ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2010

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 3-10.

О КРАТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Г. С. АВАГЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *grigoravagyann@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе рассматриваются некоторые вопросы о кратности точки пересечения двух плоских алгебраических кривых, где кратность характеризуется с помощью операторов с частными производными. Доказано, что если A есть m-кратная точка для одной кривой и n-кратная точка для другой, то арифметическая кратность пересечения (или число пересечений) данных кривых в точке A не меньше чем mn и равна mn, если кривые не имеют общих касательных в точке A.

MSC2000 number: 14H50

Ключевые слова: алгебраические кривые, кратность, кратность пересечения, операторы с частными производными.

1. Введение

Существуют различные способы определения кратности пересечения двух кривых в точке (например см. [5], гл. 4), для которых теорема Безу остается в силе. Теорему Безу можно сформулировать следующим образом: две кривые степеней m и n, не имеющие общих множителей, пересекаются mn раз (считая кратности). Один из подходов, рассматриваемых в [5] заключается в определении кратности с помощью формальных степенных рядов и основан на результанте двух кривых. В [5] (гл. 5, теорема 5.10) доказано, что при таком определении, если A – m-кратная точка кривой F и n-кратная точка кривой G, то F и G в точке A имеют по меньшей мере mn пересечений, причем в точности mn пересечений, если кривые F и G не имеют общих касательных в точке A.

Мы рассматриваем другой подход, предложенный в [4], в котором кратность определяется с помощью операторов с частными производными. Такой подход кажется также интересным для рассмотрения (кстати данный подход основан на идеальных интерполяционных схемах, рассмотренных в работах [1] и [2]). Мы покажем, что указанное свойство кратности пересечения в точке имеет место также для этого определения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением многочленов двух переменных, заданных в комплексном поле.

Обозначим через Π пространство всех многочленов, через Π_n - пространство многочленов степени не больше n, а через Π_n^0 - пространство однородных многочленов степени n. Пусть $\hat{p}$ - старший член (верхний однородный слой) многочлена p, а $\check{p}$ - младший (нижний однородный слой). Через $p(D) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ обозначим дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, соответствующий многочлену p.

Мы будем использовать одно и тоже обозначение для многочлена $p \in \Pi$ и соответствующей кривой, т.е. кривой заданной уравнением $p(x, y) = 0$.

Ниже приведены определения кратности кривой и кратности пересечения двух кривых в точке (см. [4]).

Определение 1. *Пространством кратности кривой p в точке λ назовем пространство многочленов*

$$M_\lambda(p) = \left\{ f \in \Pi : (D^\alpha f)(D)p|_\lambda = 0, \alpha \in \mathbb{Z}_+^2 \right\}$$

(где $\mathbb{Z}_+$ - множество целых неотрицательных чисел), а размерность пространства $M_\lambda(p)$ назовем арифметической кратностью кривой p в точке λ.

Отметим, что в некотором смысле это определение есть аналог кратности нуля в одномерном случае. Объясним почему. Ниже мы покажем, что $M_{(0,0)}(p) = Z(p)$, где $Z(p)$ - пространство многочленных решений дифференциального уравнения $p(D)f = 0$. Это означает, что арифметическая кратность p в начале координат равна размерности пространства многочленных решений соответствующего уравнения с частными производными. В одномерном случае, 0 имеет кратность k для многочлена $\wp$ тогда и только тогда, когда $\wp(D)x^i = 0, \ i = 0, 1, \ldots, k-1$. В обоих случаях арифметическая кратность начала координат совпадает с размерностью пространства многочленных решений соответствующего дифференциального уравнения.

Приведем определение кратности пересечения двух кривых в точке.

Определение 2. *Пространство многочленов $M_\lambda(p, q) = M_\lambda(p) \cap M_\lambda(q)$ назовем пространством кратности пересечений кривых p и q в точке λ, а размерность пространства $M_\lambda(p, q)$ - числом пересечений или арифметической кратностью пересечения кривых p и q в точке λ.*

Из выше приведенных определений очевидно, что оба пространства $M_\lambda(p)$ и $M_\lambda(p,q)$ D-инвариантны.

В работе [3] доказано, что теорема Безу остается в силе также при таком определении кратности пересечения:

Теорема 1. *Если многочлены $p \in \Pi_m$ и $q \in \Pi_n$ не пересекаются в бесконечности (т.е., старшие члены не имеют общих множителей), то число пересечений равно mn (считая арифметические кратности).*

Точка (a,b) называется r-кратной точкой кривой p, если в точке (a,b) все производные многочлена p, порядка меньше r, равны нулю, и существует по крайней мере одна, отличная от нуля производная порядка r:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} p(a,b) = 0, \; i+j<r \text{ и существуют } i_0, j_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ так, что } i_0 + j_0 = r$$

и

$$\frac{\partial^{i_0+j_0}}{\partial x^{i_0} \partial y^{j_0}} p(a,b) \neq 0.$$

Если (a,b) - r-кратная точка кривой p в заданной системе координат с началом (a,b), то p не будет иметь членов, степени меньше r и будет иметь члены степени r. Иными словами, младший член многочлена p в указанной системе координат будет иметь степень r. Линии, соответствующие множителям младшего члена кривой p, назовем касательными к кривой p в точке (a,b). Таким образом, p имеет в точности r касательных в r-кратной точке.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 2. *Если A – m-кратная точка кривой p и n-кратная точка кривой q, то p и q имеют не меньше mn пересечений в точке A и в точности mn пересечений, если p и q не имеют общих касательных в точке A.*

2. Кратность пересечения двух кривых в начале координат

Обозначим пространства кратностей $M_{(0,0)}(p)$ и $M_{(0,0)}(p,q)$ через $M(p)$ и $M(p,q)$, соответственно, пространство многочленных решений дифференциального уравнения $p(D)f = 0$ через $Z(p)$ и пространство многочленных решений системы дифференциального уравнения

$$\begin{cases} p(D)f = 0 \\ q(D)f = 0 \end{cases}$$

через $Z(p,q) = Z(p) \cap Z(q)$.

Применение одного многочлена на другой понимается как применение соответствующего дифференциального оператора.

Лемма 1. *Если* $p, f \in \Pi$, *то* $p(D)f|_{(0,0)} = f(D)p|_{(0,0)}$.

Доказательство. Непосредственно вытекает из того факта, что $p(D)f|_{(0,0)}$ и $f(D)p|_{(0,0)}$ являются постоянными членами многочленов $p(D)f$ и $f(D)p$, соответственно, но после применения многочлена p на q постоянный член возникает тогда и только тогда, когда один из членов p применяется на тот же член q (p и q могут отличаться только коэффициентами). □

Лемма 2. *Пространство* $Z(p)$ D*-инвариантно. Другими словами, если* $f \in Z(p)$ *то* $f_x \in Z(p)$, $f_y \in Z(p)$.

Доказательство. Пусть $f \in Z(p)$, т.е. $p(D)f = 0$. Тогда $p(D)f_x = (px)(D)f = (p(D)f)_x = 0$, т.е. $f_x \in Z(p)$. Таким же образом $f_y \in Z(p)$. □

Лемма 3. *Для любого* $p \in \Pi$, $M(p) = Z(p)$.

Доказательство. Пусть $f \in Z(p)$. Применяя лемму 1 получим, что $f(D)p|_{(0,0)} = p(D)f|_{(0,0)} = 0$, т.е. $f(D)p|_{(0,0)} = 0$. Учитывая лемму 2 получим, что

$$(D^\alpha f)(D)p|_{(0,0)} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^2,$$

следовательно $f \in M(p)$. Таким образом, $Z(p) \subseteq M(p)$.
Теперь пусть $f \in M(p)$. Покажем, что $f \in Z(p)$. Применим математическую индукцию по степени f. Если f постоянна, то из $f \in M(p)$ следует, что степень младшего члена многочлена p не меньше 1, откуда следует, что $p(D)f = 0$, т.е. $f \in Z(p)$. Предположим, что для многочленов степени, не выше n, из $f \in M(p)$ следует, что $f \in Z(p)$ и покажем для многочленов степени $n+1$. Пусть $f \in \Pi_{n+1}$ и $f \in M(p)$. Согласно определению $M(p)$, $f_x, f_y \in M(p)$, и, следовательно, применив индукционную гипотезу, получим, что $f_x, f_y \in Z(p)$ (поскольку $f_x, f_y \in \Pi_n$). Последнее означает, что $(p(D)f)_x = p(D)f_x = 0$ и $(p(D)f)_y = p(D)f_y = 0$, откуда следует, что $p(D)f = const$. Таким образом,

$$p(D)f = const = p(D)f|_{(0,0)} = f(D)p|_{(0,0)} = 0,$$

следовательно, $f \in Z(p)$ (последнее равенство следует из $f \in M(p)$). □

Из этой леммы следует, что $M(p,q) = Z(p,q)$.

Лемма 4. *Если многочлены* $p \in \Pi_m^0$ *и* $q \in \Pi_n^0$ *не имеют общих множителей, то* $dim Z(p,q) = mn$.

Доказательство. Однородный многочлен $r \in \Pi_k^0$ имеет следующий вид (см. [5]):

$$r = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_j y).$$

Из этого представления следует, что два однородных многочлена, не имеющих общих множителей, пересекаются только в начале координат. Согласно теореме Безу, $dim M(p,q) = mn$. Следовательно, применив также лемму 3, получим $dim Z(p,q) = dim M(p,q) = mn$. □

Лемма 5. *Если* $f \in Z(p)$, *то* $\hat{f} \in Z(\hat{p})$.

Доказательство. следует из того факта, что $\hat{p}(D)\hat{f} = \widehat{p(D)f}$, и $\widehat{p(D)f} = 0$, так как $f \in Z(p)$. □

Лемма 6. *Если младшие члены многочленов* $p \in \Pi_m$ *и* $q \in \Pi_n$ *не имеют общих множителей, то существует базис пространства* $Z(p,q)$ *состоящий из многочленов, старшие члены которых линейно независимы.*

Доказательство. Из лемм 5 и 4 следует, что $dim Z(p,q) < \infty$. Пусть B – произвольный базис пространства $Z(p,q)$ и пусть k - наибольшое число такое, что старшие члены многочленов степени k из B, линейно зависимы. Обозначим эти многочлены через $b_1, b_2, ..., b_l$. Так как старшие члены этих многочленов линейно зависимы, то существует линейная комбинация $b = c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_l b_l \in \Pi_{k-1}$ (где хоть один из коэффициентов $c_1, c_2, ..., c_l$ не равны нулю). С другой стороны, поскольку B – базис и многочлены из B линейно независимы, то $b \notin B$. Следовательно, множество $B \cup \{b\} \setminus \{b_1\}$ также будет базисом пространства $Z(p,q)$. Продолжая таким же образом, после конечного числа шагов получим базис пространства $Z(p,q)$, где старшие члены многочленов линейно независимы. □

Замечание 1. *Из доказательства леммы 6 видно, что базис с линейно независимыми старшими членами существует в любом конечномерном пространстве многочленов.*

Теорема 3. *Пусть* $p, q \in \Pi$, $\check{p} \in \Pi_m^0$ *и* $\check{q} \in \Pi_n^0$. *Тогда* $dim Z(p,q) \geq mn$, *и если многочлены* $\check{p}$ *и* $\check{q}$ *не имеют общих множителей, то* $dim Z(p,q) = mn$.

Доказательство. Оценим $dim(\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q))$. Пусть $f \in \Pi_{n+m-2}$. Нетрудно видеть, что $p(D)f \in \Pi_{n-2}$, а $q(D)f \in \Pi_{m-2}$. Для того, чтобы найти базис пространства $\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q)$, надо решить систему линейных уравнений с $dim\Pi_{n+m-2}$ переменными и не больше, чем $dim\Pi_{n-2} + dim\Pi_{m-2}$ независимыми условиями. Следовательно,

$$dimZ(p,q) \geq dim\,(\Pi_{n+m-2} \cap Z(p,q)) \geq \dim\Pi_{n+m-2} - dim\Pi_{n-2} - dim\Pi_{m-2} =$$
$$= \binom{n+m}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2} = mn.$$

Теперь, покажем, что если $\check{p}$ и $\check{q}$ не имеют общих множителей, то $dimZ(p,q) = mn$. Согласно лемме 6, существует базис $Z(p,q)$ состоящий из многочленов старшие члены которых линейно независимы. Пусть B - такой базис. Применив лемму 5, получим $dimZ(p,q) \leq Z(\check{p},\check{q})$, так как старшие члены многочленов из B линейно независимы и принадлежат $Z(\check{p},\check{q})$, а их количество не может быть больше $dimZ(\check{p},\check{q})$. По лемме 4 $dimZ(\check{p},\check{q}) = mn$, значит $dimZ(p,q) \leq dimZ(\check{p},\check{q}) = mn$. А по теореме 3 $dimZ(p,q) \geq mn$, значит $dimZ(p,q) = mn$. □

Из доказанной теоремы и леммы 3 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Число пересечений двух плоских алгебраических кривых в начале координат не меньше mn и в точности mn, если младшие члены данных кривых не имеют общих множителей, где m и n – порядки младших членов данных кривых.*

Из доказательства теоремы 3 и из теоремы 4 непосредственно вытекает, что если младшие члены кривых p и q имеют порядки m и n соответственно и не имеют общих множителей, то система уравнений

$$\begin{cases} p(D)f = 0 \\ q(D)f = 0 \end{cases}$$

не имеет многочленного решения порядка больше $n + m - 2$.

Следствие(*о продолжении решения*). *Пусть $p, q \in \Pi$ и многочлены $\check{p}$ и $\check{q}$ не имеют общих множителей. Если $f' \in Z(\check{p},\check{q})$, то существует $f \in \Pi$ такой, что $\hat{f} = f'$ и $f \in Z(p,q)$.*

Доказательство. Пусть B – базис пространства $Z(p,q)$, состоящий из многочленов старшие члены которых линейно независимы (существование такого базиса следует из леммы 6) и пусть $b_1, b_2, ..., b_k$ - многочлены базиса B. Обозначим через $\hat{B}$ множество многочленов $\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_k$. Из леммы 4 и теоремы 3 следует, что $dimZ(p,q) = dimZ(\check{p},\check{q})$. С другой стороны, согласно лемме 3, $\hat{B} \subseteq Z(\check{p},\check{q})$. Следовательно, $\hat{B}$ - базис пространства $Z(\check{p},\check{q})$. Значит, существуют константы

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ такие, что $f' = c_1\hat{b}_1 + c_2\hat{b}_2 + \ldots + c_k\hat{b}_k$. Возьмем $f = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_k b_k$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\hat{f} = f'$ и $f \in Z(p,q)$. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть (a,b) – координаты точки A в произвольной системе координат, а (a',b') – координаты той же точки в смещенной системе координат. Пусть (c,d) вектор смещения, так что

$$x' = x + c,$$

$$y' = y + d.$$

Пусть $r \in \Pi$ и r' – многочлен, соответствующий многочлену r в смещенной системе координат. Тогда, $r'(x',y') = r(x'-c, y'-d)$, и $r'_{x'}(x',y') = r_x(x'-c, y'-d)\cdot(x'-c)_{x'} = r_x(x'-c, y'-d) = r_x(x,y)$. Следовательно, $r'_{x'}(a',b') = r_x(a,b)$, Рчи аналогично, $r'_{y'}(a',b') = r_y(a,b)$. Отсюда следует, что $M_{(a',b')}(r')$ эквивалентно $M_{(a,b)}(r)$ в том смысле, что $f \in M_{(a,b)}(r) \Leftrightarrow f' \in M_{(a',b')}(r')$. С другой стороны нетрудно видеть, что если A – m-кратная точка кривой r, то она также будет m-кратной точкой кривой r'. Из определения касательной к кривой очевидно что $c_1x + c_2y$ - касательная к r в точке A тогда и только тогда, когда $c_1x' + c_2y'$ касательная к r' в той же точке A. Таким образом, сдвигая систему координат вектором $(-a,-b)$, из условий теоремы мы будем иметь, что $(0,0)$ - m-кратная точка p' и n-кратная точка q' и p' и q' имеют общую касательную в начале координат тогда и только тогда, когда p и q имеют таковую в точке A. Так как $M_{(a,b)}(p,q)$ и $M_{(0,0)}(p',q')$ изоморфны, то имеем, что $dim M_{(a,b)}(p,q) = dim M_{(0,0)}(p',q')$. Таким образом, согласно теореме 4, $dim M_A(p,q) \geq mn$ и $dim M_A(p,q) = mn$, если кривые p и q не имеют общих касательных в точке A. □

Abstract. The paper studies the multiplicity of intersecting point of two plane algebraic curves. The multiplicity is characterized by means of operators with partial derivatives. It is proved that if A is a point of multiplicity m for one of the curves and, a point of multiplicity n for the other curve, then the arithmetical multiplicity of the intersection (or the number of intersections) of the curves in A, is not less than mn and is equal to mn when the curves do not have common tangents at the point A.

Список литературы

[1] M. G. Marinari, H. M. Möller and T. Mora, "Gröbner bases of ideals given by dual bases", Proceedings of ISAAC (1991) (S. Watt, Ed.), New York, NY, ACM Press, Bonn, Germany, 55 – 63 (1991).

[2] C. de Boor and A. Ron, "The least solution for the polynomial interpolation problem", Math. Z. **210** (3), 347 – 378 (1992).

[3] H. Hakopian, "The multivariate fundamental theorem of Algebra, Bezout's theorem and Nullstellensatz", Approximation Theory (D. K. Dimitrov et al., eds.), Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 73 – 97 (2004).

[4] H. Hakopian and M. Tonoyan, "Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems", New York J. Math., http://nyjm.albany.edu:8000/j/2004/10-6.html, **10**, 89–116 (2004).

[5] R. Walker, Algebraic Curves, Princeton, New Jersey (1950).

Поступила 6 ноября 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 11-24.

О ЖАДНОМ АЛГОРИТМЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

А. АЛЕКСАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *haik_ alexanyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе изучается равномерная и почти всюду сходимость жадного (гриди) алгоритма по системе Хаара. Получены необходимые и достаточные условия для нормирования функций системы Хаара, которые гарантируют равномерную сходимость для функций из C$[0,1]$ и сходимость почти всюду для функций из $L^1[0,1]$.

MSC2000 number: 42C15, 42C20

Ключевые слова: жадный (гриди) алгоритм, система Хаара, равномерная сходимость.

1. Введение

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в банаховом пространстве X и $\inf\limits_n ||\varphi_n||_X > 0$. Тогда любой элемент $f \in$ X единственным образом разлагается в ряд по системе Φ, который сходится к f по норме пространства X:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n,$$

где $c_n(f)$ коэффиценты разложения, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.
Обозначим через Λ_N множество из N индексов для которых

$$\min_{k\in\Lambda_N} |c_k(f)| \geq \max_{k\notin\Lambda_N} |c_k(f)|.$$

Тогда

$$\mathrm{G}_N(f) := \mathrm{G}_N(f,\Phi) := \sum_{k\in\Lambda_N} c_k(f)\varphi_k$$

называется N-тым жадным (гриди) аппроксимантом элемента f по системе Φ. Этот метод приближения называется жадным алгоритмом.
Базис Φ називается *квази-гриди* базисом, если существует константа C такая, что для любого $f \in$ X

$$||\mathrm{G}_N(f,\Phi)|| \leq C||f||, \ N = 1, 2... \ .$$

В работе [2] Войтащик доказал, что базис Φ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \mathrm{G}_N(f,\Phi)|| = 0.$$

Сходимость жадного алгоритма для конкретных систем была рассмотрена многими авторами. Т. Кернер, ответив на вопрос поставленный Л. Карлесоном и Р. Койфманом, построил в [3] функцию из $L^2(\mathbb{T})$, а затем в [4] непрерывную функцию, жадные алгоритмы которых по тригонометрической системе расходятся почти всюду.

В работе [5] В. Темлякова доказано существование функции из L^p, $1 \le p < 2$, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится по мере, и непрерывной фукнции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится в L^p, $p > 2$. С другой стороны в работе [6] С. В. Конягина и В. Н. Темлякова были получены достаточные условия для сходимости жадного алгоритма. Аналогичные результаты о сходимости и расходимости жадного алгоритма по системе Уолша были получены Г. Амирханяном (см. [11]).

М. Григоряном и А. Саргсяном в работе [12] был построен пример непрерывной функции, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится по мере.

В работе [7] С. Костюковский и А. Олевский построили ортонормированный базис для $L^2(0,1)$, состоящий из равномерно ограниченных функций, такой что для любой функции из $L^2(0,1)$ жадный алгоритм по этой системе сходится почти всюду, а в работе [8] М. Нильсена была построена равномерно ограниченная ортонормированная система, которая является квази-гриди базисом в $L^p(0,1)$ при всех $1 < p < \infty$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая последовательность положительных чисел. Для $f \in \mathrm{X}$ рассмотрим убывающую по модулю перестановку ненулевых коэффицентов с весом γ_n:

$$|\gamma_{\sigma(1)} c_{\sigma(1)}(f)| \ge |\gamma_{\sigma(2)} c_{\sigma(2)}(f)| \ge ...|\gamma_{\sigma(n)} c_{\sigma(n)}(f)| \ge ..., \tag{1.1}$$

и положим

$$G_N(f,\Phi,\Gamma) := \sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)}(f)\varphi_{\sigma(n)},\ N = 1,2,... \tag{1.2}$$

Множество перестановок σ с условием (1.1) обозначим через $D(f,\Phi,\Gamma)$. Легко видеть, что (1.2) совпадает с жадным аппроксимантом по перенормированной системе Φ:

$$G_N(f,\Phi,\Gamma) = G_N\left(f, \left\{\frac{1}{\gamma_n}\varphi_n\right\}\right), \ N = 1, 2, ... \tag{1.3}$$

В работе С. Конягина и В. Темлякова ([10]) доказано что для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X, при $\Gamma = \{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ для любого $f \in \mathrm{X}$

$$\lim_{N\to\infty} ||G_N(f,\Phi,\Gamma) - f||_{\mathrm{X}} = 0.$$

Пусть $\mathrm{H}_p = \{h_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$ - система Хаара, нормированная в $L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$ и пусть $\Gamma_p = \{\gamma_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\gamma_{n,p} = 2^{-\frac{k}{p}}$, если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, .., 2^k$.

Замечание 1. *Пусть $f \in L^1(0,1)$, а $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ - коэффиценты разложения f по системе H_∞. Если $f \in \mathrm{C}[0,1]$, то $c_n(f) \to 0$ и тогда перестановка σ, удовлетворяющая условию* (1.1) *существует. Но условие $f \in L^1(0,1)$ не гарантирует, что $c_n(f) \to 0$, т.е., в зависимости от f и Γ, перестановки, удовлетворяющей условию* (1.1)*, может и не существовать. В этом случае коэффиценты разбиваются на две части*

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \ |c_n(f)| \le 1\}, \ B := \mathbb{N} \setminus A.$$

После этого рассматриваются те перестановки σ ненулевых коэффицентов, для которых

$$|\gamma_{\sigma(n)} c_{\sigma(n)}(f)| \ge |\gamma_{\sigma(n+1)} c_{\sigma(n+1)}(f)|, \ \textit{где}\ n \in A, \tag{1.4}$$

а часть B может перестанавливаться произвольным образом. В этом случае сходимость жадных аппроксимантов понимается уже для таких перестановок.

Заметим, что для Γ стремящихся к нулю, перестановка, удовлетворяющая (1.4) всегда существует, а для последовательностей, не стремящихся к нулю, рассматриваются только функнции, для которых перестановка удовлетворяющая (1.4) существует, что, как будет видно ниже, не ограничивает общности.

В дальнейшем множества $D(f,\Phi,\Gamma)$ и аппроксиманты (1.2) будем понимать с учетом замечания 1.

Следующую теорему Т. Тао мы приводим в несколько иной, но эквивалентной формулировке.

