

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2010

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Վ. Ս. Արաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Ս. Ս. Գինովյան

Ն. Բ. Ենգիբարյան

Վ. Ս. Զարարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ռ. Վ. Համբարձումյան

Հ. Մ. Հայրապետյան

Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Մհարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян

Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

В. С. Атабекян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян

В. К. Оганян (зам. главного редактора)

Н. Б. Енгибарян

В. С. Закарян

В. А. Мартиросян

Б. С. Нахпетян

А. О. Оганнисян

Б. М. Погосян

А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 3-20.

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, М. С. АЙРАПЕТЯН

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: *hhairapet@seua.am*

Аннотация. В статье исследуется задача типа Римана-Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго порядка в весовых пространствах. Устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи и условий на граничные функции зависит не только от порядка особенности весовой функции в особой точке и индексов коэффициентов задачи, а также от поведения этих функций в особых точках.

MSC2000 number: 35J25

Ключевые слова: Уравнение Бицадзе, неправильно-эллиптическое уравнение, задача Римана-Гильберта, граничные условия, весовое пространство.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D^+ = \{z, |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $z = x + iy$, $T = \{z, |z| = 1\}$ – единичная окружность, $C^{1+\delta}$, $\delta > 0$ – класс функций, определенных на T , производные которых принадлежат классу Гельдера с показателем δ . Граничные задачи типа Римана-Гильберта для уравнения Бицадзе

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in D^+,$$

а также для уравнений неправильно-эллиптического типа с постоянными коэффициентами высших порядков в классах Гельдера исследованы в работах [1–7]. Эта задача для n -голоморфных функций (решений уравнения n -ого порядка типа (1.1)) в классе L^1 исследована в работах [8], [9]. В настоящей работе исследуется граничная задача типа Римана-Гильберта в весовом пространстве $L^1(\rho)$, $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$, $\alpha > -1$ для уравнения (1.1) в следующей постановке:

Задача А. Определить функцию $u(z)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и граничным условиям

$$(1.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t)u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $f_0'(t), f_1(t) \in L^1(\rho)$, $\rho(t) = |1-t|^\alpha$, $\alpha > -1$, $a_0(t), a_1(t) \in C^{\delta+1}(T)$, $\delta > 0$, $a_0(t), a_1(t) \neq 0$.

В статье приводится полное исследование этой задачи. Устанавливается, что вообще говоря, количество линейно независимых решений однородной задачи и условий на функции $f_0(t), f_1(t)$ для разрешимости этой задачи зависит не только от α и индексов функций $a_0(t), a_1(t)$, а также от других свойств этих функций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта в $L^1(\rho)$ в следующей постановке: определить аналитическую в D^+ функцию $\Phi^+(z)$ так, чтобы имело место граничное условие

$$(2.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a(t) \Phi^+(rt) - f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $f(t) \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$, $a(t) \neq 0$. Условие (2.1) можно представить в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| a(t) \Phi^+(rt) + \overline{a(t) \Phi^+(rt)} - 2f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

Положив $\Phi^-(z) = -\overline{\Phi^+(\bar{z}^{-1})}$, $z \in D^-$, $D^- = \{z, |z| > 1\}$ будем иметь $\overline{\Phi^+(rt)} = -\Phi^-(r^{-1}t)$ и

$$(2.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| a(t) \Phi^+(rt) - \overline{a(t)} \Phi^-(r^{-1}t) - 2f(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Следуя монографии [10], если $\Phi(z)$ произвольная аналитическая функция на $D^+ \cup D^-$, то положим $\Phi^*(z) = -\overline{\Phi(\bar{z}^{-1})}$. Так как f — действительнозначная функция, то если $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию (2.2), то $\Phi^*(z)$ также удовлетворяет этому условию. Тем самым задача (2.1) эквивалентна граничной задаче Гильберта

$$(2.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \Phi^+(rt) - \frac{\overline{a(t)}}{a(t)} \Phi^-(r^{-1}t) - \frac{2f(t)}{a(t)} \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

где $\Phi^-(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, при условии, что решение задачи (2.3) удовлетворяет условию $\Phi^*(z) = \Phi(z)$. Тем самым, если $\Phi(z)$ общее решение задачи Гильберта (2.3), то общее решение задачи (2.1) можно представить в виде $(\Phi(z) + \Phi^*(z))/2$ (см. [10]).

Пусть $\kappa = \text{ind } a(t)$, $t \in T$ и

$$S(z) = \beta \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d(\tau)}{\tau - z} d\tau \right),$$

где

$$d(t) = \ln \left(t^{2\kappa} \overline{a(t)} a^{-1}(t) \right), \quad t \in T, \quad \beta = \exp \left(-\frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{d(\tau)}{\tau} d\tau \right).$$

Далее, положим $n = [\alpha] + 1$, если α нецелое число и $n = \alpha$, если α целое число. Множество полиномов $P(z)$, порядок которых не больше n и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $a_k = (-1)^{n+1} \overline{a_{n-k}}$, обозначим через T_n .

Лемма 1. *а) Если $n - 2\kappa \geq 0$, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде*

$$\Phi_0(z) = \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $P(z) \in T_{n-2\kappa}$ – произвольный многочлен.

б) Если $n - 2\kappa < 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Так как $\text{ind } \overline{a(t)}(a(t))^{-1} = -2\kappa$, то общее решение однородной задачи Гильберта (2.3) можно представить в виде (см. [13])

$$\Phi(z) = \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $P(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-2\kappa} z^{n-2\kappa}$ – многочлен порядка $n - 2\kappa$. Так как $S^*(z) = z^{-2\kappa} \overline{S(z)}$, то

$$\Phi^*(z) = S(z) \frac{(-1)^n z^{n-2\kappa}}{(1-z)^n} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Далее имеем

$$z^{n-2\kappa} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{A_0} z^{n-2\kappa} + \overline{A_1} z^{n-2\kappa-1} + \dots + \overline{A_{n-2\kappa}}$$

$$\Phi^*(z) + \Phi(z) = S(z) \frac{A_0 + \overline{A_{n-2\kappa}} + (A_1 + \overline{A_{n-2\kappa-1}})z + \dots + (A_{n-2\kappa} + \overline{A_0})z^{n-2\kappa}}{(1-z)^n},$$

и получаем утверждение а), если n – четное число. Аналогично устанавливается утверждение б), если n – нечетное число.

Для доказательства б) заметим, что если $n - 2\kappa < 0$, то многочлен $P(z)$ в представлении общего решения $\Phi(z)$ тождественно равен нулю, следовательно однородная задача не имеет нетривиальных решений. Лемма доказана. $\square$

Для произвольной функции $f \in L^1(\rho)$ положим

$$(2.4) \quad K(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-z)} \\ + (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa} S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa} a(\tau)S(\tau)(\tau-z)}, \quad z \in D.$$

Лемма 2. а) Если $n - 2\kappa \geq -1$, то задача (2.1) имеет решение для любой функции $f(t) \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде

$$(2.5) \quad \Phi^+(z) = K(f, z) + \Phi_0(z)$$

где $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи (2.1), а $K(f, z)$ определяется формулой (2.4).

б) Если $n - 2\kappa < -1$, то для разрешимости задачи (2.1) необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям

$$(2.6) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2.$$

При выполнении условий (2.6) решение задачи (2.1) единственно и определяется формулой (2.5), где $\Phi_0(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $n - 2\kappa \geq -1$. Тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-z)}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

является решением задачи Гильберта (2.3) (см. [13]). Так как

$$\Phi^*(z) = (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa_j} S(z)}{\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa_j} a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)}, \quad j = 0, 1, z \in D^+ \cup D^-,$$

получаем утверждение а) леммы. Пусть теперь $n - 2\kappa < -1$. Для того, чтобы задача (2.3) имела решение, ограниченное в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям (2.6) (см. [13]). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть $a(t) \in C^\delta(T)$, $a(t) \neq 0$, $\kappa = \text{ind } a(t)$, $t \in T$, $F(z)$ аналитическая функция в D^+ и $F(z) \in C(\bar{D}^+)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Если $n - 2\kappa \geq -1$, то имеет место представление

$$(2.7) \quad F(z) = K(f, z) + \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $f(t) = \text{Re } a(t)F(t)$, $t \in T$, $K(f, z)$ определяется формулой (2.4), а $P(z) \in T_{n-2\kappa}$ однозначно определяется функцией $F(z)$:

$$(2.8) \quad P(z) = (F(z) - K(f, z))(1-z)^n S^{-1}(z).$$

б) Если $n - 2\kappa < -1$, то $F(z) = K(f, z)$ и $f(t) = \operatorname{Re} a(t)F(t)$ удовлетворяет условиям

$$(2.9) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2.$$

Доказательство. Пусть $n - 2\kappa \geq -1$. Так как $\alpha > -1$ и $F(z) \in C(\bar{D}^+)$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} (a(t)F(rt)) - \operatorname{Re} (a(t)F(t))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Применив лемму 2, получим

$$F(z) = K(f, z) + \frac{S(z)P_n(z)}{(1-z)^n},$$

где $f(t) = \operatorname{Re} a(t)F(t)$. Утверждение а) доказано. Для доказательства утверждения б) достаточно установить справедливость равенств (2.9). Действительно, так как $\overline{a(t)}(a(t))^{-1} = S^+(t)(S^-(t))^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \int_T \frac{\operatorname{Re} (a(t)F(t))(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt &= \int_T \frac{F(t)(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt + \\ &+ \int_T \frac{\overline{a(t)F(t)}(1-t)^n}{a(t)S(t)} t^k dt = \int_T \frac{\overline{F(t)}(1-t)^n}{S^-(t)} t^k dt. \end{aligned}$$

$\overline{F(t)}(1-t)^n(S^-(t))^{-1}$ аналитическая функция в D^- и порядок на бесконечности равен $n - 2\kappa$. Так как $n - 2\kappa \leq -2$, последний интеграл равен нулю при $k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa) - 2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Пусть $n = [\alpha] + 1$ при нецелом α и $n = \alpha$, если α целое число. Тогда а) имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

б) Если $k > 1$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+k}} \right\|_{L^1(\rho)} > 0.$$

Доказательство. Пусть α нецелое число. Так как $|1-t| < 2|1-rt|$, то

$$\left\| \frac{1}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-t|^\alpha |dt|}{|1-rt|^{n+1}} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Следовательно

$$\left\| \frac{1-r^2}{(1-rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) |dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Поскольку $2 - \{\alpha\} < 2$, то утверждение леммы следует из того, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Если α целое число, то

$$\left\| \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{n+1}} \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - rt|}.$$

Учитывая, что правая часть стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, получим утверждение а) леммы.

Далее положим $T_k = \{t; |1 - t| < (n + k)^{-1}(1 - r)\}$ и пусть $t \in T_k$. Тогда $|\arg(1 - rt)^{-(n+k)}| < c_0 < 2^{-1}\pi$, $c_0 > 0$, и $\operatorname{Re}(1 - rt)^{-(n+k)} > d_0|1 - rt|^{-(n+k)}$, $d_0 > 0$. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > d_0 \int_{T_k} \frac{(1 - r^2) |1 - t|^\alpha |dt|}{|1 - rt|^{(n+k)}}.$$

Учитывая, что $|1 - rt| < C(1 - r)$, $C > 0$, при $t \in T_k$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > \\ & > \frac{d_0}{C(1 - r)^{n+k-1}} \int_{T_k} |1 - t|^\alpha |dt| > \frac{d'_0}{(1 - r)^{n+k-1}} \int_0^{\alpha(r)} \theta^\alpha d\theta, \end{aligned}$$

где $d'_0 > 0$, $\alpha(r) = (n + k)^{-1}(1 - r)$. Окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1 - r^2}{(1 - rt)^{(n+k)}} |\rho(t)| |dt| > \frac{C_1}{(1 - r)^{k-2}}, \quad C_1 > 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. Пусть $a(t) \in C^{1+\delta}(T)$, $a(t) \neq 0$, $f \in L^1(\rho)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r) \left\| (K(f, rt))'_z \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $f \in C^{1+\delta}(T)$, $\delta > 0$. Так как $|S(z)| < \text{const}$, то используя свойства интеграла типа Коши [10] будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau - z)} \right)'_z \right| \leq C, \\ & \left| \left(\frac{z^{n-2\kappa} S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa} a(\tau)S(\tau)(\tau - z)} \right)'_z \right| \leq C, \end{aligned}$$

где C – постоянная, зависящая от f . Поэтому

$$\left| (K(f; z))'_z \right| < \frac{C_1}{|1 - rt|^{n+1}}.$$

Применив лемму 2, получим утверждение леммы, когда $f \in C^{\delta+1}(T)$. Так как $C^{1+\delta}$ всюду плотно в $L^1(\rho)$, то для доказательства леммы следует установить, что

$$(2.10) \quad (1-r) \left\| (K(f, z))'_z \right\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f . Функцию $K(f; z)$ в (2.10) можно заменить на

$$\tilde{K}(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a_j(\tau)S(\tau)(\tau-z)}.$$

Тогда

$$\left(\tilde{K}(f, rt) \right)'_z = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = \frac{1}{(1-rt)^{n+1}} \frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-rt)},$$

$$I_2(r, t) = \frac{1}{(1-rt)^n} \left(\frac{S(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a(\tau)S(\tau)(\tau-rt)} \right)'_z.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & (1-r^2) \int_T |I_1(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq \\ & \leq C(1-r^2) \int_T \frac{|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{n+1}} \int_T \frac{|f(\tau)| |1-\tau|^n}{|\tau-rt|} |d\tau| |dt| \leq \\ & \leq C \int_T |f(\tau)| |1-\tau|^\alpha |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |1-t|}{|1-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha} |\tau-rt|} |dt| |d\tau|. \end{aligned}$$

Так как (см. [12])

$$\sup_{0 < r < 1} |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |1-t|}{|1-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha} |\tau-rt|} |dt| < \infty,$$

то получим

$$(1-r^2) \int_T |I_1(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая, что $(S(z))'_z$ ограниченная функция, получим

$$|I_2(r, t)| \leq \frac{C}{|1-rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)| |1-\tau|^n}{|\tau-rt|^2} |d\tau|.$$

Поэтому

$$(1-r^2) \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(1-r^2) \int_T \frac{|1-t|^\alpha}{|1-rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)||1-\tau|^n}{|\tau-rt|^2} |d\tau| |dt| \leq \\
&\leq C \int_T |f(\tau)| |1-\tau|^\alpha |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{|\tau-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha}} |d\tau|.
\end{aligned}$$

Поскольку (см. [12])

$$\sup_{0 < r < 1} |1-\tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1-r^2)}{|\tau-rt|^2 |1-t|^{n-\alpha}} |dt| < \infty,$$

то имеем

$$(1-r^2) \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| |dt| \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым (2.10) доказано. Лемма доказана. $\square$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ A

Хорошо известно [1], что общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$(3.1) \quad u(z) = \Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ – произвольные аналитические функции в D^+ , а A_0 – произвольное комплексное число, причем функции $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ и A_0 однозначно определяются функцией $u(z)$. Учитывая представление (3.1), условия (1.2), (1.3) можно представить в виде

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|Re(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt) + A_0r\bar{t})) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(3.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|Re(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt) + A_0r\bar{t})) - f_1(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым задача A эквивалентна следующей задаче в классе аналитических функций:

Задача A* Найти аналитические в D^+ функции $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ и постоянную A_0 так, чтобы выполнялись граничные условия (3.2), (3.3).

Пусть $\kappa_j = \text{ind } a_0(t), t \in T$,

$$S_j(z) = \beta_j \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d_j(\tau)}{\tau - z} d\tau \right), \quad j = 0, 1,$$

где

$$d_j(t) = \ln \left(t^{2\kappa_j} \overline{a_j(t)} a_j^{-1}(t) \right), \quad t \in T, \quad \beta_j = \exp \left(-\frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{d_j(\tau)}{\tau} d\tau \right).$$

$$(3.4) \quad K_j(f, z) = \frac{S_j(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n \tau |d\tau|}{a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)} + \\ + (-1)^n \frac{z^{n-2\kappa_j} S_j(z)}{2\pi(1-z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n z |d\tau|}{\tau^{n-2\kappa_j} a_j(\tau)S_j(\tau)(\tau-z)}, \quad j = 0, 1, \quad z \in D.$$

Теорема 1. Пусть для заданных функций $f_0(t), f_1(t)$ задача A имеет решение $u(z)$.

а) Если $n - 2\kappa_0 \geq -1$, $n - 2\kappa_1 \geq -1$, то $u(z)$ представляется в виде (3.1), где

$$(3.5) \quad \Phi_0(z) = K_0(f_0, z) - K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n},$$

$$(3.6) \quad \Phi_1(z) = \frac{z}{2} \Phi_0'(z) - \frac{1}{2} (K_1(f_1, z) - K_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), z)) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n},$$

$P_j(z) \in T_{n-2\kappa_j}$, $j = 0, 1$, A_0 - постоянная.

б) Если хотя бы одно из чисел $n - 2\kappa_0$, $n - 2\kappa_1$ меньше -1 , то в случае $n - 2\kappa_0 < -1$ имеем

$$(3.7) \quad \int_T \frac{(f_0(t) - \operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

$u(z)$ представляется в виде (3.1), где Φ_0, Φ_1 определяются формулами (3.5),

(3.6), причем в (3.5) следует полагать $P_0(z) \equiv 0$. Соответственно, если $n - 2\kappa_1 < -1$, то

$$(3.8) \quad \int_T \frac{(f_1(t) - \operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)))(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_1) - 2$$

и в (3.6) следует полагать $P_1(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как функции $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ и постоянная A_0 удовлетворяют условиям (3.2), (3.3), то положив

$$\operatorname{Re}(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt) + A_0 r \bar{t})) = f_{0r}(t),$$

$$\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt) + A_0 r \bar{t})) = f_{1r}(t),$$

будем иметь

$$\operatorname{Re}(a_0(t)(\Phi_0(rt) + (1-r^2)\Phi_1(rt))) = f_{0r}(t) - \operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_0(t)),$$

$$\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\Phi_1'(rt))) = f_{1r}(t) - \operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_1(t)).$$

Предположим, что $n - 2\kappa_0 \geq 0$, $n - 2\kappa_1 \geq 0$. Применив лемму 3 относительно функции $\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz)$ получим

$$\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz) =$$

$$= K_0(f_{0r}, z) - K_0(Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_{0r}(z)}{(1-z)^n},$$

где $P_{0r}(z) \in T_{n-2\kappa_0}$. Так как $f_{0r} \rightarrow f_0$ в $L^1(\rho)$, то $(1-t)^n f_{0r} \rightarrow (1-t)^n f_0$ в $L^1(T)$. Переходя к пределу при $r \rightarrow 1-0$ в последней формуле, получим (3.5). Аналогично, применив лемму 3 относительно функции $z\Phi'_0(rz) - 2r\Phi_1(rz) + (1-r^2)z\Phi'_1(rz)$, получим (3.6). Утверждение а) теоремы доказано. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 < -1$. Снова применяя лемму 3, получим $\Phi_0(rz) + (1-r^2)\Phi_1(rz) = K_0(f_{0r}, z) - K_0(Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)), z)$, причем,

$$\int_T \frac{(f_{0r}(t) - Re(A_0 r \bar{t} a_0(t)))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 1-0$ и учитывая, что $(1-t)^n f_{0r} \rightarrow (1-t)^n f_0$ по норме $L^1(T)$, получаем (3.7). Аналогично получаем условия (3.8) при $n - 2\kappa_1 < 0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Условия (3.8) при $n - 2\kappa_0 \leq -2$ можно представить в виде

$$\int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = \int_T \frac{Re(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

Пусть $n - 2\kappa_0 = -2$. Тогда $k = 0$ и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{Re(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{S_0(t)} \frac{dt}{t} + \frac{\overline{A_0}}{2\pi i} \int_T \frac{t a_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{S_0(0)} + \frac{\overline{A_0}}{2\pi i} \int_T \frac{t(1-t)^n}{S_0^-(t)} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right). \end{aligned}$$

Тем самым, если $n - 2\kappa_0 = -2$, то условие (3.7) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right).$$

Если $n - 2\kappa_0 < -2$, то при $k = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{A_0}{2\beta_0},$$

при $k = -(n - 2\kappa_0) - 2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^{-(n-2\kappa_0)-2} dt = \frac{\overline{A_0}}{2\beta_0},$$

а при остальных $k = 1, 2, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 3$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} t^k dt = 0.$$

Аналогично, если $n - 2\kappa_1 = -2$, то условие (3.8) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_1} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_1} \right).$$

Если $n - 2\kappa_1 < -2$, то при $k = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} dt = \frac{A_0}{2\beta_1},$$

при $k = -(n - 2\kappa_1) - 2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^{-(n-2\kappa_1)-2} dt = \frac{\overline{A_0}}{2\beta_1},$$

а при остальных $k = 1, 2, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 3$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} t^k dt = 0.$$

Полученные соотношения нам понадобятся в дальнейшем.

