1)^{\alpha^1} P_{\alpha^1}(\xi_1), \quad \text{где} \quad (P_{\alpha^1}(\xi_1) = (D^{\alpha^1} P)(\xi_1, 0^1)/\alpha^1!),$$

то $P_{\alpha^1}(\xi_1)/P_0(\xi_1) \rightarrow 0$ при $\xi_1 \rightarrow \infty$, $\alpha^1 \neq 0$, (поскольку любой ненулевой многочлен от одного переменного гипоеллиптичен).

Очевидно условие 2 равносильно условию $\text{ord} P_{\alpha^1} < \text{ord} P_0$ при $|\alpha^1| \neq 0$.

Определение 3. (см. [6]). Оператор $P(D)$ называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Известно, что многогранник Ньютона гипоеллиптического оператора вполне правильный (см. например [2] или [3]), а многогранник Ньютона почти гипоеллиптического оператора - правильный (см. [6] или [7]).

В работе [5] доказана бесконечная дифференцируемость решений частично гипоеллиптических уравнений, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определенным переменным.

В течение всей работы будем считать, что натуральные четные числа m_1, m_2 и рациональное число $a > 0$ выбраны так, чтобы $m_1 - am_2$ - четное натуральное число. Обозначим через

$$(1.1) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(m_1, m_2, a) = \{\nu, \nu \in R_+^n, |\nu^1| \leq m_2, \nu_1 + a|\nu^1| \leq m_1\}.$$

Для многогранника $\mathfrak{R}$ с вершинами из N_0^n через $\mathfrak{R}^1$ обозначим множество тех мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^n$ для которых существует мультииндекс $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = 1$ такое, что $\alpha + (0, \beta^1) \notin \mathfrak{R}$. Не трудно заметить, что тогда выпуклая оболочка множества $\mathfrak{R}^1 \cup \{0\}$ совпадает с $\mathfrak{R}$.

Пусть для $b \in R^1$, $[b]$ - целая часть числа b , $[b]' = [b] = b$, если b целое и $[b]' = [b] + 1$ в противном случае.

Для $\nu \in N_0^n$ обозначим

$$(1.2) \quad d(\nu) = |\nu^1| + \max \left\{ \left[\frac{\nu_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right]', 0 \right\}.$$

В дальнейшем запись $\alpha \in \mathfrak{R}$ будет означать, что $\alpha \in \mathfrak{R} \cap N_0^n$.

Пусть линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами, характеристический многогранник которого имеет вид (1.1), регулярен, т.е. с некоторой постоянной $c > 0$

$$(1.3) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \leq c(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Тогда не трудно заметить, что $ord_{\xi_1} P \equiv \max\{\alpha_1, \alpha \in \mathfrak{R}\} = m_1$,

$ord_{\xi_j} P = m_2 \quad j = 2, \dots, n$ и с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(1.4) \quad |D_1^k P(\xi)| \leq c_1 \left(\sum_{(\alpha_1+k, \alpha^1) \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| + 1 \right), \quad \forall \xi \in R^n, k = 0, 1, \dots$$

Из теоремы 11.2.3 работы [4] следует, что оператор $P(D)$ удовлетворяющий оценкам (1.3) и (1.4) является частично гипоеллиптическим относительно плоскости $x_1 = 0$, а из теоремы 3 работы [6] следует, что $P(D)$ почти гипоеллиптический оператор.

Цель настоящей работы доказать, что при достаточно больших χ

$$N(P, \chi) \equiv \{u, \sum_{j=0}^{m_1} \|D_1^j u\|_{L_2(\Omega_\chi)} < \infty, P(D)u = 0\} \subset C^\infty(\Omega_\chi),$$

где $\Omega_\chi = \{x = (x_1, x^1) \in E^n, |x^1| < \chi, x_1 \in E^1\}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{R}$ многогранник вида (1.1). Тогда функция $d(\cdot)$ определенная по формуле (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $d(\alpha \pm (0, \beta^1)) = d(\alpha) \pm |\beta^1| \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$,
- (2) $d(\alpha) \leq m_2 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$,
- (3) для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $\beta^1 \leq \alpha^1 \quad d(\alpha - (0, \beta^1)) \leq m_2 - |\beta^1|$,
- (4) для любых $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $j : 2 \leq j \leq n$ существует $\beta_j = \beta_j(\alpha) \in N$ такое, что

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + \beta_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}^1,$$

где $\mathfrak{R}^1$ по $\mathfrak{R}$ определяется также как на предыдущей странице.

- (5) $d(\alpha) = m_2$ при всех $\alpha \in \mathfrak{R}^1$.

Доказательство. первого пункта непосредственно следует из определения $d(\alpha)$. Докажем пункт 2). При $\alpha_1 \leq m_1 - am_2$ утверждение пункта 2) непосредственно следует из определений многогранника $\mathfrak{R}$ и числа $d(\alpha)$. Пусть поэтому $\alpha \in \mathfrak{R}$ $\alpha_1 > m_1 - am_2$. Если $(\alpha_1 - m_1 + am_2)/a$ - целое, то $\alpha_1 + a|\alpha^1| \leq m_1$ (по определению $\mathfrak{R}$), и следовательно

$$d(\alpha) = |\alpha^1| + \frac{\alpha_1 - m_1}{a} + m_2 \leq m_2.$$

Если при $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\alpha_1 > m_1 - am_2$ и $(\alpha_1 - m_1 + am_2)/a$ - не целое тогда, т.к. при любых $m \in N_0$ и $0 < b \notin N_0 \quad [b]' = m - [m - b]$, то

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= |\alpha^1| + m_2 - |\alpha^1| - [m_2 - |\alpha^1| - \frac{\alpha_1 - m_1 + am_2}{a}] = \\ &= m_2 - \left[\frac{m_1 - a|\alpha^1| - \alpha_1}{a} \right] \leq m_2. \end{aligned}$$

Этим утверждение пункта 2) доказано. Утверждение пункта 3) непосредственно следует из предыдущих пунктов. Докажем пункт 4). Мы будем доказывать более сильное утверждение, а именно, что для любых $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$ имеем $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$, где

$$l(\alpha) = \begin{cases} m_2 - |\alpha^1| & \text{при } \alpha_1 \leq m_1 - am_2 \\ \left[\frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right] & \text{при } \alpha_1 > m_1 - am_2. \end{cases}$$

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$. Если $\alpha_1 \leq m_1 - am_2$, то из определений $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^1$ имеем, что $m_2 - |\alpha^1| > 0$. Следовательно $l(\alpha) \in N$ и для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha) (\leq m_2)$

$$|\alpha^1| + |\beta^1| = m_2$$

$$\alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\beta^1|) \leq m_1 - am_2 + am_2 = m_1,$$

т.е. $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$. Т.к., очевидно, для любого $\nu^1 \in N_0^{n-1}$, $|\nu^1| > l(\alpha)$ $|\alpha^1| + |\nu^1| > m_2$, то это означает, что $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$.

Пусть теперь $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$ и $\alpha_1 > m_1 - am_2$. Тогда, очевидно, в силу определения $\mathfrak{R}$ $|\alpha^1| < m_2$ и $\alpha_1 + a(|\alpha^1| + 1) \leq m_1$ ($\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^1$). Следовательно $l(\alpha) \in N$. Покажем, что для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$ длины $l(\alpha)$ $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$. На самом деле, т.к.

$$\begin{aligned} |\alpha^1| + |\beta^1| &= |\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil \leq \\ &\leq |\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - (m_1 - am_2) - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil = m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\beta^1|) &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil) = \\ &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1}{a} \right\rceil - |\alpha^1|) \leq \alpha_1 + a \frac{m_1 - \alpha_1}{a} = m_1, \end{aligned}$$

то $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$. С другой стороны, т.к. для любого $\nu^1 \in N_0^{n-1}$ $|\nu^1| = l(\alpha) + 1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + a(|\alpha^1| + |\nu^1|) &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil + 1) = \\ &= \alpha_1 + a(|\alpha^1| + \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1}{a} \right\rceil - |\alpha^1| + 1) > \alpha_1 + a \frac{m_1 - \alpha_1}{a} = m_1, \end{aligned}$$

т.е. при любом $\nu^1 \in N_0^{n-1}$, $|\nu^1| = l(\alpha) + 1$ $\alpha + (0, \nu^1) \notin \mathfrak{R}$, то это означает, что $\alpha + (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}^1$ для любого $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = l(\alpha)$. Этим утверждение пункта 4) доказано.

Докажем утверждение пункта 5). Сначала заметим, что

$$\mathfrak{R}^1 = \{\alpha \in \mathfrak{R}, |\alpha^1| = m_2, 0 \leq \alpha_1 \leq m_1 - am_2\} \cup$$

$$\cup \{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha_1 > m_1 - am_2, \alpha_1 + a|\alpha^1| \leq m_1 < \alpha_1 + a(|\alpha^1| + 1)\} \equiv \mathfrak{R}_1^1 \cup \mathfrak{R}_2^1.$$

Так как утверждение пункта 5) для $\alpha \in \mathfrak{R}_1^1$ очевидно, то утверждения пункта 5) докажем для $\alpha \in \mathfrak{R}_2^1$. При $\alpha \in \mathfrak{R}_2^1$ (очевидно) $[(m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|)/a] = 0$ и по этому

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= |\alpha^1| + \max\left\{\left\lceil \frac{\alpha_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right\rceil', 0\right\} = |\alpha^1| + \left\lceil \frac{\alpha_1 - (m_1 - am_2)}{a} \right\rceil' = \\ &= |\alpha^1| + m_2 - |\alpha^1| - \left\lceil m_2 - |\alpha^1| - \frac{\alpha_1 - m_1 + am_2}{a} \right\rceil = \\ &= m_2 - \left\lceil \frac{m_1 - \alpha_1 - a|\alpha^1|}{a} \right\rceil = m_2. \end{aligned}$$

Этим утверждение пункта 5) и тем самым леммы 1 доказано. $\square$

Замечание 1. Из пункта 4) леммы 1 следует, что для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $j \in N, 2 \leq j \leq n$ существует $\beta_j = \beta_j(\alpha) \in N_0$ для которого

$$\beta(\alpha, j) \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \beta_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}^1.$$

Пусть для $\chi > 0$

$$g_\chi(x^1) = g\left(\frac{x^1}{\chi}\right) = g\left(\frac{x_2}{\chi}, \dots, \frac{x_n}{\chi}\right),$$

где $g(x^1) = 1 - |x^1|^2$ при $|x^1| \leq 1$ и $g(x^1) = 0$ при $|x^1| > 1$.

Лемма 2. Для любых $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $j \in N, 2 \leq j \leq n$ существуют число $\chi_0 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_0, \mathfrak{R}) > 0$ такая, что при $\chi > \chi_0$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c \{ \| (D^{\alpha^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + \| (D^{\beta(\alpha, j)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $\alpha^{(j)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$.

Доказательство. Так как оценка (2.1), очевидна, при $\alpha = \alpha^{(j)}$ и $\alpha = \beta(\alpha, j)$ (тогда оценка (2.1) верна при всех $\chi > 0$ с постоянной $c \geq 1$), то пусть $1 \leq \alpha_j < \beta_j(\alpha)$. Тогда интегрированием по частям, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ получим ($d(\alpha) \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 = \int_{\Omega_\chi} D^\alpha \varphi \overline{D^\alpha \varphi} g_\chi^{2d(\alpha)} dx \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega_\chi} D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi \overline{D^{\alpha + e^{(j)}} \varphi} g_\chi^{2d(\alpha)} dx \right| + \left| \int_{\Omega_\chi} D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi \overline{D^\alpha \varphi} 2d(\alpha) g_\chi^{2d(\alpha)-1} D_j g_\chi dx \right|, \end{aligned}$$

где $e^{(j)}$ – орт соответствующий j -той оси. Отсюда в силу пунктов 1), 2) леммы 2.1, определения функции g_χ и арифметического неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ имеем, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \leq \frac{1}{2} \{ \| (D^{\alpha + e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha + e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 + \\ & + \| (D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha - e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \} + \frac{2m_2}{\chi} \{ \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 + \\ & + \| (D^{\alpha - e^{(j)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha - e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)}^2 \} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi). \end{aligned}$$

Из оценки (2.2), в силу леммы 2.1 работы [8] и пункта 5) леммы 1 настоящей заметки, следует, что существуют число $\chi_0 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_0, m_2) > 0$

для которого при $\chi > \chi_0$ выполняется оценка (2.1). Для этого достаточно в лемме 2.1 работы [8] в качестве функций $a_l(t)$ взять функций

$$a_l(t) \equiv \| (D^{\alpha^{(j)} + l e^{(j)}} \varphi) g_{1/t}^{d(\alpha^{(j)} + l e^{(j)})} \|_{L_2(\Omega_{1/t})}^2 \quad l = 0, \dots, \beta_j(\alpha).$$

□

Следствие 1. Для любого $\alpha \in \mathfrak{R}$ существуют число $\chi_1 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_1, m_2) > 0$ такая, что при $\chi > \chi_1$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c (\| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^1(\alpha_1)} \| (D^\beta \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{R}^1(\alpha_1) = \{\beta, \beta \in \mathfrak{R}^1, \beta_1 = \alpha_1\}$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 существуют число $\chi_1 > 0$ и постоянная $c_1 = c_1(\chi_1, m_2) > 0$ такая, что оценка (2.1) при $\chi > \chi_1$ верна для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{R}$ и $\chi > \chi_1$. Тогда из оценки (2.1) при $j = 2$ имеем, что

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c_1 (\| (D^{\alpha^{(2)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(2)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &\| (D^{\beta(\alpha, 2)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

Еще раз применив оценку (2.1) для первого слагаемого правой части оценки (2.4), при $\chi > \chi_1$ получим

$$\begin{aligned} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c_1^2 (\| (D^{\alpha^{(2,3)}} \varphi) g_\chi^{d(\alpha^{(2,3)})} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ \| (D^{\beta(\alpha^{(2), 3)}} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) + c_1 \| (D^{\beta(\alpha, 2)} \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}, \end{aligned}$$

где $\alpha^{(2,3)} = (\alpha_1, 0, 0, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$.