Теорема. *(Т. Тао* [9]*). а) Если $1 < p < \infty$, тогда для любой функции $f \in L^p(0,1)$*

$$\lim_{N\to\infty} G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma_p)(x) = f(x) \ \textit{п.в. на}\ [0,1].$$

б) существует функция $f \in \bigcap_{1<p<\infty} L^p(0,1)$ *такая, что*

$$\lim_{N\to\infty} \sup |G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma_\infty)(x)| = +\infty, \ x \in [0,1].$$

Заметим, что в силу (1.2) и (1.3) имеем $G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma_p) \equiv G_N(f, \mathrm{H}_p)$, $1 \le p \le \infty$. Для последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$ обозначим

$$\tau(\Gamma) = \sup_{m>n} \left\{ \frac{m}{n} : \ \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \le 2 \right\}. \tag{1.5}$$

Пример 1. *Для произвольного* $p > 0$ *имеет место* $\tau(\{n^{-p}\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$, *тогда как* $\tau(\{(\ln n)^{-1}\}_{n=2}^{\infty}) = \infty$.

Пример 2. *Пусть для* $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет место* $\tau(\Gamma) < +\infty$. *Заметим, что из условия* $\tau(\Gamma) < +\infty$ *следует, что* $\gamma_n \to 0$. *Рассмотрим последовательность*

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{i} \right) \gamma_{n_k} \right\}_{i=2}^{k} \right\}_{k=2}^{\infty}, \ \text{где } n_2 < n_3 < \ldots$$

Легко видеть, что $\tau(\widetilde{\Gamma}) = +\infty$ *и если выбрать числа* n_k, $k = 2, 3, \ldots$ *достаточно быстро стремящиеся к* $+\infty$, *то получим, что последовательность* $\widetilde{\Gamma}$ *может стремится к нулю сколь угодно быстро.*

С. Гогян [13] доказал, что система H_1 является квази-гриди базисом в пространстве $L^1(0,1)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\Gamma) < +\infty$.
В настоящей работе доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *1) Если* $\tau(\Gamma) < +\infty$, *тогда для любой функции* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *и любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N\to\infty} ||f - G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)||_{\mathrm{C}} = 0.$$

2) Если $\tau(\Gamma) = \infty$, *тогда существует функция* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *такая, что для любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N\to\infty} \sup |G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)(x)| = +\infty \ \text{п.в. на } [0,1]$$

Теорема 2. *Для того, чтобы* $\lim_{N\to\infty} G_N(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)(x) = f(x)$ *п.в. на* $[0,1]$, *для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *и любой перестановки* $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\tau(\Gamma) < +\infty$.

Так как $\tau(\Gamma_p) < +\infty$, $1 \le p < +\infty$ и $\tau(\Gamma_\infty) = \infty$, то теорема Т. Тао следует из теорем 1 и 2.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Двоичным интервалом называется интервал вида $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, где $i = 1, 2, ..., 2^k$, а $k = 0, 1, ...$ Для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1, ...$ обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \ \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right];$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0, 1); \ \overline{\Delta}_1 = [0, 1].$$

Обозначим левые и правые половины двоичных интервалов через Δ_n^+ и Δ_n^-:

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1},$$

$$\Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i-1}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Середину интервала Δ_n обозначим через t_n, $t_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$, если $n = 2^k + i$.
Обозначим через $\mathrm{H}_\infty = \{h_n\}_{n=1}^\infty$ систему Хаара нормированную по норме $||\cdot||_\infty$.
Для каждой перестановки $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ определим множество

$$\Lambda_N(f) := \Lambda_N(f, \sigma) := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)\}, \ N = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

и мажоранту жадных операторов
(2.2)

$$G_N^*(f, x) := G_N^*(f, \sigma, x) := \sup_{1 \le n \le N} \left| \sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)}(f) h_{\sigma(k)}(x) \right|, \ x \in [0, 1], \ N = 1, 2, ...$$

Положим также

$$\mathrm{sp} f := \{n \in \mathbb{N} : \ c_n(f) \neq 0\}. \tag{2.3}$$

Выражение $a \asymp b$ означает двойное неравенство $C_1 a \le b \le C_2 a$, где C_1 и C_2 абсолютные положительные постоянные.
В дальнейшем через C обозначим абсолютную константу, которая может быть разной в разных формулах.
Для системы Хаара известны следующие результаты

Лемма 1. *([14], стр. 88) Пусть $A_0 = \{(0, 1), \ \emptyset\}$, $A_j = \{(0, 1), \ \emptyset, \ \Delta_n^+, \ \Delta_n^- : \ n = 1, 2, ..., j\}$ и $\mathcal{F}_j$ – семейство всех множеств, представимых в виде объединения какого-то числа интервалов из A_j $(j = 0, 1, ...)$. Пусть, далее, $\alpha(x)$, $x \in [0, 1]$, – функция, принимающая значения $0, 1, ..., \infty$ и такая, что*

$$e_j \equiv \{x \in (0, 1) : \ \alpha(x) = j\} \in \mathcal{F}_j, \ j = 0, 1, ...$$

Тогда можно найти такую последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n = 0$ или 1, что

$$\varepsilon_n h_n(x) = \begin{cases} h_n(x), & \text{если } n \le \alpha(x), \\ 0, & \text{если } n > \alpha(x) \ , \end{cases} \quad x \in (0, 1) \setminus R_2, \ n = 1, 2, ...,$$

где $R_2 = \{\{i/2^k\}_{i=1}^{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$, *и, следовательно, для произвольных чисел* c_n, $n = 1, 2, ...$,

$$\sum_{n=1}^{\alpha(x)} c_n h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n h_n(x), \quad x \in (0,1) \setminus R_2$$

(*здесь* $\sum\limits_{n=1}^{0} \equiv 0$).

Лемма 2. *(*[14]*, стр. 105) Для любого полинома вида*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n h_n(x),\ 1 < M < N,$$

найдется такая перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ *чисел* $M, M+1, ..., N$ *что для любого* $x \in [0,1]$

$$\max_{M \le p \le q \le N} \left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} h_{\sigma(n)}(x) \right| \ge \frac{1}{4} \sum_{n=M}^{N} |a_n h_n(x)|.$$

Замечание 2. *Из доказательства леммы* 2 *следует, что если все коэффиценты* a_n *одного знака, то перестановку* σ *можно выбрать из условия*

$$0 < t_{\sigma(M)} < t_{\sigma(M+1)} < ... < t_{\sigma(N)} < 1, \tag{2.4}$$

где t_n *– середина интервала* Δ_n*, а вместо* $1/4$ *в лемме можно взять* $1/2$.

Нам понадобится также следующее утверждение.

Теорема 3. *(*[14]*, стр. 97) Для того, чтобы ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$$

сходился п.в. на множестве $E \subset (0,1)$, $\mu(E) > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы для п.в.* $x \in E$ *была конечна сумма ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 h_n^2(x).$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывающая последовательность положительных чисел, а натуральные числа* $m, p > 1$, $A < B$ *таковы, что*

$$\left[2^{p+1}, 2^{p+m^7+1}\right] \subset [A, B] \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \le 2. \tag{2.5}$$

Тогда для произвольной последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $|\xi_i| \le m^{-8}$, $i = 1, 2, ...$, *существует функция* $f \in \mathrm{C}[0,1]$ *и множество* $L \subset \mathrm{sp}f$, *такие, что*

1. $||f||_{\mathrm{C}} \le C$,

2. $c_j(f) = 0$ *для любого* $j \le p$,
3. $\frac{1}{4m^4} < c_j(f) < \frac{4}{m^4}$, *если* $i, j \in L$,
4. *для* $\overline{f} := f + \sum\limits_{n\in L} \xi_n h_n$ *и любого* $\sigma \in D(\overline{f}, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$, *если* $\Lambda_q(\overline{f}) \supset L$, *то*

$$\mu\left\{x \in [0,1] : \ G_q^*(\overline{f}, x) \ge \frac{1}{12} m^3\right\} \ge 1 - \frac{C}{m},$$

Доказательство. Рассмотрим следующий полином

$$P(x) = \frac{1}{m^4} \sum_{k=p+1}^{p+m^7} \sum_{i=1}^{2^k} \tau_k^i h_k^i(x), \tag{2.6}$$

где все числа τ_k^i из интервала $[\frac{1}{3}, 3]$ и будут выбраны ниже. Очевидно, что

$$\frac{1}{m^4} \sum_{k=p+1}^{p+m^7} \sum_{i=1}^{2^k} \tau_k^i |h_k^i(x)| \asymp m^3 \text{ п.в. на } [0,1] \text{ и } ||P||_2 \asymp \frac{1}{\sqrt{m}}, \tag{2.7}$$

независимо от выбора чисел $\{\tau_k^i\}$. Пусть $\mathrm{sp}P = \{M_i\}_{i=1}^v$ где $M_1 < M_2 < ... < M_v$, а σ - перестановка множества $\mathrm{sp}P$, удовлетворяющая условию (2.4). Выберем числа $\{\tau_k^i\}$ следующим образом

$$\tau_{M_i} = \frac{\gamma_{\sigma^{-1}(M_i)}}{\gamma_{M_i}}, \ i = 1, 2, ..., v. \tag{2.8}$$

Из монотонности Γ и условия (2.5) имеем, что $\frac{1}{2} \le \tau_n \le 2$ для любого $n \in \mathrm{sp}P$, а учитывая выбор перестановки σ получаем, что $\sigma \in D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$. Поскольку $\frac{1}{3} < \tau_n < 3$, $n \in \mathrm{sp}P$, то незначительными изменениями чисел τ_n мы можем добиться того, чтобы величины $|\gamma_n c_n(P)|$ были попарно различными и $\frac{1}{3} \le \tau_n \le 3$, $n \in \mathrm{sp}P$, сохранив, при этом отмеченные свойства полинома P и перестановки σ. Поэтому можем считать, что $\#D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma) = 1$.
Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sup\limits_{N: x \in \Delta_N} ||S_N(P)||_{\mathrm{C}} \le 1, \\ \inf\{N : ||S_{N+1}(P)||_{\mathrm{C}(\Delta_{N+1})} > 1, \ x \in \Delta_{N+1}\}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Обозначим $e_j := \{x \in [0,1] : \ \alpha(x) = j\}$, $j = 0, 1, 2....$ Из определения функции $\alpha(x)$ следует, что если $e_j \ne \emptyset$, то $e_j = \Delta_{j+1}$, $j = 0, 1, ...$, т.е. функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, следовательно существует последовательность $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $n = 1, 2, ...$, такая, что

$$Q(x) := \sum_{n=1}^{\alpha(x)} c_n(P) h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n(P) h_n(x), \ x \in [0,1] \setminus R_2. \tag{2.9}$$

Ясно, что $Q(x)$ является полиномом по системе Хаара, а также

$$||Q||_{\mathrm{C}} \le 1, \ ||Q||_2 \le C \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{2.10}$$

Обозначим

$$E := \{x \in [0,1]:\ \alpha(x) = +\infty\} \text{ и } S^*(P,x) := \sup_{1 \le N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} c_n(P) h_n(x) \right|,\ x \in [0,1].$$

Известна следующая оценка (см. [14], стр. 88)

$$||S^*(f)||_p \asymp ||f||_p,\ 1 < p < \infty. \tag{2.11}$$

Имеем $\{x \in [0,1] : \alpha(x) < +\infty\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} e_j$ и если $e_j \neq \emptyset$, то $e_j = \Delta_{j+1}$. Заметим, что функция $S_{j+1}(P,x)$ постоянна на интервалах Δ_{j+1}^+ и Δ_{j+1}^-, следовательно либо Δ_{j+1}^+ либо Δ_{j+1}^- содержится в множестве $\{x \in [0,1]:\ S^*(P,x) > 1\}$. Так как множества e_j не пересекаются, получаем

$$\mu\{x \in [0,1]:\ \alpha(x) < +\infty\} \le 2\mu\{x \in [0,1]:\ S^*(P,x) > 1\}. \tag{2.12}$$

Из (2.12), неравенства Чебышева и (2.11) следует, что

$$\mu\{x \in [0,1]:\ \alpha(x) < +\infty\} \le 2||S^*(P)||_2^2 \le C||P||_2^2 \le \frac{C}{m}.$$

Окончательно, имеем

$$\mu(E) \ge 1 - \frac{C}{m}, \tag{2.13}$$

и согласно (2.7),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(Q)h_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(P)h_n(x)| \asymp m^3,\ x \in E. \tag{2.14}$$

Обозначим $L := \mathrm{sp}Q$ и $\overline{Q}(x) := \sum_{n \in L} (c_n(Q) - \xi_n) h_n(x)$, и пусть $0 < x_1 < x_2 < ... < x_r < 1$ есть точки разрыва полинома $\overline{Q}$. Выберем число $k > p + m^7 + 1$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < x_1 - \frac{1}{2^{k+1}} < x_r + \frac{1}{2^{k+1}} < 1 \tag{2.15}$$

и

$$x_i + \frac{1}{2^{k+1}} < x_{i+1} - \frac{1}{2^{k+1}},\ i = 1, 2, ..., r-1. \tag{2.16}$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} \overline{Q}(x), & \text{если } x \in [0,1] \setminus (x_i - \frac{3}{2^{k+3}}, x_i + \frac{3}{2^{k+3}}) \text{ и } x = x_i \pm \frac{j}{2^{k+3}},\ j = 1,3, \\ \frac{3}{2}\overline{Q}(x_i \pm 0), & \text{если } x = x_i \pm \frac{2}{2^{k+3}}, \\ 0, & \text{если } x = x_i, \end{cases}$$

где $1 \le i \le r$, а в каждом из оставшихся интервалов, где f неопределена, определим как линейную и непрерывную. Согласно определению имеем, что функция f непрерывна на $[0,1]$ и

$$c_n(f) = c_n(\overline{Q}),\ n \le 2^k. \tag{2.17}$$

Покажем, что функция f и множество L удовлетворяют требованиям леммы 3. По определению имеем $f \in C[0,1]$ и $||f||_{\mathrm{C}} \leq 3$, что является первым пунктом леммы. Второй пункт леммы следует из (2.6), (2.9) и (2.17), а учитывая что $|\xi_n| \leq m^{-8}$, $n = 1, 2, ...$ убеждаемся в справедливости третьего пункта.
Пусть теперь $\overline{f} := f + \sum\limits_{n \in L} \xi_n h_n$. Из (2.6), (2.9) и (2.17) имеем

$$c_n(\overline{f}) = c_n(Q) = c_n(P), \text{ для } n \in L. \tag{2.18}$$

Поскольку $\# D(P, \mathrm{H}_\infty, \Gamma) = 1$, то вместе с (2.8) и (2.18) получаем, что при любой перестановке $\sigma \in D(\overline{f}, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ множество sp$P$ переставляется по правилу (2.4), что вместе с (2.13), (2.14) и леммой 2 дает последний пункт леммы. Лемма доказана. □

3. Доказательства теорем

Доказательство первой части теоремы 1. Пусть $\tau(\Gamma) < +\infty$, $f \in \mathrm{C}[0,1]$ и число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Обозначим

$$T_\varepsilon(f)(x) := \sum_{n:\ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f) h_n(x),\ x \in [0,1],$$

и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{N} :\ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq N\}.$$

Тогда

$$\{n \in \mathbb{N} :\ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{1, 2, ..., N(\varepsilon)\}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}| \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{3.2}$$

Оценим следующую разность
(3.3)

$$||S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{C}} = \left|\left| \sum_{n \leq N(\varepsilon),\ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon} c_n(f) h_n(x) \right|\right|_{\mathrm{C}} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{[\log_2 N(\varepsilon)]-1} \frac{1}{\gamma_{n_k}} + \frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}},$$

где $n_k = 2^{k+1}$. Если $l_0 := [\log_2 \tau(\Gamma)] + 1$, тогда

$$\frac{n_{k+l_0}}{n_k} > \tau,\ k = 0, 1, ..., [\log_2 N(\varepsilon)] - l_0 - 1, \tag{3.4}$$

откуда следует, что

$$\frac{\gamma_{n_k}}{\gamma_{n_{k+l_0}}} > 2,\ k = 0, 1, ..., [\log_2 N(\varepsilon)] - l_0 - 1. \tag{3.5}$$

Учитивая (3.5), получим

$$\sum_{k=0}^{[\log_2 N(\varepsilon)]-1} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \leq \sum_{r=0}^{l_0-1} \sum_{k \equiv r (mod\ l_0)} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{l_0-1}\left(\frac{1}{2^{i_r}}+\frac{1}{2^{i_r-1}}+...+1\right)\frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}}\leq\frac{C}{\gamma_{N(\varepsilon)}}, \tag{3.6}$$

для некоторых индексов i_r, $r=0,1,...,l_0-1$.
Из оценок (3.3), (3.6) и (3.2) следует, что

$$||S_{N(\varepsilon)}(f)-T_\varepsilon(f)||_{\mathrm{C}}\to 0,\ \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{3.7}$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty}||f-S_N(f)||_C=0$, получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}||f-T_\varepsilon(f)||_C=0. \tag{3.8}$$

Если множество $D(f,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)$ состоит из одного элемента, то для любого $N\in\mathbb{N}$ существует $\varepsilon=\varepsilon(N)>0$, для которого $G_N(f)\equiv T_\varepsilon(f)$ и, следовательно, имеем

$$\lim_{N\to\infty}||f-G_N(f)||_C=0.$$

В случае $\#D(f,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)>1$, обозначим

$$\Omega_0=\emptyset,\ \Omega_n=\{k\in\mathbb{N}\setminus(\Omega_1\cup...\cup\Omega_{n-1}):\ |\gamma_k c_k(f)|=|\gamma_n c_n(f)|\},\ n=1,2,... \tag{3.9}$$

и если $\Omega_n\neq\emptyset$, то положим $\omega_n=\max\Omega_n$. Теперь если $\#\Omega_n>1$, то теми же рассуждениями как и при доказательстве оценки (3.6), получим

$$\sum_{k\in\Omega_n}|c_k(f)h_k(x)|=|\gamma_{\omega_n}c_{\omega_n}(f)|\sum_{k\in\Omega_n}\frac{1}{\gamma_k}|h_k(x)|\leq$$

$$|\gamma_{\omega_n}c_{\omega_n}(f)|\sum_{k=1}^{\omega_n}\frac{1}{\gamma_k}|h_k(x)|\leq C|c_{\omega_n}(f)|,\ x\in[0,1],$$

что вместе с (3.8) доказывает первый пункт теоремы.

Доказательство второй части теоремы 1. Пусть $\tau(\Gamma)=+\infty$. Тогда для любых натуральных чисел k и m, существуют индексы $B>A>m$, такие, что

$$\frac{B}{A}>k \text{ и } \frac{\gamma_A}{\gamma_B}\leq 2. \tag{3.10}$$

Индукцией по $n=1,2,...$ построим последовательность функций $f_n\in\mathrm{C}[0,1]$, множество индексов L_n и индексы q_n, а также вспомогательные индексы p_n, A_n, B_n и последовательности $\{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющие следующим условиям:

a) $||f_n||_{\mathrm{C}}\leq\frac{C}{n^2}$,
b) $\max L_n<\min L_{n+1}$ и $q_n<q_{n+1}$,
c) $c_j(f_n)=0$, если $j<\min L_n$,
d) если $F_n=\sum\limits_{k=1}^n f_k$, то $\max\limits_{j\in L_{k+1}}|\gamma_j c_j(F_n)|<\min\limits_{j\in L_k}|\gamma_j c_j(F_n)|$ где $k=1,2,...,n-1$,
e) $\mu\{x\in[0,1]:\ G^*_{q_n}(F_n,\sigma,x)\geq\frac{1}{12}n\}\geq 1-\frac{C}{n}$, для любого $\sigma\in D(F_n,\mathrm{H}_\infty,\Gamma)$, если q_n выбрано так, чтобы $\Lambda_{q_n}(F_n,\sigma)\supset L_n$.

Пусть $n = 1$, $m_1 = 2n$ и числа $B_1 > A_1 > 1$ выбраны так, чтобы

$$\frac{B_1}{A_1} > 2^{m_1^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_{B_1}} \leq 2. \tag{3.11}$$

Возможность такого выбора следует из (3.10). Возьмем $p_1 = [\log_2 A_1] + 1$ и $\{\xi_i^1\}_{i=1}^\infty = (0, 0, ...)$. Из выбора p_1 и условия (3.11) следует, что $[2^{p_1}, 2^{p_1+m_1^7+2}] \subset [A_1, B_1]$. Пусть g_1 непрерывная функция на $[0, 1]$, а L_1 множество индексов, которые удовлетворяют условиям леммы 3 при начальных условиях m_1, p_1, A_1, B_1 и $\{\xi_i^1\}_{i=1}^\infty$. Обозначим $f_1 := g_1$ и $F_1 := f_1$. Пусть далее индекс q_1 выбран так, чтобы $\Lambda_{q_1}(F_1) \supset L_1$. Очевидно условия $a)$, $c)$ и $e)$ удовлетворяются.

Теперь возьмем $n = 2$ и $m_2 = 2n$. Поскольку $c_k(F_1) \to 0$, то существует индекс $K_0 > q_1$, такой что $|c_k(F_1)| < m_2^{-10}$, для любого $k \geq K_0$. Выберем натуральные числа $B_2 > A_2$ так, чтобы

$$A_2 > \max\{B_1, 2^{K_0+2}\}, \ \frac{B_2}{A_2} > 2^{m_2^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_2}}{\gamma_{B_2}} \leq 2. \tag{3.12}$$

Далее возьмем $p_2 = [\log_2 A_2] + 1$ и учитывая (3.12), получим $[2^{p_2}, 2^{p_2+m_2^7+2}] \subset [A_2, B_2]$. Потом выберем последовательность $\{\xi_i^2\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\xi_i^2 = 0, \text{ если } i \leq p_2 \text{ и } \xi_i^2 = m_2^2 c_i(F_1), \text{ если } i \geq p_2.$$

Пусть теперь $g_2 \in C[0, 1]$ - функция, а L_2 - множество индексов удовлетворяющие лемме 3, с условиями m_2, p_2, A_2, B_2 и $\{\xi_i^2\}_{i=1}^\infty$. Обозначим $f_2 := \frac{1}{2^2} g_2$ и $F_2 := F_1 + f_2$. Пусть далее индекс q_2 выбран так, чтобы $\Lambda_{q_2}(F_2) \supset L_2$. Из пунктов $1 - 4$ леммы 3, выбора индексов m_1, m_2, p_1, p_2, q_1, q_2 и функций f_1, f_2 следует выполнение условий а) – е).