Из теоремы 1 следует, что если однородная задача A имеет решение, то при $n - 2\kappa_0 \geq -1$, $n - 2\kappa_1 \geq -1$ ее можно представить в виде

$$(3.9) \quad u_0(z) = \Psi_0(z) + (1 - |z|^2)\Psi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где

$$(3.10) \quad \Psi_0(z) = -K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n},$$

$$(3.11) \quad \Psi_1(z) = \frac{z}{2}\Psi'_0(z) + \frac{1}{2}K_1(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n},$$

$P_j(z) \in T_{n-2\kappa_j}$, $j = 0, 1$, A_0 -произвольная постоянная. Введем следующее обозначение

$$\frac{\hat{d}}{dz} = z \frac{d}{dz}$$

и представим функцию $u_0(z)$ в виде $u_0(z) = u_{01}(z) + u_{02}(z)$, где

$$\begin{aligned} u_{01}(z) &= A_0\bar{z} - K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \\ &+ \frac{(1 - |z|^2)}{2} \left(K_1(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_1(t)), z) - \frac{\hat{d}}{dz} K_0(\operatorname{Re}(A_0\bar{t}a_0(t)), z) \right), \\ u_{02}(z) &= \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n} + (1 - |z|^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^n} \right) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n} \right). \end{aligned}$$

Лемма 6. *Функция $u_{01}(z)$ является решением однородной задачи A.*

Доказательство. По лемме 5

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(1-r^2) \left(K_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), rt) - \frac{\hat{d}}{dz} K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) \right)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

а по лемме 2

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t) K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) - \operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(A_0 r \bar{t} a_0(t)) - \operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_0(t) K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_0(t)), rt) - A_0 r \bar{t}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым функция $u_{01}(z)$ удовлетворяет условию (1.2). Далее имеем

$$\frac{\partial u_{01}(rt)}{\partial r} = u'_{01}(r, t) + u''_{01}(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} u'_{01}(r, t) &= A_0 \bar{t} - r K_1(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt), \\ u''_{01}(r, t) &= \frac{(1-r^2)}{2} t((K_1(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))' \\ &\quad - 3(K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))' - rt(K_0(\operatorname{Re} A_0 \bar{t} a_1(t), rt))''). \end{aligned}$$

Учитывая лемму 2, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|u''_{01}(r, t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|u'_{01}(r, t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Для того, чтобы функция $u_{02}(z)$ удовлетворяла условиям (1.2), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы функция $P_0(z)(1-z)^{-n}$ была представима в виде $\tilde{P}_0(z)(1-z)^{-(n-1)}$, где $\tilde{P}_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} + \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} a_0(t) \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Следовательно функция $u_{02}(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2) для любых $P_0 \in T_{n-2\kappa_0}$, $P_1 \in T_{n-2\kappa_1}$. Далее имеем

$$\frac{\partial u_{02}(rt)}{\partial r} = \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} + \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n} +$$

$$+ \frac{1-r^2}{2r} \frac{\hat{d}}{dz} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} - 2r \frac{S_1(rt)P_1(rt)}{(1-rt)^n}.$$

Учитывая леммы 2 и 4, заключаем, что функция $u_{02}(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.3) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{S_0(rt)P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \left\| S_0(rt) \frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{P_0(rt)}{(1-rt)^n} \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2} \frac{P_0(rt)}{(1-rt)^n} = \frac{Q(rt)}{(1-rt)^{n+2}},$$

где $Q(z)$ – полином порядка $n-2\kappa_0+2$. Пусть $P_0(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-2\kappa_0}z^{n-2\kappa_0}$. Сумма коэффициентов многочлена $Q(z)$ равна $n(n+1)(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2\kappa_0})$. Следовательно, если $Q(z)$ представим в виде $Q(z) = A_0 + A_1(1-z) + \dots$, то получаем $A_0 = Q(1) = n(n+1)(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2\kappa_0})$ и

$$\frac{Q(rt)}{(1-rt)^{n+2}} = \frac{A_0}{(1-rt)^{n+2}} + \frac{A_1}{(1-rt)^{n+1}} + \dots$$

Применяя лемму 4 заключаем, что $A_0 = 0$. Поэтому $P_0(z)$ делится на $1-z$. Положив $\tilde{P}_0(z) = P_0(z)(1-z)^{-1}$ получаем утверждение леммы. $\square$

Из теоремы 1 и лемм 6,7 следует:

Теорема 2. а) Пусть $\alpha \in (-1, 0]$, $n-2\kappa_0 \geq -1$, $n-2\kappa_1 \geq -1$. Тогда общее решение однородной задачи А можно представить в виде

$$(3.12) \quad u_0(z) = \Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -K_0(Re(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + S_0(z)P_0(z), \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2}\Phi'_0(z) + \frac{1}{2}K_1(Re(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + S_1(z)P_1(z), \end{aligned}$$

причем $P_0(z) \in T_{-2\kappa_0}$, $P_1(z) \in T_{-2\kappa_1}$, а A_0 – произвольная постоянная.

б) Пусть $\alpha > 0$, $n-2\kappa_0 \geq -1$, $n-2\kappa_1 \geq -1$. Тогда общее решение однородной задачи А можно представить в виде (3.12), где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\tilde{K}_0(Re(A_0\bar{t}a_0(t)), z) + \frac{S_0(z)P_0(z)}{(1-z)^{n-1}}, \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2}\Phi'_0(z) + \frac{1}{2}\tilde{K}_1(Re(A_0\bar{t}a_1(t)), z) + \frac{S_1(z)P_1(z)}{(1-z)^n}, \end{aligned}$$

причем $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$, $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$, а A_0 – произвольная постоянная.

Теорема 3. а) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ или $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} = -2$ и $\kappa_0 \neq \kappa_1$, то однородная задача A имеет $4 + 2n - 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ линейно независимых решений.

б) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$, то однородная задача A имеет $4 + \tilde{\kappa}_0 + \tilde{\kappa}_1$ линейно независимых решений, где $\tilde{\kappa}_j = \max\{n - 2\kappa_j - 1; -2\}$.

в) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то однородная задача A имеет одно нетривиальное решение.

г) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то однородная задача A не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. В силу теоремы 1, если однородная задача A имеет решение, то ее можно представить в виде (3.12). Нам следует установить, что функция (3.12) удовлетворяет однородным условиям (3.2), (3.3) для любых $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$, $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$. Так как по лемме 5

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \|\Phi_1(rt)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \|\Phi_1'(rt)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то получаем

$$(3.13) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_0(t)\Phi_0(rt)) + \operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t))\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

$$(3.14) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(a_1(t)(t\Phi_0'(rt) - 2r\Phi_1(rt))) + \operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_1(t))\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Решив эту систему относительно Φ_0 , Φ_1 , получим $u_0(z) = u_{01}(z) + u_{02}(z)$, где функция $u_{02}(z)$ содержит $2 + 2n - 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ произвольных действительных постоянных, а функция $u_{01}(z)$ - комплексную постоянную A_0 , то есть две действительные постоянные. Пусть теперь одно из чисел $n - 2\kappa_0$, $n - 2\kappa_1$ равно -2 . Предположим, что $n - 2\kappa_0 = -2$. Тогда

$$\int_T \frac{\operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = 0$$

или

$$\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} = 0.$$

То есть

$$(3.15) \quad \operatorname{Re} A_0 \beta_0 = 0.$$

Если $A_0 \neq 0$ удовлетворяет условию (3.15), то функция $\Phi_0(z)$ определяется однозначно по формуле $\Phi_0(z) = -K_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t}a_0(t)), z)$. В формуле (3.6) определения функции $\Phi_1(z)$ ($f_1(t) \equiv 0$) содержатся $2 + n - 2\kappa_1$ произвольных действительных постоянных. Следовательно, однородная задача B имеет $\kappa_1 + 2$ линейно независимых решений. Аналогично можно рассматривать случай, когда $\kappa_1 = -2, \kappa_0 \geq 0$.

Утверждение а) теоремы доказано. Пусть теперь $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$. Предположим, что $n - 2\kappa_0 < -2$. Тогда для разрешимости задачи (3.13), (3.14) необходимы условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t))(1-t)^n}{a_0(t) S_0(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n - 2\kappa_0) - 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt + \frac{\bar{A}_0}{2\pi i} \int_T \frac{\overline{t a_0(t)} (1-t)^n}{a_0(t) S_0(t)} dt = 0.$$

Так как $a_0(t) S_0^+(t) = \overline{a_0(t)} S_0^-(t)$, $t \in T$ и $S_0^-(z)$ на бесконечности имеет порядок $2\kappa_0$, то

$$\int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0^-(t)} dt = \int_T \frac{\overline{t a_0(t)} (1-t)^n}{a_0(t) S_0^+(t)} dt = 0.$$

Следовательно

$$\frac{A_0}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt = 0.$$

Так как

$$\frac{A}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^n}{t S_0(t)} dt = \frac{1}{S_0(0)} \neq 0,$$

то $A_0 = 0$. Поэтому $\Phi_0(z) \equiv 0$. Теперь, если $n - 2\kappa_1 > -2$, то

$$\Phi_1(z) = \frac{S_1(z) P_1(z)}{(1-z)^n},$$

где $P_1(z) \in T_{n-2\kappa_1}$ и общее решение однородной задачи (3.13), (3.14) можно представить в виде

$$u(z) = (1 - z\bar{z}) \frac{S_1(z) P_1(z)}{(1-z)^n}.$$

Если $n - 2\kappa_1 \leq -2$, то имеем $u(z) \equiv 0$. Если же $n - 2\kappa_1 < -2$, то как и прежде $A_0 = 0$. Предположим, что $n - 2\kappa_0 \geq 0$. Тогда $\Phi_0(z) = S_0(z) P_0(z) (1-z)^{-n}$, где $P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0}$. Подставляя $\Phi_0(z)$ в выражение $\Phi_1(z)$, получаем $\Phi_1(z) = 2^{-1} z (S_0(z) P_0(z) (1-z)^{-n})'$. Если $n > 0$, то $P_0(z)$ делится на $1-z$ и получаем

$$\Phi_1(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^{n-1}} \right)',$$

$P_0(z) \in T_{n-2\kappa_0-1}$. Общее решение можно представить в виде

$$u(z) = \frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^{n-1}} + (1 - |z|^2) \frac{z}{2} \left(\frac{S_0(z) P_0(z)}{(1-z)^n} \right)'.$$

Утверждение б) теоремы доказано. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$. Если $A_0 = 0$, то $\Phi_0(z) \equiv \Phi_1(z) \equiv 0$ и $u(z) \equiv 0$. Поэтому будем предполагать, что

$A_0 \neq 0$. Так как $f_0(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$, то согласно замечанию к теореме 1, число A_0 удовлетворяет условиям

$$\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} = 0, \quad \frac{A_0}{\beta_1} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_1} = 0.$$

Эти условия эквивалентны условию $\beta_0^2 = \beta_1^2$. Общее решение однородной задачи (3.13), (3.14) можно представить в виде

$$u(z) = \Phi_0(z) + (1 - z\bar{z})\Phi_1(z),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\tilde{K}_0(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_0(t)), z), \\ \Phi_1(z) &= \frac{z}{2} \Phi'_0(z) + \frac{1}{2} \tilde{K}_1(\operatorname{Re}(A_0 \bar{t} a_1(t)), z), \end{aligned}$$

A_0 удовлетворяет условию (3.15) (либо $\operatorname{Re} A_0 \beta_1 = 0$). Если $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, тогда $A_0 = 0$, следовательно $\Phi_0(z) \equiv \Phi_1(z) \equiv 0$ и $u(z) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. а) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ или $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} = -2$ лишь при $\kappa_0 \neq \kappa_1$, то задача A имеет решение для любых функций $f'_0, f_1 \in L^1(\rho)$.

б) Если $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$, то для разрешимости задачи A необходимо и достаточно, чтобы функции f_0 и f_1 удовлетворяли $-4 + \kappa'_0 + \kappa'_1$ линейно независимым условиям, где $\kappa'_j = \max\{n - 2\kappa_j; 2\}$, $j = 0, 1$.

в) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то задача A разрешима для любых функций $f'_0, f_1 \in L^1(\rho)$.

г) Если $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функции f_0 и f_1 удовлетворяли одному линейно независимому условию.

Доказательство. Пусть $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$. Рассмотрим функцию

$$(3.16) \quad u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z),$$

где

$$(3.17) \quad \Phi_0(z) = K_0(f_0, z),$$

$$(3.18) \quad \Phi_1(z) = 2^{-1}(z\Phi'_0(z) - K_1(f_1, z)).$$

Так как в силу леммы 2

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_0(t) K_0(f_0; rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

то $u(z)$ из (3.16) удовлетворяет условию (1.2). Далее имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = (1 - r^2)t(K_0(f_0; rt))' + rK_1(f_1; rt) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-r^2)t\left((K_0(f_0;rt))'+rt\left(\tilde{K}_0(f_0;rt)\right)''-(K_1(f_1;rt))'\right).$$

Применив снова лемму 2 будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re} a_1(t)K_1(f_1;rt) - f_1(t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

а остальные слагаемые функции $\frac{\partial u(rt)}{\partial r}$, в силу леммы 5, стремятся к нулю в $L^1(\rho)$. Тем самым $u(z)$ удовлетворяет (1.3). Следовательно теорема при $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} > -2$ доказана. Пусть теперь $n - 2\kappa_0 = -2, n - 2\kappa_1 > -2$. Согласно замечанию к теореме 1, для разрешимости задачи A необходимо условие

$$(3.19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\beta_0} + \frac{\overline{A_0}}{\beta_0} \right).$$

Поэтому, если $f_0'(t) \in L^1(\rho)$ - произвольная функция, то число A_0 выберем так, чтобы имело место (3.19). Решением задачи A будет

$$u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z},$$

где Φ_0 и Φ_1 определяются соответственно формулами (3.5) и (3.6), а A_0 - из (3.19). Аналогично рассматривается случай $n - 2\kappa_0 > -2, n - 2\kappa_1 = -2$. Утверждение а) теоремы доказано.

Пусть теперь $\min\{n - 2\kappa_0, n - 2\kappa_1\} < -2$ и пусть $n - 2\kappa_0 < -2, n - 2\kappa_1 < -2$. Согласно замечанию к теореме 1 постоянную A_0 следует выбрать так, чтобы

$$(3.20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \frac{A_0}{\beta_0}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n t^{-(n-2\kappa_0)-2}}{a_0(t)S_0(t)} dt = (-1)^n \frac{\overline{A_0}}{\beta_0}.$$

Следовательно, учитывая замечание к теореме 1, получаем, что для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функция f_0 удовлетворяла $-(n - 2\kappa_0) - 3$ линейно независимым условиям. Так как A_0 уже выбрано, то учитывая опять замечание к теореме 1, для разрешимости задачи A необходимо, чтобы функция f_1 удовлетворяла $-(n - 2\kappa_1) - 1$ линейно независимым условиям. Всего получаем $-4 - 2n + 2(\kappa_0 + \kappa_1)$ линейно независимых условий на функции f_0 и f_1 . Далее, как при доказательстве утверждения а), установим, что функция $u(z) = \Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z) + A_0\bar{z}$, где Φ_0 и Φ_1 определяются формулами (3.5) и (3.6) соответственно, A_0 - по формуле (3.20), удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Теперь предположим, что $n - 2\kappa_0 = n - 2\kappa_1 = -2$. Тогда получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{a_0(t)S_0(t)} dt = \operatorname{Re}(A_0\beta_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^n}{a_1(t)S_1(t)} dt = \operatorname{Re}(A_0\beta_1).$$

Если $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то A_0 можно выбирать так, чтобы выполнялись оба условия. Поэтому в этом случае, задача A разрешима для любых функций $f_0(t), f_1(t)$. Если $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то A_0 определяется по одному из равенств (3.15), при этом второе равенство представляет собой единственное линейно независимое условие на f_0 или f_1 . Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper investigates a Riemann-Hilbert type problem for second order nonregular elliptic equation in weighted spaces. It is established that the number of linearly independent solutions of the homogeneous problem and the number of conditions on the boundary functions depend not only on the order of singularity of the weight function and coefficient indices of the considered problem, but also on the behavior of these functions at singular points.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М. Наука (1966).
- [2] И.А. Бикчантаев, "Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения", ДАН СССР, **209**, 5 (1973).
- [3] Н.Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для одного класса неправильно-эллиптических уравнений высокого порядка", Известия НАН Армении, серия Математика, **27**, 1, 99 - 108 (1992).
- [4] N. E. Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electrodynamical Fields, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong-Kong, 1998.
- [5] А.П. Солдатов, "Обобщенная задача Дирихле - Неймана", Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 153 - 154 (1989).
- [6] Begehr H. Kumar A, "Boundary Value Problem For The Inhomogeneous Polyanalytic Equation I", Analysis 25, 55 - 71 (2005).
- [7] А. О. Бабалян, "О краевой задаче для несобственно эллиптических уравнений в многосвязной области", Известия НАН Армении, серия Математика, **29**, 2, р. 11-21 (1994).
- [8] Г.М. Айрапетян, "Граничная задача типа Римана-Гильберта для n -голоморфных функций", Известия АН Армении, серия Математика, **31**, 3, 24 - 41 (1996).
- [9] Г. М. Айрапетян, И. В. Оганисян, "Задача типа Римана-Гильберта для уравнения Бицадзе в пространствах с весом", Ереван, Математика в высшей школе, **1**, 1, 5 - 11 (2005).
- [10] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука (1968).
- [11] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле для бигармонических функций в пространствах с весом", Известия НАН Армении, серия Математика, **39** 3, 3 - 12 (2004).
- [12] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Известия НАН Армении, серия Математика, **36**, 3, 12 - 35 (2001).
- [13] Г. М. Айрапетян, М.С. Айрапетян, "Граничная задача Гильберта в весовых пространствах $L^1(\rho)$ ", Известия НАН Армении, серия Математика, **43**, 2, 85-99 (2008).

Поступила 18 декабря 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 21-36.

НЕ φ -ДОПУСТИМЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *avarujan@ysu.am*

Аннотация. В работе для произвольного нечетного $n \geq 1003$ и для произвольного автоморфизма φ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ найдено достаточное условие для существования не φ -допустимой нормальной подгруппы группы $B(m, n)$. В частности, если автоморфизм φ - нормальный, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ группы $B(m, n)$ существует такое целое число k , что каждый базисный элемент a_i сопряжен с $\varphi(a_i)^k$.

MSC2000 number: 20F50, 20F05, 20E36

Ключевые слова: Свободная бернсайдова группа, нормальный автоморфизм, φ -допустимая подгруппа, неабелева простая группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $B(m, n)$ фактор-группу F_m/F_m^n , где F_m - абсолютно свободная группа произвольного (конечного или бесконечного) ранга m , а F_m^n - подгруппа порожденная всевозможными n -ми степенями (n - натуральное число) элементов из F_m . Группа $B(m, n)$ свободна в многообразии всех n -периодических групп и называется свободной периодической или свободной бернсайдовой группой периода n и ранга m . Хорошо известная теорема С. И. Адяна утверждает, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ бесконечна (решение проблемы Бернсайда).

Доказательство бесконечности групп $B(m, n)$ при нечетных $n \geq 665$ основано на полной классификации периодических и приведенных слов рангов α , которая дана в работах [1], [2]. Известно, что развитая в [1], [2] теория открыла путь к решению многих неподдававшихся долгое время трудных проблем теории групп.

В совместной статье А. Ю. Ольшанского и С. В. Иванова [3] и в статье С. И. Адяна [4] дан обзор дальнейших достижений в теории бернсайдовых групп. Среди последних следует подчеркнуть доказательство бесконечности групп $B(m, n)$ для четных показателей n , полученное С. В. Ивановым в [5] (для всех $n \geq 2^{48}$ делящихся на 2^9) и И. Г. Лысенком в [6] (для всех $n \geq 8000$ делящихся на 16).

Одним из мало изученных задач в этой области есть проблема, поставленная А. Ю. Олышанским в 1980 году: “Пусть n - достаточно большое нечетное число. Описать автоморфизмы свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ” (см [7], вопрос 8.53.а)). Лишь сравнительно недавно Е. А. Черепановым опубликованы работы [8-9], нацеленные на исследование групп автоморфизмов $Aut(Bm, n)$. А именно:

- в статье [8], доказывается, что при $m \geq 2$ и для всех нечетных $n > 10^{10}$, а также для всех четных $n > 8000$ делящихся на 2^4 , группа $Aut(Bm, n)$ содержит свободную подполугруппу ранга 2,

- в [9] доказывается, что при всех достаточно больших нечетных n ($n > 10^{78}$) каждый нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$ - внутренний.

Напоминаем, что автоморфизм φ группы G называется **нормальным**, если $\varphi(N) = N$ для любой нормальной подгруппы N группы G .

Определение 1. Пусть G - произвольная группа и $\varphi \in Aut(G)$ - некий автоморфизм группы G . Подгруппа H группы G называется φ -допустимой, если $\varphi(H) = H$.

При нормальном автоморфизме $\varphi \in Aut(G)$ любая нормальная подгруппа данной группы G φ -допустима и наоборот. Ясно, что если N есть φ -допустимая нормальная подгруппа группы G , то автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм фактор группы G/N . Множество всех нормальных автоморфизмов данной группы G есть подгруппа группы $Aut(G)$, содержащая все внутренние автоморфизмы группы G .

Наша основная цель - доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга m с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$. Если для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями базисного элемента a_i , то существует нормальная подгруппа N группы $B(m, n)$, такая что:

1. подгруппа N не φ -допустима,
2. фактор-группа $B(m, n)/N$ - простая неабелева группа,
3. для любого j элемент a_j имеет порядок n в группе $B(m, n)/N$.

