

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2009

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Քանալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартіросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

Гармонический анализ и применения

Под редакцией **Г. Геворкяна и А. Саакяна**

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Гармонический анализ и приближения имеют прочные традиции в Армении, и нам приятно сообщить о непрекращающейся активности в этих областях. Отметим три международные конференции по этой теме, которые состоялись в Армении: в Нор Амберде, 18 – 24 сентября 1998 года и 11 – 18 сентября 2001 года, а также в Цахкадзоре, 20 - 27 сентября 2005 года.

Настоящий номер и два последующих номера журнала содержат статьи, представленные на четвертой международной конференции “Гармонический анализ и приближения”, посвященной 80-летию юбилею академика Александра Талаляна и состоявшейся в Цахкадзоре (Армения), 19 - 26 сентября 2008 года.

Организаторами четвертой конференции были Институт математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный Комитет:

Н. У. Аракелян (Армения), З. Чисельский (Польша), П. Готье (Канада), Б. С. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), Н. Никольский (Франция), А. М. Олевский (Израиль), В. Н. Темляков (США), А. А. Талалян (Армения).

Организационный Комитет:

Г. Геворкян, А. Саакян, А. Акопян, М. Погосян.

В конференции приняли участие около 100 математиков из 14 стран. Пленарными докладами были: Н. Аракелян “О задачах Дирихле и Неймана для гармонических функций”, Г. Геворкян “О периодической системе Франклина”, Г. Карагулян “О Римановых суммах и максимальных функциях”, Г. Керкачарян “Пример решения обратной задачи, используя плотный фрейм Нидлета: сужение преобразования Радона”, С. Конягин “О сходимости гриди приближений для тригонометрической системы”, Т. Корнер “Квадратные корни сверток”, Н. Кругляк “К-функционал и близкие минимизаторы для пространств Соболева и Морре-Кампанато с применением в гармоническом анализе и обратных задачах”, М. Лейси “Новые границы для функций расхождения и малого шарового неравенства во всех измерениях”, В. Лу “Плотности, связанные со сверхсходимостью”, Н. Никольский “Условные числа больших матриц при спектральных ограничениях”, А. Олевский “Почти аналитическое представление измеримых функций”, А. Талалян “О единственности кратного тригонометрического ряда”.

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

ОПТИМАЛЬНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

С. АЛЕКСАНИЯН И Н. АРАКЕЛЯН

Институт математики, НАН Армении

E-mail: asargis@instmath.sci.am, arakelian@instmath.sci.am

Аннотация. В этой работе рассматривается задача наилучшего или оптимального равномерного приближения целыми функциями на замкнутом угле Δ . Эта задача была начата М. В. Келдышем в [4], полагая, что приближаемые функции f голоморфны на большей угловой области, содержащей Δ , без ограничений роста f в бесконечности. В [8] задача была исследована для более широкого класса функций f , непрерывно комплексно дифференцируемых на Δ , с более точными оценками роста приближающих целых функций, связанными с ростом f на Δ и с дифференциальными свойствами f на границе Δ . В настоящей статье мы улучшаем некоторые результаты о приближении целыми функциями на угловых областях, используя новые идеи приближения, частично представленные в [9] и [10].

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые неограниченные, *канонические* множества комплексной плоскости $\mathbb{C}$, такие как вещественная ось $\mathbb{R}$, замкнутый угол и полоса являются множествами равномерного приближения целыми функциями (см. обзор [1], гл. 2, с дальнейшим развитием в [2]). По необходимости функции f , подлежащие равномерному приближению на замкнутом множестве E целыми функциями, предполагаются из класса $A(E)$, т.е. непрерывные на E и голоморфные внутри E . Подобная функция может иметь любой рост на E в бесконечности, заставляя приближающие функции иметь по крайней мере такой же рост.

В этой ситуации, в качестве аналога задач *наилучшего* и *типа Джексона* полиномиального приближения, возникают следующие задачи: построить для канонического множества E и функции $f \in A(E)$ аппроксимирующие целые функции g таким образом, чтобы их *рост* в $\mathbb{C}$ был в некотором смысле *оптимальным*, т.е. возможно медленным или близко к этому. Этот рост должен быть выражен

в терминах роста f и величин, характеризующих структуру f на E , в частности, в терминах роста некоторых *производных* f на границе E . С точки зрения классической теории целых функций особой интерес представляет описание классов функций на канонических множествах, которые допускают равномерную аппроксимацию целыми функциями данного *конечного* порядка, с точными оценками их типа. Кратко такого типа равномерные приближения будем называть *оптимальными*.

Задача оптимального равномерного и касательного приближения целыми функциями на канонических множествах исследовалась в работах [3]-[10]. В настоящей работе ограничимся рассмотрением этой задачи для случая приближения на замкнутых углах $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha/2\}$ (см. [3]-[4] и [6]-[8]).

Как показано в [4] (см. детали доказательства в [1], гл. 2), функцию $f \in A(\Delta_{\alpha+\delta})$ ($\delta > 0$) можно равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями g , для роста которых получаются оценки, зависящие лишь от α , δ и роста f на $\Delta_{\alpha+\delta}$. Более общие результаты получены в [8], считая, что $f \in A(\Delta_\alpha)$ и $f' \in A(\Delta_\alpha)$.

Целью этой работы является улучшение некоторых результатов об оптимальном равномерном приближении на углах Δ_α целыми функциями. Отметим, что такое улучшение в случае приближения на $\mathbb{R}$ достигнуто в работе [9], а для случая приближения на замкнутых полосах – в работе [10]. В этой работе будем использовать некоторые аппроксимационные построения, развитые в [8]-[10].

Работа состоит из двух параграфов. Первый содержит введение и предварительные сведения, а второй – формулировки и доказательства результатов об оптимальном равномерном приближении целыми функциями на Δ_α .

1.1. Некоторые обозначения. Ниже буквы $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных и вещественных чисел. Обозначим через $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ соответственно комплексную плоскость и риманову сферу. *Внутренность, замыкание и границу* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим соответственно через E° , $\overline{E}$ и ∂E , а *дополнение* E в $\mathbb{C}$ через E^c .

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, а $C(E)$ обозначает класс непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$. Положим

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|,$$

если E – компактное множество. Если же E – неограниченное множество, так что $E \cap \partial D_r \neq \emptyset$ для $r \geq r_0 \geq 0$, то положим

$$M_f(r) = M_f(r, E) := \|f\|_{E \cap \overline{D}_r}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – открытое множество и $C'(\Omega)$ есть класс непрерывно дифференцируемых в смысле $\mathbb{R}^2$ комплексных функций на Ω . Для $z = x + iy \in \Omega$ и $f \in C'(\Omega)$ обозначим через f'_x и f'_y частные производные f .

Предположим теперь, что G – *жорданова область* с положительно ориентированной кусочно гладкой границей Γ . Класс $C'(\overline{G})$ определим стандартным образом, как класс функций $\varphi \in C(\overline{G}) \cap C'(G)$, допускающих непрерывные продолжения производных φ'_x и φ'_y из G в $\overline{G}$. Это определяет их на Γ однозначным образом. Для $\varphi \in C'(\overline{G})$ выполняется следующий комплексный вариант известной *теоремы о дивергенции*:

$$(1.1) \quad \int_{\Gamma} \varphi(z) dz = i \int_G 2\bar{\partial}\varphi d\sigma,$$

где σ – лебегова мера площади на G и оператор $\bar{\partial}$ определяется следующим образом

$$(1.2) \quad 2\bar{\partial}\varphi := \varphi'_x + i\varphi'_y.$$

Для $\varphi, \psi \in C'(\overline{G})$ этот оператор обладает свойством

$$(1.3) \quad \bar{\partial}(\varphi\psi) = \psi\bar{\partial}\varphi + \varphi\bar{\partial}\psi.$$

В *полярных* координатах $t = re^{i\theta}$ частные производные функции φ по r и θ обозначим соответственно через φ'_r и φ'_θ . В этих терминах

$$(1.4) \quad 2\bar{\partial}\varphi = r\varphi'_r + i\varphi'_\theta.$$

Как обычно, $H(\Omega)$ обозначает класс *голоморфных* в Ω функций, так что $\varphi \in H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C'(\Omega)$ и $\bar{\partial}\varphi = 0$ в Ω (условие Коши-Римана), при котором (1.1) есть классическая теорема Коши с нулевой левой частью.

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^\circ),$$

и пусть $A'(E)$ и $A''(E)$ есть классы функций $E \rightarrow \mathbb{C}$ соответственно один и два раза непрерывно дифференцируемых на E в смысле $\mathbb{C}$. Предположим теперь,

что $\varphi \in C'(\overline{G})$. Из (1.1) следует формула

$$(1.5) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t) C_t(z) dt - \frac{1}{\pi} \int_G \bar{\partial} \varphi(t) C_t(z) d\sigma, \quad z \in G,$$

где $\Gamma = \partial G$ положительно ориентирована относительно G и $C_t(z) = (t - z)^{-1}$ – *ядро Коши*. Заметим, что (1.5) известна как обобщенная формула Коши, (иногда как *формула Бореля-Помпейю*), совпадающая для $\varphi \in H(\overline{G})$ с $\bar{\partial} \varphi = 0$ на $\overline{G(\zeta)}$ с классической формулой Коши.

Положим также:

$$d(z) = d(z, E) := \inf \{ |z - \zeta| : \zeta \in E \}$$

– расстояние от $z \in \mathbb{C}$ до $E \subset \mathbb{C}$;

$$E^\tau := \{ \zeta \in \mathbb{C} : d_E(\zeta) \leq \tau \}$$

– τ -окрестность множества $E \subset \mathbb{C}$;

$$D_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < r \}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad r > 0,$$

– открытый круг, $D_r = D_r(0)$;

$$l_\theta := \{ z = re^{i\theta} : r \geq 0 \}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

– луч, $\mathbb{R}_+ = l_0$ и $\mathbb{R}_- = l_\pi$;

$$\Delta_{\alpha, \beta} := \{ z = re^{i\theta} : r \geq 0, \alpha \leq \theta \leq \beta \}$$

– угол раствора $\beta - \alpha < 2\pi$;

$$\Delta_\alpha(\beta) := \Delta_{\beta - \alpha/2, \beta + \alpha/2}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

– угол с биссектрисой l_β ;

$$\Delta_\alpha := \Delta_\alpha(0), \quad \gamma_\alpha := l_{\alpha/2} \cup l_{-\alpha/2} = \partial \Delta_\alpha, \quad d_\alpha(z) = d(z, \gamma_\alpha) \quad (z \in \mathbb{C});$$

$$x^+ := \max\{x, 0\} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \log^+ x = (\log x)^+ \quad (x > 0), \quad \log^+ 0 = 0;$$

$$s_z := \begin{cases} z/|z| & \text{для } z \neq 0, \\ 0 & \text{для } z = 0. \end{cases}$$

1.2. Гладкое продолжение гладких функций. Воспользуемся специальным результатом о C' -продолжении для функции $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Положим $\sigma = 2\pi - \alpha$, так что $\partial \Delta_\sigma(\pi) = \gamma_\alpha = \partial \Delta_\alpha$. Наша цель – построение C' -функции f_* на $\mathbb{C}$ такой, что $f_* = f$ на Δ_α , с подходящими оценками для f_* и $\bar{\partial} f_*$ на $\Delta_\sigma(\pi)$ в терминах роста f' (а также f'' , если $f \in A''(\Delta_\alpha)$). Фактически, функция f_* на $\Delta_\sigma(\pi)$ будет построена на основе лишь значений сужения $f|_{\gamma_\alpha}$.

1°. Рассмотрим в $\Delta_\sigma(\pi)$ дополнительные углы $\Delta_\sigma^+ = \Delta_{\alpha/2, \pi}$ и $\Delta_\sigma^- = \Delta_{-\alpha/2, -\pi}$ и введем две C' -функции $\zeta = \zeta(t)$ и $w = w(t)$, определенные отдельно для $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma^\pm$ формулами:

$$(1.6) \quad \zeta = (r \sin \varphi) e^{\pm i\alpha/2} \quad \text{и} \quad w = w_\pm = (r\tau^{-1} \cos \varphi) e^{\pm i\alpha/2},$$

где $\varphi = \tau(\pi - |\theta|) \in [0, \pi/2]$ и $\tau = \pi/\sigma$. Фактически, $\zeta \in C(\Delta_\sigma(\pi))$, поскольку $\zeta = 0$ на $\mathbb{R}_-$ с обеих сторон, однако $w_+ \neq w_-$ на $\mathbb{R}_-$. Согласно (1.6) легко можем проверить соотношения

$$(1.7) \quad r\zeta'_r = \zeta, \quad rw'_r = w, \quad \zeta'_\theta = -s_\theta \tau^2 w, \quad w'_\theta = s_\theta \zeta.$$

Замечание 1. Функции ζ и w из (1.6) имеют следующие свойства:

- (a) $\zeta, w \in l_{\pm\alpha/2}$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$, что влечет $\zeta + w \in l_{\pm\alpha/2}$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$,
- (b) $\zeta(t) = t$ или $w(t) = 0$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$ только при $t \in l_{\pm\alpha/2}$,
- (c) $\zeta(t) = 0$ для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$ только при $t \in \mathbb{R}_-$,
- (d) если $d = d_\sigma(t)$ – расстояние от $t \in \Delta_\sigma^\pm$ до γ_α , то

$$(1.8) \quad |\zeta| \leq r, \quad \tau|w| \leq r \quad \text{и} \quad |w| \leq 2d_\sigma(t).$$

Достаточно проверить только третье неравенство в (1.8). Согласно (1.6)

$$(1.9) \quad |w| = \frac{r}{\tau} \sin(\tau\vartheta),$$

где $\vartheta = |\theta| - \alpha/2 \in [0, \sigma/2]$. Если теперь $\vartheta > \pi/2$ в (1.9) и $\sigma > \pi$, то $d = r$ и $|w| \leq r/\tau \leq 2d$, если же $\vartheta \leq \pi/2$, то $d = r \sin \vartheta$ и, поскольку $\sin(\tau\vartheta) \leq \tau\vartheta \leq (\tau\pi/2) \sin \vartheta$, то снова имеем $|w| \leq (\pi/2)d \leq 2d$.

2°. Определим искомую функцию $f_* \in C'$ на $\mathbb{C}$ для $f \in A'(\Delta_\alpha)$ с $f_* = f$ на Δ_α , считая сперва, что

$$(1.10) \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

Положим для $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma^\pm$, где $\pm\theta \in [\alpha/2, \pi]$,

$$(1.11) \quad f_*(t) = f(\zeta) + is_\theta \psi(\theta) \phi(t),$$

где $\psi(\theta) = \sin \varphi$, $\varphi = \tau(\pi - |\theta|)$, s_θ является знаковой функцией θ , и

$$(1.12) \quad \phi(t) = f(\zeta + w) - f(\zeta) - f(w).$$

Формулы (1.11) и (1.12) используют лишь значения сужения $f|_{\gamma_\alpha}$ (см. замечание 1, (a)).

Формально, (1.12) определяет две разные C' -функции на $\Delta_\sigma^\pm$. Но отметим, что согласно замечанию 1(c) $\phi(t)$ *равняется нулю* для $t \in \mathbb{R}_-$, т.е. для $\zeta = 0$, независимо от выбора ветвей $w_\pm$. Положив $\phi \equiv 0$ на l_π , получим, что $\phi \in C(\Delta_\sigma(\pi))$. При этом $w = f(w) = 0$ для $w \in \gamma_\alpha$, по замечанию 1(b) и (1.10), откуда следует, что $\phi \equiv 0$ на γ_α .

Отметим, что $f_* \in C(\Delta_\sigma(\pi))$ и $f_* = f$ на γ_α по замечанию 1(b), так что $f(\zeta) = f(t)$ и $\phi(t) \equiv 0$ для $t \in \gamma_\alpha$. В виду (1.11), (1.12) и (1.8) получим оценку

$$(1.13) \quad |f_*(t)| \leq 4M_f(r + 2d, \gamma_\alpha), \quad t \in \Delta_\sigma(\pi).$$

3°. Чтобы проверить условие $f_* \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$, отметим, что $f \circ \zeta \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$ и по (1.4) и (1.7) имеем

$$(1.14) \quad 2\bar{t}\bar{\partial}f(\zeta) = f'(\zeta)(\zeta - is_\theta\tau^2w), \quad t \in \Delta_\sigma(\pi).$$

Далее, $\psi \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$ и $\phi \in C'(\Delta_\sigma^\pm)$. Поскольку $(\psi\phi)'_r = \psi\phi'_r$ и $(\psi\phi)'_\theta = \psi'\phi + \psi\phi'_\theta$ на $\Delta_\sigma^\pm$ и $\phi = \psi = 0$ на $\mathbb{R}_-$, то $(\psi\phi)'_r$, $(\psi\phi)'_\theta$ и $\bar{\partial}(\psi\phi)$ исчезают на $\mathbb{R}_-$ с обеих сторон. Итак, $s_\theta\psi\phi \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$, что влечет $f_* \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$.

Согласно (1.4), (1.7) и (1.12) для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$ имеем

$$2\bar{t}\bar{\partial}\phi(t) = [f'(\zeta + w) - f'(\zeta)](\zeta - is_\theta\tau^2w) + [f'(\zeta + w) - f'(w)](w + is_\theta\zeta).$$

Это вместе с (1.3), (1.11) и (1.14) дает для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$

$$(1.15) \quad \begin{aligned} 2\bar{t}\bar{\partial}f_*(t) = & -s_\theta\psi'(\theta)\phi(t) + \eta_1f'(\zeta) + \eta_2f'(w) \\ & + \eta_3[f'(\zeta + w) - f'(\zeta)] + \eta_4[f'(\zeta + w) - f'(w)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1 - \psi(\theta))\zeta + is_\theta\tau^2w, & \eta_2 &= \psi(\theta)\zeta, \\ \eta_3 &= \psi(\theta)(\tau^2w + is_\theta\zeta - \zeta), & \eta_4 &= is_\theta\psi(\theta)w. \end{aligned}$$

Правая часть (1.15) равняется нулю при $t \in \gamma_\alpha$, поскольку в этом случае $w = 0$ и $|\theta| = \alpha/2$, откуда следует, что $\eta_1 = \eta_4 = 0$ и $\phi(t) = 0$, $f'(w) = 0$. Таким образом, $\bar{\partial}f_*(t) = 0$ для $t \in \gamma_\alpha$.

4°. Для оценки $\bar{\partial}f_*(t)$ при $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma(\pi)$, мы должны оценить функции η_k ($1 \leq k \leq 4$). Поскольку $1 - \psi(\theta) \leq \cos\varphi$ с $\varphi = \tau(\pi - |\theta|)$, то из (1.6) и (1.8) следует, что

$$(1.16) \quad |\eta_1| \leq (\tau + \tau^2)|w|, \quad |\eta_4| \leq |w|.$$

Так что снова в силу (1.8) имеем

$$(1.17) \quad |\eta_1| \leq (1 + \tau)r, \quad |\eta_4| \leq \tau^{-1}r,$$

и, аналогично,

$$(1.18) \quad |\eta_2| \leq r, \quad |\eta_3| \leq (2 + \tau)r.$$

Теперь с помощью интегрирования f' вдоль γ_α согласно (1.12) получим

$$(1.19) \quad |\phi(t)| \leq \int_0^w |f'(\zeta + s) - f'(s)| |ds|.$$

Поскольку $|\psi'(\theta)| \leq \tau$, (1.19) вместе с (1.8) дает

$$|\psi'(\theta)\phi(t)| \leq 2\tau|w|M_{f'}(|\zeta| + w) \leq 2rM_{f'}(r + 2d, \gamma_\alpha), \quad t \in \Delta_\sigma(\pi).$$

Отсюда и из (1.15), с учетом (1.17), (1.18) приходим к неравенству

$$(1.20) \quad |\bar{\partial}f_*(t)| \leq k'_\alpha M_{f'}(r + 2d, \gamma_\alpha), \quad t \in \Delta_\sigma(\pi),$$

где $k'_\alpha > 0$ – постоянная, зависящая только от α .

5°. Полагая, что $f \in A''(\gamma_\sigma)$, можем оценить $\bar{\partial}f_*$ на $\Delta_\sigma(\pi)$ также в терминах роста f'' на γ_α . По теореме о среднем значении применительно к (1.19) и (1.8) следует, что

$$|\phi(t)| \leq M_{f''}(|\zeta| + |w|, \gamma_\alpha)|\zeta w| \leq 2rdM_{f''}(r + 2d, \gamma_\alpha).$$

Аналогичные оценки могут быть получены также для других четырех членов в (1.15): используя на этот раз оценки (1.16) для η_1 и η_4 и (1.18) для η_2 и η_3 вместе со свойством о среднем значении соответственно для интервалов $[0, \zeta]$, $[0, w]$, $[\zeta, \zeta + w]$ и $[w, \zeta + w]$. Окончательно, из (1.15) и (1.8) получим:

$$(1.21) \quad |\bar{\partial}f_*(t)| \leq k''_\alpha dM_{f''}(|t| + 2d, \gamma_\alpha), \quad t \in \Delta_\sigma(\pi),$$

где постоянная $k''_\alpha > 0$ зависит лишь от α .

6°. Чтобы определить функцию f_* без условия (1.10), положим $r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$ и

$$(1.22) \quad \mathbf{f}(t) = f(t) - \lambda(t), \quad t \in \Delta_\alpha,$$

где $\lambda \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{-r_\alpha\})$ – дробно-линейная функция

$$\lambda(t) = f(0) + f'(0)t r_\alpha(t + r_\alpha)^{-1}.$$

Теперь $\mathbf{f}$ удовлетворяет (1.10). Если $\mathbf{f}_*$ построена для $\mathbf{f}$ как в (1.11) и (1.12), то положим $f_* = \mathbf{f}_* + \lambda$, где $\mathbf{f}_* \in C'$ на $\mathbb{C}$, так что $f_* = f$ и $\bar{\partial}f_* = \bar{\partial}f$ на γ_α , поскольку

$\bar{\partial}\lambda(t) = 0$ для $t \in \Delta_\alpha$. При этом, существует постоянная $k_\alpha > 0$, зависящая от α , так что

$$|\lambda(t)| \leq |f(0)| + k_\alpha |f'(0)|, \quad \max \{|\lambda'(t)|, |\lambda''(t)|\} \leq k_\alpha |f'(0)|$$

для $t \in \Delta_\alpha$. Отсюда и из (1.13), (1.20) и (1.21) (с $\mathbf{f}$ вместо f) получим оценки для $t \in \Delta_\sigma(\pi) \setminus D_1\{-r_\alpha\}$

$$(1.23) \quad |f_*(t)| \leq k[M_f(r + 2d, \gamma_\alpha) + 1],$$

$$(1.24) \quad |\bar{\partial}f_*(t)| \leq kM_{f'}(r + 2d, \gamma_\alpha),$$

$$(1.25) \quad |\bar{\partial}f_*(t)| \leq kd[M_{f''}(|t| + 2d, \gamma_\alpha) + 1],$$

где $k > 1$ – постоянная, зависящая только от α и $|f'(0)|$. Суммируя сказанное, приходим к следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\sigma := 2\pi - \alpha$ (так что $\partial\Delta_\sigma(\pi) = \gamma_\alpha$). Для $f \in A'(\Delta_\alpha)$ существует C' -функция f_* на $\mathbb{C} \setminus \{-r_\alpha\}$ с $r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$, удовлетворяющая условиям

- (i) $f_* = f$ на Δ_α , так что $\bar{\partial}f_* = 0$ на Δ_α ,
- (ii) рост f_* и $\bar{\partial}f_*$ для $t \in \Delta_\sigma(\pi) \setminus D_1\{-r_\alpha\}$ ограничены неравенствами (1.23) и (1.24), где $d = d_\alpha(t)$ – расстояние от t до γ_α и $k > 1$ зависит от α и $|f'(0)|$. Если же $f \in A''(\Delta_\alpha)$, то тогда дополнительно выполняется также уравнение (1.25).

1.3. Приближение ядра Коши. Процесс оптимального равномерного приближения на угловой области $\Delta_\alpha \subset \mathbb{C}$ с $\alpha \in (0, 2\pi)$ целыми функциями будет реализован в два шага. Используя лемму 1 и формулу представления (1.6), сначала аппроксимируем данную функцию $f \in A''(\Delta_\alpha)$ на Δ_α функциями $F \in A(\Delta_\alpha^\tau)$ для некоторого $\tau > 0$ с оценкой роста на Δ_α^τ . Затем F равномерно приближается на Δ_α целыми функциями. Осуществление обоих шагов основано на построении соответствующих голоморфных и целых приближений ядра Коши $C_t(z) = (t - z)^{-1}$ для $z \in \Delta_\alpha$ и $t \in \Delta_\sigma(\pi) = (\Delta_\alpha^\circ)^c$, с оценкой роста аппроксимирующих функций.

В этом разделе мы аппроксимируем ядро Коши C_t с фиксированным полюсом $t \in \Delta_\alpha^\tau \setminus \Delta_\alpha$ ограниченными функциями из $A(\Delta_\alpha^\tau)$ на Δ_α для всех t , а также на каждом компактном подмножестве в Δ_α^τ , если t находится достаточно далеко от подмножества. Мы сводим приближение этого типа к приближению нулевой

функции функциями из $A(\Delta_\alpha^\tau)$, равными 1 в точке t . Введем для этого некоторые обозначения.

1°. Для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\tau > 0$ положим $\gamma_{\alpha,\tau} := \partial\Delta_\alpha^\tau$ и с каждой точкой $t \in \Delta_\alpha^\tau \setminus \Delta_\alpha^\circ$ свяжем точку $t_\tau \in \gamma_{\alpha,\tau}$ так, что $|t - t_\tau| = d(t, \gamma_{\alpha,\tau})$. Тогда $|t| \leq |t_\tau|$ и $t \in \gamma_{\alpha,\tau}$ тогда и только тогда, когда $\tau = d_\alpha(t)$.