Теперь предположим, что построены величины f_k, F_k, L_k, p_k, q_k, A_k, B_k и $\{\xi_i^k\}_{i=1}^\infty$, $k = 1, 2, ..., n$, для которых выполнены соотношения $a) - e)$ и пусть $m_{n+1} = 2(n + 1)$. Поскольку $c_k(F_n) \to 0$, $k \to \infty$, то найдется индекс $K_0 > q_n$ такой, что $|c_k(F_n)| < m_{n+1}^{-10}$, для любого $k \geq K_0$. Далее выберем индексы $B_{n+1} > A_{n+1}$ так, чтобы

$$A_{n+1} > \max\{B_n, 2^{K_0+2}\}, \ \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} > 2^{m_{n+1}^7+3} \text{ и } \frac{\gamma_{A_{n+1}}}{\gamma_{B_{n+1}}} \leq 2. \tag{3.13}$$

Обозначив $p_{n+1} = [\log_2 A_{n+1}] + 1$, из (3.13) получим $[2^{p_{n+1}}, 2^{m_{n+1}^7+p_{n+1}+1}] \subset [A_{n+1}, B_{n+1}]$. Выберем последовательность $\{\xi_i^{n+1}\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\xi_i^{n+1} = 0, \text{ если } i \leq p_{n+1} \text{ и } \xi_i^{n+1} = m_{n+1}^2 c_i(F_n), \text{ если } i \geq p_{n+1}.$$

Применим теперь лемму 3 для начальных условий m_{n+1}, p_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1} и $\{\xi_i^{n+1}\}_{i=1}^\infty$ и пусть g_{n+1} - функция, а L_{n+1} - множество индексов, удовлетворяющие условиям леммы. Обозначим $f_{n+1} := \frac{1}{(n+1)^2} g_{n+1}$ и $F_{n+1} := F_n + f_{n+1}$ и выберем индекс q_{n+1} так, чтобы $\Lambda_{q_{n+1}}(F_{n+1}) \supset L_{n+1}$. Выполнение условий $a)-e)$ очевидно.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$ и покажем, что f удовлетворяет второй части теоремы 1. Прежде всего из $a)$ следует, что $f \in \mathrm{C}[0,1]$. Возмем произвольную перестановку $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ и заметим, что из условий $b)$, $c)$ и $d)$ следует, что величины $|c_n(f)\gamma_n|$ переставляются по порядку убывания в любом блоке L_n, и если $m > k$, то все величины $|c_n(f)\gamma_n|$ из блока L_k строго больше чем величины $|c_n(f)\gamma_n|$ из блока L_m. Из сказанного вытекает, что если подобрать индексы $q_n^{'}$ таким образом, чтобы $\Lambda_{q_n^{'}}(f,\sigma) \supset L_n$, $n = 1, 2, ...$, то учитывая $e)$, получим

$$\mu\{x \in [0,1] : \ G^*_{q_n^{'}}(f, \sigma, x) \geq \frac{1}{12} n\} \geq 1 - \frac{C}{n}, \tag{3.14}$$

что означает расходимость к $+\infty$ п.в. последовательности $G_N(f, \sigma, x)$. Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Необходимость, очевидным образом, следует из второй части теоремы 1. Докажем достаточность. Напомним, что из условия $\tau(\Gamma) < +\infty$ следует, что $\gamma_n \searrow 0$ и в этом случае множества $D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$ для $f \in L^1(0,1)$ понимаются с учетом замечания 1.

Поскольку условие $f \in L^1(0,1)$ не гарантирует стремление коэффицентов к нулю, то рассуждения из теоремы 1 не проходят. Поэтому поступим следующим образом. Обозначим

$$A_0 = \emptyset, \ A_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) : \ |c_k(f)| \geq \frac{1}{n} \right\}, \ n = 1, 2, ...$$

Нас интересуют только бесконечные множества A_n. Для этого рассмотрим функцию

$$\psi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \#A_n < \infty, \\ n, & \text{если } \ \#A_n = \infty. \end{cases}$$

Из определения $\psi(n)$ следует, что множество $A_{\psi(n)}$ либо пусто, либо бесконечно. Используя теорему 3 и тот факт, что ряд Фурье-Хаара функции f сходится к f п.в., получаем

$$\sum_{k \in A_{\psi(n)}} |c_k(f) h_k(x)| \leq n^2 \sum_{k \in A_{\psi(n)}} |c_k(f)|^2 |h_k(x)|^2 < +\infty \text{ п.в. } , n = 1, 2, ...$$

т.е. сходимость в блоках $A_{\psi(n)}$ абсолютна.

Фиксируем $\delta > 0$ и пусть число $N_0 > 1$ выбрано так, чтобы $|c_k(f)| < \delta$, для любого $k \in A_{\psi(n)}$ и $n \geq N_0$. Обозначим $B := \mathbb{N} \setminus (A_{\psi(1)} \cup ... \cup A_{\psi(N_0)})$ и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon, \ \forall n > N, \ n \in B\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, что

$$\{n \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{1, 2, ..., N(\varepsilon)\}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}| \leq \delta. \tag{3.16}$$

Суммы $T_\varepsilon(f)(x)$ и $S_{N(\varepsilon)}(f)(x)$ разделим на две части следующим образом:

$$T_\varepsilon(f)(x) = \sum_{n \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f) h_n(x) + \Sigma_1,$$

$$S_{N(\varepsilon)}(f)(x) = \sum_{n=1, \ n \in B}^{N(\varepsilon)} c_n(f) h_n(x) + \Sigma_2.$$

Имеем

$$|T_\varepsilon(f)(x) - S_{N(\varepsilon)}(f)(x)| \leq |\Sigma_1 - \Sigma_2| +$$

$$\left| \sum_{n \in B: \ |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f) h_n(x) - \sum_{n=1, \ n \in B}^{N(\varepsilon)} c_n(f) h_n(x) \right|.$$

Учитывая, что сходимость в блоках $A_{\psi(n)}$ абсолютна и что N_0 фиксировано, получим, что первая разность стремится к нулю п.в., когда $\varepsilon \to 0$. Как и при доказательстве первой части теоремы 1, можно показать, что вторая разность меньше $C|c_{N(\varepsilon)}(f)| \leq C \cdot \delta$. Поскольку δ произвольно, получим что $T_\varepsilon(f)(x)$ стремятся к $f(x)$ п.в..

Рассмотрим теперь множества Ω_n определенные в (3.9). Если $\Omega_n \neq \emptyset$, то из теоремы 3 получим

$$\sum_{k \in \Omega_n} |c_k(f) h_k(x)|^2 = \sum_{k \in \Omega_n} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_k^2} |c_n(f)|^2 |h_k(x)|^2 =$$

$$\gamma_n^2 |c_n(f)|^2 \sum_{k \in \Omega_n} \frac{1}{\gamma_k^2} |h_k(x)|^2 < +\infty, \text{ п.в. на } [0, 1].$$

из чего следует, что

$$\sum_{k \in \Omega_n} |h_k(x)|^2 < +\infty, \text{ п.в. на } [0, 1]. \tag{3.17}$$

Из сходимости $T_\varepsilon(f)(x)$ и соотношения (3.17) вытекает сходимость жадных аппроксимантов $G_N(f, \sigma, x)$ к функции f п.в. на $[0, 1]$, для любого $\sigma \in D(f, \mathrm{H}_\infty, \Gamma)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Автор выражает благодарность профессору А. Саакяну и С. Гогяну за постановку задачи и за ценные замечания при написании настоящей работы.

Abstract. The paper investigates the uniform and almost everywhere convergence of the greedy algorithm by the Haar system. Necessary and sufficient conditions for norming the functions of Haar system are obtained, which guarantee the uniform convergence for functions from C$[0,1]$ and almost everywhere convergence for functions from $L^1[0,1]$.

Список литературы

[1] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx. **5**, 1 – 15 (1999).

[2] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory, **107**, 293 – 314 (2000).

[3] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics, **144**, 167 – 180 (1996).

[4] T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications, **5**, 1 – 19 (1999).

[5] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Foundations of Computational Mathematics, **3** (1), 33 – 107 (2003).

[6] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. The Trigonomeric System", Studia Math. **159** (2), 161 – 184 (2003).

[7] S. Kostyukovsky, A. Olevskii, "Note on decreasing rearrangement of Fourier series", J. of Applied Analysis **3** (1), 137 – 142 (1997).

[8] M. Nielsen, "An Example of an Almost Greedy Uniformly Bounded Orthonormal Basis for $L^p(0,1)$", arXiv:math.FA/0611890 **1** (28) (2006).

[9] T. Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Computational Harmonic Analysis, 384 – 387 (1996).

[10] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. General Systems", IMI Preprints, 2002:08

[11] Г. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространствах L_p", Изв. НАН Арм., Математика **43** (3), 3 – 12 (2008).

[12] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Математический сборник, 199:5, 3 – 26 (2008).

[13] С. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по подсистемам ситемы Хаара и о ω-квази-гриди базисах", Математические заметки (в печати)

[14] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва (1999).

Поступила 5 октября 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 25-34.

СОПРЯЖЁННЫЕ ГОЛОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА НА ПОЛИДИСКАХ И ДИАГОНАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А. В. АРУТЮНЯН, В. ЛУСКИ

Ереванский государственный университет, Университет Падерборна
E-mails: *anahit@ysu.am, lusky@uni-paderborn.de*

Аннотация. Пусть U^n – единичный полидиск в C^n, а S – пространство функций регулярной вариации. Пусть $1 \le p < \infty$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S(1 \le j \le n)$ и $f \in H(U^n)$. Функция f принадлежит голоморфному пространству Бесова $B_p(\omega)$, если

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

где $dm_{2n}(z)$ – $2n$-мерная мера Лебега на U^n, а D означает дробное дифференцирование функции f. Работа дает полное описание дуальных пространств $(B_p(\omega))^*$. Полностью решена также задача диагонального отображения.

MSC2000 number: 32C37, 47B38, 47B06, 46T25, 46E15

Ключевые слова: весовые пространства Бесова, полидиск, проекция, диагональное отображение.

1. Введение

Много авторов внесли свой вклад в теорию голоморфного пространства Бесова для единичного круга в C и для единичного шара в C^n, см. К. Жу [9], К. Строетоф [8], Арази-Фишер-Петре [1], О. Бласко [2]. В работе [5] введены обобщенные ω-весовые голоморфные пространства Бесова на единичном полидиске. В настоящей работе мы продолжаем исследование этих пространств. В этом параграфе мы вводим весовые пространства Бесова, весовые пространства Блоха и соответствующие понятия для широкого класса весов, а также формулируем вспомогательные результаты. В §2 мы даем точные описания сопряженных пространств к этим пространствам. Последний параграф нашей статьи посвящен диагональным отображениям на ω-весовых голоморфных пространствах Бесова. Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n,\ |z_j| < 1,\ 1 \le j \le n\}$ – единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n, а $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n,\ |z_i| = 1,\ 1 \le i \le n\}$ – его тор.

Далее, пусть S – класс всех неотрицательных измеримых функций ω на $(0,1)$ таких, что существуют измеримая ограниченная функция $\epsilon(u)$ на $(0,1)$ и действительное число η такие,что

$$w(x) = \exp\left(\eta + \int_x^1 \frac{\epsilon(u)}{u} du\right).$$

Предположим, что существуют постоянные $\beta_\omega < 0$ и α_ω такие, что

$$-\alpha_\omega \le \epsilon(u) \le \beta_\omega \qquad \text{для всех} \quad u \in (0,1).$$

Элементы S называются *функциями регулярной вариации* (см. [7]).

Пример 1. *(i)* $\omega(x) = x^\gamma$ *для некоторого* $\gamma > 0$. *Здесь* $\epsilon(u) = -\gamma$ *и* $\eta = 0$

$$(ii) \quad \omega(x) = \begin{cases} -\log(1-x), & 0 < x \le 1 - 1/e \\ x, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь

$$\epsilon(u) = \begin{cases} \frac{u}{(1-u)\log(1-u)}, & 0 < u \le 1 - 1/e \\ -1, & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\eta = 0$.

(iii) $\omega(x) = \sin x$. *Здесь*

$$\epsilon(u) = -\frac{u}{\sin u}\cos u \quad \text{и} \quad \eta = \log\sin 1.$$

Пусть $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Всюду в статье мы предполагаем, что $\omega_j \in S$, $1 \le j \le n$. Далее, для $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$ мы используем следующий мультииндексные обозначения:

$$\omega(1-|z|) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|),$$

$$(1-|z|)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\alpha_j}, \quad (1-\overline{\zeta}z)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-\overline{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j}, \quad z^k = z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}.$$

Кроме того, для любых функций f и g обозначение $f \preceq g$ ($f \succeq g$) означает, что $|f(z)| \le C|g(z)|$ ($|g(z)| \le C|f(z)|$), а обозначение $f \asymp g$ означает, что $C_1|f(z)| \le |g(z)| \le C_2|f(z)|$ для некоторых положительных постоянных C, C_1, C_2, независящих от z.

Определение 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Обозначим через* $L_p(\omega)$ *множество всех измеримых функций на* U^n, *для которых*

$$\|f\|_{L_p(\omega)}^p = \int_{U^n} |f(z)|^p \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|^2)^2} dm_{2n}(z) < +\infty.$$

Следующее определение поясняет понятие дробного дифференцирования.

Определение 2. *Для голоморфной функции* $f(z) = \sum\limits_{(k)=(0)}^{(\infty)} a_k z^k, \quad z \in U^n$, *и для* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n),\ \beta_j > -1,\ 1 \leq j \leq n,$

(i) определим дробное дифференцирование D^β *следующим образом:*

$$D^\beta f(z) = \sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\beta_j + 1 + k_j)}{\Gamma(\beta_j + 1)\Gamma(k_j + 1)} a_k z^k, \;\; k = (k_1, ..., k_n), \quad z \in U^n,$$

где $\Gamma(.)$ *– Гамма функция, а* $\sum\limits_{(k)=(0)}^{(\infty)} = \sum\limits_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum\limits_{k_n=0}^{\infty}$.

(ii) Пусть $D^{-\beta}$ *– обратный оператор:* $D^{-\beta} D^\beta f(z) = f(z)$, $z \in U^n$.

В частности, если $\beta_j \in N,\ 1 \leq j \leq n$, то

$$D^\beta f(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\beta_j + 1)} \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} (f(z) z^\beta)}{\partial z_1^{\beta_1} \ldots \partial z_n^{\beta_n}}.$$

Положим $Df(z) = D^\beta f(z)$, если $\beta = (1, \ldots, 1)$.
Пусть $H(U^n)$ – пространство голоморфных функций на U^n. Определим теперь голоморфные пространства Бесова на полидиске (см. [5]).

Определение 3. *Пусть* $1 \leq p < \infty$ *и* $f \in H(U^n)$. *Будем говорить, что функция* f *принадлежит* $B_p(\omega)$, *если*

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \frac{\omega(1 - |z|)}{(1 - |z|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

Согласно определению D, выражение $|| \cdot ||_{B_p(\omega)}$ является нормой, а $B_p(\omega)$ – банахово пространство относительно $\| \cdot \|_{B_p(\omega)}$.
Чтобы описать сопряженные пространства в случае $p = 1$, нам необходимо определение ω-весового пространства Блоха [4].

Определение 4. *Функция* $f \in H(U^n)$ *принадлежит пространству Блоха* B_ω, *если*

$$||f||_{B_\omega} = \sup_{z \in U^n} \left\{ \frac{(1 - |z|^2)}{\omega(1 - |z|^2)} |Df(z)| \right\} < +\infty.$$

Определение 4 можно считать как определение пространства Бесова $B_p(\omega)$ в случае $p = \infty$ (т.е. $B_\infty(\omega) = B_\omega$).
Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in B_p(\omega)$ и $(Tf)(z) = (1-|z|^2)Df(z)$. Из определений 1 и 3 легко следует, что T является изоморфизмом из $B_p(\omega)$ в некоторое подпространство пространства $L_p(\omega)$. Это наблюдение может быть обобщено следующим образом:

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(U^n)$, $\beta_j > 1$, $1 \le j \le n$. *Тогда* $f \in B_p(\omega)$ *тогда и только тогда, когда* $g \in L_p(\omega)$, *где* $g(z) = (1-|z|^2)^\beta D^\beta f(z)$, $z \in U^n$. *Кроме того,* $\|f\|_{B_p(\omega)} \asymp \|g\|_{L^p(\omega)}$.

Для доказательства см. [5] (Теорема 3). Мы воспользуемся теоремой 1 в §3. Доказательства основных теорем §2 опираются на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $n = 1$, $\omega \in S$, $a + 1 - \beta_\omega > 0$, $b > 1$ *и* $b - a - 2 > \alpha_\omega$. *Тогда*

$$\int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^a \omega(1-|\zeta|^2)}{|1-z\overline{\zeta}|^b} dm_2(\zeta) \le \frac{\omega(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)^{b-a-2}}$$

Доказательство см. в [4] (лемма 1.6).

2. Дуальные пространства к пространствам $B_p(\omega)$

В этом параграфе мы опишем дуальные пространства к пространству $B_p(\omega)$. Сперва докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < +\infty$ *и* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j > p + \alpha_{\omega_j} - 2$ $(1 \le j \le n)$. *Для* $h \in L_q(\omega)$ *положим*

$$h_1(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\overline{\zeta}z)^{\gamma+2}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда $h_1 \in B_q(\omega^*)$ *и* $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{B_q(\omega)}$, *где* $\omega_j^*(t) = t^{(\gamma_j+1)q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \le j \le n)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Доказательство. В силу неравенства Гёлдера, леммы 1 (с $a = -1$) и факта, что $\omega(1-|z|) \asymp \omega(1-|z|^2)$, получим

$$|Dh_1(z)|^q \le \int_{U^n} \frac{|h(\zeta)|^q \omega(1-|\zeta|)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\gamma+3}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) \times \frac{\omega^{q/p}(1-|z|)}{(1-|z|^2)^{(\gamma+2)q/p}}.$$

Следовательно,

$$\|h_1\|^q_{B_q(\omega^*)} = \int_{U^n} |Dh_1(z)|^q (1-|z|^2)^{q(\gamma+2)-2} \omega^{-q/p}(1-|z|) dm_{2n}(z) \le$$

$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} |h(\zeta)|^q \int_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^{q(\gamma+2)-2-(\gamma+2)q/p}}{|1-\overline{z}\zeta|^{\gamma+3}} dm_{2n}(z) dm_{2n}(\zeta) \preceq$$

$$\int_{U^n} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} |h(\zeta)|^q dm_{2n}(\zeta) = \|h\|_{L_q(\omega)} < \infty$$

Итак имеем $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{B_q(\omega)}$, что доказывает наше утверждение. □

Лемма 3. *Пусть* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j > \alpha_{\omega_j} - 2$ $(1 \le j \le n)$. *Для* $h \in L^\infty(U^n)$ *положим*

$$h_1(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\overline{\zeta}z)^{\gamma+2}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда $h_1 \in B_{\omega^*}$ *и* $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_{L^\infty}$, *где* $\omega_j^*(t) = t^{-\gamma_j-1}\omega_j(t)$, $1 \le j \le n$.

Доказательство. Используя лемму 1, получаем

$$|Dh_1(z)| \leq \int_{U^n} \frac{|h(\zeta)|\omega(1-|\zeta|)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\gamma+3}(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(zeta) \leq \|h\|_\infty \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{\gamma+2}}.$$

Тогда, из определения 4 следует $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_\infty$. □

Теперь мы можем доказать теоремы, описывающие пространства $(B_p(\omega))^*$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} + p - 2$, $1 \leq j \leq n$. *Тогда дуальное пространство к пространству* $B_p(\omega)$ *относительно образования пар*

$$< f, g >= \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta) \tag{2.1}$$

изоморфно пространству $B_q(\widetilde{\omega})$, *где* $1/p + 1/q = 1$ *и* $\widetilde{\omega}_j(t) = t^{\alpha_j q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in (B_p(\omega))^*$. Согласно замечанию после определения 4, мы можем рассматривать $B_p(\omega)$ как подпространство пространства $L_p(\omega)$. Тогда, по теореме Хана-Банаха, мы можем предположить, что $\Phi \in L_p(\omega)^*$ и существует $h \in L_q(\omega),\ 1/p + 1/q = 1$ такое, что

$$\Phi(F) = \int_{U^n} F(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_{2n}(\zeta),\ \|\Phi\| = \|h\|_{L_q(\omega)}.$$

В частности, если $F(z) = (1-|z|^2)Df(z),\ f \in B_p(\omega)$, то имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Используя результаты работы [3], получаем

$$Df(z) = C(\alpha) \int_{U^n} \frac{(1-|v|^2)^\alpha}{(1-\overline{v}z)^{\alpha+2}} Df(v) dm_{2n}(v)$$

для некоторой постоянной $C(\alpha)$, независящей от f.
Следовательно,

$$\Phi(F) = \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v) \times \tag{2.2}$$

$$\times \int_{U^n} C(\alpha) \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\overline{\zeta}v)^{\alpha+2}} \frac{\overline{h(\zeta)} dm_{2n}(v)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) dm_{2n}(v).$$

Пусть h_1 – внутренный интеграл в (2.2). По лемме 2, h_1 является элементом пространства $B_q(\omega^*)$, где $\omega_j^*(t) = t^{(\alpha_j+1)q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$ и $\|h_1\|_{B_q(\omega^*)} \preceq \|h\|_{L_q(\omega)}$.
Пусть $Dg(z) = h_1(z)$. Тогда легко проверить, что $g \in B_q(\widetilde{\omega})$ и $\|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})} \asymp \|h_1\|_{B_q(\omega^*)}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = t^{\alpha_j q}\omega_j^{-q/p}(t)$ $(1 \leq j \leq n)$. Итак имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta),\ \text{and}\ \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})} \preceq \|\Phi\|,$$

что доказывает первую часть теоремы 2.
Далее предположим, что $g \in B_q(\widetilde{\omega})$. Тогда любой функционал Φ вида (2.1) ограничен на $B_p(\omega)$. Для этого воспользуемся неравенством Гёлдера

$$|\Phi(f)| \leq \left(\int_{U^n} |Df(\zeta)|^p \frac{\omega(1-|\zeta|)}{1-|\zeta|^2)^{2-p}} dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} \times$$
$$\left(\int_{U^n} |Dg(\zeta)|^q \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha q+q-2}}{\omega^{q/p}(1-|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/q} = \|f\|_{B_p(\omega)} \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})}.$$

Следовательно $\|\Phi\| \preceq \|g\|_{B_q(\widetilde{\omega})}$. □

Перейдем к случаю $p = 1$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} - 1$ $(1 \leq j \leq n)$. Тогда дуальное пространство к пространству $B_1(\omega)$ относительно образования пар*

$$< f, g >= \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta)$$

изоморфно пространству $B_{\widetilde{\omega}}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t)t^{1-\alpha_j}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Доказательство. Пусть Φ – произвольный ограниченный, линейный функционал на $B_1(\omega)$. Как и раньше, мы можем рассматривать $B_1(\omega)$ как подпространство пространства $L_1(\omega)$. В силу теоремы Хана-Банаха, Φ можно рассматривать как элемент $L_1(\omega)^*$. Поэтому существует $h \in L_\infty(U^n)$ такая, что

$$\Phi(F) = \int_{U^n} F(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_{2n}(\zeta) \quad \text{и} \quad \|\Phi\| = \|h\|_{L_\infty(\omega)}.$$

В частности, для $F(z) = (1-|z|^2)Df(z),\ f \in B_1(\omega)$ получаем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{h(\zeta)} \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta).$$

Согласно [3], существует постоянная $C(\alpha)$ такая, что

$$Df(z) = C(\alpha) \int_{U^n} \frac{(1-|v|^2)^\alpha}{(1-\overline{v}z)^{\alpha+2}} Df(v) dm_{2n}(v).$$

Поэтому

$$\Phi(F) = \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v) \int_{U^n} C(\alpha \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}v)^{\alpha+2}} \frac{\overline{h(\zeta)} dm_{2n}(v)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) dm_{2n}(v) =$$

$$= \int_{U^n} (1-|v|^2)^\alpha Df(v)\overline{h_1(v)} dm_{2n}(v),$$

где h_1 – внутренный интеграл, который, согласно лемме 3, является элементом B_{ω^*}, где $\omega_j^*(t) = \omega_j(t)t^{-\alpha_j-1}$ $(1 \leq j \leq n)$ и $\|h_1\|_{B_{\omega^*}} \preceq \|h\|_{L^\infty}$.

Пусть $Dg(z) = h_1(z)$. Тогда используя теорему 4.1 из [4], получаем $g \in B_{\widetilde{\omega}}$ и $\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}} \asymp \|h_1\|_{B_1(\omega^*)}$, где $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t)t^{-\alpha_j}$ $(1 \le j \le n)$. Следовательно, мы имеем

$$\Phi(F) = \int_{U^n} Df(\zeta)\overline{Dg(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^{\alpha} dm_{2n}(\zeta), \ \|\Phi\| \le C_2\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}}$$

Обратно, пусть $g \in B_{\widetilde{\omega}}$, $f \in B_1(\omega)$ и Φ – функционал, порожденный этой функцией: $\Phi(f) =< f, g >$. Тогда

$$|\Phi(f)| \le \int_{U^n} |Df(\zeta)| \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)} dm_{2n}(\zeta) \times \sup_{\zeta \in U^n} \left\{ |Dg(\zeta)| \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}}{\omega(1-|\zeta|)} \right\} =$$

$$\|f\|_{B_1(\omega)}\|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}},$$

и получаем $\|\Phi\| \le \|g\|_{B_{\widetilde{\omega}}}$, что завершает доказательство. □

3. Диагональные отображения на $B_p(\omega)$

Сформулируем задачи касающиеся диагональных отображений на $B_p(\omega)$.
Пусть f – функция из $B_p(\omega)$. Тогда функция $Diagf(z) = f(z, \dots, z)$ голоморфна на единичном диске. Обсудим следующие два вопроса:
Задача 1. Какому подпространству голоморфных на U функций принадлежит функция $Diagf(z)$?
Задача 2. Описать все голоморфные функции g в U, для которых существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $g = Diagf(z)$.
Следующая теорема дает исчерпывающие ответы на эти задачи.

