ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2009

Stochastic methods in modern mathematics and its applications

Festschrift in honour of **Klaus Krickeberg** on the occasion of his 80th birthday

Edited by **Rouben Ambartzumian** and **Hans Zessin**

Профессор Клаус Криккеберг

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Настоящий выпуск представляет собой номер 9 тематической серии, посвященной ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ и СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

В силу ряда событий в биограгии настоящего журнала, юбилейный сборник посвященный 80-летию Клауса Криккеберга вряд ли мог найти более подходящее место публикации. Сообщество специалистов по стохастической геометрии считает Клауса Криккеберга (тогда член-корр. Академи де сьянс) одним из отцов-создателей стохастической геометрии наряду с Д.Г.Кендаллом (FRS, в то время председателем Лондонского Математического общества). Инаугурация этого предмета состоялась на симпозиуме в Обервольфахе в 1968 году. Примечательно, что материалы этого симпозиума были опубликованы в настоящем журнале том 5, номер 5, 1970. К.Криккеберг, будучи в то время главным редактором журнала "Wahrscheinlichkeit-theorie und Verw. Gebiete", поддержал публикацию ряда работ Р.В.Амбарцумяна в своем журнале и в других изданиях. Эти работы ознаменовали начало Комбинаторной Интегральной Геометрии, которая получила дальнейшую энергичную поддержку со стороны К.Криккеберга и Д.Г.Кендалла на Севанском (Армения) симпозиуме в 1976 году. Предоставляя место возрастающему потоку статей, наш журнал выбрал стратегию публикации выпуска по интегральной и стохастической геометрии в специальной тематической подсерии.

Первая часть настоящего юбилейного сборника посвящена стохастической геометрии и представляет собой номер 9 тематической подсерии. Во вторую часть "фестшрифта" будут включены статьи по еще одному направлению, основанному Клаусом Криккебергом: математизации в науке. Вторая часть сборника будет опубликована в нашем журнале в номере 2 за 2009 год.

[**Editor's Introduction.** Due to a chain of events in the biography of the present Journal, the FESTSCHRIFT dedicated to 80th anniversary of KLAUS KRICKEBERG probably could not be aimed for publication to a better motivated place. The Stochastic Geometry community considers Klaus Krickeberg to be one of the founding fathers of Stochastic Geometry, which subject he together with D. G. Kendall of London Math. Society inaugurated at an Oberwolfach Symposium in 1968. Remarkably, the materials of that symposium were published in the present Journal vol. 5, no. 5, 1970. K. Krickeberg, at that time the editor in chief of "Wahrscheinlichkeittheorie und Verw. Gebiete", boosted the publication of a series of papers by R. V. Ambartzumian in his journal and elsewhere. The latter papers signified the start of Combinatorial Integral Geometry, which subject received further vigorous support from K. Krickeberg and D. G. Kendall at 1976 Sevan Symposium (Armenia). To house the ever increasing since then flow of articles, the present Journal adopted the policy to periodically produce thematical issues on Integral and Stochastic Geometry. R.V.Ambartzumian]

Рубен В. Амбарцумян — Ереван, январь 2009

PREFACE

L'éducation-qu'elle ait pour objet des enfants ou des adultes, des individus ou un peuple, ou encore soi-même - consiste a susciter des mobiles. Indiquer ce qui est avantageux, ce qui est obligatoire, ce qui est bien, incombe a l'enseignement. (...)
Il arrive qu'un pensée, parfois intérieurement formulée, parfois non formulée, travaille sourdement l'âme et pourtant n'agit sur elle que faiblement.
Si l'on entend formuler cette pensée hors de soi-même, par autrui et par quelqu'un aux paroles de qui on attache l'attention, elle en recoit une force centuplée et peut parfois produire une transformation intérieure. (...)
Ces deux fonctions de la parole, ce sont, dans la vie privée, des amis ou des guides naturels qui les remplissent; d'ailleurs, en fait, très rarement.
(Simone Weil, L'enracinement, 1942/43)

Klaus Krickeberg is one of these rare teachers mentioned above.

He was born in Ludwigslust, Germany in 1929. His nationality is German and French. He obtained his high-school leaving certificate (Abitur) in 1946 from the 'Collège Francais' in Berlin. He studied mathematics (minor: physics) in 1946 – 51 at Humboldt University Berlin, where he received the Diploma (M.A.) in 1951, and the Dr. rer. nat. in 1952 (under the direction of Schröder and Erhard Schmidt). His Habilitation (corresponding roughly to a Ph. D.) took place in 1954 at the University of Würzburg, Germany.

Those of us lucky enough to have attended one of Krickeberg's undergraduate or graduate courses at Heidelberg or Bielefeld at the end of the sixtieth and beginning of the seventieth remember the perfect clarity of his presentation, his ability to make explicit the interesting mathematical kernel. His ability to explain difficult topics was appreciated very much by his colleagues and students.

Therefore it was perhaps unfortunate for us that Krickeberg left Bielefeld after three years only and went to Paris, where he stayed until his retirement. Nevertheless his teaching reached a large audience. It was spread by his lectures on topics of point process theory, stochastic geometry and its statistical analysis, which were held in

Chile, Cuba, Vietnam and Paris and written as lecture notes always in the language of the country where they took place.

Let me remark as an aside, that we always regretted that his general approach to the theory of random measures had not been published as a monograph as an alternative to the well known books of Matthes, Kerstan, Mecke respectively Kallenberg. His 'French' Radon measure approach, documented for instance in his DEA course at the Sorbonne, recasts the complicated material in an accessible, beautiful and elegant form, setting out in clear lines directions for future research, and therefore this approach could have been even more influential.

The work of Klaus Krickeberg was widely recognized and appreciated. He is a member of the 'German Academy of Natural Scientists Leopoldina' (now German Academy of Sciences) , since 1983; 'Fellow' of the 'Institute of Mathematical Statistics', USA, since 1968; Doctor honoris causa, School of Social and Economic Sciences, University of Vienna, 1990, and Associate Member of the 'Academy of Sciences for the Developing World' (TWAS), Trieste, since 1994.

Geometry was Klaus Krickeberg's initial field of mathematical endeavor, and the geometrical insight runs through almost all his later work, beginning with integration on manifolds and martingales, followed by stochastic geometry and the statistical theory of point processes, and finally arriving at epidemiology and medical statistics. Another characteristic feature of his work is most impressive. He was able to combine purest mathematics with a virtuosity of techniques and methods. In combination with a general wisdom and a deep 'Menschlichkeit' he finally succeeded in using his broad scientific knowledge to lay down the statistical foundations for the health system in Vietnam and even to create an information system based on it.

The following 'Festschrift' reflects the continued fertility and profound depth of some of his ideas. They also serve as a chronicle of his mathematical work as well as a testimony of admiration and affection felt for him by those who accompanied him in one way or another.

Hans Zessin

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 8-16

SOME MATHEMATICS

K. KRICKEBERG

Basically, I was a geometer. I liked to, and often had to, visualize mathematical objects and relations when learning about a new topic or area, and when trying to solve problems. Thus Erhard Schmidt was the perfect teacher for me. He introduced me to complex functions via the geometrical Riemann approach and to measure theory in the geometrical spirit of Caratheodory; see also 'My encounters with martingales' in this volume.