Заметим, что для $\alpha \leq \pi$ точка t_τ определена *однозначно* по точке $t \in \Delta_\alpha^\tau \setminus \Delta_\alpha$ и соответствие $t \rightarrow t_\tau$ очевидно является *ортогональной проекцией* на $\gamma_{\alpha,\tau}$, удовлетворяющей равенству

$$(1.26) \quad |t - t_\tau| = \tau - d_\alpha(t),$$

так что $|t| \leq |t_\tau| \leq |t| + \tau$. Чтобы (1.26) имело место также для $\alpha > \pi$, достаточно считать $t \in (\Delta_\alpha^\tau \setminus \Delta_\alpha) \setminus D_{r_\tau}$, где

$$(1.27) \quad r_\tau = \frac{\tau}{\sin(\alpha/2)}.$$

Мы полагаем $D_{r_\tau} = \emptyset$ для случая $\alpha \leq \pi$ с $r_\tau = 0$.

Для *спрямляемой* дуги l обозначим через $|l|$ ее длину. Пусть $\nu \in (0, \tau)$ и $l_\nu \subset \gamma_{\alpha,\nu}$ есть дуга с ортогональной проекцией $l_\tau \subset \gamma_{\alpha,\tau}$. Тогда $|l_\nu| \leq |l_\tau|$, где равенство будет в случае, когда l_ν (а также l_τ) – отрезок. Если же l_ν (а также l_τ) – дуга окружности, то $|l_\nu|/|l_\tau| = \nu/\tau < 1$. Если теперь ds_ν и ds_τ – *элементы длины* на линиях $\gamma_{\alpha,\nu}$ и $\gamma_{\alpha,\tau}$ в соответствующих точках, то

$$(1.28) \quad \frac{ds_\nu}{ds_\tau} \leq 1, \quad 0 < \nu < \tau.$$

2°. Далее, зафиксируем $\tau = 1$ и положим $r'_\alpha = 0$ если $\alpha \leq \pi$ и $r'_\alpha = r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$ если $\alpha > \pi$. Легко можно проверить, как для ядра Дирихле на верхней полуплоскости, существование постоянной $c_\alpha > 0$, зависящей только от α такой, что

$$(1.29) \quad \int_{\gamma_{\alpha,2}} |\zeta - z|^{-2} |d\zeta| < k_\alpha, \quad z \in \Delta_\alpha^1,$$

где несобственный интеграл сходится *локально-равномерно* на Δ_α^1 .

Положим $S_\alpha = (\Delta_\alpha^1 \setminus \Delta_\alpha^\circ) \setminus D_{r'_\alpha}$ и рассмотрим непрерывную функцию $q_\alpha(t, z)$, $(a, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times S_\alpha \times \Delta_\alpha^1$, определенную формулой

$$(1.30) \quad q_\alpha(t, z) = [w_t(z)]^{a+2}, \quad \text{где } w_t(z) = (t - \zeta)(z - \zeta)^{-1},$$

и $\zeta = t_2 \in \gamma_{\alpha,2}$ – ортогональная проекция t на $\gamma_{\alpha,2}$. Поскольку w_t не имеет нулей на односвязной, замкнутой области Δ_α^1 и $w_t \in H(\Delta_\alpha^1)$, то $q_\alpha(t, \cdot) \in H(\Delta_\alpha^1)$. Далее,

из равенства $w_t(t) = 1$ следует

$$(1.31) \quad q_a(t, t) \equiv 1, \quad t \in \Delta_\alpha^1 \setminus \Delta_\alpha^\circ.$$

Согласно формулам (1.26), (1.29) и (1.30)

$$|q_a(t, z)| \leq 4|\zeta - z|^{-2}[2 - d_\alpha(t)]^a |z - \zeta|^{-a}.$$

Поскольку всегда $|z - \zeta| \geq 1$, то

$$(1.32) \quad |q_a(t, z)| < 4e^a, \quad z \in \Delta_\alpha^1.$$

Используя далее неравенство $1 - x \leq \exp(-x)$ ($x = d_\alpha(t)/2 \leq 1/2$) для $|z - \zeta| \geq 2$, получим

$$(1.33) \quad |q_a(t, z)| \leq 4|\zeta - z|^{-2} \exp\{-ad_\alpha(t)/2\},$$

верное, в частности, для всех $z \in \Delta_\alpha$. Суммируя, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 2. Формула (1.30) определяет для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $S_\alpha = (\Delta_\alpha^1 \setminus \Delta_\alpha^\circ) \setminus D_{r'_\alpha}$ непрерывную функцию $q_a(t, z)$ от (a, t, z) на $\mathbb{R}_+ \times S_\alpha \times \Delta_\alpha^1$, с $q_a(t, \cdot) \in H(\Delta_\alpha^1)$, удовлетворяющую (1.31)-(1.33).

3°. Пусть σ – мера площади Лебега на $\mathbb{C}$. Хорошо известно, что для компакта $K \subset \mathbb{C}$ с фиксированной мерой $\sigma(K)$ интеграл

$$J_K(z) = \frac{1}{\pi} \int_K |C_t(z)| d\sigma, \quad z \in \mathbb{C}$$

достигает своего максимума для $K = D_\rho(z)$ с $\rho = [\sigma(K)/\pi]^{1/2}$, легко вычисляемый в полярных координатах:

$$(1.34) \quad |J_K(z)| \leq 2\rho = 2[\sigma(K)/\pi]^{1/2}.$$

Пусть $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ и $\delta \in (0, 1]$. Тогда, в частности, для $K_\delta = (\Delta_\alpha^\delta \setminus \Delta_\alpha^\circ) \cap \overline{D}_{r'_\alpha}$ и $\sigma(K_\delta) \leq 2r'_\alpha \delta$ следует

$$(1.35) \quad J_{K_\delta}(z) \leq 2(2r'_\alpha/\pi)^{1/2} \delta^{1/2} < 2(r'_\alpha \delta)^{1/2}$$

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

2.1. Приближение на Δ_α голоморфными функциями в окрестности Δ_α .

Пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $r'_\alpha = r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$, если $\alpha > \pi$ и $r'_\alpha = 0$, если $\alpha \leq \pi$ с $D_{r_\alpha} = \emptyset$. Положим для $\delta \in (0, 1]$

$$\Lambda_{\alpha,\delta} = (\Delta_\alpha^1 \setminus D_{r_\alpha}) \cup K_\delta, \quad \text{где} \quad K_\delta = (\Delta_\alpha^\delta \setminus \Delta_\alpha^\circ) \cap \overline{D}_{r'_\alpha},$$

так что $\Lambda_{\alpha,\delta} = \Delta_\alpha^1$ для $\alpha \leq \pi$ независимо от δ . Таким образом, $d_\alpha(t) = \delta$ для $t \in \partial\Lambda_{\alpha,\delta} \cap D_{r'_\alpha}$ и $d_\alpha(t) = 1$ для $t \in \partial\Lambda_{\alpha,\delta} \setminus \overline{D}_{r'_\alpha}$.

Следующая лемма является вариантом реализации первого из упомянутых выше шагов приближения.

Лемма 3. Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и

$$(2.1) \quad a_r := \varepsilon^{-1}[M_{f''}(r+2, \gamma_\alpha) + 1], \quad r \geq 0.$$

Тогда для $\Lambda = \Lambda_{\alpha,\delta}$ с $\delta = [ca_{r_\alpha}]^{-2/3}$ существует функция $F \in A(\Lambda)$, удовлетворяющая неравенству

$$(2.2) \quad |f(z) - F(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha,$$

рост которой на Λ ограничен для $r \geq 0$ неравенством

$$(2.3) \quad M_F(r) < c_1[1 + M_f(r+2, \Delta_\alpha)] + \exp\{c_2 a_{r+6}\},$$

где c , c_1 и c_2 – положительные постоянные, зависящие только от α и $|f'(0)|$.

Доказательство. Положим $S = \Lambda \setminus \Delta_\alpha^\circ$, $S_r = S \cap \overline{D}_r$ и $\Lambda_r = \Lambda \cap \overline{D}_r$ для $(r \geq 0)$. Пусть f_* есть C' -функция на $\mathbb{C} \setminus \{-r_\alpha\}$, построенная для f в лемме 1. Формула (1.5), примененная к f_* и к области Λ_r дает

$$(2.4) \quad f_*(z) = I_r(z) - J_r(z), \quad z \in \Lambda_r^\circ,$$

где

$$I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_r} f_*(t) C_t(\cdot) dt \quad \text{и} \quad J_r = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} \overline{\partial} f_*(t) C_t(\cdot) d\sigma.$$

Пусть $q(t, z) := q_a(t, z)$ – функция из леммы 2, определенная по формуле (1.30) для всех $t \in S \setminus D_{r'_\alpha}$, где a зависит от $|t|$, т.е. $a = 2c'a_{|t|+2}$, где a_r определено формулой (2.1), а c' подлежит выбору. Тогда для $\alpha > \pi$ положим $q(t, z) = 1$ ($t \in S_{r'_\alpha}$). Имеем, что $q(t, z)$ – кусочно непрерывна по t , $q(t, \cdot) \in H(\Lambda_\alpha)$ и $q(t, t) \equiv 1$,

$t \in S$. Следовательно, из $\mathcal{R}(t, z) := C_t(z)[q(t, z) - 1]$ следует, что $\mathcal{R}(t, \cdot) \in H(\Lambda)$ и для $z \in \Lambda_r$ интеграл

$$(2.5) \quad \mathcal{I}_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} \bar{\partial} f_*(t) \mathcal{R}(t, z) d\sigma$$

определяет функцию $\mathcal{I}_r \in A(\Lambda_r)$. Полагая $g(t, z) = \bar{\partial} f_*(t) C_t(z) q(t, z)$, $(t, z) \in S \times \Lambda$ и

$$(2.6) \quad \mathbb{J}_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} g(t, z) d\sigma, \quad z \in \Lambda,$$

согласно (2.4) и (2.5) получим $\mathbb{J}_r - J_r = \mathcal{I}_r \in A(\Lambda_r)$. Полагая $F_r := f_* + \mathbb{J}_r$, очевидно, имеем $F_r \in C(\Lambda_r)$, и по формулам (2.4)-(2.6) имеем $F_r = I_r + \mathcal{I}_r \in H(\Lambda_r^\circ)$, так что $F_r \in A(\Lambda_r)$.

Наша первая цель – подтверждение локально-равномерной сходимости F_r на Λ при $r \rightarrow \infty$ к функции $F \in A(\Lambda)$, которую желательно представить в виде

$$(2.7) \quad F(z) = f_*(z) + \mathbb{J}_\infty(z), \quad z \in \Lambda,$$

если несобственный интеграл

$$\mathbb{J}_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_S g(t, z) d\sigma$$

локально-равномерно сходится на Λ . Тогда доказательство (2.2) и (2.3) можно свести к оценке $|\mathbb{J}_\infty|$ на Δ_α и Λ соответственно.

Оценим сначала $g(t, z)$ в (2.6) для $(t, z) \in S \times \Lambda$. В силу формул (1.25) и (2.1) имеем

$$(2.8) \quad |\bar{\partial} f_*(t)| \leq (\varepsilon k) a_{|t|} d_\alpha(t), \quad t \in S,$$

где $k > 1$ зависит от α и $|f'(0)|$. Если $t \in S \cap D_{r_\alpha}$, $\alpha > \pi$, $d_\alpha(t) \leq \delta$ и $q(t, z) \equiv 1$, то имеем

$$|g(t, z)| \leq \varepsilon k a_{r_\alpha} \delta |C_t(z)| = (\varepsilon k/c) \delta^{-1/2} |C_t(z)|.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по S_{r_α} и фиксируя $c = 4kr_\alpha^{1/2}$, согласно (1.35) и (2.6) получим, что, если $\alpha > \pi$, то

$$(2.9) \quad |\mathbb{J}_{r_\alpha}(z)| < \varepsilon/2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для всех остальных значений $t \in S$, неравенство

$$(2.10) \quad |q(t, z)| \leq 4|z - t_2|^{-2} \exp \{ -c' a_{|t|+2} d_\alpha(t) \}$$

выполняется согласно (1.33) для $z \in \Lambda$ таких, что $|z - t_2| \geq 2$. Тогда согласно (1.26) $|t - z| \geq d_\alpha(t)$, следовательно, $|C_t(z)|d_\alpha(t) \leq 1$. Если же $|z - t_2| < 2$, то по (1.32) имеем

$$(2.11) \quad |q(t, z)| \leq 4 \exp \{2c' a_{|t|+2}\}.$$

Теперь из (2.8), (2.10) и (2.11) следует

$$(2.12) \quad |g(t, z)| \leq |C_t(z)| \exp \{3c' a_{|t|+2}\}, \quad z \in \Lambda,$$

для $c' \geq 2k$. Если, в частности, $|z - t_2| \geq 2$, то тогда

$$(2.13) \quad |g(t, z)| \leq 4\varepsilon k |z - t_2|^{-2} a_{|t|} \exp \{-c' d_\alpha(t) a_{|t|+2}\},$$

которое омеет место для всех $(t, z) \in S \times \Delta_\alpha$.

Положим теперь $\gamma_{\alpha, \tau} = \partial \Delta_\alpha^\tau$ и $\gamma_{\alpha, \nu, r} = \gamma_{\alpha, \tau} \setminus D_r$ для любого $r \geq r'_\alpha$. Тогда из (1.26) следует, что $d_\alpha(t) = \tau$ и $|t| \leq |t_2| \leq |t| + 2$ для $t \in \gamma_{\alpha, \tau}$ и $\nu \in [0, 1]$. Следовательно, положив $\zeta = t_2 \in \gamma_{\alpha, 2}$ из (2.12) и (2.13) получим

$$(2.14) \quad |g(t, z)| \leq \varepsilon k |z - \zeta|^{-2} a_{|\zeta|} \exp \{-c' a_{|\zeta|} \tau\}$$

для $(t, z) \in \gamma_{\alpha, \tau} \times \Lambda$ и $|z - \zeta| \geq 2$. Правая часть (2.14), как подынтегральная функция, фактически зависит только от ζ . Так как $ds_\tau / |d\zeta| \leq 1$, то по (1.28) имеем $d\sigma \leq d\tau |d\zeta|$. Положив $l_r = \gamma_{\alpha, 2} \setminus D_r$ из (2.14) получим оценку

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \int_{S \setminus S_r} |g(t, z)| d\sigma &\leq \varepsilon k \int_{l_{2, r}} |z - \zeta|^{-2} \int_0^1 \exp \{-c' a_{|\zeta|} \tau\} a_{|\zeta|} d\tau |d\zeta| \\ &< \frac{\varepsilon k}{c'} \int_{l_{2, r}} |z - \zeta|^{-2} |d\zeta|, \quad z \in \Lambda_{\alpha, r'}, \quad r > r'. \end{aligned}$$

Из локально-равномерной сходимости интеграла в (1.29) и (2.15) следует, что $\mathbb{J}_r(z) \rightarrow \mathbb{J}_\infty(z)$ при $r \rightarrow \infty$ локально-равномерно для $z \in \Lambda_{r'}$. Таким образом, $F \in A(\Lambda)$.

При $z \in \Delta_\alpha$ выражение (2.15) выполняется также для $r = r'_\alpha$, и (1.29) влечет оценку

$$|\mathbb{J}_\infty(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mathbb{J}_{r'_\alpha}(z)|,$$

если окончательно фиксировать $c' = 16k(k_\alpha + 1)$ с постоянной k_α , удовлетворяющей (1.29). Поскольку по лемме 1 $f_* = f$ на Δ_α и $r'_\alpha = 0$ при $\alpha \leq \pi$, то это вместе с (2.9) для $\alpha > \pi$ и (2.7) доказывает, что F удовлетворяет (2.2).

Для доказательства (2.3) оценим $\mathbb{J}_\infty(z)$ для $z \in \Lambda_\alpha$. Положим $\mathbb{J}_\infty(z) = \mathbb{J}'(z) + \mathbb{J}''(z)$, т.е. как сумму интегралов функции $g(t, z)$ по $t \in S' = S \setminus D_4(z)$ и $t \in S'' =$

$S \cap D_4(z)$ соответственно. Тогда из (1.26) для $t \in S'$ следует $|z - \zeta| \geq 2$ для $\zeta = t_2$, и как в (2.15), мы из (2.13) получим $|\mathbb{J}'(z)| < \varepsilon \leq 1$. Далее, для $t \in S''$ имеем $|t| \leq r + 4$ с $r = |z|$ и $\sigma(S'') < 8$, поэтому согласно (1.34) $J_{S''} \leq 2[\sigma(S'')/\pi]^{1/2} < 4$. Теперь, полагая $c_2 = 4c'$, по (2.12) имеем

$$(2.16) \quad |\mathbb{J}_\infty(z)| < 1 + |\mathbb{J}''(z)| \leq c' \exp\{3c'a_{|t|+2}\} \leq \exp\{c_2 a_{r+6}\}.$$

Отметим, что согласно (2.7)

$$|F(z)| \leq |f_*(z)| + |\mathbb{J}_\infty(z)|, \quad z \in \Lambda,$$

что вместе с (2.16) влечет (2.3), учитывая, что по лемме 1 $f_* = f$ на Δ_α , и согласно формуле (1.23)

$$|f_*(z)| \leq c_1[M_f(r+2, \Delta_\alpha) + 1], \quad z \in \Lambda,$$

где c_1 зависит от α и $|f'(0)|$. Это завершает доказательство леммы 3.

Применяя неравенство $\log^+(a+b) \leq \log^+ a + \log^+ b + \log 2$ ($a, b \geq 0$) к функции $M_F(r)$ и используя (2.3) и (2.1), приходим к следующему замечанию.

Замечание 2. Рост функции $F \in A(\Lambda)$ в лемме 3 удовлетворяет неравенству

$$(2.17) \quad \log^+ M_F(r) < c_3 \{ \log^+ M_f(r+2, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1}[M_{f''}(r+8, \gamma_\alpha) + 1] \}, \quad r \geq 0,$$

где $c_3 > 0$ зависит только от α и $|f'(0)|$.

2.2. Равномерное приближение на Δ_α целыми функциями. Следующая лемма о равномерном приближении ядра Коши $C_\zeta(z)$ на Δ_α с полюсами ζ вне Δ_α целыми функциями с оптимальным ростом на $\mathbb{C}$ является основным средством для второго шага наилучшего приближения целыми функциями на угловых областях (см. лемму 1 в [8]).

Лемма 4. Для $\alpha \in (0, 2\pi)$ существует непрерывная функция $h_b(\zeta, z)$ переменных $(b, \zeta, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Delta_\alpha^c \times \mathbb{C}$ такая, что $h_b(\zeta, z)$ является целой функцией по z для фиксированного $(b, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times \Delta_\alpha^c$, удовлетворяющего неравенству

$$(2.18) \quad |h_b(\zeta, z) - C_\zeta(z)| < 44\delta^{-1} \exp\{-b\}, \quad z \in \overline{D}_{|\zeta|/2} \cup \Delta_\alpha,$$

где $\delta = d_\alpha(\zeta)$ есть расстояние от ζ до $\gamma_\alpha = \partial\Delta_\alpha$.

Рост функции $h_b(\zeta, z)$ для $z \in \mathbb{C} \setminus D_{|\zeta|/2}$ ограничен неравенством

$$(2.19) \quad |h_b(\zeta, z)| < \delta \exp \left\{ c_\alpha \frac{b}{\delta} |\zeta|^{1-\rho} (|z| + \delta)^\rho \right\},$$

где $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ и $c_\alpha > 0$ – постоянная, зависящая только от α .

Следующая лемма утверждает, что существует целая функция - вес для полуплоскости Δ_π .

Лемма 5. *Существует целая функция Ω с $\Omega(0) = 1$ такая, что $\omega(\zeta, z) := \Omega(\zeta - z)$ удовлетворяет:*

$$(2.20) \quad |\omega(\zeta, z)| \leq 4|\zeta - z|^{-2}, \quad (\zeta, z) \in \gamma_\pi^1 \times \Delta_\pi,$$

$$(2.21) \quad |\omega(\zeta, z)| \leq 4e^{2|z|} \min \{1, |\zeta - z|^{-2}\}, \quad (\zeta, z) \in \gamma_\pi^1 \times \mathbb{C},$$

$$(2.22) \quad |\omega(\zeta, z)| \leq e^{4|\zeta|}, \quad (\zeta, z) \in \Delta_\pi^1 \times \mathbb{C}, \quad |z| + 1 \leq |\zeta|.$$

Доказательство. Положим $\Omega(w) = [e^w - 1]^2 w^{-2}$, $w \in \mathbb{C}$. Тогда, очевидно, $\Omega(0) = 1$,

$$|\Omega(w)| \leq (e - 1)^2 < 4, \quad |w| \leq 1$$

и

$$|\Omega(w)| \leq 4e^{2(\operatorname{Re} w)^+} |w|^{-2}, \quad |w| \geq 1,$$

откуда легко следуют оценки (2.20)-(2.22).

1°. Далее мы рассмотрим равномерное приближение целыми функциями на Δ_α сначала для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ в теореме 1, а затем для $\alpha \in (0, \pi)$ в теореме 2.

Теорема 1. *Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда существует целая функция g , удовлетворяющая*

$$(2.23) \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha,$$

рост которой для $|z| = r \geq 0$ ограничен следующими неравенствами: в случае $\alpha = \pi$

$$(2.24) \quad \log^+ M_g(r) < c(1 + r) [\log^+ M_f(t, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} M_{f''}(t, \gamma_\alpha) + \varepsilon^{-1}],$$

где $t = r + 10$ и $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $|f'(0)|$; в случае $\alpha > \pi$

$$(2.25) \quad \log^+ M_g(r) < c\varepsilon^{-2\rho/3} (1 + r)^\rho [\log^+ M_f(t, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} M_{f''}(t, \gamma_\alpha) + \varepsilon^{-1}],$$

где $t = 2(r + 10)$ и постоянная $c > 0$ зависит от α , $|f'(0)|$ и $M_{f''}(r_\alpha + 2)$.

Доказательство. Пусть $F \in A(\Lambda)$ – функция, построенная для f как в лемме 3. Положим $\Gamma = \partial\Lambda$ и пусть $\delta = d_\alpha(\zeta)$ ($\zeta \in \Gamma$). Если $\alpha = \pi$, тогда $\delta = 1$, если же $\alpha > \pi$, то тогда $\delta = 1$, если $|\zeta| > r_\alpha$ и

$$\delta = \delta_{\varepsilon, \alpha} = [c a_{r_\alpha}]^{-2/3} = c_{f, \alpha} \varepsilon^{2/3},$$

для $|\zeta| \leq r_\alpha$, где $c_{f,\alpha} \in (0, 1)$ – постоянная, зависящая от α , $|f'(0)|$ и $M_{f''}(r_\alpha + 2)$ (см. лемму 3). Таким образом, из $\zeta \in \Gamma$ следует $|\zeta| \geq 1$ для $\alpha = \pi$ и $|\zeta| \geq \delta_{\varepsilon,\alpha}$ для $\alpha > \pi$.

Пусть $h_b(\zeta, z)$ – функция из леммы 4, положим $h(\zeta, z) = h_{b_{|\zeta|}}(\zeta, z)$ для $(\zeta, z) \in \Lambda \times \mathbb{C}$, где

$$(2.26) \quad b_t = \log^+ M_F(t) + 2s_{\alpha-\pi} \log \frac{t+1}{c_{f,\alpha}} + \log \frac{44k}{\varepsilon}, \quad t \geq 0,$$

с постоянной $k \geq 1$ подлежащей выбору. Положим

$$(2.27) \quad g(\zeta, z) = F(\zeta)[h(\zeta, z) - C_\zeta(z)]\omega_\alpha(\zeta, z),$$

где $\omega_\alpha \equiv 1$ для $\alpha > \pi$ и $\omega_\pi = \omega$ – функция, определенная в лемме 5. Тогда из формул (2.18), (2.26) и (2.27) для $(\zeta, z) \in \Gamma \times (\Delta_\alpha \cup \overline{D}_{|\zeta|/2})$ следует, что функция $g(\zeta, z)$ удовлетворяет неравенству

$$(2.28) \quad |g(\zeta, z)| \leq (\varepsilon/k)(1 + |\zeta|)^{-2} \quad \text{если} \quad \alpha > \pi.$$

Аналогичная оценка для $\alpha = \pi$ следует из (2.20), (2.21), (2.26) и (2.27):

$$(2.29) \quad |g(\zeta, z)| \leq (4\varepsilon/k)|\zeta - z|^{-2}, \quad (\zeta, z) \in \Gamma \times \Delta_\pi,$$

и

$$(2.30) \quad |g(\zeta, z)| \leq (4\varepsilon/k)e^{2r} \min\{1, |\zeta - z|^{-2}\}, \quad (\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}, \quad r = |z|.$$

Положим $\Lambda_t = \Lambda \cap \overline{D}_t$ и $\partial\Lambda_t = \Gamma_t \cup L_t$, где $L_t = \partial D_t \cap \Lambda^\circ$ для $t \geq 0$ и предположим, что Γ и $\partial\Lambda_t$ положительно ориентированы относительно Λ° и Λ_t° соответственно, с индуцированной ориентацией на Γ_t и L_t . В силу (2.28)-(2.30) несобственный интеграл

$$(2.31) \quad I_{t,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_t} g(\zeta, z) d\zeta$$

равномерно сходится для $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$ если $\alpha > \pi$, а также для $z \in \overline{D}_{t-1} \cup \Delta_\pi$ если $\alpha = \pi$, определяя функции $I_{t,\alpha} \in A(D_{t/2} \cup \Delta_\alpha)$ и $I_{t,\pi} \in A(D_{t-1} \cup \Delta_\alpha)$ соответственно. Если $z \in \Delta_\alpha$ при $\alpha > \pi$, тогда по формуле (2.28)

$$(2.32) \quad |I_{t,\alpha}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi k} \int_\Gamma (1 + |\zeta|)^{-2} |d\zeta| < \varepsilon,$$

фиксируя достаточно большую постоянную $k = k_\alpha > 0$. В случае $k_\pi > 2$ оценка (2.29) влечет

$$(2.33) \quad |I_{t,\pi}(z)| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi k} \int_\Gamma |\zeta - z|^{-2} d\zeta = \frac{2\varepsilon}{k} < \varepsilon.$$

Используя (2.30), для $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma_t$ с $t \geq 1$ и $|z| = r \leq t - 1$ получим

$$(2.34) \quad |I_{r,\pi}(z)| \leq e^{2r} \frac{2\varepsilon}{\pi k} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_t} |\zeta - z|^{-2} |d\zeta| < \varepsilon e^{2r}.$$

Определим теперь искомую целую функцию g по формуле

$$(2.35) \quad g(z) = I_{t,\alpha}(z) + I'_{t,\alpha}(z) + I''_{t,\alpha}(z), \quad z \in D_t,$$

где $I_{r,\alpha}(z)$ определена формулой (2.31) и

$$I'_{t,\alpha}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} F(\zeta) h(\zeta, z) \omega_\alpha(\zeta, z) d\zeta,$$

$$I''_{t,\alpha}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{L_t} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega_\alpha(\zeta, z) d\zeta.$$

Определение (2.35), фактически, не зависит от t , поскольку, если $t' > t > r = |z|$, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\Lambda_{t'} \setminus \Lambda_t)} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega(\zeta - z) d\zeta = 0,$$

что позволяет заменить t на t' в формуле (2.35).