Продолжая аналогичным образом оценивать первые слагаемые правых частей полученных оценок, получим оценку (2.3) т.к. $\beta(\alpha, 2), \beta(\alpha^{(2)}, 3), \dots \in \mathfrak{R}^1(\alpha_1)$. □

Следствие 2. При $\chi > \chi_1$ с некоторой постоянной $c = c(\chi_1, \mathfrak{R}) > 0$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq c \left(\sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\ &\left. + \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^1} \| (D^\beta \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $r = m_1 - [a]'$.

Доказательство непосредственно получается из оценки (2.3), если заметить, что при $\alpha_1 = m_1 - [a]', \dots, m_1$ $(\alpha_1, 0^1) \in \mathfrak{R}^1$.

Лемма 3. Пусть P – регулярный оператор с характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$ вида (1.1). Тогда существуют число $\chi_2 > 0$ и постоянная $c = c(\chi_2, \mathfrak{R})$ такая, что при $\chi > \chi_2$

$$(2.6) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c (\| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \sum_{\alpha=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi),$$

где r число из следствия 2.

Доказательство. В силу формулы Лейбница, оценки (1.3), определения функции g_χ и пункта 3) леммы 1 с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P)$, $c_2 = c_2(\chi) > 0$ при $\chi > 0$ имеем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1} \| D^\alpha (\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \beta^1 \leq \alpha^1} c_{\alpha^1}^{\beta^1} \| (D^{\alpha - (0, \beta^1)} \varphi) D^{\beta^1} g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ & \leq c_1 (\| P(D)(\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \| \varphi g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) + \\ & + c_2 \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \cdot \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi} \right)^{|\beta^1|} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi), \end{aligned}$$

где $c_{\alpha^1}^{\beta^1} = c_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots c_{\alpha_n}^{\beta_n}$ – биномиальные коэффициенты.

Для первого слагаемого правой части оценки (2.7) в силу формулы Лейбница, определения функции g_χ и пункта 3) леммы 1 с некоторыми постоянными $c_3 = c_3(P)$, $c_4 = c_4(P) > 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ имеем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \| P(D)(\varphi g_\chi^{m_2}) \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + c_3 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^1, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \beta^1 \leq \alpha^1} c_{\alpha^1}^{\beta^1} \| (D^{\alpha - (0, \beta^1)} \varphi) D^{\beta^1} g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ & \leq \| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + c_4 \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi} \right)^{|\beta^1|}. \end{aligned}$$

Из оценки (2.5) в силу (2.7) и (2.8) при $\chi > \chi_1$ с некоторыми постоянными $c_5 = c_5(P)$, $c_6 = c_6(P) > 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ имеем, что

$$\begin{aligned} & (1 - c_5 \sum_{0 \neq \beta^1, (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}} \left(\frac{2}{\chi} \right)^{|\beta^1|}) \cdot \sum_{\gamma \in \mathfrak{R}} \| (D^\gamma \varphi) g_\chi^{d(\gamma)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ & \leq c_6 (\| (P(D)\varphi) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}) \cdot \end{aligned}$$

Откуда непосредственно получаем утверждение леммы. $\square$

Для многогранника $\mathfrak{R}$ вида (1.1) и любого $j \in N_0$ через $\mathfrak{R}_j$ обозначим множество тех мультииндексов $\alpha \in N_0^n$ для которых существуют $l \in N_0, l \leq j$ и мультииндекс $\beta^1 \in N_0^{n-1}, |\beta^1| = l$ такие, что $\alpha - (0, \beta^1) \in \mathfrak{R}$. Не трудно заметить, что $\mathfrak{R}_j \setminus \mathfrak{R}_{j-1} = \{\alpha, \alpha = \beta + (0, \gamma^1), \beta \in \mathfrak{R}, |\gamma^1| = j\} \quad j = 1, 2, \dots$

Лемма 4. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор с характеристическим многогранником вида (1.1). Тогда для любого $j \in N_0$ существуют постоянные $A_{l,j} > 0 \quad l = 0, \dots, j, B_j > 0$ такие, что при всех $\chi > \chi_2$ ($\chi_2 > 0$ число из леммы 3)

$$(2.9) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + B_j \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi).$$

Доказательство. будем проводить по индукции по j . Для $j = 0$ оценка (2.9) доказана в лемме 3. Пусть оценка (2.9) верна при $j \leq k$. Докажем его для $j = k + 1$. В силу предположения индукции и пункта 1) леммы 1 имеем

$$(2.10) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_{k+1}} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_k} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_{k+1} \setminus \mathfrak{R}_k} \| (D^\alpha \varphi) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ \leq \left(\sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\ \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) + \\ + \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\nu+(0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$.

Оценим последнее слагаемое правой части оценки (2.10). В силу формулы Лейбница, леммы 3, определения функции g_χ и предположения индукции (т.к. $\nu - (0, \mu^1) + (0, \gamma^1) \in \mathfrak{R}_k$ при всех $\nu \in \mathfrak{R}, |\gamma^1| = k + 1, 0 \neq \mu^1 \leq \gamma^1$) с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P), c_2 = c_2(P) > 0$ имеем

$$\sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \| (D^{\nu+(0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}} \| D^\nu ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{d(\nu)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}, \nu^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \mu^1 \leq \nu^1} c_{\nu^1}^{\mu^1} \| (D^{\nu-(0, \mu^1) \# (0, \gamma^1)} \varphi) g_\chi^{d(\nu)} D^{\mu^1} g_\chi^{k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq c_1 \left[\sum_{|\gamma^1|=k+1} \| P(D) ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right] + \\
& + c_2 \left[\sum_{l=0}^k A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+l} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right]
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$.

Рассмотрим первое слагаемое первой части оценки (2.11). В силу формулы Лейбница, определения функции g_χ предположения индукции с некоторыми постоянными $c_3 = c_3(P)$, $c_4 = c_4(P, k) > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| P(D) ((D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m-2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (P(D) D^{\gamma^1} \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + c_3 \sum_{|\gamma^1|=k+1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha^1 \neq 0} \sum_{0 \neq \mu^1 \leq \alpha^1} \| (D^{\alpha-(0, \mu^1)+(0, \gamma^1)} \varphi) (D^{\mu^1} g_\chi^{k+1}) g_\chi^{m_2} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\
& \leq \sum_{|\gamma^1|=k+1} \| (D^{\gamma^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+k+1} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\
& + c_4 \left(\sum_{l=0}^k A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D) \varphi) g_\chi^{m_2+|\beta^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \right. \\
& \quad \left. + B_k \sum_{\alpha_1=0}^r \| (D_1^{\alpha_1} \varphi) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \right) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Откуда, т.к. при $\beta^1 \in N_0^{n-1}$, $|\beta^1| = k+1$, $(0, \beta^1) \in \mathfrak{R}_k$ и $g_\chi \leq 1$, то в силу предположения индукции получаем оценку (2.9) для $j = k+1$. Этим утверждение леммы 4 доказано. $\square$

3. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Пусть функция g , область Ω_χ и множества $\mathfrak{R}_j$ ($j = 0, 1, \dots$) определены как выше. Для $j \in N_0$ обозначим через

$$H_j \equiv H(\mathfrak{R}_j, g, \Omega_\chi) = \left\{ u, \|u\|_{H_j} \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} < \infty \right\},$$

где по данному мультииндексу α число $d(\alpha)$ определяется по формуле (1.2).

Лемма 5. Для произвольных чисел $j \in N_0$ и $\chi > 0$ множество $C_0^\infty(\Omega_\chi)$ плотно в H_j .

Доказательство. Пусть $j \in N_0$, $\chi > 0$ и $u \in H_j$ фиксированы. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta \in (0, \chi)$ и $M \geq 1$ такие, что

$$(3.1) \quad \|u\|_{H(\mathfrak{R}_j, g, \Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} < \varepsilon,$$

где $\Omega_{\chi-\delta, M} \equiv \{x \in E^n, |x^1| < \chi - \delta, |x_1| < M\}$.

Пусть φ_1 и φ_2 неотрицательные бесконечно дифференцируемые, соответственно в E^1 и E^{n-1} , функции такие, что

- 1) $\varphi_1(x_1) = 1$ при $|x_1| < M$, $\varphi_1(x_1) = 0$ при $|x_1| > M + 1$,
- 2) $\varphi_2(x^1) = 1$ при $|x^1| < \chi - \delta$, $\varphi_2(x^1) = 0$ при $|x^1| > \chi - \delta/2$,
- 3) с некоторой постоянной $b = b(j) > 0$

$$|\varphi_1^{(k)}(x_1)| \leq b \quad (k = 0, 1, \dots, m_1), |\varphi_2^{(\alpha^1)}(x^1)| \leq b \cdot \delta^{-|\alpha^1|} \quad (|\alpha^1| \leq m_2 + j).$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} u(x_1, x^1) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x^1) & x \in \Omega_\chi \\ 0, & x \notin \Omega_\chi. \end{cases}$$

Очевидно, так как $u \in H_j$ и $\text{supp } v \subset \Omega_{\chi-\delta/2, M+1}$, то

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \|D^\alpha v\|_{L_2(E^n)} < \infty$$

Продолженные нулем вне Ω_χ функций $D^\alpha u$ $\alpha \in \mathfrak{R}_j$ обозначим через $v^{(\alpha)}$.

Так как $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_{\chi-\delta, M}$ и $D^\alpha v \in L_2(E^n)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{R}_j$, то в силу (3) имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| (D^\alpha v - D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} + \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $g_\chi(x^1) \leq \frac{2\delta}{\chi}$ при $x \in \Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M}$, то применяя формулу Лейбница, пункт 1) леммы 1, свойства 1)-3) функций φ_1, φ_2 и неравенство (3.1) для суммы правой части оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\chi, j) > 0$ получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2)) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha^\beta \| D^\beta u \cdot D_1^{\alpha_1 - \beta_1} \varphi_1 \cdot D^{\alpha_1 - \beta_1} \varphi_2 \cdot g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha^\beta b^{|\alpha - \beta|} \delta^{-(|\alpha^1| - |\beta^1|)} \left(\frac{2\delta}{\chi}\right)^{|\alpha^1| - |\beta^1|} \| (D^\beta u) \cdot g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\chi-\frac{\delta}{2}, M+1} \setminus \Omega_{\chi-\delta, M})} \leq \\ &\leq c_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (3.2) получаем, что

$$(3.3) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v - v^{(\alpha)}) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} \leq (c_1 + 1) \varepsilon.$$

Для $h > 0$ пусть

$$S_h = \{x \in E^n, |x| < h\}, \psi \in C_0^\infty(S_1).$$

Положим $\int \psi(x) dx = 1$, $\psi_h(x) \equiv h^{-n} \psi(x/h)$ и $v_h \equiv v * \psi_h$.

Очевидно, для любого $h > 0$ $v_h \in C^\infty(E^n)$. При этом $v_h(x) = 0$ когда $x \notin \text{supp} v + \bar{S}_h$ ($\bar{S}_h$ - замыкание множества S_h). С другой стороны, так как $\text{supp} v + \bar{S}_h \subset \Omega_\chi$ при $h \in (0, \delta/4)$, то $v_h \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ когда $h \in (0, \delta/4)$. Так как $0 \leq g_\chi(x^1) \leq 1$, $D^\alpha v \in L_2(E^n)$ $\alpha \in \mathbb{R}_j$, $D^\alpha v_h = (D^\alpha v)_h$ (см. например [9], 6.3, (2)), то в силу неравенства Юнга и непрерывности в среднем функций из L_2 имеем при $h \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (v_h - v) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(E^n)} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (v_h - v) \|_{L_2(E^n)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha v)_h - (D^\alpha v) \|_{L_2(E^n)} \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \sup_{|y| < h} \| D^\alpha v(x - y) - D^\alpha v(x) \|_{L_2(E^n)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, отсюда и из (3.3) получаем утверждение леммы.