Теорема 4. *Положим $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{n} \omega_j(t)$ и пусть $B_p^1(\Omega)$ означает Ω-весовое пространство Бесова для одной переменной. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Если $f \in B_p(\omega)$, то $Diagf \in B_p^1(\Omega)$ и $\|Diagf\|_{B_p^1(\Omega)} \preceq \|f\|_{B_p(\omega)}$.

2.Для любой функции $g \in B_p^1(\Omega)$ существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $Diagf = g$ и $\|f\|_{B_p(\omega)} \preceq \|g\|_{B_p^1(\Omega)}$.

Доказательство. Нам необходимо разбиение полидисков на двоичные четырехугольники.
Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ $(k_j \ge 0)$и пусть l_j – целые числа такие, что $-2^{k_j} \le l_j \le 2^{k_j+1} - 1$ $(1 \le j \le n)$. Положим

$$\Delta_{k_j,l_j} = \left\{ z_j \in U : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \le |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}}, \ \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \le \arg z_j < \pi\frac{(l_j+1)}{2^{k_j}} \right\}$$

и $\quad \Delta_{k,l}(n) = \Delta_{k_1,l_1} \times \ldots \times \Delta_{k_n,l_n}$.
$\{\Delta_{k,l}(n)\}$ называется системой *двоичных четырехугольников* (см. [6]). Нетрудно заметить, что если ζ_{k_j,l_j} является центром Δ_{k_j,l_j}, $1 \le j \le n$, то

$$(3.1) \qquad 1 - |\zeta_{k_j,l_j}| \asymp 1 - |\zeta_j| \quad \zeta_j \in \Delta_{k_j,l_j}; \quad (1 - |\zeta_{k_j,l_j}|)^2 \asymp |\Delta_{k_j,l_j}| \quad 1 \le j \le n.$$

Наконец, положим $2^k = (2^{k_1}, \dots, 2^{k_n})$.

Доказательство пункта 1. Пусть $f \in B_p(\omega)$. Тогда, используя лемму 4 из [6], получаем

$$\sum_{(k)=(0)}^{(\infty)} \sum_{(l)=(-2^k)}^{(2^k-1)} \max_{\zeta\in\Delta_{k,l}(n)} |Df(\zeta)|^p (1-|\zeta_{k,l}(n)|^2)^{p-2} |\Delta_{k,l}(n)| \omega(1-|\zeta_{k,l}(n)|) \leq$$

$$\int_{U^n} |Df(z)|^p \omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{p-2} dm_{2n}(z) = \|f\|_{B_p(\omega)} < \infty$$

где $\zeta_{k,l}(n)$ – центр четырехугольника $\Delta_{k,l}(n)$.

Пусть теперь k и l – целые числа и рассмотрим $\Delta_{(k,\dots,k),(l,\dots,l)}(n)$. Имеем

$$|\Delta_{(k,\dots,k),(l,\dots,l)}(n)| = |\Delta_{k,l}|^n \quad \text{и} \quad \zeta_{(k,\dots,k),(l,\dots,l)}(n) = (\zeta_{k,l}, \dots, \zeta_{k,l}),$$

где $\zeta_{k,l}$ – центр четырехугольника $\Delta_{k,l}$.

Суммируя только по индексам $(k,\dots,k)$ и $(l,\dots,l)$ и беря максимум по диагонали, используя (3.1), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta\in\Delta_{k,l}} \left| \frac{\partial^n (Diagf(\zeta)\zeta^n)}{\partial\zeta^n} \right|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{n(p-2)} |\Delta_{k,l}|^n \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-|\zeta_{k,l}|) \asymp$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta\in\Delta_{k,l}} \left| \frac{\partial^n (Diagf(\zeta)\zeta^n)}{\partial\zeta^n} \right|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{n(p-2)} (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{2n} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-|\zeta_{k,l}|) =: I$$

Положим $g = Diagf$. Напомним, что

$$D^n g(z) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (g(z)z^n)}{\partial z^n} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (Diagf(z)z^n)}{\partial z^n}, \ z \in U.$$

Получим

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta\in\Delta_{k,l}} |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta_{k,l}|^2)^{np-2} (1-|\zeta_{k,l}|^2)^2 \Omega(1-|\zeta_{k,l}|) \preceq \|f\|_{B_p(\omega)}$$

откуда вытекает, что (см. [6], лемма 4)

$$\int_U |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^{np} \frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|)^2} dm_2(\zeta) \preceq \|f\|^p_{B_p(\omega)}.$$

По теореме 1, функция g принадлежит пространству $B^1_p(\Omega)$. Кроме того, $\|g\|_{B^1_p(\Omega)} \leq \|f\|_{B_p(\omega)}$.

Доказательство пункта 2. Пусть $g \in B^1_p(\Omega)$. Наша цель - показать, что существует функция $f \in B_p(\omega)$ такая, что $Diagf(z) = g(z)$. Из предположения, что $g \in B^1_p(\Omega)$ вытекает (для подробностей см. [3])

$$D^n g(z) = C(\gamma) \int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}}{(1-\overline{\zeta}z)^{n(\gamma+2)}} D^n g(\zeta) dm_2(\zeta)$$

для некоторой достаточно большой γ и некоторой постоянной $C(\gamma)$, которая не зависит от g.

Из определения D следует, что существует функция f такая, что

$$Df(z) = n!C(\gamma)\int_U \frac{(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}}{\prod_{j=1}^n(1-\overline{\zeta}z_j)^{\gamma+2}}D^n g(\zeta)dm_2(\zeta) \tag{3.2}$$

и $f(z) = D^-(Df(z))$. Пусть $Diagf(z) = g_1(z)$. Тогда имеем $D^n g_1(z) = D^n g(z)$ и из определения D получаем, что $g(z) = g_1(z)$, $z \in U$.

Осталось доказать, что $f \in B_p(\omega)$. Оценим соответствующий интеграл. Пусть $p = 1$. В силу леммы 1 (для $a = -1$) получаем

$$\int_{U^n}|Df(z)|\frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)}dm_{2n}(z) \preceq \int_U (1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}\times$$
$$|D^n g(\zeta)|\int_{U^n}\frac{\omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{-1}}{|1-\overline{\zeta}z|^{\gamma+2}}dm_{2n}(z)dm_2(\zeta) \preceq$$
$$\int_U(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2-n-n(\gamma+2)+2n}\Omega(1-|\zeta|)|D^n g(\zeta)|dm_2(\zeta) =$$
$$\int_U|D^n g(\zeta)|(1-|\zeta|^2)^n\frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2}dm_2(\zeta) \preceq \|g\|_{B_1^1(\Omega)}.$$

Метод доказательства для случая $p > 1$ отличается от метода в случае $p = 1$. Достаточно доказать, что $F \in L_p(\omega)$, где $F(z) = (1-|z|^2)Df(z)$, $z \in U^n$. Хорошо известно, что

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_p(\omega)} &= \sup_{\|G\|_{L_q(\omega)}\le 1}\int_{U^n}F(v)\overline{G}(v)\frac{\omega(1-|v|)}{(1-|v|^2)^2}dm_{2n}(v) \\ &= \sup_{\|G\|_{L_q(\omega)}\le 1}\int_{U^n}(1-|v|^2)Df(v)\overline{G}(v)\frac{\omega(1-|v|)}{(1-|v|^2)^2}dm_{2n}(v) \end{aligned} \tag{3.3}$$

при $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Чтобы доказать $\|F\|_{L_p(\omega)} < \infty$ вычислим интеграл в (3.3). Положим

$$H(\zeta) = \int_{U^n}\frac{G(v)\omega(1-|v|)}{\prod_{j=1}^n(1-\overline{v}_j\zeta)^{\gamma+2}(1-|v|)}dm_{2n}(v).$$

Тогда H зависит только от одной переменной. Далее, положим

$$I = \int_U(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}D^n g(\zeta)\int_{U^n}\frac{\overline{G}(v)\omega(1-|v|)}{\prod_{j=1}^n(1-v_j\overline{\zeta})^{\gamma+2}(1-|v|)}dm_{2n}(v)dm_2(\zeta)$$
$$= \int_U(1-|\zeta|^2)^{n(\gamma+2)-2}D^n g(\zeta)\overline{H}(\zeta)dm_2(\zeta).$$

Используя лемму 2 получаем: если $G \in L_q(\omega)$, то $G_1 \in B_q(\omega^*)$, где

$$G_1(z) = \int_{U^n}\frac{G(v)\omega(1-|v|)}{(1-\overline{v}z)^{\gamma(n)+2}(1-|v|^2)}dm_{2n}(v),\ \omega_j^*(t) = \frac{t^{(\gamma+1)q}}{\omega_j^{q/p}(t)},\ 1 \le j \le n$$

при $\gamma(n) = (\gamma,\ldots,\gamma)$, (так как γ – достаточно большая).

Итак имеем $G_1 \in B_q(\omega^*)$ и легко проверить, что $H(\zeta) = DiagG_1(\zeta)$.
Из утверждения 1 теоремы 4 следует, что $H \in B^1_q(\Omega^*)$, где

$$\Omega^*(t) = t^{nq(\gamma+1)} \prod_{j=1}^{n} \omega_j^{-q/p}(t).$$

По теореме 1, используя также неравенство Гёлдера, получаем

$$|I| \leq \left(\int_U |D^n g(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^{np} \frac{\Omega(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2} dm_2(\zeta)\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_U |\overline{H}(\zeta)|^q \frac{\Omega^*(1-|\zeta|)}{(1-|\zeta|^2)^2)} dm_2(\zeta)\right)^{1/q} \preceq \|g\|_{B^1_p(\Omega)} \|G\|_{L_q(\omega)}.$$

Следовательно, используя (3.2) и меняя порядки интегрирования, получаем $\|F\|_{L_p(\omega)} < \infty$. Поэтому $f \in B_p(\omega)$ и $\|f\|_{B_p(\omega)} \preceq \|g\|_{B^1_p(\Omega)}$. □

Abstract. Let U^n be the unit polydisk in C^n and S be the space of functions of regular variation. Let $1 \leq p < \infty$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in S(1 \leq j \leq n)$ and $f \in H(U^n)$. The function f is said to be in holomorphic Besov space $B_p(\omega)$ if

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

where $dm_{2n}(z)$ is the $2n$-dimensional Lebesgue measure on U^n and D stands for the fractional differentation of f. This work gives a complete description of $(B_p(\omega))^*$, where X^* means the dual space of X. Also the problem of diagonal mapping is completely solved.

Список литературы

[1] J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre, “Möbius invariant function spaces”, J. Reine Angew. Math. **363**, 110 – 145 (1985).
[2] O. Blasco, “Multipliers on weighted Besov spaces of analytic functions”, Contemporary Mathematics, **144**, 23 – 33 (1993).
[3] M. M. Djrbashian, “On the representation problem of analytic functions”, Soobsh. Inst. Matem. Mekh. Akad. Nauk Arm. SSR, **2**, 3 – 40 (1948).
[4] A. V. Harutyunyan, “Weighted Bloch space in the polydisk”, Function spaces and its Applications, **5** (3), 3 – 21 (2007).
[5] A. V. Harutyunyan, W. Lusky, “$\omega-$ weighted holomorphic Besov spaces on polydisks”, (acc. in Function spaces and its Applications).
[6] Ф. Шамоян, “Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах в полудиске”, Сиб. мат. журнал, **3** (2), 197 – 215 (1990).
[7] Е. Сенета, Функции Постоянного Изменения, Наука, Москва (1985).
[8] K. Stroethoff, “Besov type characterisations for the Bloch space”, Bull. Australian Math. Soc. **39**, 405 – 420 (1989).
[9] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York (1990).

Поступила 9 июня 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 35-40.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ В НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

С. К. АФЯН

Ереванский государственный университет

Аннотация. Рассматривается уравнение Бельтрами в некоторых частных случаях. Найдены семейства точных решений.

MSC2000 number: 35J25, 35J15, 35J70

Ключевые слова: Уравнение Бельтрами, гомеоморфное решение, аналитическая функция.

1. Введение

К уравнению Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z) \partial_z w = 0, \quad (w = u(x, y) + iv(x, y)), \tag{1.1}$$

где

$$\partial_{\bar{z}} w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \partial_z w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1.2}$$

приводятся многие задачи анализа и геометрии (например, задача приведения к каноническому виду дифференциальныь квадратичных форм и эллиптических уравнений, краевые задачи для эллиптических систем линейных уравнений второго порядка в двумерных областях, задача конформного отображения поверхности на плоскость и др.).

Область G, в которой задана функция $q(z)$, симметрична относительно действительной оси, а $q(z)-$ удовлетворяет условию эллиптичности для (1.1)

$$|q(z)| \le q_0 < 1, \quad (q_0 = const). \tag{1.3}$$

Многие математики такие как Л. Лихтенштейн, М. А. Лаврентьев, И. Н. Векуа, Л. Альфорс, Б. В. Боярский, Б. В. Шабат и другие исследовали уравнение Бельтрами. Получено значительное количество результатов, относящихся к существованию решения и свойствам гладкости уравнения Бельтрами (см. [1], [2]).

Известно, что если $w_0(z)$ является непрерывным и однолистным (гомеоморфным) решением уравнения (1.1), то всякое решение имеет вид $\Phi(w_0(z))$, где $\Phi-$ некоторая аналитическая функция в соответствующей области (см. [1], стр. 104, 115). Это позволяет решить многие краевые задачи. Однако, в общем случае гомеоморфное решение удается найти только приближенно. Точные решения уравнения Бельтрами найдены в небольшом количестве частных случаев (см. [3] - [7]).

В настоящей работе найдены семейства точных решений уравнения Бельтрами в некоторых частных случаях.

2. Первый частный случай

Напишем уравнение (1.1) в симетричном виде

$$M(z)\partial_{\bar{z}}w - N(z)\partial_z w = 0. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть $G-$ некоторая ограниченная область комплексной плоскости с границей $\Gamma \in C^1_\alpha$. Если коэффициенты уравнения* (2.1) *удовлетворяют условиям:*

1) $M(z)$ и $N(z) \in C_\alpha(\bar{G})$, $\quad 0 < \alpha < 1$,

2) $|N(z)| < |M(z)|$, $\quad z \in \bar{G}$ (сравни с условием (1.3)*),*

3) $\partial_{\bar{z}}M(z) = \partial_z N(z)$, $\quad z \in \bar{G}$,

то функция

$$w_0(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{N(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta + F(z) \tag{2.2}$$

является решением уравнения (2.1)*, где $F(z)$ аналитическая функция в G, удовлетворяющая равенству*

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{N(\zeta)}{\zeta - z}d\bar{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Доказательство. Из (2.2) имеем (см. [1], стр. 50) следующие равенства

$$\partial_{\bar{z}}w_0 = -N(z) \tag{2.3}$$

и

$$\partial_z w_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{N(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{N(\zeta)}{\zeta - z}d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{2.4}$$

В силу известной формулы (см. [1], стр.78, (8.20)) первое слагаемое в правой части (2.4) можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{N(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial_\zeta N(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{N(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{\zeta}. \tag{2.5}$$

Следовательно, получаем

$$\partial_z w_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial_\zeta N(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Отсюдо, согласно условию 3), имеем

$$\partial_z w_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial_{\bar\zeta} M(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Преобразуя первое слагаемое (см. [1], стр. 57, (6.10)), получаем

$$\partial_z w_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - M(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{M(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -M(z). \tag{2.6}$$

Таким образом, из (2.3) и (2.6) следует, что

$$M(z)\partial_{\bar z} w_0 - N(z)\partial_z w_0 = -M(z)N(z) + N(z)M(z) = 0.$$

□

Следствие 1. *Пользуясь Теоремой 1, можно найти семейство решений уравнения* (2.1). *Действительно, пусть* $\Phi-$ *произвольная аналитическая функция в области* $w_0(G)$, *тогда легко проверить, что сложная функция* $w(z) \equiv \Phi(w_0(z))$ *также будет решением уравнения* (2.1). *В случае, когда решение* $w_0(z)$ *однолистно, то всякое решение имеет вид* $\Phi(w_0(z))$.

Замечание 1. *Условие 3) Теоремы 1 выполняется, например, в следующих случаях:*

1°. *функции* M *и* N *аналитичны относительно* z *и* $\bar z$ *соответственно,*

2°. *для произвольной функции* $N \in C_\alpha(\bar G)$ *и*

$$M(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_G\int \frac{\partial_\zeta N(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta + \varphi(z),$$

где $\varphi-$*аналитична в* G *и непрерывна по Гельдеру на* $\bar G$.

Замечание 2. *Если условие 3) нарушено, но существует функция* $\mu(z) \neq 0$, *принадлежащая классу* $C_\alpha(\bar G)$ *такая, что для эквивалентного* (2.1) *уравнения*

$$\mu(z)M(z)w_{\bar z} - \mu(z)N(z)w_z = 0$$

справедливо подобное условие

$$\partial_{\bar z}(\mu(z)M(z)) = \partial_z(\mu(z)N(z)), \tag{2.7}$$

то этот случай сводится к предыдущему случаю.

Например, если выражение
$$\frac{1}{M}(\partial_z N - \partial_{\bar z} M)$$
не зависит от z, то такой множитель можно найти по формуле

$$\mu(\bar z) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{1}{M}(\partial_\zeta N - \partial_{\bar\zeta} M)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\right). \tag{2.8}$$

В случае, когда выражение
$$\frac{1}{N}(\partial_z M - \partial_z N)$$
не зависит от $\bar z$, соответствующий множитель будет иметь вид

$$\mu(z) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{1}{N}(\partial_{\bar\zeta} M - \partial_\zeta N)\frac{d\xi d\eta}{\bar\zeta - \bar z}\right). \tag{2.9}$$

Возможны и другие случаи нахождения множителя $\mu(z)$.

3. Второй частный случай

Рассмотрим уравнение Бельтрами, имеющее вид

$$\partial_{\bar z} w - H(\frac{\bar z}{z})\partial_z w = 0. \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Пусть $H(\zeta)$ - аналитическая функция в некоторой окрестности единичной окружности (например, $0 < r < |\zeta| < R$, $R > 1$), удовлетворяющяя условию*

$$|H(\zeta)| < 1. \tag{3.2}$$

Тогда функция

$$w_0(z) = \bar z e^{S(\frac{z}{\bar z})} \tag{3.3}$$

является решением уравнения (3.1)*, где $S(\zeta)$ – некоторая аналитическая в кольце $r < |\zeta| < R$ функция, удовлетворяющяя равенству*

$$\frac{dS}{d\zeta} = \frac{1}{H(\zeta) + \zeta}. \tag{3.4}$$

Доказательство. В начале заметим, что из условия (3.2) следует неравенство

$$H(\zeta) + \zeta \neq 0,$$

и следовательно правая часть (3.4) определена.

Непосредственной проверкой легко убедится в справедливости утверждения теоремы. Действительно,

$$\partial_{\bar z} w_0(z) = e^{S(\frac{z}{\bar z})} + \bar z e^{S(\frac{z}{\bar z})} \cdot S'\left(\frac{z}{\bar z}\right)\left(-\frac{z}{\bar z^2}\right) = e^{S(\frac{z}{\bar z})}\left[1 - \frac{z}{\bar z} S'\left(\frac{z}{\bar z}\right)\right],$$

$$\partial_z w_0(z) = \bar z e^{S(\frac{z}{\bar z})} \cdot S'\left(\frac{z}{\bar z}\right)\frac{1}{\bar z} = e^{S(\frac{z}{\bar z})} \cdot S'\left(\frac{z}{\bar z}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.1) и учитывая (2.6), получим

$$\partial_z w_0(z) - H(\frac{z}{\bar z})\partial_z w_0 =$$

$$= e^{S(\frac{z}{\bar z})}\left[1 - \frac{z}{\bar z} S'\left(\frac{z}{\bar z}\right) - S'\left(\frac{z}{\bar z}\right) H(\frac{z}{\bar z})\right] =$$

$$= e^{S(\frac{z}{\bar z})}\left[1 - S'\left(\frac{z}{\bar z}\right)\left(\frac{z}{\bar z} + H(\frac{z}{\bar z})\right)\right] =$$

$$= e^{S(\frac{z}{\bar z})}\left[1 - \frac{1}{\frac{z}{\bar z} + H\left(\frac{z}{\bar z}\right)}\left(\frac{z}{\bar z} + H\left(\frac{z}{\bar z}\right)\right)\right] = 0.$$

□

Следствие 2. *Все функции вида*

$$w(z) = \Phi(w_0(z)) \tag{3.5}$$

также будут решениями уравнения Бельтрами (3.1)*, где* Φ *- произвольная аналитическая функция в области* $w_0(G)$*.*

Заметим, что в случае когда функция $w_0(z)$ однолистна, то все решения уравнения (3.1) получаются по формуле (3.5) (см. [1]).

Abstract. The paper gives families of exact solutions of the Bertrami equation in several particular cases.

Список литературы

[1] И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, Москва (1959).

[2] М. А. Лаврентьев, “Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей”, Матем. сб., **21** (63), 285 – 320 (1947).

[3] В. Д. Лелюх, “Новый метод получения частных решений уравнения Бельтрами” (1959).

[4] Sodat, S. Azizula, “Certain solutions of the Beltrami equation with prescribed $\mu(z)$”, Nauch. Trudy, **460** (1974).

[5] А. М. Абдушукуров, “Система уравнений Бельтрами с вырождением”, Докл. АН Таджик. ССР, **25**, (3), 131 – 135 (1982).

[6] T. Iwaniec and G. J. Martin, ‘The Beltrami equation, Institute of Mittag-Leffler, The Royal Swedish Academy of Sciences (2002).

[7] S. Afyan, “Solution of Beltrami’s equation in some cases”, International Conference “Harmonic Analysis and Approximations, IV”, 19-26 September, Tsaghkadzor, Armenia (2008).

Поступила 5 марта 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 41-46.

ON GROUPS ACTING BY COHOMOGENEITY ONE ON THE EUCLIDEAN SPACE $\mathbb{R}^n$

PARVIZ AHMADI

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Zanjan University Zanjan, Iran
E-mail: *p.ahmadi@znu.ac.ir*

Abstract. In the present paper we study closed Lie subgroups $G \subset Iso(\mathbb{R}^n)$ acting by cohomogeneity one on $\mathbb{R}^n$ and prove that when there is no singular orbit, then there is a simply connected, solvable and closed Lie subgroup $F \subset G$ which acts by cohomogeneity one on $\mathbb{R}^n$ and the two actions are orbit equivalent.

MSC2000 number: 53C30, 57S25

Keywords: Cohomogeneity one, Euclidean space.

1. Introduction

The study of nontransitive actions of isometry groups of Riemannain manifolds is an interesting direction in the group theory. The first and most natural case is the case when the action has an orbit of codimension one, the so called cohomogeneity one action. Many mathematicians have studied this subject and obtained nice results. The subject is still an active one, see [1, 2, 7, 8, 10, 11]. In the article we study the closed Lie subgroups $G \subset Iso(\mathbb{R}^n)$ acting by cohomogeneity one on $\mathbb{R}^n$ and prove that if there is no singular orbit, then there is a simply connected, solvable and closed Lie subgroup $F \subset G$ which acts by cohomogeneity one and the two actions are orbit equivalent (see Theorem 3.1 and Corollary 3.5).