It was therefore natural that the subject of my Doctoral Thesis, viz. the Gauss-Stokes integral theorems, combined measure theory and geometry. Part 1 [3] was motivated by the desire to obtain the classical Gauss-Green formula in $\mathbb{R}^d$ under conditions that are necessary, too. This led me to a different way of looking at the theorem. For example, given an open set G in $\mathbb{R}^d$ with boundary F, necessary and sufficient conditions on G were found for the existence of a measure m on F (generalizing the $(d-1)$-dimensional surface measure) and a function s defined on F (generalizing one of the components of the outer normal to F) with which the formula holds for all functions defined on the closure of G such that the integrals in question make sense. Here, m and s determine each other uniquely except for trivial modifications.

Part 2 [4] contains the first definition and study of locally Lipschitzian manifolds, which were to be investigated in the sequel by several topologists. They are situated between continuous and differential manifolds, allow a natural definition of 'almost everywhere', and are indeed differentiable almost everywhere. StokesŸ theorem is proved for differential forms on locally Lipschitzian manifolds under minimal assumptions.

Finally, part 3 [5] is purely historical. It traces the ideas underlying the proofs of the various forms of the Gauss-Stokes theorems, starting with early papers by

Lagrange (1760), Gauss (1813), Green (1828), Ostrogradsky (1831 and 1838), and Stokes (1854).

The paper [12] took the Gauss-Green theorem up again, but under a very different angle, viz. via distributions in the sense of Laurent Schwartz. As the main tool it employed the decomposition of measures that was to play once more a decisive role in the solution given in [31] of a problem formulated by Rollo Davidson.

Let $\mathcal{D}$ be a linear differential operator in $\mathbb{R}^d$ and f a locally integrable function defined on $\mathbb{R}^d$. A necessary and sufficient condition is given in order for $\mathcal{D}f$, in the sense of Schwartz, to be a measure. This generalizes the theorem concerning the case $d = 1$ whereby the derivative of f is a measure if and only if f is locally of bounded variation (more precisely: almost everywhere equal to such a function, but this fine point will be disregarded in the sequel).

Four applications of this theorem are given. Firstly, it allows one to get an insight into the nature of the various definitions of functions of bounded variation of several variables. These definitions looked rather arbitrary before and are not equivalent. It turns out that they simply correspond to different differential operators $\mathcal{D}$. In particular, f is locally of bounded variation in the sense of Tonelli if and only if its d first partial derivatives are measures. For comparison (not proved in [12]), f is locally of bounded variation in the sense of Vitali if and only if the derivative of f with respect to all variables $x_1, \dots, x_d$ together, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_1, \dots, \partial x_d}$, is a measure.

The second application deals with the concept of an absolutely continuous function in the sense of Tonelli. It is proved that f has this property if and only if its d first partial derivatives are functions.

Thirdly, a very general form of the Gauss-Green formula for any open subset G of $\mathbb{R}^d$ follows immediately from the Schwartz definition of a first derivative of the indicator function f of G. This derivative is a Schwartz distribution carried by the boundary of G. The usual form of the formula, similar for example to that discussed in [3], is obtained when this derivative is a measure, and the third application of the theorem above consists in necessary and sufficient conditions on G in order that this be the case.

The last application concerns the Lebesgue surface measure a of a non-parametric surface in $\mathbb{R}^{d+1}$ given by $x_{d+1} = f(x_1, \dots, x_d)$ where f is defined and locally integrable in an open subset G of $\mathbb{R}^d$ but not necessarily continuous. Let l be the Lebesgue measure in G. Then, a is finite if and only if $l(G)$ is finite and f is of bounded variation in the sense of Tonelli. In this case, a is the total variation of the vector measure $(l, m_1, \ldots, m_d)$ where m_i denotes the $i - th$ partial derivative measure of f. This generalizes the classical formula, which holds for an absolutely continuous function f.

The article [22] deals with stochastic convergence of generalized sequences of random variables (nets, Moore-Smith sequences). While every ordinary sequence that converges stochastically contains an almost surely convergent subsequence, it is shown, among other results, that the analogous statement is not true for nets: there exist stochastically convergent nets that have no essentially convergent subnets.

The papers [24, 25, 27, 28] were originally motivated by a problem stated by Eberhard Hopf in §17 of his classical book on ergodic theory 'Ergodentheorie (Springer 1937)'. While the so-called baker's transformation in the unit square was well understood, and in particular known to be mixing, the nature of the corresponding transformation in the entire plane was hardly elucidated and the problem of its mixing properties open.

The main contribution of [24] is twofold. Firstly, it was recognized that the natural setting for defining mixing properties of transformations (endomorphisms) of measure spaces with *infinite* total measure are *topological* measure spaces, not pure (abstract) measure spaces, and the endomorphisms in question are to be not only measure preserving but also *almost everywhere continuous.*

Examples come from the theory of Markov chain whose state space $\mathbb{Z}$ is a set of integers such that there exists a positive invariant measure l on $\mathbb{Z}$. The measure l together with the given transition probabilities determines a measure m on the space X of all 'trajectories', i.e. all sequences $(x_n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ with x_n in $\mathbb{Z}$, topologized by the product topology where each factor $\mathbb{Z}$ is discrete. Then, the shift transformation T in X is a homomorphism of the topological measure space (X, m). It turns out that the strong ratio limit properties of the original Markov chain as defined by Kai Lai Chung and Pruitt are intimately connected with mixing properties of T. Next, isomorphisms in the sense of topological measure spaces are defined as maps that are measure preserving and *almost everywhere* continuous in both directions. The second main contribution of the paper is the construction of isomorphisms between a subset Y of the plane endowed with (infinite) Lebesgue measure and the measure space (X, m) derived from a suitable Markov chain as above, such that, for example, the baker's transformation in Y corresponds to the shift T in X . By applying known results from the theory of Markov chains to T, one finally obtains a precise description of the type of mixing including the ergodic index of the baker's transformation.

The paper [25] deals with the question of the abundance or paucity of mixing transformations of an infinite topological measure space (X, m) in the space of all measure-preserving transformations of (X, m), endowed with the weak topology. Analogously to the case of a finite measure m, it turns out that the set of all mixing transformations is dense but of first category.

The isomorphisms constructed in [24] with a view of solving a specific problem then gave rise to a general reflection on the role of topological measure spaces in integration and probability theory. Bourbaki's dogma that the only reasonable measure theory is the one in locally compact spaces had already been contested because, while it is true that the measure spaces used in the representation of stochastic processes often have a natural topology, this topology does not make them locally compact; they are mostly Polish spaces. Nevertheless, it was shown in [27] and [28] that these topological measure spaces are usually isomorphic to the Lebesgue measure in the unit interval. The isomorphisms as defined above form the natural category of isomorphisms of topological measure spaces. They preserve neither the dimension of the space in any sense nor local compactness. If, finally, we recall LebesgueŠs classical theorem to the effect that a bounded function defined in an interval is Riemann integrable if and only if it is almost everywhere continuous, we see that the natural setting for Riemann integration is a general topological measure space, in contrast to Lebesgue integration that belongs to abstract measure theory. The isomorphisms defined above preserve Riemann integrability and the Riemann integral.