Лемма 5 доказана. $\square$

Следствие 3. При условиях леммы 4

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| (D^\alpha u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} &\leq \sum_{l=0}^j A_{l,j} \sum_{|\beta^1|=l} \| (D^{\beta^1} P(D)u) g_\chi^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ &+ B_j \sum_{\alpha_1}^r \| (D_1^{\alpha_1} u) g_\chi^{d(\alpha_1, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad \forall u \in H_j, j = 0, 1, \dots, \chi > \chi_2. \end{aligned}$$

Доказательство. непосредственно следует из лемм 4 и 5. $\square$

Пусть $P(D)$ – регулярный оператор характеристический многогранник которого имеет вид (1.1). Через $N(P, \chi)$ обозначим

$$N(P, \chi) \equiv \{u, D_1^j u \in L_2(\Omega_\chi) \quad j = 0, \dots, m_1, P(D)u = 0 \text{ в } \Omega_\chi\}.$$

Лемма 6. Пусть $u \in N(P, \chi)$. Тогда при $h \rightarrow +0$

$$(3.4) \quad \| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha^1 \in N_0^{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \int v(x_1, x^1 - y^1) \varphi_h(y^1) dy^1, \quad v(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega_\chi \\ 0 & x \notin \Omega_\chi, \end{cases} \\ \varphi_h(x^1) &= h^{-(n-1)} \varphi(x^1/h), \quad \varphi(x^1) \in C_0^\infty(E^{n-1}) \\ \text{supp } \varphi &\subset \{x^1 \in E^{n-1}, |x^1| < 1\} \quad u \quad \int \varphi(x^1) dx^1 = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как при $x \in \Omega_{\chi-h}$

$$v_h(x) = \int u(x_1, x^1 - y^1) \varphi_h(y^1) dy^1.$$

то при $x \in \Omega_{\chi-h}$

$$D^{\alpha^1} P(D)v_h(x) = (D^{\alpha^1} P(D)v)_h(x) = (D^{\alpha^1} P(D)u)_h(x) = 0.$$

По этому для доказательства соотношения (3.4) достаточно показать, что при $h \rightarrow +0$

$$(3.5) \quad \| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha^1 \in N_0^{n-1}.$$

Так как $0 \leq g_\chi(x^1) \leq \frac{2h}{\chi}$ при $x \in \Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h}$ и (см. например [9] теорему 4.5.2) $D_1^{\beta_1} v(x) = D_1^{\beta_1} u(x)$ при $x \in \Omega_\chi$, $D_1^{\beta_1} v(x) = 0$ при $x \notin \Omega_\chi$, то используя неравенство Юнга с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(P)$, $c_2 = c_2(\alpha^1, \varphi, P) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (3.6) \quad &\| (D^{\alpha^1} P(D)v_h) g_\chi^{m_2+|\alpha^1|} \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\ &\leq \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \| D^{\alpha^1} P(D)v_h \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \left\| \int D_1^{\beta_1} v(x_1, x^1 - y^1) D^{\alpha^1+\beta^1} \varphi_h(y^1) dy^1 \right\|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\
&\leq c_1 \left(\frac{2h}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \left(\frac{1}{h}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \cdot \sum_{|\beta^1| \leq m_2} \| D^{\alpha^1+\beta^1} \varphi \|_{L_1(E^{n-1})} \cdot \\
&\cdot \sum_{l=0}^{m_1} \sup_{|y^1| < h} \| D_1^{\beta_1} v(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} \leq \\
&\leq c_2 \left(\frac{2}{\chi}\right)^{m_2+|\alpha^1|} \cdot \sum_{l=0}^{m_2} \sup_{|y^1| < h} \| D_1^l u(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})}
\end{aligned}$$

Так как при $u \in N(P, \chi)$, то по теореме Фубини

$$\omega_l(x^1) = \int |D_1^l u(x_1, x^1)|^2 dx_1 \in L_1(E^{n-1}) \quad l = 0, 1, \dots, m_1,$$

то в силу непрерывности интеграла Лебега относительно меры имеем, что при $h \rightarrow +0$

$$\sup_{|y^1| < h} \| D_1^l u(x_1, x^1 - y^1) \|_{L_2(\Omega_\chi \setminus \Omega_{\chi-h})} = \sup_{|y^1| < h} \| \omega_l(x^1 - y^1) \|_{L_1(\chi-h < |x^1| < \chi)}^{1/2} \rightarrow 0.$$

Это вместе с оценкой (3.6) доказывает соотношение (3.5). Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. Для каждого $j \in N_0$ норма

$$(3.7) \quad \| u \|_{H(\mathbb{R}_j, g, \Omega_\chi)}^1 \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (u g_\chi^{d(\alpha)}) \|_{L_2(\Omega_\chi)}$$

эквивалентна исходной норме пространства H_j .

Доказательство. получается применением формулы Лейбница с использованием леммы 1 настоящей заметки и леммы 2.1 работы [8]. $\square$

Лемма 8. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$. Тогда для любого $j \in N_0$ существует постоянная $c = c(j, \varphi, g) > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{R}_j} \| D^\alpha (u \varphi) \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c \| u \|_{H_j} \quad \forall u \in H_j \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство. непосредственно получается применением формулы Лейбница и леммы 7, если заметить, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}_j$ функция $\psi_\alpha(x)$ $\psi_\alpha(x) = \varphi(x) g_\chi^{d(\alpha)}$ при $x \in \text{supp} \varphi$ и $\psi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin \text{supp} \varphi$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega_\chi)$. $\square$

Теорема 1. Пусть $P(D)$ – регулярный оператор характеристический многогранник которого имеет вид (1.1). Тогда при достаточно больших χ ($\chi > \chi_2$, χ_2 – число из леммы 4) $N(P, \chi) \subset H(\mathbb{R}_j, g, \Omega_\chi)$ $j = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Пусть $j \in N_0, u \in N(P, \chi), \chi > \chi_2$ а $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_\chi$ и $v(x) = 0$ при $x \notin \Omega_\chi$.

Для любого $h > 0$ через v_h обозначим

$$v_h(x) = v * \varphi_h = \frac{1}{h^{n-1}} \int_{E^{n-1}} v(x_1, x^1 - y^1) \varphi(y^1/h) dy^1,$$

где φ функция из леммы 6.

Не трудно заметить, что для любых $h > 0$ и $j \in N_0$

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \| D^\alpha v_h \|_{L_2(E^n)} < \infty$$

и тем более $v_h \in H_j$.

В силу следствия 3 для любых $h_1, h_2 > 0$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathfrak{R}_j} \| D^\beta (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^j A_{k,j} \sum_{|\alpha^1|=k} \| D^{\alpha^1} P(D) (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{m_2+k} \|_{L_2(\Omega_\chi)} + \\ & + B_j \sum_{l=0}^r \| D_1^l (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(l, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)}. \end{aligned}$$

Так как при $h \rightarrow +0$ для любого $l : l = 0, 1, \dots, m_1$ ($r \leq m_1$)

$$\| D_1^l v_h - D_1^l u \|_{L_2(\Omega_\chi)} = \| (D_1^l v)_h - D_1^l u \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0,$$

то в силу леммы 5 из оценки (3.8) получаем, что при $h_1, h_2 \rightarrow +0$

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{R}_j} \| D^\beta (v_{h_1} - v_{h_2}) g_\chi^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0.$$

Так как при $h \rightarrow +0$ $\| v_h - u \|_{L_2(\Omega_\chi)} \rightarrow 0$, то в силу леммы 7, замкнутости оператора обобщенного дифференцирования имеем, что $u \in H_j$, при этом

$$\| u \|_{H_j} \leq B_j \sum_{l=0}^r \| (D_1^l u) g_\chi^{d(l, 0^1)} \|_{L_2(\Omega_\chi)} \quad j = 0, 1, \dots$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. При условиях теоремы 1 $N(P, \chi) \subset C^\infty(\Omega_\chi)$.

Доказательство. Пусть $R_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $R_j(\xi) = R_0(\xi)(1 + |\xi^1|)^j$ $j = 1, 2, \dots$. Из условия теоремы на оператор $P(D)$ имеем, что оператор $P(D)$ частично гипоеллиптичен относительно плоскости $x_1 = 0$ (см. определение 2 пункт 2)) а $R_0(\xi)$ медленно растущая весовая функция (см. [4] определение 10.1.1).

Поэтому для доказательства теоремы, достаточно в силу теоремы Гординга - Малгранжа (см. например [5] или [4] теорема 11.2.5), показать, что при $\chi > \chi_2$

$$N(P, \chi) \subset B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi) \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi)$ - пространство Л. Хермандера (см. [4], определение 10.1.6).

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$. В силу равенства Парсеваля и леммы 8 с некоторыми постоянными $c_1 = c_1(\mathfrak{R}_j)$, $c_2 = c_2(\mathfrak{R}_j, \varphi) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|u\varphi\|_{B_{2, R_j}(\Omega_\chi)} &= \|(1 + |P(\xi)|)(1 + |\xi^1|)^j F(u\varphi)\|_{L_2(E^n)} \leq \\ &\leq c_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}_j} \|u\varphi\|_{L_2(\Omega_\chi)} \leq c_2 \|u\|_{H_j}^1, \end{aligned}$$

где F преобразование Фурье.

Отсюда, в силу леммы 8, имеем, что $u\varphi \in B_{2, R_j}(\Omega_\chi)$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\chi)$ и $j = 0, 1, \dots$, т.е. $u \in B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_\chi)$ при $\chi > \chi_2$, $j = 0, 1, \dots$. Теорема 2 доказана. $\square$

Abstract. The set of smooth solutions of a class of regular, partially hypoelliptic with respect to the plane $x_1 = 0$ equations in a rather wide strip is extracted.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
- [2] L. R. Volewich, S. G. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE. Kluwer (1992).
- [3] Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоеллиптичность", Труды МИАН СССР, **150**, 143 – 159 (1979).
- [4] L. Hormander, The Analysis of linear Partial Differential Operators, **2**, Springer - Verlag (1983).
- [5] L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentials partillement hypoelliptiques", Math. Scand, **9**, 5 – 21 (1961).
- [6] Г. Г. Казарян, "О почти гипоеллиптических многочленах", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", Известия НАН Армении, серия Математика, **41** (6), 39 – 56 (2006).
- [8] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", Известия НАН Армении, серия Математика, **43** (3), 40 – 66 (2008).
- [9] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука (1996).

Поступила 4 марта 2009

О БЕЗУСЛОВНОЙ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ВСПЛЕСК СИСТЕМАМ

А. С. МАРТИРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *anush.martirosyan@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются абсолютная и безусловная сходимость почти всюду на множестве положительной меры. Для рядов по всплеск системам найдены условия, при выполнении которых они эквивалентны.

MSC2010 number: 42C40.

Ключевые слова: всплеск системы; безусловная сходимость; абсолютная сходимость; эквивалентность абсолютной и безусловной сходимости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ называется безусловно сходящимся почти всюду (п.в.) на множестве E , если для любой перестановки σ п.в. на E сходится переставленный ряд $(\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ и абсолютно сходящимся п.в. на E , если п.в. на E сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$.

Известно, что для числовых рядов безусловная и абсолютная сходимость эквивалентны. Для функциональных рядов в общем случае это не верно. Например, для системы Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

где последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Этот ряд п.в. абсолютно расходится и при любой перестановке σ переставленный ряд

$$(\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$$

п.в. сходится (см. [1] стр. 152).

Однако для системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ справедлива следующая теорема (см. [2]):

Теорема. Для безусловной сходимости п.в. на множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы п.в. на E была конечна сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|.$$

Г. Г. Геворкян [3] распространил эту теорему на ряды по классической системе Франклина. В работе [4] последняя теорема распространена на общую систему Франклина, которая порождена квазидиадическим и сильно регулярным разбиением отрезка $[0, 1]$. А для общей системы Франклина (без каких-либо ограничений) аналогичный результат получен в [5].

В настоящей работе найдены условия, при выполнении которых можно доказать аналогичную теорему для рядов по всплеск системам. Отметим, что в работе [6] рассмотрен похожий вопрос, а именно, доказана теорема для всплесков с компактными носителями.

Напомним, что функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ называется всплеском, если система функций

$$f_{jk}(x) = 2^{j/2} f(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

является ортонормированным базисом пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Простейшим примером всплеска является всплеск Хаара (см. [7]):

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Заметим, что система функций

$$\chi_{jk}(x) = 2^{j/2} \chi(2^j x - k), \quad j = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

на отрезке $[0, 1]$ совпадает с системой Хаара.

Для всплеска f рассмотрим кусочно постоянную функцию

$$\varphi(x) = \int_m^{m+1} |f(t)| dt, \quad \text{когда } x \in [m, m+1), \quad m \in \mathbb{Z},$$

и функции

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0.$$

Каждой φ_{jk} поставим в соответствие интервал

$$\Delta_{jk} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right].$$

Предположим, что существуют функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ такие, что

$$(A1) \quad \Phi_1(x) \leq \varphi(x) \leq \Phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для которых существуют постоянные $C > 0$ и $0 < q < 1$ такие, что выполняются следующие соотношения

$$(A2) \quad \Phi_2(x) \leq C\Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(A3) \quad \Phi_2(\pm m) \leq q\Phi_2(\pm(m-1)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Пусть еще выполняется соотношение

$$(A4) \quad \max_{x \in [m, m+1)} |f(x)| \leq C\varphi(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если для всплеска f выполняются условия (A1)–(A4) и $a > 0$, то для того, чтобы ряд*

$$(1.1) \quad \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{jk} \subset (-a, a)}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

п.в. безусловно сходился на E , $\mu(E) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. абсолютно сходился на E .

Заметим, что достаточность теоремы 1 справедлива для любого функционального ряда. Так что нам остается доказать необходимость. Заметим еще, что любое множество можно представить в виде объединения не более чем счетного числа ограниченных множеств, а мы рассматриваем сходимости п.в., значит без ограничения общности можем считать, что множество E ограничено. Иными словами, достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть для всплеска f выполняются условия (A1)–(A4), $a > 0$, а множество E ограничено и $\mu(E) > 0$. Тогда если*

$$(1.2) \quad \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{jk} \subset (-a, a)}} |a_{jk} f_{jk}(x)| = +\infty \quad \text{на } E,$$

то существует такая перестановка ряда (1.1), которая п.в. на E расходится.

