

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2010

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Վարդանյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахапетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛОСЕ

С. Р. АЙРАПЕТЯН

Российско-армянский государственный университет
E-mail: sofia31337@mail.ru

Аннотация. Для одного класса регулярных гипоеллиптических по x_1 двумерных операторов $P(D) = P(D_1, D_2)$ доказывается бесконечная дифференцируемость в достаточно широкой полосе $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$, тех обобщенных решений уравнений $P(D)u = 0$ для которых $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ при $j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: почти гипоеллиптический, частично гипоеллиптический, гипоеллиптический по группе переменных, регулярный оператор (многочлен), весовые пространства Соболева.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N - множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$ - множество двумерных мультииндексов, E^2 и R^2 - двумерные вещественные евклидовы пространства точек $x = (x_1, x_2)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, соответственно. $C^2 = R^2 \times iR^2$ ($i^2 = -1$), $R_+^2 = \{\xi, \xi \in R^2, \xi_j \geq 0, j = 1, 2\}$. Для $\xi, \eta \in R^2, x \in E^2$ и $\alpha \in N_0^2$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, (\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2},$$

и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $j = 1, 2$.

Пусть $A \equiv \{\alpha^j\}_{j=1}^M \subset R_+^2$, $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_M$, $0 \leq \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < \dots < \lambda_2^M$, $\lambda^j = (1, \lambda_2^j)$ и $B \equiv \{\lambda^j; m_j\}_{j=1}^M$.

Характеристическим многоугольником набора вида A называется минимальный выпуклый многоугольник $\mathcal{N}(A) \subset R_+^2$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Характеристическим многоугольником набора вида B называется множество $\mathcal{N}(B) \equiv \{\nu; \nu \in R_+^2; (\nu, \lambda^j) \leq m_j \quad j = 1, \dots, M\}$.

Многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ называется полным, если $\mathcal{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Полный многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты, внешних относительно $\mathcal{N}$, нормалей одномерных некоординатных сторон неотрицательны (положительны).

Замечание 1. Нетрудно заметить, что многоугольник $\mathcal{N} \subset R_+^2$ правильный тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathcal{N}$,

$$\Pi(\alpha) := \{\nu \in R_+^2, \nu_j \leq \alpha_j, \quad j = 1, 2\} \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $P(D) = P(D_1, D_2) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Многоугольник набора (P) называется многоугольником Ньютона или характеристическим многоугольником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см. [1], т. 2, определение 11.1.2, теоремы 10.2.1, 10.2.12). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипозеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) любое обобщенное решение $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset E^2$ - область) уравнения $P(D)u = 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией;
- (2) $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} := \frac{D_\xi^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty, \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad \alpha \neq 0$;
- (3) $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, где $d_P(\xi)$ расстояние точки $\xi \in R^2$ от множества $D(P) := \{\zeta \in C^2 : P(\zeta) = 0\}$.

Определение 2. (см. [1], т.2, определение 11.2.4, теорема 11.2.3). Оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ (многочлен $P(\xi)$) называется частично гипозеллиптическим относительно ξ_2 (или относительно прямой $x_2 = 0$), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) $\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty, \quad |\alpha| \neq 0$ когда ξ_1 остается ограниченным;
- (2) если u обобщенное решение уравнения $P(D)u = 0$, то $u * \varphi \in C^\infty$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(E^1)$,
- (3) если многочлен $P(\xi)$ представить в виде $P(\xi) = \sum_{j=0}^{m_1} P_j(\xi_2) \xi_1^j$, где $m_1 := \text{ord}_{\xi_1} P$, то
 - (a) $P_0(\xi_2)$ гипозеллиптичен как многочлен от ξ_2 ,
 - (b) для любого $j = 1, \dots, m_2$

$$(1.1) \quad \frac{P_j(\xi_2)}{P_0(\xi_2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. Так как P_j $j = 0, \dots, m_1$ многочлены от одной переменной, то очевидно условие 3.a) эквивалентно условию $P_0 \neq 0$, а условие 3.b) эквивалентно условию $\text{ord} P_j < \text{ord} P_0$, $j = 1, \dots, m_1$.

Определение 3. (см. [2] или [3]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипозеллиптическим по ξ_1 , если для любого $\alpha_1 \neq 0$

$$(1.2) \quad P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)/P(\xi) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1} P(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1}}/P(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Определение 4. (см. [4]–[6]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипозеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ для которых

$$\sum_{\alpha} \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq C_1 |P(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| \geq C_2;$$

- (2) существует число $\delta > 0$ такое, что множество

$$D_{\delta}(P) \equiv \{ \zeta \in D(P) : |I_m \zeta| \leq \delta \}$$

ограничено;

- (3) существует число $\delta > 0$ такое, что $N(P; \delta) \subset H_{\delta}^{\infty}(E^2)$, где

$$N(P; \delta) = \{ u : ue^{-\delta|x|} \in L_2(E^2), P(D)u = 0 \}, \\ H_{\delta}^{\infty}(E^2) = \{ u : (D^{\alpha}u)e^{-\delta|x|} \in L_2(E^2), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^2 \}.$$

Определение 5. (см. [7] или [8]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется регулярным (невыврожденным), если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} |\xi^{\alpha}| \leq C (|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\mathbb{N}$ - характеристический многоугольник оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Замечание 3. Известно (см. [3], [4], [7]), что если многочлен $P(\xi)$ регулярен, то

- (1) P гипозеллиптичен тогда и только тогда когда характеристический многогранник $\mathbb{N}(P)$ многочлена P вполне правильный;
- (2) P гипозеллиптичен по ξ_1 тогда и только тогда, когда первые компоненты внешних (относительно $\mathbb{N}(P)$) нормалей некоординатных сторон положительны;
- (3) P почти гипозеллиптичен тогда и только тогда когда $\mathbb{N}(P)$ правильный;
- (4) $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{N}(P)$ - полный.

В работах [9], [10] доказана бесконечная дифференцируемость решений частично гипоеллиптических уравнений, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определенным переменным.

В. И. Буренковым в работе [2] найдены алгебраические условия (см. соотношение (1.2)) на символ оператора $P(D)$ при которых все решения u уравнения $P(D)u = 0$, которые определенным образом стремятся к нулю на бесконечности были бесконечно дифференцируемы.

В работе [11] для одного класса двумерных почти гипоеллиптических операторов доказано, что при достаточно больших $\mathcal{H} > 0$ все решения уравнения $P(D)u = 0$ в полосе $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$ для которых $D_2^j u$ ($j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$) интегрируемы с квадратом в $\Omega_{\mathcal{H}}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по x_1 .

Наша цель доказать, что если $\mathcal{H} > 0$ достаточно велико, то все решения одного класса регулярных уравнений $P(D)u = 0$ в $\Omega_{\mathcal{H}}$ для которых $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ ($j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по обоим переменным.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 и $m_1 \equiv \max_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}} \alpha_1$. Обозначим

$$\mathcal{N}_{m_1} = \{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2, \alpha + (1, 0) \notin \mathcal{N}\}$$

и

$$\mathcal{N}_j = \{\alpha \in N_0^2, \alpha + (m_1 - j, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}\}, \quad j = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$$

В дальнейшем запись $\alpha \in \mathcal{N}$ будет означать $\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$.

Замечание 4. В силу выпуклости $\mathcal{N}$, очевидно, что для любого $l \in N_0$, $l \leq \max_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}} \alpha_2$ существует единственное $\alpha_1 = \alpha_1(l) \in N_0$ такое, что $(\alpha_1(l), l) \in \mathcal{N}_{m_1}$.

Предложение 2.1. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ полный многоугольник с вершинами из N_0^2 , $m_1 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha_1$, $m'_2 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha_2$. Тогда,

- (1) $\mathcal{N}_j = \emptyset$, при $j < 0$ и $\mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_k = \emptyset$, $j \neq k$;
- (2) $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{m_1} \mathcal{N}_j$;
- (3) для любого $\alpha \in N_0^2$, $\alpha_2 \leq m'_2$ существует единственный индекс $j(\alpha) \in N_0$ такой, что $\alpha \in \mathcal{N}_{j(\alpha)}$;

- (4) $N_0 \subset \{\alpha \in N : \alpha = (0, \alpha_2)\}$;
 (5) если N порожден набором вида B , то

$$N_0 = \{\alpha \in N, \alpha = (0, \alpha_2), \alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} [(m_j - m_1)/\lambda_2^j]\} =: \tilde{N}_0,$$

где $[a]$ – целая часть числа a ;

- (6) если $\alpha \in N_j$ ($j \in N_0$), то $\alpha_1 \geq \max\{0, j - m_1\}$ и для любого $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$,
 $\alpha - (\beta_1, 0) \in N_{j-\beta_1}$.

Доказательство. Пусть наоборот, для некоторого $j_0 < 0$ $N_{j_0} \neq \emptyset$, т.е. существует $\alpha^0 \in N_0^2$ такое, что $\alpha^0 + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$. Так как $N_{m_1} \subset N$, отсюда и из определения числа m_1 имеем, что $m_1 \geq \max_{\alpha \in N_{m_1}} \alpha_1 \geq \alpha_1^0 + m_1 - j_0 > m_1$. Полученное противоречие доказывает, что $N_j = \emptyset$, при $j < 0$, т.е. утверждение пункта (1).

Докажем утверждение пункта (2). Пусть $\alpha \in N$ любой фиксированный мультииндекс. Тогда в силу выпуклости N существует число $j(\alpha) \in N_0$ такое, что $\beta \equiv \alpha + (j(\alpha), 0) \in N$ и $\alpha + (j(\alpha) + 1, 0) \notin N$, т.е. $\beta \in N_{m_1}$. Отсюда и из определения числа m_1 имеем, что $\beta_1 = \alpha_1 + j(\alpha) \leq m_1$, т.е. $j(\alpha) \leq m_1$. Следовательно, $m_1 - j(\alpha) \in N_0$, $\alpha + (j(\alpha), 0) = \alpha + (m_1 - (m_1 - j(\alpha)), 0) \in N_{m_1}$ и поэтому $\alpha \in N_{m_1 - j(\alpha)}$. Это означает, что $N \subset \bigcup_{j=0}^{m_1} N_j$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $\alpha \in N_{j_0}$ для некоторого $j_0 : 0 \leq j_0 \leq m_1$, т.е. $\alpha^0 \in N_0^2$ и $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$. Так как N правильный и $N_{m_1} \subset N$, то в силу замечания 1 $\alpha \in N$. Это означает, что $N \subset \bigcup_{j=0}^{m_1} N_j$. Этим пункт (2) доказан.

Докажем утверждение пункта (3). Пусть $\alpha \in N_0^2$ любой мультииндекс для которого $\alpha_2 \leq m'_2$. Так как N правильный, то $(0, \alpha_2) \in N$. Следовательно в силу замечания 4 существует число $\alpha_1(\alpha_2) \in N_0$ такое, что $(\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) \in N_{m_1}$. Откуда по определению числа m_1 $\alpha_1(\alpha_2) \leq m_1$ и следовательно, $j(\alpha) \equiv m_1 + \alpha_1 - \alpha_1(\alpha_2) \geq 0$. Поскольку $j(\alpha) \geq 0$ и $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) = (\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) \in N_{m_1}$, то отсюда в силу определения множеств $N_l, l \in N_0$, получаем, что $\alpha \in N_{j(\alpha)}$. Теперь докажем, что если $j \neq j(\alpha)$, то $\alpha \notin N_j$ (т.е. единственность $j(\alpha)$). Пусть, наоборот, существует индекс $j_0 \neq j(\alpha)$ такой, что $\alpha \in N_{j_0} \cap N_{j(\alpha)}$. Тогда в силу определения N_l , $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in N_{m_1}$ и $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}$. Так как $j_0 \neq j(\alpha)$, то $m_1 - j_0 \neq m_1 - j(\alpha)$. Пусть поэтому $m_1 - j_0 \geq m_1 - j(\alpha) + 1$ (случай $m_1 - j_0 \leq m_1 - j(\alpha) - 1$ доказывается аналогичным образом). Тогда, в силу выпуклости N и замечания 1 получаем, что $\beta \equiv \alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N$, $\beta + (k, 0) \in$

$\mathcal{N}$ $k = 1, \dots, j(\alpha) - j_0$. Но $\beta \in \mathcal{N}_{m_1}$, а в силу определения $\mathcal{N}_{m_1}$ $\beta + (1, 0) \notin \mathcal{N}$. Полученное противоречие доказывает утверждение пункта (3).

Докажем утверждение пункта (4). Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_0$ любой мультииндекс для которого $\alpha_1 \geq 1$. Тогда в силу определения $\mathcal{N}_0$ $\alpha + (m_1, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. Так как $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то из определения числа m_1 имеем $m_1 \geq \max_{\beta \in \mathcal{N}_{m_1}} \beta_1 \geq \alpha_1 + m_1 > m_1$. Отсюда непосредственно получаем утверждение пункта (4).

Докажем утверждение пункта (5). Если $\mathcal{N}$ порожден набором вида B , то из определения $\mathcal{N}$ в силу того, что $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, для любого $\alpha \in \mathcal{N}_0$ имеем $m_j \geq (\alpha + (m_1, 0), \lambda^j) = \alpha_2 \lambda_2^j + m_1$, $j = 1, \dots, M$, откуда $\alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} \left[\frac{m_j - m_1}{\lambda_2^j} \right]$. Это вместе с пунктом (4) доказывает, что $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}_0$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $\alpha_2 \in \mathcal{N}_0$, $\alpha_2 \leq \min_{2 \leq j \leq M} \left[\frac{m_j - m_1}{\lambda_2^j} \right]$. Тогда, $(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}_0^2$ и $((0, \alpha_2) + (m_1, 0), \lambda^j) = m_1 + \lambda_2^j \alpha_2 \leq m_1 + \lambda_2^j \frac{(m_j - m_1)}{\lambda_2^j} = m_j$, $j = 1, \dots, M$ и $((0, \alpha_2) + (m_1, 0), \lambda^1) = m_1$. Это в силу определения $\mathcal{N}$ означает, что $(0, \alpha_2) + (m_1, 0) \in \mathcal{N}$. Так как $((0, \alpha_2) + (m_1, 0) + (1, 0), \lambda^1) = m_1 + 1 > m_1$, то это в силу определения $\mathcal{N}_{m_1}$ означает, что $(0, \alpha_2) + (m_1, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. А из определения $\mathcal{N}_0$ вытекает, что $(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}_0$. Утверждение пункта (5) доказано.

Докажем утверждение пункта (6). Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_{j_0}$ для некоторого $j_0 \in \mathcal{N}_0$. Отсюда в силу определения $\mathcal{N}_{j_0}$ имеем $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$, следовательно, $\alpha_1 + m_1 - j_0 \geq 0$. Пусть $\alpha \in \mathcal{N}_j$ и $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$. Покажем, что $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j - \beta_1}$. Из условия $\alpha \in \mathcal{N}_{j_0}$ (в силу определения $\mathcal{N}_{j_0}$) имеем, что $\alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$. Так как $\mathcal{N}_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то отсюда в силу определения m_1 и условия $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ получаем $\beta_1 \leq \alpha_1 \leq j_0$. Тогда, $\alpha - (\beta_1, 0) + (m_1 - (j_0 - \beta_1), 0) = \alpha + (m_1 - j_0, 0) \in \mathcal{N}_{m_1}$, следовательно $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j - \beta_1}$. Этим пункт (6) предложения и тем самым предложение 2.1 доказано. $\square$

Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многоугольник, а $\mathcal{N}_j$, $j = 0, 1, \dots$, определены как выше. На множестве $\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j$ (на основании пункта (3) предложения 2.1) введем функцию $d(\alpha)$:

$$(2.1) \quad d(\alpha) = j, \quad \text{если} \quad \alpha \in \mathcal{N}_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{N}$ – правильный многоугольник. Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad d(\alpha + (1, 0)) &= d(\alpha) + 1 \quad \forall \alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j, \\ (2) \quad d(\alpha - (1, 0)) &= d(\alpha) - 1 \quad \forall \alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j, \quad \alpha_1 \geq 1; \end{aligned}$$

(3) Если многоугольник $\mathcal{N}$ порожден набором вида B , то в качестве функции $d(\alpha)$ можно брать функцию

$$\tilde{d}(\alpha) = \max_{1 \leq j \leq M} [m_1 - m_j + (\alpha, \lambda^j)], \quad \alpha \in N_0^2,$$

где $[a]$ - целая часть числа a .

Доказательство. Пусть $\alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$. Тогда в силу пункта (3) предложения 2.1 существует единственный индекс $j(\alpha) \in N_0^2$, такой, что $\alpha \in N_{j(\alpha)}$ и поэтому $d(\alpha) = j(\alpha)$. Из условия $\alpha \in N_{j(\alpha)}$ имеем $\alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}$, и следовательно

$$(\alpha + (1, 0)) + (m_1 - (j(\alpha) + 1), 0) = \alpha + (m_1 - j(\alpha), 0) \in N_{m_1}.$$

Но это в силу определения $N_{j(\alpha)+1}$ означает, что $\alpha + (1, 0) \in N_{j(\alpha)+1}$, следовательно, $d(\alpha + (1, 0)) = j(\alpha) + 1$. Откуда непосредственно получаем утверждение пункта (1). Утверждение пункта (2) следует из (1), если учитывать, что из $\alpha \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$, $\alpha_1 \geq 1$ следует, что $\alpha - (1, 0) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$.

Докажем утверждение пункта (3). Пусть $\mathcal{N}$ порожден набором вида B и $\alpha \in N_{m_1}$. Так как $N_{m_1} \subset \mathcal{N}$, то из определения $\mathcal{N}$ имеем $(\alpha, \lambda^j) \leq m_j$, $j = 1, \dots, M$ и следовательно,

$$(2.2) \quad m_1 - m_j + (\alpha, \lambda^j) \leq m_1, \quad j = 1, \dots, M.$$

С другой стороны, так как $\alpha \in N_{m_1}$, то в силу определения N_{m_1} существует индекс $j_0 : 1 \leq j_0 \leq M$, такой, что $(\alpha + (1, 0), \lambda^{j_0}) > m_{j_0}$. Откуда $(\alpha, \lambda^{j_0}) > m_{j_0} - 1$, следовательно

$$(2.3) \quad m_1 - m_{j_0} + (\alpha, \lambda^{j_0}) > m_1 - 1.$$

Из неравенств (2.2), (2.3), так как $m_1 \in N$ и $\tilde{d}(\alpha)$ принимает целочисленные значения, получаем, что $\tilde{d}(\alpha) = m_1$ при всех $\alpha \in N_{m_1}$.

Пусть $j \in N_0$ и $\alpha \in N_j$. Так как в силу пункта (6) предложения 2.1 $\alpha_1 + m_1 - j \geq 0$, а из условия $\alpha \in N_j$ имеем $\alpha + (m_1 - j, 0) \in N_{m_1}$, то в силу уже доказанной части

$$m_1 = \tilde{d}(\alpha + (m_1 - j, 0)) = \max_{1 \leq l \leq M} [m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^l)].$$

Следовательно, аналогичным образом получаем, что

$$m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^l) \leq m_1, \quad l = 1, \dots, M$$

и для некоторого $l_0 \in N_0$, $1 \leq l_0 \leq M$

$$m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j, 0), \lambda^{l_0}) > m_1 - 1.$$

Откуда,

$$\begin{aligned} m_1 - m_l + (\alpha, \lambda^l) &= m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^l) - ((m_1 - j; 0), \lambda^l) = \\ &= m_1 - m_l + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^l) + j - m_1 \leq m_1 + j - m_1 = j, \quad l = 1, \dots, M \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m_1 - m_{l_0} + (\alpha, \lambda^{l_0}) &= m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) - ((m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) = \\ &= m_1 - m_{l_0} + (\alpha + (m_1 - j; 0), \lambda^{l_0}) + j - m_1 > m_1 - 1 + j - m_1 = j - 1. \end{aligned}$$

Из этих двух неравенств непосредственно (в силу определения функции $\tilde{d}$) следует, что $\tilde{d}(\alpha) = j$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}_j$, $j = 0, 1, \dots$. Предложение 2.2 доказано. $\square$

На основании пункта (3) предложения 2.2, в дальнейшем вместо функции $\tilde{d}(\alpha)$ будем писать $d(\alpha)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые предложения:

Предложение 2.3. Пусть $k, r \in \mathbb{N}_0$, $k > r$. Тогда при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi_1^r / (|\xi_2| + |\xi_1|^k) \rightarrow 0$.

Предложение 2.4. Пусть Q_1 и Q_2 такие многочлены от одного переменного, что $Q_1(\xi_2)/Q_2(\xi_2) \rightarrow 0$ при $\xi_2 \rightarrow \infty$. Если многочлен Q от двух переменных такой, что $|Q(\xi)| + |Q_2(\xi_2)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то $Q_1(\xi_2) / (|Q_2(\xi_2)| + |Q(\xi)|) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Предложение 2.5. (см. пункт (2) замечания 3). Если характеристический многоугольник $\mathcal{N}(P)$ регулярного многочлена P порожден набором вида $B(\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(B))$, то P гипозеллиптичен по ξ_1 .

Лемма 2.1. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ — регулярный многочлен с полным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}(P)$. Многочлен $P(\xi)$ гипозеллиптичен по ξ_1 тогда и только тогда, когда он частично гипозеллиптичен по ξ_2 .

Доказательство. Представим многочлен $P(\xi)$ в следующем виде

$$(2.4) \quad P(\xi) = \sum_{r=0}^M P_r(\xi_2) \xi_1^r,$$

где $M = \text{ord}_{\xi_1} P$, а

$$(2.5) \quad P_r(\xi_2) = \sum_{(r, \alpha_2) \in (P)} \gamma_{(r, \alpha_2)} \xi_2^{\alpha_2}, \quad (r = 0, \dots, M).$$

Из полноты многоугольника $\mathcal{N}(P)$ следует, что $P_0 \neq 0$ поскольку в силу определения полноты многоугольника существует $l \in N$, такой, что $(0, l) \in (P)$ ($(0, l)$ – вершина многоугольника, лежащая на оси ξ_2). Тогда, в силу замечания 1.2 многочлен $P_0(\xi_2)$ гипоеллиптичен.

В силу пункта (4) замечания 3 и из регулярности P следует, что существуют числа $C_1 > 0, C_2 > 0$, для которых

$$(2.6) \quad 0 < |P(\xi)| \leq \sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r| \leq C_2 |P(\xi)| \quad \forall \xi \in R^2, |\xi| \geq C_1.$$

Пусть многочлен $P(\xi)$, удовлетворяющий условиям леммы, гипоеллиптичен по ξ_1 , т.е. для любого $\alpha_1 \in N$

$$(2.7) \quad \left| \frac{P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Так как $P_r(\xi_2) = \frac{1}{r!} P^{(r, 0)}(0, \xi_2)$, $r = 0, \dots, M$, то из (2.7) в силу представления (2.4) имеем:

$$\frac{P_r(\xi_2)}{P_0(\xi_2)} = \frac{1}{r!} \frac{P^{(r, 0)}(0, \xi_2)}{P(0, \xi_2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi_2| \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2, \dots$$

Так как в силу вышесказанного P_0 - гипоеллиптичен, то это означает (см. пункт (2) определения 2), что многочлен P частично гипоеллиптичен по ξ_2 .