In the paper [31] the method of decomposition of measures was used to solve a problem posed by Rollo Davidson about the correlation measure $\mathbf{g}$ of a second order line process in the plane. He had proved that if $\mathbf{g}$ is stationary (isotropic, i.e. invariant under rotations and translations), it is also invariant under reflections provided that it has a density with respect to the Lebesgue measure, the so-called $\mathbf{g}-$function. He had asked whether the latter assumption was superfluous; the answer given in [31] is affirmative.

Davidson had also stated a conjecture to the effect that every non-degenerate strictly stationary second order line process in the plane is a Cox (doubly stochastic) process. Much later, Olav Kallenberg constructed a counterexample but Davidson showed that for every second order line process with stationary correlation measure which has a density, there exists a Cox process with the same correlation measure. This was extended in [34] to higher order point processes in a fairly general space $X$and an equally general transformation group G acting in X. Let k be a positive integer. Then for any point process in X with a locally finite $G-$invariant $k-th$ moment measure there exists a Cox process that has the same $k-th$ moment measure.

The paper [32] had already supplied some techniques needed to deal with these problems. It also initiated the use of functional analytic methods in the theory of point processes, to be elaborated in [41], [45] and [55]. These allow, for example, to derive the Radon-Nikodym integrand of a point process with respect to another one in a very simple and transparent way, and to investigate more easily certain problems around Palm measures.

In [54] and [55] there is a proof, using conditioning arguments, of the general $'0-\infty\ law'$ of stochastic geometry. Given a stationary (translation invariant) point process in $\mathbb{R}^d$ and a positive integer k, let C be any set of '$k-$configurations', i.e. a subset of $(\mathbb{R}^d)^k$, which is invariant under the 'diagonal'translation group (maps of the form $(x_1,\ldots,x_k)\longmapsto(x_1+u,\ldots,x_k+u)$). An example: $k=2$ and $C=\{(x,y):|x-y|\geq 1\}$. Then the realizations of any stationary point process in $\mathbb{R}^d$ contain are almost surely no or infinitely many configurations of C. Rollo Davidson has treated a particular case by L^2-methods for stationary second order processes having a $\mathbf{g}-$function.

Finally, problems around the statistical analysis of point processes were treated in the book [41] and in a series of papers, in particular [44], [45], [54] and [55]. They culminated in the construction of unbiased estimators of moments of point processes that are only assumed to be translation invariant but not stationary; such processes often appear in applications. The main problem is the correction of edge effects.

Список литературы

[1] K. Krickeberg, "Zur Theorie des oberen und unteren Integrals," Math. Nachr. **9**, 86-128 (1953).
[2] K. Krickeberg, "Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen," Arch. der Math. **6**, 432-436 (1953).
[3] K. Krickeberg, "Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. I," Math. Nachr. **10**, 261-314 (1953).
[4] K. Krickeberg, "Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. II," Math. Nachr. **11**, 35-60 (1954).

[5] K. Krickeberg, "Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. III," Math. Nachr. **12**, 341-356 (1954).

[6] K. Krickeberg, "La neċessite de certaines hypothèses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extreme de fonctions d'intervalle," C. r. Acad. Sci. Paris **238**, 764-766 (1954).

[7] Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften. Math. Zeitschr. 61, 374-385 (1955)

[8] K. Krickeberg, "Über die asymptotische Darstellung der Aufspaltung von Paaren benachbarter Eigenwerte der Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen," Z. angew. Math. Phys. **6**, 235-238 (1955).

[9] K. Krickeberg, "Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration," S.-ber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **19**, 217-279 (1955).

[10] K. Krickeberg, "Convergence of martingales with a directed index set," Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 313-337 (1956).

[11] K. Krickeberg, "Stochastische Konvergenz von Semimartingalen," Math. Zeitschr. **66**, 470-486 (1957).

[12] K. Krickeberg, "Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen," Ann. Mat. pura appl. **44** (IV), 105-133 (1957).

[13] K. Krickeberg, "Stochastische Derivierte," Math. Nachr. **18**, 203-217 (1958).

[14] K. Krickeberg, "Semi-martingales *à* base filtrante décroissante, Le calcul des probabilités et ses applications," Paris, 15-20 juillet 1958. Colloques internationaux du CNRS LXXXVII, 133-138 (1959).

[15] K. Krickeberg, "Absteigende Semimartingale mit filtrierendem Parameterbereich," Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **24**, 109-125 (1960).

[16] K. Krickeberg, "Notwendige Konvergenzbedingungen bei Martingalen und verwandten Prozessen," Trans. 2nd Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, Liblice, June 1 to 6, 1959, 279-305 (1960).

[17] K. Krickeberg, "Allgemeine Theorie der reellen Funktionen," "Differential- und Integralrechnung," and "Ergodentheorie" in: Mathematisches Wörterbuch (Berlin-Stuttgart, Teubner, 1961).

[18] K. Krickeberg, and C. Pauc, "Martingales et dérivation," Bull. Soc. Math. France **91**, 455-544 (1963).

[19] K. Krickeberg, *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Stuttgart, Teubner, 1963). English translation by the author: *Probability Theory* (Reading, Mass., Addison Wesley, 1965). Spanish translation: *Teoria de la Probabilidad* (Barcelona, Teide, 1973).

[20] K. Krickeberg, "Convergence of conditional expectation operators (in Russian)," Teor. Verojatn. Primen. **9**, 595-607 (1964).

[21] K. Krickeberg, "Wahrscheinlichkeitsoperatoren von Verteilungen in Vektorräumen," Trans.3rd Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, Liblice, June 5 to 13, 1964, 441-452 (1964).

[22] K. Krickeberg, "Bemerkungen zur stochastischen Konvergenz," Bull. Soc. Math. Greece **5**, 81-92 (1964).

[23] K. Krickeberg, "On Cramer's theorems concerning weak convergence of distributions," Metrika **10**, 179-181 (1966).

[24] K. Krickeberg, "Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure," Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probability 1965, **II** (2), 431-446 (1967).

[25] K. Krickeberg, "Mischende Transformationen auf Mannigfaltigkeiten unendlichen Maßes," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **7**, 235-247 (1967).

[26] K. Krickeberg, "Markoffsche Ketten," Der Math. u. Naturw. Unterricht **20**, 337-342 (1967).

[27] K. Krickeberg, "Ein Isomorphiesatz über topologische Maßräume," Math. Nachr. **37**, 59-66 (1968).

[28] W. Böge, K. Krickeberg, and F. Papangelou "Über die dem Lebesgueschen Maß isomorphen topologischen Maßräume," Manuscripta math. **1**, 59-77 (1969).

[29] K. Krickeberg, "Recent results on mixing in topological measure spaces," in: Probability and Information Theory, Proc. International Sympos. McMaster University, Canada, April 1968, Lecture Notes in Mathematics **89** 178-185 (1969).

[30] K. Krickeberg and H. Urmitzer, translation of the book Yu. V. Prohorov, Yu. A. Rozanov, *Probability Theory* from Russion into English (Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1969).

[31] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line processes," Izvestija Akad. Nauk. Armjan. SSR, Ser. Matematika **5**, 251-262 (1970). Reprinted in: Stochastic Geometry (ed. E. F. Harding and D. G. Kendall), 76-88 (New York: Wiley 1974).

[32] K. Krickeberg, "The Cox process," Symp. Math. 9, Calcolo Probab., Teor. Turbolenza **9** 151-167 (1972).