Отметим, что указанным условиям (A1)–(A4) удовлетворяют, например, полиномиальные всплески Стромберга (см. [8]) и любой всплеск с компактным носителем. В случае когда f – всплеск с компактным носителем, а E ограничено, условие (1.2) равносильно

$$\sum_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} |a_{jk} f_{jk}(x)| = +\infty \text{ на } E.$$

Так что, в случае всплеска с компактным носителем, получаем результат из [6]:

Теорема. Пусть f – всплеск с компактным носителем. Тогда ряд

$$\sum_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

п.в. безусловно сходится на E , $\mu(E) > 0$, тогда и только тогда, когда этот ряд п.в. абсолютно сходится на E .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства теоремы 2, нам понадобятся ряд лемм. Условимся обозначать через $c_1, c_2, \dots, C_1, C_2, \dots$ положительные абсолютные постоянные.

Приведем одну лемму из [9], которая нам понадобится в последующих рассуждениях:

Лемма 1. Для любого всплеска f существуют $\xi \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$ и $\delta > \xi$ такие, что при всех $x > \delta$ выполняется

$$\left| \int_{\xi}^x f(t) dt \right| > c_1.$$

Заметим, что без ограничения общности можем считать, что

$$(2.1) \quad \int_{\xi}^x f(t) dt > c_1.$$

Действительно, в противном случае можем рассмотреть всплеск $-f$, для которого уже выполняется (2.1), причем теорема 2 останется неизменной.

Из условий (A1)–(A4) и $f \not\equiv 0$ следует, что $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\|f\|_1 > 0$. Поэтому, если взять $\xi_{jk} = \frac{\xi+k}{2^j}$, $\delta_{jk} = \frac{\delta+k}{2^j}$, из леммы 1 для $f_{jk}(x)$ можем получить, что существует $c_2 > 0$ так, что при всех $x > \delta_{jk}$ выполняется

$$(2.2) \quad \int_{\xi_{jk}}^x f_{jk}(t) dt > c_2 \|f_{jk}\|_1.$$

В последующем изложении мы будем использовать следующие обозначения:

$$Q_1 := \{(j, k) : \Delta_{jk} \subset (-a, a), \|a_{jk} \varphi_{jk}(x)\|_{\infty} \geq 1\},$$

$$E_{jk} := \{x : |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \geq 1, (j, k) \in Q_1\},$$

$$E_j := \bigcup_{k:(j,k) \in Q_1} E_{jk}, \quad J := \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{j=p}^{\infty} E_j.$$

Лемма 2. Если для всплеска f выполняется условие (A4), то ряд

$$(2.3) \quad \sum_{(j,k) \in Q_1} a_{jk} f_{jk}(x)$$

при любой перестановке п.в. на J расходится.

Доказательство. Допустим противное. Тогда при некоторой перестановке на некотором множестве $J_0 \subset J$, $\mu(J_0) > 0$, ряд (2.3) равномерно сходится. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера j_0 имеет место

$$(2.4) \quad |a_{jk} f_{jk}(x)| < \varepsilon, \quad x \in J_0, \quad (j, k) \in Q_1, \quad j \geq j_0.$$

Напомним, что точка t называется точкой плотности множества положительной меры A , если

$$\lim_{\substack{|I| \rightarrow 0 \\ t \in I}} \frac{\mu(A \cap I)}{\mu(I)} = 1.$$

Известно, что почти все точки A суть точки плотности множества A .

Обозначим через J_1 множество точек плотности J_0 . Ясно, что $\mu(J_1) > 0$ и все точки J_1 являются точками плотности J_1 . Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in J_1$, и обозначим через Δ_j^0 тот двоичный интервал длины 2^{-j} , который содержит точку x_0 . Из определения J , учитывая что $J_1 \subset J$, получим, что существует $j \geq j_0$ такое, что $x_0 \in E_{jk}$ для некоторого k . Заметим, что из определения E_{jk} и из кусочно постоянности φ следует, что E_{jk} есть объединение некоторых двоичных интервалов длины 2^{-j} . Так что $\Delta_j^0 \subset E_{jk}$ и, следовательно,

$$|a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \geq 1, \quad x \in \Delta_j^0.$$

Откуда и из определения φ имеем, что существует положительная постоянная c_3 такая, что

$$\mu\{x \in \Delta_{jk}^0 : |a_{jk} f_{jk}(x)| > c_3\} > c_3 \mu(\Delta_j^0).$$

Так как x_0 есть точка плотности J_1 , можем предположить, что помимо этого выполняется и

$$\frac{\mu(J_1 \cap \Delta_j^0)}{\mu(\Delta_j^0)} > 1 - \frac{c_3}{2}.$$

Из последних двух соотношений получим

$$\mu\{x \in J_1 \cap \Delta_j^0 : |a_{jk} f_{jk}(x)| > c_3\} > \frac{c_3}{2} \mu(\Delta_j^0),$$

что противоречит (2.4). Лемма 2 доказана. $\square$

Прежде чем перейдем к следующей лемме, убедимся, что, при выполнении условий (A1)–(A3), если $l < p < 0$, то для $x_1 \in [l, l+1)$, $x_2 \in [p, p+1)$ справедливо $\varphi(x_1) \leq Cq^{p-l}\varphi(x_2)$. Действительно, из определения $\varphi(x)$ и условий (A1)–(A3) имеем

$$\varphi(x_1) = \varphi(l) \leq \Phi_2(l) \leq q^{p-l}\Phi_2(p) \leq Cq^{p-l}\Phi_1(p) \leq Cq^{p-l}\varphi(p) = Cq^{p-l}\varphi(x_2).$$

Отсюда легко устанавливается, что

$$(2.5) \quad \varphi_{jk}(x') \leq Cq^{p-l}\varphi_{jk}(x''), \quad x' \in \Delta_{jl}, \quad x'' \in \Delta_{jp}, \quad l < p < k.$$

Отметим, что $l < p$ означает Δ_{jl} левее Δ_{jp} .

Мы рассматриваем случай ограниченного E , так что существует натуральное число N такое, что $E \subset (-N, N)$. Обозначим $J_N = J \cap (-N, N)$.

Лемма 3. *Если для всплеска f выполняются условия (A1)–(A3), то ряд*

$$(2.6) \quad \sum_{(j,k) \in Q_1} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)|$$

сходится п.в. вне J_N .

Доказательство. По определению J достаточно доказать, что для каждого $p \in \mathbb{N}$ ряд (2.6) сходится п.в. вне области $J_N^p = (-N, N) \cap J^p$, где $J^p = \bigcup_{j \geq p} E_j$.

Как было отмечено выше, E_{jk} есть объединение некоторых двоичных интервалов. Так что J_N^p можно представить в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся интервалов не имеющих общих концов: $J_N^p = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} G_s$.

Пусть $\delta > 0$. Для каждого G_s рассмотрим концентрический с ним интервал G_s^δ , для которого $\mu(G_s^\delta) = (1 + 2\delta)\mu(G_s)$. Обозначим $G^\delta = \bigcup_{s=1}^{\infty} G_s^\delta$. Фиксируем некоторый $s \geq 1$. Пусть $G_s = (\alpha, \beta)$. Тогда, по определению, $G_s^\delta = (\alpha - \delta\mu(G_s), \beta + \delta\mu(G_s))$. Ясно, что

$$|a_{jk}\varphi_{jk}(\alpha-)| \leq 1, \quad (j, k) \in Q_1.$$

Пусть $x < \alpha - \delta\mu(G_s)$, а пара $(j, k) \in Q_1$ такая, что $\Delta_{jk} \subset (\alpha, \beta)$. Тогда из (2.5) получим

$$|a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \leq Cq^{2^j(\alpha-x)}|a_{jk}\varphi_{jk}(\alpha-)| \leq Cq^{2^j(\alpha-x)}.$$

Заметим, что $E_{jk} \neq \emptyset$, $(j, k) \in Q_1$, а так как φ_{jk} постоянны на двоичных интервалах длины 2^{-j} , то $\mu(E_{jk}) \geq 2^{-j}$. Следовательно, при фиксированном j

количество $E_{jk} \subset G_s$ не больше $2^j \mu(G_s)$. Итак,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\alpha - \delta \mu(G_s)} \sum_{\substack{k: (j,k) \in Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset G_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx &\leq C 2^j \mu(G_s) \int_{-\infty}^{\alpha - \delta \mu(G_s)} q^{2^j(\alpha - x)} dx = \\ &= C \mu(G_s) \int_{2^j \delta \mu(G_s)}^{\infty} q^t dt \leq C \mu(G_s) q^{2^j \delta \mu(G_s)}. \end{aligned}$$

Заметим, что аналогичную оценку можно получить и для $x > \beta + \delta \mu(G_s)$. Учитывая, что сумма берется по $\Delta_{jk} \subset G_s$ получим, что существует номер j_s такой, что в сумме участвуют только члены с индексом $j \geq j_s$, причем $\mu(G_s) \geq 2^{-j_s}$. Так что, имеем

$$\int_{\mathbb{R} \setminus G_s^\delta} \sum_{\substack{k: (j,k) \in Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset G_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq C \mu(G_s) q^{2^{j-j_s} \delta}.$$

Суммируя по j , получим

$$\int_{\mathbb{R} \setminus G_s^\delta} \sum_{\substack{(j,k) \in Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset G_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq C \mu(G_s) \sum_{j \geq j_s} q^{2^{j-j_s} \delta} \leq C(\delta) \mu(G_s),$$

где $C(\delta)$ положительная постоянная зависящая только от δ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus G^\delta} \sum_{(j,k) \in Q_1} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx &\leq \sum_{s \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R} \setminus G_s^\delta} \sum_{\substack{(j,k) \in Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset G_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq \\ &\leq C(\delta) \sum_{s \in \mathbb{N}} \mu(G_s) = C(\delta) \mu(J_N^p) < 2NC(\delta). \end{aligned}$$

Из последнего следует сходимость п.в. ряда (2.6) вне области G^δ . Заметим, что

$$J_N^p \subset G^\delta \text{ причем } \mu(G^\delta \setminus J_N^p) < 2\delta \mu(J_N^p) < 2N\delta.$$

Устремляя δ к нулю из последнего получим, что ряд (2.6) сходится п.в. и вне области J_N^p . Лемма 3 доказана. $\square$

Следующие леммы относятся к случаю $(j, k) \notin Q_1$. Оказывается в этом случае, если выполняется условие (A4), то модули коэффициентов a_{jk} можно оценить сверху. Действительно, так как $f \not\equiv 0$, то из (A4) следует, что существует точка x^0 такая, что $\varphi(x^0) > 0$. Для каждого (j, k) обозначим $x_{jk}^0 = \frac{x^0 + k}{2^j}$. По определению Q_1 имеем

$$\|a_{jk} \varphi_{jk}(x)\|_\infty \leq 1, \quad (j, k) \notin Q_1.$$

Откуда, учитывая, что φ_{jk} кусочно постоянны, для $(j, k) \notin Q_1$ получаем

$$1 \geq |a_{jk} \varphi_{jk}(x_{jk}^0)| = |a_{jk}| 2^{j/2} \varphi(x^0).$$

Поэтому

$$|a_{jk}| \leq 2^{-j/2} \frac{1}{\varphi(x^0)}.$$

Отсюда и из (A1) получим, что существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$(2.7) \quad |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \leq C_1 \Phi_2(2^j x - k), \quad (j, k) \notin Q_1.$$

Ниже мы будем использовать следующее обозначение:

$$Q^I := \{(j, k) : \Delta_{jk} \subset I\},$$

где I некоторый интервал.

Лемма 4. *Если для всплеска f выполняются условия (A1), (A3) и (A4), то для любого двоичного интервала I справедливо*

$$(2.8) \quad \sum_{\substack{(j,k) \notin Q^I \\ (j,k) \notin Q_1}} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| < +\infty, \quad x \in I,$$

и существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что выполняется

$$(2.9) \quad \int_{\mathbb{R} \setminus I} \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \\ (j,k) \notin Q_1}} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| dx \leq C_2 \mu(I).$$

Доказательство. Как было показано выше, из условий (A1) и (A4) следует (2.7). Пусть $I = (\frac{p}{2^s}, \frac{p+1}{2^s})$. Рассмотрим некоторую точку $x \in I$. Для фиксированного $j \geq 0$, учитывая (A3) и (2.7), получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k: (j,k) \notin Q_1 \cup Q^I} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| &\leq C_1 \sum_{k: (j,k) \notin Q^I} \Phi_2(2^j x - k) \leq C_3 \sum_{k: \Delta_{jk} \not\subset I} q^{2^j |x - \frac{k}{2^j}|} \leq \\ &\leq C_4 \sum_{l=1}^{\infty} q^{2^j d(x, I^c) + l} = C_5 q^{2^j d(x, I^c)}, \end{aligned}$$

где $d(x, I^c)$ – расстояние точки x от дополнения интервала I . Чтобы завершить доказательство (2.8), достаточно просуммировать последнее по $j \geq 0$:

$$\sum_{(j,k) \notin Q_1 \cup Q^I} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \leq C_6 \sum_{j \geq 0} q^{2^j d(x, I^c)} < +\infty.$$

Перейдем к доказательству (2.9). Возьмем $x > \frac{p+1}{2^s}$. Тогда при фиксированном j , учитывая (2.7) и (A3), для $(j, k) \notin Q_1$ получаем

$$\sum_{k: \frac{p}{2^s} \leq \frac{k}{2^j} < \frac{p+1}{2^s}} |a_{jk}\varphi_{jk}(x)| \leq C_1 \sum_{k=2^j \frac{p}{2^s}}^{2^j \frac{p+1}{2^s} - 1} \Phi_2(2^j x - k) \leq$$

$$\leq C_7 \sum_{k=2^j \frac{p}{2^s}}^{2^j \frac{p+1}{2^s} - 1} q^{2^j(x - \frac{k}{2^j})} = C_8 \sum_{l=1}^{2^j - s} q^{2^j(x - \frac{p+1}{2^s}) + l} \leq C_9 q^{2^j(x - \frac{p+1}{2^s})}.$$