Пусть, теперь, частично гипоеллиптический по ξ_2 многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда для любого $\alpha_1 \in N$ в силу представления (2.4) и оценки (2.6) при $|\xi| \geq C_1$ имеем

$$(2.8) \quad \left| \frac{P^{(\alpha_1, 0)}(\xi)}{P(\xi)} \right| = \frac{\left| \sum_{r=\alpha_1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1} \right|}{\left| \sum_{r=0}^M P_r(\xi_2) \xi_1^r \right|} \leq C_2 \sum_{r=\alpha_1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} \frac{|P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1}|}{\sum_{k=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^k|} =$$

$$= C_2 \left[\frac{\alpha_1! |P_{\alpha_1}(\xi_2)|}{|P_0(\xi_2)| + \sum_{k=1}^M |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} + \sum_{r=\alpha_1+1}^M \frac{r!}{(r-\alpha_1)!} \frac{|P_r(\xi_2) \xi_1^{r-\alpha_1}|}{\sum_{k=0}^M |P_r(\xi_2)| |\xi_1|^k} \right].$$

В силу предложения 2.3

$$(2.9) \quad \frac{P_{\alpha_1}(\xi_2)}{|P_0(\xi_2)| + \sum_{k=1}^M |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Пусть $k \in N$, $\alpha_1 + 1 \leq k \leq M$ и $D_k = \{\xi_2 \in R : P_k(\xi_2) = 0\}$.

Так как в силу (2.6), при достаточно больших $\xi \in R^2$ и $\xi_2 \in D_k$ имеем

$$\frac{P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}}{\sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r|} = 0$$

и $|P_0(\xi_2)| + |P_k(\xi_2) \xi_1^k| \neq 0$ при достаточно больших ξ и $\xi_2 \notin D_k$, то в силу предложения 2.3 (см. пункт 3 а) определения 2) при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}}{\sum_{r=0}^M |P_r(\xi_2) \xi_1^r|} \leq \frac{|P_k(\xi_2) \xi_1^{k-\alpha_1}|}{|P_0(\xi_2)| + |P_k(\xi_2) \xi_1^k|} = \frac{|\xi_2|^{k-\alpha_1}}{\left| \frac{P_0(\xi_2)}{P_k(\xi_2)} \right| + |\xi_1|^k} \rightarrow 0, \quad k = \alpha_1 + 1, \dots, M.$$

Отсюда и из соотношения (2.9) в силу оценки (2.8) получаем, что многочлен $P(\xi)$ гипоеллиптичен по ξ_1 . Лемма 2.1 доказана. $\square$

Предложение 2.6. Пусть характеристический многоугольник $\mathcal{N}(P)$ регулярного многочлена $P(\xi)$ порожден набором вида B . Тогда многочлен P частично гипоеллиптичен по ξ_2 .

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 2.1 и предложения 2.5. $\square$

Предложение 2.7. (см. [1], т.1, теорема 1.4.1). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C = C(m) > 0$ такая, что для любого $\delta \in (0, (b-a)/2)$ существует функция $\varphi_\delta(t) \in C_0^\infty(a, b)$ ($C_0^\infty(a, b)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в (a, b)), для которой $\varphi_\delta(t) = 1$, $t \in (a+\delta, b-\delta)$ и $|\varphi_\delta^{(j)}(t)| \leq C\delta^j$, $j = 0, \dots, m$.

Пусть $h(t) = 1 - t^2$ при $|t| < 1$, $h(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, $\mathcal{H} > 0$ и $h_{\mathcal{H}}(t) = h(t/\mathcal{H})$. Для правильного многоугольника $\mathcal{N} \subset R_+^2$ с вершинами из N_0^2 , функции h и числа $\mathcal{H} > 0$ обозначим

$$H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ u : (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}(x_1) \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}}), \forall \alpha \in \mathcal{N} \right\},$$

где $d(\alpha)$ функция, определенная в (2.1), а

$$\Omega_{\mathcal{H}} = \{x \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in (-\infty; +\infty)\}.$$

Лемма 2.2. Множество $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ плотно в $H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$ и $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Тогда существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon, u) \in (0, \mathcal{H})$ и $M \geq 1$ такие, что

$$(2.10) \quad \|u\|_{H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} < \varepsilon,$$

где $\Omega_{\mathcal{H}-\delta, M} = \{x \in \Omega_{\mathcal{H}}, |x_1| < \mathcal{H} - \delta, |x_2| < M\}$.

Пусть $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ функции, удовлетворяющие условиям предложения 2.7 такие, что

- (1) $\varphi_1(x_1) = 1$ при $|x_1| < \mathcal{H} - \delta$, $\varphi_1(x_1) = 0$ при $|x_1| > \mathcal{H} - \frac{\delta}{2}$,
- (2) $\varphi_2(x_2) = 1$ при $|x_2| < M$, $\varphi_2(x_2) = 0$ при $|x_2| > M + 1$,
- (3) $|\varphi_1^{(j)}(x_1)| \leq C\delta^{-j}$, $|\varphi_2^{(j)}(x_2)| \leq C$, $j = 0, \dots, m_1 \equiv \max_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \alpha_1$.

Положим $v(x) = u(x)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Очевидно, $\text{supp } v \subset \Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$. Пусть $\tilde{v}$ ($\widetilde{D^\alpha u}$, $\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$) продолженные нулем вне $\Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$ ($\Omega_{\mathcal{H}}$) функции v ($D^\alpha u$, $\alpha \in \mathcal{N}$). Так как $v(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_{\mathcal{H}-\delta/2, M+1}$ и $D^\alpha \tilde{v} \in L_2(E^2)$ ($\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2$), то в силу (2.10) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{N}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(E^2)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \\
 & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha v - D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha v) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 (2.11) \quad & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Так как $h_{\mathcal{H}}(x_1) \leq \delta/\mathcal{H}$ при $x \in \text{supp}(\varphi_1\varphi_2) \setminus (\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)$, то по формуле Лейбница в силу предложения 2.2, оценки (2.10) и свойства (1 – 3) функций φ_1, φ_2 для первого слагаемого правой части оценки (2.11) с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\mathcal{N}, C, \mathcal{H}) > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\alpha (u\varphi_1\varphi_2) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left\| D^\beta u \cdot D_1^{\alpha_1-\beta_1} \varphi_1 \cdot D_2^{\alpha_2-\beta_2} \varphi_2 \cdot h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 (2.12) \quad & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{|\beta| \leq \alpha} C_\alpha^\beta C^2 \delta^{-(\alpha_1-\beta_1)} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)+\alpha_1-\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta C^2 \delta^{-(\alpha_1-\beta_1)} \left(\frac{\delta}{\mathcal{H}} \right)^{\alpha_1-\beta} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq \\
 & \leq C_1 \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\delta}, M)} \leq C_1 \varepsilon,
 \end{aligned}$$

где C_α^β - биномиальные коэффициенты, а C - постоянная из предложения 2.7.

Из (2.11) в силу (2.12) получаем

$$(2.13) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \left(D^\alpha \tilde{v} - \widetilde{D^\alpha u} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(E^2)} \leq (C_1 + 1) \varepsilon.$$

Пусть $\theta > 0$, $S_\theta = \{x \in E^2 : |x| < \theta\}$, $\psi \in C_0^\infty(S_1)$, $\psi \geq 0$, $\int \psi dx = 1$, $\psi_\theta(x) = \theta^{-2} \psi(x/\theta)$ и $\tilde{v}_\theta = \tilde{v} * \psi_\theta$.

Очевидно $\tilde{v}_\theta \in C^\infty(E^2)$ для любого $\theta > 0$, при этом $\tilde{v}_\theta(x) = 0$ когда $x \notin \text{supp} \tilde{v} + \bar{S}_\theta$ ($\bar{S}_\theta$ замыкание S_θ). Так как при $\theta \in (0, \delta/4)$ $\text{supp} \tilde{v} + \bar{S}_\theta \subset \Omega_{\mathcal{H}}$, то отсюда получаем, что $\tilde{v}_\theta \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ когда $\theta \in (0, \delta/4)$. Учитывая, что $h_{\mathcal{H}} \leq 1$, $D^\alpha \tilde{v}_\theta \in L_2(E^2)$ ($\alpha \in \mathcal{N}$) и (см. например [12], 6.3 (2)) $D^\alpha \tilde{v}_h = (D^\alpha \tilde{v})_h$, то в силу неравенства Юнга и непрерывности в среднем функций из L_2 имеем при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (\tilde{v}_\theta - \tilde{v}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(E^2)} &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (\tilde{v}_\theta - \tilde{v}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(E^2)} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha \tilde{v})_\theta - D^\alpha \tilde{v}\|_{L_2(E^2)} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sup_{|y| < \theta} \|D^\alpha \tilde{v}(\cdot - y) - D^\alpha \tilde{v}(\cdot)\|_{L_2(E^2)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, отсюда и из (2.12) получаем утверждение леммы. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ - правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 , $m_1 \equiv \max \{\alpha_1 : \alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2\}$ и $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$. Тогда существуют постоянные $C_1 = C_1(m_1) > 0$ и $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(m_1) > 0$ такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$,

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ &\leq C_1 \left(\|(D^{(\beta_1(\beta_2), \beta_2)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|(D_2^{\beta_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \beta_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right), \end{aligned}$$

где $\beta_1 = \beta_1(\beta_2) \in N_0$ - то единственное (в силу замечания 4) число для которого $(\beta_1(\beta_2), \beta_2) \in \mathcal{N}_{m_1}$.

Доказательство. Оценка (2.14) очевидна при $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = \beta_1(\beta_2)$, так как в последнем случае $\beta \in \mathcal{N}_{m_1}$ и в силу определения функции $d(\cdot) : d(\beta) = m_1$. Пусть поэтому $0 < \beta_1 < \beta_1(\beta_2)$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}(x_1)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 = \left| \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} D^\beta \varphi \left(\bar{D}^\beta \varphi h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) \right) dx \right| = \\ &= \left| \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} D^{\beta-(1,0)} \varphi D_1 \left(\bar{D}^\beta \varphi h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) \right) dx \right| \leq \\ &\leq \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} \left| D^{\beta-(1,0)} \varphi \bar{D}^{\beta+(1,0)} \varphi \right| h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)}(x_1) dx + \\ &+ \frac{2d(\beta)}{\mathcal{H}} \iint_{\Omega_{\mathcal{H}}} \left| D^{\beta-(1,0)} \varphi D^\beta \varphi \right| h_{\mathcal{H}}^{2d(\beta)-1}(x_1) dx. \end{aligned}$$

Так как в силу предложения 2.2 $d(\beta \pm (1, 0)) = d(\beta) \pm 1$ при $\beta_1 \geq 1$, то отсюда с применением арифметического неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| (D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}(x_1) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\left\| (D^{\beta+(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta+(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 + \left\| (D^{\beta-(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta-(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \right) + \\ & + \frac{2d(\beta)}{\mathcal{H}} \left(\left\| (D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 + \left\| (D^{\beta-(1,0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta-(1,0))} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}^2 \right). \end{aligned}$$

Так как $d(\beta) \leq m_1$ при всех $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$, то отсюда в силу леммы 2.1 работы [11] следует существование числа $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(m_1) > 0$ такого, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ с некоторой постоянной $C_1 = C_1(m_1) > 0$ выполняется оценка (2.14). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.4. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многогранник с вершинами из N_0^2 , а $\mathcal{H}_0 > 0$ число определенное в лемме 2.3. Тогда существует постоянная $C_1 = C_1(m_1)$ такая, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ (2.15) \quad & \leq C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2}) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \leq \\ & \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \end{aligned}$$

где по многоугольнику $\mathcal{N}$ множество $\mathcal{N}_{m_1}$ определено в начале параграфа 2, а

$$\Gamma \equiv \max \{ \alpha_2 : (0, \alpha_2) \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{m_1} \cap N_0^2 \}.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оценку (2.15) достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Из определения функции $d(\cdot)$ по лемме 2.3 существует постоянная $C_2 = C_2(m_1) > 0$ такая, что при всех $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha \in (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{m_1}) \cap N_0^2} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + C_2 m_1 \left(\sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left(\left\| (D^{(\alpha_1(\alpha_2), \alpha_2)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \right) \leq \\ & \leq (C_2 m_1 + 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_2 m_1 \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Так как правая часть оценки (2.15) очевидна, то отсюда получаем утверждение леммы. Лемма 2.4 доказана. $\square$

Лемма 2.5. Пусть P – регулярный многочлен с правильным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}$. Тогда существуют постоянная C и число $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_0$ ($\mathcal{H}_0$ число из леммы 2.3) такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ и $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.16) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C \left(\left\| (P(D)u) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оценку (2.16) достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. В силу леммы 2.4 имеем, что с некоторой постоянной $C_1 = C_1(m_1) > 0$ при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.17) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).$$

Для первого слагаемого правой части оценки (2.17) в силу формулы Лейбница и определения функции h с некоторой постоянной $C_2 = C_2(h, m_1)$ при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ имеем

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \\ & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) - \sum_{\substack{\beta_1 < \alpha_1 \\ \alpha_1 \geq 1, \beta_2 = \alpha_2}} C_{\alpha_1}^{\beta_1} D^{\beta_1} \varphi D_1^{\alpha_1 - \beta_1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \left\| D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \sum_{\substack{\beta_1 < \alpha_1 \\ \alpha_1 \geq 1, \beta_2 = \alpha_2}} C_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\| (D^{\beta_1} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1 - \alpha_1 + \beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \cdot \frac{C_2}{\mathcal{H}^{\alpha_1 + \beta_1}}. \end{aligned}$$

Так как при $\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}, 0 \leq \beta_1 < \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$ $\beta + (m_1 - (m_1 - \alpha_1 + \beta_1), 0) = \alpha \in \mathcal{N}_{m_1}$, то по определению множества $\mathcal{N}_l$ ($l \in N_0$) и условия $\beta_1 < \alpha_1$ получаем, что $\beta \in \mathcal{N}_{m_1 - \alpha_1 + \beta_1} \subset \bigcup_{j=0}^{m_1-1} \mathcal{N}_j$.

Поэтому из (2.18) с некоторым постоянным $C_3 = C_3(\mathcal{N}, h)$, $C_4 = C_4(\mathcal{N}, h) > 0$, при $\mathcal{H} > \max\{1, \mathcal{H}_0\}$ получаем

$$(2.19) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_3}{\mathcal{H}} \sum_{j=0}^{m_1-1} \sum_{\beta \in \mathcal{N}_j} \|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_4}{\mathcal{H}} \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\beta \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из оценок (2.18) и (2.19) при $\mathcal{H} > \max\{1, \mathcal{H}_0, 2C_1 \cdot C_4\} \equiv \mathcal{H}'_0$ получаем, что при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq 2C_1 \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|(D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенства Парсеваля и регулярности многочлена P , для первого слагаемого правой части оценки (2.3) с некоторой постоянной $C_5 = C_5(P) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|D^\alpha (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(E^2)} = \\ & = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_{m_1}} \|\xi^\alpha F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \leq C_5 \left(\|P(\xi) F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} + \|F(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \right) = \\ & = C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} + \|(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(R^2)} \right) = \\ & = C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Из оценки (2.20) и отсюда получаем, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}'_0$

$$(2.21) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_0^2} \|(D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq 2C_1 C_5 \left(\|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) + \\ & + 2C_1 \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|(D_2^{\alpha_2} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого правой части оценки (2.21) по формуле Лейбница и из определения функции h с некоторой постоянной $C_6 = C_6(P, h) > 0$ имеем

$$(2.22) \quad \begin{aligned} & \|P(D)(\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \|(P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\alpha_1 \geq 1} \left\| \left(P^{(\alpha_1, 0)}(D)\varphi \right) D_1^{\alpha_1} h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \| (P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_6 \sum_{\alpha_1 \geq 1} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2 \\ \beta_1 \geq \alpha_1}} \frac{\| (D^{\beta-(\alpha_1, 0)} \varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1-\alpha_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}}{\mathcal{H}^{\alpha_1}}.$$

Так как $\beta_1 \geq \alpha_1 \geq 1$, то в силу пункта (6) предложения 2.1, $\beta - (\alpha_1, 0) \in \bigcup_{j=0}^{m_1-\alpha_1} \mathcal{N}_j$ при $\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2$. Следовательно, $m_1 - \alpha_1 \geq d(\beta - (\alpha_1, 0))$ и $h_{\mathcal{H}} \leq 1$. Отсюда с некоторой постоянной $C_7 = C_7(P, h) > 0$ имеем, что для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.23) \quad \begin{aligned} & \| P(D) (\varphi h_{\mathcal{H}}^{m_1}) \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \| (P(D)\varphi) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \frac{C_7}{\mathcal{H}} \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \| (D^\alpha \varphi) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из оценок (2.21) и (2.23) при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1 := \max \{4C_1 \cdot C_5 \cdot C_7, \mathcal{H}'_0\}$ непосредственно получаем оценку (2.16) с постоянной $C = 4C_1 \cdot C_5$. Лемма 2.5 доказана. $\square$

Для правильного многогранника $\mathcal{N}$ с вершинами из N_0^2 , $j \in N_0$, через $\mathcal{N}^j$ обозначим множество $\bigcup_{l=0}^j \mathcal{N}_l$ и положим

$$H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \bigcap_{j=m_1}^{\infty} H_h^{\mathcal{N}^j}(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Так как для любого $j \in N_0, j \geq m_1$ выпуклая оболочка $(\mathcal{N}(\mathcal{N}^j))$ множества $\{\alpha, \alpha \in \mathcal{N}^j\}$ является правильным многоугольником и (в силу того, что вершины $\mathcal{N}$ принадлежат N_0^2) $\mathcal{N}(\mathcal{N}^j) \cap N_0^2 = \mathcal{N}^j$, то в силу леммы 2.2 множество $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ плотно в $H_h^{\mathcal{N}^j}$ при $j = m_1, m_1 + 1, \dots$

Лемма 2.6. Пусть P – регулярный многочлен с правильным характеристическим многоугольником $\mathcal{N}$, порожденный набором вида B . Тогда для любого $j \in N_0$ существуют постоянные $A_l > 0, l = 0, \dots, j+1$ такие, что при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_1$ число определенное в лемме 2.5) и всех $u \in H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.24) \quad \begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{l=0}^j A_l \| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \end{aligned}$$

где Γ – число определенное в лемме 2.4.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по j . Оценка (2.24) при $j = 0$ следует из леммы 2.5. Пусть оценка (2.24) верна при $j \leq k$. Докажем ее для $j = k + 1$. В силу определения $\mathcal{N}^j$ и предположения индукции с некоторыми

постоянными A_l , $l = 0, \dots, k+1$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 (2.25) \quad & + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{l=0}^k A_l \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + A_{k+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Для первого слагаемого правой части (2.25) из определений множества $\mathcal{N}^j$, функции $d(\cdot)$ и в силу формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| (D^\beta D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+k+1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
 & \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{N} \\ \beta_1 \geq 1}} \sum_{1 \leq \gamma_1 \leq \beta_1} C_{\beta_1}^{\gamma_1} \left\| D^{\beta - (\gamma_1, 0)} (D_1^{k+1} u) D_1^{\gamma_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Так как с некоторой постоянной $B_{k+1} = B_{k+1}(h) > 0$

$$|(D_1^{\gamma_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1}(x_1)| \leq (B_{k+1}/\mathcal{H}^{\gamma_1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1+k+1-\gamma_1}(x_1),$$

при $1 \leq \gamma_1 \leq m_1$, $|x_1| < \mathcal{H}$, $\beta - (\gamma_1; 0) + (k+1; 0) \in \bigcup_{j=0}^{m_1-\gamma_1} \mathcal{N}_{j+k+1} \subset \mathcal{N}^{m_1+k}$ (см. пункт (4) предложения 2.2), то отсюда в силу предположения индукции с некоторыми постоянными A'_l , $l = 0, \dots, k+1$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+k+1} \setminus \mathcal{N}^{m_1+k}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + \sum_{l=0}^k A'_l \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + A'_{k+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.25) получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\beta \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \left\| D^\beta ((D_1^{k+1} u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 (2.26) \quad & + \sum_{l=0}^k (A'_l + A_l) \left\| (D_1^l P(D) u) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
 & + (A'_{k+1} + A_{k+1}) \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} u) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}$$

Так как $(D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1} \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$ при $u \in H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$, то в силу леммы 2.5 для первого слагаемого правой части (2.26) с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\beta ((D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1}) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
& \leq C_1 \left(\|P(D) (D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \|D_2^{\alpha_2} (D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+d(0, \alpha_2)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right) \leq \\
& \leq C_1 \left(\|(P(D)D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \right. \\
& + \sum_{\alpha_1 \geq 1} \left\| \left(P^{(\alpha_1, 0)}(D) D_1^{k+1}u \right) D_1^{\alpha_1} h_{\mathcal{H}}^{k+1} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\
& \left. + \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| (D_2^{\alpha_2} D_1^{k+1}u) h_{\mathcal{H}}^{k+1+d(0, \alpha_2)} h_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right).
\end{aligned}$$

Так как при $0 \leq \alpha_2 \leq \Gamma$ $(0, \alpha_2) \in \bigcup_{j=0}^{m_1-1} \mathcal{N}_j$, $(k+1, \alpha_2) \in \mathcal{N}^{m_1+k}$ и $\beta - (\alpha_1, 0) + (k+1, 0) \in \mathcal{N}^{m_1+k}$ для любого $\beta \in \mathcal{N}$, $\beta_1 \geq 1$, $1 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$, то отсюда в силу оценки (2.26) и предположения индукции получаем оценку (2.24) с некоторыми постоянными $A_l'' > 0$, $l = 0, \dots, k+2$ ($A_{k+1} = C_1$). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. Пусть $\mathcal{N}$ правильный многоугольник с вершинами из N_0^2 . Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех $u \in H_h^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned}
(2.27) \quad & C^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha (u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|(D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\
& \leq C \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2} \|D^\alpha (u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Левая часть оценки непосредственно получается применением формулы Лейбница в силу правильности многоугольника и пунктов (1) - (2) предложения 2.2.

Докажем правую часть оценки (2.27). Пусть $0 < j \leq m_1 = \max\{\alpha_1, \alpha \in \mathcal{N} \cap N_0^2\}$. Тогда в силу формулы Лейбница с некоторой постоянной $C_1 > 0$, учитывая, что в силу пункта (2) предложения 2.2 $d(\alpha) - (\beta_1, 0) = d(\alpha - (\beta_1, 0))$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}$, $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, (следовательно, $\alpha - (\beta_1, 0) \in \mathcal{N}_{j-\beta_1}$ при $\alpha \in \mathcal{N}$, $0 \leq$

$\beta_1 \leq \alpha_1$), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{N}_j \\ \alpha_1 \geq 1}} \sum_{2 \leq \beta_1 \leq \alpha_1} C_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\| (D^{\alpha - (\beta_1, 0)} u) D_1^{\beta_1} h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + C_1 \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{\beta \in \mathcal{N}_l} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, и учитывая, что $\mathcal{N}_0 \subset \{(0, \alpha_2) \in \mathcal{N}\}$ (пункт (3) предложения 2.1) и функция $h_{\mathcal{H}}$ зависит только от переменной x_1 , через $j - 1$ шагов с некоторой постоянной $C_2 > 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ & \leq C_2 \left(\sum_{l=1}^j \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_l} \left\| D^\alpha (u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \sum_{\beta \in \mathcal{N}_0} \left\| (D^\beta u) h_{\mathcal{H}}^{d(\beta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Просуммировав полученные неравенства по $j = 1, \dots, m_1$ и учитывая, что (в силу вышесказанного для $\mathcal{N}_0$).