Из пункта 1 теоремы 1 следует, что если φ - произвольный нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots\}$ и для любого i существуют целое число k_i и элемент $b_i \in B(m, n)$ такие, что $\varphi(a_i) = b_i a_i^{k_i} b_i^{-1}$. Поскольку вместе с $\{a_1, a_2, \dots\}$ базисом является и система порождающих $\{a_1 \cdot a_2, a_2, \dots\}$,

то для некоторого числа k и некоторого элемента $b \in B(m, n)$ имеет место $\varphi(a_1 \cdot a_2) = b(a_1 \cdot a_2)^k b^{-1}$. Отсюда следует, что $b_1 a_1^{k_1} b_1^{-1} \cdot b_2 a_2^{k_2} b_2^{-1} = b(a_1 \cdot a_2)^k b^{-1}$. Профакторизуя группу $B(m, n)$ по коммутанту, из последнего равенства немедленно получаем $k_1 = k_2 = k$. Таким образом справедливо

Следствие 1. Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$. Тогда для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ группы $B(m, n)$ существует такое целое число k , что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^k для любого i .

Отметим также, что теорема 1 усиливает следующий результат А. Ю. Ольшанского: если $B(m, n)$ - свободная бернсайдовая группа достаточно большого нечетного периода n ($n > 10^{78}$) с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$ и слово $v = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ не сопряжено в $B(m, n)$ со степенями порождающих $a_1, a_2, \dots$, то существует неабелева простая фактор-группа $B(m, n)/N$ такая, что канонический образ порождающей a_1 в $B(m, n)/N$ имеет порядок n и образы v и a_1 не сопряжены относительно произвольного автоморфизма группы $B(m, n)/N$ (см. лемму 2.3 работы [10]).

В дальнейшем изложении мы без специальных ссылок будем использовать обозначения и терминологию монографии [2] и статьи [11].

2. ПОСТРОЕНИЕ НЕАБЕЛЕВОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ.

Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями a_i . Не умоляя общности можно предположить, что $i = 1$. Допустим, что $v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ такое слово в алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, что $\varphi(a_1) = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в группе $B(m, n)$

Модифицируем конструкцию бесконечной группы с циклическими подгруппами из работы С. И. Адяна и И. Г. Лысенка [11] для получения нормальной подгруппы N группы $B(m, n)$ с указанными в теореме 1 свойствами.

Пусть $B(m, n, 0)$ свободная группа с порождающими $a_1, a_2, \dots, a_m$. Для всякого натурального $\beta > 0$ через $B(m, n, \beta)$ обозначим группу с теми же образующими и с системой определяющих соотношений $\{A^n = 1, \text{ где } A \in \bigcup_{i \leq \beta} \mathcal{E}_i\}$ (см. [2], VI.2.2). Положим $a \equiv a_1$, $b \equiv a_2$. В дальнейшем запись $X \equiv Y$ означает графическое равенство слов X и Y .

Согласно VI.2.4 и VI.1.2 из [2], для слова $v = v(a_1, a_2, \dots, a_m)$ можно указать такое слово S и такой элементарный период E некоторого ранга $\gamma_0 \leq \beta + 1$, что слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma_0-1}$ и при некотором

$$0 < r \leq \frac{n+1}{2} + 46$$

выполнено соотношение

$$(2.1) \quad v(a_1, a_2, \dots, a_m) \stackrel{B(m,n,\beta)}{=} S E^r S^{-1}.$$

По условию теоремы 1, $E \neq a^{\pm 1}$ в группе $B(m, n)$. Фиксируем указанный элементарный период E ранга γ_0 . При $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \gamma_0$ полагаем $\Gamma_\alpha \equiv B(m, n, \alpha)$.

Предположим, что $\alpha > \gamma_0$ и группы Γ_δ при $\delta < \alpha$ уже определены. Пусть Ψ_α есть множество всех элементарных периодов C ранга $\alpha - 1$, удовлетворяющих соотношению

$$C \stackrel{\alpha-2}{=} A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z A^d Z^{-1} A^d Z$$

где A и B - минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-2}$, $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 2$, $d = 191$ (см. §1 в [11]). Через Π_α обозначим множество всех тех приведенных форм коммутаторов (см. определение 3.1 работы [11])

$$[E^d, Z^{-1} E^d Z] \equiv E^{-d} Z^{-1} E^{-d} Z E^d Z^{-1} E^d Z,$$

которые принадлежат множеству Ψ_α , где E - указанный выше элементарный период ранга γ_0 , а Z - произвольное слово из множества $\mathcal{M}_{\alpha-2}$ (вообще говоря, множество Π_α для данного α может быть и пустым). Пусть $\overline{\Pi}_\alpha$ такое подмножество множества Π_α , что каждый элемент $C \in \Pi_\alpha$ сопряжен в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ одному и только одному слову D такому, что $D \in \overline{\Pi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \overline{\Pi}_\alpha$. Подмножество $\overline{\Psi}_\alpha \subset \Psi_\alpha$ выберем так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1. $\overline{\Pi}_\alpha \subset \overline{\Psi}_\alpha$,
2. каждый элемент $C \in \Psi_\alpha$ сопряжен в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ одному и только одному слову D такому, что $D \in \overline{\Psi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \overline{\Psi}_\alpha$.

Через Φ_α обозначим множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ ровно два слова

$$(2.2) \quad C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200} a,$$

$$(2.3) \quad C^{270} A C^{270} A^2 \dots A^{n-1} C^{270} b,$$

а для каждого периода $C \in \overline{\Pi}_\alpha$ еще одно слово

$$(2.4) \quad C^{340} A C^{340} A^2 \dots A^{n-3} C^{340} A^{n-1} C^{340} A,$$

где A - какой-нибудь фиксированный для данного $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ элементарный период, участвующий в соотношении $C \stackrel{\alpha=2}{=} A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z A^d Z^{-1} A^d Z$.

В качестве группы Γ_α возьмем группу

$$(2.5) \quad \Gamma_\alpha = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid R = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \Phi_\beta \right\rangle,$$

а в качестве Γ возьмем группу

$$(2.6) \quad \Gamma = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid R = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \geq \gamma_0 + 1} \Phi_\beta \right\rangle.$$

Для группы Γ повторим все формальные определения из §1 в [11]. Все леммы работы [11], предложения и их доказательства для построенной нами группы Γ остаются в силе. Дополнительно возникают изменения в формулировке и доказательстве леммы 4.1 из [11] в связи с новыми определяющими соотношениями вида (2.4). А именно, в формулировке леммы 4.1 необходимо:

1. в первом предложении отрывок “... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (2.2), $k = 300$ и $x = b$ для F вида (2.3)” заменить на “... $k = 200$ и $x = a$ для F вида (2.2), $k = 270$ и $x = b$ для F вида (2.3) и $k = 340$ и $x = A$ для F вида (2.4)”;

2. последнее предложение заменить на предложение “Кроме того, для каждой пары слов (2.2) и (2.3) и для каждой тройки слов (2.2), (2.3) и (2.4), соответствующих данному периоду $C \in \overline{\Psi}_\alpha$, два указанных слова H и, соответственно, три указанных слова H можно выбрать так, чтобы соответствующие им периоды D и слова u_i при $1 \leq i \leq n - 1$ были одинаковы”.

Доказательство указанной версии леммы 4.1 для слов F вида (2.2) или вида (2.3) проводится так, как раньше. Для слов F вида (2.4) все нужно повторить, заменив лишь слово v_n , определенное соотношением (4.5) из [11] словом $v_n = G^{29}[G, A_1, G]_0 G^{29}$, а ссылки на лемму 3.6 из [11] заменить ссылками на лемму 3.5 из [11].

В соответствии с изменениями в лемме 4.1 работы [11], естественным образом меняются и множества $\overline{\mathcal{H}}_\alpha$. Указанные изменения влекут за собой очевидные изменения там, где используется лемма 4.1 из [11] и там, где рассматриваются элементы множества $\overline{\mathcal{H}}_\alpha$.

Итак, для групп Γ и Γ_α , определенных соотношениями (2.5) и (2.6), справедливы все леммы из §2 – §7 работы [11], в том числе - лемма 4.1 с указанными выше поправками, а также леммы 1, 4 и 5 работы [12]. Поэтому справедлива

Лемма 1. *Группа Γ является бесконечной простой группой, все максимальные подгруппы которой циклические группы порядка n .*

3. КОММУТАТОРЫ

В этом параграфе собраны те леммы, которые носят общий характер и справедливы не только для групп Γ_α и Γ , построенных выше, но и для любой группы Γ_α и Γ , построенной в работах [11-13]. В частности, на протяжении этого параграфа под словом “ранг” можно подразумевать ранг в смысле любой из указанной группы.

Следующая лемма доказывается точно также, как лемма 4 работы [13].

Лемма 2. *Если A – элементарный период некоторого ранга, $[A^d, Z^{-1} A^d Z] \neq 1$ в Γ и коммутаторы $[A^d, Z^{-1} A^d Z]$ и $[A^d, Z'^{-1} A^d Z']$ сопряжены в группе Γ , то для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1} A^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} A^u Z^{-1} A^{-d} Z A^v$, или $Z' A^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} A^u Z^{-1} A^d Z A^v$.*

Лемма 3. *При $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ и $\delta = \pm 1$ каждый из коммутаторов*

$$[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}] \equiv a^{-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^k b^{-9\delta} a^k b^{9\delta},$$

является минимизированным элементарным периодом ранга 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Очевидно, $\text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ непусто. При $1 \leq |k| \leq q-1$ в слова $a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ не входят активные вхождения, а при $q \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ активными являются все ядра ранга 1 с основами $a^{\pm k}$. Отсюда и из вида слов $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ следует, что для произвольного периода B ранга 2 и любых порождающих вхождений V и W в целые слова $Y \in \text{Цел}(X, 2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ и $Y_1 \in \text{Цел}(X_1, 2, B)$ из $\text{ВзНорм}_1(V, W)$ и $l_2(W) \geq 9$ следует $\rho_{2, B}(X_1) = \rho_{2, [a^k, b^{-9} a^k b^9]}(X) = 4$ при $1 \leq |k| \leq 8$ и $\rho_{2, [a^k, b^{-9} a^k b^9]}(X) = 8 = \rho_{2, B}(X_1)$ при $9 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$. Поэтому, согласно I.4.10 [2], слова $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ являются элементарными периодами ранга 2. Поскольку, очевидно, $[a^k, b^{-9} a^k b^9]^q \in \mathcal{M}_2$ при $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$, то каждый из периодов $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ ранга 2 минимизирован (см. определение 2.2 [11]). Случай $\delta = -1$ рассматривается аналогично. $\square$

Лемма 4. *Пусть A и B – минимизированные элементарные периоды рангов γ и β ($\gamma \leq \beta$) и $Z \in \mathcal{M}_{\beta-1}$. Тогда если коммутатор $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$, где $\delta = \pm 1$ и $1 \leq |k| \leq$*

$\frac{n-1}{2}$, то $k = \pm d$, $A \equiv a^\varepsilon$, $B \equiv a^\mu$, где $\varepsilon, \mu = \pm 1$ и слова $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ сопряжены в группе $B(m, n, 1)$. Аналогичное заключение верно и при сопряженности коммутаторов $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$.

Доказательство. Сначала заметим, что леммы 3.2, 7.2 и 6.6 из [11] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в смысле монографии [2], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(m, n, \alpha)$. По лемме 3 достаточно рассматривать случай $[A^d, Z^{-1} B^d Z] \neq 1$ в группе $B(m, n)$. В силу VI.2.4 и IV.3.12 из [2] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq \beta$. По лемме 3.2 из [11] найдем приведенную форму G коммутатора $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$. Согласно лемме 7.2 из [11], G - элементарный период некоторого ранга $\lambda \geq \gamma + 1$.

Пусть $\delta = 1$ (случай $\delta = -1$ рассматривается совершенно аналогично). Если $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ сопряжены в группе $B(m, n, \alpha)$, то, как следует из определения 3.1 работы [11], в $B(m, n, \alpha)$ сопряжены также $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и G . В силу лемм 3 и 6.6 из [11], $\lambda = 2$, $\gamma = \beta = 1$ и периоды $[a^k, b^{-9} a^k b^9]$ и G сопряжены в ранге 1.

Согласно IV.1.4 из [2], для произвольного вхождения V с основой A_1^d в целое слово G^{30} ранга 2, где A_1 - циклический сдвиг элементарного периода A ранга 1, выбранный согласно определению 3.1 работы [11], можно найти $U \in \mathcal{Y}(1, G^{30})$, что $\text{Согл}(V, U)$. Пусть вхождение V выбрано так, что U - опорное ядро слова G^{30} . В силу IV.1.7 из [2] для некоторого натурального $r \geq d - 44$ имеем $\text{Осн}(U) \equiv A_2 A_1^r A_3$, где A_3 - начало, а A_2 - конец слова A_1 . Применим лемму 2.7 работы [11]. Поскольку $r > 9$ и в $X_1 \in \text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geq q$ и $|t| \geq q$) и в X_1 не могут входить элементарные 10-степени ранга 1, кроме a^t (при $|k| \geq 9$ и $|t| \geq 10$), то получаем, что $A_2 A_1^r A_3 \equiv a^{\pm k \pm n t}$, где $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$. Тем самым, $A_1 \equiv a^{\pm 1}$, и поэтому $A \equiv a^{\pm 1}$. Аналогичным образом показывается, что $B \equiv a^{\pm 1}$.

Предположим, что слово G имеет вид (3.2) из [11] и рассмотрим нормальное порождающее вхождение ранга 2 вида $G^{10} G_1 * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * G_2 G^{19}$ в слово G^{30} , где $G \equiv G_1 a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} G_2$. По лемме 2.7 из [11], можно указать такое порождающее вхождение $R * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * S$ в слово $Y_1 \in \text{Цел}(X_1, 2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$, что $\text{ВзНорм}_1(G^{10} G_1 * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * G_2 G^{19}, R * a^{r_1} S_2 a^d S_2^{-1} a^{r_2} * S)$. И опять, поскольку активными вхождениями ранга 1 в слово $X_1 \in \text{Пер}(2, [a^k, b^{-9} a^k b^9])$ могут быть лишь вхождения с основами a^t (при $|k| \geq q$ и $|t| \geq q$), получаем,

что $k = \pm d$. Случай, когда слово G имеет вид (3.1) работы [11], рассматривается аналогичным образом.

Наконец, случай когда сопряжены слова $[a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1} B^d Z]$ доказывается тем же путем. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. (Ср. с леммами 3.5 и 3.6 из [11]) Пусть $D \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$, где $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ и $\delta = \pm 1$. Для любого t , где $1 \leq t \leq n-1$, определим

$$u_t' \equiv [D, a^t, D]_0 \equiv \begin{cases} a^{-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^{2k} b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}, & t = k \\ D a^{t-k} b^{-9\delta} a^{-k} b^{9\delta} a^k b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}, & t \neq k \end{cases}$$

и предположим, что слово u_t получается от слова u_t' , если в последнем показатели $t-k$ и $2k$ заменить своими абсолютно наименьшими вычетами по модулю n . Тогда верны утверждения:

- (a) $D^q u_t D^q \in \mathcal{M}_1$;
- (b) $\neg \text{Согл}(*D^q * u_t D^q, D^q u_t * D^q *)$; всякое вхождение элементарной q -степени ранга 2 в слово $D^q u_t D^q$ согласовано с $*D^q * u_t D^q$ или $D^q u_t * D^q *$;
- (c) в слово $D^q u_t D^q$ не входят элементарные 9-степени ранга 3;
- (d) вхождение $*D^q * u_t D^q$ ($*D^q * u_t D^q$) продолжаемо нормированно вправо (соответственно влево) не более чем на 2 участка ранга 2.

Доказательство. Пусть $\delta = 1$. Пункт (a) немедленно следует из определения слов u_t и D . Пункты (b) и (c) доказываются так, как соответствующие пункты леммы 3.5 работы [11], если заменить слово G на слово D и принимать, что $\gamma = \beta = \alpha - 2 = 1$, $A_1 \equiv a^{\pm 1}$.

Чтобы обосновать пункт (d), сначала предположим, что $t \neq k$. Тогда $a^{-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q * a^{t-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q \in \text{Норм}(2, D^q u_t' D^q, q+1)$ и, очевидно, любое его продолжение содержится во вхождении

$$*D^{q+1} a^{t-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^q,$$

откуда следует утверждение (d) в случае $t \neq k$.

В случае $t = k$ имеем

$$\begin{aligned} & a^{-k} * b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9 D^{q-1} a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k * a^k b^{-9} a^k b^9 D^q \in \\ & \in \text{Норм}(2, D^q u_t' D^q, q+1) \end{aligned}$$

и любое его продолжение содержится во вхождении

$$*D^q a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k * a^k b^{-9} a^k b^9 D^q.$$

Аналогично рассматривается случай $\delta = -1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. (Ср. с леммой 4.1 из [11]) Пусть

$$F \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^t [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^{2t} \cdots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]^s a^t,$$

где $1 \leq |k|$, $|t| \leq \frac{n-1}{2}$, $\delta = \pm 1$ и $(t, n) = 1$, $q + 2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} - 2$. Тогда F сопряжено в группе Γ_1 некоторому слову H вида

$$(3.1) \quad H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

где $D \equiv [a^k, b^{-9\delta} a^k b^{9\delta}]$ - элементарный период ранга 2, $r = s - 2$ и для указанного H выполнены следующие условия:

(А) если $V \in Я(2, H) \cap Акт(2, H)$ или $V \in МаксНорм(2, H, 9)$, то V согласовано с одним из вхождений слов D^r в слово H и удовлетворяет неравенствам

$$r + 1 \leq l_2(V) < r + 5,$$

(В) все указанные в (3.1) вхождения слова D^r в слово H^t при $t > 0$ попарно не согласованы,

(С) слово $D^r u_i D^r$ при любом $1 \leq i \leq n$ не содержит нормированных вхождений элементарных 9-степеней ранга 3

(D) при $1 \leq i, l \leq n - 1$ и любых s, t из $u_l \stackrel{1}{=} D^s u_i D^t$ следует $i = l$,

(E) $H \in \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Как и в предыдущих леммах, достаточно рассматривать случай $\delta = 1$. По лемме 3, $D \equiv [a^k, b^{-9} a^k b^9]$ - элементарный период ранга 2. Рассмотрим слова $v_i \equiv D a^{it} D \stackrel{0}{=} D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ при $1 \leq i \leq n - 1$, и $v_n \equiv D a^t D \equiv v_1$. Заменяя в словах $D a^{it-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$ показатели $i \cdot t - k$ своими абсолютно наименьшими вычетами t_i по модулю n и произведя всевозможные сокращения в ранге 0, вместо каждого слова v_i получим новое слово u_i . Поскольку $(t, n) = 1$, существует единственное целое число $j \in [1, n - 1]$, для которого $j \cdot t - k \equiv 0 \pmod{n}$. Тогда $u_j \equiv a^{-k} b^{-9} a^{-k} b^9 a^{t_j} b^{-9} a^k b^9$. При $i \neq j$ получим $u_i \equiv D a^{t_i} b^{-9} a^{-k} b^9 a^k b^{-9} a^k b^9$. Окончательно получим, что $1 \leq |t_i| \leq \frac{n-1}{2}$ и $v_i \stackrel{1}{=} u_i$ при $1 \leq i \leq n$ (по определению $t_n = t_1$). Положим

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n.$$

Из определения слова H следует, что $H \stackrel{1}{=} D^{-1} F D$.

Заметим, что в слове $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n$ активными в ранге 1 могут быть лишь вхождения, согласованные с вхождениями с основами $a^{\pm k}$ или a^{t_i}

(если $|k| \geq q$ или $|t_i| \geq q$). Поэтому, в силу неравенств $1 \leq |k|, |t_i| \leq \frac{n-1}{2}$, для любого $t > 0$ имеем $H^t \in \overline{\mathcal{M}}_1$ и $D^r u_i D^r \in \overline{\mathcal{M}}_1$ при $1 \leq i \leq n$. Из леммы 5 и из II.6.6 и II.6.7 работы [2] получаем, что слово H не содержит элементарных $r+5$ -степеней ранга 2, и, следовательно, $H \in \mathcal{M}_2$. Тем самым справедливо утверждение (E).

Докажем (A). Из той же леммы 5 (b), (d) и из II.6.6 и II.6.7 работы [2] следует, что любое активное ядро $V \in \mathcal{Y}(2, H)$ согласовано с одним из вхождений с основой D^r . Согласно определению, слово H можно представить в виде

$$H \equiv D^r D_1 a^{t_1} D_2 D^r D_3 a^{t_2} \dots a^{t_{n-2}} D_{2n-4} D^r D_{2n-3} a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n},$$

где для любого натурального $s \in [1, n]$ слово D_{2s-1} есть начало слова D кончающиеся на b^9 , а D_{2s} - конец слова D , начинающиеся на b^{-9} . Поскольку при $1 \leq s \leq n$ имеем $t_s \not\equiv -k \pmod{n}$, то каждое из вхождений

$$U_s \equiv D^r D_1 a^{t_1} \dots a^{t_s} * D_{2s} D^r D_{2s+1} * a^{t_{s+1}} \dots a^{t_{n-1}} D_{2n-2} D^r D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}$$

устойчиво при повороте произвольного активного вхождения согласованного с некоторым U_t , где $t \neq s$, или с $*D^r D_1 * a^{t_1} \dots a^{t_s} D_{2s} D^r D_{2s+1} a^{t_{s+1}} \dots D_{2n-1} a^{t_n} D_{2n}$. Более того, согласно I.4.13 из [2] при $1 \leq s \leq n-1$ имеем $U_s \in \text{Норм}(2, H, r+1)$. Отсюда следует, что если ядро V слова H согласовано с одним из вхождений U_s или если $V \in \text{МаксНорм}(2, H, 9)$, то оно содержит U_s . В силу леммы 5.(d) получаем $r-2 \leq l_2(U_s) \leq l_2(V) \leq r+2$, что доказывает условие (A).