2. Preliminaries

Let M be a complete Riemannian manifold of dimension n and G be a connected closed Lie subgroup of isometries of M. We say that M is of cohomogeneity one under the action of G, if G has an orbit of codimension one. The results by Mostert (see [8]), for the compact case (G is compact), and Berard Bergery (see [2]), for the general case, state that the orbit space M/G, equipped with the quotient topology, is a topological Hausdorff space homeomorphic to $\mathbb{R}$, S^1, $[0, +\infty)$ or $[0, 1]$.

Consider the projection map $M \to M/G$ to the orbit space. Given a point $x \in M$, we say that the orbit $G(x)$ is *principal* (resp. *singular*) if the corresponding image

in the orbit space M/G is an internal (resp. boundary) point. A point x whose orbit is principal (resp. singular) will be called *regular* (resp. *singular*).
Denote by $\mathbb{R}^n$ the n-dimensional real vector space with the usual Euclidean inner product. By $Iso(\mathbb{R}^n)$ we denote the group of isometries of $\mathbb{R}^n$, that is $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ (see [9, p. 240]). We write the action of an isometry $\gamma \in Iso(\mathbb{R}^n)$ as

$$\gamma(x) = g(x) + v, \quad x \in \mathbb{R}^3_1,$$

where $g \in O(n)$ is called the *linear part* and $v \in \mathbb{R}^n$ is called the *translational part* of γ. Denote by

$$L : G \longrightarrow O(n)$$

the projection on the linear part of $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. If $L(G)$ is trivial then G is called a pure translation group.

Let $M = \mathbb{R}^n$ and G be a connected, closed Lie subgroup of $Iso(\mathbb{R}^n)$, which acts isometrically on M. We recall some facts from the theory of Lie groups.

Theorem 2.1. ([7]) *Let $M = \mathbb{R}^n$ be of cohomogeneity one under the action of a connected, closed Lie subgroup $G \subset Iso(M)$. Then either each principal orbit is isometric to $\mathbb{R}^{n-1}$, and there exists no singular orbit or each principal orbit is isometric to $S^m(c) \times \mathbb{R}^{n-m-1}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, where m is fixed for all orbits, and the unique singular orbit is isometric to $\mathbb{R}^{n-m-1}$.*

Lemma 2.2. ([3, p.51]) *A simply connected solvable Lie group is diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$, $n = dimG$.*

Lemma 2.3. ([3, p.52]) *Let G be a connected Lie group. Then the following conditions are equivalent:*
(i) The Lie group G is diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$, $n = dimG$.
(ii) The maximal compact subgroup of G is trivial.

Lemma 2.4. *If G is a compact solvable Lie group, then it is isomorphic to a torus $\mathbb{T}^k$ for some $k \geqslant 0$.*

Proof. Since G is compact, it is reductive by Proposition 1.4 of [3, p.131], hence $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Thus G is an Abelian compact group. $\square$

Lemma 2.5. ([6]) *If the Lie group G is compact, or connected and semisimple, then any smooth representation of G by affine transformations of $\mathbb{R}^n$ admits a fixed point.*

3. The Main Result

Two isometric actions on a Riemannian manifold M are said to be orbit equivalent if there exists an isometry of M mapping the orbits of one of these actions onto the orbits of the other. Suppose that $M = \mathbb{R}^n$ is of cohomogeneity one under the action of a connected, closed Lie subgroup $G \subset Iso(M)$. By Theorem 2.1, if there is no singular orbit, then each orbit is isometric to $\mathbb{R}^{n-1}$ and the action of G is orbit equivalent to the action of the pure translation Lie group $H = \mathbb{R}^{n-1}$ on $\mathbb{R}^n$, with $H(0) = G(0)$. What we can say about the existence of a simply connected solvable closed Lie subgroup F of G such that the action of F is orbit equivalent to the action of G on $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.1. *Let $\mathbb{R}^n$ be of cohomogeneity one under the action of a connected, closed Lie subgroup $G \subset Iso(\mathbb{R}^n)$. If there is no singular orbit, then there exists a simply connected, solvable, closed Lie subgroup F of G such that acts freely and by cohomogeneity one on $\mathbb{R}^n$. In particular, the action of F on $\mathbb{R}^n$ is orbit equivalent to the action of G. Furthermore, F has a pure translation normal Lie subgroup T with*

$$dim(T) \geqslant n - [n/2] - 1$$

and

$$\overline{L(F)} = \mathbb{T}^k,$$

where $k \geqslant n - dim(T) - 1$.

Proof. Let $G = S \ltimes R$ be a Levi decomposition of G. By Lemma 2.5 each semisimple subgroup of G fixes a point $x_\circ \in \mathbb{R}^n$, hence $S \subset G_{x_\circ}$ which shows that R acts on $G(x_\circ)$ transitively. Therefore R acts on $\mathbb{R}^n$ by cohomogeneity one and by Theorem 2.1 $R(x)$ is not singular orbit for each $x \in \mathbb{R}^n$. If K is the maximal compact subgroup of R then by Lemma 2.4 it is isomorphic to a torus $\mathbb{T}^k$ for some $k \geqslant 0$. By Theorem 7.1 of [3, p.66] there exists a simply-connected solvable normal Lie subgroup F of R such that $R = \mathbb{T}^k \ltimes F$. Since $\mathbb{T}^k$ is a compact Lie subgroup of G by Lemma 2.5 it fixes some point $y \in \mathbb{R}^n$, i.e. $\mathbb{T}^k = R_y$, hence F acts on $R(y)$ transitively. Since $R(y)$ is not singular orbit, F acts on $\mathbb{R}^n$ by cohomogeneity one . Because F is simply connected and solvable, the maximal compact Lie subgroup of F is trivial by Lemmas 2.2 and 2.3, and each isotropy subgroup is $F_x = \{I\}$ which shows that the action of F is free.

Now we show that F has a pure translation normal Lie subgroup T with the mentioned conditions. Consider the homomorphism $L : F \to SO(n)$. Since $ker(L)$ is a pure translation normal Lie subgroup of G, then $F/ker(L)$ is solvable. Thus $L(F)$ (so $\overline{L(F)}$) is solvable (see [4, p.56]) and $\overline{L(F)}$ is a compact solvable Lie subgroup of $SO(n)$. Therefore, by Lemma 2.4 it is isomorphic to $\mathbb{T}^k$ for some $k \geqslant 0$. Each maximal torus in $SO(n)$ is conjugate to $\mathbb{T}^{[n/2]}$ (see [5, p.252]), so $dim(L(F)) \leqslant k \leqslant [n/2]$. Since F acts by cohomogeneity one and freely on $\mathbb{R}^n$, $dim(F) = n-1$. Thus, by the following relations

$dim(L(F)) \leqslant [n/2]$,

$dim(ker(L)) + dim(L(F)) = n - 1$

we have

$dim(ker(L)) \geqslant n - [n/2] - 1$.

Thus $ker(L)$ is the pure translation normal Lie subgroup of F, which we were looking for. □

Example 3.2. We give an example, that shows that $L(F)$ may be not closed in $SO(n)$. Let α be an irrational number and

$$G = \left\{ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha t & \sin \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \right] \;\middle|\; t, x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Then G is a closed, simply connected and solvable subgroup of $Iso(\mathbb{R}^6)$ acting by cohomogeneity one on $\mathbb{R}^6$ (hence $F = G$), but $L(G)$ is not closed in $SO(6)$.

The following example shows that the simply connected, closed and solvable Lie subgroup F introduced in Theorem 3.1 is not unique up to isomorphism.

Example 3.3. Consider the usual isometric action of the Lie subgroup

$$G = \left\{ \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & \\ & SO(n-1) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ X \end{array} \right] \right) \mid X \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \subset Iso(\mathbb{R}^n)$$

on $\mathbb{R}^n$. Each of the following Lie subgroups of G is simply connected, closed and solvable and its action is orbit equivalent to that of G. Further,

$$F_1 = \left\{ \left(I_{(n-1)\times(n-1)}, \left[\begin{array}{c} 0 \\ X \end{array} \right] \right) \mid X \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|ccc} I_{(n-2k)\times(n-2k)} & & & \\ \hline & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_k} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \Theta \\ \\ X \end{array} \right] \right) \;\middle|\; \Theta = \left[\begin{array}{c} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{array} \right] \in \mathbb{R}^k, X \in \mathbb{R}^{n-k-1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} I_{(n-4)\times(n-4)} & \\ \hline & \begin{array}{cc} R_\theta & \\ & R_{\alpha\theta} \end{array} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \theta \\ X \end{array} \right] \right) \middle| \theta \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^{n-2} \right\},$$

where α is a fixed irrational number, $k \leqslant \frac{n-1}{3}$ and

$$R_\theta = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right].$$

Each of the Lie groups F_1, F_2 and F_3 is diffeomorphic to $\mathbb{R}^{n-1}$, so they are simply connected and act freely on $\mathbb{R}^n$. By Lemma 2.5 it implies that the Levi factor of each of them is trivial so they are solvable. We also have $G(x) = F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) \cong \mathbb{R}^{n-1}$ for each $x \in \mathbb{R}^n$, so their actions are orbit equivalent.

The proof of the following two corollaries are similar to that of Theorem 3.1 and we leave it to the reader.

Corollary 3.4. *Let $M = \mathbb{R}^n$ and G be a closed Lie subgroup of $Iso(\mathbb{R}^n)$. If the action of G on M is transitive, then there exists a simply-connected, solvable, closed Lie subgroup F of G acting freely and transitively on $\mathbb{R}^n$. Furthermore, F has a pure translation Lie subgroup T with*

$$dim(T) \geqslant n - [n/2]$$

and

$$\overline{L(F)} = \mathbb{T}^k,$$

where $k \geqslant n - dim(T)$.

Corollary 3.5. *Let $\mathbb{R}^n$ be of cohomogeneity one under the action of a connected, closed Lie subgroup $G \subset Iso(\mathbb{R}^n)$. If there is a singular orbit $B = \mathbb{R}^{n-m-1}$, then G has a simply-connected, solvable Lie subgroup F acting freely and transitively on $\mathbb{R}^{n-m-1}$. Furthermore, F has a pure translation Lie subgroup T with*

$$dim(T) \geqslant n - m - [n/2] - 1$$

and

$$\overline{L(F)} = \mathbb{T}^k,$$

where $k \geqslant n - m - dim(T)$.

Список литературы

[1] A. V. Alekseevsky and D. V. Alekseevsky, "G-manifolds with one dimensional orbit space", Adv. Sov. Math., **8**, 1 - 31 (1992).

[2] L. Berard-Bergery, "Sur de nouvells *variété* riemanniennes d'Einstein", Inst. Élie Cartan, **6**, 1 - 60 (1982).

[3] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishik and E. B. Vinberg, Lie Groups and Lie Algebras III, *springer* (1993).

[4] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishik and E. B. Vinberg, Lie Groups and Lie Algebras I, *springer* (1994).

[5] A. W. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, second edition, Progress in Math., **140** (2002).

[6] J. Milnor, "On fundamental groups of complete affinely flat manifolds", Adv. in math., **25**, 178 - 187 (1977).

[7] R. Mirzaie and S. M. B. Kashani, "On cohomogeneity one flat Riemannian manifolds", Glasgow Math. J., **44** (2002).

[8] P. S. Mostert, "On a compact Lie group acting on a manifold", Ann. Math., **65**(3), 447 - 455 (1957).

[9] B. O' Neill, Semi-Riemannian Geometry With Application to Relativity, Academic Press, New York (1983).

[10] F. Podesta and A. Spiro: "Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of the Euclidean spaces", Ann. Global Anal.Geom., **13** (2), 169 - 184 (1995).

[11] C. Searle, "Cohomogeneity and positive curvature in low dimension", Math. Z. **214**, 491 - 498 (1993).

Поступила 18 сентября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 47-56.

О $\{2,3\}$-СВЕРХТОЖДЕСТВАХ В ОБРАТИМЫХ $\{2,3\}$-АЛГЕБРАХ С ТЕРНАРНОЙ ГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Г. Э. ГУМАШЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *hgumashyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье характеризуются обратимые $\{2,3\}$-алгебры с тернарной групповой операцией и с уравновешенными $\{2,3\}$-сверхтождествами первого рода длины 4.

MSC2000 number: 20N05, 20N10, 20N15, 03C05, 08A05

Ключевые слова: тернарная квазигруппа, тернарная группа, сверхтождество, обратимая алгебра.

Введение

Пусть Q непустое множество, а Q^n – декартовая степень множества Q. Отображение $A : Q^n \to Q$ называется n-арной операцией множества Q, а число n арностью операции A. Пара $Q(A)$, где A – n-арная операция, называется n-квазигруппой или n-арной квазигруппой ([1], [2]), если в равенстве $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ всякие n элементов из $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ однозначно определяют $(n+1)$-й. Иными словами, $Q(A)$ является n-квазигруппой, если уравнение

$$A\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) = b$$

однозначно разрешимо для любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in Q$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае операция A называется квазигрупповой. В случае $n = 1$ операция A будет биекцией, при $n = 2$ n-квазигруппа $Q(A)$ называется бинарной или просто квазигруппой, а при $n = 3$ n-квазигруппа $Q(A)$ называется тернарной.

n-квазигруппа $Q(A)$ называется (i,j)-ассоциативной, если выполняется тождество:

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, A(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{2n-1}) =$$
$$= A(x_1, \ldots, x_{j-1}, A(x_j, \ldots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \ldots, x_{2n-1}).$$

n-квазигруппа $Q(A)$ называется n-группой, если она (i,j)-ассоциативна для любых i, j. При $n = 2$ n-группа $Q(A)$ называется бинарной или просто группой, а при $n = 3$ n-группа $Q(A)$ называется тернарной.

Пусть A – квазигрупповая операция арности n и пусть $A(x_1, \ldots, x_n) = y$. Заменяем m элементов $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ соответственно на фиксированные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m \in Q$. Тогда $A(x_1, \ldots, x_n)$ принимает вид

$$A(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, a_1, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}, a_2, \ldots),$$

т.е. получаем операцию $B(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}, \ldots, x_n)$ арности $n - m$. Очевидно, B – квазигрупповая операция, называемая ретрактом A.

Следующая формула второго порядка (см. [3]) называется сверхтождеством (см. [4],[5]):

$$\forall x_1, \ldots, x_k \, \forall X_1, \ldots, X_m \ (W_1 = W_2),$$

где $X_1, \ldots, X_m$ – функциональные переменные, а $x_1, \ldots, x_k$ – предметные переменные в словах (термах) W_1, W_2. Число m называется рангом свертождества. Обычно, сверхтождества указываются без кванторной приставки: $W_1 = W_2$. Если ранг $m > 1$, то сверхтождество называется нетривиальным, а если $|X_1| = n_1$, …, $|X_m| = n_m$, то сверхтождество $W_1 = W_2$ называется $\{n_1, \ldots, n_m\}$-сверхтождеством. Выполнимость сверхтождества в алгебре понимается в соответствии с его кванторной приставкой (см. [4]). О характеризации сверхтождеств в классических многообразиях решеток см. [6],[7].

Сверхтождество называется уравновешенным, если каждая предметная переменная этого сверхтождества участвует в обоих частях равенства, причем только один раз. Уравновешенное сверхтождество называется первого рода, если предметные переменные в левой и правой частях равенства упорядочены одинаково. Количество предметных переменных в уравновешенном свертождестве называется длиной этого сверхтождества.

Классификация сверхтождеств ассоциативности и критерий их выполнимости в q-алгебрах и e-алгебрах содержатся в [4] - [6]. Аналогичные результаты для тернарных сверхтождеств ассоциативности в обратимых алгебрах (см. [4] и [2]). В настоящей статье исследуется критерий выполнимости уравновешенных $\{2,3\}$-сверхтождеств первого рода длины 4 в обратимых $\{2,3\}$-алгебрах с тернарной групповой операцией.

1. Предварительные результаты

Алгебру $Q(\Sigma)$ с бинарными и тернарными операциями назовем $\{2,3\}$-алгеброй. $\{2,3\}$-алгебра нетривиальна, если множество ее бинарных и тернарных операций не одноэлементны. Алгебра $Q(\Sigma)$ называется обратимой, если $Q(A)$ – квазигруппа (некоторой арности) для любой операции $A \in \Sigma$.

Теорема 1.1 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2,3\}$-алгебре выполняется $\{2,3\}$-сверхтождество, определенное равенством*

$$((x,y,z),u) = (x,(y,z,u)),$$

тогда каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$X(Y(x,y,z),u) = X(x,Y(y,z,u)). \tag{1.1}$$

Теорема 1.2 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2,3\}$-алгебре выполняется $\{2,3\}$-сверхтождество, определенное равенством*

$$((x,y),u,v) = (x,(y,u),v),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$Y(X(x,y),u,v) = Y(x,X(y,u),v). \tag{1.2}$$

Теорема 1.3 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2,3\}$-алгебре выполняется $\{2,3\}$-сверхтождество, определенное равенством*

$$((x,y),u,v) = (x,y,(u,v)),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$Y(X(x,y),u,v) = Y(x,y,X(u,v)). \tag{1.3}$$

Теорема 1.4 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2,3\}$-алгебре выполняется $\{2,3\}$-сверхтождество, определенное равенством*

$$((x,y,z),u) = ((x,y),z,u),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$X(Y(x,y,z),u) = Y(X(x,y),z,u). \tag{1.4}$$

Теорема 1.5 ([8]). *Если в обратимой нетривиальной $\{2,3\}$-алгебре выполняется $\{2,3\}$-сверхтождество, определенное равенством*

$$((x,y,z),u) = (x,(y,z),u),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$X\left(Y\left(x,y,z\right),u\right)=Y\left(x,X\left(y,z\right),u\right). \tag{1.5}$$

Теорема 1.6 ([8])**.** *Если в обратимой нетривиальной* $\{2,3\}$*-алгебре выполняется* $\{2,3\}$*-сверхтождество, определенное равенством*

$$\left(\left(x,y,z\right),u\right)=\left(x,y,\left(z,u\right)\right),$$

тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, такое сверхтождество определяется единственным образом:

$$X\left(Y\left(x,y,z\right),u\right)=Y\left(x,y,X\left(z,u\right)\right). \tag{1.6}$$

2. Критерий выполнимости сверхтождеств (1.1)-(1.6) в $\{2,3\}$-алгебрах с тернарной групповой операцией

Основными результатами статьи являются нижеприведенные теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть в обратимой* $\{2,3\}$*-алгебре* $Q(\Sigma)$ *существует тернарная операция* $A\in\Sigma$ *такая, что* $Q(A)$ *– тернарная группа. Тогда в алгебре* $Q(\Sigma)$ *выполняется сверхтождество* (1.1) *тогда и только тогда, когда каждая тернарная квазигрупповая операция* $A_i\in\Sigma$ *определяется по правилу:*

$$A_i(x,y,z)=x\cdot\theta y\cdot c\cdot z\cdot t_i\,,$$

а каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j\in\Sigma$ *определяется по правилу:*

$$B_j(x,y)=\alpha_j(x\cdot\theta y),$$

где $Q(\cdot)$ *– группа,* θ *– ее автоморфизм,* $t_i,c\in Q$*,* $\theta(c)=c$*,* $\theta(t_i)=t_i$*,* $\theta^2(x)=c\cdot x\cdot c^{-1}$*,* $t_i\in Z(Q)$ *– центр группы* $Q(\cdot)$*,* $\alpha_j:Q\to Q$ *– биекция.*

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой:

$$X(Y(x,y,z),u){=}\alpha_j\left(x\cdot\theta y\cdot c\cdot z\cdot t_i\cdot\theta u\right)=\alpha_j\left(x\cdot\theta\left(y\cdot\theta z\cdot c\cdot u\cdot t_i\right)\right){=}X(x,Y(y,z,u)).$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.1). Согласно теореме Глускина-Хоссу [1], существует такая группа $Q(\cdot)$, что

$$A(x,y,z)=x\cdot\theta y\cdot c\cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$, т.е. θ^2 – внутренний автоморфизм. Если в (1.1) положить $X = B_j$, $Y = A$, получим

$$B_j(x \cdot \theta y \cdot c \cdot z, u) = B_j(x, y \cdot \theta z \cdot c \cdot u).$$

Если здесь $z = e$ – единица группы $Q(\cdot)$ и $u = c^{-1}$, тогда

$$B_j(x, y) = B_j(x \cdot \theta y \cdot c, c^{-1}) = \alpha_j(x \cdot \theta y),$$

где $\lambda_j(x) = B_j(x \cdot c, c^{-1})$ и α_j – биекция.

Возвращаясь к равенству (1.1), при $X = B_j$, $Y = A_i$ получим

$$\alpha_j\left(A_i(x, y, z) \cdot \theta u\right) = \alpha_j\left(x \cdot \theta A_i(y, z, u)\right)$$

или

$$A_i(x, y, z) \cdot \theta u = x \cdot \theta A_i(y, z, u)$$

и при $u = e$ имеем:

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta A_i(y, z, e) = x \cdot \lambda_i(y, z),$$

где $\lambda_i : Q^2 \to Q$ – квазигрупповая операция, причем

$$\lambda_i(y, z) = \theta A_i(y, z, e).$$

Возвращаясь к равенству (1.1) теперь получим

$$x \cdot \lambda_i(y, z) \cdot \theta u = x \cdot \theta\left(y \cdot \lambda_i(z, u)\right),$$

откуда

$$\lambda_i(y, z) \cdot \theta u = \theta\left(y \cdot \lambda_i(z, u)\right)$$

и при $u = e$, имеем

$$\lambda_i(y, z) = \theta y \cdot \theta\left(\lambda_i(z, e)\right) = \theta y \cdot \mu_i z,$$

где $\mu_i : Q \to Q$ – биекция, поскольку $\mu_i(z) = \theta\left(\lambda_i(z, e)\right)$. Итак,

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \lambda_i(y, z) = x \cdot \theta y \cdot \mu_i z.$$

Следовательно,

$$\theta y \cdot \mu_i z \cdot \theta u = \theta y \cdot \theta\left(\theta z \cdot \mu_i u\right) = \theta y \cdot \theta^2 z \cdot \theta(\mu_i u) = \theta y \cdot c \cdot z \cdot c^{-1} \cdot \theta\left(\mu_i u\right)$$

и при $u = e$, получаем

$$\mu_i z = c \cdot z \cdot c^{-1} \cdot \theta\left(\mu_i e\right) = c \cdot z \cdot t_i,$$

где $t_i = c^{-1} \cdot \theta\left(\mu_i e\right) \in Q$, т.е.

$$\lambda_i(y, z) = \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i,$$

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i.$$

Теперь возвращаясь к равенству (1.1) получим

$$x\cdot\theta y\cdot c\cdot z\cdot t_i\cdot\theta u = x\cdot\theta\,(y\cdot\theta z\cdot c\cdot u\cdot t_i) = x\cdot\theta y\cdot\theta^2 z\cdot\theta c\cdot\theta u\cdot\theta t_i = x\cdot\theta y\cdot c\cdot z\cdot c^{-1}\cdot\theta u\cdot\theta t_i,$$

т.е.

$$t_i\cdot\theta u = \theta u\cdot\theta t_i.$$

Отсюда, при $u = e$ получим $t_i = \theta t_i$. Следовательно, $t_i\cdot\theta u = \theta u\cdot t_i$, т.е. $t_i \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$. □

Теорема 2.2. *Пусть в обратимой $\{2,3\}$-алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество* (1.2) *тогда и только тогда, когда существует бинарная группа $Q(\cdot)$ такая, что каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу:*

$$B_j(x,y) = x\cdot t_j\cdot y\,,$$

где $t_j \in Q$, $t_j = t\cdot z_j$, $z_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, t – фиксированный элемент множества Q, а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A_i(x,y,z) = \lambda_i\left(t^{-1}\cdot x\cdot t\cdot y, z\right),$$

где $\lambda_i : Q^2 \to Q$ – бинарные квазигрупповые операции.