Проинтегрируем полученное по $x > \frac{p+1}{2^s}$:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{p+1}{2^s}}^{\infty} \sum_{k: \frac{p}{2^s} \leq \frac{k}{2^j} < \frac{p+1}{2^s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx &\leq C_9 \int_{\frac{p+1}{2^s}}^{\infty} q^{2^j(x - \frac{p+1}{2^s})} dx = \\ &= C_9 \int_0^{\infty} q^{2^j x} dx = C_9 \frac{1}{2^j} \int_0^{\infty} q^x dx \leq C_{10} \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $(j, k) \in Q^I$, то обязательно $j \geq s$. Так что суммируя последнее по j устанавливаем

$$\sum_{j \geq s} \int_{\frac{p+1}{2^s}}^{\infty} \sum_{k: \frac{p}{2^s} \leq \frac{k}{2^j} < \frac{p+1}{2^s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq C_{11} \sum_{j \geq s} \frac{1}{2^j} = C_{12} \frac{1}{2^s}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для интеграла по $x < \frac{p}{2^s}$. Так что, учитывая что $\mu(I) = \frac{1}{2^s}$, получим (2.9), и тем самым завершим доказательство леммы 4. $\square$

Лемма 5. Пусть для всплеска f выполняются условия (A1)–(A4). Тогда, если имеет место (1.2), то для каждого двоичного интервала I существует множество индексов $Q_2^I \subset Q^I \setminus Q_1$ такое, что

- (1) $\sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \geq 1$ н.в. на $B \cap I$, где $B = E \setminus J$,
- (2) $\sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{13}$ на I , где C_{13} абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $\mu(I) = 2^{-j_0}$. Выделим подмножество Q_2^I следующим образом. Положим $j'_0 = j_0 + n + l$, где число $n > 0$ такое, что $2^{-n} < \xi, \delta < 2^n$ (см. лемму 1), а $l \in \mathbb{N}$ произвольно. Пусть $A_{j'_0-1} = \emptyset$. Рассмотрим

$$f_{j'_0}(x) = \sum_{(j'_0, k) \in Q^I \setminus Q_1} |a_{j'_0 k} \varphi_{j'_0 k}(x)|.$$

Обозначим $A_{j'_0} = \{x \in I : f_{j'_0}(x) \geq 1\}$. Для каждого $j' > j'_0$ построим

$$f_{j'}(x) = \sum_{\substack{(j', k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{j'k} \not\subset A_{j'-1}}} |a_{j'k} \varphi_{j'k}(x)|$$

и

$$A_{j'} = \{x \in I : f_{j'_0}(x) + f_{j'_0+1}(x) + \dots + f_{j'}(x) \geq 1\}.$$

Множество тех индексов, которые входят в сумму $f_{j'_0}(x) + f_{j'_0+1}(x) + \dots$ составляют Q_2^I . Множество остальных индексов из $Q^I \setminus Q_1$ обозначим через Q_3^I . Тогда имеем

$$(2.10) \quad \sum_{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = \sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| + \sum_{(j,k) \in Q_3^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)|.$$

Докажем, что

$$(2.11) \quad \sum_{(j,k) \in Q_3^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| < +\infty, \quad \text{для почти всех } x \notin A = \bigcup_{j \geq j'_0} A_j.$$

Для каждого $j \geq j'_0$, во-первых заметим, что $A_{j-1} \subset A_j$. Во-вторых, ясно, что $A_j = \bigcup_k \Delta_{jk}$, где объединение берется по некоторым k . Так что имеем представление

$$(2.12) \quad A_j = \bigcup_{p=j'_0}^j (A_p \setminus A_{p-1}) = \bigcup_{p=j'_0}^j \bigcup_s \Delta_{ps},$$

причем Δ_{ps} попарно не пересекаются. Учитывая представление (2.12), легко вывести следующее

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sum_{(j,k) \in Q_3^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| &= \sum_{j=j'_0}^{\infty} \sum_{k: \Delta_{jk} \subset A_{j-1}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = \\ &= \sum_{j=j'_0+1}^{\infty} \sum_{p=j'_0}^{j-1} \sum_s \sum_{k: \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = \\ &= \sum_{p=j'_0}^{\infty} \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_s \sum_{k: \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = \\ &= \sum_{p \geq j'_0} \sum_s \sum_{\Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)|. \end{aligned}$$

По неравенству (2.9) леммы 4 имеем

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{ps}} \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{ps}} \sum_{\substack{(j,k) \notin Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq C_2 \mu(\Delta_{ps}).$$

Суммируя последнее по s и учитывая разложение $A_p \setminus A_{p-1}$ на Δ_{ps} , получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus (A_p \setminus A_{p-1})} \sum_s \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx &\leq \sum_s \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{ps}} \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq \\ &\leq C_2 \sum_s \mu(\Delta_{ps}) = C_2 \mu(A_p \setminus A_{p-1}). \end{aligned}$$

Из последнего и (2.13), учитывая (2.12), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \sum_{(j,k) \in Q_3^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx &= \int_{\mathbb{R} \setminus A} \sum_{p \geq j'_0} \sum_s \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{p \geq j'_0} \int_{\mathbb{R} \setminus (A_p \setminus A_{p-1})} \sum_s \sum_{\substack{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1 \\ \Delta_{jk} \subset \Delta_{ps}}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| dx \leq \\ &\leq C_2 \sum_{p \geq j'_0} \mu(A_p \setminus A_{p-1}) = C_2 \mu(A), \end{aligned}$$

откуда вытекает (2.11).

Перейдем к доказательству пункта 1 леммы 5. Ясно, что

$$(2.14) \quad \sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| < 1, \quad x \notin A.$$

Откуда, учитывая (2.10) и (2.11), получим

$$(2.15) \quad \sum_{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| < +\infty \text{ п.в. вне } A.$$

С другой стороны, из (A4) и (1.2) имеем

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{jk} \subset (-a, a)}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = +\infty \text{ п.в. на } E.$$

Откуда и из леммы 3 следует

$$\sum_{(j,k) \notin Q_1} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = +\infty, \quad x \in B \cap I.$$

Из последнего, используя неравенство (2.8) леммы 4, получим

$$(2.16) \quad \sum_{(j,k) \in Q^I \setminus Q_1} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| = +\infty, \quad x \in B \cap I.$$

Из (2.15) и (2.16) следует, что $\mu((B \cap I) \setminus A) = 0$. Так как на A справедливо соотношение

$$\sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \geq 1,$$

значит то же самое п.в. выполняется и на $B \cap I$. Тем самым завершено доказательство пункта 1.

Перейдем к доказательству пункта 2. Докажем, что существует абсолютная постоянная C_{13} такая, что

$$\sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{13} \text{ на } I.$$

Учитывая (2.14), последнее достаточно доказать на A . Имеем

$$(2.17) \quad A = \bigcup_{m \geq j'_0} A_m \setminus A_{m-1}.$$

Фиксируем некоторый $m \geq j'_0$. Учитывая (2.12), имеем представление

$$(2.18) \quad A_m \setminus A_{m-1} = \bigcup_n \tilde{\Delta}_{mn},$$

где интервалы $\tilde{\Delta}_{mn}$ не имеют общих концов и представляют собой объединения двоичных интервалов длины 2^{-m} . По определению Q_2^I , имеем

$$(2.19) \quad \sum_{\substack{(j,k) \in Q_2^I, \\ j < m}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq 1 \text{ на } A_m \setminus A_{m-1}.$$

Рассмотрим случай $j = m$. Пусть $\tilde{\Delta}_{mp}$ один из интервалов объединения (2.18). Тогда из (2.5) получим, что для $x \in \tilde{\Delta}_{mp}$ справедливо

$$|a_{mk} \varphi_{mk}(x)| \leq C q^{l_k},$$

где l_k число интервалов длины 2^{-m} между $\tilde{\Delta}_{mp}$ и Δ_{mk} . Так, что на $\tilde{\Delta}_{mp}$ имеем оценку

$$(2.20) \quad \sum_{\substack{k: (j,k) \in Q_2^I \\ j=m}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C \sum_{\substack{k: (j,k) \in Q_2^I \\ j=m}} q^{l_k} \leq C \frac{q}{1-q}.$$

Следовательно, последнее имеет место и на $A_m \setminus A_{m-1}$.

Пусть теперь $j > m$. Рассмотрим один из интервалов $\tilde{\Delta}_{mn}$ и обозначим

$$R = \{(j, k) \in Q_2^I : \Delta_{jk} \text{ находится правее } \tilde{\Delta}_{mn}\},$$

$$L = \{(j, k) \in Q_2^I : \Delta_{jk} \text{ находится левее } \tilde{\Delta}_{mn}\}.$$

Пусть $I_u = (\frac{n+1}{2^m}, \frac{n+1}{2^m} + \frac{1}{2^u})$ первый двоичный интервал порядка $u > m$ справа от $\tilde{\Delta}_{mn}$. Для $(j, k) \in R$ имеем $\tilde{\Delta}_{mn}$ левее Δ_{jk} , следовательно в случае $j < u$ либо $I_u \subset \Delta_{jk}$, либо I_u тоже левее Δ_{jk} . В обоих случаях из (2.5) получим

$$(2.21) \quad \max_{x \in \tilde{\Delta}_{mn}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C |a_{jk} \varphi_{jk}(\xi)|, \quad \xi \in I_u, \quad j < u.$$

Возможны два случая:

- (1) Существует u такое, что $I_u = \Delta_{uv}$ при некотором v , $(u, v) \in R$.
- (2) При любом u отрезок I_u не совпадает ни с каким Δ_{uv} , $(u, v) \in R$,

Докажем, что существует абсолютная постоянная C_{14} такая, что в обоих случаях справедливо

$$(2.22) \quad \sum_{\substack{(j,k) \in R, \\ j > m}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{14}, \quad x \in \tilde{\Delta}_{mn}.$$

Действительно, рассмотрим первый случай. Пусть u_0 первое натуральное число, для которого $I_{u_0} = \Delta_{u_0 v_0}$, $(u_0, v_0) \in R$. Тогда ясно $I_{u_0} \subset A_{u_0} \setminus A_{u_0-1}$, так что

$$(2.23) \quad \sum_{\substack{(j,k) \in R \\ m < j < u_0}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq \sum_{\substack{(j,k) \in Q_2^I \\ m < j < u_0}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| < 1, \quad x \in I_{u_0}.$$

А когда $j \geq u_0$ по определению Q_2^I имеем $\Delta_{jk} \not\subset \Delta_{u_0 v_0}$, $(j, k) \in R$. Отсюда имеем, что число интервалов длины 2^{-j} между $\tilde{\Delta}_{mn}$ и Δ_{jk} не больше $2^{j-u_0} + l_k$, где l_k число таких интервалов между $\Delta_{u_0 v_0}$ и Δ_{jk} . Очевидно, что при фиксированном j , если $(j, k), (j, k') \in R$ и $k > k'$, то $l_k > l_{k'}$. Так что на $\tilde{\Delta}_{mn}$ получим следующую оценку

$$\sum_{\substack{k: (j,k) \in R \\ j \geq u_0}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_1 \sum_{\substack{k: (j,k) \in R \\ j \geq u_0}} \Phi_2(2^j x - k) \leq C_{15} \sum_{k=1}^{\infty} q^{2^{j-u_0} + l_k} = C_{16} q^{2^{j-u_0}}.$$

Откуда, суммируя по j , получим

$$(2.24) \quad \sum_{\substack{(j,k) \in R, \\ j \geq u_0}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{16} \sum_{\substack{(j,k) \in R, \\ j \geq u_0}} q^{2^{j-u_0}} \leq C_{17} \sum_{j \geq 0} q^j < C_{18}, \quad x \in \tilde{\Delta}_{mn}.$$

Положим $C_{14} = C + C_{18}$. Из (2.21), (2.23) и (18), в первом случае получим (2.22). Обсудим второй случай. Ясно, что в этом случае $I_u \cap A_u = \emptyset$ при любом u . Тогда, учитывая определение A_u , получаем, что имеет место

$$\sum_{\substack{(j,k) \in R \\ m < j < u}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq \sum_{\substack{(j,k) \in Q_2^I \\ m < j < u}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| < 1, \quad x \in I_u, \forall u.$$

Отсюда, учитывая (2.21), на $\tilde{\Delta}_{mn}$ получим

$$\sum_{\substack{(j,k) \in R \\ m < j < u}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C.$$

Последнее справедливо при любом u , так что устремляя $u \rightarrow \infty$, получим (2.22) для того же C_{14} и во втором случае.

Итак, учитывая (2.18), имеем

$$\sum_{\substack{(j,k) \in R, \\ j > m}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{14}, \quad x \in A_m \setminus A_{m-1}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для $(j, k) \in L$. Так что из последнего, (2.19) и (2.20), учитывая (2.17), получим

$$\sum_{(j,k) \in Q_2^I} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{13}, \quad x \in A.$$

Этим доказан пункт 2, и доказательство леммы 5 завершено. $\square$

Лемма 6. Пусть для всплеска f выполняются условия (A1)–(A4). Тогда, если имеет место (1.2), $j_0 > 0$, а двоичный интервал Δ такой, что

$$\mu(\Delta) = 2^{-j_0} \text{ и } \mu(\Delta \cap B) > \frac{1}{2} \mu(\Delta),$$

то существуют $j_1 > j_0$ и $c_0 > 0$ такие, что для

$$P(x) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{\substack{k: k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{jk} \subset (-a, a)}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

можно найти такую перестановку $P^\sigma(x)$, что

$$(2.25) \quad \mu\{x \in \Delta : \delta(P^\sigma(x)) > c_0\} > c_0 \mu(\Delta),$$

где $\delta(P^\sigma(x))$ — колебание $P^\sigma(x)$.