Докажем (D). При $1 \leq i, l \leq n-1$ предположение $u_l \stackrel{1}{=} D^s u_i D^t$ немедленно приводит к эквивалентности $u_l \stackrel{1}{\sim} D^s u_i D^t$. Так как каждый поворот ранга 1 в словах u_l и $D^s u_i D^t$ не меняет количество ядер ранга 1, то $s = t = 0$. По той же причине, с учетом того, что при $i \neq l$ выполнено $t_i \not\equiv t_l \pmod{n}$ (ибо $(t, n) \neq 1$), эквивалентность $u_l \stackrel{1}{\sim} u_i$ возможно только при $i = l$, что доказывает (D).

Условия (B) и (C) непосредственно следуют из пунктов (b) и (c) леммы 5. Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. (Ср. с леммой 4.4 из [11]) а) Пусть $P * E * Q$ - вхождение в слово

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \dots u_{n-1} D^r u_n,$$

определенное равенством (3.1) леммы 6, $R * E * S$ - нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3 в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$ и $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$, где $H_1 \in \overline{\mathcal{H}}_3$ и имеет вид

$$H_1 \equiv D_1^{r'} u_1' D_1^{r'} u_2' \dots u_{n-1}' D_1^{r'} u_n'$$

согласно равенству (4.1) леммы 4.1 работы [11]. Тогда элементарный период D сопряжен или с элементарным периодом D_1 , или с его обратным.

b) Пусть $P * E * Q$ и $R * E * S$ - вхождения в слова H^t и $Y \stackrel{2}{\sim} H^s$ соответственно, где H - слово, определенное соотношением (3.1) леммы 6. Тогда если вхождение $P * E * Q$ содержит не менее трех идущих подряд слева направо активных ядер ранга 2 и $P * E * Q \in \text{Прав}(2, H^t)$, то

$$\text{Соот}_{H^{\pm 1}}(P * E * Q, f_2(R * E * S; Y, H^s)) \text{ и } \text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S).$$

Доказательство. а) Для слов H и H_1 выполнены условия (А) - (D) леммы 6 и леммы 4.1 из [11] соответственно. В силу этого можем буквально повторить начало доказательства леммы 4.4 из [11] и убедиться, что в группе Γ_1 сопряжены D^ε и D_1 .

Пункт b) доказывается точно так, как вторая часть леммы 4.4 (см. страницу 963 работы [11]). $\square$

Лемма 8. (Ср. с леммой 4.5 (а) из [11]) В слово H , определенное соотношением (3.1) леммы 6, не входят нормированные элементарные 9-степени ранга 3.

Доказывается точно так, как пункт (а) леммы 4.5 из [11], только ссылку на лемму 4.4 надо заменить ссылкой на лемму 7b.

4. АБСОЛЮТНО ПРИВЕДЕННЫЕ СЛОВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Леммы 9-11 касаются только групп, построенных в параграфе 2.

Лемма 9. При $s = 340$ в слово H , определенное соотношением (3.1) леммы 6, не входят нормированные квазиэлементарные 9-степени ранга 3.

Доказательство. Пусть $P * E * Q$ - вхождение в слово

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n,$$

где $r = s - 2 = 338$, $R * E * S$ - нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3 в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$ и $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$. В силу леммы 4.3 из [11], можно считать, что $H_1 \in \overline{\mathcal{H}}_3$ и $H_1 \equiv D_1^{r'} u'_1 D_1^{r'} u'_2 \cdots u'_{n-1} D_1^{r'} u'_n$. Пусть V_i ($1 \leq i \leq 9$) - идущие подряд слева направо соседние опорные ядра ранга 2 вхождения $R * E * S$. В силу условий (А) и (В) леммы 4.1 из [11], ядра $W_i \equiv f_2(V_i; Y, H_1^s)$ согласованы с девятью последовательными D_1 -вхождениями в слово H_1^s , между которыми лежат прослойки u'_{k+i} . Очевидно, $1 < k + 1, k + 2, k + 3 < n$.

Из $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$ в силу IV.3.3 работы [2] следует, что

$$U_i \equiv \varphi(V_i; R * E * S, P * E * Q) \in \mathcal{Y}(2, H) \cap \text{Акт}(2, H).$$

По условию (А) леммы 7 имеем $339 \leq l_2(U_{k+2}) \leq 343$, а по II.5.1 [2], $l_2(U_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Согласно (4.7) из [11], $q+42 < l_2(W_{k+2}) \leq r'-2+29+14+67+4 < \frac{n-1}{2}-43$. Поэтому, в силу IV.2.12 из [2], $\text{Род}(V_{k+2}, W_{k+2})$ и $l_2(W_{k+2}) = l_2(V_{k+2})$. Значит $l_2(V_{k+2}) \leq r'-2+29+14+67+4$. Поскольку при $r' = 200 - 60$ или $r' = 270 - 60$ имеем $r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4 < 339$, то неравенства $339 < l_2(V_{k+2}) \leq r' - 2 + 29 + 14 + 67 + 4$ возможны только при $r' = 340 - 60$.

Отсюда, опираясь на лемму 4.1 из [5] и на определения множеств $\overline{\mathcal{H}}_3$ и Φ_3 , немедленно получаем, что период D_1 сопряжен с приведенной формой одного из коммутаторов $[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \in \text{П}_3$. С другой стороны, по лемме 7 а), в Γ_1 сопряжены $D^\varepsilon \equiv [a^k, b^{-9} a^k b^9]^\varepsilon$ и период $D_1 \in \overline{\Psi}_3$. В силу леммы 4, тогда $E \equiv a^\varepsilon$. Получается противоречие с условием $E \neq a^{\pm 1}$ в $B(m, n)$ (см. (2.1)). Лемма доказана. $\square$

Лемма 10. Для слова H , определенного равенством (3.1) леммы 6, имеет место соотношение $H \in \mathcal{A}_3$.

Доказательство. Согласно лемме 6 (Е), $H \in \mathcal{M}_2$, а по леммам 9 и 7 а) имеем $\text{Норм}(3, H, 9) = \emptyset$, что, согласно I.4.34 из [2], означает $H \in \mathcal{A}_3$. $\square$

Лемма 11. Пусть $\delta = \pm 1$, k и t такие целые числа, что $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ и $(t, n) = 1$. Тогда

$$[a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t \neq 1$$

в группе Γ .

Доказательство. Можно считать, что $1 \leq |k|, |t| \leq \frac{n-1}{2}$. Согласно лемме 7, слово

$$F \equiv [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-\delta 9} a^k b^{\delta 9}]^{340} a^t$$

сопряжено в группе Γ_1 некоторому слову H вида $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \dots u_{n-1} D^r u_n$, а по лемме 10, $H \in \mathcal{A}_3 \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}_i$. Поэтому, в силу IV.2.16 из [2], $H \neq 1$ в Γ . Тем самым $F \neq 1$ в группе Γ . Лемма 11 доказана. $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и φ - такой автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, что для некоторого i элемент $\varphi(a_i)$ не сопряжен в $B(m, n)$ со степенями a_i . Для данного автоморфизма φ построим группу Γ , определенную равенством (2.6) параграфа 2. Обозначим через N_1 нормальное замыкание в абсолютно свободной группе F_m со свободными порождающими $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ всех тех слов R , для которых или $R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta$ или $R \in \bigcup_{\beta \geq \gamma_0 + 1} \Phi_\beta$, где множества $\mathcal{E}_\beta$ и Φ_β определены в параграфе 2. Пусть N - гомоморфный образ подгруппы N_1 при естественном гомоморфизме из абсолютно свободной группы F_m на группу $B(m, n)$. Согласно определению (2.6), имеем

$$\Gamma \cong F_m/N_1 = B(m, n)/N.$$

Покажем, что в роли нормальной подгруппы N , о существовании которой утверждается в формулировке Теоремы 1, можно выбрать указанную нормальную подгруппу $N \triangleleft B(m, n)$.

В силу леммы 1, группа $\Gamma = B(m, n)/N$ - простая группа, поэтому пункт 2 теоремы 1 выполнен. Далее, согласно IV.2.16 работы [2] элементы a_j имеют порядок n в группе Γ , что доказывает пункт 3 теоремы 1. Чтобы доказать пункт 1, предположим обратное, что указанная нормальная подгруппа N является φ -допустимой подгруппой группы $B(m, n)$. Тогда автоморфизм φ индуцирует некий автоморфизм $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$, при котором имеет место равенство $\phi(a_1) \stackrel{\Gamma}{=} v(a_1, a_2, \dots, a_m)$, так как $\varphi(a_1) \stackrel{B(m, n)}{=} v(a_1, a_2, \dots, a_m)$. По выбору элементарного периода E ранга γ_0 в группе $B(m, n, \beta)$ ($\gamma_0 \leq \beta + 1$) выполнено соотношение (2.1). Группа Γ есть гомоморфный образ группы $B(m, n, \beta)$, поэтому $v(a_1, a_2, \dots, a_m) \stackrel{\Gamma}{=} S E^r S^{-1}$. Умножив ϕ на внутренний автоморфизм $i_s : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ($i_s(X) = S^{-1}XS$), получим автоморфизм $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma$, при котором $\psi(a_1) = \psi(a) = E^r$, где $(r, n) = 1$. Значит, для некоторого целого t имеет место $\psi(a^t) = E$, где $(t, n) = 1$ и $1 \leq |t| \leq \frac{n-1}{2}$. Найдем такое $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$, что $k \equiv d \cdot t \pmod{n}$. Пусть $\psi(b^9) = Z$. Тогда $\psi(a^k) = \psi(a^{t \cdot d}) = E^d$ и $\psi([a^k, b^{-9} a^k b^9]) \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1} E^d Z]$. В силу VI.2.4 и IV.3.12 из [2] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq \gamma$.

Согласно леммам 3.2 и 7.2 работы [11] одна из приведенных форм коммутатора $C \cong [E^d, Z^{-1} E^d Z]$ есть некий элементарный период G ранга δ , где

$\gamma + 1 \leq \delta \leq \alpha + 9$. Тогда $G \in \Pi_\delta$. По определению множества $\overline{\Pi}_\delta$, можно найти такую приведенную форму D некоторого коммутатора $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$, что $D \in \overline{\Pi}_\delta$ и период G сопряжен в группе $\Gamma_{\delta-2}$ или слову D , или слову D^{-1} . Тогда $D \stackrel{\delta-2}{=} [E_1^d, w Z'^{-1} E^d Z' w^{-1}] \stackrel{0}{=} w [E^d, Z'^{-1} E^d Z'] w^{-1}$, где $w \in \Theta(E, E_1)$.

Поскольку

$$[E^d, Z E^d Z^{-1}] \stackrel{0}{=} Z [E^d, Z^{-1} E^d Z]^{-1} Z^{-1}$$

и так как коммутатор и его приведенная форма сопряжены, то сопряжены или $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$ и $[E^d, Z^{-1} E^d Z]$, или $[E^d, Z'^{-1} E^d Z']$ и $[E^d, Z E^d Z^{-1}]$. Рассмотрим первый случай. Согласно лемме 2, для некоторых целых чисел u и v или $Z'^{-1} E^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^{-d} Z E^v$, или $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$.

Случай 1. Предположим, что $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$. К обеим частям этого равенства применив автоморфизм ψ^{-1} получим

$$\psi^{-1}(Z') a^{-k} \psi^{-1}(Z'^{-1}) \stackrel{\Gamma}{=} \psi^{-1}(E^u) b^{-9} a^k b^9 \psi^{-1}(E^v).$$

Пусть $\psi^{-1}(E^u) \stackrel{\Gamma}{=} a^x$ и $\psi^{-1}(E^v) \stackrel{\Gamma}{=} a^y$ и $\psi^{-1}(Z') \stackrel{\Gamma}{=} T$. Тогда $T a^{-k} T^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} a^x b^{-9} a^k b^9 a^y$ и $a^y T a^{-k} T^{-1} a^{-y} \stackrel{\Gamma}{=} a^{x+y} b^{-9} a^k b^9$. Очевидно, можно считать, что $|x + y| \leq \frac{n-1}{2}$. Если $x + y \not\equiv 0 \pmod{n}$, то слово $a^{x+y} b^{-9} a^k b^9$ является элементарным периодом ранга 2. Получается, что элементарный период $a^{x+y} b^9 a^k b^{-9}$ ранга 2 сопряжен со степенью элементарного периода a ранга 1, что противоречит лемме 6.6 из [11]. Если же $x + y \equiv 0 \pmod{n}$, то получается, что сопряжены a^{-k} и a^k , что противоречит лемме 1. Значит рассматриваемый $Z' E^{-d} Z'^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^d Z E^v$ случай невозможен.

Случай 2. Предположим, что $Z'^{-1} E^{-d} Z' \stackrel{\Gamma}{=} E^u Z^{-1} E^{-d} Z E^v$. Прямые вычисления показывают, что $[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \stackrel{\Gamma}{=} E^u [E^d, Z^{-1} E^d Z] E^{-u}$. Согласно определению множества Φ_δ имеем

$$D^{340} E_1 D^{340} E_1^2 \dots E_1^{n-3} D^{340} E_1^{n-1} D^{340} E_1 \in \Phi_\delta,$$

и поэтому

$$D^{340} E_1 D^{340} E_1^2 \dots E_1^{n-3} D^{340} E_1^{n-1} D^{340} E_1 \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Следовательно,

$$(w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w) (w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w)^2 \dots \\ \dots (w^{-1} E_1 w)^{n-1} (w^{-1} D w)^{340} (w^{-1} E_1 w) \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Таким образом, $C'^{340} E C'^{340} E^2 \dots C'^{340} E^{n-1} C'^{340} E \stackrel{\Gamma}{=} 1$, где $C' \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z'^{-1} E^d Z']$.

Сопрягая последнее равенство словом E^u и учитывая равенство $C' \stackrel{\Gamma}{=} E^u C E^{-u}$,

окончательно получим

$$C^{340} E C^{340} E^2 \dots E^{n-2} C^{340} E^{n-1} C^{340} E \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

Поэтому, в силу равенств $\psi([a^k, b^{-9} a^k b^9]) \stackrel{\Gamma}{=} [E^d, Z^{-1} E^d Z] \Leftarrow C$ и $\psi(a^t) = E$, получим

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}(C^{340} E C^{340} E^2 \dots E^{n-2} C^{340} E^{n-1} C^{340} E) \stackrel{\Gamma}{=} \\ & \stackrel{\Gamma}{=} [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^t [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9} a^k b^9]^{340} a^t \stackrel{\Gamma}{=} 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство противоречит лемме 11. Аналогичным образом, рассматривая сопряженность коммутаторов

$$[E^d, Z'^{-1} E^d Z'] \quad \text{и} \quad [E^d, Z E^d Z^{-1}] \stackrel{0}{=} Z [E^d, Z^{-1} E^d Z]^{-1} Z^{-1},$$

и заменив в предыдущих рассуждениях слово Z^{-1} на Z , мы получим

$$[a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^t [a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^9 a^k b^{-9}]^{340} a^t \stackrel{\Gamma}{=} 1.$$

И опять, это равенство противоречит лемме 11. Полученные противоречия опровергают существование указанного автоморфизма ψ . Следовательно, нормальная подгруппа N не является φ -допустимой. Теорема 1 доказана. $\square$

Abstract. In the present paper for arbitrary automorphism φ of the free Burnside group $B(m, n)$ and for any odd number $n \geq 1003$ a sufficient condition for existence of non- φ -admissible normal subgroup of $B(m, n)$ was found. In particular, if automorphism φ is normal, then for any basis $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ of the group $B(m, n)$ there is an integer k such that for each i the elements a_i and $\varphi(a_i)^k$ are conjugates.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I, II, III”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **32**:1, **32**:2, **32**:3, (1968), 212-244, 251-524, 709-731.
- [2] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, М., 1975.
- [3] A. Yu. Olshanskii, S.V.Ivanov, Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory. Groups St. Andrews 1989, Vol. 2, 258-308, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [4] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы”, Совр. пробл. матем., **1**, 5 – 28 (2003).
- [5] S. V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents. Internat. J. Algebra Comput., **4** (1-2) 1 – 308 (1994).
- [6] И. Г. Лысенко, Бесконечные бернсайдовы группы четного периода, Изв. РАН. Сер. матем., **60** (3) 3 – 224 (1996).
- [7] Коуровская тетрадь, Нерешенные вопросы теории групп, Новосибирск. 1980.
- [8] E. A. Cherepanov, Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group. Comm. Algebra, **33** (2) 539 – 547 (2005).
- [9] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, Internat. J. Algebra Comput., **16** (5) 839 – 847 (2006).

- [10] A. Yu. Olshanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 179 – 187 (2003).
- [11] С. И. Адян, И. Г. Лысенко, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, Изв. АН СССР. серия Математика, **55** (5) 933 – 990 (1991).
- [12] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$ ”, Матем. заметки, **82** (4), 495 – 500, (2007).
- [13] V. S. Atabekyan, “Adian-Lysenok groups and (U)-property”, , Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, **43** (5), 257 – 264 (2008).

Поступила 1 февраля 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 37-50.

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ДОМИНИРУЮЩИМИ СМЕШАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ГЛАДКОСТИ КАК “ B -ПРОИЗВЕДЕНИЯ”

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *angen@arminco.com*

Аннотация. В статье доказывается, что некоторые известные функциональные пространства (например, пространства $S_{p,q}^s B$ и $S_{p,q}^s F$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости и аппроксимационные пространства $A_{p,q}^s$) характеризуются в терминах пространств типа Соболева-Лиувилля, Никольского-Бесова и, так называемых, “ B -произведений”. Доказываются теоремы о представлениях пространств $S_{p,q}^s B$ посредством B -произведений и метода покрытий. Устанавливается, что пространство $S_{p,q}^s B$ является интерполяционным пространством “вещественного” метода для пары соответствующих пространств типа Никольского-Бесова.

MSC2000 number: 46E35

Ключевые слова: Пространства типа Никольского-Бесова, пространства типа Соболева-Лиувилля, B -произведения, аппроксимационные пространства, интерполяция.

ВВЕДЕНИЕ

Сущность функционального подхода при изучении различных вопросов в теории дифференциальных уравнений с частными производными заключается в том, что дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями реализуется как оператор, действующий в специально подобранном пространстве. В этой связи возникает круг вопросов, связанных с определением и изучением свойств соответствующих пространств. Исходя из поставленных задач, в прошлом веке было введено и изучено множество функциональных пространств. Как оказалось, довольно широкое многообразие пространств, встречающихся в приложениях, укладывается в рамках двух основных семейств пространств $B_{p,q}^s$ Никольского-Бесова и $F_{p,q}^s$ Лизоркина-Трибеля (см [1]).

Однако многие задачи для определенного семейства функциональных пространств не находят своего окончательного решения в терминах этого семейства. Приходится вводить и рассматривать функциональные пространства принципиально иного типа. Так, исследование следов функций из классических пространств Соболева привело к необходимости введения пространств Бесова (см.

[2], [3]). Такое развитие привело к различным обобщениям классических пространств Никольского-Бесова (см. например, [4] - [8]). Как оказывается, обобщенные пространства типа Никольского-Бесова из [7], [8], в качестве частных реализаций, содержат в себе некоторые известные пространства (Теорема 8), которые были рассмотрены ранее с иных точек зрения (см. Введение в [8]).

Для характеристики интерполяционных пространств “вещественного” метода для пар анизотропных пространств Никольского-Бесова с разными анизотропиями (Теорема 4) в [9], [10] были введены и исследованы, так называемые, “ B -произведения”.

В настоящей статье мы доказываем, что в терминах “ B -произведений” характеризуются пространства $S_{p,q}^s B$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости (см. [11] - [14]), а сами “ B -произведения”, вообще говоря, не укладываются в рамки рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова (Следствие 3).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathbb{R}^n$ - n -мерное евклидово пространство,

Z_n^+ - множество мультииндексов, то есть векторов с неотрицательными целыми компонентами,

F - оператор преобразования Фурье,

F^{-1} - оператор обратного преобразования Фурье,

F_1 - одномерный оператор преобразования Фурье,

C^∞ - множество бесконечно дифференцируемых функций,

S - класс Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций,

S' - пространство медленно растущих обобщенных функций,

M_p - пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) ,

$A_0 + A_1$ - сумма Банаховых пространств A_0 и A_1 в смысле теории интерполяции,

$(A_0, A_1)_{\vartheta, q}$ - интерполяционное пространство “вещественного” метода.

Знак “ $\sim$ ” означает двустороннюю оценку.

Там, где это не вызывает недоразумения, значок пространства $\mathbb{R}^2$ будем опускать и полагать $H_p^s(\mu) \equiv H_p^s(\mu; \mathbb{R}^2)$, $B_{p,q}^s(\mu) \equiv B_{p,q}^s(\mu; \mathbb{R}^2)$, $\Phi(\mu) \equiv \Phi(\mu; \mathbb{R}^2)$. Если же опущен значок функции μ (например, $H_p^s(\mathbb{R}^2)$, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(\mathbb{R}^1)$, $\Phi(\mathbb{R}^2)$), то рассматривается классический случай.

Буквой c будем обозначать, вообще говоря, разные константы.