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственным вычислением левой и правой частей равенства (1.2):

$$Y(X(x,y),u,v) = \lambda_i\left(t^{-1}\cdot X(x,y)\cdot t\cdot u, v\right) = \lambda_i\left(t^{-1}\cdot x\cdot t_j\cdot y\cdot t\cdot u, v\right),$$

$$Y(x,X(y,u),v) = \lambda_i\left(t^{-1}\cdot x\cdot t\cdot X(y,u), v\right) = \lambda_i\left(t^{-1}\cdot x\cdot t\cdot y\cdot t_j\cdot u, v\right),$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.2). По теореме Глускина-Хоссу, существует такая группа $Q(\cdot)$, что

$$A(x,y,z) = x\cdot\theta y\cdot c\cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2(x) = c\cdot x\cdot c^{-1}$. Если в (1.2) положить $X = B_j$, $Y = A$, тогда получим:

$$B_j(x\cdot y)\cdot\theta u\cdot c\cdot v = x\cdot\theta B_j(y,u)\cdot c\cdot v.$$

Откуда, при $u = e$ – единица группы $Q(\cdot)$, имеем:

$$B_j(x,y) = x\cdot\theta B_j(y,e) = x\cdot\alpha_j(y),$$

где $\lambda_j(y) = \theta B_j(y,e)$. Поэтому, получаем

$$x\cdot\alpha_j(y)\cdot\theta u = x\cdot\theta\,(y\cdot\alpha_j(u)) = x\cdot\theta y\cdot\theta\,(\alpha_j(u))\,.$$

Если здесь $u = e$, тогда

$$\alpha_j(y) = \theta y \cdot \theta\left(\alpha_j(e)\right) = \theta y \cdot t_j,$$

где $t_i = \theta\left(\alpha_j e\right)$. Следовательно,

$$B_j(x,y) = x \cdot \alpha_j(y) = x \cdot \theta y \cdot t_j.$$

Из равенства (1.2) теперь следует

$$\theta y \cdot t_j \cdot \theta u = \theta y \cdot \theta\left(\theta u \cdot t_j\right) = \theta y \cdot \theta^2 u \cdot \theta t_j,$$

а при $u = e$ имеем $t_j = \theta t_j$. Итак,

$$t_j \cdot \theta u = \theta^2 u \cdot t_j,$$

т.е.

$$\theta^2 u = t_j \cdot \theta u \cdot t_j^{-1}.$$

Откуда, при $x = \theta u$ имеем $\theta x = t_j \cdot x \cdot t_j^{-1} = t_i \cdot x \cdot t_i^{-1}$ и $t_i^{-1} \cdot t_j \cdot x = x \cdot t_i^{-1} \cdot t_j$, т.е. $t_i^{-1} \cdot t_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$. При фиксированном значении $t_i = t \in Q$ получим $t^{-1} \cdot t_j = z_j \in Z(Q)$, т.е. $t_j = t \cdot z_j$, где $z_j \in Z(Q)$. Таким образом,

$$B_j(x,y) = x \cdot \theta y \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y \cdot t_j^{-1} \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y = x \cdot t \cdot z_j \cdot y.$$

Теперь с учетом равенства (1.2) получаем

$$A_i\left(x \cdot t_j \cdot y, u, v\right) = A_i\left(x, y \cdot t_j \cdot u, v\right),$$

а при $x = e$ имеем:

$$A_i\left(t_j \cdot y, u, v\right) = A_i\left(e, y \cdot t_j \cdot u, v\right).$$

Откуда, при $y = t_j^{-1} \cdot x$ имеем:

$$A_i\left(x,u,v\right) = A_i\left(e, t_j^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot u, v\right) = \lambda_i\left(t_j^{-1} \cdot x \cdot t_j \cdot u, v\right) = \lambda_i\left(t^{-1} \cdot x \cdot t \cdot u, v\right),$$

где $\lambda_i(x,y) = A_i(e,x,y)$. □

Теорема 2.3. *Пусть в обратимой $\{2,3\}$-алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A \in \Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество* (1.3) *тогда и только тогда, когда существует бинарная группа $Q(\cdot)$ такая, что каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ определяется по правилу*

$$B_j(x,y) = x \cdot t_j \cdot y\,,$$

где $t_j \in Q$, $t_j = t \cdot z_j$, $z_j \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, t – фиксированный элемент множества Q, а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x,y,z) = \varphi_i\left(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot z\right),$$

где $\varphi_i : Q \to Q$ *– биекции.*

Доказательство. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой:

$$Y(X(x,y),u,v) = \varphi_i\left(t^{-2} \cdot X(x,y) \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v\right) = \varphi_i\left(t^{-2} \cdot x \cdot t_j \cdot y \cdot t \cdot u \cdot t \cdot v\right),$$

$$Y(x,y,X(u,v)) = \varphi_i\left(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot X(u,v)\right) = \varphi_i\left(t^{-2} \cdot x \cdot t \cdot y \cdot t \cdot u \cdot t_j \cdot v\right).$$

Докажем необходимость. Пусть в данной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество (1.3). По теореме Глускина-Хоссу имеем

$$A(x,y,z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c \in Q$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$. Пусть в равенстве (1.3) $X = B_j$, $Y = A$, тогда

$$B_j(x \cdot y) \cdot \theta u \cdot c \cdot v = x \cdot \theta y \cdot c \cdot B_j(u,v),$$

а при $u = e$ и $v = c^{-1}$ получим

$$B_j(x,y) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot B_j(e, c^{-1}) = x \cdot \theta y \cdot t_j,$$

где $t_j = c \cdot B_j(e, c^{-1}) \in Q$. Следовательно,

$$x \cdot \theta y \cdot t_j \cdot \theta u \cdot c \cdot v = x \cdot \theta y \cdot c \cdot u \cdot \theta v \cdot t_j,$$

т.е.

$$t_j \cdot \theta u \cdot c \cdot v = c \cdot u \cdot \theta v \cdot t_j,$$

а при $u = e$

$$t_j \cdot c \cdot v = c \cdot \theta v \cdot t_j.$$

Откуда, при $v = e$ имеем $t_j \cdot c = c \cdot t_j$ или $c^{-1} \cdot t_j \cdot c = t_j$ и

$$\theta v = c^{-1} \cdot t_j \cdot c \cdot v \cdot t_j^{-1} = t_j \cdot v \cdot t_j^{-1} = t_i \cdot v \cdot t_i^{-1}.$$

Поэтому $t_i^{-1} \cdot t_j = z_{i,j} \in Z(Q)$ – центр группы $Q(\cdot)$, а при фиксированном значении $t_i = t \in Q$ получим $t_j = t \cdot z_j$, где $z_j \in Z(Q)$. Итак,

$$B_j(x,y) = x \cdot \theta y \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y \cdot t_j^{-1} \cdot t_j = x \cdot t_j \cdot y.$$

Далее, согласно равенству (1.2)

$$A_i\left(x \cdot t_j \cdot y, u, v\right) = A_i\left(x, y, u \cdot t_j \cdot v\right),$$

а при $x = e$ имеем

$$A_i\left(t_j \cdot y, u, v\right) = A_i\left(e, y, u \cdot t_j \cdot v\right).$$

Если здесь положить $y = t_j^{-1} \cdot x$ получим

$$A_i\left(x,u,v\right) = A_i\left(e, t_j^{-1} \cdot x, u \cdot t_j \cdot v\right) = \mu_i\left(t_j^{-1} \cdot x, u \cdot t_j \cdot v\right) = \mu_i\left(t^{-1} \cdot x, u \cdot t \cdot v\right),$$

где $\mu_i(x,y) = A_i(e,x,y)$. Следовательно,

$$\mu_i\left(t^{-1}B_j(x,y), u\cdot t\cdot v\right) = \mu_i\left(t^{-1}\cdot x, y\cdot t\cdot B_j(u,v)\right),$$

$$\mu_i\left(t^{-1}\cdot x\cdot t_j\cdot y, u\cdot t\cdot v\right) = \mu_i\left(t^{-1}\cdot x, y\cdot t\cdot u\cdot t_j\cdot v\right),$$

т.е.

$$\mu_i\left(x\cdot t_j\cdot y, u\cdot t\cdot v\right) = \mu_i\left(x, y\cdot t\cdot u\cdot t_j\cdot v\right),$$

а при $x = e$, $y = t_j^{-1}\cdot w$ получим:

$$\mu_i\left(w, u\cdot t\cdot v\right) = \mu_i\left(e, t_j^{-1}\cdot w\cdot t\cdot u\cdot t_j\cdot v\right).$$

Пусть $v = e$, тогда

$$\mu_i\left(w, u\cdot t\right) = \mu_i\left(e, t_j^{-1}\cdot w\cdot t\cdot u\cdot t_j\right),$$

т.е.

$$\mu_i\left(w, u\right) = \mu_i\left(e, t_j^{-1}\cdot w\cdot t\cdot u\cdot t^{-1}\cdot t_j\right) = \varphi_i\left(t_j^{-1}\cdot w\cdot t\cdot u\cdot t^{-1}\cdot t_j\right) =$$

$$= \varphi_i\left(t^{-1}\cdot w\cdot t\cdot u\right),$$

где $\varphi_i(x) = \mu_i(e,x)$. Таким образом

$$A_i(x,u,v) = \mu_i\left(t^{-1}\cdot x, u\cdot t\cdot v\right) = \varphi_i\left(t^{-1}\cdot t^{-1}\cdot x\cdot t\cdot u\cdot t\cdot v\right) =$$

$$= \varphi_i\left(t^{-2}\cdot x\cdot t\cdot u\cdot t\cdot v\right).$$

□

Аналогично доказываются следующие результаты.

Теорема 2.4. *Пусть в обратимой $\{2,3\}$-алгебре $Q(\Sigma)$ существует тернарная операция $A\in\Sigma$ такая, что $Q(A)$ – тернарная группа. Тогда в алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество* (1.4) *тогда и только тогда, когда каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j\in\Sigma$ определяется по правилу*

$$B_j(x,y) = t_j\cdot\theta x\cdot c\cdot u\,,$$

а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i\in\Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x,y,z) = \ell_i\cdot x\cdot\theta y\cdot c\cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ – группа, θ – ее автоморфизм, $c,\ell_i,t_j\in Q$, $\theta c = c$, $\theta^2 x = c\cdot x\cdot c^{-1}$, $t_j\cdot\theta\ell_i = \ell_i\cdot t_j$.

Теорема 2.5. *Пусть в обратимой* $\{2,3\}$*-алгебре* $Q(\Sigma)$ *существует тернарная операция* $A \in \Sigma$ *такая, что* $Q(A)$ *– тернарная группа. Тогда в алгебре* $Q(\Sigma)$ *выполняется сверхтождество* (1.5) *тогда и только тогда, когда каждая бинарная квазигрупповая операция* $B_j \in \Sigma$ *определяется по правилу*

$$B_j(x,y) = x \cdot t_j \cdot y\,,$$

а каждая тернарная квазигрупповая операция $A_i \in \Sigma$ *определяется по правилу*

$$A_i(x,y,z) = q_i(x) \cdot y \cdot t \cdot z,$$

где $Q(\cdot)$ *– группа,* $t_j, t \in Q$*,* $t_j = t \cdot z_j$*, причем* $z_j \in Z(Q)$ *– центр группы* $Q(\cdot)$*,*t *– фиксированный элемент множества* Q*, а* $q_i : Q \to Q$ *– биекция.*

Теорема 2.6. *Пусть в обратимой* $\{2,3\}$*-алгебре* $Q(\Sigma)$ *существует тернарная операция* $A \in \Sigma$ *такая, что* $Q(A)$ *– тернарная группа. Тогда в алгебре* $Q(\Sigma)$ *выполняется сверхтождество* (1.6) *тогда и только тогда, когда каждая тернарная квазигрупповая операция* $A_i \in \Sigma$ *определяется по правилу*

$$A_i(x,y,z) = \mu_i(x,y) \cdot u,$$

а каждая бинарная квазигрупповая операция $B_j \in \Sigma$ *определяется по правилу:*

$$B_j(x,y) = x \cdot \varphi_j(y)\,,$$

где $Q(\cdot)$ *– группа,* $\mu_i : Q^2 \to Q$ *– бинарная квазигрупповая операция, а* $\varphi_j : Q \to Q$ *– биекция.*

Abstract. The paper gives a characterization of invertible $\{2,3\}$-algebras with a ternary group operation and balanced $\{2,3\}$-hyperidentities of the first genus and of the length 4.

Список литературы

[1] В.Д. Белоусов, n-арные квазигруппы, Кишинев, "Штиинца" (1972).
[2] J. Usan, "n-groups in the light of the neutral operations", Electronic version (2006).
[3] А. И. Мальцев, Алгебраические Системы, М., Наука (1970).
[4] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во ЕГУ (1986).
[5] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во ЕГУ (1990).
[6] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Мат. Наук, **53**, 1(319), 61 – 114 (1998).
[7] Yu. M. Movsisyan, "Binary Representation of Algebras with At Most Two Binary Operations. A Cayley theorem for Distributive Lattices", International Journal of Algebra and Computation, **18**(1), 97 – 106 (2009).
[8] Г. Э. Гумашян, "Об обратимых $\{2,3\}$-алгебрах", Ученые Записки ЕГУ, **1**, 141 – 142 (2008).

Поступила 27 марта 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 57-72.

SHARP AND WEIGHTED BOUNDEDNESS FOR MULTILINEAR OPERATORS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS ON MORREY SPACE

LANZHE LIU

Changsha University of Science and Technology Changsha 410077, China
E-mail: *lanzheliu@163.com*

Abstract. The paper proves boundedness of the multilinear operators related to some pseudo-differential operators on the generalized weighted Morrey spaces using the sharp estimate of the multilinear operators.

MSC2000 number: 42B20, 42B25

Keywords: multilinear operator; pseudo-differential operator; Morrey space; BMO; A_1-weight.

1. Preliminaries and statements of main results

Throughout this paper, φ denotes a positive, increasing function on R^+ and it is assumed that there exists a constant $D > 0$ such that

$$\varphi(2t) \leq D\varphi(t) \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Let w be a weight function on $\mathbb{R}^n$, that is a nonnegative locally integrable function, and f be a locally integrable function on $\mathbb{R}^n$. Define that, for $1 \leq p < \infty$,

$$||f||_{L^{p,\varphi}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ d>0} \left(\frac{1}{\varphi(d)} \int_{B(x,d)} |f(y)|^p w(y)dy \right)^{1/p},$$

where $B(x,d) = \{y \in R^n : |x-y| < d\}$. The generalized weighted Morrey spaces are defined by

$$L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : ||f||_{L^{p,\varphi}(w)} < \infty\}.$$

If $\varphi(d) = d^\delta$, $\delta > 0$, then $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n, w)$, which is the classical Morrey space (see [16], [17]).

As the development of the Calderón-Zygmund singular integral operators, their commutators and multilinear operators have been well studied (see [3] - [6], [9]). In [14], Hu and Yang proved a version sharp estimate for the multilinear singular integral operators. In [18], [19], C. Pérez, G. Pradolini and R. Trujillo-Gonzalez obtained a sharp weighted estimates for the singular integral operators and their commutators. The boundedness of the pseudo-differential operators was studied by many authors (see [1], [7], [12], [15], [20] - [21]). In [20], the boundedness of the commutators associated to the pseudo-differential operators are obtained. The main purpose of this paper is to study the multilinear pseudo-differential operators as follows.

We say a symbol $\sigma(x,\xi)$ belongs to the class $S^m_{\rho,\delta}$, if

$$\left|\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu}\sigma(x,\xi)\right| \le C_{\mu,\nu}(1+|\xi|)^{m-\rho|\nu|+\delta|\mu|}, \qquad x,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

where μ,ν are multi-indices and $|\mu|=|\mu_1|+\ldots+|\mu_n|$. A pseudo-differential operator with symbol $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ is defined by

$$T(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

where f is a Schwartz function and $\hat{f}$ denotes the Fourier transform of f. It is known (see [1]) that there exists a kernel $K(x,y)$ such that

$$T(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x,x-y)f(y)dy,$$

where

$$K(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\sigma(x,\xi)d\xi.$$

In [12] the boundedness of the pseudo-differential operators with symbol $\sigma\in S^{-\beta}_{1-\theta,\delta}$ $(\beta<n\theta/2, 0\le\delta<1-\theta)$ are obtained. In [15] the boundedness of the pseudo-differential operators with symbol of orders 0 and $-\infty$ is proved. In [1] some sharp estimate of the pseudo-differential operators with symbol $\sigma\in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0<\theta<1, 0\le\delta<1-\theta)$ are obtained. In [20] the boundedness of the pseudo-differential operators and their commutators with symbol $\sigma\in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0<\theta<1, 0\le\delta<1-\theta)$ are obtained. Our study are motivated by these papers.

Assuming that T is a pseudo-differential operator with symbol $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ that m_j $(j=1,\ldots,l)$ are some positive integers such that $m_1+\ldots+m_l=m$ and b_j are functions given on $\mathbb{R}^n$, we set

$$R_{m_j+1}(b_j;x,y)=b_j(x)-\sum_{|\alpha|\le m_j}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha b_j(y)(x-y)^\alpha, \quad 1\le j\le m.$$

The multilinear operator associated to T is defined by

$$T_b(f)(x)=\int_{R^n}\frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(b_j;x,y)}{|x-y|^m}K(x,x-y)f(y)\,dy.$$

Note that for $m=0$, T_b is just the multilinear commutator generated by T and b (see [18], [19]), while for $m>0$, T_b is nontrivial generalizations of the commutator. It is well known that multilinear operators are of great interest in harmonic analysis and have been widely studied by many authors (see [3] - [6]). Besides, the Morrey space can be considered as an extension of the Lebesgue space, since the Morrey space $L^{p,\lambda}$ becomes Lebesgue space L^p for $\lambda = 0$). Hence, it is natural and important to study the boundedness of multilinear singular integral operators on the Morrey spaces $L^{p,\lambda}$ with $\lambda > 0$ (see [2], [10], [11]). The purpose of this paper is twofold. First, we establish a sharp inequality for multilinear pseudo-differential operator T_b with symbol $\sigma \in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0 < \theta < 1, 0 \le \delta < 1-\theta)$. Then, we use this sharp inequality to prove the boundedness for the multilinear operators on the generalized weighted Morrey spaces.

Now, we introduce some notations. Denote by Q a cube in R^n with sides parallel to the coordinate axes. For any locally integrable function f, its sharp function is defined by

$$f^{\#}(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| \, dy,$$

where, and in what follows, $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x) \, dx$. It is well-known (see [13]) that

$$f^{\#}(x) \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{c \in C} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c| \, dy.$$

We say that f belongs to $BMO(R^n)$ if $f^{\#} \in L^\infty(R^n)$ and denote $||f||_{BMO} = ||f^{\#}||_{L^\infty}$.

Let M be the Hardy-Littlewood maximal operator

$$M(f)(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{-1} \int_Q |f(y)| \, dy, \quad 0 < p < \infty.$$

We set $M_p(f) = (M(f^p))^{1/p}$ and denote by A_1 the class of Muckenhoupt weights (see [13]):

$$A_1 = \{0 < w \in L^1_{loc}(R^n) : M(w)(x) \le Cw(x), a.e.\}.$$

The following theorem is the main result of this paper.

Theorem. *Let T be a pseudo-differential operator with a symbol $\sigma \in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0 < \theta < 1, 0 \le \delta < 1-\theta)$ and let $2 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$, $w \in A_1$, and $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ and $j = 1, \ldots, l$. Then*

$$||T_b(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \le C \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{|\alpha_j| = m_j} ||D^{\alpha_j} b_j||_{BMO} \right) ||f||_{L^{p,\varphi}(w)}.$$

2. Proof of the Theorem

To prove the theorem, we need the following lemmas.

Lemma 1. *([3]) Let b be a function on R^n and $D^\alpha b \in L^q(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m$ and some $q > n$. Then, for any $x \neq y$,*

$$|R_m(b;x,y)| \leq C|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}(x,y)|} \int_{\tilde{Q}(x,y)} |D^\alpha b(z)|^q dz \right)^{1/q},$$

where $\tilde{Q}$ is the cube centered at x with the side length $5\sqrt{n}|x-y|$.

Lemma 2. *([1]) Let T be a pseudo-differential operator with a symbol $\sigma \in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0 < \theta < 1,\ 0 \leq \delta < 1-\theta)$. Then, for every p, $1 < p < \infty$,*

$$||T(f)||_{L^p} \leq C_p ||f||_{L^p}, \qquad f \in L^p(R^n).$$

Lemma 3. *([1]) Let $\sigma \in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}(0 < \theta < 1, 0 \leq \delta < 1-\theta)$ and K be the kernel of a pseudo-differential operator T with a symbol σ. Then, for $|x_0 - x| \leq d < 1$ and $k \geq 1$,*

$$\left(\int_{(2^k d)^{1-\theta} \leq |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} |K(x,x-y) - K(x_0,x_0-y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \frac{|x_0 - x|^{(1-\theta)(m-n/2)}}{(2^k d)^{m(1-\theta)}},$$

provided m is an integer such that $n/2 < m < n/2 + 1/(1-\theta)$.

Lemma 4. *([1]) Let $\sigma \in S^0_{\rho,\delta}(0 < \rho < 1)$ and*

$$K(x,w) = \int_{R^n} e^{2\pi i w \cdot \xi} \sigma(x,\xi)\, d\xi.$$

Then, for $|w| \geq 1/4$ and any integer $N \geq 1$,

$$|K(x,w)| \leq C_N |w|^{-2N}.$$

Lemma 5. *Let $1 < p < \infty$, $0 < D < 2^n$, $w \in A_1$. Then, for any function $f \in L^{p,\varphi}(R^n, w)$*

(a) $||M(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f^\#||_{L^{p,\varphi}(w)}$;

(b) $||M_q(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f||_{L^{p,\varphi}(w)}$ for $1 < q < p$.

Proof. (a) Let $f \in L^{p,\varphi}(R^n, w)$. Then $M(w\chi_B) \in A_1$ for any ball $B = B(x,d) \subset R^n$ (see [8]). Therefore, using the inequality (see [13])

$$\int_{R^n} |M(f)(y)|^p u(y) dy \leq C \int_{R^n} |f^\#(y)|^p u(y) dy,$$

which is true for any $u \in A_1$, we get

$$\int_B |M(f)(y)|^p w(y) dy \leq \int_{R^n} |M(f)(y)|^p M(w\chi_B)(y) dy \leq$$

$$\leq C \int_{R^n} |f^\#(y)|^p M(w\chi_B)(y) dy \leq$$

$$\leq C\left[\int_B |f^\#(y)|^p M(w)(y)dy + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |f^\#(y)|^p \left(\sup_{Q\ni y}\frac{1}{|Q|}\int_B w(z)dz\right)dy\right] \leq$$

$$\leq C\left[\int_B |f^\#(y)|^p M(w)(y)dy + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} |f^\#(y)|^p \left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_B w(z)dz\right)dy\right] \leq$$

$$\leq C\left[\int_B |f^\#(y)|^p w(y)dy + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^{k+1}B} |f^\#(y)|^p \frac{M(w)(y)}{2^{n(k+1)}}dy\right] \leq$$

$$\leq C\left[\int_B |f^\#(y)|^p w(y)dy + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^{k+1}B} |f^\#(y)|^p \frac{w(y)}{2^{nk}}dy\right] \leq$$

$$\leq C||f^\#||^p_{L^{p,\varphi}(w)} \sum_{k=0}^\infty 2^{-nk}\varphi(2^{k+1}d) \leq C||f^\#||^p_{L^{p,\varphi}(w)} \sum_{k=0}^\infty (2^{-n}D)^k \varphi(d) \leq$$

$$\leq C||f^\#||^p_{L^{p,\varphi}(w)}\varphi(d).$$

Thus,

$$||M(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} \leq C||f^\#||_{L^{p,\varphi}(w)}.$$

The inequality (b) is proved by an argument similar to that in the proof of (a), and we omit the details. □

Key Lemma. *Let T be a pseudo-differential operator with a symbol $\sigma \in S^{-n\theta/2}_{1-\theta,\delta}$ $(0<\theta<1,\ 0\leq\delta<1-\theta)$ and let $D^\alpha b_j \in BMO(R^n)$ for all α with $|\alpha| = m_j$ $(j=1,\cdots,l)$. Then there exists a constant $C>0$ such that for any $f\in C_0^\infty(R^n)$, $2<r<\infty$ and $\tilde{x}\in R^n$,*

$$(T_b(f))^\#(\tilde{x}) \leq C\prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} ||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

Proof. It suffices to prove that for any $f\in C_0^\infty(R^n)$ and some constant C_0, the following inequality holds:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |T_b(f)(x) - C_0|dx \leq C\prod_{j=1}^l \left(\sum_{|\alpha_j|=m_j} ||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

Without loss of generality, we can assume $l=2$. Fix a cube $Q = Q(x_0,d)$ and $\tilde{x}\in Q$. We consider two cases.