Для доказательства (2.23) предположим, что $z \in \Delta_\alpha$ и $t > r = |z|$. Тогда по формуле Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda_t} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega_\alpha(\zeta - z) d\zeta,$$

и из (2.35) следует, что $g(z) = F(z) + I_0(z)$, где $I'_0(z) = I''_0(z) = 0$. Таким образом, $|g(z) - F(z)| < \varepsilon$ по (2.31) и (2.32), и с учетом (2.2) приходим к (2.23), заменяя, если необходимо, ε на $\varepsilon/2$.

Наконец, для доказательства (2.24) и (2.25) предположим, что $z \in \mathbb{C}$, $r \geq \delta$, и положим в (2.35) $t = 2r$, если $\alpha > \pi$ и $t = r + 1$ при $\alpha = \pi$. Тогда по (2.32) и (2.34) имеем

$$(2.36) \quad |I_{r,\alpha}(z)| < \varepsilon \exp(2s_{\alpha-\pi}t), \quad \alpha \geq \pi.$$

Для оценки $I'_{t,\alpha}(z)$ и $I''_{t,\alpha}(z)$ при $\alpha \geq \pi$ отметим, что согласно (2.19), рост $h(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Gamma_t$ и $\delta \leq |\zeta| \leq t$ ограничивается неравенством

$$(2.37) \quad |h(\zeta, z)| < \exp\{c_\alpha b_t \delta^{-\rho}(r+1)^\rho\},$$

где $b_t > 1$ определено формулой (2.26) и $c_\alpha > 0$ зависит только от α . Кроме того, из определения ω_α и (2.22) следует

$$(2.38) \quad |\omega_\alpha(\zeta, z)| < \exp\{4s_{\alpha-\pi}t\},$$

$$(2.39) \quad |F(\zeta)| \leq \exp\{\log^+ M_F(r)\} \leq \exp\{b_t\}$$

и

$$(2.40) \quad |C_\zeta(z)| \leq (t-r)^{-1} \leq \min \{1, 2/t\}.$$

Из определения $I'_r(z)$ в (2.35) и неравенств (2.37)-(2.39) для $\alpha \geq \pi$ и $c'_\alpha > c_\alpha + 4$ следует, что

$$(2.41) \quad |I'_t(z)| \leq \exp \{c'_\alpha b_t \delta^{-\rho}(r+1)^\rho\}.$$

Эта же оценка выполняется также для $|I''_t(z)|$, используя (2.35) и (2.38)-(2.40),

$$(2.42) \quad |I''_t(z)| \leq \exp \{b_t + 4s_{\alpha-\pi}t\} \leq \exp \{c'_\alpha b_t \delta^{-\rho}(t+1)^\rho\}.$$

Суммируя, из (2.35)-(2.36) и (2.41)-(2.42) получаем, что для некоторой постоянной $c''_\alpha > 0$

$$|g(z)| < \exp \{c''_\alpha b_t \delta^{-\rho}(r+1)^\rho\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

что влечет

$$(2.43) \quad \log M_g(r) \leq c_\alpha \delta^{-\rho}(r+1)^\rho b_t, \quad r \geq 0,$$

где $t = 2r$ для $\alpha > \pi$ и $t = r+1$ для $\alpha = \pi$.

Оценки (2.24)-(2.25) теоремы 1 непосредственно следуют из (2.43), (2.17) и (2.26), с учетом того, что

$$\delta = \delta(t) = c_{f,\alpha} \varepsilon^{2/3}, \quad t \leq r_\alpha,$$

для $\alpha > \pi$ и $t^{1-\rho} \log(t+1) \leq \log 2$ для $t \geq 1$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ и

$$\log M_f(r, \Delta_\alpha) = O(r^\nu) \quad \text{и} \quad M_{f''}(r, \gamma_\alpha) = O(r^\nu) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty$$

для некоторого $\nu \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существует целая функция g , удовлетворяющая (2.23), так что при этом g имеет рост не выше порядка $\rho + \nu$ и типа σ ,

$$\sigma \leq \begin{cases} c/\varepsilon & \text{при } \alpha = \pi, \\ c/\varepsilon^{1+2\rho/3} & \text{при } \alpha > \pi, \end{cases}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ε .

2° Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (0, \pi)$ с $\rho = \pi/(2\pi - \alpha) \in (1/2, 1)$. Для равномерного приближения целыми функциями на Δ_α функции $f \in A''(\Delta_\alpha)$ нам

нужна новая характеристика для f . Положим $f_\rho(w) = f(w^{1/\rho})$ для $(w \in \Delta_{\alpha\rho})$, так что

$$(2.44) \quad (f''_\rho)(z^\rho) = \rho^{-2} \{z^{1-\rho} [z^{1-\rho} f'(z)]'\}, \quad z \in \Delta_\alpha \setminus \{0\}.$$

Необходимой характеристикой является величина

$$(2.45) \quad \begin{aligned} \mu_f(r, \gamma_\alpha) &= \max_{1 \leq |z| \leq r} \{\rho^2 |(f''_\rho)(z^\rho)| : z \in \gamma_\alpha\} \\ &= \max_{1 \leq |z| \leq r} \{|z^{1-\rho} [z^{1-\rho} f'(z)]'|\} : z \in \gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Положим $\mathbf{f} = f - \lambda \in A''(\Delta_\alpha)$, где

$$\lambda(z) = f(0) + f'(0)[1 + C_{-1}(z)], \quad z \neq -1.$$

Так как $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}'(0) = 0$, то формула (2.44) для функции $\mathbf{f}''_\rho$ выполняется также для $z = 0$. Из теоремы о среднем значении следует, что

$$(2.46) \quad |\mathbf{f}''_\rho(z^\rho)| \leq 2M_{\mathbf{f}''}(1, \gamma_\alpha) := c_f, \quad z \in \gamma_\alpha, \quad |z| \leq 1.$$

Следовательно, по (2.44) и (2.45) для функции $\mathbf{f}$

$$(2.47) \quad M_{\mathbf{f}''_\rho}(r^\rho, \gamma_{\alpha\rho}) \leq 4\mu_{\mathbf{f}}(r, \gamma_\alpha) + c_f, \quad r \geq 0.$$

Отметим, что для $z \in \Delta_\alpha$

$$\lambda(z) = O(1), \quad \lambda'(z) = O(|z|^{-2}), \quad \lambda''(z) = O(|z|^{-3}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Из этого согласно (2.45) следует

$$(2.48) \quad \mu_{\mathbf{f}}(r, \gamma_\alpha) \leq \mu_f(r, \gamma_\alpha) + \mu_\lambda(r, \gamma_\alpha) \leq \mu_f(r, \gamma_\alpha) + O(r^{-1-2\rho}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Положим теперь

$$g_\lambda(z) = f(0) + f'(0)[1 + h_b(-1, z)], \quad z \in \mathbb{C},$$

где $h_b(-1, z)$ — целая функция из леммы 4 с $\delta = 1$ и

$$b = \log^+ |f(0)| + \log^+ |f'(0)| + \log \frac{44}{\varepsilon}.$$

Тогда согласно (2.19) и (2.20) целая функция $g_\lambda(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$(2.49) \quad |g_\lambda(z) - \lambda(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha,$$

$$(2.50) \quad \log |g_\lambda(z)| \leq c_\alpha b(|z| + 1)^\rho, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти неравенства и формулы (2.46)-(2.48) позволяют свести приближение функции f к приближению функции $\mathbf{f} \in A''(\Delta_\alpha)$.

Пусть $\zeta = re^{i\theta}$, где $|\theta| < \pi$. Тогда $\zeta^\rho = r^\rho e^{i\rho\theta}$ и $\zeta \in \Delta_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\zeta^\rho \in \Delta_{\alpha\rho}$. Поэтому, если $\zeta \notin \Delta_\alpha$, то $\zeta^\rho \notin \Delta_{\alpha\rho}$ и

$$d(\zeta^\rho, \gamma_{\alpha\rho}) = r^\rho \sin[\rho(|\theta| - \alpha/2)] \leq r^{\rho-1} d(\zeta, \gamma_\alpha),$$

откуда следует, что $d(\zeta^\rho, \gamma_{\alpha\rho}) \leq 1$, если $d(\zeta, \gamma_\alpha) = \min\{1, r^{1-\rho}\}$ для $(r \geq 0)$.

Полагая

$$(2.51) \quad \Omega_\alpha = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- : d(\zeta, \Delta_\alpha) \leq \min\{1, |\zeta|^{1-\rho}\}\}$$

имеем, что $\Delta_\alpha \subset \Omega_\alpha$, и $\zeta \in \Omega_\alpha \setminus \Delta_\alpha$ влечет $d(\zeta^\rho, \gamma_{\alpha\rho}) \leq 1$.

Применив лемму 3 с $\Lambda = \Delta_{\alpha\rho}^1$ к $\mathbf{f}_\rho$ и $\Delta_{\alpha\rho}$, для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ найдем функцию $\mathbf{F}_\rho \in A(\Delta_{\alpha\rho}^1)$ с $\mathbf{F}_\rho(0) = 0$, удовлетворяющую (2.2) и (2.3) вместе с (2.1). Полагая $\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}_\rho(z^\rho)$ для $(z \in \Omega_\alpha)$, определим $\mathbf{F} \in A(\Omega_\alpha)$, и, учитывая, что $\mathbf{f}(z) = \mathbf{f}_\rho(z^\rho)$ для $z \in \Delta_\alpha$, получим

$$(2.52) \quad |\mathbf{f}(z) - \mathbf{F}(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha.$$

Согласно (2.1), (2.3) и (2.46)-(2.48) рост $\mathbf{F}$ в Ω_α ограничен неравенством

$$(2.53) \quad M_{\mathbf{F}}(r) < c'[1 + M_f(r + 2, \Delta_\alpha)] + \exp\{c''\varepsilon^{-1}[\mu_f(r + 6, \gamma_\alpha) + 1]\},$$

где $c' > 0$ и $c'' > 0$ – постоянные, независимые от ε и $r \geq 0$. Поскольку $M_{\mathbf{F}_\rho}(1) = M_{\mathbf{F}}(1)$, то по неравенству Коши

$$|\mathbf{F}'_\rho(w)| \leq \frac{M_{\mathbf{F}}(1)}{(1 - |w|)^{-1}}, \quad |w| < 1.$$

Тогда по неравенству о среднем значении $|\mathbf{F}_\rho(w)| \leq M_{\mathbf{F}}(1)|w|(1 - |w|)^{-1}$ for $|w| < 1$. Положив $w = z^\rho$, получим для $z \in \Omega_\alpha$

$$(2.54) \quad |\mathbf{F}(z)| \leq M_{\mathbf{F}}(1)|z|^\rho(1 - |z|^\rho)^{-1} \leq 2M_{\mathbf{F}}(1)|z|^\rho,$$

если $|z| \leq 2^{-1/\rho}$. Суммируя, приходим к следующей лемме.

Лемма 6. Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда $f = \mathbf{f} + \lambda$, где $\mathbf{f} \in A''(\Delta_\alpha)$ и λ – дробно-линейная функция, так что

- (i) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}'(0) = 0$ и существует функция $\mathbf{F} \in A(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющая (2.52), (2.53) и (2.54),
- (ii) λ допускает приближение вида (2.49) целыми функциями g_λ с ростом (2.50).

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему об оптимальном равномерном приближении в случае $\alpha < \pi$.

Теорема 2. Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha < \pi$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция g такая, что

$$(2.55) \quad |f(z) - g(z)| < 3\varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha,$$

и рост g ограничен неравенством

$$(2.56)$$

$$\log M_g(r) < c(1+r^\rho) [\log^+ M_f(r', \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} \mu_f(r', \gamma_\alpha) + \log^+ r + \exp\{c\varepsilon^{-1}\}], \quad r \geq 0,$$

где $\mu_f(r, \gamma_\alpha)$ определено в (2.45), $r' = 2(r+3)$ и $c > 0$ – постоянная, независимая от ε и r .

Доказательство. Пусть $\mathbf{F} \in A(\Omega_\alpha)$ функция, построенная в лемме 6 для функции $\mathbf{f}$ и Ω_α – замкнутая область, определенная формулой (2.51). Достаточно построить подходящее целое приближение $\mathbf{G}$ функции $\mathbf{F}$ на Δ_α , с оценкой роста $\mathbf{G}$ на $\mathbb{C}$. Рассмотрим для этого замкнутую область

$$\Lambda_\alpha = \{z = re^{i\theta} \in \Omega_\alpha : |\theta| \leq (\alpha + \pi)/2\},$$

так что $\Delta_\alpha \subset \Lambda_\alpha \subset \Omega_\alpha$. При этом, для $\Gamma = \partial\Lambda_\alpha$ имеем, что $\Gamma \setminus D_1 = \partial\Omega_\alpha \setminus D_1$ и $\Gamma \setminus D_1 = L^+ \cup L^-$, где $L^\pm = [0, e^{\pm i(\alpha+\pi)/2}]$.

Пусть $h_b(\zeta, z)$ – функция из леммы 4 и для $(\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}$ положим

$$h(\zeta, z) = \begin{cases} h_{b|\zeta|}(\zeta, z) & \text{если } |\zeta| \geq \delta_0, \\ 0, & \text{если } |\zeta| < \delta_0, \end{cases},$$

где

$$(2.57) \quad b_t = \log^+ M_{\mathbf{F}}(t) + \log(\varepsilon\delta_0)^{-1} + \log(44k) + 3\log(|t| + 1)$$

с $\delta = d(\zeta, \gamma_\alpha) = \min\{|\zeta|, |\zeta|^{1-\rho}\}$, для $\zeta \in \Gamma$, $|\zeta| \geq \delta_0$, где $\delta_0 \in (0, 2^{-1/\rho})$ и $k \geq 1$ – постоянные, подлежащие выбору. Положим

$$(2.58) \quad g(\zeta, z) = \mathbf{F}(\zeta) [h(\zeta, z) - C_\zeta(z)], \quad (\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C} \setminus \{\zeta\},$$

удовлетворяющую, согласно (2.18), (2.57) и (2.58) для $(\zeta, z) \in \Gamma \times (\Delta_\alpha \cup \overline{D}_{|\zeta|/2})$ неравенству

$$(2.59) \quad |g(\zeta, z)| < \frac{\varepsilon}{k} \frac{\delta_0}{\delta} (1 + |\zeta|)^{-2}, \quad |\zeta| \geq \delta_0,$$

и для $(\zeta, z) \in (\Gamma \cap D_{\delta_0}) \times \Delta_\alpha$ неравенству

$$(2.60) \quad |g(\zeta, z)| < 2M_{\mathbf{F}}(1)|\zeta|^{\rho-1}.$$

Для любого $t \geq \delta_0$ обозначим $\Gamma_t = \Gamma \cap \overline{D}_t$ и $L_t = \Lambda_\alpha \cap \partial \overline{D}_t$. Согласно (2.59) несобственный интеграл

$$(2.61) \quad I_t(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_t} g(\zeta, z) d\zeta$$

равномерно сходится для $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$, определяя функцию $I_t \in A(D_{t/2} \cup \Delta_\alpha)$. Из (2.60)-(2.61) следует, что

$$(2.62) \quad |I_0(z) - I_{\delta_0}(z)| \leq \pi^{-1} M_{\mathbf{F}}(1) \delta_0^\rho \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in \Delta_\alpha,$$

если фиксировать $\delta_0 = \varepsilon^{1/\rho} [M_{\mathbf{F}}(1) + 1]^{-1/\rho}$. Аналогично, по (2.59) и (2.61) имеем

$$(2.63) \quad |I_1(z) - I_{\delta_0}(z)| \leq \varepsilon / \pi k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in \Delta_\alpha.$$

Пусть теперь $t \geq 1$ и $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$. Тогда, по (2.59) и (2.61), учитывая, что $|d\zeta| \leq k_\alpha d|\zeta|$ для $(\zeta \in \Gamma, |\zeta| \geq 1)$ согласно (2.51), и фиксируя $k = 3k_\alpha + 1$, получим

$$(2.64) \quad |I_t(z)| \leq (\varepsilon k_\alpha / k) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Определим искомую целую функцию $\mathbf{G}$ по формуле

$$(2.65) \quad \mathbf{G}(z) = I_t(z) + I'_t(z) + I''_t(z), \quad z \in D_t,$$

где $I_t(z)$ определено формулой (2.61) и

$$\begin{aligned} I'_t(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} \mathbf{F}(\zeta) h(\zeta, z) d\zeta, \\ I''_t(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_t} \mathbf{F}(\zeta) C_\zeta(z) d\zeta. \end{aligned}$$

Определение (2.65) не зависит от t поскольку, если $t' > t > r = |z|$, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\Omega_{t'} \setminus \Omega_t)} \mathbf{F}(\zeta) C_\zeta(z) d\zeta = 0,$$

что позволяет заменить в (2.65) t на t' . Далее, по теореме Коши из формул (2.61) и (2.65) следует, что $\mathbf{G}(z) - \mathbf{F}(z) = I_0(z)$ ($z \in \Delta_\alpha$). Поскольку $I_0 = I_1 + (I_1 - I_{\delta_0}) + (I_0 - I_{\delta_0})$, то согласно (2.62)-(2.64) получим, что

$$(2.66) \quad |\mathbf{G}(z) - \mathbf{F}(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Delta_\alpha.$$

Согласно выбору функции $h(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Gamma$, с $h(\zeta, z) \equiv 0$ ($|\zeta| \leq \delta_0$), из (2.19) следует, что для $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ и $z \in \mathbb{C} \setminus D_{|\zeta|/2}$

$$(2.67) \quad |h(\zeta, z)| < \exp \{c_\alpha(b_1/\delta_0)(|z| + 1)^\rho\} \quad \text{если} \quad \delta_0 \leq |\zeta| \leq 1$$

и

$$(2.68) \quad |h(\zeta, z)| < \exp \{c'_\alpha b_{|\zeta|} |z|^\rho\} \quad \text{если} \quad |\zeta| > 1,$$

где $c_\alpha > 0$, $c'_\alpha > 0$ – постоянные, зависящие только от α .

Применяя неравенства (2.67) и (2.68) и оценивая интегралы $I'_t(z)$ и $I''_t(z)$ с $t = 2|z|$ (как в доказательстве теоремы 1), получим

$$\log^+ M_{\mathbf{G}}(r) \leq c''_\alpha (r+1)^\rho [b_1/\delta_0 + b_{2r} + 1], \quad r \geq 0.$$

Отсюда, используя определение (2.57) и оценку (2.53), как в замечание 2, получим

$$(2.69) \quad \begin{aligned} \log^+ M_{\mathbf{G}}(r) &\leq c(r+1)^\rho [\log^+ M_f(r', \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} \mu_f(r', \gamma_\alpha) \\ &\quad + \log^+ r + \exp\{c\varepsilon^{-1}\}], \quad r \geq 0, \end{aligned}$$

где $r' = 2(r+3)$ и $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и r .

Теперь можем определить искомую целую функцию g , положив $g = \mathbf{G} + g_\lambda$. Тогда (2.55) следует из (2.49), (2.52) и (2.66), а оценка роста (2.56) функции g следует из (2.50) и (2.69). Доказательство завершено.

Следствие 2. Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi)$ и для некоторого $\nu \geq 0$

$$\log M_f(r, \Delta_\alpha) = O(r^\nu) \quad \text{и} \quad \mu_f(r, \gamma_\alpha) = O(r^\nu) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Тогда функцию f можно равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями порядка $\rho + \nu$ и нормального типа, если $\nu > 0$.

Abstract. The paper discusses the best or optimal uniform approximation problem by entire functions on a closed angle Δ . This problem has been studied by M.V. Keldysh in [4], under the assumption that the functions f subject to approximation are holomorphic in a larger angle containing Δ and there is no restriction on the growth of f at infinity. In [8], the problem was investigated for a wider class of functions f continuously complex differentiable on Δ , with sharper estimates on the growth of approximating entire functions, linked with the growth of f on Δ and the differential properties of f on the boundary of Δ . In this paper, we improve some of the results on entire approximation on angles, using new approximation ideas partially presented in [9] and [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, Успехи мат. наук, **7** (2 (48)), 31-122 (1952).
- [2] Н. У. Аракелян, “О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах”, Известия АН СССР, сер. матем., **28**, 1187-1206 (1964).
- [3] Н. Kober, “Approximation by Integral Functions in the Complex Plane”, Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 7-31 (1944).
- [4] М. В. Келдыш, “О приближении голоморфных функций целыми функциями”, ДАН СССР, **47** (4), 243-245 (1945).
- [5] S. N. Bernstein, “Sur la Meilleure Approximation sur tout L'axe Réel des Fonctions Continues par des Fonctions Entières de Degré Fini”, I-V, C.R. Dokl. Acad. Sci. USSR, Ser. **51**, 331-334, 487-490, **52**, 563-566, **54**, 103-108, 475-478 (1946).
- [6] М. М. Джрбашян, А. П. Тамадян, “О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области”, ДАН СССР, **104**, 345-348, (1955).
- [7] М. М. Джрбашян, А. П. Тамадян, “О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области”, Известия АН СССР, сер. матем., **20**, 485-512, (1956).
- [8] Н. У. Аракелян, “Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста”, Сиб. мат. журнал, **4** (5), 977-999, (1963).
- [9] Н. У. Аракелян, “О равномерном и касательном приближении на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста”, Мат. сборник, **113** (115), (1(9)), 3-40 (1980).
- [10] N. Arakelian, H. Shahgholian, “Uniform and Tangential Approximation on a Stripe by Entire Functions, Having Optimal Growth”, CMFT: Computational Methods and Function Theory, **3** (1), 359-381, (2003).

Поступила 15 марта 2009

ПОДПРОСТРАНСТВО ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ САМЫХ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е. И. БЕРЕЖНОЙ

Ярославский государственный университет¹
E-mail: *ber@uniyar.ac.ru*

Аннотация. Пусть $\Delta(f, h)(t) = |f(t+h) - f(t)|$ и X – симметричное пространство функций на $[0, 1]$. Пусть фиксированы числа $\alpha \in (0, 1)$ и $p \in [1, \infty)$. По тройке (X, α, p) построим пространство типа Бесова $\Lambda_{X,p}^\alpha$, норма в котором задается равенством

$$f|_{\Lambda_{X,p}^\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2^{\alpha i} \Delta(f; 2^{-i})(\cdot)|_X)^p \right)^{1/p}.$$

Пусть $\alpha_0 \in (0, 1)$. Показано, что существует бесконечномерное замкнутое подпространство пространства $\Lambda_{X,p}^{\alpha_0}$ такое, что любая отличная от тождественного нуля функция не принадлежит пространству $\Lambda_{X,p}^\alpha$ с $\alpha > \alpha_0$.

В геометрической теории банаховых пространств гладких функций значительный интерес представляет следующая задача (на нее снова обращалось внимание в [1]).

Задача А. Пусть задано некоторое банахово пространство гладких функций X . Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции $y \in Y$ гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции из X ?

Этим вопросом занимались многие математики [2]-[5]. Окончательное решение задачи А для пространства $C[0, 1]$ приведено в [6], для пространств Липшица $Lip(\omega)$ соответствующий окончательный результат, включая теорему исправимости, приведен в [7-9]. В настоящей работе дается решение задачи А для пространств функций $\Lambda_{X,p}^\alpha$, конструкция которых аналогична построению пространств Бесова. Мы будем рассматривать следующий вариант основной задачи для пространств $\Lambda_{X,p}^\alpha$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00669

Задача В. Зафиксируем $\alpha_0 \in (0, 1)$. Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y(X, \alpha_0, p)$ пространства $\Lambda_{X,p}^{\alpha_0}$ такое, что любая отличная от тождественного нуля функция $f \in Y(X, \alpha_0, p)$ не принадлежит никакому пространству $\Lambda_{X,p}^\alpha$ с $\alpha > \alpha_0$?

Утвердительный ответ на поставленный вопрос и составляет основное содержание данной работы. Отметим, что выбирая в качестве пространства X различные симметричные пространства, можно получить, например, окончательное решение для задачи А для пространств Бесова, построенных по пространству Лебега L^p , пространству Орлича L_h и, вообще, по любому симметричному пространству.