Доказательство. Разделим отрезок $(-N, N)$ на равные отрезки длины 2^{-j_0} . Выделим из этих отрезков те $I_1, I_2, \dots, I_n$, для которых выполняются

$$(2.26) \quad \mu(I_s \cap B) > \frac{1}{2} \mu(I_s), \quad s \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Фиксируем некоторый $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из леммы 5 следует существование таких $Q_2^{I_s} \subset Q^{I_s} \setminus Q_1$, что

$$(2.27) \quad \sum_{(j,k) \in Q_2^{I_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \geq 1 \text{ п.в. на } B \cap I_s$$

и

$$(2.28) \quad \sum_{(j,k) \in Q_2^{I_s}} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{13} \text{ на } I_s,$$

причем мы построили $Q_2^{I_s}$ так, что $Q_2^{I_s} \subset \{(j, k), j \geq j_0 + n_0 + l\}$, где число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $-2^{n_0} < \xi, \delta < 2^{n_0}$ (см. лемму 1), а l произвольное натуральное число, которое будет выбрано позже.

Из (2.27) получим, что на $B \cap I_s$ выполняется

$$\mu\{x \in B \cap I_s : \sum_{\substack{(j,k) \in Q_2^{I_s} \\ a_{jk} > 0}} a_{jk} \varphi_{jk}(x) \geq \frac{1}{2}\} \geq \frac{1}{2} \mu(B \cap I_s)$$

или

$$\mu\{x \in B \cap I_s : \sum_{\substack{(j,k) \in Q_2^{I_s} \\ a_{jk} < 0}} a_{jk} \varphi_{jk}(x) \leq -\frac{1}{2}\} \geq \frac{1}{2} \mu(B \cap I_s).$$

Без ограничения общности, можем считать, что справедливо первое неравенство.

Тогда существуют множество $G_s \subset B \cap I_s$ удовлетворяющее

$$(2.29) \quad \mu(G_s) > \frac{1}{4} \mu(B \cap I_s)$$

и конечное $\Gamma_s \subset \{(j, k) \in Q_2^{I_s} : a_{jk} > 0\}$ так, что на G_s имеет место

$$(2.30) \quad \sum_{(j,k) \in \Gamma_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) > \frac{1}{3}.$$

Обозначим

$$\tilde{\Gamma}_s = \{(j, k) \in \Gamma_s, \tilde{\Delta}_{jk} \subset I_s\}, \text{ где } \tilde{\Delta}_{jk} = \left(\frac{-2^{n_0} + k}{2^j}, \frac{2^{n_0} + k}{2^j} \right).$$

Возьмем

$$j_1 = \max_{s \in \{1, \dots, n\}} p_s, \text{ где } p_s = \max\{j : \exists k, (j, k) \in \tilde{\Gamma}_s\}.$$

Докажем, что j_1 и есть искомое число. Для этого нужно переставить $P(x)$ так, чтобы выполнялось (2.25). Переставим его следующим образом. Для каждого $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ переставим

$$P_s(x) := \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} a_{jk} f_{jk}(x)$$

так, чтобы ξ_{jk} (см. (2.2)) следовали по возрастанию (такая перестановка возможна так как количество ξ_{jk} конечно). Запишем их один за другим, а затем напомним оставшиеся $a_{jk} f_{jk}(x)$. Докажем, что указанная перестановка является требуемой. Докажем, что

$$(2.31) \quad \int_{I_s} \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) dx \geq \frac{1}{48} \mu(I_s).$$

Действительно, по определению $\tilde{\Gamma}_s$ имеем

$$(2.32) \quad \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) = \sum_{(j,k) \in \Gamma_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) - \sum_{\substack{(j,k) \in \Gamma_s \\ \tilde{\Delta}_{jk} \not\subset I_s}} a_{jk} \varphi_{jk}(x).$$

Во-первых из (2.26), (2.29) и (2.30) ясно, что

$$(2.33) \quad \int_{I_s} \sum_{(j,k) \in \Gamma_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) dx > \frac{1}{24} \mu(I_s).$$

Во-вторых, по построению $\Gamma_s \subset Q_2^{I_s} \subset Q^{I_s} \setminus Q_1$, так что из $(j, k) \in \Gamma_s$ следует $(j, k) \notin Q_1$, для которых имеет место (2.7). Имея ввиду, что $a_{jk} > 0$, получим

$$(2.34) \quad \int_{I_s} a_{jk} \varphi_{jk}(x) dx \leq C_1 \int_{I_s} \Phi_2(2^j x - k) dx \leq C_{19} 2^{-j}.$$

Для фиксированного $j \geq j_0 + n_0 + l$ имеем

$$\#\{k : \Delta_{jk} \subset I_s\} = 2^{j-j_0} \quad \text{и} \quad \#\{k : \tilde{\Delta}_{jk} \subset I_s\} = 2^{j-j_0} - 2^{n_0+1},$$

кроме того ясно, что $\Delta_{jk} \subset \tilde{\Delta}_{jk}$. Так что, количество тех k , для которых $\Delta_{jk} \subset I_s$, но $\tilde{\Delta}_{jk} \not\subset I_s$ равно 2^{n_0+1} . А так как $\Gamma_s \subset Q_2^{I_s}$, значит количество членов во второй сумме (2.32) при фиксированном j не больше 2^{n_0+1} . Итак, из (19) получим

$$\int_{I_s} \sum_{\substack{(j,k) \in \Gamma_s \\ \tilde{\Delta}_{jk} \not\subset I_s}} a_{jk} \varphi_{jk}(x) dx \leq C_{19} \sum_{j \geq j_0 + n_0 + l} 2^{n_0+1} 2^{-j} = C_{19} 2^{2-l-j_0} = C_{19} 2^{2-l} \mu(I_s).$$

Учитывая (2.32) и (2.33), l можно выбрать так, чтобы выполнялось (2.31).

Заметим, что Δ совпадает с некоторым I_s . Ясно, что

$$(2.35) \quad \delta(P^\sigma(x)) \geq \delta(P_s^\sigma(x)).$$

Допустим $\Delta = (\alpha, \beta)$. Тогда, применяя (2.2), из (2.31) получим

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \delta(P_s^\sigma(x)) dx &\geq \int_{\Delta} \sum_{\substack{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s \\ \xi_{jk} \geq x}} a_{jk} f_{jk}(x) dx = \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} a_{jk} \int_{\xi_{jk}}^{\beta} f_{jk}(x) dx \geq \\ &\geq c_2 \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} a_{jk} \int_{\alpha}^{\beta} |f_{jk}(x)| dx = c_2 \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} \int_{\alpha}^{\beta} a_{jk} \varphi_{jk}(x) dx \geq c_4 \mu(\Delta). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tilde{\Gamma}_s \subset Q_2^{I_s}$, из (A4) и (2.28) получим, что на Δ выполняется

$$\delta(P_s^\sigma(x)) \leq \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} |a_{jk} f_{jk}(x)| \leq C \sum_{(j,k) \in \tilde{\Gamma}_s} |a_{jk} \varphi_{jk}(x)| \leq C_{20}.$$

Положим $F_s = \{x \in \Delta : \delta(P_s^\sigma(x)) > \frac{C_{20}}{2}\}$. Из последних двух неравенств легко выводится

$$\mu(F_s) > \frac{c_4}{2C_{20}} \mu(\Delta).$$

Чтобы завершить доказательство достаточно положить $c_0 = \min \left\{ \frac{c_4}{2C_{20}}, \frac{c_4}{2} \right\}$ и применить неравенство (2.35). $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Отметим, что, используя лемму 6 доказательство теоремы проводится аналогично доказательству в работе [3]. Но ради полноты изложения, здесь приводим доказательство полностью.

В силу леммы 6, можно найти j_i такие, что полиномы

$$P_{(i)}(x) = \sum_{j=j_i+1}^{j_{i+1}} \sum_{\substack{k: k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{jk} \subset (-a, a)}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

можно переставить и получить $P_{(i)}^\sigma(x)$ так, что если для некоторого двоичного интервала $\Delta_i \subset (-N, N)$, $\mu(\Delta_i) = 2^{-j_i}$ и выполняется

$$(3.1) \quad \mu(\Delta_i \cap B) > \frac{1}{2} \mu(\Delta_i),$$

то существует $c_0 > 0$ так, что имеет место

$$(3.2) \quad \mu\{x \in \Delta_i : \delta(P_{(i)}^\sigma(x)) > c_0\} > c_0 \mu(\Delta_i).$$

Поочередно напомним $P_{(i)}^\sigma(x)$ и получим переставленный ряд

$$P^\sigma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{(i)}^\sigma(x).$$

Докажем, что последний ряд п.в. на E расходится. Заметим, что по лемме 2 п.в. расходимость на J имеет место при любой перестановке. Так что расходимость достаточно доказать на B . Допустим противное. Тогда существует множество $F \subset B$, $\mu(F) > 0$, на котором переставленный ряд сходится равномерно. Откуда имеем, что найдется $n \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i > n$ имеет место

$$(3.3) \quad \delta(P_{(i)}^\sigma(x)) < c_0, \text{ при } x \in F.$$

С другой стороны можно найти двоичный интервал Δ_i , $\mu(\Delta_i) = 2^{-j_i}$, $i > n$ для которого

$$(3.4) \quad \mu(\Delta_i \cap F) > \left(1 - \frac{c_0}{2}\right) \mu(\Delta_i).$$

Тогда для Δ_i выполняется (3.1) и поэтому выполняется (3.2). Из (3.2) и (3.4) следует, что выполняется неравенство

$$\mu\left\{x \in F \cap \Delta_i : \delta(P_{(i)}^\sigma(x)) > c_0\right\} > \frac{c_0}{2} \mu(\Delta_i),$$

которое противоречит (3.3). Этим теорема 2 доказана. $\square$

Автор выражает благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постановку задачи и за содержательные консультации, а также признательность рецензенту за полезные предложения, которые помогли улучшить качество работы.

Abstract. The paper gives some conditions under which the absolute and the unconditional convergence almost everywhere on a set of positive measure are equivalent for series in wavelet systems.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Качмаш, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Москва (1958).
- [2] Е. Никишин, “Об абсолютной и безусловной сходимости”, УМН, **22**, (3), 240 – 242 (1967).
- [3] Г. Г. Геворкян, “Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина”, Математические заметки, **45**, (3), 30 – 42 (1989).
- [4] Г. Г. Геворкян, “Об абсолютной и безусловной сходимости почти всюду рядов по общей системе Франклина”, Известия НАН Армении, серия Математика, **33**, (3), 14 – 28 (1999).
- [5] Г. Г. Геворкян, “Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина”, Изв. РАН, **73**, (2), 69 – 90 (2009).
- [6] С. В. Головань, “О безусловной и абсолютной сходимости рядов по системам типа всплесков”, Фундаментальная и прикладная математика, **6**, (1), 81 – 92 (2000).
- [7] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).
- [8] J. O. Stromberg, “A modified Franklin system and heigher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for hardy spaces”, Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math., Wadsworth, Belmont, CA, 475 – 494 (1983).
- [9] Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян, “О почти всюду расходимости одного метода суммирования для всплеск разложений”, Известия НАН Армении, серия Математика, **39**, (2), 27 – 32 (2004).

Поступила 29 декабря 2009

AN INTEGRAL CHARACTERIZATION OF RANDOM
PERMUTATIONS. A POINT PROCESS APPROACH

S. POGHOSYAN¹, H. ZESSIN²

Institute of Mathematics, Armenian National Academy of Sciences

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Germany

E-mails: *suren.poghosyan@unicam.it; zessin@math.uni-bielefeld.de*

Abstract. We consider random finite permutations and prove the following version of Thoma's theorem in [8]: Random finite permutations which are class functions satisfy a new integration by parts formula iff they are given by a certain *Ewens-Sütö process*. The main source of inspiration for the results in this note is the fundamental work of Andras Sütö [7], from which some results are reestablished here again in the present point process approach.

MSC2010 number: 60B15, 60D05.

Keywords: Random finite permutations; Ewens-Sütö process; integration by parts formula.

1. INTRODUCTION

We are interested in the construction of point processes realizing configurations of finite cyclic permutations which represent a cycle decomposition of a finite permutation. This means, we consider random finite permutations considered as a point process on a space of cycles. This point of view differs from the one taken for instance by Olshanski in [6] where also random permutations are constructed. But there $\mathcal{S}_n$, the symmetric group on $[1, n] = \{1, \dots, n\}$, is imbedded into $\mathcal{S}_\infty$, the infinite symmetric group, whereas here the groups $\mathcal{S}_n$ as well as $\mathcal{S}_f$, the collection of all finite permutations, are considered as a subset of $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$, the set of finite subsets of the set $\mathcal{C}_f$ of finite cyclic permutations of a subset of the natural numbers $\mathbb{N}$.