[33] K. Krickeberg, "Theory of hyperplane processes," 514-521 in: Stochastic Point Processes (ed. P.A.W. Lewis), (New York, Wiley, 1972).

[34] K. Krickeberg, "Moments of random measures," Probability and Information Theory II, Lecture Notes in Mathematics **296**, 70-101 (1973). Reprinted in: Stochastic Geometry (ed. E.F. Harding and D. G. Kendall), 89-113, (New York, Wiley, 1974).

[35] K. Krickeberg, "Statistical analysis of hyperplane processes," International Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius, 335-338, 1973.

[36] K. Krickeberg, *Fundamentos del Analisis Estadistico de Procesos Puntuales* (Santiago de Chile, CIENES, 1973).

[37] K. Krickeberg, "L'estimation du spectre de processus de droites," Ann. Scient. Univ. Clermont, ser. Math. **51**, 35-42 (1974).

[38] K. Krickeberg und A. Zassenhaus, "Mathematik in der Demokratischen Republik Vietnam," Blätter für Deutsche und Internationale Politik **4**, 3-11 (1975).

[39] B. Booss und K. Krickeberg, *Mathematisierung der Einzelwissenschaften* (Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1976).

[40] K. Krickeberg, "An alternative approach to Glivenko-Cantelli theorems," Empirical Distributions and Processes. Lecture Notes in Mathematics **566**, 57-67 (1976).

[41] K. Krickeberg, *Lectures on Point Processes* [in Vietnamese] (Hanoi, Mathematical Institute 1976).

[42] K. Krickeberg, "Glivenko-Cantelli theorems in geometrical statistics," Second Vilnius Conference on Probability and Mathematical Statistics, 117-118 (1977).

[43] K. Krickeberg and H. Ziezold *Stochastische Methoden* (Berlin-Heidelberg-New K. York, Springer, 1977). 2nd ed. 1979, 3rd ed. 1988, 4th completely revised ed. 1994. Translation into French: *Méthodes Stochastiques: Introduction aux Probabilités et a la Statistique* (Collection DIA, Paris: Diffusion Berlin, 1980).

[44] K. Krickeberg, "Statistics of point processes," Advances Appl. Probab. **10**, 267-268 (1978).

[45] K. Krickeberg, "Statistical problems of point processes," (in Polish) Rosz. Pol. Tow. Mat., Ser. III, Mat. Stosow. **13**, 29-57 (1978). English version: Banach Center Publications **6**, 197-223 (1980).

[46] K. Krickeberg, "Analyse statistique des processus spatiaux," Inf. Sci. Hum. **40-41**, 179-186 (1979).

[47] K. Krickeberg, "Filtering spatial processes," Advances Appl. Probab. **11**, 256-266 (1979).

[48] K. Krickeberg, "Vision conjunta de la estadistica," 14 p. XXVIII Convenciyn Anual de la Asociaciyn Venezolana para el Avance de la Ciencia, Maracay (1978). Translated into English by the International Statistical Institute, Den Hague (1979).

[49] K. Krickeberg, "La Sociedad Bernoulli," Boletin Informativo de la Regional Latinoamericana de la Sociedad Bernoulli para la Estadнstica Matematica y la Probabilidad, **1** 7-13 (1980).

[50] K. Krickeberg, "Statistics, a bridge between reality and mathematics," (in Vietnamese) Tвp chi thфng ke (Statistical Review) **5**, 34-39 (1980).

[51] K. Krickeberg, "Role of Jerzy Neyman in the shaping of the Bernoulli Society," Mathematical Statistics and Probability Theory (Proc. Sixth International Conf., Wisla, 1978). Lecture Notes in Statistics 2, xx-xxii. (New York, Springer, 1980).

[52] K. Krickeberg, “Moment analysis of stationary point processes,” Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Point Processes and Queuing Problems, Keszthely (Hungary), **24**, 227-229 (1981).

[53] K. Krickeberg, “Quelques résultats récents de la statistique géométrique. Pp. 171-176 in: Proceedings of the 6th Conference on Probability Theory, 10-15 September 1979, Brasov. Bucarest 1981

[54] K. Krickeberg, “El papel de los procesos puntuales en la estadнstica. Simposio de probabilidades y Estadнstica, Universidad Simon Bolivar, Caracas 1980

[55] K. Krickeberg, “Processus ponctuels en statistique,” Ecole d’Eté de Probabilités de Saint Flour X - 1980. Lecture Notes in Mathematics, **929**, 206-313 (1982).

[56] K. Krickeberg, “Reasonable structures for mathematical activities in developing countries (in Danish),” Proceedings of the National Meeting of the Danish Mathematical Society, Vejle (1981).

[57] K.X. Dinh, K. Krickeberg, and T.T. Nguyen, “A contribution to the application of statistical sampling survey methods to the study of the situation of shigellosis (in Vietnamese),” Y hoc Viet Nam (Vietnamese Medicine), 43-46, (1982).

[58] K. Krickeberg, “Bernoulli Society,” 219-220 in: Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 1. (New York, Wiley 1982).

[59] K. Krickeberg, “La statistique medicale, vue par un statisticien-mathematicien,” Seminaire de Statistique Médicale, Université de Paris V, 1987-88, 1-28. Vietnamese version in: Tailieu tham khao cho thay thuoc (Reference Materials for Physicians), november, 102-135 (1989).

[60] K. Krickeberg, “Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete,” Pp. 668-670 in: Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 9. (New York, Wiley, 1988).

[61] K. Krickeberg, “Schmetterer und die "Zeitschrift",” Österreichische Zeitschr. für Statistik und Informatik 19, 221-223 (1989).

[62] K. Krickeberg, “Moderne Epidemiologie und ihre Anwendungen,” Leopoldina Reihe 3.35.1989, 149-160 (1992).

[63] K. Krickeberg, “Intégration des soins de santé primaires,” Lecture at the Faculty of Medicine of Phnom Penh, January 1989. Séminaire de Statistique Médicale, Universitéde Paris V, , 45-69 (1989-90).

[64] K. Krickeberg, “Mathematics, and strategies to fight tropical diseases,” Abh. Math. Seminar Hamburg, 1013-1021 (1992).

[65] K. Krickeberg, (organizer) Statistical methods for measuring and analyzing infectious diseases. Lectures by L. Abel, E. Halloran, P. Aaby, with comments by S. Debanne, K. Krickeberg. In: Bull. Intern. Statist. Inst. 54, Proceedings of the 48th Session Cairo, book 1, topic 9, and book 4 (A), 107-112 (1991).

[66] K. Krickeberg, “Statistics, epidemiology, and public health (in Greek),” O Philelevtheros (Nicosia). 8/9/10 July (1993).

[67] K. Krickeberg, “Health Information in developing countries,” Frontiers in Mathematical Biology. Lecture Notes in Biomathematics **100**, 550-568 (1994).

[68] Vo Van Nhan, K. Krickeberg, and C. Fischer “Population and family planning in the provinces of Nghк An and Ha Tinh: a pilot survey,” NCPFP, GTZ: Reproductive Health Survey 1995. Promotion of Family Health in 5 provinces of Vietnam. Hanoi: National Committee for Population and Family Planning of Vietnam and Deutsche Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ). GmbH. Hanoi, (1995).

[69] K. Krickeberg, “AIDS und Familienplanung in Vietnam,” Vietnam Kurier **3**, 12-13 (1995). Translation of an article in French in Bulletin de lŸAAFV 11 (1995).