Case 1. $d\leq 1$. Let Q^* be the concentric with Q cube with side length $d^{1-\theta}$, $\tilde{Q} = 5\sqrt{n}Q^*$ and

$$\tilde{b}_j(x) = b_j(x) - \sum_{|\alpha|=m_j}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha b_j)_{\tilde{Q}}x^\alpha.$$

Then $R_{m_j}(b_j;x,y) = R_{m_j}(\tilde{b}_j;x,y)$ and $D^\alpha \tilde{b}_j = D^\alpha b_j - (D^\alpha b_j)_{\tilde{Q}}$ for $|\alpha| = m_j$. Consequently, for $f = f\chi_{\tilde{Q}} + f\chi_{R^n\setminus\tilde{Q}} = f_1 + f_2$ we obtain

$$T_b(f)(x) = \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j;x,y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f(y)dy =$$

$$= \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j;x,y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy -$$

$$- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{R^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2;x,y)(x-y)^{\alpha_1} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy -$$

$$- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{R^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1;x,y)(x-y)^{\alpha_2} D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy +$$

$$+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \int_{R^n} \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy +$$

$$+ \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{b}_j;x,y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_2(y)\,dy.$$

Therefore,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |T_b(f)(x) - T_{\tilde{b}}(f_2)(x_0)|dx \le$$

$$\le \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{b}_j;x,y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy \right| dx +$$

$$+ \frac{C}{|Q|}\int_Q \left| \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{R^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2;x,y)(x-y)^{\alpha_1}}{|x-y|^m} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)K(x,x-y)f_1(y)dy \right| dx +$$

$$+ \frac{C}{|Q|}\int_Q \left| \sum_{|\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1;x,y)(x-y)^{\alpha_2}}{|x-y|^m} D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)K(x,x-y)f_1(y)dy \right| dx +$$

$$+ \frac{C}{|Q|}\int_Q \left| \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x,x-y)f_1(y)dy \right| dx +$$

$$+ \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| T_{\tilde{b}}(f_2)(x) - T_{\tilde{b}}(f_2)(x_0) \right| dx =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

To estimate the quantities I_1, I_2, I_3, I_4 and I_5, first, for $x \in Q$ and $y \in \tilde{Q}$, we use Lemma 1 and obtain

$$R_m(\tilde{b}_j;x,y) \le C|x-y|^m \sum_{|\alpha_j|=m} ||D^{\alpha_j} b_j||_{BMO}.$$

Now, we suppose $\sigma(x,\xi) = \sigma(x,\xi)|\xi|^{n\theta/2}|\xi|^{-n\theta/2} = q(x,\xi)|\xi|^{-n\theta/2}$. Then $q(x,\xi) \in S^0_{1-\theta,\delta}$. Therefore, denoting the pseudo-differential operator with symbol $q(x,\xi)$ by S

and applying the Hardy-Littlewood-Soboleve fractional integration theorem and the L^2-boundedness of S (see [1]), we obtain that for $1/p = 1/2 - \theta/2$,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f_1)(x)|dx \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)|Q|^{-1/p}\left(\int_{R^n} |S(f_1)(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)|Q|^{-1/p}\left(\int_{R^n} |f_1(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\frac{|\tilde{Q}|^{1/2}}{|Q|^{1/p}}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^r dx\right)^{1/r} \\
&\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

For I_2, we use Lemma 1 and Hölder's inequality and obtain that for $1/r + 1/r' = 1/2$,

$$
I_2 \le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p} \le
$$

$$
\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}|Q|^{-1/p}\left(\int_{R^n} |S(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 f_1)(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le
$$

$$
\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}|Q|^{-1/p}\left(\int_{R^n} |D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(x) f_1(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le
$$

$$
\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\frac{|\tilde{Q}|^{1/2}}{|\tilde{Q}|^{1/p}}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_1}b_1(x) - (D^{\alpha}b_j)_{\tilde{Q}}|^{r'} dx\right)^{1/r'} \times
$$

$$
\times\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} |f(x)|^r dx\right)^{1/r} \le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).
$$

Similarly, for I_3, we get

$$I_3 \le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

For I_4, taking $r_1, r_2 > 1$ such that $1/r + 1/r_1 + 1/r_2 = 1/2$, we obtain

$$I_4 \le C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 D^{\alpha_2}\tilde{b}_2 f_1)(x)|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} |Q|^{-1/p} \left(\int_{R^n} |S(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 D^{\alpha_2}\tilde{b}_2 f_1)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} |Q|^{-1/p} \left(\int_{R^n} |D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(x) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(x) f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le C \frac{|\tilde{Q}|^{1/2}}{|\tilde{Q}|^{1/p}} \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\alpha_j}\tilde{b}_j(x)|^{r_j} dx \right)^{1/r_j} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^r dx \right)^{1/r} \le C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

To estimate I_5, observe that

$$T_{\tilde{b}}(f_2)(x) - T_{\tilde{b}}(f_2)(x_0) = \int_{R^n} \left(\frac{K(x, x-y)}{|x-y|^m} - \frac{K(x_0, x_0-y)}{|x_0-y|^m} \right) \prod_{j=1}^{2} R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y) f_2(y) dy$$

$$+ \int_{R^n} \left(R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y) - R_{m_1}(\tilde{b}_1; x_0, y) \right) \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)}{|x_0-y|^m} K(x_0, x_0-y) f_2(y) dy$$

$$+ \int_{R^n} \left(R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{b}_2; x_0, y) \right) \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x_0, y)}{|x_0-y|^m} K(x_0, x_0-y) f_2(y) dy$$

$$- \sum_{|\alpha_1|=m_1} \frac{1}{\alpha_1!} \int_{R^n} \left[\frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)(x-y)^{\alpha_1}}{|x-y|^m} K(x, x-y) - \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x_0, y)(x_0-y)^{\alpha_1}}{|x_0-y|^m} K(x_0, x_0-y) \right]$$

$$\times D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) f_2(y) dy$$

$$- \sum_{|\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_2!} \int_{R^n} \left[\frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y)(x-y)^{\alpha_2}}{|x-y|^m} K(x, x-y) - \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x_0, y)(x_0-y)^{\alpha_2}}{|x_0-y|^m} K(x_0, x_0-y) \right]$$

$$\times D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y) f_2(y) dy$$

$$+ \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \int_{R^n} \left[\frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-y|^m} K(x, x-y) - \frac{(x_0-y)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x_0-y|^m} K(x_0, x_0-y) \right]$$

$$\times D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y) f_2(y) dy$$

$$=: \quad I_5^{(1)} + I_5^{(2)} + I_5^{(3)} + I_5^{(4)} + I_5^{(5)} + I_5^{(6)}.$$

By Lemma 1 and the following inequality (see [13])

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \le C \log(|Q_2|/|Q_1|)||b||_{BMO},$$

which is true when $Q_1 \subset Q_2$, imply

$$\begin{aligned} |R_m(\tilde{b}; x, y)| &\le C|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} (||D^\alpha b||_{BMO} + |(D^\alpha b)_{\tilde{Q}(x,y)} - (D^\alpha b)_{\tilde{Q}}|) \\ &\le Ck|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha b||_{BMO}, \end{aligned}$$

for $x \in Q$ and $y \in Q(x_0, (2^{k+1}d)^{1-\theta}) \backslash Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})$. Therefore, noting that $|x-y| \sim |x_0 - y|$ for $x \in \tilde{Q}$ and $y \in R^n \setminus \tilde{Q}$, we obtain

$$\begin{aligned} |I_5^{(1)}| &\le \sum_{k=0}^\infty k^2 \int_{(2^k d)^{1-\theta} \le |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} |K(x, x-y) - K(x_0, x_0 - y)| \\ &\quad \times \frac{1}{|x-y|^m} \prod_{j=1}^2 |R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)||f(y)|dy \\ &\quad + \sum_{k=0}^\infty k^2 \int_{(2^k d)^{1-\theta} \le |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} \left| \frac{1}{|x-y|^m} - \frac{1}{|x_0 - y|^m} \right| \\ &\quad \times |K(x_0, x_0 - y)| \prod_{j=1}^2 |R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)||f(y)|dy \\ &\le C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) \sum_{k=0}^\infty k^2 \left(\int_{|y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{(2^k d)^{1-\theta} \le |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} |K(x, x-y) - K(x_0, x_0 - y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\quad + C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) \sum_{k=0}^\infty k^2 \left(\int_{|y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{(2^k d)^{1-\theta} \le |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} \frac{|x_0 - x|^2}{|x_0 - y|^2} |K(x_0, x_0 - y)|^2 dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

for the second term above, arguing as in the proof of Lemma 2.1 of [1], we obtain

$$\left(\int_{(2^k d)^{1-\theta} \le |y-x_0| < (2^{k+1}d)^{1-\theta}} \frac{|x_0 - x|^2}{|x_0 - y|^2} |K(x_0, x_0 - y)|^2 dy \right)^{1/2} \le C \frac{|x_0 - x|^{(1-\theta)(m-n/2)}}{(2^k d)^{m(1-\theta)}},$$

thus, by Lemma 3 and for $n/2 < m$, we get

$$\begin{aligned}
|I_5^{(1)}| &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\times \\
&\quad \times\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{d^{(1-\theta)(m-n/2)}}{(2^kd)^{m(1-\theta)}}\left(\int_{|y-x_0|<(2^{k+1}d)^{1-\theta}}|f(y)|^2dy\right)^{1/2}\leq \\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2 2^{k(1-\theta)(n/2-m)}\times \\
&\quad \times\left(\frac{1}{|Q(x_0,(2^kd)^{1-\theta})|}\int_{Q(x_0,(2^kd)^{1-\theta})}|f(y)|^rdy\right)^{1/r} \\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2 2^{k(1-\theta)(n/2-m)}M_r(f)(\tilde{x})\leq \\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

To estimate $I_5^{(2)}$, by the equality (see [3]):

$$R_m(\tilde{b};x,y)-R_m(\tilde{b};x_0,y)=\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{\beta!}R_{m-|\beta|}(D^\beta\tilde{b};x,x_0)(x-y)^\beta$$

and Lemma 1, we get

$$|R_m(\tilde{b};x,y)-R_m(\tilde{b};x_0,y)|\leq C\sum_{|\beta|<m}\sum_{|\alpha|=m}|x-x_0|^{m-|\beta|}|x-y|^{|\beta|}||D^\alpha b||_{BMO},$$

thus

$$\begin{aligned}
&|I_5^{(2)}|\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\times \\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2^kd)^{1-\theta}\leq|y-x_0|<(2^{k+1}d)^{1-\theta}}k\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|}|K(x_0,x_0-y)||f(y)|dy\leq \\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k2^{k(1-\theta)(n/2-m)}\times \\
&\times\left(\frac{1}{|Q(x_0,(2^kd)^{1-\theta})|}\int_{Q(x_0,(2^kd)^{1-\theta})}|f(y)|^rdy\right)^{1/r}\leq \\
&\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$|I_5^{(3)}| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

For $I_5^{(4)}$, as for $I_5^{(1)}$ and $I_5^{(2)}$, we get that for $1/r + 1/r' = 1/2$

$$|I_5^{(4)}| \leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{R^n} \left| \frac{(x-y)^{\alpha_1}}{|x-y|^m} - \frac{(x_0-y)^{\alpha_1}}{|x_0-y|^m} \right| |R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)||K(x, x-y)||D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)||f_2(y)|dy+$$

$$+C \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{R^n} |R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{b}_2; x_0, y)| \frac{|(x_0-y)^{\alpha_1}|}{|x_0-y|^m} |K(x, x-y)||D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)||f_2(y)|dy+$$

$$+C \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{R^n} |K(x, x-y) - K(x_0, x_0-y)| \frac{|(x_0-y)^{\alpha_1}|}{|x_0-y|^m} |R_{m_2}(\tilde{b}_2; x_0, y)||D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)||f_2(y)|dy \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m_2} ||D^\alpha b_2||_{BMO} \sum_{|\alpha_1|=m_1} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{k(1-\theta)(n/2-m)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})} |f(y) D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m_2} ||D^\alpha b_2||_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{k(1-\theta)(n/2-m)} \left(\frac{1}{|Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})} |f(y)|^r dy \right)^{1/r} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0, (2^k d)^{1-\theta})} |(D^{\alpha_1} b_1(y) - (D^{\alpha_1} b_1)_{\tilde{Q}})|^{r'} dy \right)^{1/r'} \leq$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{k(1-\theta)(n/2-m)} M_r(f)(\tilde{x}) \leq$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

Similarly,

$$|I_5^{(5)}| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^\alpha b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

For $I_5^{(6)}$, as for $I_5^{(1)}$, we get, that for $1/r + 1/r_1 + 1/r_2 = 1/2$,

$$|I_5^{(6)}| \leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \left| \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-y|^m} - \frac{(x_0-y)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x_0-y|^m} \right| \times$$

$$\times |K(x, x-y)||D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)||D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)||f_2(y)|dy+$$

$$+C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} |K(x, x-y) - K(x_0, x_0-y)| \frac{|(x_0-y)^{\alpha_1+\alpha_2}|}{|x_0-y|^m} \times$$

$$\times|D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y)||D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)||f_2(y)|dy \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\theta)(n/2-m)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})} |f(y) D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha_1|=m_1, |\alpha_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\theta)(n/2-m)} \left(\frac{1}{|Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})} |f(y)|^r dy \right)^{1/r} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{1}{|Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})|} \int_{Q(x_0,(2^k d)^{1-\theta})} |D^{\alpha_j} b_j(y) - (D^{\alpha_j} b_j)_{\tilde{Q}}|^{r_j} dy \right)^{1/r_j} \leq$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^{\alpha} b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

Thus

$$|I_5| \leq C \prod_{j=1}^{2} \left(\sum_{|\alpha|=m_j} ||D^{\alpha} b_j||_{BMO} \right) M_r(f)(\tilde{x}).$$

Case 2. $d > 1$. In this case, let $\tilde{Q} = 5\sqrt{n}Q$ and

$$\tilde{b}_j(x) = b_j(x) - \sum_{|\alpha|=m_j} \frac{1}{\alpha!} (D^{\alpha} b_j)_{\tilde{Q}} x^{\alpha}.$$

Then $R_{m_j}(b_j; x, y) = R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)$ and

$$D^{\alpha}\tilde{b}_j = D^{\alpha} b_j - (D^{\alpha} b_j)_{\tilde{Q}}, \quad |\alpha| = m_j.$$

Hence, for $f = f\chi_{\tilde{Q}} + f\chi_{R^n \setminus \tilde{Q}} = f_1 + f_2$, we have

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_b(f)(x)| dx$$

$$\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{R^n} \frac{\prod_{j=1}^{2} R_{m_j}(\tilde{b}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, x-y) f_1(y) dy \right| dx$$

$$+ \frac{C}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\alpha_1|=m_1} \int_{R^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{b}_2; x, y)(x-y)^{\alpha_1}}{|x-y|^m} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) K(x, x-y) f_1(y) dy \right| dx$$

$$+ \frac{C}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{b}_1; x, y)(x-y)^{\alpha_2}}{|x-y|^m} D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y) K(x, x-y) f_1(y) dy \right| dx$$

$$+ \frac{C}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2} \int_{R^n} \frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2} D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(y) D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(y)}{|x-y|^m} K(x, x-y) f_1(y) dy \right| dx$$

$$+\frac{1}{|Q|}\int_Q |T_{\tilde{b}}(f_2)(x)|dx =: J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5.$$

As for I_1, I_2, I_3 and I_4, by the $L^p(1 < p < \infty)$-boundedness of T (see Lemma 2), we get

$$J_1 \le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_{R^n}|T(f_1)(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)|Q|^{-1/r}\left(\int_{R^n}|f_1(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}||D^{\alpha_j}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x});$$

$$J_2 \le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{R^n}|T(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 f_1)(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}|Q|^{-1/r}\left(\int_{R^n}|D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(x)f_1(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\le C\sum_{|\alpha_2|=m_2}||D^{\alpha_2}b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|D^{\alpha_1}b_1(x)-(D^{\alpha}b_1)_{\tilde{Q}}|^{r'}dx\right)^{1/r'}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)|^r dx\right)^{1/r} \le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x});$$

$$J_3 \le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x});$$

$$J_4 \le C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}|Q|^{-1/r}\left(\int_{R^n}|T(D^{\alpha_1}\tilde{b}_1 D^{\alpha_2}\tilde{b}_2 f_1)(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}|Q|^{-1/r}\left(\int_{R^n}|D^{\alpha_1}\tilde{b}_1(x)D^{\alpha_2}\tilde{b}_2(x)f_1(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|D^{\alpha_j}\tilde{b}_j(x)|^{r_j}dx\right)^{1/r_j}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\le C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^{\alpha}b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).$$

To estimate J_5, observe that

$$T_{\tilde b}(f_2)(x)=\int_{R^n}\frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde b_j;x,y)}{|x-y|^m}K(x,x-y)f_2(y)dy$$
$$-\sum_{|\alpha_1|=m_1}\frac{1}{\alpha_1!}\int_{R^n}\frac{R_{m_2}(\tilde b_2;x,y)(x-y)^{\alpha_1}}{|x-y|^m}K(x,x-y)D^{\alpha_1}\tilde b_1(y)f_2(y)dy$$
$$-\sum_{|\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_2!}\int_{R^n}\frac{R_{m_1}(\tilde b_1;x,y)(x-y)^{\alpha_2}}{|x-y|^m}K(x,x-y)D^{\alpha_2}\tilde b_2(y)f_2(y)dy$$
$$+\sum_{|\alpha_1|=m_1,\ |\alpha_2|=m_2}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\int_{R^n}\frac{(x-y)^{\alpha_1+\alpha_2}}{|x-y|^m}K(x,x-y)D^{\alpha_1}\tilde b_1(y)D^{\alpha_2}\tilde b_2(y)f_2(y)dy.$$

Hence, we use Lemma 4 and similar to I_5, we get

$$|T_{\tilde b}(f_2)(x)|\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\sum_{k=0}^\infty k^2\int_{2^{k+1}\tilde Q\setminus 2^k\tilde Q}|x-y|^{-2n}|f(y)|dy$$
$$+C\sum_{|\alpha|=m_2}||D^\alpha b_2||_{BMO}\sum_{|\alpha_1|=m_1}\sum_{k=0}^\infty k\int_{2^{k+1}\tilde Q\setminus 2^k\tilde Q}|x-y|^{-2n}|D^{\alpha_1}\tilde b_1(y)||f(y)|dy$$
$$+C\sum_{|\alpha|=m_1}||D^\alpha b_1||_{BMO}\sum_{|\alpha_2|=m_2}\sum_{k=0}^\infty k\int_{2^{k+1}\tilde Q\setminus 2^k\tilde Q}|x-y|^{-2n}|D^{\alpha_2}\tilde b_2(y)||f(y)|dy$$
$$+C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde Q\setminus 2^k\tilde Q}|x-y|^{-2n}|D^{\alpha_1}\tilde b_1(y)||D^{\alpha_2}\tilde b_2(y)||f(y)|dy$$
$$\le C\prod_{j=1}^2\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)d^{-n}\sum_{k=1}^\infty k^2 2^{-kn}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|f(y)|^r dy\right)^{1/r}$$
$$+C\sum_{|\alpha|=m_2}||D^\alpha b_2||_{BMO}d^{-n}\sum_{k=1}^\infty k2^{-kn}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|f(y)|^r dy\right)^{1/r}$$
$$\times\sum_{|\alpha_1|=m_1}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|(D^{\alpha_1}b_1(y)-(D^{\alpha_1}b_1)_{\tilde Q})|^{r'}dy\right)^{1/r'}$$
$$+C\sum_{|\alpha|=m_1}||D^\alpha b_1||_{BMO}d^{-n}\sum_{k=1}^\infty k2^{-kn}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|f(y)|^r dy\right)^{1/r}$$
$$\times\sum_{|\alpha_2|=m_2}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|(D^{\alpha_2}b_2(y)-(D^{\alpha_1}b_2)_{\tilde Q})|^{r'}dy\right)^{1/r'}$$
$$+C\sum_{|\alpha_1|=m_1,|\alpha_2|=m_2}d^{-n}\sum_{k=1}^\infty 2^{-kn}\left(\frac{1}{|2^k\tilde Q|}\int_{2^k\tilde Q}|f(y)|^r dy\right)^{1/r}$$

$$\times \prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|2^k\tilde{Q}|}\int_{2^k\tilde{Q}}|D^{\alpha_j}b_j(y)-(D^{\alpha_j}b_j)_{\tilde{Q}}|^{r_j}dy\right)^{1/r_j}$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2 2^{-kn}M_r(f)(\tilde{x})$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).$$

Thus,

$$|J_5|\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)M_r(f)(\tilde{x}).$$

This completes the proof of Key Lemma. □

Proof of Theorem. Taking $2<r<p$ in Key Lemma, by Lemma 5, we obtain

$$\begin{aligned}||T_b(f)||_{L^{p,\varphi}(w)} &\leq ||M(T_b(f))||_{L^{p,\varphi}(w)}\leq C||(T_b(f))^{\#}||_{L^{p,\varphi}(w)}\\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)||M_r(f)||_{L^{p,\varphi}(w)}\\ &\leq C\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{|\alpha|=m_j}||D^\alpha b_j||_{BMO}\right)||f||_{L^{p,\varphi}(w)}.\end{aligned}$$

This finishes the proof. □

Acknowledgement. The author would like to express gratitude to the referee for his comments and suggestions.

Список литературы

[1] S. Chanillo and A.Torchinsky, "Sharp function and weighted L^p estimates for a class of pseudo-differential operators", Ark. Math., **24**, 1 – 25 (1986).

[2] F. Chiarenza and M. Frasca, "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function", Rend. Mat., **7**, 273 – 279 (1987).

[3] J. Cohen, "A sharp estimate for a multilinear singular integral on $\mathbb{R}^n$", Indiana Univ. Math. J., **30**, 693 – 702 (1981).

[4] J. Cohen and J. Gosselin, "On multilinear singular integral operators on $\mathbb{R}^n$, Studia Math., **72**, 199 – 223 (1982).

[5] J. Cohen, J. Gosselin, "A BMO estimate for multilinear singular integral operators", Illinois J. Math., **30**, 445 – 465 (1986).

[6] R. Coifman, Y. Meyer, Wavelets, Calderón-Zygmund and Multilinear Operators, Cambridge Studies in Advanced Math. **48**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[7] R. Coifman, Y. Meyer, Au delá des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque, **57** (1978).

[8] R. Coifman, R. Rochberg, "Another characterization of BMO", Proc. Amer. Math. Soc., **79**, 249 – 254 (1980).

[9] Y. Ding, S. Z. Lu, "Weighted boundedness for a class rough multilinear operators", Acta Math. Sinica, **17**, 517 – 526 (2001).

[10] G. Di FaZio, M. A. Ragusa, "Commutators and Morrey spaces", Boll. Un. Mat. Ital., **(7)5-A**, 323 – 332 (1991).

[11] G. Di Fazio, M. A. Ragusa, “Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients”, J. Func. Anal., **112**, 241 – 256 (1993).