We start the construction with a special finite measure ρ on $\mathbb{N}$ and build with it a point process $\mathcal{E}_\rho$ on $\mathcal{S}_f$ which we call the *Ewens-Sütö process for ρ* . It is a special mixture of a sequence of point processes on $\mathcal{S}_n$, which had been discovered independently by Ewens [2] and Sütö [7] in completely different contexts. Our main result is its characterization by means of an integration by parts formula in terms of its Campbell measure. This

¹supported by SFB 701, Bielefeld

²supported by DAAD

result can be viewed as a version of Thoma's theorem in [8]. We mention finally the important paper of Fichtner [3] where already random permutations of random point configurations had been constructed.

2. THE MAIN LEMMA

We consider the following finite Poisson process P_ρ on the set of natural numbers $\mathbb{N}$. Its intensity measure ρ is defined by

$$(2.1) \quad \rho(j) = d(j) \cdot \frac{z^j}{j}, j \in \mathbb{N},$$

where $0 < z < 1$ and $d > 0$. We assume that ρ is a *finite* measure on $\mathbb{N}$, i.e. $\rho(\mathbb{N}) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j) < \infty$. This is a condition on the function d . Condition (2.1) implies that P_ρ is a law on the collection $\mathcal{M}_f(\mathbb{N})$ of all finite point measures μ on $\mathbb{N}$.

Examples for ρ are: (1) d is a constant d given by some natural number; (2) $d(j) = C \cdot j^{-\frac{\nu}{2}}$ where $\nu \in \mathbb{N}$ and C is a positive constant.

We denote by $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ the field variables $\zeta_j(\mu) = \mu(j)$. It is well known that these variables are independent if P_ρ is the underlying law; moreover ζ_j has a Poisson distribution with parameter $\rho(j)$. This implies immediately that

$$(2.2) \quad P_\rho(\mu) = \exp(-\rho(\mathbb{N})) \cdot z^{N(\mu)} \cdot d(\mu) \cdot q(\mu),$$

where

$$(2.3) \quad q(\mu) = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{\mu(j)! \cdot j^{\mu(j)}},$$

$$(2.4) \quad d(\mu) = \prod_{j \geq 1} d(j)^{\mu(j)},$$

$$(2.5) \quad N(\mu) = \sum_{j \geq 1} j \cdot \mu(j).$$

We remark that here the products resp. the sum terminate after finitely many steps because μ is finite. The range of N therefore is $\mathbb{N}_0$, the collection of natural numbers augmented by 0.

Denoting by $\mathcal{M}$ the identity on $\mathcal{M}_f(\mathbb{N})$, we have

$$(2.6) \quad P_\rho\{\mathcal{M} = \mu, N = n\} = \exp(-\rho(\mathbb{N})) \cdot z^n \cdot d(\mu) \cdot q(\mu) \cdot 1_{\{N=n\}}(\mu), n \geq 0.$$

Summing over all μ and n we obtain

$$(2.7) \quad \exp(\rho(\mathbb{N})) = \sum_{n \geq 0} Q_n(d) \cdot z^n,$$

where

$$Q_n(d) = \sum_{\mu: N(\mu)=n} d(\mu) \cdot q(\mu), n \leq 0, Q_0(d) = 1,$$

denotes the so-called *canonical partition function of the ideal Bose gas* in quantum statistical mechanics, where it is the starting point of the investigations.

Comparing the power series on the right hand side of (2.7) with the one obtained by inserting the power series $\rho(\mathbb{N})$ into the exponential, we obtain as an aside the following representation of the canonical partition function which is of independent combinatorial interest.

Proposition 1. $Q_n(d) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\lambda: |\lambda|=n} \prod_{l=1}^k \frac{d(\lambda(l))}{\lambda(l)}.$

Here the summation is taken over all point measures λ on the interval $[1, k]$, which do not vanish; and $|\lambda| = \lambda(\mathbb{N})$.

In case of example (1) $Q_n(d) = \binom{d+n-1}{n}$ which contains Cauchy's formula for $d = 1$. Formula (2.6) implies that the random variable N is distributed according to the following version of the *negative binomial distribution*:

Proposition 2. $P_\rho\{N = n\} = \exp(-\rho(\mathbb{N})) \cdot z^n \cdot Q_n(d), n \geq 0.$

Corollary 1. $P_\rho\{\mathcal{M} = \mu | N = n\} = \frac{1}{Q_n(d)} \cdot d(\mu) \cdot q(\mu) \cdot 1_{\{N=n\}}(\mu), n \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})$

We use the following notations in the sequel:

$$(2.8) \quad P_\rho^{(n)} = P_\rho(\cdot | N = n), n \geq 1;$$

$$(2.9) \quad P_\rho^{(0)} = \delta_0; (\delta_j \text{ denotes the Dirac measure at } j);$$

$$(2.10) \quad \mathcal{M}_{(n)} = \{N = n\}.$$

Observe that $P_\rho^{(n)}$ does no longer depend on z .

Our aim will be now to calculate the Campbell measure of $P_\rho^{(n)}$, which is defined as follows:

$$\mathcal{C}_{P_\rho^{(n)}}(h) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})} \sum_{j \in \mathbb{N}} h(j, \mu) \cdot \mu(j) \cdot P_\rho^{(n)}(\mu), h \in F_+.$$

Here F_+ denotes the set of all non negative real functions. Now we are in the position to state and prove the *main lemma* of this note.

Lemma 1. $\mathcal{C}_{P_\rho^{(n)}} = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})} \sum_{j \in \mathbb{N}} h(j, \mu + \delta_j) \cdot \frac{Q_{n-j}(d)}{Q_n(d)} \cdot \frac{d(j)}{j} \cdot P_\rho^{(n-j)}(\mu), h \in F_+.$

Proof: By definition one has

$$\mathcal{C}_{P_\rho^{(n)}}(h) = \frac{1}{P_\rho\{N = n\}} \cdot \sum_{\mu, j} 1_{\mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{N})}(\mu) \cdot h(j, \mu) \cdot \mu(j) \cdot P_\rho(\mu).$$

Mecke's characterization of the Poisson process in [4] implies that this equals

$$= \frac{1}{P_\rho\{N = n\}} \cdot \sum_{\mu, j} 1_{\mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{N})}(\mu + \delta_j) \cdot h(j, \mu + \delta_j) \cdot \rho(j) \cdot P_\rho(\mu).$$

But $(\mu + \delta_j \in \mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{N}) \text{ iff } \mu \in \mathcal{M}_{(n-j)}(\mathbb{N}))$. Thus one gets

$$= \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})} \sum_{j \in \mathbb{N}} h(j, \mu + \delta_j) \cdot \frac{Q_{n-j}(d)}{Q_n(d)} \cdot \frac{d(j)}{j} \cdot P_\rho^{(n-j)}(\mu).$$

The lemma is proved. $\square$

A first immediate application of the lemma shows that the intensity measure $\nu_{P_\rho^{(n)}}$ of $P_\rho^{(n)}$, defined as $\nu_{P_\rho^{(n)}}(j) = P_\rho^{(n)}(\zeta_j)$, is given by

$$(2.11) \quad \nu_{P_\rho^{(n)}}(j) = \frac{Q_{n-j}(d)}{Q_n(d)} \cdot \frac{d(j)}{j}, \quad j \in [1, n].$$

3. THE EWENS-SUTO CYCLE PROCESS

Given $n \geq 1$, consider the symmetric group $\mathcal{S}_n$, acting on $[1, n]$. We use the following properties of $\mathcal{S}_n$ (see [1] e.g.): Every permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ can be decomposed in a unique way into disjoint cycles. Let $r_j(\sigma)$ be the number of cycles with length j . Then $\sum_j j \cdot r_j(\sigma) = n$. A *conjugacy class* consists of those permutations σ having the same decomposition into cycles, i.e. having the same $r_j(\sigma)$.

A permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ is always considered as a simple point measure of disjoint cycles, including the trivial ones:

$$\sigma = \sum_{x \in \sigma} \delta_x.$$

Here the sum is taken over all cycles x of the cycle decomposition of σ . The neutral element of $\mathcal{S}_n$ decomposes into trivial cycles only. We consider $\mathcal{S}_n$ as a subset of $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$ where $\mathcal{C}_f$ denotes the collection of all finite cycles x . This means that x is a cyclic permutation of a finite subset $I \in \mathbb{N}$, $I \neq \emptyset$. (Recall that $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$ is the set of finite subsets of $\mathcal{C}_f$ considered as simple point measures.) For $n = 0$ $\mathcal{S}_0$ denotes the singleton $\{0\}$ consisting of the measure 0 on $\mathcal{C}_f$. As a consequence $\mathcal{S}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n$, the set of all finite permutations of $\mathbb{N}$, is well defined subset of $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$.

The connection between the cycle configurations σ in $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$ and the configurations μ in $\mathcal{M}_f(\mathbb{N})$ is given by the transformation

$$r : \sigma \mapsto \mu = r(\sigma),$$

where $\mu(j) = r_j(\sigma)$ is the number of cycles of length j in σ . The length of a cycle x is the cardinality of its domain, denoted by $N(x)$. Thus N is a counting variable defined on $\mathcal{C}_f$.

Given $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})$ we denote by

$$\mathcal{K}_\mu = \mathcal{S}_{N(\mu)} \cap \{r = \mu\}$$

the conjugacy class of permutations defined by μ . It is well known [1] that $|\mathcal{K}_\mu| = N(\mu)! \cdot q(\mu)$.

We define the following law on $\mathcal{S}_n$

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{|\mathcal{K}_{r(\sigma)}|} \cdot P_\rho^{(n)}(r(\sigma)), \quad \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

These probabilities are trivially extended to probabilities on the whole space $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$. We call $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ the *Ewens-Sütö cycle process* for the parameters (n, ρ) . It is a simple point process of cycles realizing a permutation σ of $[1, n]$. Observe that $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ is constant on conjugacy classes and thus a so-called *class function*. Explicitly this Ewens-Sütö cycle process is given by

$$(3.2) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{n!Q_n(d)} \cdot d(\mu) \cdot 1_{\{N=n\}}(\mu), \quad \sigma \in \mathcal{S}_n,$$

where $\mu = r(\sigma)$. We make the following useful observation that $P_\rho^{(n)}$ is the image of $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ under r , denoted by $r\mathcal{E}_\rho^{(n)}$. In the sequel we'll use the notation: $N(\sigma) := N(r(\sigma))$, $\sigma \in \mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$. Finally we observe that $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ is well defined also for $n = 0$: $\mathcal{E}_\rho^{(0)} = \delta_0$, 0 denoting measure 0 from $\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f)$.

We now define the main object of this note. The *Ewens-Sütö cycle process for ρ* is the following mixture of the $(\mathcal{E}_\rho^{(n)})_{n \geq 0}$ with respect to the negative binomial distribution of N under P_ρ :

$$(3.3) \quad \mathcal{E}_\rho = \exp(-\rho(\mathbb{N})) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot Q_n(d) \cdot \mathcal{E}_\rho^{(n)}.$$

$\mathcal{E}_\rho$ is a simple point process on the space $\mathcal{C}_f$ of finite cycles. To be more precise: According to the negative binomial distribution n is realized first, then a decomposition of some $\sigma \in \mathcal{S}_n$ into disjoint cycles is realized according to $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$.

Observe that $r\mathcal{E}_\rho = P_\rho$ and thus in particular

$$\mathcal{E}_\rho\{N = n\} = \exp(-\rho(\mathbb{N})) \cdot z^n \cdot Q_n(d), \quad n \geq 0.$$

This means that N , the length of a permutation, is distributed according to the negative binomial distribution for the Ewens-Sütö cycle process $\mathcal{E}_\rho$.

4. THE DISTRIBUTION OF CYCLE LENGTHS IN THE EWENS-SÜTÖ FIELD.

Given (n, ρ) we consider the following random field, which we call the *Ewens-Sütö field* for (n, ρ) :

$$(4.1) \quad \Xi_\rho^{(n)} \equiv (\mathcal{S}_n, \mathcal{E}_\rho^{(n)}, (\xi_a)_{a \in [1, n]})$$

Here $\xi_a(\sigma)$ denotes the length of the cycle in σ containing a .

Lemma 2. $\Xi_\rho^{(n)}$ is identically distributed in the following sense. For any choice of distinct $a_1, \dots, a_k \in [1, n]$ the distribution of $(\xi_{a_j})_{j \in [1, k]}$ is the same.

Proof: By definition for any $j_1, \dots, j_k \in [1, n]$

$$(4.2) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\} = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{N})} \frac{1}{|\mathcal{K}_\mu|} \cdot P_\rho^{(n)}(\mu) \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_\mu} 1_{\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\}}(\sigma).$$

We have to show that the inner sum does not depend on the choice of distinct a_l . Let $b_1, \dots, b_k \in [1, n]$ be another choice of distinct elements in $[1, n]$. Then choose a permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ such that $\tau(a_l) = b_l$, $l = 1, \dots, k$ and consider the conjugation transformation $\sigma \mapsto \tau\sigma\tau^{-1} := \sum_{x \in \sigma} \delta_{\tau x \tau^{-1}}$. It is obvious that $(\xi_{a_1}(\sigma) = j_1, \dots, \xi_{a_k}(\sigma) = j_k)$ iff $\xi_{b_1}(\tau\sigma\tau^{-1}) = j_1, \dots, \xi_{b_k}(\tau\sigma\tau^{-1}) = j_k$ (see for example [1]). This implies that

$$(4.3) \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_\mu} 1_{\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\}}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_\mu} 1_{\{\xi_{b_1} = j_1, \dots, \xi_{b_k} = j_k\}}(\tau\sigma\tau^{-1}).$$

□

Theorem 1. (Sütö [7]). (1) For any choice of distinct $a_1, \dots, a_k \in [1, n]$ and distinct $j_1, \dots, j_k \in [1, n]$

$$(4.4) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\} = \frac{j_1 \cdots j_k}{n(n-1) \cdots (n-k+1)} \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}).$$

(2) For any choice of distinct $j_1, \dots, j_k \in [1, n]$

$$(4.5) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}) = \prod_{l=1}^k \frac{d(j_l)}{j_l} \cdot \frac{Q_{n-(j_1+\dots+j_k)}(d)}{Q_n(d)}.$$

As an immediate consequence the distribution of the lengths of the cycles containing distinct $a_1, \dots, a_k \in [1, n]$ is given by

$$(4.6) \quad \mathcal{E}_\rho^{(n)}\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\} = \frac{d(j_1) \cdots d(j_k)}{n(n-1) \cdots (n-k+1)} \frac{Q_{n-(j_1+\dots+j_k)}(d)}{Q_n(d)},$$

provided that $j_1, \dots, j_k$ are distinct. We note that the distribution of $(\xi_{a_l})_{l=1, \dots, k}$ depends only on d but not on z .