[70] K. Krickeberg, *Petit cours de statistique* (Berlin-Heidelberg, Springer, 1996).

[71] K. Krickeberg, “Etude, du point de vue statistique, des rapports sur "La Hague",” Journ. de la Soc. Franзaise de Statist. **140**, 45-51 (1999).

[72] K. Krickeberg, “Statistical methods in primary public health care,” Revista Investigaciyn Operacional **22**, 107-114 (2001).

[73] K. Krickeberg, “Health information systems in developing countries,” Bull. International Statist. Inst. 54th Session Proceedings, Invited Paper Meeting **54** (2003).

[74] K. Krickeberg, "Health information systems," in: H. Becher, B. Kouyatй (eds.) Health Research in Developing Countries, 43-49 (Berlin-Heidelberg, Springer, 2005).

[75] A. Kar, K. Krickeberg, and A. K. Chakraborty, "Epidemiology in developing countries," 1545-1589 in: Handbook of Epidemiology (Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 2005).

[76] H. Zeile, K. Krickeberg, "Über Teodor Ryder, Dirigent, in Auschwitz ermordet, und Ida Ryder geb. Voth, Sängerin, im Ghetto von Lydz verhungert," Musica reanimata Џ Mitteilungen **57**, 14-16 (2005).

[77] K. Krickeberg, "Neue mathematisch-statistische Anwendungen von Gesundheitsregistern," Austrian J. Statistics **34**, 403-410 (2005).

[78] *Klaus Krickeberg* Pp. 144-158 in: A. Bödecker and Th. Dunskus (eds.).: Schüler erinnern sich an das Französische Gymnasium 1940-1950. (Berlin, Stapp, 2006).

[79] K. Krickeberg, "Entstehung eines Projekts: Von der Mathematik zum Öffentlichen Gesundheitswesen," VietNam-Info **14** (2), 1-3 (2007).

[80] K. Krickeberg, "Principles of health information systems in developing countries," Health Information Management J. **36** (3), 8-20 (2007).

[81] K. Krickeberg, "We cannot say we did not know (in Vietnamese)," Tuфi tre (Ho Chi Minh-City)., week end edition 26/27January 2008

[82] K. Krickeberg, "Ein vietnamesisch-laotisch-deutsches Projekt: Curricula für das öffentliche Gesundheitswesen," Viet Nam-Info **15** (6), 10-11 (2008).

Поступила 25 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 17-24

MY ENCOUNTERS WITH MARTINGALES

K. KRICKEBERG

Аннотация. This article was prepared for the Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) issue 5.1 (2009). The editors are grateful for the permission to publish it also here.

1. STUDYING AT THE UNIVERSITY OF BERLIN RIGHT AFTER THE WAR

The University of Berlin had been founded in 1810 during the Napoleonic wars, based on the two ideas of the unity of teaching and research and of classical education for all students. When it reopened in January 1946 after another, and by far more devastating war, most of its buildings lied in ruins but much of the old spirit was alive. In 1949 it was renamed 'Humboldt-Universität'.

In late summer of 1946 I applied for admission as a student of physics. I was only 17 years old and my chances were slim because there were many older applicants who had lost years of their life through the war, and they naturally enjoyed priority. Moreover, since the University was situated in East-Berlin and depended on the Soviet and nascent East-German administration, there existed already some kind of an 'affirmative action' in favor of descendants of workers and peasants whereas my father was a physician. Nevertheless I was admitted, perhaps because I had obtained my 'Abitur' (high-school leaving certificate) in June with the best grade possible.

The material conditions were of course difficult, the worst being hunger. In winter, the temperature inside the large physics auditorium descended sometimes to -10° (centigrade). However, there was an enormous enthusiasm for studying as I have seen it later only once more, namely in Hanoi in 1974.

As a student of physics I had to follow the normal basic mathematics curriculum. The analysis (calculus) course was taught by Erhard Schmidt (Gram-Schmidt orthogonalization, Hilbert-Schmidt integral equations). He was already over 70 and retired, but had taken up service again because, as a sequel of the Nazi era and the war, there were not enough mathematics professors in Berlin. He was still the dominating figure among the mathematicians at the University. His lectures were marvelous. He used to prepare them on his way from home to the lecture rooms, never used any notes, and often said in the middle of a proof: 'Oh, I think I can prove this in a much better way', and then he started all over again. He also smuggled in little mistakes to test our attention. After the first semester, in spring 1947, I decided that mathematics was really much more fascinating and switched subjects, physics now becoming my minor.

Schmidt's five semesters' (two and a half years') course covered calculus, functions of a complex variable and elliptic functions. Traditionally, calculus in the second semester in Germany meant differentiation and Riemann integration for functions of two real variables. Instead he started out by presenting set theory, very concretely in the plane but in such a suggestive way that we were prompted to invent by ourselves the axioms of Boolean algebra. Then he did abstract measure theory, following the approach of his longstanding friend Constantin Caratheodory, but again in the concrete setting of the plane, and led us directly to the Lebesgue integral. In the second year he taught, in parallel to functions of a complex variable via the 'Riemann' approach, a course on 'Complements to calculus' which consisted in fact of functional analysis and some other advanced topics.

Erhard Schmidt was really a geometer. He could 'see' what was happening in infinite-dimensional spaces. When he described a projection in a Hilbert space (a *Perpendikel* in his vivid terminology), he showed it to us with his hands. It is this geometric approach that I have taken later when dealing with martingales, after his teaching of measure theory had lead me into probability theory via some detors.

2. COLLECTING BUILDING BLOCKS FOR MARTINGALE THEORY

Schmidt retired in 1950, this time for good. Thus he could not guide my Doctor's Thesis, but it was definitely inspired by him and dealt with geometric measure theory and locally Lipschitzian manifolds. I obtained the (German) Doctor's degree in 1952 and became a lecturer at Humboldt-University and scientific collaborator of the German Academy of Sciences at Berlin. There I came into contact with the group that ran the reviewing journal *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete.*

During the war and the first years after many mathematical journals had ceased to arrive in Germany. Hence it was decided to publish a *'Lückenband'* (gap volume) where these missing papers would be reviewed. For this volume I was asked to review among others two papers by *Borge Jessen* and *Erik Sparre Andersen* on limit theorems for 'integrals' [1] and 'set functions' [2], respectively. It was about martingales as we know now but the word 'martingale' did not ap pear nor had I ever heard of it. Later on I became aware of a paper of de la Valle-Poussin [3] from the year 1915 in which he had already proved almost sure convergence of martingales formed by *discrete* random variables.

In 1950 and 1952 I attended the annual meetings of the German Mathematical Association (DMV). There I met *Otto Haupt*, a versatile mathematician from Erlangen who had co-authored with *Georg Aumann* an advanced text on differential- and integral calculus. He was about to prepare a new edition together with a third author, *Christian Pauc* from France. *Pauc* had come to Germany in the early forties as a prisoner of war, and *Haupt* had managed to get him out of the prisoner's camp and bring him to Erlangen to do abstract mathematics with him. After the war, *Pauc* was promptly accused of 'collaboration with the enemy' and could not get a position in France, so he had to exile himself with his family to South Africa. He came finally back some years later to take up a professorship in Nantes (where the street in which the School of Technology of the University is situated, is now named after him!)