Пусть $I = [0, 1]$ и $D \subseteq I$ – измеримое подмножество I . Через $\chi(D)$ обозначим характеристическую функцию множества D . Пусть $S(\mu)$ – множество измеримых по Лебегу функций на I . Для $f : I \rightarrow R$ как обычно, через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции f , т.е.:

$$\lambda(f, \gamma) = \mu(\{t : |f(t)| > \gamma\}), \quad \gamma \in R_+.$$

Сразу же отметим простое и важное неравенство:

$$(1) \quad \lambda(f, \gamma_0) \geq \lambda(f, \gamma_1), \quad \gamma_0 \leq \gamma_1.$$

Напомним [10], что банахово пространство функций называется симметричным, если из справедливости при всех $\gamma \in R_+$ неравенства $\lambda(f, \gamma) \leq \lambda(g, \gamma)$ и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \|g\|_X$, где символом $\|f\|_X$ обозначается норма элемента f в пространстве X .

Важную информацию о симметричном пространстве X несет его фундаментальная функция, которая определяется равенством $\psi(X, t) = \|\chi(D)\|_X$, где $t = \mu(D)$.

Через $\overline{U}$ обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi : [0, 1] \rightarrow R_+$, т.е. функций φ которые не убывают, а отношение $t^{-1}\varphi(t)$ не возрастает. Через U обозначим подмножество в $\overline{U}$, состоящее из вогнутых функций, которые удовлетворяют дополнительному условию $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$. Хорошо известно, что каждая квазивогнутая функция эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.

Отметим, что для каждого симметричного пространства его фундаментальная функция $\psi(X, t)$ квазивогнута. Если же $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(X, t) > 0$, то X изоморфно L^∞ .

Важными примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L^p ($p \geq 1$), пространства Орлича L_h , построенные по выпуклой на R_+ функции

$h(t)$, удовлетворяющей условиям $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}h(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}h(t) = \infty$ с нормой, которая задается равенством

$$\|f|L_h\| = \inf \left\{ \gamma > 0 : \int_I h \left(\frac{|f(x)|}{\gamma} \right) d\mu \leq 1 \right\},$$

пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M(\varphi)$, построенные по $\varphi \in U$, норма в которых задается равенствами

$$\|f|\Lambda(\varphi)\| = \int_0^\infty \varphi(\lambda(f, \gamma)) d\gamma, \quad \|f|M(\varphi)\| = \sup_{D \subseteq I} \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |f(x)| d\mu$$

соответственно. Нетрудно проверить, что для фундаментальных функций этих пространств справедливы равенства

$$\psi(L^p, t) = t^{1/p}, \quad \psi(L_h, t) = \frac{1}{h^{-1}(t^{-1})}, \quad \psi(\Lambda(\varphi), t) = \psi(M(\varphi), t) = \varphi(t).$$

Пространства Лоренца и Марцинкевича играют среди симметричных пространств экстремальную роль: если ψ фундаментальная функция пространства X , то справедлива теорема вложения Е.М.Семенова [10] $\Lambda(\psi) \subseteq X \subseteq M(\psi)$, причем константы вложения равны 1.

Зафиксируем симметричное пространство X , причем без ограничения общности мы будем считать, что фундаментальная функция $\psi(X, t)$ пространства X вогнута и удовлетворяет условию $\psi(X, 1) = 1$. Пусть фиксированы числа $\alpha \in (0, 1)$ и $p \in [1, \infty)$. По тройке (X, α, p) построим пространство типа Бесова $\Lambda_{X,p}^\alpha$, норма в котором задается равенством

$$\|f|\Lambda_{X,p}^\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^\infty (2^{\alpha i} \|\Delta(f; 2^{-i})(\cdot)|X\|)^p \right)^{1/p},$$

здесь

$$\Delta(f; h)(t) = |f(t+h) - f(t)|.$$

Прежде чем перейти к доказательству утверждения, дающего утвердительный ответ на задачу В, нам потребуются некоторые предварительные построения.

Для каждого $j = 1, 2, \dots$ образуем функции

$$\theta_j(t) = \begin{cases} 2^j t - \frac{1}{2} & \text{при } t \in [0, 2^{-j}) \\ \frac{3}{2} - 2^j t & \text{при } t \in [2^{-j}, 2^{-j+1}] \end{cases}$$

и продолжим θ_j на всю ось периодически с помощью равенства

$$\theta_j(t + 2^{-j+1}) = \theta_j(t).$$

Отметим, что для функции θ_j ($k = 1, 2, \dots, j-1$) выполняются соотношения

$$(2) \quad \theta_j(t + 2^{-k}) - \theta_j(t) \equiv 0,$$

из геометрических соображений следует неравенство

$$(3) \quad \mu \left\{ t : |\theta_j(t + 2^{-k}) - \theta_j(t)| \geq \frac{1}{2} 2^{-k} 2^j \right\} \geq \frac{1}{4}, \quad k > j-1.$$

Поэтому из (2) и (3) следует, что при $k = 1, 2, \dots, j-1$ выполняется равенство

$$(4) \quad \left\| \Delta(\theta_j; 2^{-k})(\cdot) \Big| X \right\| = 0,$$

а при $k > j-1$ выполняется неравенство

$$(5) \quad 2^{-k} 2^j \psi \left(X, \frac{1}{4} \right) \leq \left\| \Delta(\theta_j; 2^{-k})(\cdot) \Big| X \right\| \leq 2^{-k} 2^j \psi(X, 1).$$

Отметим, что из (5) видно, что норма функций $\Delta(\theta_j, 2^{-k})(t)$ зависит не от явной формулы для вычисления нормы в пространстве X , а лишь от фундаментальной функции этого симметричного пространства. Учитывая справедливость при $\gamma \in (0, 1)$ неравенства $\psi(X, \gamma t) \geq \gamma \psi(X, t)$ и соотношения $\psi(X, 1) = 1$, из (5) следует справедливость неравенств

$$(6) \quad \frac{1}{4} 2^{-k+j} \leq \left\| \Delta(\theta_j; 2^{-k})(\cdot) \Big| X \right\| \leq 2^{-k+j}, \quad k > j-1.$$

Для оценок норм функций в пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$ нам потребуется оценка нормы некоторых линейных операторов в пространствах последовательностей.

Лемма 1. *Зафиксируем возрастающую последовательность натуральных чисел $J = \{j_i\}_{i=1}^\infty$ и $\alpha \in (0, 1)$. По числу α и последовательности $\{j_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве последовательностей построим оператор $T_{\alpha,J}\{c_i\}(k)$, определив его равенством*

$$(7) \quad T_{\alpha,J}\{c_i\}(k) = \sum_{i=1}^{l-1} c_i 2^{-(1-\alpha)(k-j_i)}, \quad j_{l-1} \leq k < j_l.$$

Тогда справедливо неравенство

$$(8) \quad \|T_{\alpha,J}\big| l^p \rightarrow l^p\| \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_{\alpha,J}$, как оператор, действующий из l^∞ в l^∞ . Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_k |T_{\alpha,J}\{c_i\}(k)| &\leq \sup_k \sum_{i=1}^{l-1} |c_i| 2^{-(1-\alpha)(k-j_i)} \leq \sup_k 2^{-(1-\alpha)k} \sum_{i=1}^{j_{l-1}} 2^{(1-\alpha)i} \\ &\leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$(9) \quad \|T_{\alpha,J}|l^\infty \rightarrow l^\infty\| \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1}.$$

Рассмотрим теперь оператор $T_{\alpha,J}$, как оператор, действующий из l^1 в l^1 . Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_k |T_{\alpha,J}\{c_i\}(k)| &\leq \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{j_{l-1} \leq k < j_l} \sum_{i=1}^{l-1} |c_i| 2^{-(1-\alpha)(k-j_i)} \\ &\leq |c_1| 2^{1-\alpha} \sum_{k \geq j(1)} 2^{(1-\alpha)(j_1-k)} + |c_2| 2^{(1-\alpha)} \sum_{k \geq j_2} 2^{(1-\alpha)(j_2-k)} + \dots \\ &\leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$(10) \quad \|T_{\alpha,J}|l^1 \rightarrow l^1\| \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1}.$$

Поскольку оператор $T_{\alpha,J}$ положительный, т.е. переводит неотрицательные последовательности в неотрицательные последовательности, то для него справедлива интерполяционная теорема с константой 1, т.е. из (9)-(10) следует неравенство (8). Лемма доказана.

Следующая лемма является основной для оценок норм некоторых функций в пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$.

Лемма 2. Пусть заданы $q_1 \in (0, 1/4)$ и $\alpha \in (0, 1)$ и пусть выбрана возрастающая последовательность натуральных чисел $\{j_i\}_{i=1}^\infty$ так, что для всех $l \in \mathbb{N}$ выполнено условие

$$(11) \quad 2^{-(1-\alpha)j_l} \sum_{i=1}^{l-1} 2^{(1-\alpha)j_i} \leq \frac{1}{4} q_1^l.$$

Пусть $\{c_i\} \in l^p$, выполнено равенство $\|\{c_i\}|l^p\| = 1$ и

$$(12) \quad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-\alpha j_i} \theta_{j_i}(t).$$

Тогда справедливы неравенства

$$(13) \quad \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \geq \|f|\Lambda_{X,p}^\alpha\| \geq \frac{1}{6}.$$

Доказательство. Для оценки сверху нормы функции f в пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$ воспользуемся неравенством (6). Тогда для $j_{l-1} \leq k < j_l$ из (2) следует, что выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} 2^{\alpha k} \|\Delta(f; 2^{-k})(\cdot)|X\| &\leq 2^{\alpha k} \sum_{i=1}^{l-1} |c_i| \|\Delta(2^{-\alpha j_i} \theta_{j_i}; 2^{-k})(\cdot)|X\| \\ &\leq 2^{\alpha k} \sum_{i=1}^{l-1} |c_i| 2^{-\alpha j_i} 2^{j_i - k} = T_{\alpha,J}\{c_i\}(k), \end{aligned}$$

где оператор $T_{\alpha,J}\{c_i\}(k)$ определен в лемме 1. Согласно лемме 1 верно неравенство

$$\|T_{\alpha,J}\{c_i\}(k)|l^p\| \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \|\{c_i\}|l^p\|,$$

из которого следует левое неравенство в (13).

Для оценки снизу нормы функции f в пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$ снова воспользуемся неравенством (6). Тогда для $k = j_l$ из неравенства (6) и условия (11) следует справедливость оценки

$$\begin{aligned} 2^{\alpha j_l} \|\Delta(f; 2^{-j_l})(\cdot)|X\| &\geq \frac{|c_l|}{4} - 2^{-(1-\alpha)j_l} \sum_{i=1}^{l-1} |c_i| 2^{(1-\alpha)j_i} \\ (14) \qquad \qquad \qquad &\geq \frac{|c_l|}{4} - 2^{-(1-\alpha)j_l} \sum_{i=1}^{l-1} 2^{(1-\alpha)j_i} \geq \frac{1}{4} (|c_l| - q_1^l). \end{aligned}$$

Поэтому верно неравенство

$$\begin{aligned} \|f| \Lambda_{X,p}^\alpha\| &\geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2^{\alpha j_i} \|\Delta(f; 2^{-j_i})(\cdot)|X\|)^p \right)^{1/p} \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{\infty} (q_1^i)^p \right)^{1/p} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left(1 - q_1 \frac{1}{(1 - q_1^p)^{1/p}} \right) \geq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Непосредственно из леммы 2 следует, что для функций вида (12), построенных по произвольной последовательности $\{c_i\} \in l^p$ верны неравенства

$$(15) \qquad \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \|\{c_i\}|l^p\| \geq \|f| \Lambda_{X,p}^\alpha\| \geq \frac{1}{6} \|\{c_i\}|l^p\|.$$

Зафиксируем последовательность натуральных чисел $\{j_i\}_{i=1}^\infty$, для всех $i \in N$ удовлетворяющую условию (11) из леммы 2, и занумеруем простые числа

натурального ряда, начиная с 3, в последовательность $\{p_i\}_1^\infty$. Построим новую двойную последовательность $\{j(l, k)\}$ ($l \in N, k \in N$), положив $n = p_l^k$ и $j(l, k) = j_n$. Сразу же отметим важные свойства последовательности $j(l, k)$.

Если зафиксировать $k \in N$, то по определению $j(l, k) = j_{p_l^k}$, и поэтому из (11) следует соотношение

$$(16) \quad 2^{-(1-\alpha)j(l, k)} \sum_{i=1}^{l-1} 2^{(1-\alpha)j(i, k)} \leq \frac{1}{4} q_1^k.$$

Если зафиксировать $l \in N$, то, снова замечая, что $j(l, k) = j_{p_l^k}$, из (11) следует соотношение

$$(17) \quad 2^{-(1-\alpha)j(l, k)} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{(1-\alpha)j(l, i)} \leq \frac{1}{4} q_1^k.$$

Из этих же соображений следует неравенство:

$$(18) \quad 2^{-(1-\alpha)j(l, k)} \sum_{\{(m, i): j(m, i) < j(l, k)\}} 2^{(1-\alpha)j(m, i)} \leq \frac{1}{4} q_1^k.$$

Для данного $\alpha \in (0, 1)$ выберем $q_2 \in (0, 0.25)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$(19) \quad \frac{q_2}{1 - q_2} \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} < \frac{1}{12}.$$

Положим

$$\xi_l(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha j(l, i)} \theta_{j(l, i)}(t).$$

Поскольку последовательность $j(l, i)$ при фиксированном l , как последовательность от i удовлетворяет условию (17), то из замечания 1 к лемме 2 следует, что верны неравенства

$$\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_2^{ip} \right)^{1/p} \geq \|\xi_l\|_{\Lambda_{X,p}^\alpha} \geq \frac{1}{6} \left(\sum_{i=0}^{\infty} q_2^{ip} \right)^{1/p}.$$

Поэтому для всякого $l \in N$ функция ξ_l принадлежит пространству $\Lambda_{X,p}^\alpha$.

В пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$ образуем подпространство $Y(\alpha, X, p)$, которое является замыканием в $\Lambda_{X,p}^\alpha$ линейной оболочки функций $\{\xi_l\}_{l=1}^\infty$

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство (19). Тогда пространство $Y(\alpha, X, p)$ изоморфно пространству l^p .

Доказательство. Пусть задана функция

$$f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \xi_l(t),$$

для которой $\sum_{l=1}^{\infty} |c_l|^p = 1$. Построим новые функции

$$\zeta_k(t) = q_2^{(k-1)} \sum_{l=1}^{\infty} c_l 2^{-\alpha j(l,k)} \theta_{j(l,k)}(t).$$

Тогда справедливо равенство

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(t).$$

Поскольку последовательность $j(l, i)$ при фиксированном i как последовательность от l удовлетворяет условию (16), то функции ζ_l имеют вид (12). Поэтому из замечания 1 к лемме 2 следует, что верна оценка сверху

$$\begin{aligned} \|f| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\zeta_k| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q_2^{(k-1)} \left\| \sum_{l=1}^{\infty} c_l 2^{\alpha j(l,k)} \theta_{j(l,k)}| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| \right\| \\ &\leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} \sum_{k=1}^{\infty} q_2^{(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p \right)^{1/p} \\ (20) \quad &\leq \frac{2^{1-\alpha}}{(1-q_2)(2^{1-\alpha}-1)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Для оценки снизу нормы функции $\|f| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\|$, поступим следующим образом. Сначала воспользуемся неравенством треугольника, потом замечанием 1 к лемме 2 и неравенством (20). Тогда получим

$$\begin{aligned} \|f| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| &\geq \|\zeta_1| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| - \sum_{k=2}^{\infty} \|\zeta_k| \Lambda_{X,p}^{\alpha}\| \\ &\geq \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p \right)^{1/p} - \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} \sum_{k=2}^{\infty} q_2^{(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p \right)^{1/p} \\ (21) \quad &\geq \frac{1}{6} - \frac{q_2}{1-q_2} \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} \geq \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Из неравенств (20) и (21) и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Зафиксируем число $\alpha_0 \in (0, 1)$. По α_0 выберем число $q_2 \in (0, 0.25)$ так, чтобы выполнялось неравенство (19). Построим теперь последовательность $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы для нее выполнялось (11) с $q_1 = \min\{q_2, 1/4\}$. По последовательности $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$, как это сделано перед теоремой 1, построим двойную последовательность $\{j(l, k)\}_{l,k=1}^{\infty}$ и пространство $Y(\alpha_0, X, p)$. Пусть задано $1 \geq \alpha > \alpha_0$. Тогда любая отличная от тождественного нуля функция $f \in Y(\alpha_0, X, p)$ не принадлежит пространству $\Lambda_{X,p}^{\alpha}$.

Доказательство. Пусть задана отличная от тождественного нуля функция $f \in Y(\alpha_0, X, p)$. Покажем, что $f \notin \Lambda_{X,p}^\alpha$. Действительно, функция f имеет вид

$$f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \xi_l(t).$$

Без ограничения общности можно считать, что выполнено равенство $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^p = 1$. Выберем какое-нибудь $c_l \neq 0$. Для оценки снизу нормы функции f в пространстве $\Lambda_{X,p}^\alpha$ поступим аналогично с получением оценки (14). Сначала заметим, что справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta(f; 2^{-j(l,k)})(t) &= \Delta\left(c_l \xi_l + \sum_{n \neq l} c_n \xi_n; 2^{-j(l,k)}\right)(t) \\ &= \Delta\left[c_l \sum_{i=1}^{\infty} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \theta_{j(l,i)} + \sum_{n \neq l} c_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \theta_{j(n,i)}\right); 2^{-j(l,k)}\right](t). \end{aligned}$$

Поэтому выражение для $\Delta(f; 2^{-j(l,k)})(t)$ в силу условия (2) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta(f; 2^{-j(l,k)})(t) &= \Delta\left[c_l \sum_{i=1}^k q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \theta_{j(l,i)} \right. \\ (22) \quad &\left. + \sum_{n \neq l} c_n \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \theta_{j(n,i)}\right); 2^{-j(l,k)}\right](t), \end{aligned}$$

где неравенство в индексах суммирования в последней сумме строгое, так как при $n \neq l$ выполнено неравенство $j(n,i) \neq j(l,k)$. Из соотношения (22) получим неравенство

$$\begin{aligned} \Delta(f; 2^{-j(l,k)})(t) &\geq \Delta\left(c_l q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} \theta_{j(l,k)}; 2^{-j(l,k)}\right)(t) \\ &\quad - \Delta\left[c_l \sum_{i=1}^{k-1} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \theta_{j(l,i)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \neq l} c_n \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \theta_{j(n,i)}\right); 2^{-j(l,k)}\right](t). \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\Delta(f; 2^{-j(l,k)})(\cdot)|X\| &\geq \left\| \Delta\left(c_l q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} \theta_{j(l,k)}; 2^{-j(l,k)}\right)(\cdot)|X\right\| \\ &\quad - \left\| \Delta\left(c_l \sum_{i=1}^{k-1} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \theta_{j(l,i)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n \neq l} c_n \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \theta_{j(n,i)}\right); 2^{-j(l,k)}\right)(\cdot)|X\right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |c_l| q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(l,k)}; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \\
&- \left(|c_l| \sum_{i=1}^{k-1} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(l,i)} 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \right) \\
&- \sum_{n \neq l} |c_n| \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(n,i)}; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что для всех $n \in N$ выполнено неравенство $|c_n| \leq 1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| &\geq |c_l| q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(l,k)}; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \\
&- \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(l,i)}; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \right) \\
&- \sum_{n \neq l} \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} \left\| \Delta \left(\theta_{j(n,i)}; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \right).
\end{aligned}$$

Используя соотношения (4) и (5), из последнего неравенства получим

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| &\geq \frac{|c_l|}{4} q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} - \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,i)} 2^{j(l,i)-j(l,k)} \right) \\
&- \sum_{n \neq l} |c_n| \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} 2^{j(n,i)-j(l,k)} \right) \\
&\geq \frac{|c_l|}{4} q_2^{(k-1)} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} - \left(\sum_{\{(n,i): j(n,i) < j(l,k)\}} q_2^{(i-1)} 2^{-\alpha_0 j(n,i)} 2^{j(n,i)-j(l,k)} \right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (18). Тогда получим

$$\left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \geq 2^{-\alpha_0 j(l,k)} \left(\frac{|c_l|}{4} q_2^{(k-1)} - \frac{l}{4} q_1^{p_l^k} \right).$$

Теперь воспользуемся неравенством $q_1 \leq q_2$ и, окончательно, получим

$$(23) \quad \left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| \geq \frac{1}{4} 2^{-\alpha_0 j(l,k)} q_2^{(k-1)} \left(|c_l| - q_2^{p_l^k - (k-1)} \right).$$

Покажем, что

$$(24) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{\alpha_0 j(l,k)} \left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l,k)} \right) (\cdot) \middle| X \right\| = \infty.$$

Во-первых, прямо из определения следует, что $p_l \geq 3$, и поэтому справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{p_l^k - (k-1)\} = \infty.$$

Следовательно справедливо и соотношение

$$(25) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(|c_l| - q_2^{p_l^k - (k-1)} \right) = |c_l|.$$

Из условия (11) следует, что при всех $i \in N$ выполняется неравенство $j_i \geq i$. Поэтому из соотношения $j(l, k) = j_{p_l^k} \geq p_l^k$ получим равенство

$$(26) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{j(l, k)} = 0.$$

Теперь у нас все готово, чтобы доказать (24). Из неравенства (23) следует соотношение

$$\begin{aligned} 2^{\alpha j(l, k)} \left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l, k)} \right) (\cdot) \right\| X &\geq \frac{1}{4} 2^{(\alpha - \alpha_0) j(l, k)} q_2^{(k-1)} \left(|c_l| - q_2^{p_l^k - (k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(2^{(\alpha - \alpha_0)} q_2^{(k-1)/j(l, k)} \right)^{j(l, k)} \left(|c_l| - q_2^{p_l^k - (k-1)} \right). \end{aligned}$$

Поэтому из равенств (25), (26), учитывая неравенство $\alpha - \alpha_0 > 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{\alpha j(l, k)} \left\| \Delta \left(f; 2^{-j(l, k)} \right) (\cdot) \right\| X &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(2^{(\alpha - \alpha_0)} q_2^{(k-1)/j(l, k)} \right)^{j(l, k)} \left(|c_l| - q_2^{p_l^k - (k-1)} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(2^{(\alpha - \alpha_0)} \right)^{j(l, k)} |c_l| = +\infty. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что $f \notin \Lambda_{X, p}^\alpha$. Теорема доказана.

Abstract. Under the assumptions that $\Delta(f, h)(t) = |f(t+h) - f(t)|$, X is a symmetric space of functions in $[0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$ and $p \in [1, \infty)$ are any fixed number, by the triple (X, α, p) a Besov type space $\Lambda_{X, p}^\alpha$ is constructed, where the norm is given by the equality

$$\|f\|_{\Lambda_{X, p}^\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2^{\alpha i} \|\Delta(f; 2^{-i})(\cdot)\| X)^p \right)^{1/p}.$$

For any $\alpha_0 \in (0, 1)$, it is shown that there exists an infinite-dimensional, closed subspace of $\Lambda_{X, p}^{\alpha_0}$, such that any non-identically zero function does not belong to the subspace $\Lambda_{X, p}^\alpha$ with $\alpha > \alpha_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. P. Fonf, V. I. Gurariy, M. I. Kadets, "An Infinite Dimensional Subspace $C[0, 1]$ Consisting of Nowhere Differentiable Functions", *Comp. rend. Acad. Bulg. Sci.*, **52** (11-12), 13-16 (1999).
- [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды* **1** (Мир, Москва, 1965).
- [3] П. П. Петрушев, С. Л. Троянски, "О теореме Банаха-Мазура об универсальности $C[0, 1]$ ", *Comp. rend. Acad. Bulg. Sci.*, **37** (3), 283-285 (1984).
- [4] В. И. Гурарий, "Линейное пространство состоящее из всюду недифференцируемых функций", *Comp. rend. Acad. Bulg. Sci.*, **44** (5), 13-15 (1991).

- [5] I. Rodriguez-Piazza, "Every Separable Banach Space is Isometric to a Space of Continuous Nowhere Differentiable Functions", Proc. Amer. Math. Soc., **123** (12), 3650-3654 (1995).
- [6] Е. И. Бережной, "Подпространство $C[0, 1]$, состоящее из функций, не имеющих конечных односторонних производных ни в одной точке", Математические заметки, **73** (3), 348-355 (2003).
- [7] Е. И. Бережной, "Подпространство пространства Гельдера, состоящее из самых негладких функций", Математические заметки, **74** (3), 329- 340 (2003).
- [8] Е. И. Бережной, "О подпространствах пространств Гельдера, состоящих из функций минимальной гладкости", Доклады РАН, **398** (5), 1-4 (2004).
- [9] Е. И. Бережной, "О подпространствах $C[0, 1]$, состоящих из негладких функций", Матем. заметки, **81** (4), 490-495 (2007).
- [10] С. Г. Крейн , Ю. И. Петунин , Е. М. Семенов, *Интерполция линейных операторов*, (Наука, Москва, 1977).

Поступила 15 декабря 2008

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ С НУЛЯМИ НА ЭТИХ ДУГАХ

А. Л. ЛУКАШОВ, С. В. ТЫШКЕВИЧ

Саратовский государственный университет, Саратов, РФ.¹
Университет Фатих, Стамбул, Турция
E-mail: lukashoval@info.sgu.ru, s_tyshkevich@yahoo.com

Аннотация. В статье дается решение экстремальной задачи нахождения многочленов с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющихся от нуля на нескольких дугах единичной окружности, при некоторых ограничениях на расположение нулей и дополнительных условиях на взаимное положение этих дуг. Экстремальные многочлены представлены в терминах плотности гармонической меры.

Задачи о нахождении многочленов, наименее уклоняющихся от нуля с единичным старшим коэффициентом на компактах комплексной плоскости, изучались многими математиками (см.[1]. На дуге окружности без ограничений на расположение нулей многочлены Чебышева изучались в работе [5]. Отметим также основополагающую статью Г. Видома [8], в которой рассматривались вопросы асимптотического поведения экстремальных многочленов для нескольких дуг или кривых в комплексной плоскости.

Цель настоящей работы - найти многочлен с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах.