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_0} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_0} \left\| D^\alpha \left(u h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})},$$

получим оценку (2.27). Лемма доказана. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе будем считать, что характеристический многоугольник оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ порожден набором вида B и обозначим

$$N(P, \mathcal{H}) = \left\{ u, D_2^j \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}}) \ j = 0, \dots, m_2, P(D)u = 0 \right\},$$

где $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1$ - число определенное в лемме 2.5, а m'_2 число из леммы 2.4.

Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(S_1), \varphi \geq 0, \int \varphi dx = 1, \varepsilon > 0, \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} \varphi(x/\varepsilon) \quad \text{и} \quad u \in N(P, \mathcal{H}).$$

Обозначим через $\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u} * \varphi_\varepsilon$, где $\tilde{u}$ продолженная нулем вне $\Omega_{\mathcal{H}}$ функция u . Нетрудно заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ $D^\alpha \tilde{u}_\varepsilon \in L_2(E^2)$ при всех $\alpha \in N_0^2$ и $D_2^{\alpha_2} \tilde{u}_\varepsilon = \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_\varepsilon$ (см. например [12], 6.3) $\alpha_2 = 0, \dots, \Gamma$.

Лемма 3.1. Для любого $u \in N(P, \mathcal{H})$

$$(3.1) \quad \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Так как (см. например [12], 6.3, (2)) для $x \in \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}$, $j = 0, 1, \dots$,

$$\left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то для доказательства соотношения (3.1) достаточно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0+$ имеем

$$(3.2) \quad \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Так как $h_{\mathcal{H}} \leq 2\varepsilon/\mathcal{H}$ при $x \in \Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}$, то в силу неравенства Юнга с некоторыми постоянными $C_1 = C_1(P)$, $C_2 = C_2(P, j, \varphi)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \left\| D_1^j P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \\ & \leq C_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right) * \left(D_1^{\alpha_1+j} \varphi_\varepsilon \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \leq \\ & \leq C_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sup_{|y| < \varepsilon} \left\| \widetilde{D_2^{\alpha_2} u}(\cdot - y) \right\|_{L_2(E^2)} \cdot \left\| D_1^{\alpha_1+j} \varphi_\varepsilon \right\|_{L_1(E^2)} \leq \\ & \leq C_2 \left(\frac{2\varepsilon}{\mathcal{H}} \right)^{m_1+j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \varepsilon^{-(\alpha_1+j)} \sup_{|y| < \varepsilon} \left\| \widetilde{D_2^{\alpha_2} u}(\cdot - y) \right\|_{L_2(E^2)}. \end{aligned}$$

Так как $m_2 + j \geq \alpha_1 + j$ при всех $\alpha \in \mathcal{N}$, а функции из $L_2(E^2)$ непрерывны в среднем, то отсюда непосредственно получаем утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $P(D) = P(D_1, D_2)$ регулярный оператор характеристический многоугольник которого порожден набором вида B . Тогда при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_1$ - число из леммы 2.5) $N(P, \mathcal{H}) \subset H_h^{\mathcal{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $u \in N(P, \mathcal{H})$, φ и $\tilde{u}_\varepsilon$ те же, что и в лемме 3.1. Тогда в силу лемм 2.7 и 2.6 (так как для любого $j \in \mathcal{N}_0$ многоугольник набора $\mathcal{N}^{m_1+j}$ - правильный) с некоторыми постоянными A_l , $l = 0, \dots, j+1$ имеем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^{m_1+j}} \left\| D^\alpha \left(\tilde{u}_\varepsilon h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\| \leq \sum_{l=0}^j A_l \left\| \left(D_1^l P(D) \tilde{u}_\varepsilon \right) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ & + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| \left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_\varepsilon h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Из условия $u \in N(P, \mathcal{H})$ и определения функции h в силу леммы 3.1, получаем, что множество $\{\tilde{u}_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в

$$H^{\mathcal{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2}) \equiv \{ v, D^j v \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}_2}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{N}^{m_1+j} \}$$

для любого $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$.

Поступая аналогичным образом с $\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2}$ в силу леммы 3.1 и условия $u \in N(P, \mathcal{H})$ имеем, что при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \left\| D^\alpha \left((\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2}) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right) \right\| \leq \sum_{l=0}^j A_l \left\| (D_1^l P(D) (\tilde{u}_{\varepsilon_1} - \tilde{u}_{\varepsilon_2})) h_{\mathcal{H}}^{m_1+l} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \\ + A_{j+1} \sum_{\alpha_2=0}^{\Gamma} \left\| \left(\left(\widetilde{D_2^{\alpha_2} u} \right)_{\varepsilon_1} - \left(\widetilde{D^{\alpha_2} u} \right)_{\varepsilon_2} \right) h_{\mathcal{H}}^{d(0, \alpha_2)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0,$$

т.е. множество предкомпактное в $H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ при всех $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$.

Так как, очевидно, $\|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то в силу полноты пространства $H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ получаем, что $u \in H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}_2})$ при всех $\mathcal{H}_2 \in (0, \mathcal{H})$. При этом переходя к пределу в (3.3), когда $\varepsilon \rightarrow 0+$ в силу леммы 2.7 получаем, что $u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}})$. Отсюда в силу произвольности $j \in N_0$ имеем, что $N(P, \mathcal{H}) \subset H_h^{\mathbb{N}, \infty}(\Omega_{\mathcal{H}})$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 3.2. Пусть $j \in N_0$, $u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}(\Omega_{\mathcal{H}})$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Тогда $u\varphi \in H^{\mathbb{N}^{m_1+j}}$, при этом с некоторой постоянной $C = C(j, \varphi) > 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^{m_1+j}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \quad \forall u \in H_h^{\mathbb{N}^{m_1+j}}.$$

Доказательство. Непосредственно получается применением формулы Лейбница в силу леммы 2.7 если заметить, что функция

$$\begin{cases} \varphi(x)/g_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)}, & \text{при } x \in \text{supp } \varphi \\ 0, & \text{при } x \notin \text{supp } \varphi \end{cases}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}$ принадлежат $C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. $\square$

Теорема 3.2. При условии теоремы 3.1, $N(P, \mathcal{H}) \subset C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Пусть $R_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $R_j(\xi) = R_0(\xi) (1 + |\xi_1|)^j$, $j = 1, 2, \dots$. Так как в силу предложения 2.6 оператор $P(D)$ частично гипоеллиптичен по ξ_2 , функция $R_0(\xi)$ является медленно растущей весовой функцией (см.[1] том 2, определение 10.1.1), то в силу теоремы Гординга-Малыгранжа-Эренпрайса (см. например [1] том 2, теорема 11.2.5) для доказательства теоремы 3.2 достаточно показать, что $N(P, \mathcal{H}) \subset B_{2, R_j}^{loc}(\Omega_{\mathcal{H}})$, $j = 0, 1, \dots$, где для весовой функции R и области Ω пространство Л. Хермандера $B_{2, R}^{loc}(\Omega)$ определяется следующим образом

$$B_{2, R_j}^{loc}(\Omega) = \{v; v \in D'(\Omega), \text{ для } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) F(v\varphi) \text{ функция и}$$

$$\|R(\xi) F(v\varphi)\|_{L_2(R^2)} < \infty\},$$

где $D'(\Omega)$ - пространство распределений над $C_0^\infty(\Omega)$, а F - преобразование Фурье.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Тогда в силу равенства Парсеваля и леммы 3.2 для любого $u \in N(P, \mathcal{H})$ в силу теоремы 3.1 с некоторыми постоянными $C_1 = C_1(P, j) > 0$, $C_2 = C_2(P, j, \varphi, h) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|R_j(\xi) F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} &= \left\| (1 + |P(\xi)|) (1 + |\xi_1|)^j F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} \leq \|F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} + \\ &+ \|P(\xi) F(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} + \left\| \xi_1^j F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} + \left\| \xi_1^j P(\xi) F(u\varphi) \right\|_{L_2(R^2)} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(R^2)} = C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \|D^\alpha(u\varphi)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{m_1+j}} \left\| (D^\alpha u) h_{\mathcal{H}}^{d(\alpha)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty. \end{aligned}$$

Это означает, что $u \in B_{2,R_j}^{loc}(\Omega_{\mathcal{H}})$ для любого $j = 0, 1, \dots$. Следовательно, в силу упомянутой теоремы Гординга-Мальгранжа-Эренпрайса $u \in C^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$. Так как $u \in N(P, \mathcal{H})$ было любое, то отсюда получаем утверждение теоремы. Теорема 3.2 доказана. $\square$

Abstract. The paper considers a class of regular, hypoelliptic in x_1 , two-dimensional operators $P(D) = P(D_1, D_2)$ in rather wide strip $\Omega_{\mathcal{H}} = \{x = (x_1; x_2) \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}$. It is proved the infinite differentiability in $\Omega_{\mathcal{H}}$ of those generalized solutions of the equation $P(D)u = 0$ for which $D_2^j u \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$, $j = 0, \dots, \text{ord}_{x_2} P$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, **1, 2**, Ин. Лит., М., Наука (1983).
- [2] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоеллиптичности для функций стремящихся к нулю на бесконечности", Сборник докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [3] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН. АрмССР XXI, сер. Математика, (5), 453 – 470 (1986).
- [4] Г. Г. Казарян, "О почти гипоеллиптических многочлена", Докл. Росс. Акад. Наук, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [5] В. Г. Карапетян, В. Н. Маргарян, "О почти гипоеллиптических операторах в обобщенных весовых пространствах Соболева", Математика в высшей школе, **4**, (4), 9 – 16 (2008).
- [6] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоеллиптических операторов", Изв. НАН. Армении, сер. Математика, **41**, (6), 39 – 56 (2006).
- [7] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
- [8] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer Academic Publishers (1992).
- [9] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division", 4 Amer. J. Math., **82**, 522 – 588 (1960).
- [10] F. John, "Continuous dependence of data for solutions of PDE with a prescribed bound", Comm. Pure Appl. Math., **13**, 551 – 585 (1960).
- [11] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О гладкости решений одного класса почти гипоеллиптических уравнений", Изв. НАН. Арм., сер. Математика, **43**, (3), 40 – 66 (2008).
- [12] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука (1996).

Поступила 22 июня 2009

О ЗАДАЧЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ

С. А. ВАГАРШАКЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *suren86@gmail.com*

Аннотация. Пусть сигнал состоит из суперпозиции нескольких гармонических колебаний. Задача заключается в построении линейно-причинного фильтра, который в выходном сигнале сохраняет некоторые компоненты входного сигнала и подавляет остальные. В этой статье приводятся новые оценки коэффициента усиления линейно-причинного фильтра, которые решают эту задачу.

MSC2010 number: 42A10

Ключевые слова: наилучшая аппроксимация, фильтр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы исследуем фильтры, которые в выходном сигнале сохраняют интересующие нас компоненты входного сигнала и подавляют другие. Этот процесс типичен для входного блока радиоприемника. Здесь мы обсуждаем проблемы, которые возникают при реализации фильтра с помощью линейно-причинной системы. Следует подчеркнуть, что в радиотехнике обычно заботятся о сохранении компонентов, имеющих определенную частоту и подавляют другие, при этом не заботясь о сохранении фазы каждой гармоники (см. [4]). В настоящей статье мы интересуемся задачей сохранения не только частоты, но и фазы каждого компонента. Именно такая постановка задачи приводит к необходимости дополнительных источников энергии.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В данном параграфе мы собрали те определения и результаты, которые заимствованы из электротехники и лежат в основе обсуждаемых проблем. Обозначим через l_2 пространство последовательностей $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), \dots)$, удовлетворяющих условию:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty.$$

Последовательности, удовлетворяющие данному условию, в дальнейшем будем называть дискретными сигналами или просто сигналами.

Для любого целого числа $n \in Z$ обозначим через S_n действующий в l_2 оператор

$$S_n \{x(k); k \in Z\} = \{x(k-n); n \in Z\}.$$

Определение 1. *Линейно-причинной системой считается оператор*

$$\Phi : l_2 \rightarrow l_2,$$

который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. *Линейность.* Оператор Φ является линейным и ограниченным;
2. *Инвариантность.* Для любого $n \in Z$ имеет место равенство

$$\Phi S_n = S_n \Phi;$$

3. *Причинность.* Если входящий сигнал

$$x = \{x(n), \quad n \in Z\}$$

удовлетворяет условию $x(n) = 0, \quad n < 0$, то для соответствующего ему выходящего сигнала Φx выполняется условие:

$$(\Phi x)(n) = 0, \quad n < 0.$$

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг, а через $T = \{z : |z| = 1\}$ его границу.

Определение 2. z -преобразованием дискретного сигнала $\{x(n) : n \in Z\}$ из l_2 называется функция

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in T,$$

где сходимость ряда понимается по норме пространства $L_2(T)$.

Заметим, что z -преобразования сигналов $x \in l_2$ заполняют все пространство $L_2(T)$. Последовательность $\delta \in l_2$, принимающая значение один при $n = 0$ и тождественно обращающаяся в нуль для всех остальных значений n , называется импульсным сигналом, сосредоточенным в нуле. Обозначим через

$$h(n) = (\Phi \delta)(n), \quad n \in Z.$$

Эта последовательность называется импульсной характеристикой системы Φ . Из свойства причинности системы Φ следует

$$h(n) = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

Следовательно, входящий сигнал x и выходящий сигнал $y = \Phi(x)$ связаны следующим соотношением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k), \quad n \in Z.$$

Определение 3. *Функция*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}, \quad z \in T$$

называется *передаточной функцией дискретной системы* Φ .

Заметим, что передаточная функция аналитична вне единичного круга и ограничена. Легко проверить, что работу дискретной системы с помощью z -преобразования можно представить следующим соотношением:

$$Y(z) = S(z)X(z), \quad z \in T.$$

При реализации фильтра с помощью реального прибора необходимо учитывать мощность источника питания прибора. В любой момент времени $n \in \mathbb{Z}$ разница между энергией входного и выходного сигналов равна:

$$\sum_{k=-\infty}^n |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^n |x(k)|^2.$$

Следовательно, линейная система Φ может работать, если внутри себя она имеет источники энергии, которые снабжают систему энергией не меньше, чем

$$\sup_n \left(\sum_{k=-\infty}^n |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^n |x(k)|^2 \right)^+,$$

где $a^+ = \max(0, a)$.

Данное замечание делает естественным следующее определение.

Определение 4. *Коэффициентом усиления системы является величина*

$$St(\Phi) = \sup \left(\sum_{k=-\infty}^0 |(\Phi x)(k)|^2 - \sum_{k=-\infty}^0 |x(k)|^2 \right)^+,$$

где верхняя граница берется по всем сигналам $x \in l_2$, которые удовлетворяют условию $\|x\| \leq 1$.

Известно (см. [1], стр. 80), что если $S(z)$ является передаточной функцией системы Φ , то имеет место равенство

$$St(\Phi) = \left(\sup_{|z|>1} |S(z)|^2 - 1 \right)^+.$$

Приведенная ниже теорема доказана в [1], стр. 80.

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in l_2$ какой-то нетривиальный сигнал и Φ линейно-причинная система. Если $\Phi x_0 = x_0$, то для любого $x \in l_2$ имеет место равенство $\Phi x = x$.*

Из этой теоремы следует, что невозможно осуществить фильтрацию с помощью линейно-причинной системы. По этой причине мы вынуждены ослабить требования задачи, предполагая, что система решает задачу лишь с некоторой, заранее зафиксированной точностью.

Определение 5. Пусть F - некоторое подмножество единичной окружности T . Обозначим через $I(F)$, подпространство в l_2 , состоящее из всех сигналов $x \in l_2$, z - преобразование которых равно нулю почти всюду на подмножестве $T \setminus F$.

Заметим, что подпространству $I(F)$ принадлежат те сигналы, чьи частоты лежат в множестве F . Обозначим через P_F действующий в пространстве l_2 ортогональный проектор на подпространство $I(F)$.

Таким образом, задача состоит в следующем: Пусть E, F два непересекающихся подмножества единичного круга T . Требуется для любого числа $\varepsilon > 0$ требуется найти такую линейно-причинную систему Φ , чтобы

$$(2.1) \quad \|P_F - \Phi P_{E \cup F}\| < \varepsilon.$$

Заметим, что неравенство (2.1) равносильно тому, что передаточная функция $S(z)$ системы Φ удовлетворяет следующим условиям:

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F \quad \text{и} \quad |S(z) - 1| < \varepsilon, \quad z \in E.$$

Если подмножества E, F - замкнутые и не пересекаются, то существует ограниченная аналитическая функция $S(z)$, $|z| > 1$, которая удовлетворяет вышеприведенным условиям.

Следовательно, при указанных выше условиях, задача фильтрации имеет решение. Однако оказывается, что коэффициент усиления соответствующей системы Φ растет параллельно уменьшению ε . Иначе говоря, насколько точно работает система, настолько она нуждается в более мощных энергетических источниках. В данной работе мы оцениваем коэффициент усиления системы, которая работает с данной точностью $\varepsilon > 0$.

Подробно обсудим тот случай, когда

$$E_\alpha = \{z : |z| = 1, -\alpha < \arg z < \alpha\}$$

и

$$F_\beta = \{z : |z| = 1, \beta < \arg z < 2\pi - \beta\},$$

где $0 < \alpha < \beta < \pi$.

Заметим, что с помощью дробно-линейного преобразования общий случай $0 < \alpha < \beta < \pi$ можно свести к частному, когда $0 < \alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$. Действительно, пусть

$$w(z) = \frac{z - x}{1 - xz},$$

где $-1 < x < 1$. Для любых чисел $0 < \alpha < \beta < \pi$ можно найти действительное число $-1 < x < 1$ такое, что имеет место равенство $-w(e^{-i\alpha}) = w(e^{i\beta})$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном параграфе мы приводим формулировку известной теоремы Г. Сеге (см. [5], стр. 197) и одно ее следствие, которое играет существенную роль в доказательстве основной теоремы.

Теорема 2. Пусть $h(z)$, $|z| = 1$ — неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln h(e^{ix}) dx > -\infty.$$

Тогда для любого комплексного числа $|a| < 1$

$$\inf_{P \in H^\infty} \left(\sup_{z \in T} \left| \frac{A}{z-a} - P(z) \right| h(z) \right) = \frac{|A|}{1-|a|^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{ix}|} \ln h(e^{ix}) dx \right\}.$$

Точная нижняя грань достигается на функции

$$P(z) = \frac{A}{z-a} \left(1 - \frac{(1-\bar{a}z)F(a)}{(1-|a|^2)F(z)} \right),$$

где

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \ln h(e^{ix}) dx \right\}, \quad |z| < 1.$$

Рассмотрим один частный случай теоремы Г. Сеге. Обозначим через

$$E_\alpha = \{z \in T; \quad -\alpha < \arg z < \alpha\} \quad \text{и} \quad F_\alpha = \{z \in T; \quad \pi - \alpha < \arg z < \pi + \alpha\},$$

где $0 < 2\alpha < \pi$. Рассмотрим следующую весовую функцию

$$h(z) = \begin{cases} e^{-m}, & z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha \\ 1, & z \in E_\alpha \cup F_\alpha. \end{cases}$$

Здесь m произвольное положительное число. Пользуясь теоремой Г. Сеге, для любого числа $-1 < y < 1$ имеем

$$\left| \frac{1}{z+iy} - P_y(z) \right| \leq \frac{|F(iy)|}{1-y^2}, \quad z \in E_\alpha \cup F_\alpha$$

$$\left| \frac{1}{z+iy} - P_y(z) \right| \leq \frac{|F(iy)|e^m}{1-y^2}, \quad z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha,$$

где

$$P_y(z) = \frac{1}{z+iy} \left(1 - \frac{(1-iyz)F(-iy)}{(1-y^2)F(z)} \right), \quad |z| < 1.$$

Заметим, что функция $P_y(z)$, $|z| < 1$ аналитическая и ограниченная.

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 3. Пусть $0 < 2\alpha < \pi$ и $\varepsilon > 0$ какие-либо числа. Если $S(z)$ - передаточная функция линейно-причинной системы Φ удовлетворяет условиям

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F_\alpha \quad \text{и} \quad |S(z) - 1| < \varepsilon, \quad z \in E_\alpha,$$

то коэффициент усиления системы Φ допускает оценку

$$St(\Phi) \geq \frac{1}{16\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}} - 1.$$

Доказательство. Передаточная функция $S(z)$, $|z| > 1$, является аналитической и ограниченной функцией. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} 1 &\leq |S(\infty)| + |1 - S(\infty)| \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |S(e^{-it})| dt \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - S(e^{-it})| dt \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln |S(e^{-it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln |S(e^{-it})| dt \right\} + \\ &+ \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln |1 - S(e^{-it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln (1 + |S(e^{it})|) dt \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \varepsilon dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln M dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \ln (1 + \varepsilon) dt \right\} + \\ &+ \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \ln \varepsilon dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \ln (1 + M) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln (1 + \varepsilon) dt \right\} \leq \\ &\leq 2(\varepsilon(1 + \varepsilon))^{\frac{\alpha}{\pi}} (1 + M)^{\frac{\pi-2\alpha}{\pi}}, \end{aligned}$$

где $M = \sup_{|z|=1} |S(z)|$. Следовательно,

$$St(\Phi) = (M^2 - 1)^+ \geq \frac{1}{16\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}} - 1.$$

□

Теперь оценим сверху коэффициент усиления.

Теорема 4. Допустим $0 < 2\alpha < \pi$ и $0 < \varepsilon < 1$ - некоторые числа. Тогда существует число $0 < M < \infty$ и линейно-причинная система Φ с передаточной функцией $S(z)$, $|z| = 1$, которая удовлетворяет следующим условиям

$$|S(z)| < \varepsilon, \quad z \in E_\alpha$$

$$|1 - S(z)| < \varepsilon, \quad z \in F_\alpha$$

и имеет место неравенство

$$St(\Phi) < \frac{M}{\varepsilon^{\frac{4\alpha}{\pi-2\alpha}}} \left(\ln \frac{8}{\pi \varepsilon \cos \alpha} \right)^{\frac{2\pi}{\pi-2\alpha}}.$$

Доказательство. Пусть m – положительное число, значение которого уточним позже. Пусть

$$F(z) = \exp \left\{ -\frac{m}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} dx + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} dx \right) \right\}, \quad |z| < 1.$$

Имеет место неравенство $|F(z)| \leq 1$, $|z| < 1$. При этом на дугах E_{α} и F_{α} имеем $|F(z)| = 1$, и

$$|F(z)| = e^{-m}, \quad z \in T \setminus E_{\alpha} \cup F_{\alpha}.$$

Наконец, если $-1 < y < 1$, то имеет место оценка

$$|F(iy)| \leq |F(0)| = \exp \left\{ -\frac{\pi - 2\alpha}{\pi} m \right\}.$$

Рассмотрим область $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < 2\}$. Из теоремы Коши следует

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} 1, & z \in \Omega \\ 0, & z \notin \Omega. \end{cases}$$

Можем записать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it} dt}{2e^{it} - z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \frac{dy}{iy + z}, \quad z \notin \partial\Omega.$$

Пусть $0 < \delta < 1$ – некоторое число, значение которого уточним позже.