[12] C. Fefferman, “L^p bounds for pseudo-differential operators”, Israel J. Math., **14**, 413 – 417 (1973).

[13] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, “Weighted norm inequalities and related topics”, North-Holland Math.**16**, Amsterdam (1985).

[14] G. Hu, D. C. Yang, “A variant sharp estimate for multilinear singular integral operators”, Studia Math., **141**, 25 – 42 (2000).

[15] N. Miller, “Weighted Sobolev spaces and pseudo-differential operators with smooth symbols”, Trans. Amer. Math. Soc., **269**, 91 – 109 (1982).

[16] J. Peetre, “On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$-spaces invariant”, Ann. Mat. Pura. Appl., **72**, 295 – 304 (1966).

[17] J. Peetre, “On the theory of $L^{p,\lambda}$-spaces”, J. Func. Anal., **4**, 71 – 87 (1969).

[18] C. Pérez, G. Pradolini, “Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integral operators”, Michigan Math. J., **49**, 23 – 37 (2001).

[19] C. Pérez, R. Trujillo-Gonzalez, “Sharp weighted estimates for multilinear commutators”, J. London Math. Soc., **65**, 672 – 692 (2002).

[20] M. Saidani, A. Lahmar-Benbernou, S. Gala, “Pseudo-differential operators and commutators in multiplier spaces”, African Diaspora J. of Math., **6**, 31 – 53 (2008).

[21] M. Sugimoto, N. Tomita, “Boundedness properties of pseudo-differential and Calderón-Zygmund operators on modulation spaces”, J. of Fourier Anal. Appl., **14**, 124 – 143 (2008).

[22] M. E. Taylor, Pseudo-differential Operators and Nonlinear PDE, Birkhauser, Boston (1991).

Поступила 7 апреля 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 3, 2010, стр. 73-83.

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ПОЛИНОМАМИ С ПРОПУСКАМИ НА НЕ-КАРАТЕОДОРИЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

В. А. МАРТИРОСЯН, С. Е. МКРТЧЯН

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН Армении
E-mail: *mart@instmath.sci.am*

Аннотация. Статья представляет некоторые новые результаты об аппроксимации полиномами с пропусками в норме пространства L_p, $1 \le p < \infty$, на не-Каратеодориевых областях комплексной плоскости. Найдены лакунарные версии некоторых результатов А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна, С. Н. Мергеляна, Дж. Бреннана.

MSC2000 number: 30B60

Ключевые слова: полиномиальное приближение в среднем, полиномы с пропусками, не-Каратеодориевы области, области с граничными разрезами, области лунообразного типа.

Введение

Настоящая работа продолжает начатое в [1] исследование вопросов аппроксимации в среднем полиномами с пропусками. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю аппроксимации на классе Каратеодориевых множеств (областей). В данной работе аналогичные вопросы изучаются для известных подклассов не-Карадеодориевых областей (области с граничными разрезами, традиционные луночки, обобщенные луночки). Найденные здесь результаты подтверждают подмеченное в [1] наблюдение, что при аппроксимации в среднем (по сравнению с равномерной аппроксимацией) возникают интересные специфические особенности. Эти результаты были анонсированы в [2].

1. Обозначения и предварительные сведения

Введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ будут, соответственно, множества всех натуральных, вещественных, положительных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{C}}$ – комплексная и расширенная комплексная плоскости. Для подпоследовательности $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ обозначим через $\{q_n\}_1^\infty$ последовательность, дополнительную к $\{p_n\}_1^\infty$ относительно $\mathbb{N}$. Положим

$$D_r(a) = \{z : |z-a| < r\} \quad \text{для} \quad a \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Delta_\beta^\alpha(s) = \{z : |z| \le s, \ |\arg z - \alpha \log |z|| \le \beta\} \quad \text{для} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ s \in \mathbb{R}_+, \ \beta \in [0, \pi).$$

Функцию $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую условию $t\,\frac{V'(t)}{V(t)} \uparrow +\infty$ при $t \downarrow 0$, будем называть регулярной.

Пусть Ω – ограниченная область плоскости $\mathbb{C}$. Через $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$, Ω_∞ будем обозначать, соответственно, границу, замыкание и неограниченную компоненту связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ к ее замыканию. Пусть $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ – банахово пространство, элементами которого являются все определенные на Ω измеримые комплексные функции комплексного переменного $z = x + iy$, имеющие конечную норму

$$\|f\|_p = \left\{ \iint_\Omega |f|^p \, dx \, dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Подпространство этого пространства, состоящее из голоморфных на Ω функций, обозначим $H_p(\Omega)$. Определим также банахово пространство $h_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ состоящее из всех определенных на Ω действительных функций u, которые гармоничны на Ω и имеют конечную норму $\|u\|_p$. Плоскую меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать $measE$.

Ниже нам понадобится результат типа знаменитой теоремы Мюнца (см. [3], [4]). Обозначим через $A(\Delta_\beta^\alpha(s))$ банахово пространство из всех непрерывных на $\Delta_\beta^\alpha(s)$ и голоморфных на внутренности $\Delta_\beta^\alpha(s)$ функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \Delta_\beta^\alpha(s)\}$.

Теорема А. *Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $A(\Delta_\beta^\alpha(s))$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \left[\sum_{p_n \le r} \frac{1}{p_n} - \frac{\beta}{\pi} \log r \right] = +\infty. \tag{1.1}$$

Отметим, что теорема А доказывается аналогично ее частному случаю, когда $\alpha = 0$ (см. [5]). Другие сведения вспомогательного характера относительно полиномиальной аппроксимации в среднем приводятся ниже по мере надобности.

2. Метрический критерий аппроксимации Мергеляна–Бреннана

Класс Каратеодориевых множеств (областей) определяется своими топологическими свойствами и, как известно, на множествах этого класса всегда возможна полиномиальная аппроксимация в среднем. Что касается возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на не-Каратеодориевых множествах (областях), то она оказывается зависящей уже от **метрических** свойств множества аппроксимации в окрестности ее границы. Этот феномен впервые был открыт

[6] академиком М. В. Келдышем в 1939 г. и исследовался в дальнейшем рядом авторов. Приведем сперва общий критерий полиномиальной аппроксимации в среднем, справедливый для широкого класса не-Каратеодориевых областей.

Теорема B. *Пусть* Ω *– ограниченная односвязная область, для которой существует последовательность точек* $\{\varsigma\}_1^\infty$, *имеющая следующие свойства:*

1) замыкание множества точек $\{\varsigma\}_1^\infty$ *содержит* $\partial\Omega$;

2) каждую точку ς_n *можно соединить с* $\partial\Omega_\infty$ *спрямляемой дугою* Γ *такою, что:*

a) $meas\Omega_t(\Gamma) \le V(t)$, *где* $\Omega_t(\Gamma) = \{z \in \Omega : dist(z,\Gamma) \le t\}$, $t > 0$, *а* V *– какая-либо регулярная мажоранта;*

b) $\int_0 \log\log \frac{1}{V(t)}\, dt = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Отметим, что теорема B и ее точность доказаны Дж. Бреннаном [7]. Они обобщают и усиливают соответствующие результаты С. Мергеляна (см. [8],[9]). Соответствующие теореме B результаты об аппроксимации в среднем лакунарными полиномами приводятся ниже в теоремах 1 - 4.

Теорема 1. *Пусть* Ω *– ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы B,* $0 \in \Omega_\infty$, *и* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{p_n} = 1. \tag{2.1}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 1, \tag{2.2}$$

Ω *– ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы B,* $0 \in \partial\Omega_\infty$ *и сущвствует последовательность* $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ *такая, что* $z_m \to 0$ *и*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{|z_m|}{dist(z_m, \partial\Omega_\infty)} < \infty. \tag{2.3}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, Ω *– ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы B,* $0 \in \partial\Omega_\infty$ *и является достижимой граничной точкой для* Ω_∞. *Тогда система функций*

$\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, *при выполнении одного из следующих условий:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty$, $\frac{n}{q_n} \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$*;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\log q_n)^{1+\varepsilon}}{q_n} < \infty$ *для* $\varepsilon > 0$*;*

3) 0 является достижимой граничной точкой прямолинейным отрезком для Ω_∞ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty$.

Теорема 4. *Пусть* Ω *– ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы B,* $0 \in \partial\Omega_\infty$ *и* $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$*, удовлетворяющая условию* (1.1). *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Доказательства теорем 1, 2, 4. Согласно теореме B для функции $f \in H_p(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует полином g такой, что

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Без потери общности можем считать, что $g(0) = 0$. Рассмотрим компакт $\tilde{E} = \mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$, в случае теорем 1, 2, и $\tilde{E} = \Delta_\beta^\alpha(s)$, в случае теоремы 4. Применяя к $\tilde{E}$ и g соответствующие рязультаты (см. [10], [11]) о равномерной аппроксимации лакунарными полиномами в первом случае и теорему A - во втором, найдем полином q по системе $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ такой, что

$$|g(z) - q(z)| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad z \in \tilde{E}.$$

Так как $\Omega \subset \tilde{E}$, то тогда

$$\|f - q\|_p < \varepsilon(1 + meas\Omega).$$

□

Доказательство теоремы 3. Ограничимся доказательством случая $1 < p < 2$ (при $p = 1$ нужны лишь простые изменения). Согласно теоремам Хана-Банаха, Ф. Рисса и теореме B достаточно показать, что для любой функции $g \in L^q(\Omega)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, удовлетворяющей соотношениям ортогональности

$$\iint_\Omega z^{p_n}\overline{g(z)}\,dx\,dy = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

будут выполняться также условия

$$\iint_\Omega z^{q_n}\overline{g(z)}\,dx\,dy = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

С этой целью рассмотрим интеграл Коши

$$F(t) = \iint_\Omega \frac{\overline{g(z)}}{t-z}\,dx\,dy, \quad z = x+iy.$$

Очевидно, что функция $F \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\Omega})$ и ограничена на $\bar{\mathbb{C}}$ в силу ограничения $q > 2$. С учетом (2.4) при $|t| > \sup\{|z| : z \in \Omega\}$ она представляется лакунарным рядом Лорана

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-q_n-1} \iint_\Omega z^{q_n}\overline{g(z)}\,dx\,dy \quad (q_0 = 0). \tag{2.6}$$

Так как при каждом из предположений 1) – 3), очевидно, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} = 0,$$

то, учитывая известную теорему Е. Фабри [12] о естественной границе степенного ряда, заключаем, что ряд (2.6) определяет функцию $F_1 \in H(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\})$. По теореме единственности аналитических функций из (2.6) следует равенство

$$F_1(t) = F(t) \quad \text{при} \quad t \in \Omega_\infty.$$

Таким образом, функция $F_1 \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, ограничена на Ω_∞ и в окрестности бесконечно удаленной точки представляется лакунарным рядом (2.6). Следовательно, применяя к ней соответственно случаям 1), 2), 3) результаты работ [13], [14], [15], получим $F_1(t) \equiv const$. Отсюда и из (2.6) вытекают требуемые условия (2.5). Теорема 3 доказана. □

Замечание 1. *Интересно отметить, что теорема 3 (в отличие от теорем 1, 2, 4) не имеет естественного аналога в случае равномерной аппроксимации лакунарными полиномами (см.* [10]*).*

3. Области с граничными разрезами

Перейдем к рассмотрению более узких (по сравнению с теоремой B) классов не-Каратеодориевых областей. Выделим сперва области с граничными разрезами. Их типичные примеры доставляют Жордановы области с удаленными разрезами, которые являются Жордановыми дугами, соединяющими внутренние точки области с ее граничными точками. Ради простоты мы ограничимся здесь случаем круга с радиальными разрезами. Приведем сначала соответствующий этому случаю результат о полиномиальной аппроксимации в среднем.

Пусть E – совершенное, нигде не плотное точечное множество на окружности $\partial D_r(a)$. Для каждого $w \in E$ обозначим

$$S_w = \{z : \arg(z-a) = \arg(w-a),\ r-\rho \le |z-a| \le r\}, \quad 0 < \rho < r,$$

и положим $S_E = \cup_{w\in E} S_w$. Фиксируя ρ, рассмотрим множество

$$\Omega_E = D_r(a) \setminus S_E.$$

Итак, Ω_E – ограниченная односвязная область, граница которой $\partial\Omega_E$ состоит почти целиком из радиальных разрезов. Для $w \in \partial D_r(a)$ и $t \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\Delta_t(w) = D_w(t) \cap \partial D_r(a)$$

и обозначим через Λ линейную меру Лебега.

Теорема C. *(см. [7]). Пусть существует счетное множество E' всюду плотное в E такое, что для каждого $w \in E'$:*

1) $\Lambda(\Delta_t(w) \cap (\partial D_r(a) \setminus E)) \le V(t)$ при $t \le t(w)$, для некоторой регулярной мажоранты V;

2) $\int_0 \log\log \frac{1}{V(t)}\, dt = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \le p < \infty$.

Следующий результат является лакунарным аналогом теоремы C.

Теорема 5. *Пусть область Ω_E удовлетворяет предположениям теоремы C, причем $r \le |a|$, и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию* (1.1)*, где*

$$\beta = \arcsin \frac{r}{|a|}.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \le p < \infty$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $a \in \mathbb{R}_+$. В этом случае область Ω_E будет содержаться в секторе $\Delta_\beta^0(|a|+r) = \{z : |\arg z| \le \beta,\ |z| \le |a|+r\}$. Согласно теореме C любая функция из $H_p(\Omega_E)$, $1 \le p < \infty$, аппроксимируется полиномами. Однако, согласно теореме A любой полином можно равномерно на этом секторе аппроксимировать полиномами по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$. Этим теорема 5 доказана. $\square$

4. Лунообразные области

Другой важный класс не-Каратеодориевых областей образуют лунообразные области (луночки). Такие области были хронологически первыми не-Каратеодориевыми областями, изученными в связи с возможностью полиномиальной аппроксимации в среднем. **Традиционная** луночка понимается как односвязная область, топологически эквивалентная области, ограниченной двумя внутренне касающимися окружностями. Для традиционных луночек имеют место следующие результаты.

Теорема D. *Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой в начале координат, которая расположена между двумя окружностями $\partial D_a(a)$ и $\partial D_{a/2}(a/2)$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r$ и предположим, что $r\frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty$ при $r \downarrow 0$. Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\int_0 \log l(r)\, dr = -\infty.$$

Теорема E. *Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой x_0, для которой существует прямолинейный отрезок L от точки x_0 во внутрь ограниченной компоненты для $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ такой, что $dist(z, L) \geq C\, dist(z, x_0)^k$ для любого $z \in \Omega$ и некоторых постоянных $k > 0$, $C > 0$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r(x_0)$ и предположим, что:*

1) $r\frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty$ при $r \downarrow 0$;

2) $\int_0 r^{k-1} \log\log \frac{1}{l(r)}\, dr = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Замечание 2. *Теорема D доказана академиками А. Л. Шагиняном и М. М. Джрбашяном (необходимость и достаточность интагрального условия, соответственно). Теорема E принадлежит Дж. Бреннану. Существенное различие между ними состоит в том, что в теореме D луночка Ω не имеет выступа в кратной граничной точке, а в теореме E - может иметь (см. [7]).*

Обратимся к лакунарным версиям теорем D, E.

Теорема 6. *Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию*

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{1}{2} \log r \right] = +\infty.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 7. *Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E, $0 \in \Omega_\infty$ и $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Теорема 8. *Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из $\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию (2.2) и Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E, $x_0 = 0$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ такая, что $z_m \to 0$ и выполняется условие (2.3). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Теорема 9. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E и* $x_0 = 0$. *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, *при выполнении одного из условий 1) - 3) теоремы 3.*

Теорема 10. *Пусть* Ω *– луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E,* $0 \in \bar{\Omega}_\infty$ *и* $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющая условию* (1.1). *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Доказательства теорем 6 - 10. Теоремы 7, 8, 10 доказываются точно так же, как соответсвующие теоремы 1, 2, 4 с той разницей, что вместо теоремы B надо использовать теорему E. Для доказательства теоремы 6 надо использовать теорему E и теорему A при $\beta = \pi$ (см. доказательство теоремы 4). Теорема 9 доказывается как теорема 3 с заменой в ее доказательстве теоремы B теоремой E. $\square$

5. Обобщенные лунообразные области

По сравнению с традиционными луночками, рассмотреными в §4, более обширный класс не-Каратеодориевых областей образуют **обобщенные лунообразные области**. Изучение возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на таких областях было начато в работах Дж. Бреннана, В. Хавина, В. Мазьи (см [16], [17], [18]). Напомним, что под обобщенной лунообразной областью понимается область Ω, замыкание которой $\bar{\Omega}$ есть компактное связное множество с дополнением $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, состоящим из двух компонент связности: неограниченной компоненты Ω_∞ и ограниченной компоненты G, причем $\partial G \cap \partial\Omega_\infty \ne \emptyset$. В частном случае, когда множество $\partial G \cap \partial\Omega_\infty$ состоит из одного элемента, получается традиционная луночка. Типичным примером обобщенной лунообразной области является внутренняя змейка – односвязная область, наматывающаяся изнутри круга к его границе.

Для обобщенных луночек имеют место следующие теоремы о полиномиальной аппроксимации в среднем (см [19]).

Теорема F. *Пусть* Ω *– обобщенная луночка,* $\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega} = \Omega_\infty \cup G$. *Предположим, что граница ограниченной компоненты* ∂G *является Жордановой кривою класса* C^1 *и ее внешняя единичная нормаль* n *удовлетворяет условию Липшица*

$$|n(z_1) - n(z_2)| \le C|z_1 - z_2| \quad \text{при всех} \quad z_1, z_2 \in \partial G,$$

где $C > 0$ *– постоянная. Тогда множество полиномов плотно в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\partial G} \log \delta(z)|dz| = -\infty, \quad \delta(z) = dist(z, \partial\Omega_\infty).$$

Теорема G. *Пусть* Ω *– обобщенная луночка и* ω *– гармоническая мера на* ∂G *относительно какой-либо фиксированной точки* $x_0 \in G$. *Тогда существует универсальная постоянная* $\tau > 0$ *такая, что если*

$$\int_{\partial G} \log \delta(z)\, d\omega(z) = -\infty,$$

то множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$ *при* $1 \le p < 3 + \tau$.

Как и в случае традиционных луночек для обобщенных луночек справедливы следующие лакунарные версии теорем F, G.

Теорема 11. *Пусть обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы F (или G),* $0 \in \Omega_\infty$ *и подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* (2.1). *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

Теорема 12. *Пусть подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* (2.2), *а обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы F (или G),* $0 \in \partial\Omega_\infty$ *и существует последовательность* $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ *такая, что* $z_m \to 0$ *и выполняется условие* (2.3). *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

Теорема 13. *Пусть* $\{p_n\}_1^\infty$ *– подпоследовательность из* $\mathbb{N}$, Ω *– обобщенная луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы F (или G) и* $0 \in \Omega_\infty$. *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < 2$, *при выполнении одного из условий 1) -3) теоремы 3.*

Теорема 14. *Пусть обобщенная луночка* Ω *и число* p *удовлетворяют предположениям теоремы F (или G),* $0 \in \bar{\Omega}_\infty$ *и* $\Omega \subset \Delta_\beta^\alpha(s)$, *подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* (1.1). *Тогда система функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *полна в пространстве* $H_p(\Omega)$.

Теоремы 11 – 14 доказываются аналогично соответствующим теоремам 7 - 10 с заменой в доказательстве последних теоремы E через теорему F (или G).

6. Аппроксимация гармоническими полиномами

Вопросы полиномиальной аппроксимации в среднем, как хорошо известно, тесно связаны с вопросами аппроксимации в среднем вещественными гармоническими полиномами. Указанная связь подтверждается, в частности, следующим результатом (см. [7]).

Теорема H. *Пусть обобщенная луночка* Ω *такова, что множество полиномов плотно в пространстве* $H_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. *Тогда множество вещественных гармонических полиномов плотно в пространстве* $h_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.
Комбинируя теорему H с теоремами 6 – 14, получим следующее следствие.

Теорема 15. *Пусть обобщенная луночка* Ω, *число* p *и подпоследовательность* $\{p_n\}_1^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *удовлетворяют предположениям одной из теорем 6 - 14. Тогда множество вещественных частей полиномов по системе функций* $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ *плотно в пространстве* $h_p(\Omega)$.

Доказательство. В самом деле, пусть заданы функция $g \in h_p(\Omega)$ и число $\varepsilon > 0$. По теореме H существует вещественный гармонический полином u такой, что

$$\|g - u\|_p < \varepsilon.$$

Пусть f такая целая функция, что $\mathrm{Re} f = u$. По одной из теорем 6 - 14 найдется полином q по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$, для которого

$$\|f - q\|_p < \varepsilon.$$

Следовательно, получим

$$\|g - Re\, q\|_p < 2\varepsilon.$$

Теорема 15 доказана. □

Abstract. The paper presents some new results on approximation by polynomials with gaps in the norm of the space L_p, $1 \le p < \infty$, on non-Caratheodory domains in the complex plane. Lacunary versions of several results due to A. L. Shahinian, M. M. Djrbashian, S. M. Mergelian and J. Brennan are proved.

Список литературы

[1] В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян, “О приближении в среднем полиномами с пропусками на множествах Каратеодори”, Изв. НАН Армении. Математика, **43** (6), 43 – 50 (2008).
[2] В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян, “О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-Каратеодориевых областях”, Доклады НАН Армении, **2**, 109 – 118 (2009).
[3] C. H. Müntz, “Über den Approximationssatz von Weierstrass”, H. A. Schwarz Festschrift, Berlin, 303 – 312 (1914).
[4] J. Korevaar, W. A. J. Luxemburg, “Entire functions and Müntz-Szasz type approximation”, Trans. of the American Math. Society, **157**, 23 – 37 (1971).

[5] J. M. Anderson, "Müntz-Szasz type approximation and the angular growth of lacunary integral functions", Trans. Amer. Math. Soc., **169**, 237 – 248 (1972).
[6] M. V. Keldysh, "Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques", Matem. Sbornik, **5** (47), 391 – 401 (1939).
[7] J. E. Brennan, "Approximation in the mean by polynomials in non-Caratheodory domains", Ark. Math., **15** (1), 117 – 168 (1977).
[8] С. Н. Мергелян, "Общий метрический критерий полноты системы многочленов", Доклады АН СССР, **105**, 901 – 904 (1955).
[9] С. Н. Мергелян, А. Р. Тамадян, " О полноте в одном классе не-Жордановых областей", Изв. АН Армянской ССР, Математика, **7**, 1 – 17 (1954).
[10] В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. Сборник, **120** 451 – 472 (1983).
[11] W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Restricted T-universal functions", Journal of Approxim. Theory, **114**, 201 – 213 (2002).
[12] L. Bieberbach, "Analytische Forsetzung", Ergenbisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.), Heft 3., Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955).
[13] А. И. Павлов, "О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами", Сибирский мат. журнал, **13** (5), 1169 – 1181 (1972).
[14] J. M. Anderson, K. G. Binmore, "Coefficient estimates for lacunary power series and Dirichlet series. I.", Proc. London Math. Soc. (3), **18** (1), 36 – 49 (1968).
[15] A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", Proc. London Math. Soc. (3), **2**, 286 – 296 (1952).
[16] J. E. Brennan, "Invariant subspaces and weighted polynomial approximation", Ark. Math., **11**, 167 – 189 (1973).
[17] В. П. Хавин, В. Г. Мазья, "Аппроксимация в среднем аналитическими функциями", Вестник Ленинград. унив., **13**, 64 – 74 (1968).
[18] В. П. Хавин, В. Г. Мазья" "Не линейная теория потенциала", Успехи Мат. Наук, **27**, 67 – 138 (1972).
[19] J. E. Brennan, "The Cauchy integral and certain of its applications", Изв. НАН Армении, Математика, **39** (1), 5 – 48 (2004).

Поступила 3 февраля 2009

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 3, 2010

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 3, 2010

Contents