Рассмотрим многочлены

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N},$$

на множестве $\Gamma_{\mathcal{E}} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2] \cup \dots \cup [\alpha_{2l-1}, \alpha_{2l}]$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2l} < 2\pi$. Класс таких многочленов обозначим через $\mathcal{P}_n(\mathcal{E})$. Введем еще несколько обозначений.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

Пусть $T_N^{(A,B)}$ – класс тригонометрических полиномов вида

$$\begin{aligned} \tau_N(\varphi) = & A \cos \frac{N}{2} \varphi + B \sin \frac{N}{2} \varphi + a_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1 \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & \dots + a_{[\frac{N}{2}]} \cos \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi + b_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi, \end{aligned}$$

$T_N^{(A,B)}(\mathcal{E})$ – класс тригонометрических полиномов того же вида с нулями в $\mathcal{E}$. Точки, в которых $|\tau_N(\varphi)|$ достигает своего максимума на $\mathcal{E}$ назовем точками уклонения $\tau_N(\varphi)$ на $\mathcal{E}$. Через $T_n(x)$ обозначим многочлены Чебышева $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$.

Основной результат настоящей статьи:

Теорема 1. Пусть $g_{\mathcal{E}}(\xi, z)$ – функция Грина области $C \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}$,

$$\Gamma_{\mathcal{E}_k} = \{\xi : xi = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}_k = [\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]\}.$$

Если гармонические меры дуг $\Gamma_{\mathcal{E}_k}$, $k = \overline{1, l}$, – рациональные числа вида $\frac{p}{N}$ и

$$\bar{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : b \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}})$$

– плотность гармонической меры, то минимум в экстремальной задаче

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |P_N(z)| = \min_{P_N \in \mathcal{P}_N(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |P_N(z)|$$

доставляют многочлены

$$P_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N}{2}\varphi} \cos \left(\frac{\pi N}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [0, \varphi]} (\bar{\omega}(\infty, \xi) + \bar{\omega}(0, \xi)) d\xi \right), \quad |\varepsilon| = 1,$$

где $A_N^* > 0$ подходящая константа.

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. Если

$$\begin{aligned} \tau_N(\varphi) = & A \cos \frac{N}{2} \varphi + B \sin \frac{N}{2} \varphi + a_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1 \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & \dots + a_{[\frac{N}{2}]} \cos \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi + b_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi, \end{aligned}$$

наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $T_N^{(A,B)}$, где $A^2 + B^2 = 1$, то существует такое $\psi \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_N(\varphi) = \tau_N(\varphi + \psi) = & \cos \frac{N}{2} \varphi + \hat{a}_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \hat{b}_1 \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & \dots + \hat{a}_{[\frac{N}{2}]} \cos \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi + \hat{b}_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi \end{aligned}$$

наименее уклоняется от нуля на

$$\mathcal{E} + \psi = \bigcup_{j=1}^l [\alpha_{2j-1} + \psi, \alpha_{2j} + \psi]$$

в классе $\mathcal{T}_N^{(1,0)}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любого $\psi \in \mathbb{R}$ полином $\tau_N(\varphi + \psi)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tau_N(\varphi + \psi) = & \left(A \cos \frac{N}{2} \psi + B \sin \frac{N}{2} \psi \right) \cos \frac{N}{2} \varphi \\ & + \left(B \cos \frac{N}{2} \psi - A \sin \frac{N}{2} \psi \right) \sin \frac{N}{2} \varphi + \hat{a}_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & + \hat{b}_1 \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots + \hat{a}_{[\frac{N}{2}]} \cos \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi \\ & + \hat{b}_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= a_k \cos \left(\frac{N}{2} - k \right) \psi + b_k \sin \left(\frac{N}{2} - k \right) \psi, \\ \hat{b}_k &= b_k \cos \left(\frac{N}{2} - k \right) \psi - a_k \sin \left(\frac{N}{2} - k \right) \psi, \quad k = 1, \left[\frac{N}{2} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\hat{\tau}_N(\varphi) := \tau_N(\varphi + \psi)$ наименее уклоняется от нуля на

$$\mathcal{E} + \psi = \bigcup_{j=1}^l [\alpha_{2j-1} + \psi, \alpha_{2j} + \psi]$$

в классе $\mathcal{T}_N^{(A_1, B_1)}$, где

$$A_1 = A \cos \frac{N}{2} \psi + B \sin \frac{N}{2} \psi, \quad B_1 = B \cos \frac{N}{2} \psi - A \sin \frac{N}{2} \psi.$$

Подберем ψ таким, чтобы

$$A \cos \frac{N}{2} \psi + B \sin \frac{N}{2} \psi = 1, \quad B \cos \frac{N}{2} \psi - A \sin \frac{N}{2} \psi = 0.$$

Последние равенства равносильны $\cos \frac{N}{2} \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ и $\sin \frac{N}{2} \psi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Полином

$$\hat{\tau}_N(\varphi) = \cos \frac{N}{2} \varphi + \hat{a}_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \hat{b}_1 \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots$$

наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E} + \psi$ в классе $\mathcal{T}_N^{(1,0)}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если*

$$\begin{aligned} \tau_N^*(\varphi) = & \cos \frac{N}{2} \varphi + a_1^* \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1^* \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & \dots + a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \cos \left(\frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi + b_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \sin \left(\frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \in T_N^{(1,0)} \end{aligned}$$

имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения $N + l$, то он наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ среди полиномов в классе

$$\mathcal{T}_N = \bigcup_{A, B: A^2 + B^2 = 1} \mathcal{T}_N^{(A, B)}.$$

Доказательство. Докажем, что обратное предположение ложно. Пусть полином

$$\tau_N^*(\varphi) = \cos \frac{N}{2} \varphi + a_1^* \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1^* \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots$$

имеет на $\mathcal{E}$ максимальное количество точек уклонения. Предположим, что для некоторого ψ имеет место $\|\tau_N^*\| > \|\tau_{N, \psi}^*\|$, где

$$\begin{aligned} \tau_{N, \psi}^*(\varphi) = & \cos \psi \cos \frac{N}{2} \varphi + \sin \psi \sin \frac{N}{2} \varphi + a_{1, \psi}^* \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi \\ & + b_{1, \psi}^* \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots + a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \psi}^* \cos \left(\frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \\ & + b_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \psi}^* \sin \left(\frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \end{aligned}$$

– полином, наименее уклоняющийся от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $\mathcal{T}_N^{(\cos \psi, \sin \psi)}$. Так как $\|\tau_{N, \psi}^*\|$ непрерывно зависит от ψ , можно считать, что

$$\frac{\psi}{2\pi} \in \mathbb{Q}, \quad \text{т.е.} \quad \psi = \frac{2\pi p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left(\cos \psi \cos \frac{N}{2} \varphi + \sin \psi \sin \frac{N}{2} \varphi \right)^q &= \left(\cos \left(\frac{N}{2} \varphi - \psi \right) \right)^q \\ &= \frac{1}{2^{q-1}} \cos \left(\frac{N}{2} \varphi - \psi \right) q + \dots, \end{aligned}$$

то пары старших коэффициентов полиномов $T_q \left(\frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right)$ и $T_q \left(\frac{\tau_{N, \psi}^*(\varphi)}{\|\tau_{N, \psi}^*\|} \right)$ равны соответственно $\left(\frac{1}{\|\tau_N^*\|^q}, 0 \right)$ и $\left(\frac{1}{\|\tau_{N, \psi}^*\|^q}, 0 \right)$, а их нормы равны $\frac{1}{2^{q-1}}$. Поэтому полиномы

$$\begin{aligned} \|\tau_N^*\|^q T_q \left(\frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right) &= \tau_{Nq}^*(\varphi), \\ \|\tau_{N, \psi}^*\|^q T_q \left(\frac{\tau_{N, \psi}^*(\varphi)}{\|\tau_{N, \psi}^*\|} \right) &= \tau_{Nq, \psi}^*(\varphi) \end{aligned}$$

имеют одинаковые пары старших коэффициентов $(1, 0)$, при этом нормы удовлетворяют неравенству

$$\|\tau_{Nq}^*\| = \frac{1}{2^{q-1}} \|\tau_N^*\|^q > \frac{1}{2^{q-1}} \|\tau_{N,\psi}^*\|^q = \|\tau_{Nq,\psi}^*\|.$$

С другой стороны, $\frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|}$ на $\mathcal{E}$ пробегает отрезок $[-1, 1]$ N раз, поэтому

$$\tau_{Nq}^*(\varphi) = \|\tau_N^*\| T_q \left(\frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right)$$

пробегает на $\mathcal{E}$ отрезок $[-\|\tau_{Nq}^*\|, \|\tau_{Nq}^*\|]$ Nq раз, а значит, наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $T_{Nq}^{(1,0)}$, что противоречит последнему неравенству.

Лемма 3. (А. Л. Лукашов [6]). Пусть $\mathcal{A}(\varphi)$ – тригонометрической полином порядка a , положительный на системе отрезков $\mathcal{E}$. Тогда существуют такие $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, что тригонометрическая рациональная функция

$$r(\varphi) = \frac{A \cos \frac{N}{2} \varphi + B \sin \frac{N}{2} \varphi + a_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots + b_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sin \left(\frac{N}{2} - \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \right) \varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

наименее уклоняющаяся от нуля на $\mathcal{E}$ среди всех функций этого вида, имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения, т.е.

$$(1) \quad \max_{\varphi \in \mathcal{E}} \left| \frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right| = \min_{a_i, b_i \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in \mathcal{E}} |r(\varphi)|,$$

и

$$\frac{\tau_N(\varphi_{2j})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j})}} = \frac{\tau_N(\varphi_{2j+1})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j+1})}}, \quad j = \overline{1, l},$$

в том и только том случае, когда для каждого $j = 1, \dots, l$ сумма гармонических мер дуги $\Gamma_{\mathcal{E}_j}$ относительно нулей многочлена $A(z) = e^{il\varphi} \mathcal{A}(\varphi) = \prod_{j=1}^{m^*} (z - z_j)^{m_j}$ является натуральным числом, точнее,

$$(N - a)\omega_j(\infty) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m^*} m_k \omega_j(z_k) = q_{j-1}^{(N)}, \quad q_{j-1}^{(N)} \in \mathbb{N}, \quad j = 2, \dots, l.$$

Через плотности гармонической меры

$$\bar{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : b \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}})$$

дробь $\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$ может быть записана следующим образом:

$$\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} = A_N \varepsilon \cos \left(\frac{\pi}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [b, \varphi]} \left((N - a) [\bar{\omega}(\infty, \xi) + \bar{\omega}(0, \xi)] + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \bar{\omega}(z_j, \xi) \right) d\xi \right),$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $A_N > 0$ – подходящая положительная константа.

Доказательство теоремы 1: Так как гармонические меры дуг $\Gamma_{\mathcal{E}_k}$, $k = \overline{1, l}$, – рациональные числа вида $\frac{p}{N}$ ($N \in \mathbb{N}$), то по лемме 3 существуют такие $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, что тригонометрический полином

$$\tau_N^*(\varphi) = A \cos \frac{N}{2} \varphi + B \sin \frac{N}{2} \varphi + a_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots + b_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi,$$

наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ и имеет максимальное число точек уклонения на $\mathcal{E}$. Так как нули этого полинома расположены между точками уклонения, лежащими на $\mathcal{E}$, то $\varphi_j \in \mathcal{E}$. Таким образом, полином $\tau_N^*(\varphi)$ является решением задачи (1) и в классе полиномов $\mathcal{T}_N^{(A,B)}(\mathcal{E})$.

Значит, по лемме 1 существует ψ такое, что полином $\hat{\tau}_N^*(\varphi) = \tau^*(\varphi + \psi)$ наименее отклоняется от нуля на $\mathcal{E} + \psi$ в классе полиномов $\mathcal{T}_N^{(1,0)}$, а, следовательно, по лемме 2 наименее уклоняется от 0 на $\mathcal{E} + \psi$ в классе полиномов

$$\mathcal{T}_N = \bigcup_{A,B \in \mathbb{R}: A^2+B^2=1} \mathcal{T}_N^{(A,B)}.$$

Следовательно, $\tau_N^*(\varphi)$ наименее уклоняется от 0 на $\mathcal{E}$ и в классе $\mathcal{T}_N(\mathcal{E})$.

Рассмотрим теперь произвольный полином класса

$$\mathcal{T}_N(\mathcal{E}) = \left\{ \tau_N(\varphi) : \tau_N(\varphi) = A \cos \frac{N}{2} \varphi + B \sin \frac{N}{2} \varphi + a_1 \cos \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots + b_{[\frac{N}{2}]} \sin \left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2} \right] \right) \varphi, \tau_N(\varphi_j) = 0, \varphi_j \in \mathcal{E}, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Через свои нули φ_j ($j = \overline{1, N}$) он может быть записан следующим образом:

$$\tau_N(\varphi) = c_\tau \prod_{j=1}^N \sin \frac{\varphi - \varphi_j}{2} = c_\tau \frac{1}{(2i)^N} e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} z^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N (z - z_j),$$

где $z = e^{i\varphi}$, $z_j = e^{i\varphi_j}$ ($j = 1, \dots, N$) и $|c_\tau| = 1$. Тогда найдется c_1 такая, что $|c_1| = 1$ и $\pi_N(z) = c_1 \prod_{j=1}^N (z - z_j)$ – самовзаимный многочлен, причем $z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}$, $j = \overline{1, N}$. В явном виде константа c_1 может быть найдена по формуле

$$c_1 = \frac{(2i)^N}{c_\tau} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j}.$$

Первому (старшему) и последнему коэффициентам многочлена $\pi_N(z)$ соответствует пара старших коэффициентов тригонометрического полинома $\tau_N(\varphi)$. Опишем подробнее это соответствие:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2i)^N} e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} e^{i \frac{N}{2} \varphi} + \frac{(-1)^N e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j}}{(2i)^N} e^{-i \frac{N}{2} \varphi} + \dots \\
 &= \frac{1}{(2i)^N} \left(e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} + (-1)^N e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} \right) \cos \frac{N}{2} \varphi \\
 & \quad + \frac{i}{(2i)^N} \left(e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} - (-1)^N e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \varphi_j} \right) \sin \frac{N}{2} \varphi + \dots \\
 (2) \quad &= \begin{cases} \frac{\cos \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} \varphi_j}{(-1)^m 2^{2m-1}} \cos m\varphi + \frac{\sin \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} \varphi_j}{(-1)^m 2^{2m-1}} \sin m\varphi + \dots, & N = 2m, \\ \frac{-\sin \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m-1} \varphi_j}{(-1)^{m-1} 2^{2m-2}} \cos \frac{2m-1}{2} \varphi \\ \quad + \frac{\cos \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m-1} \varphi_j}{(-1)^{m-1} 2^{2m-2}} \sin \frac{2m-1}{2} \varphi + \dots, & N = 2m-1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Обратно, каждому многочлену с нулем в $\Gamma_{\mathcal{E}}$ вида

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N},$$

ставится в соответствие самовзаимный многочлен $\pi_N(z) = c_{P_N} P_N(z)$, $|c_{P_N}| = 1$, которому, в свою очередь, по вышеописанной процедуре соответствует тригонометрический полином $\tau_N(\varphi) \in T_N(\mathcal{E})$ с парой старших коэффициентов A, B , $A^2 + B^2 = 1$, определяемой нулями z_j . Поскольку $\tau_N^*(\varphi)$ наименее уклоняется от нуля на $\mathcal{E}$ в классе $T_N(\mathcal{E})$, то он соответствует многочлену $P_N^*(z)$, наименее уклоняющемуся от 0 на $\Gamma_{\mathcal{E}}$ в классе $\mathcal{P}_N(\mathcal{E})$. Причем, учитывая (2)

$$\min_{P_N \in \mathcal{P}_N(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |P_N(z)| = 2^{N-1} \min_{\tau_N \in T_N(\mathcal{E})} \max_{\varphi \in \mathcal{E}} |\tau_N(\varphi)|.$$

Воспользовавшись представлением тригонометрического полинома из леммы 3, получаем

$$P_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^* \varepsilon e^{i \frac{N}{2} \varphi} \cos \left(\frac{\pi N}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [0, \varphi]} (\overline{\omega}(\infty, \xi) + \overline{\omega}(0, \xi)) d\xi \right), \quad |\varepsilon| = 1,$$

где $A_N^* > 0$ – подходящая положительная константа.

Теорема доказана.

Пример. Пусть $l = 1$, т.е. $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2]$. Без потери общности можно считать, что $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = \alpha$. Тогда $\Gamma_{\mathcal{E}} = [e^{-i\alpha}, e^{i\alpha}]$.

Воспользуемся представлением равновесной меры [10] и тем, что гармоническая мера относительно ∞ совпадает с равновесной мерой [11], (теорема 4.3.14), т.е.

$$\omega(\infty, \gamma, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{S_1(\tau)}{\sqrt{H(\tau)}} \right| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|,$$

где $S_1(\tau)$ – самовзаимный многочлен первой степени, нормированный условием $iS_1(\tau) = \sqrt{H(\tau)}$, где $H(\tau) = p(\tau - e^{-i\alpha})(\tau - e^{i\alpha})$ – также самовзаимный. Так как $H^*(\tau) = H(\tau)$, то $H(\tau) = -(\tau^2 - 2\tau \cos \alpha + 1)$, а значит, $S_1(\tau) = \tau + 1$. Таким образом,

$$\omega(\infty, \gamma, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{\tau + 1}{\sqrt{-(\tau^2 - 2\tau \cos \alpha + 1)}} \right| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|.$$

Плотность гармонической меры:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\infty, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \omega(\infty, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : -\alpha \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^x \left| \frac{e^{i\varphi} + 1}{\sqrt{-(e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi} \cos \alpha + 1)}} \right| d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{ix} + 1}{\sqrt{-(e^{2ix} - 2e^{ix} \cos \alpha + 1)}} \right| \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \omega(\infty, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : -\alpha \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}) \\ &= \omega(0, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : -x \leq \varphi \leq \alpha\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}) \\ &= 1 - \omega(0, \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} : -\alpha \leq \varphi \leq -x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}), \end{aligned}$$

поэтому, $\bar{\omega}(0, x) = \bar{\omega}(\infty, x)$. А значит, по лемме 3

$$\begin{aligned} P_N^*(e^{i\varphi}) &= A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N}{2}\varphi} \cos \left(\frac{\pi N}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [-\alpha, \varphi]} (\bar{\omega}(\infty, \xi) + \bar{\omega}(0, \xi)) d\xi \right) \\ &= A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N}{2}\varphi} \cos \left(\frac{N}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [-\alpha, \varphi]} \left| \frac{e^{i\xi} + 1}{\sqrt{-(e^{2i\xi} - 2e^{i\xi} \cos \alpha + 1)}} \right| d\xi \right) \\ &= A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N}{2}\varphi} \cos \left(N \int_{\mathcal{E} \cap [-\alpha, \varphi]} \left| \frac{e^{i\frac{\xi}{2}} \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{-(e^{2i\xi} - 2e^{i\xi} \cos \alpha + 1)}} \right| d\xi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_N^* \varepsilon e^{i \frac{N}{2} \varphi} \cos \left(\frac{N}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [-\alpha, \varphi]} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} \cdot \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\xi \right) \\
&= A_N^* \varepsilon e^{i \frac{N}{2} \varphi} \cos \left(N \arccos \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $P_N^*(z)$ по теореме 1 наименее уклоняется от 0 на $\Gamma_{\mathcal{E}}$ в классе $\mathcal{P}_N(\mathcal{E})$, то он имеет вид

$$P_N^*(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\varphi_j}), \quad \text{причем} \quad \cos N \arccos \frac{\sin \frac{\varphi_j}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Замечание 1. Краткая схема доказательства теоремы 1 была опубликована в [7].

Замечание 2. В работе [7], так же как и в формулировке теоремы 2 работы [6] (здесь это лемма 3), присутствовало ограничение $l \geq 2$. Фактически оба утверждения справедливы и при $l = 1$, но этот случай не был сформулирован явно, так как тогда нет необходимости использовать аппарат автоморфных функций, а условия на гармонические меры выполняются автоматически (ср. также обсуждение случая $l = 1$ в [6], §5). Отметим, что этот же случай ($l = 1$) теоремы 1 данной работы (см. пример) был другим методом получен в недавних работах [12, 13] и использован в [14] для получения тригонометрического аналога одной теоремы Поля.

Замечание 3. При $l = 2$ аналог леммы 3 с записью решения в терминах эллиптических и тэта-функций Якоби содержится в [9], следствие 4.

Abstract. The paper gives a solution of an extremal problem of finding monic polynomial least deviating from zero on several arcs of the unit circle, under some restrictions on the location of zeros and additional conditions on mutual position of the arcs. The extremal polynomial is represented in the terms of density of harmonic measure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного* (Наука, М.-Л., 1964).
- [2] G. Szegő, "On a Problem of the Best Approximation", *Abh. Math. Univ. Hamburg*, **27**, 193-198 (1964).
- [3] В. С. Виденский, "Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньше чем период", *ДАН СССР*, **130** (1), 13-16 (1960).

- [4] В. С. Виденский, “О тригонометрических многочленах полуцелого порядка”, Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. наук, **17** (3), 133-140 (1964).
- [5] J.-P. Thiran, C. Dettaille, “Polynomials on Circular Arcs in the Complex Plane”, In: Progress in Approximation Theory, Boston, MA: Academic Press. 1991. pp. 771-786.
- [6] А. Л. Лукашов, “Неравенства для производных рациональных функций”, Изв. РАН. Сер. матем., **68** (3), 115-138 (2004).
- [7] С. В. Тышкевич, “О чебышевских полиномах на дугах окружности”, Матем. заметки, **81** (6), 952-954 (2007).
- [8] H. Widom, “Extremal Polynomials Associated With a System of Curves in the Complex Plane”, Adv. Math., **3**, 127-232 (1969).
- [9] A. L. Lukashov, F. Peherstorfer, “Zeros of Polynomials Orthogonal on Two Arcs of the Unit Circle”, J. Approx. Theory, **132**, 42-71 (2005).
- [10] F. Peherstorfer, R. Steinbauer, “Strong Asymptotics of Orthonormal Polynomials in the Aid of Green’s Function”, SIAM J. Math. Anal. **32**, 385-402 (2000).
- [11] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [12] Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, “Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности и смежные вопросы”, Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Международ. конф., посвящен. 100-летию со дня рождения В. К. Иванова, Екатеринбург, 1-6 сент. 2008 г. Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, 2008. С.73-74.
- [13] Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, “Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности и смежные вопросы”, Препринт е312М, Международный научный центр исследований экстремальных состояний организма, Красноярский научный центр РАН. Красноярск, 2008.
- [14] В. В. Арестов, А. С. Менделев, “О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля”, Доклады РАН, принято в печать.

Поступила 21 января 2009

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Г. КАРАПЕТЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *vahagn_kg@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается один класс почти гипоеллиптических уравнений $P(D)U = f$ в полосе. Доказывается, что при достаточно больших $\mathcal{H}$ и малых $\delta > 0$ все решения этого уравнения, для которых $D_2^{\alpha_2} U$, где $\alpha_2 = 0, \dots, \text{ord}_{\alpha_2} P$, интегрируемых в квадрате с весом $e^{-\delta|x|}$, являются бесконечно дифференцируемыми по x_1 функциями, когда для любого j $D_1^j f \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n – множество n -мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in N_0$ ($j = 1, \dots, n$), $E^n(R^n)$ n -мерное вещественное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ или $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Далее, $C^n = R^n \times iR^n$ ($i^2 = -1$), и для любого $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \\ \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$). Пусть

$$P(D) = P(D_1, \dots, D_n) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

– линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ – его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона набора (P) (оператора $P(D)$) называется минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{N}$ в $R_+^n = \{\xi, \xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$.

Многогранник $\mathcal{N} \subset R_+^n$ называется полным, если $\mathcal{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Полный многогранник $\mathcal{N} \subset R_+^n$ называется правильным, если все координаты внешних нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней неотрицательные.

Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоеллиптическим (см. [1], определение 11.1.2 и теоремы 10.2.1, 10.2.12, 11.1.3), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (i) если f бесконечно дифференцируема, то все решения $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$ – множество распределений на области $\Omega \subset E^n$) уравнения $P(D)U = f$ являются бесконечно дифференцируемыми на Ω функциями,
- (ii) если $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $P(D)U = 0$ в Ω , то $U \in C^\infty(\Omega)$,
- (iii) $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in N_0^n$, $\alpha \neq 0$,
- (iv) если $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in R^n$ до поверхности $\mathcal{D}(P) = \{\xi, \xi \in C^n, P(\xi) = 0\}$, то $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Оператор $P(D)$ называется частично гипоеллиптическим относительно переменных $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $k \leq n$ (см. [2]), если для любого решения $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения $P(D)U = f$ имеем $U * \varphi(x'') \in C^\infty$, где $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ для любого $k < n$ и $\varphi \in C_0^\infty(E^{n-k})$, когда $f \in C^\infty(\Omega)$. Л. Гордингом и Б. Малгранжом найдены необходимые и достаточные алгебраические условия при которых оператор $P(D)$ частично гипоеллиптичен.

В данной работе рассматривается следующий вопрос: *какие априорные условия нужно накладывать на решения уравнения $P(D)U = f$, чтобы эти решения были бесконечно дифференцируемыми по тем или иным переменным, когда символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет более слабому условию, чем (iii), а именно, с некоторой постоянной $C > 0$*

$$(1.1) \quad \sum_{\alpha \in N_0^n} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in R^n.$$

Оператор, символ которого удовлетворяет оценке (1.1), (см. [3]) называется почти гипоеллиптическим. Не трудно проверить следующие факты:

Замечание 1. *Если оператор $P(D)$ почти гипоеллиптичен, то его характеристический многогранник правильный.*

Замечание 2. *Существуют почти гипозеллиптические операторы, которые не только не гипозеллиптичны, но и не являются частично гипозеллиптическими.*

Бернштейн в [4] доказал, что любое решение эллиптического уравнения второго порядка является аналитической функцией от вещественного переменного. В общем случае, для эллиптических систем эта задача решена И. Г. Петровским в [5]. В работах [6]-[7] Л. Эренпрасом и Ф. Джоном доказано, что если решение U частично гипозеллиптического уравнения $P(D)U = 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией вне некоторой выпуклой поверхности Γ , то U бесконечно дифференцируема в окрестности Γ .