На дугах $z \in E_{\alpha} \cup F_{\alpha}$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-1-\delta}^{-1+\delta} \frac{dy}{iy + z} + \frac{1}{2\pi} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{dy}{iy + z} \right| \leq \frac{2\delta}{\pi \cos \alpha}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что для любых $-1 < y < 1$ и $z \in E_{\alpha} \cup F_{\alpha}$, имеет место неравенство $|iy + z| \geq \cos \alpha$. Введем новую функцию:

$$\begin{aligned} G_{\delta}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it} dt}{2e^{it} - z} + \frac{1}{2\pi} \int_{1+\delta}^2 \frac{dy}{iy + z} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{-1-\delta} \frac{dy}{iy + z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} P_y(z) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1-\delta}^{-1+\delta} \frac{dy}{iy + z} - \frac{1}{2\pi} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{dy}{iy + z} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left(P_y(z) - \frac{1}{iy + z} \right) dy. \end{aligned}$$

Так как на дугах $z \in E_{\alpha} \cup F_{\alpha}$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{z + iy} - P_y(z) \right| \leq \frac{|F(iy)|}{1 - y^2}, \quad z \in E_{\alpha} \cup F_{\alpha},$$

то

$$\left| G_{\delta}(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leq \frac{2\delta}{\pi \cos \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{|F(iy)|}{1 - y^2} dy \leq$$

$$\leq \frac{2\delta}{\pi \cos \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{|F(0)|}{1-y^2} dy \leq \frac{2\delta}{\pi \cos \alpha} + \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi-2\alpha}{\pi} m \right\} \ln \frac{2}{\delta}.$$

Так как на дугах $z \in T \setminus E_\alpha \cup F_\alpha$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{z+iy} - P_y(z) \right| \leq \frac{|F(iy)|}{1-y^2} e^m,$$

то получаем

$$\begin{aligned} |G_\delta(z)| &\leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left| P_y(z) - \frac{1}{iy+z} \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\delta} + \frac{e^m}{2\pi} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{|F(0)|}{1-y^2} dy \leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{2\alpha m}{\pi} \right\} \ln \frac{2}{\delta}. \end{aligned}$$

Выбирая число $\delta = \frac{\pi\varepsilon}{4} \cos \alpha$ и число m из соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi-2\alpha}{\pi} m \right\} \ln \frac{2}{\delta} = \frac{\varepsilon}{2},$$

получим

$$|G_\delta(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in E_\alpha, \quad |G_\delta(z) - 1| \leq \varepsilon, \quad z \in F_\alpha.$$

Наконец, при $z \in T$ имеем

$$|G_\delta(z)| \leq 1 + 2 \ln \left(\frac{4}{\pi\varepsilon \cos \alpha} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{8}{\pi\varepsilon \cos \alpha} \right) \right)^{\frac{\pi}{\pi-2\alpha}} \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{\frac{2\alpha}{\pi-2\alpha}}}.$$

Тогда коэффициент усиления линейно-причинной систем Φ с передаточной функцией

$$S(z) = G \left(\frac{1}{z} \right), \quad |z| > 1,$$

для малых значений $\varepsilon > 0$ удовлетворяет оценке

$$St(\Phi) \leq \frac{2}{\varepsilon^{\frac{4\alpha}{\pi-2\alpha}}} \left(\ln \frac{8}{\pi\varepsilon \cos \alpha} \right)^{\frac{2\pi}{\pi-2\alpha}}.$$

□

Abstract. In assumption that the input signal consists of several harmonic oscillations, the paper considers the problem of construction a linearly-causal filter that preserves some components of the signal and rejects the others. Some new estimates for the amplification coefficient of linearly-causal filters are obtained, which solve the problem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Вагаршакян, Численные Методы Обработки Сигналов, Ереван (2007).
- [2] John B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Los Angeles, California (1981).
- [3] A. N. Kolmogorov, "Interpolation and extrapolation of stationary processes", Izv. AN USSR, **5**, 3 – 14 (1941).
- [4] A. Oppenheim, R. Schafer J. Buck, Discrete Time Signal Processing, New Jersey (1999).
- [5] P. Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge university press (1980).

Поступила 18 мая 2009

О РЕШЕНИЯХ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Ереванский государственный университет
Российско-армянский государственный университет¹

E-mails: *haik.ghazaryan@male.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказывается, что если $P(D)$ регулярный почти гипоеллиптический оператор

$$L_{2,\delta} = \{u; \|u\|_{2,\delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta \cdot |x|})^2 dx \right]^{1/2} < \infty\}, \quad \delta > 0$$

и H_δ^∞ – весовое соболевское пространство с весом $e^{-\delta \cdot |x|}$, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что все решения $u \in L_{2,\delta}$ дифференциального уравнения $P(D)u = f$ принадлежат H_δ^∞ , как только $f \in H_\delta^\infty$ и $\delta \leq \delta_0$.

MSC2000 number: 12E10.

Ключевые слова: гипоеллиптический оператор (многочлен), почти гипоеллиптический оператор (многочлен), весовые пространства Соболева.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$ – множество n -мерных мультииндексов, E^n и R^n – n -мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где } D_j = \partial / \partial \xi_j \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i} \cdot \partial / \partial x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Наконец обозначим $R_+^n = \{\xi \in R^n : \xi_j \geq 0, (j = 1, \dots, n)\}$, $C^n = R^n \times iR^n$.

Пусть $\aleph = \{\alpha^k\}$ – множество точек из N_0^n . Многогранником Ньютона набора $\aleph$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\aleph = \aleph(\aleph) \subset N_0^n$, содержащий множество $\aleph \cup \{0\}$.

Для точек $\eta \in R_+^n$ обозначим $\Pi'(\eta) = \{\xi; \xi \in R_+^n : \xi_i \leq \eta_i (i = 1, \dots, n)\}$ и $\Pi(\eta) = \Pi'(\eta) \setminus \{\eta\}$. Если $\alpha \in N_0^n \subset R_+^n$, то теми же символами $\Pi'(\alpha)$ и $\Pi(\alpha)$ обозначим

¹Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS грант п. 05 - 1000080 - 8157.

$\Pi'(\alpha) = \{\beta; \beta \in N_n^0 : \beta_i \leq \alpha_i (i = 1, \dots, n)\}$ и $\Pi(\alpha) = \Pi'(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Это не вызовет недоразумения, так как каждый раз из контекста будет ясно о каком множестве идет речь.

Полный многогранник $\mathfrak{R}$ назовем правильным, если с каждой вершиной $e \in \mathfrak{R}$ многогранник $\mathfrak{R}$ содержит множество $\Pi(e)$. Очевидно, это эквивалентно тому, что внешние (относительно $\mathfrak{R}$) нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$ имеют неотрицательные координаты. Если же внешние нормали таких граней имеют только положительные координаты, то многогранник $\mathfrak{R}$ назовем вполне правильным.

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \cdot D^{\alpha}$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ - отвечающий ему символ (характеристический многочлен). Здесь сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ набора точек $(P) \cup \{0\}$ назовем многогранником Ньютона или характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см. [2] или [3]) Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) с многогранником $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ называется невырожденным (регулярным), если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{R}} |\xi^{\beta}| \leq C [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n.$$

Определение 2. (см. [5]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{R}} |D^{\beta} P(\xi)| \leq C \cdot [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n.$$

Ясно, что любой гипоеллиптический оператор (см. [6], определение 11.1.2) является почти гипоеллиптическим, однако следующий простой пример показывает, что обратное не верно: многочлен $Q(\xi) = \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$ с правильным многогранником Ньютона $\mathfrak{R}(Q)$ является почти гипоеллиптическим, но не гипоеллиптическим. Отметим еще, что произвольный регулярный оператор с правильным многогранником Ньютона является почти гипоеллиптическим (см. [5]).

Пусть $\delta > 0$, положим

$$L_{2,\delta} = \{u; \|u\|_{2,\delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta \cdot |x|})^2 dx \right]^{1/2} \}$$

и введем следующее весовое пространство Соболева

$$(1.1) \quad H_{\mathfrak{R},\delta} = \{u; \|u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}} \equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} < \infty\}.$$

Если правильный многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ порождается дифференциальным оператором $P(D)$, то положим

$$H_{\mathfrak{R},\delta}^P = \{u; \|u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}^P} \equiv \|u\|_{2,\delta} + \|P(D)u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}} < \infty\},$$

$$H_{\mathfrak{R},\delta}^\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{m \cdot \mathfrak{R},\delta}; \quad H_{\mathfrak{R},\delta}^{P,\infty} = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{m \cdot \mathfrak{R},\delta}^P.$$

Так как очевидно, что для произвольного многогранника $\mathfrak{R}$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} (m\mathfrak{R}) = N_0^n,$$

то множества $H_{\mathfrak{R},\delta}^\infty$ и $H_{\mathfrak{R},\delta}^{P,\infty}$ не зависят от $\mathfrak{R}$. Поэтому далее (считая, что $\mathfrak{R}$ правильный многогранник) в обозначениях мы опустим символ $\mathfrak{R}$ и будем писать H_δ^∞ и $H_\delta^{P,\infty}$ вместо $H_{\mathfrak{R},\delta}^\infty$ и $H_{\mathfrak{R},\delta}^{P,\infty}$ соответственно.

В [7] доказано, что если символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет условию $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то оператор $P(D)$ является почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда существует число $\delta_0 > 0$ такое, что любое обобщенное решение $u \in L_{2,\delta}; (\delta \leq \delta_0)$ уравнения $P(D)u = 0$ принадлежит H_δ^∞ (см. [7], теоремы 3.1 и 3.2). Применяя теорему вложения для пространств Соболева (см., например [10], теорема 10.4) получим, что в отмеченном случае решение является бесконечно дифференцируемой функцией.

Что же касается неоднородного уравнения $P(D)u = f$, то в работах [9] и [12] В. И. Буренков изучил уравнение $P(D)u = f$ в цилиндре $\Omega = \Omega_m \times E^{n-m}$ при $0 \leq m < n$, где Ω_m некоторое открытое множество в E^m (если $m = 0$, то $\Omega = E^n$), а f и все ее частные производные m -локально интегрируемы с квадратом в Ω (если $m = 0$, то интегрируемы с квадратом в Ω). Им получены необходимые и достаточные условия на оператор P , при которых все обобщенные решения уравнения $P(D)u = f$ бесконечно дифференцируемы, если бесконечно дифференцируема f . Класс таких операторов существенно шире класса гипоеллиптических операторов.

Цель настоящей работы - доказать, что если $P(D)$ регулярный почти гипоеллиптический оператор, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^\infty$ при

$\delta \leq \delta_0$ или, что то же самое, для любого $f \in H_\delta^\infty$

$$N_\delta(P, f) = \{u \in L_{2,\delta}, (u, P(-D)\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(E^n)\} \subset H_\delta^\infty.$$

Отметим, что это утверждение перестает быть справедливым, если оператор $P(D)$ не является почти гипоеллиптическим или, если оператор почти гипоеллиптичен, но δ достаточно большое число. В самом деле, рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. Пусть

$$P_1(D) = P_1(D_1, D_2) = D_1^2 - D_2^2 = \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и $\delta > 0$, $g(t) \in L_2(E^1) \setminus C^\infty(E^1)$. Очевидно, функция $u(x, y) = g(x - y) \in L_{2,\delta}(E^2)$ и $(u, P_1(-D)\varphi) = 0$ для любой $\varphi \in C_0^\infty(E^2)$. Следовательно $u \in H_\delta^{P,\infty}$. Однако $u \notin H_\delta^\infty$ ибо $H_\delta^\infty \subset C^\infty$.

Пример 2. Пусть

$$P_2(D) = P_2(D_1, D_2) = D_1^2 D_2^2 + D_1^2 + D_2^2 + 1 = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1,$$

и $\delta > 1$, а функция $g \in C^2(E^1) \setminus C^\infty(E^1)$ такая, что

$$\|g\|_{L_2(E^2)} + \|g''\|_{L_2(E^2)} < \infty.$$

Очевидно, $P_2(D)$ — почти гипоеллиптический оператор, при этом функция $u(x, y) = e^x \cdot g(y) \in L_{2,\delta}$ является решением однородного уравнения $P(D)u = 0$. Следовательно $u \in H_\delta^{P,\infty}$. Однако $u \notin H_\delta^\infty$, так как $u \notin C^\infty(E^2)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Для $k \in N$ и $\gamma \in N_0^n$ через $d_k(\gamma)$ обозначим количество мультииндексов $\Pi(\gamma)$ таких, что $|\alpha| = k$ и положим

$$d(\gamma) = \max_{1 \leq k \leq |\gamma|} \{d_k(\gamma)\}.$$

Лемма 1. Пусть $\gamma \in N_0^n$, $\delta_0 > 0$ и пусть $a_\alpha(\delta)$, $b_\alpha(\delta)$ неотрицательные в $(0, \delta_0)$ функции с некоторой постоянной $\kappa > 0$ удовлетворяющие условиям

$$(2.1) \quad a_\alpha(\delta) \leq b_\alpha(\delta) + \kappa \sum_{\beta \in \Pi(\alpha)} a_\beta(\delta) \delta^{|\alpha| - |\beta|}; \quad \alpha \in \Pi'(\gamma), \delta \in (0, \delta_0).$$

Тогда при $\delta \in (0, \delta_0)$

$$(2.2) \quad \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} \left(\frac{\delta}{2\kappa d(\gamma) + 1} \right)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \leq 2 \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} \left(\frac{\delta}{2\kappa d(\gamma) + 1} \right)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta).$$

Доказательство. Обозначим $h = 2\kappa d(\gamma) + 1$. Умножим неравенства (2.1) на $(\delta h)^{-|\alpha|}$ и просуммируем полученные неравенства по $\alpha \in \Pi'(\gamma)$. Получим, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \leq \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta) + \\ & + \kappa \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} \sum_{\beta \in \Pi(\alpha)} (\delta h)^{-|\beta|} a_\beta(\delta) h^{-(|\alpha| - |\beta|)} = \\ & = \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta) + \kappa \left[\sum_{\beta \in \Pi(\gamma)} (\delta h)^{-|\beta|} a_\beta(\delta) \right] \left[\sum_{\alpha \in \Pi(\beta, \gamma)} h^{-(|\alpha| - |\beta|)} \right], \end{aligned}$$

где $\Pi(\beta, \gamma) = \{\alpha \in N_0^n, \beta_i \leq \alpha_i \leq \gamma_i \quad i = 1, \dots, n; \alpha \neq \beta\}$.

Так как $(\kappa d(\gamma))/(h-1) = 1/2$ по определению числа h , то отсюда имеем для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} a_\alpha(\delta) \leq \sum_{\alpha \in \Pi(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} \left[1 - \frac{\kappa d(\gamma)}{h-1} \right] a_\alpha(\delta) + \\ & + (\delta h)^{-|\gamma|} a_\gamma(\delta) \leq \sum_{\alpha \in \Pi(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} \left[1 - \sum_{\mu \in \Pi(\alpha, \gamma)} h^{-(|\mu| - |\alpha|)} \right] a_\alpha(\delta) + \\ & + (\delta h)^{-|\gamma|} a_\gamma(\delta) \leq \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} (\delta h)^{-|\alpha|} b_\alpha(\delta), \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (2.2). Лемма доказана. $\square$

Ниже нам приходится дифференцировать весовую функцию, определяющую пространство $H_{\mathfrak{R}, \delta}$. В работе [7] показано, что вес $e^{-|x|}$ пространства $H_{\mathfrak{R}, \delta}$ можно заменить положительным гладким весом g так, чтобы полученное весовое пространство (которое также обозначим через $H_{\mathfrak{R}, \delta}$) было бы топологически эквивалентным исходному пространству. В [7] доказано существование заменяющей весовой функции $g \in C^\infty$, удовлетворяющей следующим условиям (здесь и далее $g_\delta(x) = g(\delta x)$):

1. существует постоянная $\varsigma > 0$ такая, что

$$\varsigma^{-1} e^{-\delta|x|} \leq g_\delta(x) \leq \varsigma e^{-\delta|x|}, \quad x \in E^n.$$

2. Для каждого $\alpha \in N_0^n$ существует число $\varsigma_\alpha > 0$ такое, что

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \leq \varsigma_\alpha \delta^{|\alpha|} g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

3. Пусть $T > 0$, $S_T = \{x; x \in E^n, |x| \leq T\}$ и $\sigma_1 = \sigma_1(\delta, T) = \zeta^2 e^{\delta T}$. Тогда

$$\sup_{y \in S_T} g_\delta(x + y) \leq \sigma_1(\delta, T) g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

4. Пусть $T > 0$ и $\sigma_2 = \sigma_2(\delta, T) = \sqrt{n} \zeta^2 \max\{\zeta_\alpha; |\alpha| = 1\} \delta T e^{\delta T}$. Тогда

$$\sup_{y \in S_T} |g_\delta(x + y) - g_\delta(x)| \leq \sigma_2 g_\delta(x), \quad x \in E^n.$$

Далее при определении класса $H_{\mathfrak{R}, \delta}$ будем считать, что вес $g \in C^\infty$ удовлетворяет условиям 1) - 4).

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник в N_0^n и $\delta > 0$. Тогда следующие нормы эквивалентны норме, определенной формулой (1.1)

$$\|u\|'_{\mathfrak{R}, \delta} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u) g_\delta\|_{L_2}; \quad \|u\|''_{\mathfrak{R}, \delta} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2}.$$

Доказательство. Эквивалентность норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ непосредственно следует из свойства 1) функции g_δ . Докажем эквивалентность норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$.

Так как $\mathfrak{R}$ правильный многогранник, то в силу формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\mathfrak{R}, \delta) > 0$

$$\begin{aligned} \|u\|''_{\mathfrak{R}, \delta} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta (D^\beta u) (D^{\alpha-\beta} g_\delta) \right\|_{L_2} \leq \\ (2.3) \quad &\leq C_1 \sum_{\beta \in \mathfrak{R}} \|(D^\beta u) g_\delta\|_{L_2} = C_1 \|u\|'_{\mathfrak{R}, \delta}. \end{aligned}$$

Для доказательства обратного неравенства обозначим для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$a_\alpha(\delta) = \|(D^\alpha u) g_\delta\|_{L_2}, \quad b_\alpha(\delta) = \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2}.$$

Так как по формуле Лейбница

$$a_\alpha(\delta) = \|D^\alpha (u g_\delta) - \sum_{\beta \in \Pi(\alpha)} C_\alpha^\beta (D^\beta u) (D^{\alpha-\beta} g_\delta)\|_{L_2},$$

то по свойству 2) функции g_δ отсюда имеем для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$a_\alpha(\delta) \leq b_\alpha(\delta) + \kappa_\alpha \sum_{\beta \in \Pi(\alpha)} a_\beta(\delta) \delta^{|\alpha| - |\beta|},$$

где

$$\kappa(\alpha) = \max_{\beta \in \Pi(\alpha)} \{C_\alpha^\beta \zeta_\alpha\}, \quad \kappa = \max_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{\kappa(\alpha)\}.$$

Поэтому при любых $\gamma \in \mathfrak{R}$ и $\alpha \in \Pi'(\gamma)$ выполняется неравенство (2.1). Тогда по лемме 1 справедливо неравенство (2.2) и следовательно для любого $\gamma \in \mathfrak{R}$ имеем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\gamma, \delta) > 0$

$$(2.4) \quad \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} \| (D^\alpha u) g_\delta \|_{L_2} \leq C_2 \sum_{\alpha \in \Pi'(\gamma)} \| D^\alpha (u g_\delta) \|_{L_2}.$$

Из правильности многогранника $\mathfrak{R}$ следует, что

$$\bigcup_{\gamma \in \mathfrak{R}} \Pi'(\gamma) = \mathfrak{R},$$

поэтому из оценок (2.3) - (2.4) следует эквивалентность норм $\| \cdot \|''$ и $\| \cdot \|'$ и, следовательно, эквивалентность всех трех норм. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник и $\delta > 0$. Тогда множество H_δ^∞ плотно в $H_{\mathfrak{R}, \delta}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in S_1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \cdot \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Для $u \in H_{\mathfrak{R}, \delta}$ обозначим $u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x) = \int u(x-y) \varphi_\varepsilon(y) dy$.

Тогда в силу свойства 4) функции g_δ и неравенства Юнга имеем для любого $m \in N$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \leq m} \int \left[\left| \int u(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy \right| \right]^2 g_\delta^2(x) dx = \\ & \sum_{\alpha \leq m} \int \left[\left| \int u(x-y) g_\delta(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int u(x-y) [g_\delta(x-y) - g_\delta(x)] D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) dy \right| \right]^2 dx \leq 2 \left\{ \sum_{\alpha \leq m} \| (u g_\delta) * D^\alpha \varphi_\varepsilon \|_{L_2}^2 + \right. \\ & \left. + \sigma_2^2 \sum_{\alpha \leq m} \int \left[\int |u(x-y) g_\delta(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y)| dy \right]^2 dx \right\} \leq \\ & \leq 2(1 + \sigma_2^2) \sum_{\alpha \leq m} \| u g_\delta \|_{L_2}^2 \| D^\alpha \varphi_\varepsilon \|_{L_1}^2 = (1 + \sigma_2^2) \sum_{\alpha \leq m} \varepsilon^{-2|\alpha|} \| (D^\alpha \varphi)_\varepsilon \|_{L_1}^2 \| u g_\delta \|_{L_2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Так как число $m \in N$ произвольно, то отсюда следует, что $u_\varepsilon \in H_\delta^\infty$ при $\varepsilon > 0$.

Остается показать, что $\|u_\varepsilon - u\|_{\mathfrak{R}, \delta} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

В силу леммы 1 имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{H_{\mathfrak{R}, \delta}} & \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| D^\alpha (u_\varepsilon - u) \|_{L_{2, \delta}} = C_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \| [(D^\alpha u)_\varepsilon - (D^\alpha u)] g_\delta \|_{L_2} \leq \\ (2.5) \quad & \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} [\| ((D^\alpha u) g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon g_\delta \|_{L_2} + \| ((D^\alpha u) g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u) g_\delta \|_{L_2}]. \end{aligned}$$

Так как $(D^\alpha u)g_\delta \in L_2$ при $u \in H_{\mathfrak{R},\delta}$ и $\alpha \in \mathfrak{R}$, то в силу непрерывности в целом функций из L_2 (см., например [10]) имеем при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$(2.6) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2} \rightarrow 0.$$

Покажем, что при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$(2.7) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon g_\delta\|_{L_2} \rightarrow 0.$$

Так как $\sigma_2(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то применяя неравенство Юнга, из свойства 4) функции g имеем при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|((D^\alpha u)g_\delta)_\varepsilon - (D^\alpha u)_\varepsilon \cdot g_\delta\|_{L_2} = \\ & \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\| \int (D^\alpha u)(x-y)[g_\delta(x-y) - g_\delta(x)]\varphi_\varepsilon(y)dy \right\|_{L_2} \leq \\ & \leq \sigma_2(\delta, \varepsilon) \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\| \int |(D^\alpha u)(x-y)|g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \right\|_{L_2} \leq \\ & \leq \sigma_2(\delta, \varepsilon) \cdot \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|(D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Из (2.5) - (2.7) следует, что $\|u_\varepsilon - u\|_{\mathfrak{R},\delta} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $\delta > 0$, $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник и $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда H_δ^∞ плотно в $H_\delta^{P,\infty}$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3, если заметить (см., например, [10], 6.3), что

$$P(D)u_\varepsilon(x) = (P(D)u)_\varepsilon(x); x \in E^n, u \in H_{\mathfrak{R},\delta}^P.$$

Далее для многочлена $P(\xi)$ через $d_P(\xi)$ обозначим расстояние точки $\xi \in R^n$ от поверхности $\wedge(P) = \{\varsigma; \varsigma \in C^n, P(\varsigma) = 0\}$.