Haupt asked me to read the typewritten manuscript of the new edition of the 'Haupt-Aumann-Pauc' [4]. I agreed. It arrived in small instalments and I sent back fairly long comments. The authors tried to treat not only integration, i.e. measure theory, but also differentiation in the most abstract setting possible. Motivated by early work of *de Possel* [5], *Pauc* had worked on differentiation of generalized interval functions (cell functions) in South Africa with *C. A. Hayes* [6]. The main issue was a general version of Lebesgue's theorem to the effect that every function of bounded variation defined in an interval is almost everywhere differentiable. These versions in abstract spaces were based on generalizations of Vitali's covering theorem. I then proved [7] that conditions of the Vitali type were also *necessary* in order that certain statements on upper and lower derivatives be valid.

In May 1953 I left Berlin and moved to Würzburg together with the managing director of the *Zentralblatt*. He had accepted a full professorship there and created a small research team in which I got a temporary position. I read a lot and noticed that probability theory and measure theory were not unrelated. In particular I perused the book by *J. L. Doob* [8] that had just appeared where he presented the martingale convergence theorems that he had obtained independently of *Jessen* and *Sparre Andersen*. Both versions are essentially equivalent and he analysed the fine differences. Doob's approach via 'up-crossing inequalities' permitted him to treat also semimartingales.

Next I discovered the counterexample by Dieudonné [9]. It concerned increasing martingales that are countable *Moore-Smith* sequences instead of ordinary sequences, i.e. they are indexed by a general countable *directed* set instead of the positive integers. It showed that even under the usual boundedness conditions, such a martingale need not converge almost surely. On the other hand, I realized that Lebesgue's differentiation theorem for a function f could be formulated as a theorem on the almost sure convergence of the martingale whose (non-denumerable) index set consisted of all decompositions of the interval in which f was defined, into a finite number of subintervals. The semi-order relation in this set which makes it 'directed' is 'to be a subdivision', and the sigma-algebra whose index is a given decomposition is the one generated by it.

I then tried to formulate a generalized Vitali condition concerning any *increasing* martingales with a directed index set, countable or not, that would imply almost sure convergence (leaving aside a technical discussion of 'separability'). This was indeed possible. It turned out that in the case of an increasing martingale of bounded variation (i.e. bounded in L_1) with a *totally* (linearly) ordered index set, this condition was trivially satisfied, which yielded another proof of Doob's theorem for discrete or continuous parameters (indices) without using upcrossing inequalities. In the context of classical differentiation theory, the Vitali condition was satisfied by Vitali's covering theorem, which gave Lebesgue's theorem as a particular case.

When I started this work, two technical questions were still open. Firstly, my proof worked only for positive martingales. By generalizing the Jordan-decomposition of functions of bounded variation I showed that every martingale of bounded variation is the difference of two positive ones (Krickeberg decomposition). The second question concerned passing to the limit under an integral sign. By chance, Zentralblatt assigned to me for reviewing a book in Italian by Cafiero [10] on set functions, which, although marred by several basic errors, contained a lot on uniform integrability that solved my problem.

At the International Congress of Mathematicians in Amsterdam in 1954 I met *Borge Jessen* and told him about my preoccupations. He then stated the problem of finding a single proof of the almost sure convergence of both increasing and decreasing martingales. Six years later I had the pleasure of giving a lecture in Copenhagen in his presence (in Danish) on the solution of this problem. This lecture took place at the end of my stay at the University of Aarhus (Denmark) as a visiting professor during the academic year 1959/60. *Erik Sparre Andersen* was then a professor in Aarhus but no longer interested in martingales.

3. A YEAR IN ILLINOIS

In Amsterdam I had also talked to *Jerzy Neyman* about possibilities of spending some time in the United States. He advised me very kindly regarding studies in Berkeley, but I finally decided to apply for a Research Associateship at the University of Illinois in order to work with Doob. I obtained it and also a Fulbright 'travel only' grant, which paid my voyage in fall 1955 on board of the French steamship Liberté (which had been German before the war). I had just got my *'Habilitation'* at the University of Würzburg, a degree that might vaguely be described as being a little bit above the Ph.D., and this entitled me to a First Class ticket for the Liberté.

I still vividly remember my first meeting with *Doob* in his office in the University at Urbana, Ill. When I presented my results to him he said 'Oh, thatŸs interesting' and suggested that I publish them in the Transactions of the American Mathematical Society [11]. He also told me about the new work of Paul André Meyer on stopping times and martingales, which initiated the well-known development that was to exert a dominating influence on the theory of stochastic processes indexed by a time parameter.

I continued being interested in martingales indexed by a directed set and ran a seminar on the topic. A young mathematician from Taiwan, *Y. S. Chow* who was at the University of Illinois with a research grant refined the theory based on Vitali conditions in several ways [12]. The Thesis by *Helms* [13] went into a different direction. He obtained the *mean* convergence in L_p for any uniformly integrable increasing martingale with a directed index set. I then proved a theorem which, in any systematic presentation, ought to be stated *before* tackling questions of almost sure convergence under such and such condition, namely that every L_1-bounded increasing semi-martingale with a directed index set, countable or not, converges *stochastically* [14]. As a curiosity it might be mentioned that this contains the Radon-Nikodym theorem as a particular case, the 'Radon-Nikodym integrand' being obtained by 'stochastic differentiation'.

During this academic year 1955/56 I met *L. C. Young* from the University of Wisconsin who ask me to spend the following year with him, again as a Research Associate. I liked the idea of abandoning martingales for a while and going back to subjects related to my Thesis. It became a very fruitful year, too, with work on geometric measure theory, Laurent Schwartz distributions in $\mathbb{R}^d$ for $d > 1$ and the like. In the summer of 1957 I sailed back to Le Havre, spent a few days in Paris as arranged by *Pauc*, and then returned to Würzburg and to martingales.

4. FINAL WORK TILL 1964

In the following papers, in order to get rid of the complicated discussions around the concept of a *separable* stochastic process indexed by a non-denumerable set, I dealt with *essential convergence* instead of almost sure convergence; in the separable case and in particular for a denumerable index set, the two are trivially equivalent. Proving convergence theorems for *decreasing* martingales and semi-martingales analogous to those obtained before in the increasing case was not very hard including a counter-example along the lines of the one that Dieudonné had constructed in the increasing case [15].

The problem of the necessity of Vitali conditions for essential convergence was treated in [16]. There, a whole family of Vitali conditions was defined, each of them corresponding to an L_p space and more generally, following a suggestion by *Leopold Schmetterer* made in 1958 at a colloquium in Paris, to an Orlicz space. Finally, the paper [17] written jointly with *Pauc* gave a survey on the whole area of increasing or decreasing martingales and their relations with the finer differentiation theory of functions of several real variables and with differentiation in general spaces.

Schmetterer was, among others, a number theorist and statistician. At his invitation I spent the summer 1958 as a senior assistant (Oberassistent) at the University of Hamburg. In the fall of that year, I was offered a full professorship for probability theory and statistics at both the Universities of Cologne and Heidelberg of which I accepted the latter. This meant of course a lot of new work. I had to learn about modern statistics; my only previous experience had been guiding a physician in Würzburg through very simple clinical trials. I also came into contact with many other facets of probability theory and did not want to stay with martingales.