1.1. Обобщенные пространства типа Соболева-Лиувилля.

Скажем, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+ , если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого мультииндекса (α_1, α_2) с компонентами из множества $\{0; 1\}$ и любого вектора $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_1 \cdot \xi_2 \neq 0$ имеет место неравенство

$$(1.1) \quad \left| \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \mu(\xi_1, \xi_2) \right| \leq c \mu(\xi_1, \xi_2), \quad c > 0.$$

Функции из G^+ рассматривались в [4]. Примером функции из G^+ может служить следующая функция:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^2 \xi_i^{2a_i} \right)^{s/2} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^2 \xi_j^{2b_j} \right)^{r/2},$$

где a_i, b_j - целые неотрицательные числа и $-\infty < s, r < \infty$.

Замечание 1. Основным свойством функций из G^+ является тот факт, что если функция $\mu \in G^+$ ограничена, то она принадлежит M_p . Это свойство непосредственно следует из (1.1) и теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [15]).

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим

$$H_p^s(\mu) \equiv H_p^s(\mu; \mathbb{R}^2) = \left\{ f \in S'; \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \|F^{-1}\{\mu^s F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} < \infty \right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu)$ рассматривались в [16], [7], [8]. Если положить

$$(1.2) \quad I_\mu^s \equiv I_{\mu^s} = F^{-1}\{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty,$$

то определение пространств $H_p^s(\mu)$ типа Соболева-Лиувилля можно записать в виде

$$(1.3) \quad H_p^s(\mu) = I_{\mu^s} L_p.$$

1.2. Обобщенные пространства типа Никольского-Бесова.

Рассматриваемые обобщения пространств Никольского-Бесова определяются посредством “вещественной” интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева-Лиувилля.

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим

$$B_{p,q}^0(\mu) \equiv B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^2) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{\frac{1}{2}, q}, \quad B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^0(\mu).$$

Пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ введены и рассмотрены в [8], [17].

Замечание 2. При $\mu(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$ пространства $H_p^s(\mu)$ и $B_{p,q}^s(\mu)$ Определений 1, 2 совпадают с классическими пространствами Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова соответственно. Если в Определении 2 положить $\mu = 1$, то для произвольного q ($1 \leq q \leq \infty$) получим $B_{p,q}^0(1) = L_p$.

Для рассматриваемых пространств имеет место следующий аналог известной формулы “вещественной” интерполяции (см. [8]).

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, $\mu \in G^+$. Тогда

$$B_{p,q}^s(\mu) = (H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu))_{\theta,q}.$$

Там же в [8] доказана следующая теорема о представлении рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Тогда

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \left(\frac{t^{1/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$).

1.3. Пространства, порожденные многоугольниками.

Определение 3. Многоугольник $\mathfrak{X}$ из первой координатной четверти называется полным, если начало координат является вершиной $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ имеет отличные от начала координат вершины на каждой оси координат. Полный многоугольник $\mathfrak{X}$ называется правильным, если внешние нормали некоординатных сторон многоугольника $\mathfrak{X}$ имеют неотрицательные компоненты.

Пусть $\mathfrak{X}$ - правильный многоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(\alpha_1^j, \alpha_2^j) \in Z_2^+$, $j = 1, \dots, N$. Сопоставим многоугольнику $\mathfrak{X}$ следующие функции:

$$(1.4) \quad \mu_0(\xi_1, \xi_2) = \left(\sum_{j=1}^N \xi_1^{2\alpha_1^j} \xi_2^{2\alpha_2^j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu(\xi_1, \xi_2) = (1 + \mu_0^2(\xi_1, \xi_2))^{\frac{1}{2}}, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ясно, что $\nu \in G^+$. Однако если вершины правильного многоугольника $\mathfrak{X}$ не мультииндексы, а векторы из первой координатной четверти $(\alpha_1^j, \alpha_2^j \geq 0, j = 1, \dots, N)$, то функция ν из (1.4) не является бесконечно дифференцируемой. Тогда вместо функций ν будем рассматривать функцию

$$\mu(\xi_1, \xi_2) = \left(1 + \sum_{j=1}^N (1 + \xi_1^2)^{\alpha_1^j} (1 + \xi_2^2)^{\alpha_2^j} \right)^{\frac{1}{2}},$$

которая эквивалентна функции $\nu(\xi_1, \xi_2) : \nu \sim \mu$. Ясно, что $\mu \in G^+$. Как следует из теоремы П. И. Лизоркина из [15], с учетом (1.1), H и B -пространства из 1.1 и 1.2, порожденные эквивалентными функциями, совпадают.

Определение 4. Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим через $\Phi(\mu) \equiv \Phi(\mu, \mathbb{R}^2)$ множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, обладающих следующими свойствами:

- a) $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^2)$, $(F \varphi_k)(\xi_1, \xi_2) \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,
- b) $\text{supp } F \varphi_k \subset \Omega_k \equiv \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2; 2^{k-1} \leq \mu_0(\xi_1, \xi_2) \leq 2^{k+1}\}$, $k = 1, \dots$,
 $\text{supp } F \varphi_0 \subset \Omega_0 \equiv \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2; \mu_0(\xi_1, \xi_2) \leq 2\}$,
- c) $\sum_{k=0}^\infty (F \varphi_k)(\xi_1, \xi_2) = 1$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$,
- d) существует $c > 0$ такая, что $\|F \varphi_k\|_{M_p} \leq c$, $k = 1, \dots$

Пример системы из $\Phi(\mu, \mathbb{R}^n)$ приведен в [7]. При $n = 1$ (тогда вместо функции μ_0 надо рассматривать длину вектора $\mu_0(\xi) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^1$) системы из $\Phi(\mu, \mathbb{R}^1) \equiv \Phi(\mathbb{R}^1)$ совпадают с изотропными системами из [1] - [18].

Теперь B -пространства типа Никольского-Бесова определяются, как обычно.

Определение 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mu, \mathbb{R}^2)$. Положим

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^{(1)} = \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \|F^{-1}\{F \varphi_k F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$).

Пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ введены и рассмотрены в [7].

Замечание 3. Если правильный многоугольник $\mathfrak{X}$ не имеет вершин вне координатных осей, т.е. является прямоугольным треугольником, с катетами на координатных осях, то соответствующие H и B -пространства совпадают с классическими пространствами Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова соответственно. Поскольку B -пространства являются интерполяционными пространствами “вещественного” метода для пар пространств типа Соболева-Лиувилля, то для функций $\mu \in G^+$, порожденных правильными многоугольниками, пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ типа Никольского-Бесова из определений 2 и 5 совпадают (см. [7], [8]).

1.4. “ B -произведения” пространств типа Никольского-Бесова.

Для описания интерполяционных пространств “вещественного” метода для пар пространств типа Никольского-Бесова с разными анизотропиями, в [9], [10] были введены, так называемые, “ B -произведения”.

Определение 6. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s, m < \infty$. Пространство

$$B_{p,q}^s(\mu) \cdot B_{p,q}^m(\nu) = I_{\mu^s \nu^m} [B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)],$$

где

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^{(1)} = \right. \\ &= \left. \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2} \nu}{\nu^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \frac{dt du}{t u} \right)^{1/q} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$) называется “В-произведением” пространств $B_{p,q}^s(\mu)$ и $B_{p,q}^m(\nu)$.

Замечание 4. Ясно, что норма “В-произведения” пространств $B_{p,q}^0(\mu)$ и $B_{p,q}^0(\nu)$ эквивалентна каждому из следующих двух выражений:

$$\left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \nu}{\nu^2 + t} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Важное свойство “В-произведений” описывается в следующей теореме (см. [9]).

Теорема 3. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu \nu) \cdot B_{p,q}^0(\mu + \nu).$$

Там же в [9] доказана следующая теорема об интерполяции пространств типа Никольского-Бесова с разными анизотропиями.

Теорема 4. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\theta,q} = B_{p,q}^{1-\theta}(\mu) \cdot B_{p,q}^\theta(\nu).$$

1.5. Пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости.

Определение 7. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mathbb{R}^1)$.

a) Для $1 \leq q \leq \infty$ положим

$$\begin{aligned} S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{S_{p,q}^s B} = \right. \\ &= \left. \left(\sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty 2^{sq(j+k)} \left\| F^{-1} \{F_1 \varphi_k(\xi_1) F_1 \varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\} \end{aligned}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$)

b) Для $1 < q < \infty$ положим

$$S_{p,q}^s F(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{S_{p,q}^s F} = \right.$$

$$= \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sq(j+k)} |F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_1) F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\}|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} < \infty \Bigg\}.$$

Пространства $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ и $S_{p,q}^s F(\mathbb{R}^2)$ рассмотрены в [13], [14].

Замечание 5. Согласно (1.3) и определениям 2, 6, пространства из 1.1, 1.2 и 1.4 описываются с помощью оператора “поднятия” (1.2). В связи с этим особую важность приобретают пространства с нулевым верхним индексом.

Нетрудно заметить, что сказанное относится и к пространствам $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$. Положим

$$(1.5) \quad \mu_i = (1 + \xi_i^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда, используя свойства системы $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mathbb{R}^1)$, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p,q}^s B}^q &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sq(j+k)} \|F^{-1}\{F_1\varphi_k(\xi_1) F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \sim \\ &\sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|F^{-1}\{\mu_1^s F_1\varphi_k(\xi_1) \mu_2^s F_1\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q = \\ &= \|F^{-1}\{(\mu_1 \mu_2)^s Ff(\xi_1, \xi_2)\}\|_{S_{p,q}^0 B}^q. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(1.6) \quad S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) = I_{(\mu_1 \mu_2)^s} S_{p,q}^0 B(\mathbb{R}^2).$$

1.6. Аппроксимационные пространства.

Рассмотрим множество $(m = 0, 1, 2, \dots)$

$$H_m = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2; \exists r \in \{0, \dots, m\}; |\xi_1| \leq 2^r \pi, |\xi_2| \leq 2^{m-r} \pi\}.$$

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$. Обозначим

$$E_m(f, L_p) = \inf \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$ таким, что $\text{supp } Fg \subset H_m$. Величина $E_m(f, L_p)$ называется *наилучшим гиперболическим приближением* функции $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ порядка m в норме $L_p(\mathbb{R}^2)$.

Определение 8. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$. Положим

$$A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^2); \|f\|_{A_{p,q}^s} = \|f\|_{L_p} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{msq} [E_m(f, L_p)]^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$).

Аппроксимационные пространства $A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ рассмотрены в [14]. Там же доказано следующее интерполяционное утверждение (Утверждение 5).

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 \leq s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$. Тогда

$$A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = (S_{p,2}^{s_0} F(\mathbb{R}^2), S_{p,2}^{s_1} F(\mathbb{R}^2))_{\theta,q}.$$

2. СВЯЗИ МЕЖДУ РАССМАТРИВАЕМЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

В замечании 3 мы отметили, что для функции $\mu \in G^+$, порожденной правильным многоугольником, пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ типа Никольского-Бесова из определений 2 и 5 совпадают. В этом отношении функциям μ_1 и μ_2 из (1.5) отвечают отрезки $[0, 1]$ на координатных осях. Ясно, что отрезок $[0, 1]$ не есть правильный многоугольник (даже не полный) в $\mathbb{R}^2$. Докажем, что несмотря на это, пространства $B_{p,q}^s(\mu_1, \mathbb{R}^2)$ и $B_{p,q}^s(\mu_2, \mathbb{R}^2)$ из 1.2 допускают характеристику в терминах определения 5.

Теорема 6. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^1)$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s(\mu, \mathbb{R}^2) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu_i)}^{(1)} = \right. \\ &= \left. \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$), где пространства $B_{p,q}^s(\mu_i, \mathbb{R}^2)$ понимаются в смысле определения 2.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать, что при $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ имеет место представление

$$\begin{aligned} (2.1) \quad & (H_p^{s_0}(\mu_i, \mathbb{R}^2), H_p^{s_1}(\mu_i, \mathbb{R}^2))_{\theta,q} = \\ & = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu_i)}^{(1)} = \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $f \in (H_p^{s_0}(\mu_i), H_p^{s_1}(\mu_i))_{\theta,q}$. Тогда $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in H_p^{s_0}(\mu_i)$, $f_1 \in H_p^{s_1}(\mu_i)$. На основании теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье из [15], используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, имеем

$$\begin{aligned} & \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f_0\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + \\ & + \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f_1\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = \left\| F^{-1} \left\{ \frac{2^{ks_0} F_1 \varphi_k}{(1 + \mu_i^2)^{s_0/2}} F(2^{-ks_0} I_{\mu_i}^{-s_0} f_0) \right\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| F^{-1} \left\{ \frac{2^{ks_1} F_1 \varphi_k}{(1 + \mu_i^2)^{s_1/2}} F(2^{-ks_1} I_{\mu_i}^{-s_1} f_1) \right\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq c(2^{-ks_0} \|I_{\mu_i}^{-s_0} f_0\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + \\
& + 2^{-ks_1} \|I_{\mu_i}^{-s_1} f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}) = c2^{-ks_0} (\|f_0\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)} + 2^{k(s_0-s_1)} \|f_1\|_{H_p^{s_1}(\mu_i)}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq c2^{-ks_0} K(2^{k(s_0-s_1)}, f; H_p^{s_0}(\mu_i), H_p^{s_1}(\mu_i)),$$

где $K(t, f)$ есть K -функционал Пеетре (см. [18], [19]). Используя дискретный K -метод (теорема 1.7а из [18]), получаем

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mu_i)}^{(1)} \leq c_1 \|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu_i), H_p^{s_1}(\mu_i))_{\theta,q}}.$$

Для доказательства обратной оценки воспользуемся дискретным J -методом (теорема 1.7б из [18]). Пусть $f \in B_{p,q}^s(\mu_i)$. Используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, получаем

$$\begin{aligned}
& 2^{k(s-s_0)} J(2^{k(s_0-s_1)}, F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}; H_p^{s_0}(\mu_i), H_p^{s_1}(\mu_i)) = 2^{k(s-s_0)} \times \\
& \times \max \left\{ \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)}, 2^{k(s_0-s_1)} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{H_p^{s_1}(\mu_i)} \right\} \leq \\
& \leq c2^{k(s-s_0)} \max \left\{ 2^{ks_0} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, 2^{ks_0} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \right\} = \\
& = c2^{ks} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$\|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu_i), H_p^{s_1}(\mu_i))_{\theta,q}} \leq c_2 \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu_i)}^{(1)}$$

будет доказано, если убедиться, что $f = \sum_{k=0}^\infty F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}$ в $H_p^{s_0}(\mu_i) + H_p^{s_1}(\mu_i)$.

Пусть $s_0 < s_1$. Тогда $H_p^{s_0}(\mu_i) + H_p^{s_1}(\mu_i) = H_p^{s_0}(\mu_i)$ (см. [16], [20]). Используя свойства системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=0}^N F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\} - f \right\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)} \leq \sum_{k=N+1}^\infty \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{H_p^{s_0}(\mu_i)} \leq \\
& \leq c \sum_{k=N+1}^\infty 2^{ks_0} \|F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu_i)} \left(\sum_{k=N+1}^\infty 2^{kq'(s_0-s)} \right)^{1/q'},
\end{aligned}$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Теперь ясно, что $f = \sum_{k=0}^\infty F^{-1}\{F_1 \varphi_k(\xi_i) F f\}$ в $H_p^{s_0}(\mu_i) + H_p^{s_1}(\mu_i)$.

Таким образом, представление (2.1) доказано. Теперь утверждение теоремы 6 следует из теоремы 1. Теорема доказана. $\square$

Если s - натуральное число, то пространство $S_{p,2}^s F(\mathbb{R}^2)$ из 1.5 есть пространство типа Соболева, с доминирующей смешанной производной (см. [13], [14]). В наших обозначениях это означает, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть s - натуральное число, $1 < p < \infty$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда

$$S_{p,2}^s F(\mathbb{R}^2) = H_p^s(\mu_1 \mu_2).$$

Убедимся, что аппроксимационные пространства $A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ из 1.6 совпадают с соответствующими пространствами типа Никольского-Бесова из 1.2.

Теорема 8. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда

$$A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = B_{p,q}^s(\mu_1 \mu_2).$$

Доказательство следует из теорем 5, 7 и 1. Имеем

$$A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = (S_{p,2}^{s_0} F(\mathbb{R}^2), S_{p,2}^{s_1} F(\mathbb{R}^2))_{\theta,q} = (H_p^{s_0}(\mu_1 \mu_2), H_p^{s_1}(\mu_1 \mu_2))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu_1 \mu_2).$$

□

Замечание 6. В терминах правильных многогранников из 1.3, функции

$$\mu_1 \mu_2 = (1 + \xi_1^2)^{1/2} \cdot (1 + \xi_2^2)^{1/2} = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2)^{1/2}$$

соответствует квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. С этой точки зрения, согласно замечанию 3, классическим изотропным пространствам с функцией

$$(2.2) \quad \mu_1 + \mu_2 = (1 + \xi_1^2)^{1/2} + (1 + \xi_2^2)^{1/2} \sim (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2},$$

соответствует прямоугольный треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

С помощью теоремы 8 можно убедиться, что пространства $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ из 1.5, вообще говоря, не характеризуются в терминах пространств типа Никольского-Бесова. Из (1.6) ясно, что наиболее существенно сравнение пространств $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ и $B_{p,q}^s(\mu_1 \mu_2)$, где функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Точнее имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $s_0, s_1 > 0$ и функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда равенство

$$S_{p_0,q_0}^{s_0} B(\mathbb{R}^2) = B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu_1 \mu_2)$$

имеет место в том и только в том случае, когда $s_0 = s_1$, $p_0 = p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 2$.

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 8 и следствия 3 из [14].

□

Оказывается, что характеристика пространств $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости возможна в терминах “ B -произведений” пространств типа Никольского-Бесова из 1.4. Следующий параграф посвящен рассмотрению этого вопроса.

3. ПРОСТРАНСТВА $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ КАК “ B -ПРОИЗВЕДЕНИЯ”

Теорема 10. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда

$$S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) = B_{p,q}^s(\mu_1) \cdot B_{p,q}^s(\mu_2),$$

то есть

$$S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{S_{p,q}^s B}^{(1)} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu_1^{1+s}}{\mu_1^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2} \mu_2^{1+s}}{\mu_2^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \frac{du}{u} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$).

Доказательство. проведем в два шага.

Шаг 1. Пусть сначала $s = 0$. На основании определения 7а и теоремы 6 (см. также замечание 4) имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p,q}^0 B} &= \left(\sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \|F^{-1} \{F\varphi_k(\xi_1) F\varphi_j(\xi_2) Ff(\xi_1, \xi_2)\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} \sim \\ &\sim \left(\sum_{j=0}^\infty \|F^{-1} \{F_1 \varphi_j(\xi_2) Ff\}\|_{B_{p,q}^0(\mu_1)}^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Тогда, из теоремы 2 и определения 6, еще раз применяя теорему 6, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p,q}^0 B} &\sim \left(\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu_1}{\mu_1^2 + t} F_1 \varphi_j(\xi_2) Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim \\ &\sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu_1}{\mu_1^2 + t} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu_2)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim \\ &\sim \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu_1}{\mu_1^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2} \mu_2}{\mu_2^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \frac{du}{u} \right)^{1/q} = \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu_1) \cdot B_{p,q}^0(\mu_2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана при $s = 0$.

Шаг 2. Пусть $-\infty < s < \infty$. На основании (1.6) и определения 2, из Шага 1 имеем

$$\begin{aligned} S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) &= I_{(\mu_1 \mu_2)^s} S_{p,q}^0 B(\mathbb{R}^2) = I_{(\mu_1 \mu_2)^s} [B_{p,q}^0(\mu_1) \cdot B_{p,q}^0(\mu_2)] = \\ &= [I_{(\mu_1)^s} B_{p,q}^0(\mu_1)] \cdot [I_{(\mu_2)^s} B_{p,q}^0(\mu_2)] = B_{p,q}^s(\mu_1) \cdot B_{p,q}^s(\mu_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

На основании части б) теоремы 3 (см. (1.6)) приходим к следующему следствию.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда имеем

$$\begin{aligned} a) S_{p,q}^0 B(\mathbb{R}^2) &= B_{p,q}^0(\mu_1 \mu_2) \cdot B_{p,q}^0(\mu_1 + \mu_2), \\ b) S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) &= B_{p,q}^s(\mu_1 \mu_2) \cdot B_{p,q}^0(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (2.2)

$$(3.1) \quad H_p^s(\mu_1 + \mu_2) = H_p^s(\mathbb{R}^2), \quad B_{p,q}^s(\mu_1 + \mu_2) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2),$$

где $H_p^s(\mathbb{R}^2)$ и $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ – классические изотропные пространства Соболева-Лиувилля и Никольского-Бесова (см. [1], [18], [19]).

Из теоремы 8 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$. Тогда

$$S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) = B_{p,q}^0(\mathbb{R}^2) \cdot A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2).$$

“ B -произведение” $B_{p,q}^0(\mathbb{R}^2) \cdot A_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ понимается в смысле замечания 4.

Следующее утверждение показывает, что “ B -произведения”, вообще говоря, не укладываются в рамки рассматриваемых пространств типа Никольского-Бесова.