Известно (см. [6], лемма 11.1.4), что для любого многочлена P от n переменных существует число $C = C(\text{ord}P, n) > 0$ такое, что

$$(2.8) \quad C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{|\alpha|>0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C, \quad \forall \xi \in R^n, P(\xi) \neq 0.$$

Из (2.8) непосредственно следует, что если $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, то оператор почти гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho_P \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0.$$

Из (2.8) также следует существование чисел $\rho_0 < \rho_P$ и $C = C(\rho_0) > 0$ таких, что для почти гипоеллиптического оператора $P(D)$ и для всех $\rho \leq \rho_0$ имеем

$$(2.9) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in R^n.$$

Лемма 4. Пусть $P(D)$ – регулярный почти гипоеллиптический оператор с правильным многогранником Ньютона $\mathbb{R}$. Тогда существует число $\Delta = \Delta(P) > 0$ такое, что при $\delta \in (0, \Delta)$

$$H_\delta^P \equiv \{u \in L_{2,\delta}, P(D)u \in L_{2,\delta}\} = H_{\mathbb{R},\delta}.$$

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 достаточно доказать существование чисел $\Delta > 0$ и $C > 0$ таких, что при $\delta \in (0, \Delta)$ и $u \in H_\delta^\infty = H_{\mathbb{R},\delta}^\infty$

$$(2.10) \quad C^{-1} \|u\|_{H_{\mathbb{R},\delta}} \leq \|u\|_{L_{2,\delta}} + \|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} \leq C \|u\|_{H_{\mathbb{R},\delta}}.$$

Так как правая часть неравенства (2.10) очевидна, то в доказательстве нуждается только левая часть.

В силу формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(g) > 0$ при $\rho \in (0, \rho_0)$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} \|(P^{(\alpha)}(D)u)g_\delta\|_{L_2} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \\ & + C_1 \sum_{0 \neq \gamma \in \mathbb{R}} \rho^{|\gamma|} \|(P^{(\gamma)}(D)u)g_\delta\|_{L_2} \sum_{0 \neq \beta \leq \gamma} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{|\beta|}. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое правой части (2.11). В силу равенства Парсеваля, формулы Лейбница и свойства 2) функции g_δ из (2.9) с некоторыми постоянными $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} \|F[P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)]\|_{L_2} = \\ & = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \rho^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)\|_{L_2} \leq C_2[\|P(\xi)F(ug_\delta)\|_{L_2} + \|F(ug_\delta)\|_{L_2}] = \\ & = C_2[\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}] \leq C_2[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}] + \\ & + C_2 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{\alpha!} \|(P^{(\alpha)}(D)u)D^\alpha g_\delta\|_{L_2} \leq C_2[\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}] + \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad + C_3 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}},$$

где $F(v)$ – преобразование Фурье функции v .

Из (2.11), (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \rho^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \rho^{|\alpha|} \cdot \|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} \leq \\ & \leq C_2 [\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}] + C_3 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!} \|[P^{(\alpha)}(D)u]g_\delta\|_{L_2} + \\ & + C_1 \sum_{0 \neq \gamma \in \mathfrak{R}} \rho^{|\gamma|} \|(P^{(\gamma)}(D)u)g_\delta\|_{L_2} \sum_{0 \neq \beta \leq \gamma} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{|\beta|}. \end{aligned}$$

Переносим соответствующие слагаемые справа на лево, получаем

$$\begin{aligned} & \|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \rho^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}} [1 - C_3 \frac{(\delta/\rho)^{|\alpha|}}{\alpha!} - \\ (2.13) \quad & - C_1 \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \frac{(\delta/\rho)^{|\beta|}}{\beta!}] \leq C_2 [\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}]. \end{aligned}$$

Пусть $\rho_0 = \frac{1}{2}\rho_P$. Выберем число $\Delta > 0$ так, что

$$(2.14) \quad A_\alpha \equiv 1 - C_3 \frac{(\delta/\rho)^{|\alpha|}}{\alpha!} - C_1 \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \frac{(\delta/\rho)^{|\beta|}}{\beta!} \geq \frac{1}{2}$$

при всех $0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}$ и $\delta \in (0, \Delta)$. Тогда из (2.13) следует, что при $u \in H_\delta^\infty$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \frac{1}{2} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \rho_0^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{R}} \rho_0^{|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}} A_\alpha \leq \\ & \leq C_2 [\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}] \quad \forall \delta \in (0, \Delta). \end{aligned}$$

Отсюда при всех $\delta \in (0, \Delta)$ и $u \in H_\delta^\infty$ имеем

$$(2.15) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \rho_0^{|\alpha|} \|(P^{(\alpha)}(D)u)g_\delta\|_{L_2} \leq 2C_2 [\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}].$$

С другой стороны, так как многочлен $P(\xi)$ регулярен и многогранник $\mathfrak{R}$ правильный, то (см. [2])

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \leq C_4 [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in R^n$$

с некоторой постоянной $C_4 > 0$. Поэтому при $\xi \in R^n$

$$(2.16) \quad \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} |\xi^\alpha F(ug_\delta)(\xi)| \leq C_4 [|P(\xi) F(ug_\delta)(\xi)| + |F(ug_\delta)(\xi)|].$$

Применяя равенство Парсеваля и формулу Лейбница, в силу свойства 2) функции g_δ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ и для всех $u \in H_\delta^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}}'' &\equiv \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \|D^\alpha(ug_\delta)\|_{L_2} \leq C_4 [\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}] \leq \\ &\leq C_5 \left[\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} \frac{\delta^{|\alpha|}}{\alpha!} \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_2} \right]. \end{aligned}$$

Так как, очевидно, $\Delta \leq \rho$, то отсюда и из оценки (2.15) получим

$$\|u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}}'' \leq C_5 \{2C_2[\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_2}] + \|u\|_{L_2}\} \quad \delta \in (0, \Delta), \quad u \in H_\delta^\infty.$$

Так как по лемме 2 нормы $\|\cdot\|''$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны, то это доказывает левую часть (2.10). Лемма доказана. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $P(D)$ – регулярный почти гипозеллиптический оператор с (правильным) многогранником Ньютона $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$, а число $\Delta = \Delta(P)$ удовлетворяет условию (2.14). Тогда

$$H_{(k-1)\mathfrak{R},\delta}^P = H_{k\cdot\mathfrak{R},\delta}.$$

Доказательство. Применяя леммы 2 и 3 получим, что утверждение теоремы эквивалентно тому, что для любых $k \in N$ и $\delta \in (0, \Delta)$ существует число $C = C(k, \Delta) > 0$ такое, что

$$(3.1) \quad C^{-1} \cdot \|u\|_{H_{k\cdot\mathfrak{R},\delta}}' \leq \|u\|_{H_{(k-1)\mathfrak{R},\delta}^P}' \leq C \|u\|_{H_{k\cdot\mathfrak{R},\delta}}' \quad u \in H_\delta^\infty.$$

Очевидно, в доказательстве нуждается лишь левая часть (3.1), которое будем вести индукцией по $k \in N$. При $k = 1$ левая часть (3.1) непосредственно следует из леммы 4. Предположим, что неравенства (3.1) доказаны для всех $k \leq r \in \mathfrak{R}$ и докажем их для $k = r + 1$.

Так как $(k+1)\mathfrak{R} = \{\gamma \in N_0^n; \gamma = \alpha + \beta, \alpha \in k\mathfrak{R}, \beta \in \mathfrak{R}\}$, то по предположению индукции и в силу леммы 4 имеем с некоторой постоянной $C_1 > 0$ (см. неравенство (2.10))

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{(r+1)\cdot\mathfrak{R},\delta}}' &= \sum_{\gamma \in (r+1)\mathfrak{R}} \|(D^\gamma u)g_\delta\|_{L_2} \leq \sum_{\alpha \in r\mathfrak{R}} \sum_{\beta \in \mathfrak{R}} \|(D^\beta [D^\alpha u])g_\delta\|_{L_2} = \\ &= \sum_{\alpha \in r\mathfrak{R}} \|D^\alpha u\|_{H_{\mathfrak{R},\delta}} \leq C_1 \left\{ \sum_{\alpha \in r\mathfrak{R}} \|(D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2} + \|(P(D)(D^\alpha u)g_\delta)\|_{L_2} \right\} \leq \\ &\leq C_1 [\|u\|_{H_{r\mathfrak{R},\delta}^P}' + \|u\|_{H_{r\cdot\mathfrak{R},\delta}}'] \leq \sum_{j=1}^{r+1} C_1^j \|u\|_{H_{(r+1-j)\mathfrak{R},\delta}^P}' \leq \left(\sum_{j=1}^{r+1} C_1^j \right) \|u\|_{H_{r\mathfrak{R},\delta}^P}'. \end{aligned}$$

Этим левая часть неравенства (3.1) и тем самым теорема 1 доказаны. $\square$

Следствие 2. Пусть $P(D)$ – регулярный почти гипозеллиптический оператор и $f \in H_\delta^\infty$. Тогда существует число $\Delta = \Delta(P) > 0$ такое, что при $\delta \in (0, \Delta)$ $N_\delta(P, f) \subset H_\delta^\infty$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1, так как для некоторого числа $\Delta_0(P) \leq \Delta(P)$ справедливо вложение

$$N_\delta(P, f) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{k \cdot \mathfrak{R}, \delta}^P,$$

где число $\Delta(P)$ определяется соотношением (2.14), а $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ – правильный многогранник Ньютона оператора $P(D)$.

Теорема 2. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с полным многогранником $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$. Если $H_{k \cdot \mathfrak{R}, \delta}^P \subset H_{(k+1) \cdot \mathfrak{R}, \delta_0}$ для некоторых $k \in N_0$ и $\delta_0 > 0$, то многогранник $\mathfrak{R}$ – правильный, а $P(D)$ – регулярный, почти гипозеллиптический оператор.

Доказательство. Сначала покажем регулярность оператора $P(D)$. В силу теоремы о замкнутом графике (или в силу теоремы Банаха) (см., например, [11]) из условия теоремы следует существование постоянной $C > 0$ такой, что

$$(3.2) \quad \|u\|'_{H_{(k+1) \cdot \mathfrak{R}, \delta_0}} \leq C \|u\|'_{H_{k \cdot \mathfrak{R}, \delta_0}} \quad \forall u \in H_{k \cdot \mathfrak{R}, \delta_0}^P.$$

С другой стороны, так как $u_\xi(x) \equiv e^{i\langle x, \xi \rangle} \in H_{k \cdot \mathfrak{R}, \delta}^P$ для произвольной точки $\xi \in R^n$ и для произвольного числа $\delta > 0$, то отсюда имеем

$$\sum_{\alpha \in (k+1) \cdot \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \|u_\xi\|_{L_{2, \delta_0}} \leq C [\|u_\xi\|_{L_{2, \delta_0}} + \sum_{\beta \in k \cdot \mathfrak{R}} |\xi^\beta P(\xi)| \|u_\xi\|_{L_{2, \delta_0}}], \quad \forall \xi \in R^n.$$

Или, что то же самое,

$$\sum_{\alpha \in (k+1) \cdot \mathfrak{R}} |\xi^\alpha| \leq C \left[\sum_{\beta \in k \cdot \mathfrak{R}} |\xi^\beta P(\xi)| + 1 \right], \quad \forall \xi \in R^n.$$

Отсюда непосредственно следует регулярность оператора $P(D)$.

Докажем почти гипозеллиптичность оператора $P(D)$. Предположим обратное, что при условиях теоремы, оператор $P(D)$ не является почти гипозеллиптическим. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что

$$t_s := |\xi^s| \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad d_P(\xi^s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Для $s \in N$ обозначим через $z^s \in \Lambda(P)$ точку, реализующую минимум в определении функции $d_P(\xi^s)$, т.е. $d_P(\xi^s) = |\xi^s - z^s|$. Так как $d_P(\xi^s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то $|Imz^s| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $|Imz^s| \leq \delta_0/2$ ($s = 1, 2, \dots$).

Очевидно, $v_s(x) := e^{i\langle x, z^s \rangle} \in H_{k, \mathfrak{R}, \delta_0}^P$ ($s = 1, 2, \dots$), поэтому из (3.2) имеем для всех $s \in N$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in (k+1)\mathfrak{R}} |(z^s)^\alpha| \|v_s\|'_{L_{2, \delta_0}} &\leq C [\|v_s\|'_{L_{2, \delta_0}} + \\ + \sum_{\alpha \in k\mathfrak{R}} |(z^s)^\alpha| |P(z^s)| \|v_s\|'_{L_{2, \delta_0}}] &= C \|v_s\|'_{L_{2, \delta_0}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{\alpha \in (k+1)\mathfrak{R}} |(z^s)^\alpha| \leq C \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Так как $\mathfrak{R}$ – полный многогранник, то $\mathfrak{R}$ имеет вершины на каждой координатной оси N_0^n , отличные от начала координат. Поэтому $|z^s| \leq C$ ($s = 1, 2, \dots$). Отсюда и из определения точек z^s имеем

$$|\xi^s| \leq |\xi^s - z^s| + |z^s| \leq d_P(\xi^s) + C \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Так как по предположению $d_P(\xi^s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то это противоречит тому, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Полученное противоречие доказывает почти гипоэллиптичность оператора $P(D)$. Так как многогранник Ньютона почти гипоэллиптического оператора является правильным многогранником (см. [5]), то этим теорема доказана. $\square$

Abstract. It is proved that if $P(D)$ is a regular, almost hyperelliptic operator and

$$L_{2, \delta} = \{u; \|u\|_{2, \delta} = \left[\int (|u(x)| \cdot e^{-\delta|x|})^2 dx \right]^{1/2} < \infty\}, \quad \delta > 0$$

and H_δ^∞ is the $e^{-\delta|x|}$ -weighted Sobolev space, then there exists a number $\delta_0 > 0$ such that all solutions $u \in L_{2, \delta}$ of differential equation $P(D)u = f$ belong to H_δ^∞ for any $f \in H_\delta^\infty$ with some $\delta \leq \delta_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Никольский, “Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения”, ДАН СССР, **146**, (4), 767 – 769 (1968).
- [2] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **150**, 143 – 159 (1965).
- [3] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
- [4] Г. Г. Казарян, “Об оценках норм производных через нерегулярный набор операторов”, Дифф. уравнения, **5**, (5), 911 – 921 (1967).

- [5] G. G. Kazaryan, "On Almost - Hypoelliptic Polynomials", *Doklady Ross. Acad. Nauk*, **398**, (6), 701 – 703 (2004).
- [6] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 2*, Springer - Verlag (1983).
- [7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипозэллиптических операторов", *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **41**, (6), 39 – 56 (2006).
- [8] Г. Г. Казарян, "Некоторые оценки производных многочленов с постоянными коэффициентами", *Изв. НАН Армении, серия Математика*, **34**, (3), 44 – 63 (1999).
- [9] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипозэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", *Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара*, Ереван, 63 – 67 (1982).
- [10] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения*, Москва, Наука (1996).
- [11] К. Иосида, *Функциональный Анализ*, Москва, Мир (1967).
- [12] V. I. Burenkov, "Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p -spaces with an exponential weight", *Proc. of summerschool "Function spaces, differential operators, nonlinear analysis"* held in Fridrichroda in 1993, Stuttgart - Leipzig, Teubner - Texte zur Mathematik, **133**, 256 – 265 (1993).

Поступила 19 февраля 2009

**NEW STABILITY AND BOUNDEDNESS RESULTS OF LIÉNARD
TYPE EQUATIONS WITH MULTIPLE DEVIATING ARGUMENTS**

CEMIL TUNC

Yuzuncu Yil University, Van-Turkey

E-mail: *cemtunc@yahoo.com*

Abstract. The paper considers a Liénard type equation with multiple variable deviating arguments. Some sufficient conditions, under which the solution of this equation is asymptotically stable and bounded by means of Lyapunov functional approach, are found. An example showing the effectiveness of the result is given.

MSC2010 number: 34K20

Keywords: Liénard type equation, stability, boundedness, multiple deviating arguments.

1. INTRODUCTION

It is well known that some practical problems concerning physics, mechanics and the engineering technique fields can be associated with Liénard equation and Liénard system (see, in particular, Ahmad and Rama Mohana Rao [1], Éł'sgol'ts and Norkin [3], Hale [5], Kolmanovskii and Myshkis [7], Krasovskii [8], Yoshizawa [20] and the references thereof). Hence, the qualitative behaviors of solutions, stability of solutions, boundedness of solutions, convergence of solutions, existence of periodic solutions, oscillation of solutions and etc. of Liénard equation and Liénard system and their applications are being intensively investigated by numerous authors. In ordinary case for some results on the subject the reader can refer to the book of Éł'sgol'ts [2] and the papers of Hale [4], Heidel [6], Liu and Huang [9], Liu et al. [10], Luk [11], Malyseva [13], Sugie and Amano [15], Tunc [16], C. Tunc and E. Tunc [17], Utz [18], Zhang [21], Zhao [22] and the references cited in these sources.

However, to the best of our knowledge, in the recent literature there are no published papers on the stability and boundedness of solutions of Liénard type equations with multiple variable deviating arguments, except that of Yu and Zhao [19]. Thus, it is worthwhile to continue investigating these equations.

In 2009, Yu and Zhao [19] considered the following Liénard type equation with multiple deviating arguments

$$(1.1) \quad x''(t) + f_1(x(t)) (x'(t))^2 + f_2(x(t)) x'(t) + g_0(x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(x(t - \tau_j(t))) = p(t),$$

where f_1, f_2, g_0 and g_j are continuous functions on $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, the delays $\tau_j(t) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) are bounded and continuous, and $p(t)$ is a bounded continuous function on $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Define

$$a(x) = \exp \left(\int_0^x f_1(u) du \right), \quad \varphi(x) = \int_0^x a(u) [f_2(u) - a(u)] du$$

and

$$y = a(x) \frac{dx}{dt} + \varphi(x).$$

Then (1.1) can be transformed to the following system:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{a(x(t))} [-\varphi(x(t)) + y(t)], \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -a(x(t)) \{-y(t) - [g_0(x(t)) - \varphi(x(t))] - \sum_{j=1}^m g_j(x(t - \tau_j(t))) + p(t)\}. \end{aligned}$$

By means of the above acceptations, Yu and Zhao [19] proved the following theorem:

Theorem A. (Yu and Zhao [19]). Assume that the following conditions hold:

(C₁) There exists a constant $\underline{d} > 1$ such that $\underline{d}|u| \leq \text{sign}(u) \varphi(u)$ for all $u \in \mathbb{R}$.

(C₁) For $j = 0, 1, 2, \dots, m$ there exist non-negative constants h, L_j and q_j such that

$$h = \max_{1 \leq j \leq m} \{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \tau_j(t) \} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m L_j < 1,$$

$$|g_0(u) - \varphi(u)| = |g_0(u) - \int_0^u a(s) [f_2(s) - a(s)] ds| \leq L_0|u| + q_0, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$|g_i(u)| \leq L_i|u| + q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad u \in \mathbb{R}.$$

(C₃) $p(t)$ is bounded.

Then the solutions of (1.1) are uniformly bounded.

In this work we use the following notations. $\mathbb{R}^n$ stands for the space of n -vectors. For a given number $r \geq 0$, C^n denotes the space of continuous functions mapping the interval $[-r, 0]$ into $\mathbb{R}^n$ and for $\phi \in C^n$, $\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|$. C_H^n denotes the set of ϕ in C^n for which $\|\phi\| < H$. For any continuous function $x(u)$ defined on

$-r \leq u \leq A$, $A > 0$, any fixed t , $0 \leq t \leq A$, we denote by x_t the function $x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

If $G(\phi)$ is a functional defined for $\phi \in C_H^n$ and $\dot{x}(t)$ is the right side derivative of $x(t)$, we consider the following autonomous functional differential equation

$$(1.3) \quad \dot{x}(t) = G(x_t), \quad t \geq 0.$$

We say $x(\phi)$ is a solution of (1.3) with the initial condition ϕ at $t = 0$ if there is a number $A > 0$ such that $x(\phi)$ is a mapping of $[-r, A)$ into $\mathbb{R}^n$ such that $x_t(\phi)$ is in C_H^n for $0 \leq t < A$, $x_0(\phi) = \phi$ and $x(\phi)(t)$ satisfies (1.3) for $0 \leq t < A$.

Definition 1. (see [14]). Let V be a continuous scalar functional in C_H^n . The derivative of V along the solutions of (1.3) is defined by the relation

$$\dot{V}_{(1.3)}(\phi) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x_h(\phi)) - V(\phi)}{h}.$$

Lemma A. (see [14]) Let $G(0) = 0$. Let V be a continuous functional defined on C_H^n , such that $V(0) = 0$, and let $u(s) \geq 0$ be a continuous function in $0 \leq s < \infty$, such that $u(0) = 0$ and $u(s) \rightarrow \infty$ as $s \rightarrow \infty$. If $u(\|\phi(0)\|) \leq V(\phi)$ and $\dot{V}_{(1.3)}(\phi) \leq 0$ for any ϕ in C_H^n , then the solution $x(t) = 0$ of (1.3) is stable.

Let $\mathbb{R} \subset C_H^n$ be a set of all functions $\phi \in C_H^n$, with $\dot{V}_{(1.3)}(\phi) = 0$. If $\{0\}$ is the largest invariant set in $\mathbb{R}$, then the solution $x(t) = 0$ of (1.3) is asymptotically stable.

In this article, we consider the following Liénard type equation with multiple variable deviating argument, $\tau_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, m$)

$$(1.4) \quad x''(t) + f_1(x(t), x'(t))x'(t) + f_2(x(t))x'(t) + g_0(x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(x(t - \tau_j(t))) = p(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), x'(t), x'(t - \tau_1(t)), \dots, x'(t - \tau_m(t))),$$

where $\tau_j(t)$ are bounded variable delays; $0 \leq \tau_j(t) \leq \gamma_j$, $\tau'(t) \leq \beta_j$, $0 < \beta_j < 1$, γ_j and β_j are some positive constants and γ_j is to be chosen later, and $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$. The primes in (1.4) denote differentiation by $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, besides, f_1 , f_2 , g_0 , g_j ($j = 1, 2, \dots, m$) and p are continuous functions in their arguments on $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2m+2}$ respectively with $g_0(0) = g_j(0) = 0$, ($j = 1, 2, \dots, m$). The continuity of these functions implies the existence of the solution of (1.4) (seer[2], p.14). One more basic assumption is that the functions f_1 , f_2 , g_0 , g_j ($j = 1, 2, \dots, m$) and p satisfy a Lipschitz condition in $x(t)$, $x(t - \tau_1(t))$,

$x(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), x'(t), x'(t - \tau_1(t)), x'(t - \tau_2(t)), \dots, x'(t - \tau_m(t))$. In this way, the uniqueness of solutions of (1.4) is guaranteed (see [2], p.15). The derivatives

$$\frac{dg_1}{dx} \equiv g'_1(x), \quad \frac{dg_2}{dx} \equiv g'_2(x), \dots, \quad \frac{dg_m}{dx} \equiv g'_m(x)$$

exist and are continuous, and throughout this paper $x(t)$ and $y(t)$ are abbreviated as x and y , respectively.