В. И. Буренковым в [8] найдено необходимое и достаточное алгебраическое условие на оператор $P(D)$, при котором все те решения уравнения $P(D)U = 0$, рассматриваемые в бесконечном цилиндре, которые определенным образом стремятся к нулю на бесконечности были бы бесконечно дифференцируемыми функциями. В частности, им же доказано, что все решения $U \in L_2(E^n)$ уравнения $P(D)U = f$, когда $D^\alpha f \in L_2(E^n)$ при всех $\alpha \in N_0^n$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями тогда и только тогда, когда $P(\xi) \neq 0$ при достаточно больших $|\xi|$ ($\xi \in R^n$).

Общие результаты о гладкости решений гипозеллиптических или частично гипозеллиптических уравнений получены Л. Хермандером (см. [1]).

Поставленный выше вопрос для почти гипозеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, когда $\Omega = E^n$, решен в работах [9]- [10]. В работах [3, 11], введено понятие почти гипозеллиптического многочлена и найдены достаточные условия почти гипозеллиптивности в терминах нулей однородных подмногочленов данного многочлена. В работе [12] в этих же терминах найдены необходимые и достаточные условия почти гипозеллиптивности для двумерных многочленов.

Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в течение всей работы. Пусть $n = 2$ и $P(D) = P(D_1, D_2)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, для которого с некоторой постоянной $d > 1$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} d^{-1}(1 + |\xi_1|)^{m_1}(1 + |\xi_2|)^{m_2} &\leq 1 + |P(\xi)| \\ &\leq d(1 + |\xi_1|)^{m_1}(1 + |\xi_2|)^{m_2}, \quad \xi \in R^2, \end{aligned}$$

где m_1 и m_2 – четные числа.

Не трудно проверить, что, если двумерный многочлен P удовлетворяет оценке (1.2), то он почти гипоеллиптичен. Пусть $k_1, k_2 \in N_0$, $\mathcal{H} > 0$ и

$$\mathcal{N}(k_1, k_2) = \{\alpha, \alpha \in N_0^2, \alpha_j \leq k_j, j = 1, 2\},$$

$$\Omega_{\mathcal{H}} = \{x, x \in E^2, |x_1| < \mathcal{H}, x_2 \in E^1\}.$$

Определим функцию $g(t)$ следующим образом: $g(t) = 1 - t^2$ при $t \in (-1, 1)$ и $g(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, а $h(t) \in C^\infty(E^1)$ такая, что с некоторыми постоянными $\nu_j \geq 1$ ($j \in N_0$) при всех $t \in E^1$

$$(1.3) \quad \nu_0^{-1} e^{-|t|} \leq h(t) \leq \nu_0 e^{-|t|}, \quad h^{(j)}(t) \leq \nu_j e^{-|t|}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$g_{\mathcal{H}} = g_{\mathcal{H}}(x_1) = g(x_1/\mathcal{H}), \quad h_{\delta} = h_{\delta}(x_2) = h(\delta x_2), \quad \delta \geq 0,$$

и

$$W^k(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ U : \|U\|_{W^k(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha U\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty \right\},$$

$$W^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ U : \|U\|_{W^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha U\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty \right\},$$

$$W_g^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ U : \|U\|_{W_g^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha U) g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty \right\},$$

$$W_{\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ U : \|U\|_{W_{\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha U) h_{\delta}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty \right\},$$

$$W_{g, \delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}}) = \left\{ U : \|U\|_{W_{g, \delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha U) h_{\delta} g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty \right\}.$$

В этой работе g всегда означает функцию, а δ – число. Наша цель доказать, что, если $\mathcal{H}$ достаточно велико, а $\delta > 0$ достаточно мало, то

$$N(P, \mathcal{H}, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} W_{g, \delta}^{\mathcal{N}(k, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}}),$$

где

$$N(P, \mathcal{H}, \delta) = \left\{ U : \sum_{j=1}^{m_2} \left\| (D_2^j U) h_{\delta} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty, \right.$$

$$\left. D^j P(D) U \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}}), \quad j = 0, 1, \dots \right\}.$$

Откуда, используя теоремы вложения пространств Соболева, получим, что любое решение U уравнения $P(D)U = f$, для которого

$$\sum_{j=1}^{m_2} \left\| (D_2^j U) h_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty,$$

является бесконечно дифференцируемой по x_1 функцией, когда

$$f \in \bigcap_{k=0}^{\infty} W_\delta^{\mathcal{N}(k,0)}(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Для полноты изложения приведем некоторые известные результаты, которыми будем пользоваться.

Лемма 1. (см, например, [14], лемма 5.2) Пусть $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$ такая, что $\int \varphi dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon \equiv \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Тогда для любого $U \in L_2(E^n)$

$$\|U * \varphi_\varepsilon - U\|_{L_2}(E^n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

где

$$U * \varphi_\varepsilon = \int U(x-y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Лемма 2. (см. [9], лемма 1.1) Если $G \subset [-T, T]$ ($T > 0$), то для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in G} h_\delta(t + \theta) &\leq \sigma_1 h_\delta(t), \quad t \in E^1, \\ \sup_{\theta \in G} |h_\delta(t + \theta) - h_\delta(t)| &\leq \sigma_2 h_\delta(t), \quad t \in E^1, \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = \nu_0^2 e^{\delta T}$, $\sigma_2 = \nu_1^2 \delta T e^{\delta T}$ и ν_0, ν_1 – постоянные из оценки (1.2).

Лемма 3. (см. [13], замечание 2.4) Если $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0 \equiv 64m_1^2(m_1 + 1)$, то для любого $\beta_2 \in N_0$, $\beta_2 \leq m_2$ при всех $U \in W_g^{\mathcal{N}(m_1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|(D^\alpha U) g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq \sqrt{2} |\mathcal{N}| \left\{ \left\| D^{(m_1, m_2)}(U g_{\mathcal{H}}^{m_1}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\ (1.4) \quad &\left. + \|D_1^{m_1}(U g_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + 4 \|D_2^{m_2} U\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|U\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right\}, \end{aligned}$$

где $|\mathcal{N}|$ – количество мультииндексов $\alpha \in \mathcal{N}$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 4. Пусть $m \in N$ и a_j, b_j ($j = 0, \dots, m$) – неотрицательные числа такие, что $a_m = b_m$. Если для некоторого $c > 0$

$$a_j \leq b_j + c \sum_{l=j+1}^m a_l, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

то

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^m (2c+1)^j a_j \leq \sum_{j=0}^m (2c+1)^j b_j.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.2 работы [10].

Лемма 5. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многогранник с вершинами из N_0^2 . Тогда существуют положительные постоянные $\mu_1 = \mu_1(m_1)$, $\mu_2 = \mu_2(m_2)$ и $\mu_3 = \mu_3(m_1, m_2)$, где $m_j = \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha_j$ ($j = 1, 2$) такие, что для любых $\mathcal{H} > 0$, $\delta > 0$ и $U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(2.1) \quad \mu_1^{-1} \left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}+1} \right)^{m_1} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (U g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}) \cdot h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \mu_1 \left(\frac{\mathcal{H}+1}{\mathcal{H}} \right)^{m_1} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})},$$

$$(2.2) \quad \mu_2^{-1} (1+\delta)^{-m_2} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (U h_\delta) \cdot g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \mu_2 (1+\delta)^{m_2} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})}$$

$$(2.3) \quad \mu_3^{-1} \left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}+1} \right)^{m_1} (1+\delta)^{-m_2} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha (U g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1} h_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \mu_3 \left(\frac{\mathcal{H}+1}{\mathcal{H}} \right)^{m_1} (1+\delta)^{m_2} \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})}.$$

Доказательство. Справедливость правых частей оценок (2.1), (2.2), (2.3), в силу свойств функций $g_{\mathcal{H}}$ и h_δ (см. лемма 2) получается применением формулы Лейбница. Доказательство левой части оценки (2.1) получается в силу леммы 4, если заметить, что числа

$$a_j = \mathcal{H}^{-j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \|(D^\alpha u) g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1} h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}, \quad b_j = \mathcal{H}^{-j} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j} \|D^\alpha (u g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}) h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}$$

удовлетворяют условиям леммы 4, где

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}, \quad \mathcal{N}_j = \{\alpha \in N|_0^2 : \alpha + (j, 0) \in \mathcal{N}_0\}, \quad j = 0, \dots, m_1.$$

Доказательство левой части оценки (2.2) проводится аналогично доказательству левой части оценки (2.1), с использованием леммы 2. Левая часть оценки (2.3) доказывается комбинированием доказательств левых частей оценок (2.1) и (2.2).

Лемма 6. Пусть $\mathcal{N} \subset R_+^2$ – правильный многогранник с вершинами из N_0^2 . Тогда $C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ плотно в $W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.2 работы [9] с некоторой модификацией и использованием свойств функции $g_{\mathcal{H}}$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 7. Если символ оператора $P(D)$ удовлетворяет оценке (1.2), то для произвольной области $\Omega \subset E^2$ и любого мультииндекса $\beta \in \mathcal{N} = \mathcal{N}(m_1, m_2)$

$$\|D^\beta \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq d \left[\|P(D)\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \right], \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Доказательство непосредственно получается с помощью преобразования Фурье и равенства Парсеваля.

Лемма 8. Пусть символ оператора $P(D)$ удовлетворяет оценке (1.2). Тогда при достаточно больших $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$) и малых $\delta > 0$ с некоторой постоянной $\mu > 0$

$$(3.1) \quad \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \mu \left[\|(P(D)U) g_{\mathcal{H}}^{m_1} h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|D_2^{m_2}(U h_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|U h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Доказательство. В силу оценок (2.2) и (1.4) при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ с некоторой постоянной $C_1 = C_1(m_1, m_2) > 0$ и при всех $U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ имеем, что

$$(3.2) \quad \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq \mu_1(1 + \delta)^{m_2} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|D^\alpha(U h_\delta) g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}$$

$$(3.3) \quad \leq C_1(1 + \delta)^{m_2} \left[\|D^{(m_1, m_2)}(U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right.$$

$$(3.4) \quad \left. + \|D_1^{m_1}(U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|D_2^{m_2}(U h_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|U h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right].$$

Отсюда в силу леммы (7) с некоторой постоянной $C_2 = C_2(m_1, m_2, d) > 0$, так как $g \leq 1$, получим, что

$$\|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C_2(1 + \delta)^{m_2} \left[\|P(D)(U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|D_2^{m_2}(U h_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|U h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Отсюда в силу формулы Лейбница и свойств функций h_δ , $g_{\mathcal{H}}$ с некоторой постоянной $C_3 = C_3(m_1, m_2, d, a) > 0$, где $a = \max_{\alpha \in (P)} |\gamma_\alpha|$ и γ_α — коэффициенты

оператора $P(D)$, имеем

$$\begin{aligned}
 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq C_2(1+\delta)^{m_2} \left[\|(P(D)U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\
 &\quad + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} |\gamma_\alpha| C_\alpha^\beta \|(D^{\alpha-\beta}U)D^\beta(h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1})\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
 &\quad \left. + \|D_2^{m_2}(Uh_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|Uh_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right] \\
 &\leq C_3(1+\delta)^{m_2} \left[\|(P(D)U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\
 &\quad + \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \delta^{\beta_2} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \right)^{\beta_1} \|(D^{\alpha-\beta}U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1-\beta_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
 &\quad \left. + \|(D_2^{m_2}(Uh_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|Uh_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})..
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части неравенства (3.5). Пусть $\Delta_0 \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \Delta_0)$ и $\frac{1}{\mathcal{H}} \in (0, \Delta_0)$. Так как многогранник $\mathcal{N}(m_1, m_2)$ – правильный, то с некоторой постоянной $C_4 = C_4(m_1, m_2)$ имеем:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \delta^{\beta_2} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \right)^{\beta_1} \|(D^{\alpha-\beta}U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{\alpha_1-\beta_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
 &\leq C_4 \Delta_0 \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \|(D^\gamma U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{\gamma_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} = C_4 \Delta_0 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})}.
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Пусть $C_3 C_4 \Delta_0 (1 + \Delta_0)^{m_2} \leq 1/2$. Тогда из (3.5) и (3.6) при $\delta \in (0, \Delta_0)$ $(\mathcal{H})^{-1} \in (0, \Delta_0)$ и $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ получим, что

$$\begin{aligned}
 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq 2C_3(1+\Delta_0)^{m_2} \left[\|(P(D)U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \right. \\
 &\quad \left. + \|D_2^{m_2}(Uh_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|Uh_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}),
 \end{aligned}$$

т.е. оценку (3.1). Лемма доказана.

Замечание 3. Из лемм 8 и 6 непосредственно следует, что оценка (3.1) остается справедливой и для функций из $W_{g,\delta}^{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{H}})$.

Лемма 9. Пусть для дифференциального оператора $Q(D) = \sum_{\alpha \in (Q)} \gamma'_\alpha D^\alpha$, $(Q) \subset \mathcal{N}(m_1, m_2) \equiv \mathcal{N}$. Тогда для любого $j \in N_0$ и $\delta \in (0, 1)$ с некоторой постоянной $C > 0$

$$\begin{aligned}
 \|Q(D)(D_1^j U h_\delta) g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq \|(D_1^j Q(D)U)h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
 &\quad + C\delta \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{H}}(\Omega_{\mathcal{H}})}, \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).
 \end{aligned}$$

Доказательство в силу леммы 2 и правильности многогранника $\mathcal{N}$ получается применением формулы Лейбница.

Лемма 10. Пусть символ линейного дифференциального оператора $P(D) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha$ удовлетворяет оценке (1.2). Тогда при достаточно больших $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$, $(\mathcal{H})^{-1} < \Delta_0$) и малых $\delta > 0$ (где $\delta < \Delta_0$ с Δ_0 из леммы 8) существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $j \in N_0$ с некоторой постоянной $A_j > 0$ при всех $U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$(3.7) \quad \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq C \left\| (D_1^j P(D) U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + A_j \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})}.$$

Доказательство. В силу формулы Лейбница и неравенства треугольника имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &+ \sum_{\beta_2=1}^{m_2} \sum_{\nu_2=1}^{\beta_2} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1+j} C_{\beta_2}^{\nu_2} C_{m_1+j}^{\alpha_1} \left\| (D_1^{m_1+j-\alpha_1} D_2^{\beta_2-\nu_2} U) D^{\nu_2} h_\delta \cdot D_1^{\alpha_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &+ \sum_{\beta_2=1}^{m_2} \sum_{\nu_2=1}^{\beta_2} C_{\beta_2}^{\nu_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2-\nu_2} U) D_2^{\nu_2} h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &+ \sum_{\alpha_1=1}^{m_1+j} C_{m_1+j}^{\alpha_1} \left\| (D_1^{m_1+j-\alpha_1} U) h_\delta D_1^{\alpha_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Так как $(m_1+j-\alpha_1, \beta_2-\nu_2) \in \mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)$ при $\alpha_1 \geq 1$, $\nu \leq \beta_2 \leq m_2$, и

$$\left| D_1^{\alpha_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right| \leq \left(\frac{2}{\mathcal{H}} \right)^{\alpha_1} \frac{(m_1+j)!}{(m_1+j-\alpha_1)!} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j-\alpha_1},$$

когда $\alpha_1 \leq m_1+j$, то отсюда, в силу оценки (1.2) с некоторыми постоянными $C_1 = m_2!$ и $C_2 = C_2(j, m_1, m_2, \mathcal{H}, \delta) > 0$ при всех $U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &+ C_1 \sum_{\beta_2=1}^{m_2} \sum_{\nu_2=1}^{\beta_2} \delta^{\beta_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2-\nu_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &+ C_2 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Так как при $\delta \in (0, \Delta_0) \cap (0, (2m_2!m_2)^{-1})$ и при всех $U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}})$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta_2=1}^{m_2} \sum_{\nu_2=1}^{\beta_2} \delta^{\beta_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2-\nu_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
&= \sum_{\nu_2=1}^{\beta_2} \delta^{\beta_2} \sum_{\beta_2=\nu_2}^{m_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2-\nu_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
&\leq m_2 \Delta_0 \sum_{\alpha_2=0}^{m_2-1} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\alpha_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
&\leq \frac{1}{2m_2!} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2-1} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\alpha_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})},
\end{aligned}$$

то отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| (D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq 2 \left[\sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\
& \quad \left. + C_2 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части оценки (3.8). В силу леммы 7 имеем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| D_1^{m_1} D_2^{\beta_2} \left[D_1^j (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right] \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& \leq (m_2 + 1) d \left[\left\| P(D) D_1^j (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\
& \quad \left. + \left\| D_1^j (U h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right] \equiv (m_2 + 1) d [B_1 + B_2], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

Не трудно заметить, что с некоторой постоянной $C_3 = C_3(m_1, \delta)$

$$B_2 \leq C_3 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})}.
\tag{3.10}$$

Оценим выражение B_1 . В силу формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
& B_1 \leq \left\| P(D) \left((D_1^j U) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + \sum_{l=1}^j C_j^l \left\| P(D) \left((D_1^{j-l} U) h_\delta D_1^l g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& \leq \left\| \left(P(D) D_1^j U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0 \neq \alpha \in (P)} |\gamma_\alpha| \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left\| \left(D^{\alpha-\beta+(j,0)} U \right) \left(D_2^{\beta_2} h_\delta \right) \left(D_1^{\beta_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + \sum_{l=1}^j C_j^l \left\| P(D) \left((D_1^{j-l} U) h_\delta (D_1^l g_{\mathcal{H}}^{m_1+j}) \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& \leq \left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + \sum_{\substack{0 \neq \alpha \in (P) \\ \alpha_1 \leq m_1-1}} |\gamma_\alpha| \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left\| \left(D^{\alpha-\beta+(j,0)} U \right) \left(D_2^{\beta_2} h_\delta \right) \left(D_1^{\beta_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} |\gamma_{(m_1, \alpha_2)}| \sum_{\substack{0 \neq \beta \leq \alpha \\ \beta_1 \neq 0}} C_{(m_1, \alpha_2)}^\beta \left\| \left(D^{(m_1, \alpha_2)-\beta+(j,0)} U \right) \left(D_2^{\beta_2} h_\delta \right) \left(D_1^{\beta_1} g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} |\gamma_{(m_1, \alpha_2)}| \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \left\| \left(D^{(m_1, \alpha_2-\beta_2)+(j,0)} U \right) \left(D_2^{\beta_2} h_\delta \right) g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
(3.11) \quad & + \sum_{l=1}^j C_j^l \left\| P(D) \left((D_1^{j-l} U) h_\delta D_1^l g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \equiv \sum_{j=1}^5 B_{1,j}.
\end{aligned}$$

Не трудно заметить, что с некоторой постоянной $C_4 = C_4(m_1, m_2, j) > 0$

$$(3.12) \quad B_{1,2} + B_{1,3} + B_{1,5} \leq C_4 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})}.$$

При $a = \max_{(m_1, \alpha_2) \in (P)} |\gamma_{(m_1, \alpha_2)}|$ и $\delta \in (0, \Delta_0)$ ($\Delta_0 < 1$) в силу оценки (1.3) с некоторой постоянной $C_5 = C_5(m_2) > 0$ имеем, что

$$(3.13) \quad B_{1,4} \leq C_5 a \delta \sum_{\beta_2=0}^{m_2-1} \left\| \left(D^{(m_1+j, \beta_2)} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}.$$

Из (3.11) в силу (3.12) и (3.13) получаем, что

$$\begin{aligned}
(3.14) \quad B_1 & \leq \left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + C_5 a \delta \sum_{\beta_2=0}^{m_2-1} \left\| \left(D^{(m_1+j, \beta_2)} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
& + C_4 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1, m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})}.
\end{aligned}$$

Следовательно, из оценки (3.8) в силу (3.9), (3.10) и (3.14), имеем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| \left(D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \leq 2 \left[\left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\
& \left. + C_5 a \delta \sum_{\beta_2=0}^{m_2-1} \left\| \left(D^{(m_1+j, \beta_2)} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right]
\end{aligned}$$

$$+ (C_2 + C_3 + C_4) \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})} \Big], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Из оценки (3.14) при $2C_5 a\delta \leq 1/2$ и $C_6 = C_2 + C_3 + C_4$,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| \left(D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq 4 \left[\left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right. \\ &\quad \left. + C_6 \|U\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j-1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}), \end{aligned}$$

т.е. неравенство (3.7). Лемма доказана.

Следствие 1. При условиях леммы 10 для любого $j \in N_0$ существуют постоянные B_Γ ($\Gamma = 0, \dots, j+1$) такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| \left(D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq \sum_{j=0}^j B_\Gamma \left\| \left(D_1^\Gamma P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+\Gamma} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ (3.15) \quad &+ B_{j+1} \left[\|D_2^{m_2} (U h_\delta)\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \|U h_\delta\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right], \quad U \in C_0^\infty(\Omega_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Доказательство по индукции, непосредственно получается из леммы 10 с использованием леммы 9.

Замечание 4. В силу леммы 6 оценка (3.15) остается в силе и для функций из $W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})$ ($j \in N_0$), так как $\mathcal{N}(m_1+j, m_2)$ – правильный многогранник.

Лемма 11. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор, $\mathcal{H} > 0$, $\delta > 0$ и $U \in N(P, \mathcal{H}, \delta)$. Тогда для любого $j \in N_0$

$$\left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon - D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0_+,$$

где $\tilde{U}$ – продолжение на E^2 нулем функции U вне $\Omega_{\mathcal{H}}$, при этом $\tilde{U}_\varepsilon = \tilde{U} * \varphi_\varepsilon$, $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \varphi(x/\varepsilon)$.

Доказательство. Сначала заметим, что если $\Omega \subset E^2$ – произвольная область, $V \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $Q(D)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор такой, что $Q(D)U \in L_{2,loc}(\Omega)$, то $(Q(D)\tilde{V}_\varepsilon)(x) = (\widetilde{Q(D)V}_\varepsilon)(x)$, как только $\rho(x, \partial\Omega) > \varepsilon$, где ρ – функция расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области

Ω . Поэтому для любой функции $U \in N(P, \mathcal{H}, \delta)$ при $\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \left[D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon - D_1^j P(D) U \right] h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\
&= \left\| \left[D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon - D_1^j P(D) U \right] h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\
&\quad + \left\| \left[D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon - D_1^j P(D) U \right] h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\
&\leq \left\| D_1^j \left[\widetilde{(P(D)U)_\varepsilon} - P(D)U \right] h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\
&\quad + \left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\
&\quad + \left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Сходимость к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0_+$ выражения

$$\left\| \left(D_1^j P(D) U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} = \left\| \left[D_1^j P(D) (U h_\delta) \right] g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})}$$

непосредственно следует из определения $N(P, \mathcal{H}, \delta)$. Сходимость к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0_+$ выражения

$$\left\| \left(D_1^j P(D) \tilde{U}_\varepsilon \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}} \setminus \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})}$$

доказывается аналогично доказательству леммы 3.5 работы [13]. Покажем, что

$$\left\| \left[\widetilde{(D_1^j P(D)U)_\varepsilon} - (D_1^j P(D)U) \right] h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0_+,$$

. Обозначим $f = D_1^j P(D)U$. Так как $U \in N(P, \mathcal{H}, \delta)$, то $fh_\delta \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$. Нам нужно показать, что

$$\left\| \tilde{f}_\varepsilon h_\delta - fh_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned}
(3.16) \quad \left\| \tilde{f}_\varepsilon h_\delta - fh_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} &\leq \left\| (\widetilde{fh_\delta})_\varepsilon - fh_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\
&\quad + \left\| \tilde{f}_\varepsilon h_\delta - (\widetilde{fh_\delta})_\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0_+$ первое слагаемое правой части (3.16) стремится к нулю (см., например, [14], лемма 5.2), то остается показать, что второе слагаемое правой части (3.16) также стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как $\tilde{f}(x-y) = f(x-y)$ при

$x \in \Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}$ и $|y| < \varepsilon$, то в силу леммы 2 и неравенства Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{f_\varepsilon h_\delta} - \widetilde{(fh_\delta)} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} &= \|f_\varepsilon h_\delta - (fh_\delta)_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon})} \\ &= \left[\iint_{\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}} \left[\int (f(x-y)h_\delta(x) - f(x-y)h_\delta(x-y))\varphi_\varepsilon(y)dy \right]^2 dx \right]^{1/2} \\ &\leq \nu_1^2 \varepsilon e^2 \left[\iint_{\Omega_{\mathcal{H}-\varepsilon}} \left[\int f(x-y)h_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \right]^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \nu_1^2 \varepsilon e^2 \|f\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_1} = 1$, то отсюда в силу (3.16) получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть символ оператора $P(D)$ удовлетворяет оценке (1.3). Тогда при достаточно больших $\mathcal{H}$ и малых $\delta > 0$ для любого $j \in N_0$

$$(3.17) \quad N(P, \mathcal{H}, \delta) \subset W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1+j,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Доказательство. Пусть число $\mathcal{H}$ – настолько большое, а число $\delta > 0$ – настолько малое, что для них выполняется оценка (3.15) (см. также замечание 4). Пусть $j = 0$, $\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$, тогда (см. обозначения в лемме 9)

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in \mathcal{N}(m_1,m_2)} \left\| \left(D^\beta \widetilde{U_\varepsilon} \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} &\leq C \left\| \left(P(D) \widetilde{U_\varepsilon} \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ &\quad + \left\| D_2^{m_2} \left(\widetilde{U_\varepsilon} h_\delta \right) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \left\| \widetilde{U_\varepsilon} h_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 11 следует, что множество $\{\widetilde{U_\varepsilon}\}$ ($\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$) ограничено в $W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})$, при этом нетрудно заметить, что

$$\left\| \widetilde{U_{\varepsilon_1}} - \widetilde{U_{\varepsilon_2}} \right\|_{W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0_+.$$

Следовательно, множество $\{\widetilde{U_\varepsilon}\}$ ($\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$) компактно в $W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}})$. Так как

$$\left\| \widetilde{U_\varepsilon} - U \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то в силу замкнутости оператора дифференцирования имеем, что

$$U \in W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}}), \quad \text{т.е.} \quad N(P, \mathcal{H}, \delta) \subset W_{g,\delta}^{\mathcal{N}(m_1,m_2)}(\Omega_{\mathcal{H}}).$$

Пусть вложение (3.17) верно при $j \leq \Gamma - 1$ ($\Gamma \geq 1$). Докажем его для $j = \Gamma$. В силу предположения индукции достаточно показать, что

$$\sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| \left(D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} U \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} < \infty.$$

Из оценки (3.15) (см. также замечание 4) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left\| \left(D_1^{m_1+j} D_2^{\beta_2} \widetilde{U}_\varepsilon \right) h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ \leq \sum_{j=0}^{\Gamma} B_j \left\| \left(D_1^j P(D) \widetilde{U} \right)_\varepsilon h_\delta g_{\mathcal{H}}^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \\ + B_{\Gamma+1} \left(\left\| D_2^{m_2} (\widetilde{U}_\varepsilon h_\delta) \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} + \left\| \widetilde{U}_\varepsilon h_\delta \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 11, так как $U \in N(P, \mathcal{H}, \delta)$ имеем, что для любого $\beta_2 = 0, \dots, m_2$ множество $\{D_1^{m_1+\Gamma} D_2^{\beta_2} \widetilde{U}_\varepsilon\}$ ($\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$) ограничено в $L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$. При этом не трудно заметить, что для любого $\beta_2 = 0, \dots, m_2$

$$\left\| D_1^{m_1+\Gamma} D_2^{\beta_2} \widetilde{U}_{\varepsilon_1} - D_1^{m_1+\Gamma} D_2^{\beta_2} \widetilde{U}_{\varepsilon_2} \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0_+,$$

т.е. для любого $\beta_2 = 0, \dots, m_2$ множество $\{D_1^{m_1+\Gamma} D_2^{\beta_2} \widetilde{U}_\varepsilon\}$ ($\varepsilon \in (0, \mathcal{H})$) компактно в $L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$. Так как

$$\left\| \widetilde{U}_\varepsilon - U \right\|_{L_2(\Omega_{\mathcal{H}})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то в силу замкнутости дифференциального оператора имеем, что существует $D_1^{m_1+\Gamma} D_2^{\beta_2} U \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ при всех $\beta_2 = 0, \dots, m_2$. Это в силу предположения индукции означает, что

$$N(P, \mathcal{H}, \delta) \subset W_{g, \delta(\Omega_{\mathcal{H}})}^{\mathcal{N}(m_1+\Gamma, m_2)}.$$

Теорема доказана.