Следствие 3. Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $s_0, s_1 > 0$ и функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда равенство

$$B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu_1) \cdot B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu_2) = B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu_1 \mu_2)$$

имеет место в том и только в том случае, когда $s_0 = s_1$, $p_0 = p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 2$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 9 и 10. $\square$

Используя представления пространств $B_{p,q}^0(\mu_1 \mu_2)$ и $B_{p,q}^0(\mu_1 + \mu_2)$ методом покрытий (см. 1.3) приходим к следующему представлению для пространств $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 11. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5), $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mu_1 + \mu_2, \mathbb{R}^2) \equiv \Phi(\mathbb{R}^2)$, $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mu_1 \mu_2, \mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{S_{p,q}^s B}^{(2)} = \right. \\ &= \left. \left(\sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty 2^{jsq} \|F^{-1}\{F\varphi_k F\psi_j Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s = 0$. Из определения 5 и теоремы 1, учитывая (3.1), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|F^{-1}\{F\varphi_k F\psi_j Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q &\sim \sum_{j=0}^{\infty} \|F^{-1}\{F\psi_j Ff\}\|_{B_{p,q}^0(\mathbb{R}^2)}^q \sim \\ &\sim \sum_{j=0}^{\infty} \|F^{-1}\{F\psi_j Ff\}\|_{(H_p^1(\mathbb{R}^2), H_p^{-1}(\mathbb{R}^2))_{1/2,q}}^q. \end{aligned}$$

Используя теоремы 1, 2, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|F^{-1}\{F\varphi_k F\psi_j Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \sim \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)^2 + t} F\psi_j Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно ряда под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|F^{-1}\{F\varphi_k F\psi_j Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \sim \\ &\sim \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)^2 + t} \cdot \frac{u^{1/2}\mu_1\mu_2}{(\mu_1\mu_2)^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}^q \frac{dt}{t} \frac{du}{u} = \\ &= \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu_1 + \mu_2) \cdot B_{p,q}^0(\mu_1\mu_2)}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu_1) \cdot B_{p,q}^0(\mu_2)}^q \sim \|f\|_{S_{p,q}^0 B(\mathbb{R}^2)}^q. \end{aligned}$$

Последние два шага цепочки оценок написаны на основании теорем 3 и 10. Таким образом, утверждение теоремы доказано при $s = 0$.

Общий случай, как и в Шаге 2 доказательства теоремы 10, получается при помощи оператора “поднятия” $I_{(\mu_1\mu_2)^s}$. Теорема доказана. $\square$

Следующее утверждение дает характеризацию пространства $S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2)$ посредством “вещественной” интерполяции пар соответствующих пространств типа Бесова.

Теорема 12. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \neq 0$, $0 < \theta < 1$, функции μ_1, μ_2 определены в (1.5). Тогда

$$(3.2) \quad S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2) = \left(B_{p,q}^{\frac{1-s}{\theta}} B(\mu_1), B_{p,q}^{\frac{s}{\theta}} B(\mu_2) \right)_{\theta,q}.$$

Доказательство. Из теорем 4 и 10 имеем

$$\left(B_{p,q}^{\frac{1-s}{\theta}} B(\mu_1), B_{p,q}^{\frac{s}{\theta}} B(\mu_2) \right)_{\theta,q} = B_{p,q}^s B(\mu_1) \cdot B_{p,q}^s B(\mu_2) = S_{p,q}^s B(\mathbb{R}^2).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 12 имеет многочисленные применения. В частности, с помощью формулы (3.2) можно доказать теоремы вложения и интерполяционные утверждения для пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости.

Abstract. It is proved, that certain known function spaces (such as $S_{p,q}^s B$, $S_{p,q}^s F$ spaces of functions of mixed smoothness and approximation spaces $A_{p,q}^s$) can be characterized in terms of spaces of Sobolev-Liouville and Nikolskii-Besov types and so called “ B -products”. The representation theorems of $S_{p,q}^s B$ spaces are proved using B -products and decomposition method. It is proved that space $S_{p,q}^s B$ is a “real” method interpolation space for the pair of corresponding spaces of Nikolskii-Besov type.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва (1986).
- [2] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств”, ДАН СССР, **126**, 1163 – 1165 (1956).
- [3] О. В. Бесов, “Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения”, Труды МИАН СССР, **60**, 42 – 81 (1961).
- [4] Н. Triebel, “General function spaces III (spaces $B_{p,q}^{g(x)}$ and $F_{p,q}^{g(x)}$, $1 < p < \infty$: basic properties)”, Analysis Math., **3**, 221 – 249 (1977).
- [5] М. Л. Гольдман, “Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова”, Труды МИАН СССР, **156**, 47 – 81 (1980).
- [6] В. Stockert, Н. Triebel, “Decomposition methods for function spaces of $B_{p,q}^s$ type and $F_{p,q}^s$ type”, Math. Nach., **89**, 247 – 267 (1979).
- [7] А. Г. Багдасарян, “Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств”, Изв. АН Арм. ССР, **23** (4), 353 – 365 (1988).
- [8] А. Г. Багдасарян, “Интерполяции и вложения обобщенных пространств типа Бесова”, Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, **38** (6), 49 – 62 (2003).
- [9] А. Г. Багдасарян, “О -произведениях пространств типа Бесова”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **41** (1), 15 – 26 (2006).
- [10] А. Г. Багдасарян, “ B -произведения пространств типа Бесова и некоторые их применения”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **62** (6), 55 – 71 (2007).
- [11] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной”, Труды МИАН, **77**, 143 – 167 (1965).
- [12] Т. И. Аманов, Пространства Дифференцируемых Функций с Доминирующей Смешанной Производной, Алма-Ата, Наука (1976).
- [13] Н.-J. Schmeisser, Н. Triebel, Topic in Fourier Analysis and Function Spaces, Chichester, Wiley (1987).
- [14] Н.-J. Schmeisser, W. Sickel, “Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses”, Jenaer Schriften zur Math. und Inform. (2002).
- [15] П. И. Лизоркин, “ (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье”, ДАН СССР, **152**, 808 – 811 (1963).
- [16] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, “Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения”, УМН, **20** (1), 3 – 74 (1965).
- [17] А. Г. Багдасарян, “Интерполяции и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **36** (5), 14 – 22 (2001).
- [18] Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства, Мир, Москва (1980).
- [19] Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва (1980).
- [20] А. G. Baghdasaryan, “On the intermediate spaces and quasi-linearizability of a pair of spaces of Sobolev-Liouville type”, Analysis Mathematica, **24**, 3 – 14 (1998).

Поступила 14 января 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 2, 2010, стр. 51-66.

ВЫРОЖДЕНИЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Г. А. КАРАПЕТЯН, О. Г. ТАНАНЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: HTananyan@yahoo.com

Аннотация. В работе описывается алгоритм асимптотического разложения по ε ($\varepsilon > 0$) решения u_ε задачи Дирихле для линейного дифференциального полуэллиптического уравнения $L_\varepsilon u_\varepsilon = h$ с малым параметром ε при старших производных в прямоугольном параллелепипеде, исходя из решения вырожденной (при $\varepsilon \rightarrow 0$) задачи Дирихле для полуэллиптического уравнения более низкого порядка $L_0 u = h$. Доказаны теоремы равномерной разрешимости и регулярного вырождения.

MSC2000 number: 35H10, 35B25

Ключевые слова: полуэллиптический оператор, малый параметр, функция типа погранслоя, регулярное вырождение, равномерная разрешимость, асимптотическое разложение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен метод построения асимптотического разложения решений линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных в областях с гладкой границей. В работах [2 – 5] исследована аналогичная задача для эллиптических уравнений в областях, имеющих угловые точки. В данной работе, опираясь на метод в [1], приводится алгоритм построения асимптотического разложения решений для одного класса полуэллиптических уравнений в прямоугольном параллелепипеде, с малым параметром при старших производных.

Ниже использованы следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, i – мнимая единица. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ положим

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad x^{(j)} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\alpha : \mu) = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu_n}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$.

Через $\mathbb{C}(G)$ обозначим пространство равномерно непрерывных в области G функций f с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{C}(G)} \equiv \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Для вектора $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и области $G \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$W_2^l(G) := \left\{ f \in L_2(G) : \|f\|_{W_2^l(G)} := \|f\|_{L_2(G)} + \sum_{j=1}^n \|D_j^{l_j} f\|_{L_2(G)} < \infty \right\}.$$

Определение 1. (см. [1, стр. 7]). Пусть $v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ — s раз дифференцируемая функция ($s \in \mathbb{N}$) в области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Функция v_ε типа погранслоя порядка k ($k < s$), если:

- (1) функция v_ε и ее частные производные, до порядка s включительно, равномерно стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ на любом замкнутом подмножестве Q , не содержащем точек ∂Q (граница области Q);
- (2) частные производные k -го порядка функции v_ε ограничены в Q при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (3) частные производные j -го порядка функции v_ε (при $j < k$) равномерно (при $\varepsilon \rightarrow 0$) стремятся к нулю на $\overline{Q}$.

Пример 1. На положительной полуоси типичными примерами функций типа погранслоя порядка k являются функции:

$$\varepsilon^k e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon^k P\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon}},$$

где $\lambda > 0$, а P — многочлен.

Определение 2. (см. [6, стр. 142]). Линейный дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{(\alpha; \mu) \leq 1} p_\alpha D^\alpha \quad (\mu \in \mathbb{N}^n)$$

называется полуэллиптическим, если

$$P_0(\xi) \equiv \sum_{(\alpha; \mu) \leq 1} p_\alpha (i\xi)^\alpha \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \neq 0.$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Пусть

$$L_0 = \sum_{j=1}^n a_{0,j} \frac{\partial^{2k_j}}{\partial x_j^{2k_j}}, \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n,$$

и

$$(2.1) \quad L_\varepsilon = L_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s}}{\partial x_j^{2k_j+s}}, \quad l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$$

– линейные дифференциальные операторы с вещественными коэффициентами ($\varepsilon > 0$ – малый параметр) для которых:

$$(2.2) \quad (-1)^{k_j+s} a_{2s,j} \geq 0, \quad a_{0,j} \neq 0, \quad a_{2l_j,j} \neq 0, \quad s = 1, \dots, l_j; \quad j = 1, \dots, n$$

(очевидно, что в силу условия (2.2) операторы L_0 и L_ε полуэллиптические), а E , E_1 и E_2 – некоторые банаховые пространства функций определенные на $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, n\}$.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

Задача A_0 : Найти решение $u \in E_1$ уравнения

$$(2.3) \quad L_0 u = h \quad (h \in E),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$(2.4) \quad \left. \frac{\partial^s u}{\partial x_r^s} \right|_{x_r=p} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, k_r - 1; \quad r = 1, \dots, n; \quad p = 0, 1.$$

Задача A_ε : Найти решение $u_\varepsilon \in E_2$ уравнения

$$(2.5) \quad L_\varepsilon u_\varepsilon = h \quad (h \in E),$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.4) и

$$(2.6) \quad \left. \frac{\partial^{k_r+s} u_\varepsilon}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1; \quad r = 1, \dots, n; \quad p = 0, 1.$$

2.2. Пусть $1 \leq r \leq n$, $p \in \{0, 1\}$ и $t_{r,p} = \frac{p+(-1)^p x_r}{\varepsilon}$. Так как

$$\frac{\partial^s}{\partial x_r^s} = (-1)^{ps} \varepsilon^{-s} \frac{\partial^s}{\partial t_{r,p}^s} \quad (s \geq 1),$$

то оператор L_ε можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon^{2k_r} L_\varepsilon u = \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} a_{s,r} \frac{\partial^{2k_r+s} u}{\partial t_{r,p}^{2k_r+s}} + \sum_{j=1, j \neq r}^n \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^{2k_r+s} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} u}{\partial x_j^{2k_j+s}}.$$

Отсюда, соединяя члены с одинаковыми степенями по ε , получаем:

$$(2.7) \quad \varepsilon^{2k_r} L_\varepsilon u = M_{r,p} u + \sum_{s=2k_r}^{N_r} \varepsilon^s R_{r,s} u \quad \left(N_r = 2k_r + 2 \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq r}} l_i \right),$$

где

$$(2.8) \quad M_{r,p} u = \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} a_{s,r} \frac{\partial^{2k_r+s} u}{\partial t_{r,p}^{2k_r+s}},$$

$$(2.9) \quad R_{r,s} u = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r \\ s-2k_r \leq 2l_j}}^n a_{s-2k_r,j} \frac{\partial^{2k_j+s-2k_r} u}{\partial x_j^{2k_j+s-2k_r}}, & \text{при } 2k_r \leq s \leq N_r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем следующее уравнение (которое является характеристическим уравнением оператора $M_{r,p}$):

$$(2.10) \quad \lambda^{2k_r} Q_{r,p}(\lambda) := \lambda^{2k_r} \sum_{s=0}^{2l_r} (-1)^{ps} a_{s,r} \lambda^s = 0.$$

Следуя терминологии работы [1], введем следующие определения:

Определение 3. Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 назовем регулярным, если при $r = 1, \dots, n$ каждый из характеристических многочленов $Q_{r,0}(\lambda)$ и $Q_{r,1}(\lambda)$ имеет ровно l_r попарно различных корней с отрицательными вещественными частями.

Определение 4. Задача A_0 называется разрешимой, если для любого $h \in E$ уравнение (2.1) при граничных условиях (2.4) имеет решение $w_0 \in E_1$, при этом существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|w_0\|_{E_1} \leq C \|h\|_E, \quad h \in E.$$

Определение 5. Задача A_ε называется равномерно разрешимой, если существует число $\varepsilon_0 > 0$, при котором

а) задача A_ε разрешима при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, т.е. для любого $h \in E$ уравнение (2.5) при граничных условиях (2.4) и (2.6) имеет решение $u_\varepsilon \in E_2$;

б) существуют число $C_1 > 0$, и функциональные пространства с нормами $\|\cdot\|_B$ и $\|\cdot\|_{B_\varepsilon}$ такие, что для всех $u_\varepsilon \in E_2$, удовлетворяющих граничным условиям (2.4) и (2.6), выполняется неравенство

$$\|u_\varepsilon\|_{B_\varepsilon} \leq C_1 \|L_\varepsilon u_\varepsilon\|_B, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Для нижеприводимого алгоритма (для построения асимптотического разложения решения задачи A_ε необходимо выполнение следующих условий (см. [1]):

- I. Задача A_0 разрешима;
- II. Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярное;
- III. Задача A_ε равномерно разрешима;
- IV. Решение задачи A_0 при достаточно гладкой правой части достаточно гладко.

В следующих двух замечаниях приведены достаточные условия для выполнения условий I и IV, а достаточные условия для выполнения условий II и III приведены в следующем параграфе.

В гильбертовом пространстве H скалярное произведение обозначим через $(\cdot, \cdot)_H$.

Замечание 1. (см. [7] и [8]). Пусть $E \equiv L_2(\Omega)$, $E_1 \equiv W_2^k(\Omega)$ и $E_2 \equiv W_2^{k+l}(\Omega)$. Тогда

1) если существует число $\gamma_1 > 0$ такое, что при всех $w \in W_2^k(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4), $(L_0 w, w)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_1 (w, w)_{W_2^k(\Omega)}$, то задача A_0 разрешима,

2) если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\gamma_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $u \in W_2^{k+l}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), $(L_\varepsilon u, u)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_2(u, u)_{W_2^{k+l}(\Omega)}$, то задача A_ε разрешима.

Замечание 2. Если $h \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, то для любого $\mu \in \mathbb{N}$ решение w задачи A_0 принадлежит классу $W_2^\mu(\Omega)$ (см. [9]), следовательно, в силу теоремы вложения (см. [10, стр. 129]), $D^\alpha w \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

3. УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ И РАВНОМЕРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Оператор L_ε представим в следующем виде:

$$(3.1) \quad L_\varepsilon = L_0 + \Lambda_\varepsilon + M_\varepsilon,$$

где

$$\Lambda_\varepsilon \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{l_j} \varepsilon^{2s} a_{2s,j} \frac{\partial^{2(k_j+s)}}{\partial x_j^{2(k_j+s)}}, \quad M_\varepsilon \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{l_j-1} \varepsilon^{2s+1} a_{2s+1,j} \frac{\partial^{2(k_j+s)+1}}{\partial x_j^{2(k_j+s)+1}}.$$

Для краткости записи положим $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$.

Теорема 1. Пусть: а) существует постоянная $\gamma_1 > 0$ такая, что для всех $w \in W_2^k(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4), имеет место оценка

$$(3.2) \quad (L_0 w, w)_{L_2(\Omega)} \geq \gamma_1 \left(\sum_{j=1}^n \|D_j^{k_j} w\|^2 + \|w\|^2 \right),$$

б) существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ такие, что

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Lambda_\varepsilon(\mathbf{i}\xi) &:= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{l_j} \varepsilon^{2s} a_{2s,j}(\mathbf{i}\xi)^{2(k_j+s)} \\ &\geq \gamma_2 \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} |\xi_j|^{2(k_j+l_j)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \end{aligned}$$

Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для всех $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), справедлива оценка:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} \|D_j^{k_j+l_j} u\|^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j^{k_j} u\|^2 + \|u\|^2 \\ \leq C_1 (L_\varepsilon u, u) \leq C_2 \|L_\varepsilon u\|^2, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}$ – преобразование Фурье функции $u \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В силу равенства Парсеваля, из оценки (3.3), имеем:

$$\begin{aligned} (\Lambda_\varepsilon u, u) &= (\Lambda_\varepsilon(\mathbf{i}\xi) \tilde{u}(\xi), \tilde{u}(\xi)) \geq \gamma_2 \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} \left(|\xi_j|^{2(k_j+l_j)} \tilde{u}(\xi), \tilde{u}(\xi) \right) = \\ &= \gamma_2 \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} \|D_j^{k_j+l_j} u\|^2, \quad u \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что для всех $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.6), справедлива оценка

$$(\Lambda_\varepsilon u, u) \geq \gamma_2 \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} \|D_j^{k_j+l_j} u\|^2, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Очевидно, что если функция $u \in W_2^{2k+2l}(\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.4) и (2.6), то $(M_\varepsilon u, u) = 0$.

Используя представление (3.1), в силу вышесказанного и оценки (3.2), получаем первое неравенство в (3.4). Так как для любого числа $\omega > 0$

$$(3.5) \quad (L_\varepsilon u, u) \leq \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|u\|^2 + \frac{1}{\omega^2} \|L_\varepsilon u\|^2 \right), \quad u \in W_2^{2k+2l}(\Omega),$$

то, используя уже доказанную часть оценки (3.4), получаем второе неравенство в (3.4). Теорема доказана. $\square$

Через

$$L_\varepsilon(\mathbf{i}\xi) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j}(\mathbf{i}\xi)^{2k_j+s}$$

обозначим полный символ оператора L_ε .

Теорема 2. Пусть существуют положительные числа $C_1, \dots, C_n$ такие, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$

$$(3.6) \quad \operatorname{Re} L_\varepsilon(0, \dots, 0, \mathbf{i}\xi_j, 0, \dots, 0) \geq C_j \sum_{s=0}^{l_j} \varepsilon^{2s} |\xi_j|^{2(k_j+s)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярно.

Доказательство. Пусть $1 \leq j \leq n$. Так как

$$L_\varepsilon(0, \dots, 0, \mathbf{i}\xi_j, 0, \dots, 0) = \sum_{s=0}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j}(\mathbf{i}\xi_j)^{2k_j+s} = (\mathbf{i}\xi_j)^{2k_j} Q_{j,0}(\mathbf{i}\varepsilon\xi_j),$$

где $Q_{j,0}$ определено в (2.10), то из условия (3.6), в силу леммы 4 работы [1], непосредственно следует, что многочлен $Q_{j,0}$ имеет ровно l_j корней с отрицательными вещественными частями. Аналогичное утверждение верно и для многочлена $Q_{j,1}$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Если $h \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, то условия I – IV выполняются.

Доказательство. Из полуэллиптичности операторов L_0 и L_ε (точнее из условия (2.2)) непосредственно следуют оценки (3.2), (3.3) и (3.6). Отсюда в силу теорем 1 и 2 следует выполнение условий II и III, а из замечаний 1 и 2 следуют условия I и IV. $\square$

4. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ A_ε

Решение уравнения (2.5) при условиях (2.4) и (2.6) можно представить как сумму частного решения $\overline{w}_\varepsilon$ уравнения

$$(4.1) \quad L_\varepsilon \overline{w}_\varepsilon = h$$

и такого решения $\overline{v}_\varepsilon$ однородного уравнения

$$(4.2) \quad L_\varepsilon \overline{v}_\varepsilon = 0,$$

чтобы $\overline{w}_\varepsilon + \overline{v}_\varepsilon$ удовлетворяла граничным условиям (2.4) и (2.6).

Суть нижеприводимого алгоритма состоит в следующем: решение уравнения (4.1) ищется в виде:

$$\bar{w}_\varepsilon \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s w_s,$$

где w_s – решение задачи типа A_0 , а решение уравнения (4.2) ищется в виде:

$$\bar{v}_\varepsilon \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s (v_s + \varepsilon \alpha_s),$$

где v_s – функция типа погранслоя, при этом функция $w_s + v_s$ удовлетворяет граничным условиям (2.6), $\varepsilon \alpha_s$ – такой многочлен, что $w_s + v_s + \varepsilon \alpha_s$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε .

Исходя из сказанного, решение u_ε задачи A_ε будем искать в виде:

$$(4.3) \quad u_\varepsilon = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \sum_{i=0}^{K_r} \varepsilon^i (v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}) + z_m,$$

где z_m – остаточный член, а $K_r \geq m$, $1 \leq r \leq n$.