The equation (1.4) can be written in the following form

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -f_1(x, y)y - f_2(x)y - g_0(x) - g_1(x) - g_2(x) \\ &\quad - \dots - g_m(x) + \int_{t-\tau_1(t)}^t g'_1(x(s))y(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t g'_2(x(s))y(s)ds \\ &\quad + \dots + \int_{t-\tau_m(t)}^t g'_m(x(s))y(s)ds \\ &\quad + p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))). \end{aligned}$$

A primary purpose of this paper is to study the problems of stability and boundedness of the solutions of (1.4). Motivated by Yu and Zhao [19], we first establish some sufficient conditions for the asymptotic stability of the null solution of (1.4), when

$$p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) = 0$$

Then some sufficient conditions ensuring the boundedness of all solutions of (1.4), when

$$p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) \neq 0$$

are substantiated.

In view of the above information, it is clear that the equation (1.1) discussed by Yu and Zhao [19], is a special case of our equation (1.4). That is, the equation (1.4), includes (1.1) discussed by Yu and Zhao [19]. It is also worth to mention that Yu and Zhao [19] discussed only the boundedness of solutions of (1.1). In addition to the boundedness of solutions, we also study the stability of the solutions in mentioned above the first case. Our results also will be different from those known in literature and the mentioned above (see [1]–[11], [13], [15]–[22] and the references thereof). Finally, an example is given to illustrate the theoretical analysis of this work.

2. DESCRIPTION OF PROBLEMS

Let

$$p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) = 0.$$

The first main result is the following theorem.

Theorem 1. *In addition to the basic assumptions imposed to the functions f_1 , f_2 , g_0 and g_j ($j = 1, 2, \dots, m$) in (1.4), assume that there exist positive constants a_1 , b_1 , α_0 , α_1 , $\dots$, α_m and L_1 , L_2 , $\dots$, L_m such that the following conditions hold:*

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\geq a_1, & f_2(x) &\geq b_1, \\ \frac{g_0(x)}{x} &\geq \alpha_0, & \frac{g_1(x)}{x} &\geq \alpha_1, \dots, \frac{g_m(x)}{x} \geq \alpha_m \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

and

$$|g'_1(x)| \leq L_1, \quad |g'_2(x)| \leq L_2, \dots, |g'_m(x)| \leq L_m.$$

Then, the null solution of (1.4) is asymptotically stable, provided that

$$(2.1) \quad \gamma < \frac{a_1 + b_1}{M},$$

where the constant M is defined as

$$(2.2) \quad M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{L_j}{1 - \beta_j} + 2L_j \right).$$

Proof. Consider the Lyapunov functional defined by

$$(2.3) \quad V(x_t, y_t) = \sum_{j=0}^m \int_0^x g_j(s) ds + \frac{1}{2}y^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\tau_j(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds,$$

where positive scalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ are to be chosen later.

In view of (2.3), using the assumption $\frac{g_j(x)}{x} \geq \alpha_j$, ($j = 1, 2, \dots, m$), we get

$$\begin{aligned} V(x_t, y_t) &= \frac{1}{2}y^2 + \sum_{j=0}^m \int_0^x \frac{g_j(s)}{s} s ds + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\tau_j(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \alpha_j x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\tau_j(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds. \end{aligned}$$

Hence, with $D_1 = \frac{1}{2} \min\{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m, 1\}$, we have

$$(2.4) \quad V(x_t, y_t) \geq D_1(x^2 + y^2) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\tau_j(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \geq D_1(x^2 + y^2)$$

since the integrals

$$\lambda_j \int_{-\tau_j(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

are non-negative. Consequently, there exists a continuous function $u(s) \geq 0$ with $u(\|\phi(0)\|) \geq 0$ such that $u(\|\phi(0)\|) \leq V(\phi)$. Hence the conditions of the first statement of Lemma A are fulfilled.

Further, the derivative of $V(x_t, y_t)$ along with the solutions of (1.5) is given by

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_t, y_t) = & -f_1(x, y)y^2 - f_2(x)y^2 + y \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j(t)}^t g'_j(x(s))y(s) ds + \\ & + \sum_{j=1}^m \lambda_j \tau_j(t) y^2 - \sum_{j=1}^m \lambda_j \{1 - \tau'_j(t)\} \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds. \end{aligned}$$

Using the assumptions of Theorem 1 and applying the estimate $2|uv| \leq u^2 + v^2$, one can easily get the following inequalities for all terms of the expression (2.5):

$$\begin{aligned} -f_1(x, y)y^2 &\leq -a_1 y^2, \quad -f_2(x, y)y^2 \leq -b_1 y^2, \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \tau_j(t) y^2 \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \gamma_j y^2, \\ y \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j(t)}^t g'_j(x(s))y(s) ds &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L_j \tau_j(t) y^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L_j \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L_j \gamma_j y^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L_j \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds, \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \left\{ \lambda_j (1 - \tau'_j(t)) \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds \right\} \\ &\leq - \sum_{j=1}^m \left\{ \lambda_j (1 - \beta_j) \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Substituting the preceding inequalities into (2.5) gives

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \leq & - \left\{ (a_1 + b_1) - \sum_{j=1}^m (\lambda_j + \frac{1}{2} L_j) \gamma_j \right\} y^2 - \\ & - \sum_{j=1}^m \left\{ \lambda_j (1 - \beta_j) - \frac{1}{2} L_j \right\} \int_{t-\tau_j(t)}^t y^2(s) ds. \end{aligned}$$

Now choose the positive scalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ as follows:

$$\lambda_1 = \frac{L_1}{2(1 - \beta_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{L_2}{2(1 - \beta_2)}, \dots, \lambda_m = \frac{L_m}{2(1 - \beta_m)}.$$

Then, the above inequality implies

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \leq -\{(a_1 + b_1) - M\gamma\} y^2,$$

where M is defined by (2.2) and $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$. Thus, in virtue of (2.6), we obtain that for some positive constant α

$$\frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \leq -\alpha y^2,$$

provides (2.1) is true.

Hence, $\frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \leq 0$. Besides, using system (1.5), we can easily prove that $\frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \equiv 0$ if and only if $x = y = 0$. Therefore, the conditions of Lemma A are fulfilled. Thus the null solution of (1.4) is asymptotically stable.

This completes the proof of Theorem 1. $\square$

Let

$$p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) \neq 0.$$

The second main result is the following theorem.

Theorem 2. *In addition to all assumptions of Theorem 1, assume that*

$$|p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t)))| \leq q(t),$$

where $q \in L^1(0, \infty)$. Then, every solution of (1.4) along with its derivative, is bounded, provided (2.1) is true, where the constant M is defined by (2.2).

Proof. We apply the Lyapunov functional $V(x_t, y_t)$ defined by (2.3). For the case

$$p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) \neq 0,$$

subject to our assumptions, we can revise the result of Theorem 1 as the follows:

$$\frac{d}{dt} V(x_t, y_t) \leq \alpha y^2 + y p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))).$$

Now, using our assumptions and the inequalities $|y| < 1 + y^2$ and $y^2 \leq D_1^{-1} V(x_t, y_t)$, we get

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_t, y_t) &\leq |y| |p(t, x, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t)), y, y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t)))| \leq \\ &\leq (1 + y^2) q(t) \leq \{1 + D_1^{-1} V(x_t, y_t)\} q(t) = q(t) + D_1^{-1} V(x_t, y_t) q(t). \end{aligned}$$

Integrating both sides of (2.7) from 0 to t , by the inclusion $q \in L^1(0, \infty)$ and the Gronwall-Reid-Bellman inequality (see Ahmad and Rama Mohana Rao [1]), we get

$$V(x_t, y_t) \leq V(x_0, y_0) + A + D_1^{-1} \int_0^t V(x_s, y_s) q(s) ds \leq$$

$$(2.8) \quad \leq (V(x_0, y_0) + A) \exp(D_1^{-1}A) = K_1 < \infty,$$

where $A = \int_0^\infty q(s) ds$ and K_1 is a positive constant.

From (2.8) and (2.4) follows the boundedness of all solutions of (1.4). Namely, it follows from (2.4) and (2.8) that

$$x^2(t) + y^2(t) \leq D_1^{-1}V(x_t, y_t) \leq K,$$

where $K = D_1^{-1}K_1$. This inequality implies that

$$|x(t)| \leq \sqrt{K}, \quad |y(t)| \leq \sqrt{K}$$

for all $t \geq t_0 \geq 0$. It is known that (1.4) is equivalent to the system (1.5). Hence,

$$|x(t)| \leq \sqrt{K}, \quad |x'(t)| \leq \sqrt{K}$$

for all $t \geq t_0 \geq 0$. This result completes the proof of Theorem 2. $\square$

Example. As a special case of (1.4), we consider the following nonlinear, second order differential equation with two deviating arguments

$$(2.9) \quad x'' + \{3x^2 + 3(x')^2 + 7\}x' + (4 + \sin^2 x)x' + x^3 + 2x + 2x(t - \tau_1(t)) + 2x(t - \tau_2(t)) =$$

$$= \frac{1}{1 + t^2 + x^2 + x^2(t - \tau_1(t)) + x^2(t - \tau_2(t)) + x'^2 + x'^2(t - \tau_1(t)) + x'^2(t - \tau_2(t))}.$$

(2.9) can be stated as the system

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(3x^2 + 3y^2 + 7)y - (4 + \sin^2 x)y - x^3 - 6x + 2 \int_{t-\tau_1(t)}^t y(s)ds + 2 \int_{t-\tau_2(t)}^t y(s)ds + \\ &\quad + \frac{1}{1 + t^2 + x^2 + x^2(t - \tau_1(t)) + x^2(t - \tau_2(t)) + y^2 + y^2(t - \tau_1(t)) + y^2(t - \tau_2(t))}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 + 7 \geq 7 = a_1, \quad f_2(x) = 4 + \sin^2 x \geq 4 = b_1, \\ g_0(x) &= x^3 + 2x, \quad g_0(0) = 0, \quad g_1(x) = 2x, \quad g_1(0) = 0, \\ g_2(x) &= 2x, \quad g_2(0) = 0, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = L_1 = L_2 = 2, \\ p(t, x, x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), y, y(t - \tau_1(t)), y(t - \tau_2(t))) &= \\ &= \frac{1}{1 + t^2 + x^2 + x^2(t - \tau_1(t)) + x^2(t - \tau_2(t)) + y^2 + y^2(t - \tau_1(t)) + y^2(t - \tau_2(t))} \\ &\leq \frac{1}{1 + t^2} = q(t), \\ \int_0^\infty q(s) ds &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + s^2} ds = \frac{\pi}{2} < \infty, \quad \text{that is } q \in L^1(0, \infty), \end{aligned}$$

and

$$\gamma < \frac{a_1 + b_1}{M} = \frac{11(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{2 - (\beta_1 + \beta_2) + 2(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}, \quad 0 < \beta_1 < 1, \quad 0 < \beta_2 < 1.$$

Hence, the above discussion shows that all assumptions of Theorem 1 and Theorem 2 hold in the cases $p = 0$ and $p \neq 0$ respectively. Thus, for $p = 0$ the null solution of (2.9) is asymptotically stable. Also, all solutions of the same equation are bounded, when $p \neq 0$.

Acknowledgement. The author expresses his sincere thanks to the referee for many helpful comments and suggestions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Ahmad, M. Rama Mohana Rao, Theory of ordinary differential equations. With applications in biology and engineering. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi (1999).
- [2] L. É. Él'sgol'ts, Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments, Translated from the Russian by Robert J. McLaughlin Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam (1966).
- [3] L. É. Él'sgol'ts, S. B. Norkin, Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, Translated from the Russian by John L. Casti. Mathematics in Science and Engineering, **105**, Academic Press [A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London (1973).
- [4] J. K. Hale, "Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations", J. Differential Equations, **1**, 452 – 482 (1965).
- [5] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).
- [6] J. W. Heidel, "Global asymptotic stability of a generalized Liénard equation", SIAM J. Appl. Math., **19**, 629 – 636 (1970).
- [7] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
- [8] N. N. Krasovskii, Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford, Calif.: Stanford University Press (1963).
- [9] B. Liu, L. Huang, "Boundedness of solutions for a class of Liénard equations with a deviating argument", Appl. Math. Lett., **21**, (2), 109 – 112 (2008).
- [10] Xin-Ge Liu, Mei-Lan Tang, Ralph R. Martin, "Periodic solutions for a kind of Liñard equation", J. Comput. Appl. Math., **219**, (1), 263 – 275 (2008).
- [11] W. S. Luk, "Some results concerning the boundedness of solutions of Liénard equations with delay", SIAM J. Appl. Math., **30**, (4), 768 – 774 (1976).
- [12] A. M. Lyapunov, Stability of Motion, Academic Press, London (1966).
- [13] I. A. Malyseva, "Boundedness of solutions of a Liénard differential equation", Differetial'niye Uravneniya, **15**, (8), 1420 – 1426 (1979).
- [14] A. S. C. Sinha, "On stability of solutions of some third and fourth order delay-differential equations", Information and Control, **23**, 165 – 172 (1973).
- [15] J. Sugie, Y. Amano, "Global asymptotic stability of non-autonomous systems of Liñard type", J. Math. Anal. Appl, **289**, (2), 673 – 690 (2004).
- [16] C. Tunc, "Some stability and boundedness results to nonlinear differential equations of Liñard type with finite delay", J. Comput. Anal. Appl., **11**, (4), 711 – 727 (2009).
- [17] C. Tunc, E. Tunc, "On the asymptotic behavior of solutions of certain second-order differential equations", J. Franklin Inst., Engineering and Applied Mathematics, **344**, (5), 391 – 398 (2007).
- [18] W. R. Utz, "Boundedness and periodicity of solutions of the generalized Liñard equation", Ann. Mat. Pura Appl., **42**, (4), 313 – 324 (1956).

- [19] Y. Yu, C. Zhao, "Boundedness of solutions for a Liénard equation with multiple deviating arguments", *Electron. J. Equations* **14**, 5 pp. (2009).
- [20] T. Yoshizawa, "Stability theory by Liapunov's second method", *Publications of the Mathematical Society of Japan*, **9**, The Mathematical Society of Japan, Tokyo (1966).
- [21] B. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for boundedness and oscillation in the retarded Liénard equation", *J. Math. Anal. Appl.*, **200**, (2), 453 – 473 (1996).
- [22] L. Zhao, "Boundedness and convergence for the non-Liénard type differential equation", *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **27**, (2), 338 – 346 (2007).

Поступила 29 июня 2009

**SHARP FUNCTION BOUNDEDNESS FOR VECTOR-VALUED
MULTILINEAR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH
NON-SMOOTH KERNELS**

LANZHE LIU

Changsha University of Science and Technology Changsha, China
E-mail: lanzheliu@163.com

АННОТАЦИЯ. Sharp function inequalities for several vector-valued, multilinear singular integral operators with non-smooth kernels are obtained. As an application, some weighted $L^p(p > 1)$ norm inequalities for the vector-valued multilinear operators are derived.

MSC2010 number: 42B20, 42B25

Keywords: Vector-valued multilinear operator, singular integral operator, sharp function estimate, non-smooth kernel, BMO.

1. PRELIMINARIES AND THEOREMS

As the development of the theory of singular integral operators, their commutators and multilinear operators have been well studied (see [1] - [5], [7], [12] - [15]). In [8], some singular integral operators with non-smooth kernels are introduced, whose kernels satisfy some requirements which are weaker than those for the Calderón-Zygmund singular integral operators. In [6] and [11], the boundedness of the singular integral operators with non-smooth kernels and their commutators is proved.

The main purpose of this paper is to study the vector-valued, multilinear, singular integral operators with non-smooth kernels defined as follows (see [8], [11]).

Definition 1.1. A family of operators D_t , $t > 0$ is said to be an approximation to the identity, if for every $t > 0$ the family D_t can be represented by the kernel $a_t(x, y)$ as follows:

$$D_t(f)(x) = \int_{R^n} a_t(x, y) f(y) dy$$

for every $f \in L^p(R^n)$ with $p \geq 1$, and $a_t(x, y)$ satisfies the inequality

$$|a_t(x, y)| \leq h_t(x, y) = Ct^{-n/2} s(|x - y|^2/t),$$

where s is a positive, bounded and decreasing function such for some $\epsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{n+\epsilon} s(r^2) = 0.$$

Definition 1.2. A linear operator T is called singular integral operator with non-smooth kernels, if T is bounded on $L^2(R^n)$ and is associated with some kernel $K(x, y)$ such that

$$T(f)(x) = \int_{R^n} K(x, y)f(y)dy$$

for every continuous function f with a compact support, and for almost all x , which do not belong to that support. In addition, it is required that:

(1) There exists an approximations to the identity $\{B_t, t > 0\}$ such that TB_t possesses an associated kernel $k_t(x, y)$ and there exist constants $c_1, c_2 > 0$ such that

$$\int_{|x-y|>c_1t^{1/2}} |K(x, y) - k_t(x, y)|dx \leq c_2 \quad \text{for all } y \in R^n.$$

(2) There exists an approximations to the identity $\{A_t, t > 0\}$ such that A_tT possesses an associated kernel $K_t(x, y)$ which satisfies the inequalities

$$|K_t(x, y)| \leq c_4t^{-n/2} \quad \text{if } |x - y| \leq c_3t^{1/2},$$

and

$$|K(x, y) - K_t(x, y)| \leq c_4t^{\delta/2}|x - y|^{-n-\delta} \quad \text{if } |x - y| \geq c_3t^{1/2},$$

for some constants $c_3, c_4 > 0, \delta > 0$.

Let m_j ($j = 1, \dots, l$) be positive integers $m_1 + \dots + m_l = m$ and b_j ($j = 1, \dots, l$) be functions on R^n . Set

$$R_{m_j+1}(b_j; x, y) = b_j(x) - \sum_{|\alpha| \leq m_j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha b_j(y)(x - y)^\alpha, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Given functions f_i ($i = 1, 2, \dots$) defined on R^n , for any $1 < r < \infty$ the vector-valued multilinear operator associated to T is defined by the formula

$$|T_b(f)(x)|_r = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (T_b(f_i)(x))^r \right)^{1/r},$$

where

$$T_b(f_i)(x) = \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(b_j; x, y)}{|x - y|^m} K(x, y) f_i(y) dy.$$

Set

$$|T(f)(x)|_r = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(f_i)(x)|^r \right)^{1/r} \quad \text{and} \quad |f(x)|_r = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^r \right)^{1/r}.$$

Note that $|T_b(f)|_r$ is just the vector-valued multilinear commutator of T and b_j when $m = 0$ (see [14]), while $|T_b(f)|_r$ is a nontrivial generalizations of the commutator when $m > 0$. It is well known that multilinear operators are of great interest in harmonic analysis and have been widely studied by many authors(see [2] - [5]). Hu and Yang (see [10]) proved a variant sharp estimate for multilinear singular integral

operators. In [14], Pérez and Trujillo-Gonzalez proved a sharp estimate for multilinear commutators when $b_j \in Osc_{expL^{r_j}}(R^n)$.

The main purpose of this paper is to prove a sharp function inequality for the vector-valued, multilinear singular integral operators with non-smooth kernels when $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$. As the application, some $L^p(p > 1)$ norm inequality for the vector-valued, multilinear operators are obtained.

Throughout the paper, $Q = Q(x, d)$ denotes a cube in R^n with sides parallel to the coordinate axes, the center of which is a point x and the length of sides is d . If b is a locally integrable function, then its sharp function is defined as

$$b^\#(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q| dy,$$

where, and in what follows,

$$b_Q = |Q|^{-1} \int_Q b(x) dx.$$

It is well-known that (see [9], [16]) that

$$b^\#(x) \approx \sup_{x \in Q} \inf_{c \in C} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - c| dy$$

and

$$\|b - b_{2^k Q}\|_{BMO} \leq Ck \|b\|_{BMO} \text{ for } k \geq 1.$$

We say that b belongs to $BMO(R^n)$ if $b^\#$ belongs to $L^\infty(R^n)$ and $\|b\|_{BMO} = \|b^\#\|_{L^\infty}$. Assuming that M is the Hardy-Littlewood maximal operator

$$M(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

we set $M_p(f) = (M(f^p))^{1/p}$ for $0 < p < \infty$. Further, the sharp maximal function $M_A^\#$ associated with approximation to the identity $\{A_t, t > 0\}$ is defined as

$$M_A^\#(f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - A_{t_Q}(f)(y)| dy,$$

where $t_Q = l(Q)^2$ and $l(Q)$ denotes the side length of Q .

The below two theorems are the main result of this paper.

Theorem 1.3. *Let $1 < r < \infty$ and let $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ ($j = 1, \dots, l$). Then, there exists a constant $C > 0$ such that*

$$M_A^\#(|T_b(f)|_r)(\tilde{x}) \leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).$$

for any function $f \in C_0^\infty(R^n)$, any $1 < s < \infty$ and any point $\tilde{x} \in R^n$,

Theorem 1.4. *Let $1 < r < \infty$ and $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ ($j = 1, \dots, l$). Then, $|T_b|_r$ is bounded on $L^p(R^n)$ for any $1 < p < \infty$, that is*

$$|||T_b(f)|_r||_{L^p} \leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) |||f|_r||_{L^p}.$$

2. SOME LEMMAS

We present some preliminary lemmas.

Lemma 2.1. ([4]) *Let b be a function on R^n and let $D^\alpha b \in L^q(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m$ and some $q > n$. Then*

$$|R_m(b; x, y)| \leq C|x - y|^m \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}(x, y)|} \int_{\tilde{Q}(x, y)} |D^\alpha b(z)|^q dz \right)^{1/q},$$

where $\tilde{Q}$ is the cube centered at x , with the side length $5\sqrt{n}|x - y|$.

Lemma 2.2. ([8], [11]) *Let $1 < r < \infty$ and let T be a singular integral operators with non-smooth kernel as in Definition 1.2. Then, for every $f \in L^p(R^n)$, ($1 < p < \infty$),*

$$|||T(f)|_r||_{L^p} \leq C|||f|_r||_{L^p}.$$

Lemma 2.3. ([6]) *Let $\{A_t, t > 0\}$ be an approximation to the identity and $b \in BMO(R^n)$. Then, for every $f \in L^p(R^n)$, $p > 1$, $1 < r < \infty$ and $x \in R^n$*

$$\sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |A_{t_Q}((b - b_Q)f)(y)| dy \leq C||b||_{BMO} M_r(f)(x),$$

where $t_Q = l(Q)^2$ and $l(Q)$ denotes the side length of Q .