Abstract. The paper studies a class of almost hypoelliptic equations $P(D)U = f$ in a strip. It is proved that for $\mathcal{H}$ great enough and for $\delta > 0$ small enough all solutions of this equation, which are square summable with the weight $e^{-\delta|x|}$ and for which $D_2^{\alpha_2} U$, where $\alpha_2 = 0, \dots, \text{ord}_{\alpha_2} P$, are infinitely differentiable in x_1 functions, provided $D_1^j f \in L_2(\Omega_{\mathcal{H}})$ for any j .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hermander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, **2** (Springer-Verlag, 1983).
- [2] L. Gording, B. Malgrange B. "Operateurs Differentials Partillement Hypoeliptiques", Math. Scand, **9**, 5-21 (1961).
- [3] Г. Г. Казарян, "О почти гипозэллиптических полиномах", ДАН РФ, **398** (6), 701-703 (2004).

- [4] S. Bernstein, “Sur le Nature Analytique des Solutions des Equations aux Derivees Partielles du Second Ordere”, Math. Ann., **59**, 20-76 (1904).
- [5] И. Г. Петровский, “Sur Lanalicite des Solutions des Systemes Dequations Differentielles”, Mat. сб., **5** (47), 3-68 (1939).
- [6] L. Ehrenpreis, “Solutions of Some Problems of Division”, Amer. J. Math., **82**, 522-588 (1960).
- [7] F. John, “Continuous Dependence on Data for Solutions of PDE with a Prescribed Bound”, Comm. Pure. Appl. Math. **13**, 551-585 (1960).
- [8] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Хермандера о гипозэллиптичности”, Сборник докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, стр. 63-67 (1982).
- [9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Об одном классе почти гипозэллиптических операторов”, Изв. НАН РА, сер. Математика, **41** (6), 39-56 (2006).
- [10] В. Г. Карапетян, “Об одном классе дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами”, Изв. НАН РА, сер. Математика, **43** (5), 285-296 (2008).
- [11] Г. Г. Казарян, “Некоторые оценки производных полиномов с постоянными коэффициентами”, Изв. НАН РА, сер. Математика, **34** (3) 44-68 (1999).
- [12] O. R. Gabrielyan, “Comparison of Power and Strength of Polynomials in R^2 ”, Complex Analysis, Diff. Equations and Related Topics, Proc. of ISAAC Conf. on Analysis, 44-51, Yerevan, 2002.
- [13] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “О гладкости решений одного класса почти гипозэллиптических уравнений”, Изв. НАН РА, сер. Математика, (в печати).
- [14] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения* (Наука, Москва, 1996).

Поступила 18 июня 2008

ОДНОФАЗНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ВЫПУКЛОМ КОЛЬЦЕ

М. ПОГОСЯН, Р. ТЕЙМУРАЗЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *michael@ysu.am, rteymurazyan@gmail.com*

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача со свободной границей для уравнения теплопроводности в выпуклом кольце. При некоторых предположениях на начальные данные доказывается, что рассматриваемая задача имеет единственное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ – область, граница которой удовлетворяет условию Липшица по t , все сечения по t которой являются выпуклыми множествами и для которой множество

$$K_0 := \Omega_0 \cap \{t = 0\}$$

– непустое. Далее, пусть $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus K_0$ – непрерывная функция, для которой множество

$$K_1 := \text{supp } u_0 \cup K_0$$

компактно и выпукло. Предположим, что Ω_0 расширяется по времени. Наша задача состоит в том, чтобы найти пару (u, Ω_1) , где

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \quad \text{и} \quad u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0) \cap C(\overline{\Omega}_1 \setminus \Omega_0),$$

являющейся решением следующей задачи: (Γ_i – боковая граница области Ω_i ($i = 0, 1$)):

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{в } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0, \\ u(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ u(x, t) = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ |\nabla u(x, t)| = 1 & \text{на } \Gamma_1, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{в } K_1 \setminus \overline{K}_0. \end{cases}$$

Условие на градиент понимается в классическом смысле, т.е.

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_0}}} |\nabla u(x,t)| = 1 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t_0) \in \Gamma_1.$$

Задачи такого типа были рассмотрены А. Анро и Г. Шахголяном (см. [3, 4]) для эллиптических операторов. В частности, ими была рассмотрена следующая задача: *для заданной выпуклой области $K \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) найти содержащую ее область Ω такую, чтобы градиент p -емкостного потенциала множества $\Omega \setminus K$ имел бы определенное поведение на границе $\partial\Omega$ области Ω .*

Точнее, задача, рассмотренная А. Анро и Г. Шахголяном формулируется следующим образом: *пусть дана выпуклая, необязательно ограниченная, область $K \subset \mathbb{R}^n$. Найти область $\Omega \supset K$ и функцию u такие, что для заданной константы $c > 0$ выполняется*

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{в } \Omega \setminus \overline{K} \\ u(x,t) = 1 & \text{на } \partial K, \\ u(x,t) = 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ |\nabla u(x,t)| = c & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где Δ_p обозначает p -лапласиан, т.е. $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Здесь дополнительное условие на значения градиента на границе $|\nabla u| = c$ понимается в следующем смысле:

$$\liminf_{\Omega \ni y \rightarrow x} |\nabla u(y)| = \limsup_{\Omega \ni y \rightarrow x} |\nabla u(y)| = c \quad \text{для всех} \quad x \in \partial\Omega.$$

А. Анро и Г. Шахголяном был получен следующий результат (см. [3]): *если область K выпукла (но необязательно регулярна или ограничена), то существует классическое решение Ω вышеприведенной задачи и граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$. Более того, если K ограничена, то решение Ω единственно.*

Схожий результат был получен теми же авторами для внутренней задачи $K \supset \Omega$, (см. [4]). В работе [5] А. Петросяном была рассмотрена следующая задача параболического типа: *для данной начальной неотрицательной функции $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ найти неотрицательную непрерывную функцию u в $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $T > 0$ такую, что*

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{в } \Omega = \{u > 0\}, \\ |\nabla u| = 1 & \text{на } \partial\Omega \cap Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

где $\Delta = \Delta_x$ и $\nabla = \nabla_x$. А. Петросян доказал, что при некоторых условиях на u_0 , существует единственное классическое решение этой задачи для некоторого T (см. [5]).

В данной статье доказывается, что при некоторых предположениях на начальные данные, задача (1.1) имеет единственное решение для короткого времени, т.е. при $t < T$ для некоторого $T > 0$. В основном мы следуем технике, которая была использована в работах А. Анро и Г. Шахголяна [3, 4] и А. Петросяна [5].

В статье будем использовать следующие обозначения: через $\partial_t \Omega$ будем обозначать боковую границу области Ω , а также обозначим $\Omega(t_0) = \Omega \cap \{t = t_0\}$, $\Omega^T = \Omega \cap \{t \leq T\}$ и $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$.

2. СУБРЕШЕНИЯ И СУПЕРРЕШЕНИЯ

Определение 1. Назовем пару (u, Ω) **суперрешением** задачи (1.1) для короткого времени, если существуют $T > 0$ такое, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\Omega_0^T \subset \Omega$ и функция $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega \setminus \overline{\Omega}_0) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (a) $u_t = \Delta u$ в $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$,
- (b) $u(x, t) = 1$ на $\Gamma_0 \cap \mathbb{R}^n \times [0, T]$ и $u(x, t) = 0$ на $\partial_t \Omega$,
- (c) $\limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0}} |\nabla u(x, t)| \leq 1$ для всех $(x_0, t_0) \in \partial_t \Omega$,
- (d) $u(x, 0) \geq u_0(x)$ для $x \in K_1 \setminus \overline{K}_0$.

Определение 2. Назовем пару (u, Ω) **субрешением** задачи (1.1) для короткого времени, если существуют $T > 0$ такое, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\Omega_0^T \subset \Omega$ и функция $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega \setminus \overline{\Omega}_0) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (a) $u_t = \Delta u$ в $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$,
- (b) $u(x, t) = 1$ на $\Gamma_0 \cap \mathbb{R}^n \times [0, T]$ и $u(x, t) = 0$ на $\partial_t \Omega$,
- (c) $\liminf_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0}} |\nabla u(x, t)| \geq 1$ для всех $(x_0, t_0) \in \partial_t \Omega$,
- (d) $u(x, 0) \leq u_0(x)$ для $x \in K_1 \setminus \overline{K}_0$.

Назовем пару (u, Ω) **строгим субрешением** задачи (1.1) для короткого времени, если она является субрешением задачи (1.1) для короткого времени, и, кроме того, имеет место строгое неравенство в (c).

Определение 3. Назовем пару (u, Ω) **классическим решением** задачи (1.1) для короткого времени, если она является одновременно суперрешением и субрешением задачи (1.1) для короткого времени.

Ниже мы будем предполагать, что функция u_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$(2.1) \quad \Delta u_0(x) = 0, \quad x \in K_1 \setminus \overline{K}_0,$$

$$(2.2) \quad u_0(x) = 1, \quad x \in \partial K_0,$$

$$(2.3) \quad u_0 \in C^{0,1}(\overline{K}_1 \setminus K_0) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in K_1 \setminus \overline{K}_0}} |\nabla u_0(x)| = 1 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \partial K_1.$$

Будем предполагать также, что начальная функция u_0 является *звездообразной* относительно точки x_0 в следующем смысле:

$$(2.4) \quad u_0(\lambda x + x_0) \geq u_0(x + x_0)$$

для всех $\lambda \in (0, 1)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\lambda x + x_0$ и $x + x_0$ принадлежат $K_1 \setminus K_0$.

Пусть (u, Ω) является суперрешением задачи (1.1) и λ, λ' – вещественные числа, удовлетворяющие условию $0 < \lambda < \lambda' < 1$. Определим

$$(2.5) \quad u^\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda'} u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Масштабирование переменных таким образом обеспечивает то, что функция u^λ , также, как и u , удовлетворяет уравнению теплопроводности, но на множестве $\Omega_\lambda \setminus (\overline{\Omega}_0)_\lambda$, где

$$\Omega_\lambda = \{(x, t) : (\lambda x, \lambda^2 t) \in \Omega\}.$$

Тогда верна следующая

Лемма 1. *Если начальная функция u_0 удовлетворяет (2.4), то любое субрешение задачи (1.1) не превосходит любое суперрешение задачи (1.1).*

Замечание 1. *Скажем, что пара (u', Ω') не превосходит (u, Ω) , если $\Omega' \subset \Omega$ и $u' \leq u$ на множестве, где обе эти функции определены.*

Доказательство. Следуя доказательству леммы 2.4 работы [5], допустим, что (u, Ω) является суперрешением, а (u', Ω') является субрешением задачи (1.1). Достаточно доказать, что $\Omega' \subset \Omega$, тогда неравенство $u' \leq u$ будет следовать из этого включения при помощи принципа максимума.

В случае, когда $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \Omega_0)$ и $u' \in C^1(\overline{\Omega}' \setminus \Omega_0)$, включение $\Omega' \subset \Omega$ можно доказать при помощи метода масштабирования Лаврентьева следующим образом: пусть

$$\lambda_0 = \sup \{\lambda \in (0, 1) / \Omega' \subset \Omega_\lambda\} < 1,$$

где Ω_λ определена как выше. Тогда $\Omega' \subset \Omega_{\lambda_0}$, и существует общая точка $(x_0, t_0) \in \partial\Omega' \cap \partial\Omega_{\lambda_0} \cap Q_T$. Пусть $\lambda_0 < \lambda'_0 < 1$ и u^{λ_0} определена при помощи (2.5). Тогда $u' \leq u^{\lambda_0}$ в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) в Ω' . В общей точке (x_0, t_0) это неравенство влечет $\partial_\nu u'(x_0, t_0) \leq \partial_\nu u^{\lambda_0}(x_0, t_0)$, где ν – вектор внешней пространственной нормали для $\partial\Omega'$ и $\partial\Omega_{\lambda_0}$ в точке (x_0, t_0) (мы предположили, что функции принадлежат классу C^1). Но это приводит к противоречию, так как

$$\partial_\nu u'(x_0, t_0) = |\nabla u'(x_0, t_0)| \geq 1$$

и

$$\partial_\nu u^{\lambda_0}(x_0, t_0) = |\nabla u^{\lambda_0}(x_0, t_0)| = \frac{\lambda_0}{\lambda'_0} < 1.$$

Это означает, что $\lambda_0 = 1$ и $\Omega' \subset \Omega$.

Общий случай можно привести к уже рассмотренному регулярному случаю следующим образом. Пусть $(\tilde{u}, \tilde{\Omega})$ – субрешение задачи. Выберем $0 < \lambda < \lambda' < 1$ достаточно близко к 1 и регуляризируем $\tilde{u}$, положив

$$u(x, t) = (\tilde{u}^\lambda(x, t + h) - \eta)^+$$

для достаточно малых $h, \eta > 0$, и аналогично регуляризируем субрешение $(\tilde{u}', \tilde{\Omega}')$. Пользуясь уже доказанным и переходя к пределам сначала по $h, \eta \rightarrow 0+$, а затем по $\lambda \rightarrow 1-$, получим справедливость утверждения в общем случае.

Замечание 2. При условиях этой леммы, задача (1.1) имеет не более одного решения.

3. КЛАССЫ В И D

Определение 4. Скажем, что суперрешение (u, Ω) принадлежит классу В, если $\Omega(t)$ выпукла, расширяется по времени при $t \in [0, T]$ (T – величина, фигурирующая в определении суперрешения) и, кроме того, $\partial_t \Omega$ удовлетворяет условию Липшица по времени.

Замечание 3. Говоря, что граница $\partial_t \Omega$ удовлетворяет условию Липшица по времени, понимаем следующее: для каждого $(x_0, t_0) \in \partial_t \Omega$ существует окрестность V такая, что при надлежащем выборе координатной системы

$$(3.1) \quad V \cap \Omega = \{x_n > f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)\} \cap V,$$

где f – глобально определенная функция, которая равномерно Липшицева по t . Отметим, что если временные сечения $\Omega(t)$ выпуклы, то можно выбрать f таким образом, чтобы в пространственных координатах она была выпуклой.

Предложение 1. *Класс $\mathcal{B}$ непуст.*

Доказательство. Без потери общности можем предполагать, что $(0, t) \in \Omega_0(t)$ для $0 < t < \infty$. Обозначим через $G(x, t)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности, т.е.

$$G(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{если } t > 0, \\ 0 & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Выберем числа $\varepsilon, \alpha > 0$ и $C > 0$ таким образом, чтобы функция

$$U(x, t) := C[G(x, t + \varepsilon) - \alpha]$$

удовлетворяла условиям

$$U(x, t) > 1, \quad (x, t) \in \partial_l \Omega_0^T$$

для фиксированного T и

$$U(x, 0) > u_0(x) \quad \text{в } K_1 \setminus K_0.$$

Нетрудно видеть, что $\Omega = \{(x, t) : U(x, t) > 0\}$ расширяется в $0 < t < T$ для некоторого $T > 0$, и ее боковая граница удовлетворяет условию Липшица по времени. Следовательно, для любой точки $(x_0, t_0) \in \partial_l \Omega$ имеет место

$$|\nabla U(x_0, t_0)| = \frac{\partial U(x_0, t_0)}{\partial r}, \quad r := |x|,$$

так как временные сечения Ω суть шары с центром в начале координат. Тогда при надлежащем выборе констант C и α получаем неравенство

$$|\nabla U(x_0, t_0)| < 1,$$

для всех $(x_0, t_0) \in \partial_l \Omega^T$.

Наконец, обозначим через $u(x, t)$ решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0, & \text{в } \Omega^T \setminus \overline{\Omega}_0^T, \\ u(x, t) = 1, & \text{на } \partial_l \Omega_0^T, \\ u(x, t) = 0, & \text{на } \partial_l \Omega^T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{в } (\Omega^T \setminus \Omega_0^T) \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Тогда из принципа сравнения для параболических уравнений следует $u(x, t) < U(x, t)$ для $(x, t) \in \Omega^T \setminus \overline{\Omega}_0^T$. Отсюда

$$\limsup_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x, t) \in \Omega^T \setminus \overline{\Omega}_0^T}} |\nabla u(x, t)| \leq \limsup_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x, t) \in \Omega^T \setminus \overline{\Omega}_0^T}} |\nabla U(x, t)| < 1$$

для всех $(x_0, t_0) \in \partial_l \Omega^T$. Таким образом, $(u, \Omega) \in \mathcal{B}$.

Предложение 2. *Класс строгих суперрешений непуст.*

Доказательство. Пусть (u, Ω) – суперрешение задачи (1.1) и $u^\lambda(x, t)$ определена как в (2.5) с $0 < \lambda < \lambda' < 1$. Тогда

$$\begin{cases} (u^\lambda)_t = \Delta u_\lambda & \text{в } \Omega_\lambda \setminus (\overline{\Omega}_0)_\lambda, \\ u^\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda'} & \text{на } (\Gamma_0)_\lambda, \\ u^\lambda(x, t) = 0 & \text{на } \partial_l \Omega_\lambda, \\ u^\lambda(x, 0) \geq u_0(x) & \text{в } (K_1)_\lambda \setminus (\overline{K}_0)_\lambda, \\ \limsup_{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0)} |\nabla u^\lambda| < 1 & \text{на } \partial_l \Omega_\lambda. \end{cases}$$

Пусть $v^\lambda(x, t)$ – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} v_t^\lambda = \Delta v^\lambda & \text{в } \Omega_\lambda \setminus \overline{\Omega}_0, \\ v^\lambda(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ v^\lambda(x, t) = 0 & \text{на } \partial_l \Omega_\lambda, \\ v^\lambda(x, 0) = u_0(x) & \text{в } (K_1)_\lambda \setminus \overline{K}_0. \end{cases}$$

Тогда $v^\lambda \leq u^\lambda$ для $(x, t) \in \Omega_\lambda \setminus (\overline{\Omega}_0)_\lambda$ из принципа сравнения для параболических уравнений. Отсюда получим

$$\limsup_{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0)} |\nabla v^\lambda(x, t)| \leq \limsup_{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0)} |\nabla u^\lambda(x, t)| < 1$$

для всех $(x_0, t_0) \in \partial_l \Omega_\lambda$. Это доказывает, что пара $(v^\lambda, \Omega_\lambda) \in \mathcal{B}$. Кроме того, выбором $\lambda < \lambda' < 1$ можно достичь того, чтобы пара $(v^\lambda, \Omega_\lambda)$ стала не только суперрешением, но также и строгим суперрешением задачи (1.1).

Определение 5. Скажем, что субрешение (u, Ω) принадлежит классу $\mathcal{D}$, если $\Omega(t)$ выпукла, расширяется по времени на $t \in [0, T]$ (T – фигурирующая в определении субрешения величина) и, кроме того, $\partial_l \Omega$ удовлетворяет условию Липшица по времени.

Предложение 3. *Класс $\mathcal{D}$ непуст.*

Доказательство. Отметим, что в силу наших предположений

$$\begin{cases} \Delta u_0(x) = 0 & \text{в } K_1 \setminus \overline{K}_0, \\ u_0(x) = 1 & \text{на } \partial K_0, \\ u_0(x) = 0 & \text{на } \partial K_1, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in K_1 \setminus \overline{K}_0}} |\nabla u_0(x)| = 1 & \text{для всех } x_0 \in \partial K_1, \end{cases}$$

Определим функцию $v(x, t)$ следующим образом:

$$(3.2) \quad v(x, t) = u_0(x), \quad x \in E_1^T \setminus E_0^T,$$

где $E_1^T = K_1 \times [0, T)$ и $E_0^T = K_0 \times [0, T)$. Тогда

$$\begin{cases} v_t = \Delta v & \text{в } E_1^T \setminus \overline{E}_0^T, \\ v(x, t) = 0 & \text{на } \partial_t E_1^T, \\ v(x, t) = 1 & \text{на } \partial_t E_0^T, \\ \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in E_1^T \setminus E_0^T}} |\nabla v(x, t)| = 1 & \text{для всех } (x_0, t_0) \in \partial_t E_1^T. \end{cases}$$

Пусть $u(x, t)$ – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{в } E_1^T \setminus \overline{\Omega}_0^T, \\ u(x, t) = 0 & \text{на } \partial_t E_1^T, \\ u(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0^T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{для } x \in K_1 \setminus K_0. \end{cases}$$

Тогда, так как Ω_0 расширяется по времени, получим $E_0^T \subset \Omega_0^T$ а из принципа сравнения получим, что

$$v(x, t) \leq u(x, t) \quad \text{в } E_1^T \setminus \overline{\Omega}_0^T.$$

Следовательно,

$$\liminf_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in E_1^T \setminus \Omega_0^T}} |\nabla u(x, t)| \geq \liminf_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in E_1^T \setminus \Omega_0^T}} |\nabla v(x, t)| = 1 \quad \text{для всех } (x_0, t_0) \in \partial_t E_1^T.$$

Таким образом, для любого T пара (E_1^T, u) принадлежит классу $\mathcal{D}$.

4. МИНИМАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ КЛАССА $\mathcal{B}$

Нашей ближайшей задачей будет исследование минимального элемента класса $\mathcal{B}$ как кандидата на классическое решение задачи (1.1). Положим

$$(4.1) \quad \Omega^* = \left(\bigcap_{(u, \Omega) \in \mathcal{B}} \Omega \right)^\circ,$$

где A° означает внутренность множества A . В силу предложения 3 и леммы 1, можем утверждать, что Ω^* не совпадает с Ω_0 . Далее, пусть u^* – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} u_t^* = \Delta u^* & \text{в } \Omega^* \setminus \overline{\Omega}_0, \\ u^*(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ u^*(x, t) = 0 & \text{на } \partial_t \Omega^*, \\ u^*(x, 0) = u_0(x) & \text{в } K_1 \setminus \overline{K}_0. \end{cases}$$

В этом параграфе мы докажем, что если $T \leq T(u_0)$ достаточно мало, и функция u_0 удовлетворяет условиям (2.1)-(2.4), то пара (u^*, Ω^*) является минимальным элементом класса $\mathcal{B}$ и, кроме того, является классическим решением задачи (1.1). Следующая лемма играет основную роль в дальнейшем изложении.

Лемма 2. Пусть функция u_0 удовлетворяет условиям (2.1)-(2.4) и Ω^* определена равенством (4.1). Тогда $\partial\Omega^* \cap Q_\beta$ удовлетворяет условию Липшица по времени для некоторого $\beta > 0$.