Пусть $\eta \in (0, 1/3]$, а $\phi(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция одного переменного, которая равна 1 при $z \leq \frac{\eta}{2}$ и равна 0 при $z \geq \eta$.

Обозначим $v_{i,r,p}(x) = \phi(p + (-1)^p x_r) \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{i,r,p}(x)$, $p \in \{0, 1\}$, $i > 0$, $1 \leq r \leq n$,

$$\alpha_i \equiv \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \phi(p + (-1)^p x_r) \alpha_{i,r,p}, \quad v_i \equiv \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 v_{i,r,p}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Формальная подстановка (4.3) в (2.1), с учетом представления (2.7) оператора L_ε , дает:

$$(4.4) \quad h = L_\varepsilon u_\varepsilon = \left\{ \left(L_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{2l_j} \varepsilon^s a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} \right) \left[\left(w_0 + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i w_i \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\max_{1 \leq r \leq n} K_r} \right] \right\} \\ + \left\{ \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \left[\varepsilon^{-k_r} \left(M_{r,p} + \sum_{s=1}^{N_r} \varepsilon^s R_{r,s} \right) \left(\sum_{i=0}^{K_r} \varepsilon^i \phi(p + (-1)^p x_r) \bar{v}_{i,r,p} \right) \right] \right\} + L_\varepsilon z_m.$$

Рассматривая сумму в первой фигурной скобке (4.4), как многочлен от ε , и приравнявая его коэффициент при ε^i ($i > 0$) к нулю, получаем:

$$L_0 w_0 = h,$$

а для $i = 1, \dots, m$, имеем

$$(4.5) \quad L_0 w_i = h_i := - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{\min\{i, 2l_j\}} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} w_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} - \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{\min\{i, 2l_j\}-1} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} \alpha_{i-s-1}}{\partial x_j^{2k_j+s}}.$$

Из второй фигурной скобки (учитывая определение функции ϕ) в окрестности границы $\Gamma_{r,p} := \{x : x_r = 0, 0 \leq x_j \leq 1, 1 \leq j \leq n, j \neq r\}$ имеем:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} M_{r,p} \bar{v}_{0,r,p} &= 0, \quad r = 1, \dots, n; \quad p = 0, 1, \\ M_{r,p} \bar{v}_{i,r,p} &= - \sum_{s=0}^i R_{r,s+k_r} \bar{v}_{i-s,r,p}, \quad r = 1, \dots, n; \quad p = 0, 1; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Корни с отрицательными вещественными частями многочлена $Q_{r,p}$ обозначим через $-\lambda_{r,p,1}, \dots, -\lambda_{r,p,l_r}$, где $r = 1, \dots, n; p = 0, 1$. В силу определения 3 имеем, что

$$(4.7) \quad \lambda_{r,p,q} \neq \lambda_{r,p,j} \quad (1 \leq q \neq j \leq l_r; \quad r = 1, \dots, n; \quad p = 0, 1).$$

Пусть w_0 – решение задачи A_0 . Тогда функцию $\bar{v}_{0,r,p}$, при $r = 1, \dots, n; p = 0, 1$, будем искать в следующем виде:

$$(4.8) \quad \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{0,r,p} = \varepsilon^{k_r} \sum_{s=1}^{l_r} c_{0,r,p,s} \left(x^{(r)} \right) e^{-\lambda_{r,p,s} t_{r,p}} = \varepsilon^{k_r} \sum_{s=1}^{l_r} c_{0,r,p,s} \left(x^{(r)} \right) e^{-\lambda_{r,p,s} \frac{p+(-1)^p x_r}{\varepsilon}},$$

так, чтобы $w_0 + \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{0,r,p}$ удовлетворял условиям (2.6), т.е.

$$(4.9) \quad \left. \frac{\partial^{k_r+s} (w_0 + \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{0,r,p})}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1.$$

Из системы (4.9), в силу условия IV и замечания 2, получаем:

$$(4.10) \quad \left. \frac{\partial^{k_r+s} \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{0,r,p}}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p} = - \left. \frac{\partial^{k_r+s} w_0}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1,$$

или

$$(4.11) \quad \left. \frac{\partial^{k_r+s} \bar{v}_{0,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}} \right|_{t_{r,p}=0} = - (-1)^{sp} \varepsilon^s \left. \frac{\partial^{k_r+s} w_0}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1.$$

Подставляя представление (4.8) функции $\bar{v}_{0,r,p}$ в (4.11), получаем систему l_r линейных уравнений относительно l_r неизвестных $c_{0,r,p,q} \equiv c_{0,r,p,q} (x^{(r)})$:

$$(4.12) \quad \sum_{q=1}^{l_r} (-\lambda_{r,p,q})^{k_r+s} c_{0,r,p,q} = - (-1)^{sp} \varepsilon^s \left. \frac{\partial^{k_r+s} w_0}{\partial x_r^{k_r+s}} \right|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1.$$

Детерминант этой системы (типа Вандермонда), в силу условий (4.7), отличен от нуля, следовательно, система (4.12) имеет, при этом единственное решение.

При $r = 1, \dots, n$ и $p = 0, 1$ положим

$$\varepsilon \alpha_{0,r,p} \equiv -\phi(\varepsilon t_{r,p}) \varepsilon^{k_r} \sum_{q=1}^{l_r} c_{0,r,p,q} \left(x^{(r)} \right) \sum_{s=0}^{k_r-1} \frac{(-\lambda_{r,p,q} t_{r,p})^s}{s!} =$$

$$(4.13) = -\phi(p + (-1)^p x_r) \varepsilon \sum_{q=1}^{l_r} c_{0,r,p,q} \left(x^{(r)}\right) \sum_{s=0}^{k_r-1} \varepsilon^{k_r-1-s} \frac{(-\lambda_{r,p,q} (p + (-1)^p x_r))^s}{s!}.$$

Предложение 1. Пусть $1 \leq r \leq n$ и $p \in \{0, 1\}$. Тогда функция $w_0 + v_{0,r,p} + \varepsilon \alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6).

Доказательство. Так как функция $-\varepsilon \alpha_{0,r,p}$ является суммой первых k_r членов ряда Тейлора функции $v_{0,r,p}$ в окрестности $x_r = p$, то функция $v_{0,r,p} + \varepsilon \alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4). С другой стороны, так как $\varepsilon \alpha_{0,r,p}$ многочлен степени $k_r - 1$ от x_r (или $t_{r,p}$), то условия (2.6) для него выполняются автоматически. Следовательно, так как w_0 удовлетворяет граничным условиям (2.4), а $w_0 + v_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.6), то функция $w_0 + v_{0,r,p} + \varepsilon \alpha_{0,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6). Предложение доказано. $\square$

Замечание 3. Пусть $r = 1, \dots, n$; $p = 0, 1$, а $d_{r,p,1}, \dots, d_{r,p,l_r}$ – решение системы

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{l_r} (-\lambda_{r,p,s})^{k_r} d_{r,p,q} = -\frac{\partial^{k_r} w_0}{\partial x_r^{k_r}} \Big|_{x_r=p}, \\ \sum_{q=1}^{l_r} (-\lambda_{r,p,s})^{k_r+s} d_{r,p,q} = 0, \quad s = 1, \dots, l_r - 1. \end{cases}$$

Тогда нетрудно видеть, что решение $c_{0,r,p,1}, \dots, c_{0,r,p,l_r}$ системы (4.12) можно представить в следующем виде:

$$c_{0,r,p,q} \left(x^{(r)}\right) = d_{r,p,q} \left(x^{(r)}\right) + \sum_{s=1}^{l_r-1} g_{r,p,q,s} \left(x^{(r)}\right) \varepsilon^s,$$

где $g_{r,p,q,s}$, $q = 1, \dots, l_r$, некоторая функция (не зависящая от ε).

Для $t \in R$ и $1 \leq j \leq n$ положим $(x^{(j)}, t) \equiv (x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Пусть w_i ($i \leq m$) – решение уравнения (4.5), удовлетворяющее граничным условиям (2.4). Тогда функцию $\bar{v}_{i,r,p}$, при $r = 1, \dots, n$; $p = 0, 1$ и $i = 1, 2, \dots$, будем искать как решение уравнения (4.6) типа погранслоя, т.е. в виде:

$$(4.14) \quad \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{i,r,p} = \varepsilon^{k_r} \sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q} \left(x^{(r)}, t_{r,p}\right) e^{-\lambda_{r,p,q} t_{r,p}},$$

так, чтобы $w_i + \varepsilon^{k_r} \bar{v}_{i,r,p}$ удовлетворяло граничным условиям (2.6), т.е.

$$(4.15) \quad \frac{\partial^{k_r+s} \bar{v}_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}} \Big|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp} \varepsilon^s \frac{\partial^{k_r+s} w_i}{\partial x_r^{k_r+s}} \Big|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1,$$

где полагаем $w_i = 0$ при $i > m$.

При $r = 1, \dots, n$ и $p = 0, 1$ положим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \alpha_{i,r,p} &= -\phi(\varepsilon t_{r,p}) \varepsilon^{k_r} \sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q} \left(x^{(r)}, t_{r,p} \right) \sum_{s=0}^{k_r-1} \frac{(-\lambda_{r,p,q} t_{r,p})^s}{s!} = \\
 (4.16) \quad &= -\phi(p + (-1)^p x_r) \varepsilon \sum_{q=1}^{l_r} c_{i,r,p,q} \left(x^{(r)}, t_{r,p} \right) \sum_{s=0}^{k_r-1} \varepsilon^{k_r-1-s} \frac{(-\lambda_{r,p,q} (p + (-1)^p x_r))^s}{s!}.
 \end{aligned}$$

Предложение 2. Пусть $1 \leq r \leq n$, $p \in \{0, 1\}$ и $i > 0$. Тогда функция $w_i + v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6).

Доказательство проводится схожим методом, как и в предложении 1.

Обозначим

$$\tilde{\Gamma} \equiv \bigcup_{r=1}^n \bigcup_{p=0}^1 \{x : x_r = p, \eta \leq x_j \leq 1 - \eta, 1 \leq j \leq n, j \neq r\}.$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq r \leq n$, $1 \leq q \leq l_r$, $p \in \{0, 1\}$ и $i > 0$. Тогда

- 1) функции w_i , α_i , $c_{i,r,p,q}$ и их производные любого порядка равномерно (по ε) ограничены на Ω ;
- 2) $c_{i,r,p,q} \left(x^{(r)}, t_{r,p} \right)$ – многочлены относительно $t_{r,p}$;
- 3) $v_{i,r,p}$ – функция типа погранслоя порядка k_r ;
- 4) функция $w_i + v_i + \varepsilon \alpha_i$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε на $\tilde{\Gamma}$.

Прежде, чем доказать теорему, сформулируем следующую очевидную лемму:

Лемма 1. Пусть Q – область в $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}_0$, $b_i(t) \in \mathbb{C}^p(Q)$ ($i = 1, \dots, n$) и $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, для которой $\det A \neq 0$. Тогда

- а) система уравнений $A(x_1(t), \dots, x_n(t))^T = (b_1(t), \dots, b_n(t))$, имеет единственное решение такое, что $x_r(t) \in \mathbb{C}^p(Q)$ ($r = 1, \dots, n$),
- б) если

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial t^s} b_r(t) \right|_{t=t_0} = 0, \quad s = 0, \dots, p; \quad r = 1, \dots, n,$$

то

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial t^s} x_r(t) \right|_{t=t_0} = 0, \quad s = 0, \dots, p; \quad r = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство пунктов 1) и 2) проведем индукцией по i . Очевидно, что функция w_0 удовлетворяет условию пункта 1) (см. условия I и IV, замечание 2 и определение 4). Следовательно, в силу леммы

1, функция $c_{0,r,p,q}(x^{(r)}, t_{r,p})$ тоже удовлетворяет условию пункта 1), а значит и функция α_0 удовлетворяет условию пункта 1) (см. представление (4.13)).

Так как по предположению индукции все коэффициенты $c_{i-s,r,p,q}$ ($0 < s \leq i$) — суть многочлены относительно $t_{r,p}$, все функции $\bar{v}_{i-s,r,p}$ ($0 < s \leq i$) имеют вид (4.14), и оператор $R_{r,s+k_r}$ ($s > 0$) не зависит от D_r (или $\frac{\partial}{\partial t_{r,p}}$, см. формулу (2.9)), то правая часть (4.6) имеет следующий вид:

$$\sum_{s=1}^{l_r} F_s e^{-\lambda_{r,p,s} t_{r,p}},$$

где $F_s = F_s(x^{(r)}, t_{r,p})$ — многочлен относительно $t_{r,p}$. Следовательно, решение $\bar{v}_{i,r,p}$ уравнения (4.6) можно представить в виде $\bar{v}_{i,r,p} = \varphi_{i,r,p} + \theta_{i,r,p}$, где $\varphi_{i,r,p} = \varphi_{i,r,p}(x^{(r)}, t_{r,p})$ — частное решение неоднородного уравнения (4.6) (которое можно найти методом неопределенных коэффициентов, см. [11, стр. 62-65]) вида $\sum_{s=1}^{l_r} K_s e^{-\lambda_{r,p,s} t_{r,p}}$ ($K_s = K_s(x^{(r)}, t_{r,p})$ — многочлен относительно $t_{r,p}$ степени, на единицу больше чем порядок многочлена (по $t_{r,p}$) $F_s(x^{(r)}, t_{r,p})$, см. условие (4.7)), а $\theta_{i,r,p} = \theta_{i,r,p}(x^{(r)}, t_{r,p})$ — решение вида (4.14), соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^{kr+s} \theta_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{kr+s}} \right|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp} \varepsilon^s \left. \frac{\partial^{kr+s} w_i}{\partial x_r^{kr+s}} \right|_{x_r=p} - \left. \frac{\partial^{kr+s} \varphi_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{kr+s}} \right|_{t_{r,p}=0}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1,$$

Следовательно, функция $v_{i,r,p}$ имеет вид (4.14).

Так как, по предположению индукции, при $0 \leq j < i$ функции w_j , α_j , $c_{j,r,p,q}$ удовлетворяют условию 1), то функция h_i (см. (4.5)) и ее производные любого порядка равномерно (по ε) ограничены на Ω . Следовательно, в силу замечания 2, функция w_i удовлетворяет условию 1). Нетрудно заметить, что функции $c_{i,r,p,q}$ (см. лемму 1), а значит и α_i удовлетворяют условию 1).

Утверждение пункта 3) следует из пунктов 1) и 2), а утверждение пункта 4) непосредственно следует из предложения 2 и определения функции ϕ . Теорема доказана. $\square$

5. ТЕОРЕМЫ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ

4.1. Для любого числа $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ обозначим

$$\Omega_\delta = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{p=0}^1 \bigcup_{q=0}^1 \bigcup_{j \neq i} \{x \in \bar{\Omega} : |x_i - p| \leq \delta, |x_j - q| \leq \delta\}.$$

Пусть $\eta \in (0, \frac{1}{4})$ и $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \Omega_{2\eta}$.

Теорема 4. При условиях I – IV решение u_ε задачи A_ε допускает асимптотическое представление:

$$(5.1) \quad u_\varepsilon = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i (v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}) + z_m \quad (m \in \mathbb{N}_0),$$

где w_0 – решение задачи A_0 , w_i – решение задачи (4.5), (2.4), $v_{i,r,p} = \varepsilon^{k_j} \bar{v}_{i,r,p}$ – решение типа погранслоя порядка k_j в окрестности границы $\Gamma_{j,p}$ обыкновенного дифференциального уравнения (4.6), удовлетворяющее граничным условиям (4.15), многочлен $\varepsilon \alpha_{i,r,p}$ определен (по функции $v_{i,r,p}$) в (4.16), а для остаточного члена z_m справедлива оценка:

$$\|L_\varepsilon z_m\|_{L_2(\tilde{\Omega})} = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Доказательство. Применяя оператор L_ε к функции u_ε и учитывая (4.5) и (4.6), получаем

$$\begin{aligned} h = L_\varepsilon \left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i + \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i (v_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}) + z_m \right) &= h + \left\{ \sum_{i=m}^K \varepsilon^{i+1} L_0 \alpha_i + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{2l_j} \left(\sum_{i=\max\{0, m-s+1\}}^m \varepsilon^{i+s} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} w_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} + \sum_{i=\max\{0, K-s\}}^K \varepsilon^{i+s+1} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} \alpha_i}{\partial x_j^{2k_j+s}} \right) + \\ &\left. \left(\sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \sum_{s=1}^{N_r} \sum_{i=\max\{0, m+k_r-s\}}^{m+k_r} \varepsilon^{i+s-k_r} R_{r,s} \phi(p + (-1)^p x_r) \bar{v}_{i,r,p} \right) \right\} + L_\varepsilon z_m \equiv \\ &\equiv h + \varepsilon^{m+1} g_m + L_\varepsilon z_m. \end{aligned}$$

Так как $\|g_m\|_{L_2(\tilde{\Omega})} = O(1)$ (в силу теоремы 3), то $\|L_\varepsilon z_m\|_{L_2(\tilde{\Omega})} = O(\varepsilon^{m+1})$. Теорема доказана. $\square$

4.2. Для получения асимптотического разложения в $\bar{\Omega}$ (включая и угловые точки), модифицируем некоторые шаги алгоритма предыдущего параграфа. Решение u_ε задачи A_ε ищется в виде

$$(5.2) \quad u_\varepsilon = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i W_i + \sum_{r=1}^n \sum_{p=0}^1 \sum_{i=0}^{m+k_r} \varepsilon^i (V_{i,r,p} + \varepsilon \alpha_{i,r,p}) + Z_m \quad \left(m \leq k_0 := \min_{1 \leq j \leq n} k_j \right),$$

где W_0 – решение задачи A_0 , W_i – решение уравнения

$$(5.3) \quad L_0 W_i = - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{\min\{i, 2l_j\}} a_{s,j} \frac{\partial^{2k_j+s} W_{i-s}}{\partial x_j^{2k_j+s}} \quad (i = 1, \dots, m),$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.4), а функция $\bar{V}_{i,r,p}$, при $r = 1, \dots, n$; $p = 0, 1$ и $i = 0, \dots, m + k_r$, ищется в виде (4.14) так, чтобы $W_i + \bar{V}_{i,r,p}$ удовлетворяло бы граничным условиям

$$(5.4) \quad \frac{\partial^{k_r+s} \bar{V}_{i,r,p}}{\partial t_{r,p}^{k_r+s}} \Big|_{t_{r,p}=0} = -(-1)^{sp} \varepsilon^s \frac{\partial^{k_r+s} y_{i,r-1}}{\partial x_r^{k_r+s}} \Big|_{x_r=p}, \quad s = 0, 1, \dots, l_r - 1,$$

где

$$y_{i,j} \equiv \begin{cases} W_i, & \text{при } j = 0, \\ W_i + \sum_{q=1}^j \sum_{p=0}^1 \phi(p + (-1)^p x_q) (\bar{V}_{i,q,p} + \varepsilon \alpha_{i,q,p}), & \text{при } j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

а многочлен $\varepsilon \alpha_{i,r,p}$ имеет вид (4.16), и строится исходя из функции $V_{i,r,p}$.

Известна следующая

Лемма 2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – прямоугольный параллелепипед и $p \in \mathbb{N}_0$. Если функция $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^p(\bar{Q})$, то для любого $a \in \bar{Q}$

$$\frac{\partial^s}{\partial x_i^s} \lim_{x_j \rightarrow a_j} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{\partial^s}{\partial x_i^s} f(x_1, \dots, x_n) \quad (i \neq j),$$

где $0 < s \leq p$, $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n$.

Предложение 3. Функция $W_0 + V_{0,1,0} + \varepsilon \alpha_{0,1,0}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) при $r = 1$, $p = 0$.

Доказательство. Из построения функции $W_0 + V_{0,1,0} + \varepsilon \alpha_{0,1,0}$ следует, что оно удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) при $r = 1$, $p = 0$. Так как функция W_0 достаточно гладкая (условие IV), то в силу леммы 4.1 имеем:

$$\frac{\partial^r}{\partial x_j^r} \left(\frac{\partial^{k_1+s} W_0}{\partial x_1^s} \Big|_{x_1=0} \right) \Big|_{x_j=0} = \frac{\partial^{k_1+s}}{\partial x_1^s} \left(\frac{\partial^r W_0}{\partial x_j^r} \Big|_{x_j=0} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \begin{matrix} s = 0, 1, \dots, l_1 - 1, \\ r = 0, 1, \dots, k_j - 1, \end{matrix}$$

где $1 < j \leq n$, т.е. правые части системы (4.12) удовлетворяют условиям леммы 1, следовательно, найденные коэффициенты $c_{0,1,0,q}$, $q = 1, \dots, l_1$ также удовлетворяют соответствующим условиям этой леммы. Отсюда непосредственно следует, что функции $V_{0,1,0}$ и $\varepsilon \alpha_{0,1,0}$ удовлетворяют условиям (2.4), что и требовалось доказать. $\square$

Легко доказать и более общее предложение:

Предложение 4. Пусть $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq i \leq m + k_r$. Тогда функция $y_{i,j}$ удовлетворяет граничным условиям (2.4) и (2.6) (при $r = 1, \dots, j$; $p = 0, 1$).