Lemma 2.4. ([8], [11]) *There exists a constant $C > 0$ such that for any $\gamma > 0$ and $\lambda > 0$*

$$|\{x \in R^n : M(f)(x) > D\lambda, M_A^\#(f)(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq C\gamma|\{x \in R^n : M(f)(x) > \lambda\}|,$$

where D is a fixed constant depending only on n . So that

$$||M(f)||_{L^p} \leq C||M_A^\#(f)||_{L^p}$$

for every $f \in L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$.

3. PROOFS OF THEOREMS

Proof of Theorem 1.3. It suffices to prove that for $f \in C_0^\infty(R^n)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_Q ||T_b(f)(x)|_r - |A_{t_Q} T_b(f)(x)|_r| dx \leq \\ & \leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(x). \end{aligned}$$

Without loss of generality, we can assume $l = 2$. We fix a cube $Q = Q(x_0, d)$ and a point $\tilde{x} \in Q$ and suppose that $\tilde{Q} = 5\sqrt{n}Q$ and

$$\tilde{A}_j(x) = A_j(x) - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}} x^\alpha.$$

Then

$$R_m(A_j; x, y) = R_m(\tilde{A}_j; x, y) \quad \text{and} \quad D^\alpha \tilde{A}_j = D^\alpha A_j - (D^\alpha A_j)_{\tilde{Q}} \quad \text{for} \quad |\alpha| = m_j.$$

Now, we decompose $f = g + h = \{g_i\} + \{h_i\}$ in $g_i = f_i \chi_{\tilde{Q}}$ and $h_i = f_i \chi_{R^n \setminus \tilde{Q}}$. Then

$$\begin{aligned} T_b(f_i)(x) &= \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_i(y) dy = \\ &= \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) g_i(y) dy - \\ &- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{R^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)(x-y)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)}{|x-y|^m} K(x, y) g_i(y) dy \\ &- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{R^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y)(x-y)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x, y) g_i(y) dy \\ &+ \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \int_{R^n} \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x, y) g_i(y) dy \\ &+ \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) h_i(y) dy = T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &- T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, \cdot)(x-\cdot)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &- T \left(\sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, \cdot)(x-\cdot)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \end{aligned}$$

$$+T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{(x-\cdot)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{\alpha_1! \alpha_2! |x-\cdot|^m} g_i \right) + T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x-\cdot|^m} h_i \right)$$

and

$$\begin{aligned} A_{t_Q} T_b(f_i)(x) &= \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K_t(x, y) f_i(y) dy \\ &= \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) g_i(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{R^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y) (x-y)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)}{|x-y|^m} K_t(x, y) g_i(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{R^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y) (x-y)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K_t(x, y) g_i(y) dy \\ &\quad + \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \int_{R^n} \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K_t(x, y) g_i(y) dy \\ &\quad + \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K_t(x, y) h_i(y) dy \\ &= A_{t_Q} T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &\quad - A_{t_Q} T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, \cdot) (x-\cdot)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &\quad - A_{t_Q} T \left(\sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, \cdot) (x-\cdot)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &\quad + A_{t_Q} T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{(x-\cdot)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x-\cdot|^m} g_i \right) \\ &\quad + A_{t_Q} T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x-\cdot|^m} h_i \right). \end{aligned}$$

Further, by Minkowski's inequality,

$$\left| |T_b(f)(x)|_r - |A_{t_Q} T_b(f)(x)|_r \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (T_b(f_i)(x))^r \right)^{1/r} - \left(\sum_{i=1}^{\infty} (A_{t_Q} T_b(f_i)(x))^r \right)^{1/r} \right|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T_b(f_i)(x) - A_{t_Q} T_b(f_i)(x)|^r \right)^{1/r} \\
& \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, \cdot)(x - \cdot)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, \cdot)(x - \cdot)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{(x - \cdot)^{\alpha_1 + \alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| A_{t_Q} T \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| A_{t_Q} T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, \cdot)(x - \cdot)^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| A_{t_Q} T \left(\sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, \cdot)(x - \cdot)^{\alpha_2} D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{(x - \cdot)^{\alpha_1 + \alpha_2} D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2}{|x - \cdot|^m} g_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| (T - A_{t_Q} T) \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x - \cdot|^m} h_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
& := I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x) + I_5(x) + I_6(x) + I_7(x) + I_8(x) + I_9(x).
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|Q|} \int_Q ||T_b(f)(x)|_r - |A_{t_Q} T_b(f)(x)|_r| dx \\
& \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q I_1(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_2(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_3(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_4(x) dx \\
& + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_5(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_6(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_7(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_8(x) dx \\
& + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_9(x) dx := I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9.
\end{aligned}$$

Let us estimate $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$ and I_9 separately. First, by lemma 2.1 we obtain that for any $x \in Q$ and $y \in \tilde{Q}$

$$R_m(\tilde{b}_j; x, y) \leq C|x - y|^m \sum_{|\alpha_j|=m} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO}.$$

Consequently, by the L^s -boundedness of T (lemma 2.2), we get

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_Q |T(g)(x)|_r dx \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{R^n} |T(g)(x)|_r^s dx \right)^{1/s} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{R^n} |g(x)|_r^s dx \right)^{1/s} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|_r^s dx \right)^{1/s} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}). \end{aligned}$$

To estimate I_2 , we denote $s = pq$ and using lemma 2.2 and Hölder's inequality for $1 < p < \infty$, $q > 1$ and $1/q + 1/q' = 1$, we get

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_Q |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 g)(x)|_r dx \\ &\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{R^n} |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 g)(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{R^n} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(x)| |g(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_1} b_1(x) - (D^{\alpha} b_j)_{\tilde{Q}}|^{pq'} dx \right)^{1/pq'} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|_r^{pq} dx \right)^{1/pq} \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}). \end{aligned}$$

In the same way, we obtain

$$I_3 \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).$$

Similarly, denoting $s = pq_3$ for $1 < p < \infty$, $q_1, q_2, q_3 > 1$ and $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 = 1$, for I_4 we obtain

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2 g)(x)|_r dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2 g)(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(x) D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(x)| |g(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(x)|^{pq_1} dx \right)^{1/pq_1} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(x)|^{pq_2} dx \right)^{1/pq_2} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|_r^{pq_3} dx \right)^{1/pq_3} \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

For I_5, I_6, I_7 and I_8 , we use lemma 2.3 and similar to I_1, I_2, I_3, I_4 , we get

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |T(g)(x)|_r^s dx \right)^{1/s} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|_r^s dx \right)^{1/s} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}), \\
I_6 &\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 g)(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \sum_{|\alpha_2|=m_2} \|D^{\alpha_2} b_2\|_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(x)| |g(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}), \\
I_7 &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^{\alpha} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}), \\
I_8 &\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |T(D^{\alpha_1} \tilde{b}_1 D^{\alpha_2} \tilde{b}_2 g)(x)|_r^p dx \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{R^n} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(x) D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(x)| |g(x)|_r^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

To estimate I_9 , we write

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| (T - A_{t_Q} T) \left(\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, \cdot)}{|x - \cdot|^m} h_i \right) \right|^r \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{R^n} \left| \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x - y|^m} (K(x, y) - K_t(x, y)) h_i(y) \right|^r dy \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{R^n} \left| \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x - y|^m} (K(x, y) - K_t(x, y)) h_i(y) \right|^r dy \right)^{1/r} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{R^n} \left| \frac{D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)(x - y)^{\alpha_1} R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)}{|x - y|^m} (K(x, y) - K_t(x, y)) h_i(y) \right|^r dy \right)^{1/r} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{R^n} \left| \frac{D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)(x - y)^{\alpha_2} R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y)}{|x - y|^m} (K(x, y) - K_t(x, y)) h_i(y) \right|^r dy \right)^{1/r} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \times \right. \\
&\quad \times \left. \int_{R^n} \left| \frac{D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)(x - y)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{|x - y|^m} (K(x, y) - K_t(x, y)) h_i(y) \right|^r dy \right)^{1/r} \\
&= I_9^{(1)} + I_9^{(2)} + I_9^{(3)} + I_9^{(4)}.
\end{aligned}$$

Then, we observe that lemma 2.1 and the inequality

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \leq C \log(|Q_2|/|Q_1|) \|b\|_{BMO} \text{ for } Q_1 \subset Q_2,$$

(see [16]) imply that for any $x \in Q$ and $y \in 2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}$,

$$\begin{aligned}
|R_m(\tilde{b}; x, y)| &\leq C|x - y|^m \sum_{|\alpha|=m} (|D^\alpha b|_{BMO} + |(D^\alpha b)_{\tilde{Q}(x, y)} - (D^\alpha b)_{\tilde{Q}}|) \\
&\leq Ck|x - y|^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha b\|_{BMO}.
\end{aligned}$$

Note that $|x - y| \geq d = t^{1/2}$ and $|x - y| \sim |x_0 - y|$ for $x \in Q$ and $y \in R^n \setminus \tilde{Q}$. Therefore, by the conditions on K and K_t and Minkowski's inequality

$$\begin{aligned}
I_9^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} \frac{\prod_{j=1}^2 |R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)|}{|x - y|^m} |K(x, y) - K_t(x, y)| |f(y)|_r dy \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} k^2 \frac{d^\delta}{|x_0 - y|^{n+\delta}} |f(y)|_r dy \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-\delta k} \frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |f(y)|_r dy \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

For $I_9^{(2)}$, we get

$$\begin{aligned}
I_9^{(2)} &\leq C \left(\sum_{|\alpha|=m_2} \|D^\alpha b_2\|_{BMO} \right) \sum_{|\alpha|=m_1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} \frac{k d^\delta}{|x_0 - y|^{n+\delta}} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)| |f(y)|_r dy \\
&\leq C \left(\sum_{|\alpha|=m_2} \|D^\alpha b_2\|_{BMO} \right) \sum_{|\alpha_1|=m_1} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-\delta k} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)|^{r'} dy \right)^{1/r'} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |f(y)|_r^s dy \right)^{1/s} \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Similarly,

$$I_9^{(3)} \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).$$

For $I_9^{(4)}$, taking $q_1, q_2 > 1$ such that $1/s + 1/q_1 + 1/q_2 = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
I_9^{(4)} &\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} \frac{d^\delta}{|x_0 - y|^{n+\delta}} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)| |D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)| |f(y)|_r dy \\
&\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\delta k} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |f(y)|_r^s dy \right)^{1/s} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |D^{\alpha_1} \tilde{b}_1(y)|^{q_1} dy \right)^{1/q_1} \left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|} \int_{2^k\tilde{Q}} |D^{\alpha_2} \tilde{b}_2(y)|^{q_2} dy \right)^{1/q_2} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Thus,

$$I_9 \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x}).$$

This completes the proof of Theorem 1.3. $\square$

Proof of Theorem 1.4. In Theorem 1, we choose $1 < s < p$ and using lemma 2.2, we get

$$\begin{aligned} \| |T_b(f)|_r \|_{L^p} &\leq \| M(|T_b(f)|_r) \|_{L^p} \leq C \| M_A^\#(|T_b(f)|_r) \|_{L^p} \\ &\leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) \| M_s(|f|_r) \|_{L^p} \leq \\ &\leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha|=m_j} \|D^\alpha b_j\|_{BMO} \right) \| |f|_r \|_{L^p}. \end{aligned}$$

This finishes the proof. $\square$

4. APPLICATIONS

In this section, Theorems 1.3 and 1.4 are applied to holomorphic functional calculus of linear elliptic operators. First, we review some definitions of holomorphic functional calculus (see [11]). Given $0 \leq \theta < \pi$, introduce the domain

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta\} \cup \{0\}$$

and denote its interior by S_θ^0 . Set $\tilde{S}_\theta = S_\theta \setminus \{0\}$. A closed operator L on some Banach space E is said to be of type θ if its spectrum $\sigma(L) \subset S_\theta$ and for every $\nu \in (\theta, \pi]$, there exists a constant C_ν such that

$$|\eta| \|(\eta I - L)^{-1}\| \leq C_\nu, \quad \eta \notin \tilde{S}_\theta.$$

For $\nu \in (0, \pi]$, we set

$$H_\infty(S_\mu^0) = \{f : S_\mu^0 \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ is holomorphic and } \|f\|_{L^\infty} < \infty\},$$

where $\|f\|_{L^\infty} = \sup\{|f(z)| : z \in S_\mu^0\}$. Further, set

$$\Psi(S_\mu^0) = \left\{ g \in H_\infty(S_\mu^0) : \exists s > 0, \exists c > 0 \text{ such that } |g(z)| \leq c \frac{|z|^s}{1 + |z|^{2s}} \right\}.$$

For L of type θ and $g \in H_\infty(S_\mu^0)$, define $g(L) \in L(E)$ as

$$g(L) = -(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\eta I - L)^{-1} g(\eta) d\eta,$$

where Γ is the contour $\{\xi = re^{\pm i\phi} : r \geq 0\}$ parameterized clockwise around S_θ by $\theta < \phi < \mu$. If, in addition, L is one-one and its range is dense, then for any $f \in H_\infty(S_\mu^0)$

$$f(L) = [h(L)]^{-1}(fh)(L),$$

where $h(z) = z(1+z)^{-2}$. Besides, L is said to have a bounded holomorphic functional calculus on the sector S_μ , if

$$\|g(L)\| \leq N\|g\|_{L^\infty}$$

for some $N > 0$ and all $g \in H_\infty(S_\mu^0)$.

Now, let L be a linear operator on $L^2(R^n)$ with $\theta < \pi/2$ such that $(-L)$ generates a holomorphic semigroup e^{-zL} , $0 \leq |\arg(z)| < \pi/2 - \theta$. Then, applying theorem 6 of [8] and theorem 1.4, we arrive at the following statement.

Theorem 4.1. *Given $1 < r < \infty$ let the following conditions be satisfied:*

(i) *The holomorphic semigroup e^{-zL} , $0 \leq |\arg(z)| < \pi/2 - \theta$ is represented by kernels $a_z(x, y)$ which satisfy the upper bound*

$$|a_z(x, y)| \leq c_\nu h_{|z|}(x, y), \quad \nu > \theta$$

for $x, y \in R^n$, and $0 \leq |\arg(z)| < \pi/2 - \theta$, where $h_t(x, y) = Ct^{-n/2}s(|x - y|^2/t)$ and s is a positive, bounded and decreasing function such that

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{n+\epsilon}s(r^2) = 0.$$

(ii) *The operator L has a bounded holomorphic functional calculus in $L^2(R^n)$, that is, for all $\nu > \theta$ and $g \in H_\infty(S_\mu^0)$, the operator $g(L)$ is such that*

$$\|g(L)(|f|_r)\|_{L^2} \leq c_\nu \|g\|_{L^\infty} \| |f|_r \|_{L^2}.$$

Then, for $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ and $j = 1, \dots, l$, the multilinear operator $g(L)_b$ associated to $g(L)$ and b_j satisfies the conditions:

(a) *For $1 < s < \infty$ and $\tilde{x} \in R^n$,*

$$M_A^\#(|g(L)_b(f)|_r)(\tilde{x}) \leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) M_s(|f|_r)(\tilde{x});$$

(b) *For any $1 < p < \infty$, $|g(L)_b|_r$ is bounded on $L^p(R^n)$, that is*

$$\| |g(L)_b(f)|_r \|_{L^p} \leq C \prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} \|D^{\alpha_j} b_j\|_{BMO} \right) \| |f|_r \|_{L^p}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Chanillo, “A note on commutators”, *Indiana Univ. Math. J.*, **31**, 7 – 16 (1982).
- [2] J. Cohen, “A sharp estimate for a multilinear singular integral on R^n ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**, 693 – 702 (1981).
- [3] J. Cohen and J. Gosselin, “On multilinear singular integral operators on R^n ”, *Studia Math.*, **72**, 199 – 223 (1982).
- [4] J. Cohen and J. Gosselin, “A BMO estimate for multilinear singular integral operators”, *Illinois J. Math.*, **30**, 445 – 465 (1986).
- [5] R. Coifman and Y. Meyer, *Wavelets, Calderón-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge Studies in Advanced Math. **48**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [6] D. G. Deng and L. X. Yan, “Commutators of singular integral operators with non-smooth kernels”, *Acta Math. Scientia*, **25**(1), 137 – 144 (2005).
- [7] Y. Ding and S. Z. Lu, “Weighted boundedness for a class rough multilinear operators”, *Acta Math. Sinica*, **17**, 517 – 526 (2001).
- [8] X. T. Duong and A. McIntosh, “Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **15**, 233 – 265 (1999).
- [9] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. **116**, Amsterdam (1985).
- [10] G. Hu and D. C. Yang, “A variant sharp estimate for multilinear singular integral operators”, *Studia Math.*, **141**, 25 – 42 (2000).
- [11] J. M. Martell, “Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications”, *Studia Math.*, **161**, 113 – 145 (2004).
- [12] C. Pérez, “Endpoint estimate for commutators of singular integral operators”, *J. Func. Anal.*, **128**, 163 – 185 (1995).
- [13] C. Pérez and G. Pradolini, “Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integral operators”, *Michigan Math. J.*, **49**, 23 – 37 (2001).
- [14] C. Pérez and R. Trujillo-Gonzalez, “Sharp weighted estimates for multilinear commutators”, *J. London Math. Soc.*, **65**, 672 – 692 (2002).
- [15] C. Pérez and R. Trujillo-Gonzalez, “Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators and commutators”, *Tohoku Math. J.*, **55**, 109 – 129 (2003).
- [16] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ (1993).

Поступила 4 октября 2009

О ЛИНИЯХ УРОВНЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. А. СУКИАСЯН

Гюмрийский педагогический институт

E-mail: sugagik@mail.ru

Аннотация. С помощью ранее установленного метода оценки длин линий уровня действительных функций доказывается теорема, которая является аналогом второй основной теоремы теории Γ -линий, которая, в свою очередь, является аналогом второй основной теоремы Р. Неванлинны.

MSC2010 number: 30C70, 26B15

Ключевые слова: линии уровня, Γ -линии, распределение значений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существенная часть комплексного анализа, в частности, теория распределения значений Р. Неванлинны [4], изучает a -точки комплексных функций $w(z)$ различных классов (a -точками называются решения уравнения $w(z) = a$, или же прообразы $w^{-1}(a)$). Рассматривая аналогичное понятие Γ -линий, которые являются прообразами $w^{-1}(\Gamma)$ заданной кривой Γ , в конце 70-х Г. А. Барсегян построил теорию Γ -линий [1], (см. также [2]), где основные результаты являются аналогами основных теорем теории Р. Неванлинны. Теория дает оценки длин Γ -линий для достаточно широких классов мероморфных и, более общих, не мероморфных функций. Заметим, что когда Γ есть действительная ось, то Γ -линии становятся линиями уровня действительных функций $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ (решения $v(x, y) = 0$ называются линиями уровня $v(x, y)$), которые встречаются во многих областях чистой и прикладной математики. Для этих частных классов упомянутые оценки являются оценками длин линий уровня действительных функций $\operatorname{Im} w$.

В [3] даны два независимых подхода для изучения длин линий уровня некоторых широких классов действительных функций. Принадлежащий автору один из подходов основан на формуле Грина. В данной статье, используя этот подход, мы улучшаем некоторые результаты [3] и изучаем длины линий уровня $v(x, y) = c_n$, $n = 1, 2, \dots, q$ для действительных функций $v(x, y)$. Основным результатом, теорема 4, является аналогом второй основной теоремы теории Γ -линий (что, в свою очередь, является аналогом второй основной теоремы Р. Неванлинны).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область, граница ∂D которой состоит из конечного числа кусочно-аналитических кривых; $l(D)$ – длина ∂D ; $C^2(\overline{D})$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых функций $v(x, y)$ в некоторой области содержащей замыкание $\overline{D}$, с условием $|\text{grad } v(x, y)| \neq 0$ всюду в $\overline{D}$ за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек, в окрестности каждой из которых все интегралы в ниже приведенных теоремах сходятся. $L(D, c, v)$ – суммарная длина линий уровня $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ функции $v(x, y)$. Для $c \in \mathbb{R}$ полагаем, что $D(c) = D(c, v) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c\}$ и $\partial D(c)$ – граница $D(c)$.

Теорема 1. Для произвольной функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$ и $c \in \mathbb{R}$,

$$(2.1) \quad L(D, c, v) = - \iint_{D(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right\} d\sigma - \\ - \int_{\partial D(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} dy,$$

где $d\sigma$ – элемент площади, а во втором интеграле направление обхода на каждой связной компоненте кривой $\partial D(c) \cap \partial D$ положительное относительно $D(c)$.

Как следствие из теоремы 1 получаем следующую теорему, дающую оценку сверху для величины $L(D, c, v)$.

Теорема 2. ([3], Теорема 1) Для произвольной функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$ и $c \in \mathbb{R}$,

$$(2.2) \quad L(D, c, v) \leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\text{grad } v(x, y)|}.$$

Подынтегральная величина двойного интеграла в (2.2) равна кривизне проходящей через точку $(x, y) \in D$ линии уровня функции $v(x, y)$ в точке (x, y) , т.е.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad } v(x, y)|} \right| = \frac{|(v'_x)^2 v''_{yy} - 2v'_x v'_y v''_{xy} + (v'_y)^2 v''_{xx}|}{((v'_x)^2 + (v'_y)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Заметим также, что второй интеграл (2.2) не превосходит $\frac{1}{2}l(D)$.

Применим неравенство (2.2) для мнимых (действительных) частей и модулей мероморфных функций. Пусть $w(z)$ – мероморфная в $\bar{D}$ функция, $z = x + iy$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$ или $v(x, y) = |w(z)|$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} L(D, c, \operatorname{Im} w) &\leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \sin(\arg w'(z)) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(\arg w'(z)) \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} |\cos(\arg w'(z)) dx - \sin(\arg w'(z)) dy| = \\ (2.3) \quad &= \frac{1}{2} \iint_D \left| \operatorname{Im} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} e^{-i \arg w'(z)} \right) \right| d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \operatorname{Re}(e^{i \arg w'(z)} dz) \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(D, c, |w|) &\leq \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \cos\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \sin\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \sin\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) dx + \cos\left(\arg \frac{w'(z)}{w(z)}\right) dy \right| = \\ (2.4) \quad &= \frac{1}{2} \iint_D \left| \operatorname{Re} \left(\left(\frac{w''(z)}{w'(z)} - \frac{w'(z)}{w(z)} \right) e^{-i \arg \frac{w'(z)}{w(z)}} \right) \right| d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \operatorname{Im}(e^{i \arg \frac{w'(z)}{w(z)}} dz) \right|. \end{aligned}$$

Оценки сверху длин линий уровня мнимых (действительных) частей и модулей мероморфных функций впервые были получены как частные случаи принципа вариации касательной в теории Γ -линий [1], [2]. Согласно этому принципу для произвольной мероморфной функции $w(z)$ и любой гладкой жордановой кривой Γ с ограниченной вариацией угла между касательной и действительной осью справедливо соотношение

$$\begin{aligned} L(D, \Gamma) &\leq K(\Gamma) \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} \arg w'(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \arg w'(z) \right| \right\} d\sigma + K_1(D) l(D) \leq \\ (2.5) \quad &\leq 2K(\Gamma) \iint_D \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| d\sigma + K_1(D) l(D), \end{aligned}$$

где $L(D, \Gamma)$ – суммарная длина кривых $w^{-1}(\Gamma) \cap D$, $l(D)$ – длина ∂D , $K(\Gamma)$ и $K_1(\Gamma)$ – постоянные, зависящие только от Γ . В [5] доказаны подобные (2.5) соотношения для квазиконформных и непрерывно-дифференцируемых отображений.