However, there still was *Borge Jessen's* problem. In order to solve it I looked at any family (Moore-Smith sequence) of sigma-algebras indexed by a directed set but no longer necessarily increasing or decreasing as it is in the case of a family underlying a martingale. Each sigma-algebra defines a corresponding conditional expectation operator in a suitable space L of random variables, e.g. in L_1. It turned out that one can define a Vitali condition (whose form depends on L) which implies, for every random variable X in L, essential convergence of the corresponding 'trajectory', i.e. of the family of the conditional expectations of X with respect to the underlying sigma-algebras. This condition is trivially satisfied if the family of sigma-algebras is increasing or decreasing. Thus, the classical martingale convergence theorems by *Jessen, Sparre Andersen* and *Doob*, both in the increasing and decreasing case, are indeed particular cases of this general theorem.

In 1963 I was invited to the All-Union Congress of the Soviet probabilists and mathematical statisticians in Tbilisi. *A. N. Kolmogorov* chaired the session where I spoke (in Russian) about my general convergence theorem, which I had presented three year before in Copenhagen but not yet published; it then appeared in [18]. The congress was memorable in many respects. *Kolmogorov* gave a statistical analysis of Pasternak's poetry although the latter had no odor of sanctity with Soviet authorities. I also met H. Cramér for the first time.

The All-Union Congress marked farewell to martingales for me. Much later I started working on point processes. The theory of point processes on the real line makes much use of martingales but again, I was interested in processes in more general spaces and thus got into stochastic geometry and geometrical statistics [19, 20, 21]. I am glad I was never tempted to get involved in the applications of martingales to the theory and, worse, the practice of financial speculations that have contributed in no small measure to the present crisis of the world's money markets and economy.

Список литературы

[1] B. Jessen, and E. Sparre Andersen, "Some limit theorems on integrals in an abstract set," Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser **14**, 22-51 (1946).

[2] B. Jessen, and E. Sparre Andersen, "Some limit theorems on set-functions," Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser **5**, 25-33 (1948).

[3] C. de la Vallée-Poussin, "Sur l'integrale de Lebesgue," Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 435-501 (1915).

[4] O. Haupt, G. Aumann, and C. Y. Pauc, *Differential- und Integralrechnung III* (de Gruyter, Berlin, 1955).

[5] R. de Possel, "Sur la derivation abstraite des fonctions d'ensemble," J. Math. Pures appl. IX, **15**, 391-409 (1936).

[6] C. A. Hayes, and C. Y. Pauc, "Full individual and class differentiation theorems in their relations to halo and Vitali properties," Canad. J. Math. **7**, 221-274 (1955).
[7] K. Krickeberg, "La necessite de certaines hypotheses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extreme de fonctions d'intervalle," C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 764-766 (1954).
[8] J. L. Doob, *Stochastic Processes* (John Wiley & Sons, New York, 1953).
[9] J. Dieudonné, "Sur un théoreme de Jessen," Fundam. Math. **37**, 242-248 (1950).
[10] F. Cafiero, *Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazi astratti* (Liguori, Napoli, 1953).
[11] K. Krickeberg, "Convergence of martingales with a directed index set," Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 313-337 (1956).
[12] Y. S. Chow, *Thesis* (University of Illinois, Urbana, Ill, 1958).
[13] L. L. Helms, *Convergence Properties of Martingales with a Directed Index Set. Thesis* (Purdue University, Lafayette, 1956).
[14] K. Krickeberg, "Stochastische Konvergenz von Semimartingalen," Math. Zeitschr. **66**, 470-486 (1957).
[15] K. Krickeberg, "Absteigende Semimartingale mit filtrierendem Parameterbereich," Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **24**, 109-125 (1960).
[16] K. Krickeberg, "Notwendige Konvergenzbedingungen bei Martingalen und verwandten Prozessen," Trans. Second Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, 1-6 June 1959. Publishing House Czechoslovak Acad. Sciences, Prague (1960).
[17] K. Krickeberg, and Chr. Pauc, "Martingales et derivation," Bull. Soc. Math. France **91**, 455-544 (1963).
[18] K. Krickeberg, "Convergence of conditional expectation operators (in Russian)," Teor. Verojatn. Primen. **9**, 595-607 (1964).
[19] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line processes," Izvestija Akad. Nauk. Armjan. SSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk **5**, 251-262 (1970). Reprinted in: *Stochastic Geometry* (ed. E. F. Harding and D. G. Kendall), 76-88. (Wiley, New York, 1974).
[20] K. Krickeberg, "The Cox process," Symp. Math. **9**, 151-167 (1972).
[21] K. Krickeberg, *Lectures on Point Processes* (in Vietnamese), (Mathematical Institute, Ha-noi, 1976).

Поступила 25 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 25-34

THE ARMENIAN CONNECTION: REMINISCENCES FROM A TIME OF INTERACTIONS

F. PAPANGELOU

This is a narrative of personal reminiscences written largely, perhaps excessively so, in the first person singular. Such a practice is to be frowned on in the staid world of mathematics and is liable to expose the writer to the charge of self-indulgence but I cannot help choosing this as my way of paying tribute to Klaus Krickeberg's indomitable spirit and mathematical enterprize, since our paths were intertwined, crucially for me, at one stage four decades ago. I cannot think of a better way of putting on record my great indebtedness to him and I must beg the reader's tolerance for the strong autobiographical element of these notes. They should be read as a memoir of random interactions involving Klaus and not as a contribution to scholarship or to an appreciation of his wide-ranging work.

Encouraged by Hans Zessin I have put a particular focus on a sequence of events around 1970 that led to some fruitful developments on the border between geometry and probability, which attracted the interest of others in the years that followed. It may sound strange but Klaus and I never actually worked 'together' on this border. However, as the story will reveal, we were for a while just one step removed, and there was a fortuitous encounter in 1971 which proved opportune.

I first met Klaus in 1962 when he visited Greece to participate in a symposium organized by D.A.Kappos, with whom I was working at the time at the University of Athens. Klaus was a key participant but I remember that he did not confine his interest to the symposium alone; true to his perennial eagerness to get to know peoples and cultures, he crowned his visit with a trip to the countryside and among other things familiarised himself with the Greek Easter celebrations and the solemn as well as the noisy manifestations that go with them. I imagine this must have been the time he took his first steps in learning Greek (he was already master of several languages) and sharpening his taste for Greek holidays, which he indulged in more recent years.

Some time later I received an invitation from him to go and work with him for a couple of years at the University of Heidelberg where he then was.

I accepted conditionally: at that stage I was committed to going to the USA, where I was to spend the years 1963-65 and it was only after this that I was able to join him at Heidelberg during the years 1965-67 as an Alexander-von-Humboldt scholar.

As it happened, just prior to this Klaus had a visiting post at Columbia University in 1964-65 and since I was in Washington D.C. at the time we kept in touch, mainly by correspondence but also through a trip my wife and I made to New York where we were guests at the Krickebergs' for a few days early in the academic year and enjoyed their marvelous hospitality. Klaus was at that point interested in transformations that 'mix' infinite measure spaces and this led to some very interesting connections with strong ratio limits of Markov chains, an area in which John Kingman, Steven Orey and William Pruitt were making contributions at about that time. Klaus's paper on the subject was presented at the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability in the summer of 1965. My own paper on the subject was written later while I was in Heidelberg and owed much to questions raised by Klaus, who had a sure touch in knowing exactly what questions to ask. It was another of his questions, on isomorphisms of topological measure spaces, that led to some joint work between Klaus, W.B"oge and myself.