В силу предложения 4, приводя аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 4, можно доказать следующее:

Теорема 5. При условиях I – IV решение u_ε задачи A_ε допускает асимптотическое представление (5.2), где W_0 – решение задачи A_0 , W_i – решение задачи (5.3) и (2.4), $V_{i,r,p} = \varepsilon^{k_j} \bar{V}_{i,r,p}$ – решение, типа погранслоя порядка k_j в окрестности границы $\Gamma_{j,p}$ для обыкновенного однородного дифференциального уравнения (4.6), удовлетворяющее граничным условиям (5.4), многочлен $\varepsilon \alpha_{i,r,p}$ определяется по функции $V_{i,r,p}$ по формуле (4.16), а для остаточного члена Z_m справедливы оценки:

$$\|L_\varepsilon Z_m\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{m+1}),$$

$$\|Z_m\|_{\varepsilon,\Omega}^2 := \sum_{j=1}^n \varepsilon^{2l_j} \|D_j^{k_j+l_j} Z_m\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j^{k_j} Z_m\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Z_m\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq O(\varepsilon^{2m+2}).$$

Доказательство. Так как функция Z_m удовлетворяет граничным условиям задачи A_ε , то из равномерной разрешимости задачи A_ε (см. условие III и теорему 1) следует оценка

$$\|Z_m\|_{\varepsilon,\Omega}^2 \leq C_1 (L_\varepsilon Z_m, Z_m)_{L_2(\Omega)} \leq O(\varepsilon^{2m+2}),$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε . Теорема доказана. $\square$

Abstract. The paper gives a description of an algorithm of asymptotic expansion in ε ($\varepsilon > 0$) of the solution u_ε of the Dirichlet problem for the linear differential semielliptic equation $L_\varepsilon u_\varepsilon = h$ in rectangular parallelepipeds, which contains higher derivatives with a small parameter ε . The algorithm is based on the solution of the degenerating as $\varepsilon \rightarrow 0$ Dirichlet problem for the semielliptic equation $L_0 u = h$ of lower order. Some theorems on uniform solvability and regular degeneracy are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, Успехи мат. наук, **12**, 5, 3 – 122 (1957).
- [2] В. Ф. Бутузов, “Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области”, Дифф. ур., **9**, 9, 1654 – 1660 (1973).
- [3] С. А. Назаров, “Метод Вишика – Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области”, Сиб. Мат. журн., **22**, 5, 132 – 152 (1981).
- [4] L. P. Cook, G. S. S. Ludford, “The behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$ of solutions to $\varepsilon \nabla^2 w = w_y$ on the rectangle $0 \leq x \leq l_1$, $|y| \leq 1$ ”, SIAM J. Mat. Anal., **4**, 1 161 – 184 (1973).
- [5] А. М. Ильин, Е. Ф. Леликова, “Метод сращивания асимптотических представлений для уравнения $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике”, Мат. сб., **96**, 4, 568 – 583 (1975).

- [6] Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, М. (1965).
- [7] С. М. Никольский, “Первая краевая задачи для одного общего линейного уравнения”, Доклады АН СССР, **146**, 4, 767 – 769 (1962).
- [8] С. М. Никольский, “Доказательство единственности классического решения первой краевой задачи для одного общего линейного дифференциального уравнения в частных производных для выпуклой ограниченной области”, Известия АН СССР, **27:5**, 1113 – 1134 (1963).
- [9] E. Pehkonen, “Ein hypoelliptisches Diriclet Problem”, Com. Mat. Phys., **48**, 3, 131 – 143 (1978).
- [10] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, М. (1996).
- [11] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, М. (1982)

Поступила 25 мая 2009

ПОСТРОЕНИЕ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *Khach82@rambler.ru*

Аннотация. В статье изучена система нелинейных векторных интегро-дифференциальных уравнений с суммарно-разностным ядром, обладающая тривиальным (нулевым) решением. Построено нетривиальное решение этой системы в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$.

MSC2000 number: 35XX, 35G55, 35G50

Ключевые слова: Факторизация, пространство Соболева, сходимость итераций, нетривиальное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующая система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(1.1) \quad -\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + \lambda_i\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \left[\int_0^{+\infty} K_{ij}(x-t)G(\varphi_j(t))dt + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} K_{ij}^\circ(x+t)G_0(\varphi_j(t))dt \right], \quad x \in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

относительно искомой вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ (T -знак транспонирования) с неотрицательными компонентами и начальным условием в нуле:

$$(1.2) \quad \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь λ_i -положительные числовые параметры ($i = 1, 2, \dots, n$). $K_{ij}(x)$, $\overset{\circ}{K}_{ij}(x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} &0 \leq K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty), \quad 0 \leq \overset{\circ}{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty), \\ &\int_x^\infty e^{-\alpha\tau} \overset{\circ}{K}_{ij}(\tau) d\tau \leq \int_x^\infty e^{-\alpha\tau} K_{ij}(\tau) d\tau, \quad x \in (0, \infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ &\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}. \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda_i, \quad \text{где} \quad a_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(1.5) \quad \nu(K_{ij}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x K_{ij}(x) dx \leq 0,$$

причем существуют $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $\nu(K_{i_0, j_0}) < 0$. G и G_0 – заданные непрерывные функции на некотором интервале $[0, \eta]$; $\eta > 0$, причем

$$(1.6) \quad G(x) \geq x, \quad G_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, \eta],$$

$$(1.7) \quad \text{функции } G, G_0 \text{ – возрастают на интервале } [0, \eta],$$

$$(1.8) \quad G(\eta) = G_0(\eta) = \eta; \quad G(0) = G_0(0) = 0.$$

Решение задачи ищется в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty, 2}^{\times n}(0, +\infty)$, где

$$\mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \equiv \{f : f^{(k)} \in L_p(0, \infty), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad 1 \leq p \leq +\infty\},$$

$$\mathbf{W}_{p, N}^{\times n}(0, \infty) \equiv \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \times \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty) \times \dots \times \mathbf{W}_{p, N}(0, \infty).$$

Исследованию системы линейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром (т.е. системы (1.1) без производной и при условии, что $G(x) \equiv G_0(x) = x$) были посвящены многочисленные работы (см. [1-3] и ссылки в них).

В настоящей работе рассматриваются вопросы существования и построения решения однородной задачи (1.1) - (1.2). Доказывается, что при выполнении условий (1.3) - (1.8), задача (1.1) - (1.2) в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ обладает нетривиальным ограниченным и покомпонентно неотрицательным решением вида:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T, \quad \varphi_i(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f_i(t) dt \in \mathbf{W}_{\infty,2}(0, +\infty),$$

где $0 \leq f_i(\tau) \leq \alpha\eta$, $f_i(\tau) \not\equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. В конце работы приведены примеры функций G и G_0 .

2. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Пусть E - одно из следующих банаховых пространств:

- i) $L_p(0, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$,
- ii) $M(0, +\infty)$,
- iii) $C_M(0, +\infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $(0, +\infty)$ функций.

Обозначим через

$$E^{\times n} = E \times E \times E \times \dots \times E.$$

Введем классы Ω и Ω_0 следующих нелинейных матричных интегральных операторов:

$$\mathbf{K}_G \in \Omega, \quad \text{если} \quad (\mathbf{K}_G f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) G(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0, \quad \text{если} \quad (\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x+t) G_0(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$f \in E^{\times n}$, где $0 \leq K_{ij} \in L_1(-\infty, \infty)$, $0 \leq \mathring{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а функции G и G_0 удовлетворяют условиям (1.6) - (1.8).

Используя результаты работы [3] и учитывая свойства функции G , нетрудно убедиться, что операторы из Ω не являются вполне непрерывными в банаховых пространствах $E^{\times n}$. В случае, когда $G_0(x) = x$, операторы из Ω_0 являются вполне непрерывными в $E^{\times n}$ (см. [3]). Обозначим через $\Omega^\pm$ - классы следующих

интегральных операторов типа Вольтерра: $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, если

$$(V_+ f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^x v_{ij}^+(x-t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(V_- f)_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_x^{\infty} v_{ij}^-(t-x) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in E^{\times n}, \quad 0 \leq v_{ij}^{\pm} \in L_1(0, +\infty).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые утверждения: если $V_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, $\mathbf{K}_G \in \Omega$, $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$, то

- 1) $V_- \mathbf{K}_G \in \Omega$,
- 2) $V_- \mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$,
- 3) если $G(x) \equiv x$, то $\mathbf{K}_G V_+ \in \Omega$,
- 4) если $G_0(x) \equiv x$, то $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} V_+ \in \Omega_0$.

Пусть $\mathbb{J}_{\alpha}$ - обратный оператор матричного дифференциального оператора $\alpha \mathbb{I} - \mathbf{D}$ в $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$, где $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}$, $\mathbb{I} = \text{diag}(I, I, \dots, I)$, I -единичный оператор, $\mathbf{D} = \text{diag}(D, D, \dots, D)$, $(D\varphi)(x) = \varphi'(x)$ - оператор дифференцирования.

Нетрудно убедиться, что $\mathbb{J}_{\alpha} \in \Omega^{-}$ и

$$(\mathbb{J}_{\alpha} f)_i(x) = \int_x^{\infty} e^{-\alpha(t-x)} f_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из утверждений 1) и 2) следует, что если $\mathbf{K}_G \in \Omega$, $\mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0$, то

$$\mathbf{R}_G \equiv \mathbb{J}_{\alpha} \mathbf{K}_G \in \Omega, \quad \mathring{\mathbf{R}}_{G_0} \equiv \mathbb{J}_{\alpha} \mathring{\mathbf{K}}_{G_0} \in \Omega_0,$$

а ядра задаются посредством следующих формул:

$$R_{ij}(x) = \int_0^{\infty} K_{ij}(x+t) e^{-\alpha t} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathring{R}_{ij}(x) = \int_0^{\infty} \mathring{K}_{ij}(x+t) e^{-\alpha t} dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

С учетом вышесказанного, оператор $\mathbf{D}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0}$ (где $(\mathbf{A}f)_i(x) = \lambda_i f_i(x)$, $f \in E^{\times n}$) представим в следующем виде:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0} &= \mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbb{I} + \alpha^2 \mathbb{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0} = \\ &= (\mathbf{D} - \alpha \mathbb{I})(\mathbf{D} + \alpha \mathbb{I} - (\alpha^2 \mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbb{J}_\alpha - \mathbf{R}_G - \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}). \end{aligned}$$

Так как $K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\overset{\circ}{K}_{ij} \in L_1(0, +\infty)$, то представляя ядра R_{ij} и $\overset{\circ}{R}_{ij}$ в следующих видах

$$R_{ij}(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(z-x)} K_{ij}(z) dz, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \overset{\circ}{R}_{ij}(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(z-x)} \overset{\circ}{K}_{ij}(z) dz,$$

$x \in (0, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ и используя теорему Фубини нетрудно убедиться, что

$$(2.2) \quad R_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty), \quad \overset{\circ}{R}_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) d\tau = \frac{a_{ij}}{\alpha}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{если } \nu(K_{ij}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \tau K_{ij}(\tau) d\tau < +\infty, \quad \text{то } \nu(R_{ij}) < +\infty \quad \text{и}$$

$$(2.4) \quad \nu(R_{ij}) = \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha} - \frac{a_{ij}}{\alpha^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, на основе вышесказанного можно утверждать, что справедлива

Лемма 1. *Оператор $\mathbf{D}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0}$ допускает факторизацию вида (2.1) и имеют место формулы (2.2) - (2.4).*

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть условия (1.3) - (1.8) выполнены. Тогда задача (1.1) - (1.2) в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ имеет нетривиальное неотрицательное решение вида:*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T, \quad \varphi_j(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f_j(t) dt \in \mathbf{W}_{\infty,2}(0, +\infty),$$

где функции

$$0 \leq f_i(x) \leq \alpha \eta, \quad f_i(x) \not\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}.$$

Доказательство. Уравнение (1.1) запишем в операторной форме:

$$(3.1) \quad (\mathbf{D}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{K}_G + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{G_0})\varphi = 0.$$

С учетом факторизации (2.1) уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$(\mathbf{D} - \alpha\mathbb{I})(\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I} - [(\alpha^2\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbb{J}_\alpha + \mathbf{R}_G + \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}])\varphi = 0.$$

Обозначим

$$(3.2) \quad \psi \equiv (\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I} - [(\alpha^2\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbb{J}_\alpha + \mathbf{R}_G + \overset{\circ}{\mathbf{R}}_{G_0}])\varphi.$$

Тогда вектор-функция ψ будет удовлетворять уравнению:

$$(3.3) \quad (\mathbf{D} - \alpha\mathbb{I})\psi = 0.$$

Так как решение задачи (1.1) - (1.2) ищется в пространстве Соболева $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$, то из (3.2), с учетом (2.2), следует, что функция ψ должна принадлежать пространству $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$. А уравнение (3.3) в пространстве $\mathbf{W}_{\infty,1}^{\times n}(0, +\infty)$ имеет лишь тривиальное решение: $\psi \equiv (0, 0, 0, \dots, 0)^T$. Перейдем к изучению уравнения (3.2). Обозначая

$$(3.4) \quad (\mathbf{D} + \alpha\mathbb{I})\varphi = f,$$

с учетом (1.2) мы приходим к следующей нелинейной системе интегральных уравнений:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f_i(x) = & (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i(\tau) d\tau dt + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \overset{\circ}{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Наряду с уравнением (3.5) рассмотрим следующую вспомогательную систему интегральных уравнений Винера-Хопфа:

$$(3.6) \quad S_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty T_{ij}(x-t) S_j(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad x \in (0, +\infty),$$

где

$$(3.7) \quad 0 \leq T_{ij}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} R_{ij}(x-z) dz + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{2\alpha} e^{-\alpha x} \theta(x) \delta_{ij} + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{2\alpha} e^{\alpha x} \theta(-x) \delta_{ij},$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, δ_{ij} - символ Кронекера, а $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

Известно, что если

$$(3.8) \quad r(C) = 1, \quad C = (C_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}, \quad C_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ij}(\tau) d\tau, \quad \nu(T_{ij}) \leq 0$$

и существуют $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $\nu(T_{i_0, j_0}) < 0$, (где $r(C)$ -спектральный радиус матрицы C), то система уравнений имеет покомпонентно положительное, возрастающее и ограниченное решение $S(x) = (S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x))^T$ (см. [4-5]).

Из (3.7), (3.8) сразу следует, что

$$C_{ij} = \frac{a_{ij}}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - \lambda_i}{\alpha^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, с учетом (1.4), имеем $r(C) = 1$. Из (2.4), (3.7), с учетом теоремы Фубини, получим

$$\nu(T_{ij}) = \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, условие (3.8) также выполняется. Пусть $S(x)$ - ограниченное решение системы (3.6).

Обозначим

$$c = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in (0, +\infty)} S_i(x).$$

Из линейности системы (3.6) следует, что функция

$$(3.9) \quad S^*(x) = (S_1^*(x), S_2^*(x), \dots, S_n^*(x))^T, \quad S_j^*(x) = \frac{\eta\alpha}{c} S_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

также удовлетворяет этой системе.

Рассмотрим следующие итерации:

$$(3.10) \quad f_i^{(p+1)}(x) = (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^{\infty} e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i^{(p)}(\tau) d\tau dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p)}(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p)}(\tau) d\tau \right) dt \right], \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f_j^{(0)}(x) \equiv \alpha\eta, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Убедимся, что

$$\mathbf{i)} \quad S_i^*(x) \leq f_i^{(p)}(x) \leq \alpha\eta, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{ii)} \quad f_i^{(p)} \downarrow \text{ по } p, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Сперва докажем утверждение **i)**. В случае $p = 0$ утверждение **i)** сразу следует из (3.9), (3.10). Предположим, что неравенство **i)** справедливо для $p = k$ и убедимся в его достоверности в случае $p = k + 1$.

Из (3.10), с учетом (1.3) получим

$$f_i^{(k+1)}(x) \leq \frac{(\alpha^2 - \lambda_i)\alpha\eta}{\alpha^2} + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G(\eta) dt + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0(\eta) dt \right) = \\ = \left(1 - \frac{\lambda_i}{\alpha^2} \right) \alpha\eta + \eta \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^x R_{ij}(y) dy + \int_x^\infty \mathring{R}_{ij}(y) dy \right) \leq \\ \leq \left(1 - \frac{\lambda_i}{\alpha^2} \right) \alpha\eta + \eta \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) d\tau = \alpha\eta.$$

С другой стороны, имеем

$$f_i^{(k+1)}(x) \geq (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_i^*(\tau) d\tau dt + \\ + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau \right) dt \right] \geq \\ \geq \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau dt + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_j^*(\tau) d\tau dt \right] +$$

$$+(\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} S_i^*(\tau) d\tau dt \geq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty T_{ij}(x-t) S_j^*(t) dt = S_i^*(x).$$

Теперь докажем утверждение **ii**). При $p = 0$ имеем $f_i^{(1)}(x) \leq \alpha\eta = f_i^{(0)}$. Предположим, что $f_i^{(p)}(x) \leq f_i^{(p-1)}(x)$. Тогда из (3.10), с учетом (1.7) и утверждения **i**) получим

$$\begin{aligned} f_i^{(p+1)}(x) &\leq (\alpha^2 - \lambda_i) \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_i^{(p-1)}(\tau) d\tau dt + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[\int_0^\infty R_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p-1)}(\tau) d\tau \right) dt + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty \mathring{R}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j^{(p-1)}(\tau) d\tau \right) dt \right] = f_i^{(p)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность вектор-функций $\{f_i^{(p)}(x)\}_0^\infty$ имеет точечный предел: $\lim_{p \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = f(x)$, где

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T, \quad S_i^*(x) \leq f_i(x) \leq \alpha\eta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно теореме Б. Леви (см.[6]) предельная вектор-функция удовлетворяет системе уравнений (3.5).

Поскольку $h_{ij} = dR_{ij}/dx$; $\mathring{h}_{ij} = d\mathring{R}_{ij}/dx$ — непрерывные и суммируемые функции на множествах $(-\infty, +\infty)$ и $(0, +\infty)$ соответственно (ибо $R_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(-\infty, +\infty)$, $\mathring{R}_{ij} \in \mathbf{W}_{1,1}(0, +\infty)$, а $K_{ij}, \mathring{K}_{ij}$ — непрерывные суммируемые функции), причем интегралы

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty h_{ij}(x-t) G \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt, \\ &\int_0^\infty \mathring{h}_{ij}(x+t) G_0 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \right) dt, \end{aligned}$$

равномерно сходятся, а $f_i \in M(0, +\infty)$, следовательно, с учетом теоремы о дифференцировании под знаком интеграла (см.[7]), из (3.5) следует, что существует $\frac{df_i}{dx} \in M(0, +\infty)$, стало быть $f_i \in \mathbf{W}_{\infty,1}(0, +\infty)$. Решая уравнение (3.4), с учетом (1.2), приходим к завершению доказательства. $\square$

Ниже приведем несколько примеров функции G :

- (1) $G(x) = x^\alpha, \quad \eta = 1, \quad x \in (0, +\infty), \quad 0 < \alpha < 1,$
- (2) $G(x) = x + \sin x, \quad \eta = \pi, \quad x \in (0, +\infty),$

$$(3) \quad G(x) = x + \frac{1}{2\eta}(x - \eta)^2(1 - e^{-x}), \quad \eta > 0.$$

Поскольку условия, накладываемые на функцию G_0 более слабые по сравнению с условиями на функцию G , то в качестве G_0 можно взять, в частности, функцию G . Тем не менее приведем несколько примеров функции G_0 :

$$(1) \quad G_0(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 1, \quad \alpha > 0, \quad \eta = 1,$$

$$(2) \quad G_0(x) = \eta \sin x, \quad \eta = \frac{\pi}{2},$$

$$(3) \quad G_0(x) = \eta \ln(x + 1), \quad \eta = e - 1,$$

$$(4) \quad G_0(x) = \eta \operatorname{tg} x, \quad \eta = \frac{\pi}{4}.$$

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper studies a system of nonlinear, vector integro-differential equations with sum and difference kernel and possessing the trivial solution. A nontrivial solution of the system in the Sobolev space $\mathbf{W}_{\infty,2}^{\times n}(0, +\infty)$ is constructed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. С. Литвинчук. Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Москва, Наука (1977).
- [2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, Москва, Наука (1966).
- [3] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения Типа Свертки, Москва, Наука (1978).
- [4] D. V. Lindley, "The theory of queue whith a single server", Proc Cambridge. Phil. Soc., **48**, 277 - 289 (1952).
- [5] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники, Математический анализ, **22**, 175 - 244 (1984).
- [6] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин. Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука (1981).
- [7] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения Математической Физики, М. (1977).

Поступила 1 декабря 2008

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 2, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян, Задача типа Римана-Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго порядка в весовых пространствах	3
В. С. Атабекян, Не φ -допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп	21
А. Г. Багдасарян, Пространства функций с доминирующими смешанными свойствами гладкости как “ B -произведения”	37
Г. А. Карапетян, О. Г. Тананян, Вырождение полуэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде	51
Х. А. Хачатрян, Построение нетривиального решения одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений	67

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 2, 2010

CONTENTS

G. M. HAYRAPETYAN, M. S. HAYRAPETYAN, A Riemann-Hilbert type problem for second order nonregular elliptic equation in weighted spaces	3
V. S. ATABEKYAN, Non- φ -admissible normal subgroups of free Burnside groups	21
A. G. BAGHDASARYAN, Spaces of functions with dominating mixed properties of smoothness as “ B -products”	37
G. A. KARAPETYAN, H. G. TANANYAN, Degeneration of semielliptic equation with constant coefficients in rectangular parallelepiped	51
Kh. A. KHACHATRYAN, Construction of a nontrivial solution of a system of nonlinear integro-differential equations	67