Доказательство. Пусть $(u, \Omega) \in \mathcal{B}$. Для достаточно малых $\varepsilon, h > 0$ обозначим

$$w(x, t) = \frac{1}{1-\varepsilon} u((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)^2(t+h))$$

в $Q_{(1-\varepsilon)^{-2}T-h}$. Тогда $w(x, t)$ будет решением уравнения теплопроводности в области $\Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \overline{\Omega}_{1-\varepsilon, h}^0$, где

$$\Omega_{1-\varepsilon, h} = \{(x, t) : ((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)^2(t+h)) \in \Omega\},$$

$$\Omega_{1-\varepsilon, h}^0 = \{(x, t) : ((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)^2(t+h)) \in \Omega_0\}.$$

Докажем, что $w(x, 0) \geq u_0(x)$ в $\overline{\Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \Omega_{1-\varepsilon, h}^0} \cap \{t = 0\}$. Ввиду предложения 3 и (2.4)

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \frac{1}{1-\varepsilon} u((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)^2 h) \geq \frac{1}{1-\varepsilon} v((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)^2 h) \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} u_0((1-\varepsilon)x) \geq u_0(x), \end{aligned}$$

где $v(x, t)$ определена равенством (3.2). Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \tilde{w}_t = \Delta \tilde{w} & \text{в } (\Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \overline{\Omega}_0) \cap \{t > 0\}, \\ \tilde{w} = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ \tilde{w} = 0 & \text{на } \partial_l \Omega_{1-\varepsilon, h}, \\ \tilde{w} = u_0 & \text{в } \overline{\Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \Omega_{1-\varepsilon, h}^0} \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Из принципа сравнения следует, что $\tilde{w} \leq w$ в $\Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \overline{\Omega}_{1-\varepsilon, h}^0$, и, следовательно,

$$\limsup_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x, t) \in \Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \overline{\Omega}_{1-\varepsilon, h}^0}} |\nabla \tilde{w}| \leq \limsup_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x, t) \in \Omega_{1-\varepsilon, h} \setminus \overline{\Omega}_{1-\varepsilon, h}^0}} |\nabla w| \leq 1$$

для всех $(x_0, t_0) \in \partial_l \Omega_{1-\varepsilon, h}$. Таким образом, получаем $(\tilde{w}, \Omega_{1-\varepsilon, h}) \in \mathcal{B}$.

Теперь заметим, что временные сечения множества $\Omega_{1-\varepsilon, h}$ удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \Omega(t) = \Omega_{1-\varepsilon, h} \left(\frac{t}{(1-\varepsilon)^2} - h \right).$$

Пробегаая по всем $(u, \Omega) \in \mathcal{B}$, заключаем, что

$$(4.2) \quad \frac{1}{1-\varepsilon} \Omega^*(t) \supset \Omega^* \left(\frac{t}{(1-\varepsilon)^2} - h \right).$$

Так как $\Omega^*(t)$ расширяется по времени, то включение (4.2) нетривиально, если

$$\frac{t}{(1-\varepsilon)^2} - h < t,$$

что эквивалентно неравенству

$$t < \frac{h(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon(2-\varepsilon)} (= \beta).$$

Кроме того, (4.2) влечет также регулярность по Липшицу $\partial_t \Omega^*$ по переменной времени. Лемма доказана.

Для суперрешения $(u, \Omega) \in \mathcal{B}$ задачи (1.1), можно заменить условие (с) на градиент в определении 1 следующим:

$$\limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u(x,t)}{d_\Omega(x,t)} \leq 1, \quad (x_0, t_0) \in \partial_t \Omega,$$

где

$$d_\Omega(x, t) = \text{dist}(x, \partial\Omega(t)).$$

Это доказано в лемме 5.1 работы [5], которую мы приводим ниже:

Лемма 3. Пусть Ω – ограниченная область в Q_T такая, что $\Omega(t)$ выпукла для всех $t \in (0, T)$ и $\partial_t \Omega$ удовлетворяет условию Липшица по времени. Далее пусть u – неотрицательная, непрерывная вплоть до границы $\partial_t \Omega$ и обращающаяся в нуль на границе функция такая, что $\Delta u - u_t = 0$ в Ω . Тогда

$$\limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} |\nabla u(x, t)| = \limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u(x, t)}{d_\Omega(x, t)},$$

для всех $(x_0, t_0) \in \partial_t \Omega$.

Следующая лемма представляет собой эллиптическую версию вышеприведенной леммы и доказана в [5].

Лемма 4. Пусть D ограниченная выпуклая пространственная область, а u – определенная в D , неотрицательная, непрерывная вплоть до границы ∂D и обращающаяся в нуль на границе функция такая, что $\Delta u = f$ в D , где функция f предполагается ограниченной. Тогда

$$\limsup_{D \ni x \rightarrow x_0} |\nabla u(x)| = \limsup_{D \ni x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{d(x)},$$

где $d(x) = \text{dist}(x, \partial D)$.

Лемма 5. Если u_0 удовлетворяет условиям (2.1)-(2.4), то пара (u^*, Ω^*) является минимальным элементом класса $\mathcal{B}$.

Доказательство. Достаточно только доказать, что (u^*, Ω^*) является супер-решением задачи (1.1). Пусть последовательность $(u_k, \Omega_k) \in \mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $\Omega^* = \left(\bigcap_k \Omega_k \right)^\circ$,
- (ii) последовательность $\{\Omega_k\}$ убывает,
- (iii) $u_k(x, 0) = u_0(x)$.

Такую последовательность можно построить следующим образом. Сначала пользуясь сепарабельностью $\mathbb{R}^n$ и свойством выпуклости множеств из $\mathcal{B}$, нетрудно доказать, что существует последовательность $(u_k, \Omega_k) \in \mathcal{B}$ такая, что $\Omega^* = \left(\bigcap_k \Omega_k \right)^\circ$. Чтобы гарантировать выполнение условия (ii) обозначим $\Omega_{k,m} = \Omega_k \cap \Omega_m$ и допустим, что $u_{k,m}$ – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \partial_t u_{k,m} = \Delta u_{k,m} & \text{в } \Omega_{k,m} \setminus \overline{\Omega}_0, \\ u_{k,m}(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ u_{k,m}(x, t) = 0 & \text{на } \partial_l \Omega_{k,m}, \\ u_{k,m}(x, 0) = \min\{u_k(\cdot, 0), u_m(\cdot, 0)\} & \text{в } (\Omega_{k,m} \setminus \overline{\Omega}_0) \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Тогда

$$u_{k,m}(x, t) \leq \min\{u_k(x, t), u_m(x, t)\} \quad \text{для всех } (x, t) \in \Omega_{k,m}.$$

Так как для функций расстояния справедливо неравенство

$$d_{\Omega_{k,m}}(x, t) = \min\{d_{\Omega_k}(x, t), d_{\Omega_m}(x, t)\} \quad \text{для всех } (x, t) \in \Omega_{k,m} \setminus \overline{\Omega}_0,$$

то ввиду леммы 3 получим, что $(u_{k,m}, \Omega_{k,m}) \in \mathcal{B}$. Если теперь предположим, что (ii) не выполняется, можем заменить множество Ω_k пересечением всех множеств Ω_m с $m \leq k$, и получить убывающую последовательность $\{\Omega_k\}$. Теперь предположим, что $(u_k, \Omega_k) \in \mathcal{B}$, где Ω_k убывает. Обозначим через $\tilde{u}_k$ решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} (\tilde{u}_k)_t = \Delta \tilde{u}_k & \text{в } \Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0, \\ \tilde{u}_k = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_k = 0 & \text{на } \partial_l \Omega_k, \\ \tilde{u}_k(x, 0) = u_0(x) & \text{на } \{t = 0\} \cap (\overline{\Omega_k} \setminus \overline{\Omega}_0). \end{cases}$$

Тогда $u_k \geq \tilde{u}_k$ на параболической границе области $\Omega_k \setminus \Omega_0$. В силу принципа сравнения, отсюда следует, что $u_k \geq \tilde{u}_k$ в $\Omega_k \setminus \Omega_0$. Отсюда получаем, что

$$\limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0}} |\nabla \tilde{u}_k(x, t)| \leq \limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0}} |\nabla u_k(x, t)| \leq 1 \quad \text{для всех } (x_0, t_0) \in \partial_l \Omega_k,$$

и поэтому $(\tilde{u}_k, \Omega_k) \in \mathcal{B}$ с $\tilde{u}_k(x, 0) = u_0(x)$. Так что мы можем предположить, что $(u_k, \Omega_k) \in \mathcal{B}$, Ω_k убывает и $u_k(x, 0) = u_0(x)$.

Пусть ω_k – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} (\omega_k)_t = \Delta \omega_k & \text{в } \Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0, \\ \omega_k(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ \omega_k(x, t) = 0 & \text{на } \partial_t \Omega_k, \\ \omega_k(x, 0) = 1 & \text{в } (\Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0) \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Допустим, что (w, W) некоторое субрешение задачи (1.1). Тогда из леммы 1 следует, что $u_k(x, t) \geq w(x, t)$ в W , и поэтому

$$|\nabla u_k(x, t)| \leq |\nabla w(x, t)| \quad \text{на } \Gamma_0.$$

Положим

$$M := \sup_{(x, t) \in \Gamma_0} |\nabla w(x, t)| \quad \text{и} \quad C := \sup_{x \in K_1 \setminus K_0} |\nabla u_0(x)|.$$

Докажем, что

$$|\nabla u_k(x, t)| \leq 1 + (C + M - 1)\omega_k(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0.$$

Для этого заметим, что функция $|\nabla u(x, t)|$ является субкалорической в $\Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0$ и

$$|\nabla u_k(x, t)| \leq 1 + (C + M - 1)\omega_k(x, t)$$

на параболической границе множества $\Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0$. Таким образом, требуемое неравенство следует из принципа сравнения.

Наконец, заметим, что функции u_k – калорические и равномерно ограничены в $\Omega_k \setminus \overline{\Omega}_0$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность последовательности $\{u_k\}$, которая сходится в норме C^1 к некоторой функции u^* на компактных подмножествах множества $\Omega^* \setminus \overline{\Omega}_0$. Можем также предположить для этой подпоследовательности, что соответствующая подпоследовательность ω_k сходится к некоторой ω^* , удовлетворяющей следующим условиям:

$$\begin{cases} \partial_t \omega^* = \Delta \omega^* & \text{в } \Omega^* \setminus \overline{\Omega}_0, \\ \omega^*(x, t) = 1 & \text{на } \Gamma_0, \\ \omega^*(x, t) = 0 & \text{на } \partial_t \Omega^*, \\ \omega^*(x, 0) = 1 & \text{в } (\Omega^* \setminus \overline{\Omega}_0) \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Отсюда, переходя к пределу, получим

$$|\nabla u^*(x, t)| \leq 1 + (C + M - 1)\omega^*(x, t)$$

для всех (x, t) в $\Omega^* \setminus \overline{\Omega}_0$. Следовательно, (u^*, Ω^*) принадлежит $\mathcal{B}$ и поэтому является минимальным элементом этого класса.

5. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Метод, которым будем пользоваться в этом и последующем параграфах, был использован А. Анро и Г. Шахголяном [3, 4] для исследования эллиптических задач. Для калорических функций этот метод был использован в [5]. Дадим следующее

Определение 6. Если $\Omega(t)$ выпукла, то точка $(x, t) \in \partial_l \Omega$ называется *крайней точкой*, если $x \in \partial \Omega(t)$ является крайней точкой множества $\Omega(t)$. Последнее означает, что x не является выпуклой комбинацией не совпадающих с x точек из $\partial \Omega(t)$.

Лемма 6. Если u_0 удовлетворяет условиям (2.1)-(2.4), то пара (u^*, Ω^*) удовлетворяет условию

$$(5.1) \quad \limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x,t) \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}_0}} |\nabla u^*(x, t)| = 1$$

для любой крайней точки $(x_0, t_0) \in \partial \Omega^* \cap Q_\lambda$ с $\lambda \leq \beta$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы, когда x_0 является экстремальной точкой $\partial \Omega^*(t_0)$, т.е. когда существует пространственная опорная плоскость к $\Omega^*(t_0)$, которая касается $\partial \Omega^*(t_0)$ только в точке x_0 . Это следует из того факта, что экстремальные точки всюду плотны во множестве крайних точек.

Теперь предположим, что точка $x_0 \in \partial \Omega^*(t_0)$ является экстремальной, но в этой точке равенство (5.1) неверно. Тогда, в силу лемм 3 и 2 существует (временно-пространственная) окрестность V точки (x_0, t_0) и $\alpha > 0$ такое, что

$$(5.2) \quad u^*(x, t) \leq (1 - \alpha) d_{\Omega^*}(x, t)$$

для всех $(x, t) \in V \cap \Omega^*$. Можем дополнительно предполагать, что пересечение $V \cap \Omega^*$ дано равенством (3.1).

Пусть Π является пространственной опорной плоскостью к $\Omega^*(t_0)$ такой, что $\Pi \cap \partial \Omega^*(t_0) = \{x_0\}$. Без потери общности можем предполагать, что $x_0 = 0$ и $\Pi = \{x_n = 0\}$. Более того, пусть $\Omega^*(t_0) \subset \{x_n > 0\}$. Так как точка (x_0, t_0) является экстремальной, нетрудно показать, что существуют числа $\delta_0 > 0$ и $\eta_0 > 0$ такие, что

$$\{(x, t) \in \Omega^* : x_n \leq \eta_0, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta_0]\} \subset V.$$

Рассмотрим функцию

$$h(t) = - \min_{x \in \Omega^*(t)} x_n, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta_0],$$

Так как по предположению граница $\partial_t \Omega^*$ удовлетворяет условию Липшица по времени, то

$$h(t) \leq L(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta_0],$$

где L – константа Липшица функции f по t . Предположим, что число $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ достаточно мало, и константа $C \geq L$ выбрана таким образом, что

$$h(t_0 + \delta_0) \leq C\delta_0 - \eta_1.$$

Тогда существует $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ такое, что

$$h(t_0 + \delta_1) = C\delta_1 - \eta_1$$

и

$$h(t) \geq C(t - t_0) - \eta_1$$

для всех $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$. Определим теперь множество $\Omega \subset Q_T$ с помощью его временных сечений следующим образом:

$$(5.3) \quad \Omega(t) = \begin{cases} \Omega^*(t) & \text{при } t \in (t_0 + \delta_1, T), \\ \Omega^*(t) \cap \{x_n > \eta_1 - C(t - t_0)\} & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta_1], \\ \Omega(t_0) \cap \Omega^*(t) & \text{при } t \in (0, t_0). \end{cases}$$

Кроме того, пусть u – решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{в } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \\ u = 0 & \text{на } \partial_t \Omega, \\ u = 1 & \text{на } \partial_t \Omega_0, \\ u = u_0 & \text{в } \Omega \cap \{t = 0\} \setminus \overline{K}_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что при достаточно малых η_1 , пара (u, Ω) принадлежит $\mathcal{B}$. Тогда это приведет к противоречию, так как Ω^* не является подмножеством множества Ω . Так как Ω имеет выпуклые временные сечения и расширяется по времени, то остается лишь проверить, что (u, Ω) – является суперрешением задачи (1.1).

Как утверждает лемма 5 работы [1], существует $\varepsilon = \varepsilon(n, L) > 0$ такое, что функция

$$w^*(x) = w^*(x; t) = u^*(x, t) + u^*(x, t)^{1+\varepsilon}$$

субгармонична по x в окрестности точки (x_0, t_0) . Более того, мера этой окрестности зависит только от n и L , и можем предполагать, что V обладает этим свойством. Далее, заметим, что при достаточно малом η_1 и фиксированном δ_0 можем

утверждать, что $C \leq L + 1$. Это означает, что граница множества Ω удовлетворяет условию Липшица по времени с константой Липшица $(L + 1)$. Следовательно, можем полагать, что

$$w(x) = w(x; t) = u(x, t) + u(x, t)^{1+\varepsilon}$$

субгармонична в окрестности V .

Чтобы доказать, что пара (u, Ω) является суперрешением, рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\tilde{t} \in (t_0 + \delta_1, T)$. В этом случае $u \leq u^*$, так как $\Omega \subset \Omega^*$. Отсюда следует, что,

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \Omega_0}} \frac{u(x, t)}{d_\Omega(x, t)} \leq \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega^* \setminus \Omega_0}} \frac{u^*(x, t)}{d_{\Omega^*}(x, t)} \leq 1$$

для всех $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \partial_t \Omega$ с $\tilde{t} > t_0$.

Случай 2: $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + \delta_1]$. В этом случае снова будем иметь $u \leq u^*$, так как $\Omega(t) \subset \Omega^*(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$. Рассмотрим часть $D(t)$ множества $\Omega^*(t)$, находящуюся между плоскостями $\Pi_1 = \{x_n = \eta_1 - C(t - t_0)\}$ и $\Pi_0 = \{x_n = \eta_0 - C(t - t_0)\}$. Сравнивая функции $w(x) = w(x; t)$ и $l(x) = x_n - (\eta_1 - C(t - t_0))$, видим, что они равняются нулю на Π_1 . Кроме того,

$$l(x) = \eta_0 - \eta_1 \quad \text{на} \quad \Pi_0.$$

Для того, чтобы оценить функцию w на Π_0 , сначала оценим u на Π_0 с помощью (5.2):

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq (1 - \alpha)d_{\Omega^*}(x, t) \leq (1 - \alpha)(x_n - L(t - t_0)) \leq (1 - \alpha)\eta_0.$$

Следовательно, для достаточно малых η_0

$$w(x) \leq (1 - \alpha/2)\eta_0 \quad \text{на} \quad \Pi_0.$$

Пусть η_1 выбрано столь малым, чтобы $(1 - \alpha/2)\eta_0 \leq \eta_0 - \eta_1$. Тогда $w \leq l$ на $\partial D(t)$, и, следовательно, $w \leq l$ в $D(t)$, так как w является субгармонической функцией, а l — гармонической (линейной). Вместе с $u \leq u^*$ полученное неравенство влечет

$$(5.4) \quad \limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \Omega_0}} \frac{u(x, t)}{d_\Omega(x, t)} \leq 1,$$

где $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \partial_t \Omega$, а t принадлежит $[t_0, t_0 + \delta_1]$.

Случай 3: $\tilde{t} \in (0, t_0)$. Заметим, что $\Omega(t)$ расширяется по времени, а функция u_0 – гармоническая. Тогда, используя принцип максимума для уравнения теплопроводности, можем утверждать, что $u_t \geq 0$ в Ω . Вспоминая также, что $\Omega \subset \Omega^*$, получим $u \leq u^*$. Тогда, если $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \partial_l \Omega \cap \partial_l \Omega^*$, то

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u(x,t)}{d_\Omega(x,t)} \leq \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u^*(x,t)}{d_\Omega^*(x,t)} \leq 1.$$

Вторая возможность состоит в том, что точка $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \partial_l \Omega$ принадлежит цилиндрической части границы, которая получается вертикальным движением границы $\partial_l \Omega(t_0)$. В этом случае

$$d_\Omega(x, \tilde{t}) = d_\Omega(x, t_0).$$

Так как $u_t \geq 0$, то $u(x, \tilde{t}) \leq u(x, t_0)$, откуда следует, что

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u(x,t)}{d_\Omega(x,t)} \leq \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, t_0) \\ (x,t) \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0}} \frac{u(x, t_0)}{d_\Omega(x, t_0)} \leq 1.$$

Тем самым мы доказали, что (5.4) имеет место для всех $t \in (0, T)$, а из леммы 3 следует, что $(u, \Omega) \in \mathcal{B}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

6. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема является основным утверждением работы.

Теорема 1. Пусть функция u_0 удовлетворяет условиям (2.1)-(2.4), Тогда минимальный элемент (u^*, Ω^*) класса $\mathcal{B}$ является единственным классическим решением задачи (1.1) для короткого времени.

Прежде чем привести доказательство теоремы, приведем некоторые утверждения, которые доказаны в [5], и которые, как нетрудно показать, остаются верными и для выпуклых колец.

Лемма 7. Пусть D – ограниченная пространственная выпуклая область с C^1 -регулярной границей, V – некоторая окрестность границы ∂D , а w – гладкая субгармоническая положительная функция в $D \cap V$, которая непрерывна вплоть до границы ∂D , где она принимает значение нуль.

Если линии уровня $\{w = s\}$ – строго выпуклые поверхности при $0 < s < s_0$, и если

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D \cap V}} |\nabla w(x)| \geq 1$$

имеет место для всякой крайней точки $x_0 \in \partial D$, то для всех x с $0 < w(x) < s_0$

$$|\nabla w(x)| \geq 1.$$

Лемма 8. Пусть D – ограниченная пространственная выпуклая область и x_0 – сингулярная точка границы ∂D , т.е. существуют не меньше двух опорных плоскостей к D в точке x_0 . Пусть V – окрестность точки x_0 и w – субгармоническая, непрерывная вплоть до границы функция в $D \cap V$, равная нулю на $\partial D \cap V$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D \cap V}} \frac{w(x)}{d(x)} = 0,$$

где $d(x) = \text{dist}(x, \partial D)$.

Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать, что пара (u^*, Ω^*) является субрешением задачи: единственность следует из леммы 1 (см. замечание 2). При доказательстве снова будем следовать работе [5].

Вспомним, что в силу леммы 6 имеем

$$\limsup_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0) \\ (x,t) \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}_0}} |\nabla u^*(x,t)| = 1$$

для всех крайних точек $(x_0, t_0) \in \partial \Omega^* \cap Q_\beta$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех $t_0 \in (0, \beta)$ таких, что

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega^*(t_0)}} |\nabla u^*(x, t_0)| = 1$$

для любой крайней точки $x_0 \in \partial \Omega^*(t_0)$.

Как доказано в [5], дополнение $(0, \beta) \setminus \mathfrak{X}$ представляет собой счетное объединение нигде неплотных подмножеств множества $(0, \beta)$. Как и при доказательстве леммы 6, рассмотрим функцию

$$w^*(x) = w^*(x; t) = u^*(x, t) + u^*(x, t)^{1+\varepsilon}.$$

Если $t_0 \in (0, \beta)$, то существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $s_0 > 0$ такие, что функция $w^* = w^*(\cdot; t)$ – субгармоническая в выпуклом кольце $D(t) = \{0 < w^*(x, t) < s_0\}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ (см. лемму 5, [1]; тот факт, что $D(t)$ является выпуклым кольцом, может быть доказан методом доказательства теоремы 3 из [2]). Если $t \in \mathfrak{X}$, то $\partial \Omega^*(t)$ является C^1 -регулярным, так как в обратном случае существовала бы сингулярная крайняя точка $x_0 \in \partial \Omega^*(t)$ с

$$(6.1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega^*(t)}} |\nabla u^*(x, t)| = 0,$$

что противоречит определению множества $\mathfrak{R}$. В самом деле, если $x_0 \in \partial\Omega^*(t)$ является сингулярным, то из леммы 8 следует

$$\frac{w^*(x; t)}{d_\Omega(x, t)} \rightarrow 0$$

или, что то же самое,

$$\frac{u^*(x, t)}{d_\Omega(x, t)} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

и (6.1) будет следовать из леммы 4.

Теперь, если $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathfrak{R}$, то при $0 < w^*(x; t) < s_0$ из леммы 7 следует

$$|\nabla w^*(x; t)| \geq 1.$$

Это неравенство выполняется для всех $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ в силу всюду плотности множества $\mathfrak{R}$ и непрерывности функции $|\nabla w^*(x; t)|$ в Ω^* . Более того, функции $|\nabla w^*|$ и $|\nabla u^*|$ асимптотично-эквивалентны при $u^* \rightarrow 0$, и, следовательно,

$$\liminf_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0) \\ (x, t) \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}_0}} |\nabla u^*(x, t)| \geq 1, \quad x_0 \in \partial\Omega^*(t_0).$$

Так как t_0 было выбрана произвольно, заключаем, что (u^*, Ω^*) действительно является классическим решением задачи (1.1) в Q_β .

Примечание. Р. Теймуразян закончил работу над этой статьей в Лиссабонском университете, Португалия.

Abstract. This paper studies a free boundary problem for the heat equation in a convex ring. It is proved that the considered problem has unique solution under some conditions on the initial data.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli and S. Salsa, "Caloric Functions in Lipschitz Domains and the Regularity of Solutions to Phase Transition Problems", *Annals of Math.*, **143**, 413-434 (1996).
- [2] J. I. Diaz, B. Kawohl, "On convexity and starshapedness of level sets for some nonlinear elliptic and parabolic problems on convex rings", *J. Math. Anal. Appl.* **177** (1), 263-286 (1993).
- [3] A. Henrot and H. Shahgholian, "Existence of Classical Solutions to a Free Boundary Problem for the p -Laplace Operator: (I) the Exterior Case", *J. Reine Angew. Math.*, **521**, 85-97 (2000).
- [4] A. Henrot and H. Shahgholian, "Existence of Classical Solutions to a Free Boundary Problem for the p -Laplace Operator: (II) the Interior Case", *Indiana Univ. Math. J.*, **49** (1), 311-323 (2000).
- [5] A. Petrosyan, "On Existence and Uniqueness in a Free Boundary Problem from Combustion", *Comm. Partial Differential Equations*, **27** (3-4), 763-789 (2002).

Поступила 21 февраля 2009

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 44, номер 3, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редакторов	4
С. АЛЕКСАНИАН И Н. АРАКЕЛЯН, Оптимальное равномерное прибли- жение целыми функциями на угловой области	5
Е. И. БЕРЕЖНОЙ, Подпространство пространства Бесова, состоящее из самых негладких функций	29
А. Л. ЛУКАШОВ И С. В. ТЫШКЕВИЧ, Экстремальные полиномы на дугах окружности с нулями на этих дугах	41
В. Г. КАРАПЕТЯН, О гладкости решений почти гипоеллиптических уравнений	51
М. ПОГОСЯН И Р. ТЕЙМУРАЗЯН, Однофазная параболическая задача со свободной границей в выпуклом кольце	67

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 44, No. 3, 2009

CONTENTS

Editors' Preface	4
S. ALEKSANIAN AND N. ARAKELIAN, Optimal Uniform Approximation on Angles by Entire Functions	5
E. I. BEREZHNOI, The Besov Subspace Consisting of Most Non-Smooth Functions	29
A. L. LUKASHOV AND S. V. TYSHKEVICH, Extremal Polynomials on Arcs of the Circle with Zeros on These Arcs	41
V. G. KARAPETYAN, Smoothness of Solutions of Almost Hypoelliptic Equations	51
M. POGHOSYAN AND R. TEYMURAZYAN, One-Phase Parabolic Free Boundary Problem in a Convex Ring	67