В случае прямой $\{w : \operatorname{Im} w = c\}$ имеем $L(D, \Gamma) = L(D, c, \operatorname{Im} w)$, а в случае окружности $\{w : |w| = c\}$ имеем $L(D, \Gamma) = L(D, c, |w|)$. Теперь мы видим, что для этих частных случаев неравенства (2.3) и (2.4) более точны, чем неравенство (2.5). Кроме того, из неравенства (2.2) можно получить оценки сверху для длин линий уровня функций $v(x, y)$ из различных классов.

Проиллюстрируем теорему 2 на следующих примерах.

1. Пусть $v(x, y) = \operatorname{Im} e^{ax+iby} = e^{ax} \sin by$, a и b — действительные числа ($a, b \neq 0$), $D = D(r) = \{z : |z| < r\}$. Тогда

$$\begin{aligned} L(D(r), 0, e^{ax} \sin by) &= |b| r^2 + O(r), \quad r \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \\ = \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{b \cos by}{\sqrt{b^2 \cos^2 by + a^2 \sin^2 by}} \right| d\sigma &= |b| r^2 + O(r), \quad r \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &\leq \pi r. \end{aligned}$$

2. Пусть $v(x, y) = |e^{ax+iby}| = e^{ax}$ ($a \neq 0$). Тогда

$$\begin{aligned} L(D(r), 1, e^{ax}) &= 2r, \\ \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_{D(r)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{|a|} \right| d\sigma = 0, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &= \frac{1}{2} \int_{\partial D(r)} |dy| = 2r. \end{aligned}$$

3. Пусть $v(x, y) = x^2 - y$, $D = \{(x, y) : 0 < x < r, \quad 0 < y < r^2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} L(D, 0, v(x, y)) &= \int_0^r \sqrt{4x^2 + 1} dx = r^2 + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma &= \\ = \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right| d\sigma &= \frac{1}{2} r^2 + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|dx + 2x dy|}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} r^2 + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Приведенные примеры показывают точность неравенства (2.2). Они также показывают, что каждое слагаемое правой части (2.2) может иметь основной или равный вклад в общей сумме. Поэтому величину

$$\begin{aligned} G(D) &:= \frac{1}{2} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \end{aligned}$$

мы будем называть *характеристикой длины*, а неравенство (2.2) *принципом длины и кривизны*.

Пусть

$$G(D, c', c'') := \frac{1}{2} \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|},$$

где c', c'' ($c' < c''$) – действительные числа, $D(c', c'') = \{(x, y) \in D : c' < v(x, y) < c''\}$, $\partial D(c', c'')$ – граница области $D(c', c'')$. Далее, для возрастающей непрерывно-дифференцируемой функции $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}$ обозначим

$$K_\varphi(D) := \iint_D \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma,$$

$$K_\varphi(D, c', c'') := \iint_{D(c', c'')} \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная возрастающая непрерывно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, а c', c'' ($c' < c''$) – действительные числа. Тогда для любой функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$,

$$(2.6) \quad \max \{L(D, c', v); L(D, c'', v)\} \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

$$(2.7) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{2h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

$$(2.8) \quad L(D, c, v) \leq \left(\sqrt{G(D, c', c'')} + \sqrt{h_2 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2, \quad c' < c < c'',$$

где $h_1 = (\varphi(c'') - \varphi(c'))^{-1}$, $h_2 = (\min \{\varphi(c) - \varphi(c'), \varphi(c'') - \varphi(c)\})^{-1}$.

В оценках (2.6) – (2.8) учитывается поведение функции $v(x, y)$ лишь в окрестностях линий уровня, поэтому теорема 3 в некотором смысле дополняет теорему 2. Точность оценок (2.6) – (2.8) также легко проверяется предыдущими примерами (здесь можно взять $\varphi(t) = t$, $\varphi(t) = \arctan t$).

Во второй основной теореме теории Γ -линий [1], [2] рассматривается конечный набор попарно различных ограниченных гладких жордановых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ и для произвольной мероморфной функции $w(z)$ устанавливается неравенство

$$\sum_{k=1}^n L(D, \Gamma_k) \leq K \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} \arg w'(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \arg w'(z) \right| \right\} d\sigma +$$

$$+ h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \sqrt{2}l(D) \leq$$

$$(2.9) \quad \leq 2K \iint_D \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| d\sigma + h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \iint_D \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma + \sqrt{2}l(D),$$

где K – абсолютная постоянная, $h(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ – постоянная, зависящая только от $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Как это делается в теории распределения значений мероморфных функций [4], из неравенства (2.9) выводится соотношение дефектов для кривых.

Следующая теорема является аналогом второй основной теоремы теории Г-линий для функций класса $C^2(\overline{D})$.

Теорема 4. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная возрастающая непрерывно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, и $c_1, \dots, c_n$ – попарно различные действительные числа. Тогда для любой функции $v(x, y) \in C^2(\overline{D})$,

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^n L(D, c_k, v) \leq \left(\sqrt{G(D)} + \sqrt{hK_\varphi(D)} \right)^2,$$

где $h = (\min_{i \neq j} \{\varphi(c_i) - \varphi(c_j)\})^{-1}$.

Неравенство (2.10) особенно эффективно для установления соотношения дефектов, там, где остаточный член $hK_\varphi(D)$ существенно “меньше”, чем характеристика длины $G(D)$. Это так, например, если $v(x, y) = |w(z)|$, где $w(z)$ – мероморфная функция, $D = D(r)$, $\varphi(t) = \arctan t$ [2]. В этом случае имеем интеграл

$$K_\varphi(D(r)) = \iint_{D(r)} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} d\sigma,$$

который часто встречается в теории распределения значений мероморфных функций и в теории поверхностей наложения (оценки этого интеграла даны в [2]). С другой стороны соответствующий выбор функции $\varphi(t)$ в $K_\varphi(D)$ дает возможность применения неравенства (2.10) для различных классов функций $v(x, y)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1 основано на формуле Грина. Сперва предположим, что функция $v(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируема всюду в некоторой области, содержащей $\overline{D}$ и $|\text{grad} v(x, y)| \neq 0$ в $\overline{D}$. Заметим, что граница области $D(c) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c\}$ состоит из кривых $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ и дуг границы D (см. Рис. 1). Действительно, если бы существовала замкнутая линия, которая вместе со своей внутренней частью лежала бы в D , то во внутренней части этой линии уровня нашлась бы точка, в которой $|\text{grad} v(x, y)| = 0$, что невозможно в силу нашего предположения.

Направление касательной к кривой $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$ в точке (x, y) при положительном обходе соответствующей компоненты $D(c)$ совпадает с направлением вектора $\{v'_y(x, y); -v'_x(x, y)\}$ и

$$\cos \alpha(x, y) = \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|}, \quad \sin \alpha(x, y) = -\frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|},$$

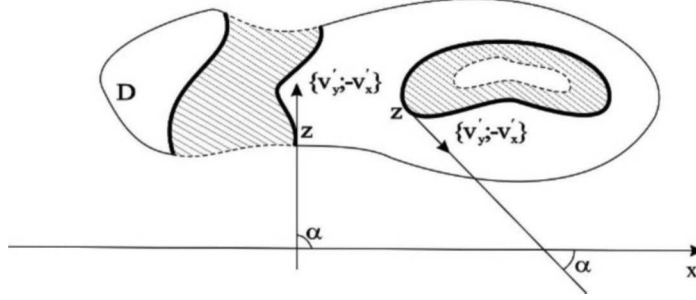


РИС. 1. Заштрихованная часть – область $D(c)$; жирные линии – кривые $\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}$; пунктирные линии – $\partial D(c) \cap \partial D$.

где $\alpha(x, y) \in (-\pi; \pi]$ (или $[0; 2\pi)$) – угол между этой касательной и положительным направлением действительной оси, то Следовательно,

$$\begin{aligned} L(D, c, v) &= \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} dl = \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} \cos \alpha(x, y) dx + \sin \alpha(x, y) dy = \\ &= \int_{\{(x, y) \in D : v(x, y) = c\}} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy, \end{aligned}$$

где dl – элемент длины. Добавляя с каждой стороны последнего соотношения интегралы вдоль линий $\partial D(c) \cap \partial D$ и применяя формулу Грина для каждой компоненты области $D(c)$ в отдельности, получим

$$\begin{aligned} L(D, c, v) &+ \int_{\partial D(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\ (3.1) \quad &= - \iint_{D(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Теперь пусть $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in \bar{D}$ те точки, в которых либо $|\text{grad} v(x, y)| = 0$ либо функция $v(x, y)$ не является дважды непрерывно-дифференцируемой, но в окрестности каждой из этих точек интегралы в (3.1) сходятся. Удалим из области D попарно непересекающиеся кружки $\{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \leq \varepsilon^2\}$, $k = 1, \dots, m$ и полученную область обозначим через D_ε . Граница D_ε состоит из дуг

$$C_k(\varepsilon) = \{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \varepsilon^2\} \cap \bar{D}, \quad k = 1, \dots, m$$

и части границы D , не лежащей в удаленных кружках (эту часть обозначим через ∂D_ε). Соотношение (3.1) для области D_ε дает

$$L(D_\varepsilon, c, v) + \int_{\partial D_\varepsilon(c) \cap \partial D_\varepsilon} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy +$$

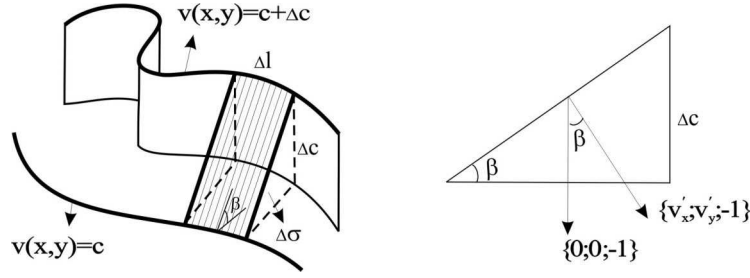


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^m \int_{C_k(\varepsilon) \cap \partial D_\varepsilon(c)} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\
 & = - \iint_{D_\varepsilon(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

где $D_\varepsilon(c) = \{(x, y) \in D_\varepsilon : v(x, y) > c\}$ и $\partial D_\varepsilon(c)$ – граница $D_\varepsilon(c)$.

Для завершения доказательства остается в последнем соотношении ε устремить к нулю и учесть, что каждый интеграл суммы оценивается через $2\pi\varepsilon$.

Если в соотношении (2.1) мы заменим $v(x, y)$ и c соответственно на $-v(x, y)$ и $-c$, то придем к соотношению

$$\begin{aligned}
 L(D, c, v) - \int_{\partial D_1(c) \cap \partial D} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dx - \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} dy = \\
 (3.2) \quad = \iint_{D_1(c)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

где $D_1(c) = \{(x, y) \in D : v(x, y) < c\}$. Неравенство (2.2) следует из (2.1) и (3.2).

Для доказательства теорем 3 и 4 сначала докажем несколько предварительных лемм. Следующая лемма представляет собой самостоятельный интерес.

Лемма 1. Для произвольной неотрицательной непрерывной функции $f(c)$, $c \in (c', c'')$ при условиях теоремы 1 справедливо соотношение

$$(3.3) \quad \int_{c'}^{c''} f(c) L(D, c, v) dc = \iint_{D(c', c'')} f(v(x, y)) |\text{grad} v(x, y)| d\sigma.$$

Доказательство. Приведем краткое геометрическое доказательство, используя обозначения Рисунка 2. Для угла $\beta(x, y)$ между нормалью $\{v'_x(x, y); v'_y(x, y); -1\}$ к поверхности $\{v(x, y) : c' < v(x, y) < c''\}$ в точке (x, y) и вектором $\{0; 0; -1\}$ имеем

$$\Delta l \Delta c \sim \tan \beta(x, y) \Delta \sigma, \quad \tan \beta(x, y) = |\text{grad} v(x, y)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{c'}^{c''} L(D, c, v) f(c) dc &= \int_{c'}^{c''} \int_{\{(x,y) \in D: v(x,y)=c\}} f(c) dl dc = \\ &= \iint_{D(c', c'')} f(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Из леммы 1, как следствия, выводятся модификации принципа длины и площади для мероморфных функций [2]

$$\begin{aligned} \int_{c'}^{c''} L(D, c, |w|) f(c) dc &= \iint_{\{z \in D: c' < |w(z)| < c''\}} |w'(z)| f(|w(z)|) d\sigma, \\ \int_{c'}^{c''} L(D, c, \operatorname{Im} w) f(c) dc &= \iint_{\{z \in D: c' < \operatorname{Im} w(z) < c''\}} |w'(z)| f(\operatorname{Im} w(z)) d\sigma. \end{aligned}$$

Замечание 1. В лемме 1 функция $f(c)$ может иметь конечное число изолированных особенностей, но необходимо требовать, чтобы в окрестностях этих точек интегралы в (3.3) сходились.

Следующая лемма непосредственно следует из (2.1).

Лемма 2. Для любых $c', c'' \in \mathbb{R}$ ($c' < c''$) при условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |L(D, c', v) - L(D, c'', v)| &\leq \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ (3.4) \quad &+ \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $p > 1$ – любое фиксированное число. Возможны два случая: либо имеет место неравенство

$$L(D, c', v) < \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc$$

либо это не так. В первом случае соотношение (3.3) для φ' вместо f дает

$$\begin{aligned} L(D, c', v) &< \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \iint_{D(c', c'')} \varphi'(v(x, y)) |\operatorname{grad} v(x, y)| d\sigma = \\ (3.5) \quad &= \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'') \end{aligned}$$

Во втором случае, т.е. когда

$$L(D, c', v) \geq \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc,$$

в силу теоремы о среднем значении существует значение $c^* \in (c', c'')$ такое, что

$$L(D, c', v) \geq \frac{p}{p-1} L(D, c^*, v),$$

откуда получаем

$$L(D, c', v) \leq p |L(D, c', v) - L(D, c^*, v)|.$$

Согласно неравенству (3.4) имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} L(D, c', v) &\leq p \iint_{D(c', c^*)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\text{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\ &+ p \int_{\partial D(c', c^*) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y) dx - v'_x(x, y) dy|}{|\text{grad} v(x, y)|} \leq 2pG(D, c', c''). \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае из (3.5) и (3.6) получаем

$$(3.7) \quad L(D, c', v) \leq 2pG(D, c', c'') + \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'').$$

Неравенство (3.7) для $L(D, c'', v)$ доказывается аналогичным образом. Минимум функции

$$2pG(D, c', c'') + \frac{p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c''), \quad p > 1$$

достигается для значения $p = \sqrt{\frac{h_1 K_\varphi(D, c', c'')}{2G(D, c', c'')}} + 1$ и равен

$$\left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2.$$

Окончательно получаем

$$\max \{L(D, c', v); L(D, c'', v)\} \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2,$$

чем и завершается доказательство неравенства (2.6).

Неравенство (2.7) можно доказать также как и (2.6). Действительно, если

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) < \frac{2p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc$$

тогда

$$(3.8) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) < \frac{2p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c'').$$

Если же

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \geq \frac{2p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c'))} \int_{c'}^{c''} \varphi'(c) L(D, c, v) dc,$$

то опять в силу теоремы о среднем значении существует значение $c^* \in (c', c'')$ такое, что

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \geq \frac{2p}{p-1} L(D, c^*, v).$$

Из этого неравенства и (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
 L(D, c', v) + L(D, c'', v) &\leq p |L(D, c', v) - L(D, c^*, v)| + p |L(D, c'', v) - L(D, c^*, v)| \\
 &\leq p \iint_{D(c', c'')} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\
 (3.9) \quad &+ p \int_{\partial D(c', c'') \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} = 2pG(D, c', c'').
 \end{aligned}$$

Из (3.8) и (3.9) получаем

$$(3.10) \quad L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq 2pG(D, c', c'') + \frac{2p}{p-1} h_1 K_\varphi(D, c', c''),$$

и соответственно

$$L(D, c', v) + L(D, c'', v) \leq \left(\sqrt{2G(D, c', c'')} + \sqrt{2h_1 K_\varphi(D, c', c'')} \right)^2.$$

Неравенство (2.7) доказано.

Теперь при $c' < c < c''$, дважды применяя неравенство (3.7) будем иметь

$$L(D, c, v) \leq 2pG(D, c', c) + \frac{p}{(p-1)(\varphi(c) - \varphi(c'))} K_\varphi(D, c, c'')$$

и

$$L(D, c, v) \leq 2pG(D, c, c'') + \frac{p}{(p-1)(\varphi(c'') - \varphi(c))} K_\varphi(D, c, c').$$

Суммируя последние два неравенства, получаем

$$L(D, c, v) \leq pG(D, c', c'') + \frac{p}{(p-1)} h_2 K_\varphi(D, c', c''),$$

откуда, как и выше, выводим (2.8). Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Из доказательства ясно, что достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(t)$ была определена на множестве, содержащем множество значений функции $v(x, y)$.

Доказательство теоремы 4. Без ограничения общности можно предположить, что $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Для $L(D, c_1, v)$ и $L(D, c_n, v)$ из соотношений (3.2) и (2.1) имеем

$$\begin{aligned}
 L(D, c_1, v) &\leq \iint_{D_1(c_1)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma + \\
 (3.11) \quad &+ \int_{\partial D_1(c_1) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|}, \\
 L(D, c_n, v) &\leq \iint_{D(c_n)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'_x(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'_y(x, y)}{|\operatorname{grad} v(x, y)|} \right| d\sigma +
 \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad + \int_{\partial D(c_n) \cap \partial D} \frac{|v'_y(x, y)dx - v'_x(x, y)dy|}{|\operatorname{grad} v(x, y)|},$$

где $D_1(c_1) = \{(x, y) \in D : v(x, y) < c_1\}$ и $D(c_n) = \{(x, y) \in D : v(x, y) > c_n\}$.

Для $L(D, c_k, v)$, $k = 1, \dots, n-1$ согласно неравенству (3.10) имеем

$$(3.13) \quad L(D, c_k, v) + L(D, c_{k+1}, v) \leq 2p G(D, c_k, c_{k+1}) + \frac{2p K_\varphi(D, c_k, c_{k+1})}{(p-1)(\varphi(c_{k+1}) - \varphi(c_k))}.$$

Суммируя (3.11) – (3.13) по всем k и учитывая, что каждая линия уровня участвует два раза, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L(D, c_k, v) &\leq p G(D) + \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\varphi(c_{k+1}) - \varphi(c_k)} K_\varphi(D, c_k, c_{k+1}) \leq \\ &\leq p G(D) + \frac{p}{p-1} h K_\varphi(D). \end{aligned}$$

Неравенство (3.2) следует из последнего неравенства при $p = \sqrt{\frac{h K_\varphi(D)}{G(D)}} + 1$. Теорема 4 доказана. $\square$

Abstract. Based on the earlier established general estimation method of the lengths of level sets of real functions, the paper proves a theorem which is an analog of the second fundamental theorem of the theory of Γ -lines which, in its turn, is an analog of the second fundamental theorem of R. Nevanlinna.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Барсегян, “Новые результаты в теории мероморфных функций”, ДАН СССР, **238**, (4), 777 – 780 (1978).
- [2] Г. А. Барсегян, “О геометрии мероморфных функций”, Матем. сборник, **114**, (156), (2), 179 – 226 (1981).
- [3] G. Barsegian, G. Sukiasyan, “Methods for studying level sets of smooth enough functions”, In book “Topics in Analysis and Applications”, editors Barsegian G. and Begehr H., Kluwer, Series: NATO Science Publications (2004).
- [4] Р. Неванlinna, Однозначные Аналитические Функции, М., ГИИТЛ (1941).
- [5] G. Sukiasyan, “On level sets of quasiconformal mappings”, In book “Value distribution and related topics”, editors Barsegian G., Laine I. and Yang C.C., Advances in Complex Analysis and Applications (Kluwer Acad. Publ., 2004).

Поступила 3 марта 2009

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Уважаемая редакция, в работах [1-4], опубликованных в Вашем журнале, нами были допущены следующие неточности.

1. В статье [1] в теореме 4.1 пропущено условие, исключающее другие нули символа.
2. Считаем целесообразным в качестве дополнения к статье [2] представить конкретный пример применения предложенного метода:

$$K(x) = \frac{5}{6}\alpha \left(e^{-\lambda|x|} + e^{-2\lambda|x|} \right), \quad \lambda = \alpha + i\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

3. В работах [3], [4] соответствующие вспомогательные утверждения (см. теорему 1 в [3] и лемму 3.2 в [4]) следует понимать как равенство операторов, действующих из $\{f : f \in W_{1,1}^{\times N}(0, +\infty), f(0) = 0\}$ в $W_{1,1}^N(0, +\infty)$ (в работе [3] $N = 1$), а при $\nu(K_j) < +\infty$ из пространства $\{f : f \in P_1(0, +\infty), f(0) = 0\}$ в $P_1(0, +\infty)$, где P_1 – соответствующий класс вектор-функций не более чем полиномиального роста.

В сформулированных теоремах существования в случае $f(0) \neq 0$ решение может быть знакопеременным.

Приносим благодарность академику А. Б. Нерсисяну, обратившему наше внимание на вышеуказанные неточности.

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, Ц. Э. Терджян

- [1] А. Х. Хачатрян, “Уравнение Амбарцумяна в физической кинетике”, Изв. НАН Армении, Математика, **41**, №5, 58 – 68 (2006).
- [2] А. Х. Хачатрян, Ц. Э. Терджян, “Уравнение Винера-Хопфа, ядро которого допускает представление в виде суперпозиции комплекснозначных экспонент”, Известия НАН Армении, Математика, **42**, №5, 71 – 77 (2007).
- [3] Х. А. Хачатрян, “Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа свертки на полуоси”, Известия НАН Армении, Математика, **41**, №6, 75 – 84 (2006).
- [4] Х. А. Хачатрян, “Некоторые достаточные условия для разрешимости одного класса векторных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки на полупрямой”, Известия НАН Армении, Математика, **45**, №5, 57 – 72 (2008).

15 июля 2010

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 4, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

С. Р. АЙРАПЕТЯН, О гладкости решений одного класса регулярных уравнений в полосе	3
С. ВАГАРШАКЯН, О задаче разделения частот	25
Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН, О решениях почти гипоэллиптических уравнений в весовых пространствах Соболева	33
CEMIL TUNC, New stability and boundedness results of Liénard type equations with multiple deviating arguments	47
LANZHE LIU, Sharp Function boundedness for vector-valued multilinear singular integral operators with non-smooth kernels	57
Г. А. СУКИАСЯН, О линиях уровня гладких функций	71
ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ	83

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 4, 2010

CONTENTS

S. R. HAYRAPETYAN, On the smoothness of a class of regular equations in a strip	3
S. A. VAGHARSHAKYAN, On the problem of separation of frequencies	25
H. H. GHAZARYAN AND V. N. MARGARYAN, On solutions of almost hypoelliptic equations in weighted Sobolev spaces	33
CEMIL TUNC, New stability and boundedness results of Liénard type equations with multiple deviating arguments	47
LANZHE LIU, Sharp function boundedness for vector-valued multilinear singular integral operators with non-smooth kernels	57
G.A. SUKIASIAN, On level sets of smooth functions	71
LETTER TO THE EDITORS	83