Proof. (1) Given distinct $j_1, \dots, j_k \in [1, n]$ we have that

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1, \dots, a_k}^* \mathcal{E}_\rho^{(n)}\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\} = \\ & = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma) \sum_{m_1, \dots, m_k} \sum_{a_1, \dots, a_k}^* 1_{\{\xi_{a_l} = j_l, \zeta_{j_l} = m_l; l=1, \dots, k\}}(\sigma). \end{aligned}$$

Here the sum $\sum_{a_1, \dots, a_k}^*$ is taken over all distinct $a_1, \dots, a_k \in [1, n]$ and $\zeta_j(\sigma) = \zeta_j(r(\sigma))$, $j \in [1, n]$. Since the inner sum equals to

$$\prod_{l=1}^k j_l \cdot m_l \cdot 1_{\{\zeta_{j_l} = m_l, l=1, \dots, k\}}(\sigma),$$

we obtain that

$$\sum_{a_1, \dots, a_k}^* \mathcal{E}_\rho^{(n)}\{\xi_{a_1} = j_1, \dots, \xi_{a_k} = j_k\} = j_1 \cdots j_k \cdot \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}).$$

Combining this with lemma 2 we get (4.4).

(2) To evaluate the moment measure $\mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k})$ we use lemma 1 and the fact that ζ_j are class functions, i.e. they depend only on $r(\sigma)$. Thus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}) &= P_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}) = \mathcal{C}_{P_\rho^{(n)}}(1_{\{j_1\}} \otimes (\zeta_{j_2} \cdots \zeta_{j_k})) = \\ &= \frac{d(j_1)}{j_1} \cdot \frac{Q_{n-j_1}(d)}{Q_n(d)} \cdot P_\rho^{(n-j_1)} * \Delta_{j_1}(\zeta_{j_2} \cdots \zeta_{j_k}). \end{aligned}$$

Here $*\Delta_{j_1}$ denotes the convolution with respect to the point process $\delta_{\delta_{j_1}}$. Using then that $j_1, \dots, j_k$ are distinct by assumption the Campbell measure of $P_\rho^{(n)}$ factorizes and one obtains

$$\mathcal{E}_\rho^{(n)}(\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}) = \frac{d(j_1)}{j_1} \cdot \frac{Q_{n-j_1}(d)}{Q_n(d)} \cdot P_\rho^{(n-j_1)}(\zeta_{j_2} \cdots \zeta_{j_k}).$$

Iterating this procedure yields (4.5). $\square$

5. AN INTEGRATION BY PARTS FORMULA CHARACTERIZING $\mathcal{E}_\rho$

In this section we derive an equation for $\mathcal{E}_\rho$ in terms of its Campbell measure. We use the following transformation:

$$(5.1) \quad N \otimes r : \mathcal{C}_f \times \mathcal{M}_f(\mathcal{C}_f) \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathcal{M}_f(\mathbb{N}); \quad (x, \sigma) \mapsto (N(x), r(\sigma)).$$

Observe that $\mathcal{C}_{P_\rho}$ is the image of $\mathcal{C}_{\mathcal{E}_\rho}$ under $N \otimes r$ because P_ρ is the image of $\mathcal{E}_\rho$ under r .

We now want to compute the Campbell measure of $\mathcal{E}_\rho$ for *class functions* $\tilde{h}$ of the type $\tilde{h} := h \circ (N \otimes r)$ with arbitrary $h : \mathbb{N}_0 \times \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$. Thus $\tilde{h} : \mathcal{C}_f \times \mathcal{M}_f^+(\mathcal{C}_f) \rightarrow \mathbb{R}$. Using again Mecke's characterization of the Poisson process, we obtain that

$$(5.2) \quad \mathcal{C}_{\mathcal{E}_\rho}(\tilde{h}) = \mathcal{C}_{P_\rho}(h) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N})} \sum_{j \in \mathbb{N}} h(j, \mu + \delta_j) \rho(j) P_\rho(\mu).$$

Going then back to the level of cycles and permutations we find that

$$(5.3) \quad \mathcal{C}_{\mathcal{E}_\rho}(\tilde{h}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \sum_{x \in \mathcal{C}_f} h(N(x), r(\sigma) + \delta_{N(x)}) 1_{\mathcal{S}_N}(\sigma + \delta_x) \frac{\rho(N(x))}{(N(x) - 1)!} \mathcal{E}_\rho(\sigma).$$

Here we used the fact that the number of cycles in some fixed domain of length $N(x)$ is equal to $(N(x) - 1)!$. Moreover $\sigma + \delta_x \in \mathcal{S}_N$ iff $\sigma + \delta_x \in \mathcal{S}_{N(\sigma + \delta_x)}$. Since $r(\sigma) + \delta_{N(x)} = r(\sigma + \delta_x)$, setting $\tau_\rho(j) = \frac{1}{(j-1)!} \cdot \rho(j) = \frac{z^j}{j!} d(j)$, $j \in \mathbb{N}$, we obtain that

$$(5.4) \quad \mathcal{C}_{\mathcal{E}_\rho}(\tilde{h}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \sum_{x \in \mathcal{C}_f} \tilde{h}(x, \sigma + \delta_x) \cdot 1_{\mathcal{S}_N}(\sigma + \delta_x) \cdot \tau_\rho(N(x)) \cdot \mathcal{E}_\rho(\sigma).$$

To summarize, we have

Theorem 2. *The Ewens-Sütö cycle process $\mathcal{E}_\rho$ is a simple point process Q on $\mathcal{C}_f$ which is concentrated on $\mathcal{S}_f$, constant on conjugacy classes and solves the following integration by parts formula*

$$(5.5) \quad \mathcal{C}_Q(\tilde{h}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \sum_{x \in \mathcal{C}_f} \tilde{h}(x, \sigma + \delta_x) \cdot 1_{\mathcal{S}_N}(\sigma + \delta_x) \cdot \tau_\rho(N(x)) \cdot Q(\sigma),$$

provided that $\tilde{h}$ is a class function.

An immediate consequence is that the intensity measure of $\mathcal{E}_\rho$ is $\tau_\rho(N(\cdot))$. This is the probabilistic significance of $\tau_\rho \circ N$ for the Ewens-Sütö process: $\tau_\rho \circ N(x)$ is the expected number of random permutations possessing x as a cyclic permutation.

Our next aim is to show *the converse of this theorem*. Let Q be an element of $\mathcal{PM}_f(\mathcal{C}_f)$ i.e. a law on $\mathcal{M}_f^+(\mathcal{C}_f)$ which is concentrated on $\mathcal{S}_f$ and is constant on conjugacy classes. We assume that Q is a solution of the equation (5.5). Then there exists a function $P' : \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ which factorizes Q in the sense that $Q(\sigma) = P'(r(\sigma))$, $\sigma \in \mathcal{S}_f$. Consider then $P := rQ$. P is a point process on $\mathcal{M}_f^+(\mathcal{C}_f)$ with $P(\mu) = |\mathcal{K}_\mu| \cdot P'(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N})$. Moreover, given any $h \in F_+(\mathbb{N}_0 \times \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N}))$ and setting $\tilde{h} = h \circ (N \otimes r)$, with

the help of (5.5), we obtain then that $\mathcal{C}_P(h)$ equals

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_Q(\tilde{h}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \sum_{x \in \mathcal{C}_f} h(N(x), r(\sigma) + \delta_{N(x)}) \cdot 1_{\mathcal{S}_{N(\sigma)+N(x)}}(\sigma + \delta_x) \cdot \tau_\rho(N(x)) \cdot Q(\sigma) = \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N})} P'(\mu) \sum_{j=1}^{\infty} h(j, \mu + \delta_j) \cdot \tau_\rho(j) \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_\mu} \sum_{x: N(x)=j} 1_{\mathcal{S}_{N(\mu)+j}}(\sigma + \delta_x). \end{aligned}$$

It is obvious that the inner double sum factorizes and equals to $(j-1)! \cdot |\mathcal{K}_\mu|$. Thus we obtain

$$\mathcal{C}_P(h) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N})} \sum_{j=1}^{\infty} h(j, \mu + \delta_j) \cdot \rho(j) \cdot P(\mu).$$

for any $h \in F_+(\mathbb{N}_0 \times \mathcal{M}_f^+(\mathbb{N}))$. This means that P solves the integration by parts formula characterizing the Poisson process P_ρ (see [4]). Hence $P = P_\rho$. Then it follows that

$$Q(\sigma) = \frac{1}{|\mathcal{K}_{r(\sigma)}|} \cdot P_\rho(r(\sigma)), \quad \sigma \in \mathcal{S}_f.$$

Thus $Q = \mathcal{E}_\rho$. To summarize we have

Theorem 3. *Let ρ be as above and Q be a simple point process on $\mathcal{C}_f$ which is concentrated on $\mathcal{S}_f$ and constant on conjugacy classes. If Q is a solution of (5.5) then Q is the Ewens-Sütö cycle process $\mathcal{E}_\rho$.*

Combining the last two theorems we see that random permutations of $\mathcal{S}_f$ whose distributions are class functions, are solutions of (5.5) iff they are special mixtures of Ewens-Sütö cycle processes $(\mathcal{E}_\rho^{(n)})_{n \geq 0}$. This result can be viewed as a version of Thoma's theorem (see [8]).

Some *concluding remarks* are in order here: The integration by parts formula (5.5) has to be compared with the corresponding characterization of Gibbs processes of abstract particles, interacting in the sense of a classical gas (see [5]). In the present situation we consider a system of cyclic permutations which interact strongly in the sense that their configuration represents the cycle decomposition of a permutation. Equation (5.5) contains the precise expression of such an interaction: The cycles are *hard rods*, but moreover they are *glued together* such that they form a permutation. This therefore is a first step in finding characterizations in the spirit of statistical mechanics of other *random tessellations* like the Plancherel process (see [6]) or Delaunay and Voronoi tessellations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. B rner, Representations of Groups, North Holland, Amsterdam (1963).
- [2] W. J. Ewens, "The sampling theory of selectively neutral alleles", Theoretical biology, **3**, 87 – 112 (1972).
- [3] K. H. Fichtner, "Random permutations of countable sets", Probab. Theory Related Fields, **89**, (1), 35 – 60 (1991).
- [4] J. Mecke, "Station re zuf llige Ma e auf lokalkompakten Abelschen Gruppen", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **9**, 36 – 58 (1967).
- [5] X. X. Nguyen, H. Zessin, "Integral and Differential Characterizations of the Gibbs Process", Math. Nachr., **88**, 105 – 115 (1979).
- [6] G. Olshanski, "An introduction to harmonic analysis on the infinite symmetric group", 127 – 160. In Vershik, A. (ed.): Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics. Lecture notes in mathematics 1815 (2003).
- [7] A. S t , "Percolation transition in the Bose gas", J. Phys. A: Math. Gen., 4689 – 4710 (1993).
- [8] E. Thoma, "Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abz hlbar unendlichen symmetrischen Gruppe", Math. Z., **85**, 40 – 61 (1964).

Поступила 30 октября 2009

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 5, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

А. В. АБРАМЯН, О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. IV	3
К. Л. АВЕТИСЯН, Лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой в круге	9
С. Р. АЙРАПЕТАН, В. Н. МАРГАРЯН, Оценка высших производных решений для одного класса почти гипоеллиптических уравнений в бесконечной полосе	19
В. Н. МАРГАРЯН, Об одном классе частично гипоеллиптических операторов в весовых пространствах Соболева	33
А. С. МАРТИРОСЯН, О безусловной и абсолютной сходимости рядов по всплеск системам	49
С. ПОГОСЯН, Г. ЦЕССИН, Интегральная характеристика случайных перестановок с точки зрения точечных процессов	67

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 5, 2010

CONTENTS

A.V. ABRAMYAN, On some relations for orthogonal on a circle rational functions with fixed poles IV	3
K. L. AVETISYAN, Lacunary series in mixed norm spaces in the disc	9
S. R. HAYRAPETYAN, V. N. MARGARYAN, Estimation of higher derivatives of the solutions of a class of almost hypoelliptic equations in an infinite strip	19
V. N. MARGARYAN, On a class of partially hypoelliptic operators in weighted Sobolev spaces	33
A. S. MARTIROSYAN, On unconditional and absolute convergence of series in wavelet systems	49
S. POGOSYAN AND H. ZESSIN, An integral characterization of random permutations. A point process approach	67