My two years in Heidelberg were unforgettable, and they were decisive for all subsequent development of my work as they sealed my Pauline conversion to probability, which I had previously shunned. Not all the work I did in Heidelberg was directly related to Klaus's but I have no doubt that it would not have been done had I not been there. Our mathematical group was then housed in an old annexe and it was only near the end of my stay that the department moved to its grander, more modern accommodation. We had the benefit of numerous visitors and the Krickebergs' hospitality was boundless as ever.

When I left Heidelberg in the summer of 1967 Klaus had, as far as I know, not yet turned to Stochastic Geometry as such (or Geometric Probability as I ought to call it in the context of that early stage), although he had always been interested in things geometric. This was certainly true in my case. The stimulus for me came later from Cambridge and had a name: Rollo Davidson. Rollo was to die tragically in a mountain climbing accident in 1970 but not before he got both Klaus and myself interested in his intriguing mathematical problems in the area of stochastic line processes. He was a student of David Kendall's who wrote his Ph.D. thesis in 1967, a modest and unassuming young man with a penetrating mathematical mind. I have no doubt that his untimely death was a great loss to mathematics. But it was not in Cambridge that I first met him. He came to London to see me, at the Imperial College where I was spending the year 1967-68 with Harry Reuter. His visit was instigated by David Kendall. Here, however, I must backtrack a little.

I had made the acquaintance of David Kendall and Harry Reuter at another symposium organized by D.A.Kappos, at Loutraki in Greece in late May and early June 1966. Klaus was there too. The talk I gave (on strong ratio limits) raised David's interest because of its connections with the research of David Vere-Jones who had worked with him a few years previously (and who later paid us a brief visit in Heidelberg). As a result, David extended an invitation to me to spend a year in Cambridge and since this could not be arranged in time for the academic year 1967-68 I found myself spending that year in London, courtesy of Harry Reuter.

Rollo's visit to me had nothing to do with ratio limits. His interest was in the topic of line processes. This topic, which formed part of his thesis, was suggested to him by Kendall (see [2], p.74) and he was at that time puzzled by the difficulty of constructing even a single example of a line process of a desirable kind that was substantially different from a Poisson line process. This was his Big Problem ([2], p.70).

A little mathematics at this point is in order. A line process on the plane is, roughly, a random set of oriented straight lines satisfying certain desirable conditions. Choosing an origin O and an axis through it in the plane, we can assign coordinates (θ, p) to any oriented line l by taking p to be the (signed) distance from O to l and θ to be the angle between the perpendicular from O to l and the chosen axis ($0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < p < \infty$). Then each line becomes a point on the cylinder $L = C \times R$, where C is the 'circle' $[0, 2\pi)$. The chief category of line processes Davidson was interested in was that of simple point processes on L, stationary under the transformations which represent Euclidean displacements of the plane and with a square integrable random number of 'points' in any bounded Borel subset of L.

Rollo imposed on his line processes the further condition that they should include no pairs of parallel or antiparallel lines. For the sake of convenience let us call line processes satisfying all these conditions 'regular'. An easy example is the Poisson point process on L having rate measure $dl = d\theta dp$, the latter being invariant under Euclidean displacements. Going one step up, one may construct a Poisson process built on a random rate measure of the form $Z(d\theta)dp$, where Z is a random finite diffuse measure on C, stationary under rotations of the latter. Poisson point processes with randomized rate measure were called doubly stochastic Poisson by D.R.Cox who introduced them, and this is what Rollo called them. They are sometimes termed Cox processes and we will adopt this terminology. Cox line processes exhausted the supply of concrete examples of regular line processes Rollo was able to identify. In his thesis he obtained many properties possessed by line processes but his Big Problem was the construction of a regular example that was not Cox. On p.55 of [2] he effectively asks: are all regular line processes Cox?

Line processes had been considered before Davidson, although in the more classical spirit of integral geometry. R.E.Miles had begun his pioneering series of contributions to geometric probability in the early sixties and M.S.Bartlett had already looked at the spectral analysis of line processes. P.A.P.Moran was another probabilist interested in geometric probability in the sixties. David Kendall's interest in the subject dated back many years earlier and he was developing his theory of random sets at about the time Davidson was doing his thesis. In his introduction to [2] (p.5) Kendall views the transition from classical geometric probability to the study of random sets on manifolds as marking the advent of stochastic geometry. In this spirit Davidson was now treating line processes strictly as point processes on coordinate space and going beyond the Poisson (i.i.d.) case.

Almost everything special about the structure of line processes has to do with the observation that if l_1, l_2 are two parallel lines and l_3 a third line intersecting them, then there is a translation of the plane that maps the pair l_1, l_3 on to the pair l_2, l_3. Some time after his visit, while I was still in London, Rollo sent me a letter from Cambridge which included a simple but remarkable insight: if $X(l), l \in L$ is a stochastic process indexed by L and stationary under the Euclidean group, then under mild conditions $X(l_1) = X(l_2)$ almost surely whenever $l_1$and l_2 are parallel lines, i.e. X is in effect a stochastic process on the circle C. The essence of this insight is of course that, under any pseudometric d in L which is invariant under translations and continuous with respect to the topology of the cylinder L, the distance between parallel lines is zero. (Proof: with l_1, l_2, l_3 as above, $d(l_1, l_2) \leq d(l_1, l_3) + d(l_2, l_3) = 2d(l_1, l_3)$ and the last term can be made arbitrarily small by choosing an l_3 that makes a small angle with l_1.) Thus under such a pseudometric the cylinder collapses to the circle C. An immediate consequence is that the stationary measure $X(l)dl$ on L with density $X(l), l \in L$, with respect to $d\theta dp$ has an obvious product form $Z(d\theta)dp$ and is thus invariant under translations of the plane.

After I moved from London to Cambridge in 1968 Rollo and I once or twice in our conversations touched on the subject of his big problem but otherwise our interaction was largely social. He once graciously invited me to join him at Trinity College for a college feast but I declined, saying that it was far too grand an occasion for me. Instead, I accepted another invitation of his to a humble college lunch. However, his big problem stayed in the back of my mind and I was beginning to develop an idea that came to fruition after I left for Columbus, Ohio in the summer of 1969. It was in the spring of 1969 that Klaus came through Cambridge and it was then that he and Kendall planned the Oberwolfach meeting on Integral Geometry and Geometric Probability that was held in June 1969. I wish I could report on what went on at that meeting, since it must have been important for the development of the subject, but unfortunately I did not attend it as I was preparing for my migration. There is reference in [2] (p.382) to a three-week collaboration between Klaus and Rollo in Heidelberg, following the Oberwolfach meeting. I was unaware of this collaboration but will make reference to it later.

It was after I arrived in Columbus that I worked out the idea I had in Cambridge: if the Palm probability $P(.|l)$ of the line process (i.e. the probability conditioned on l being a member of the sample realization) is absolutely continuous with respect to the unconditional probability on events occurring in $L \setminus \{l\}$ then, according to Rollo's observation, the corresponding Radon-Nikodym density $Y_0(l)$, which defines a stochastic process indexed by L, is constant on sets of parallel lines. Applying 'shear' invariance arguments resting on this fact one can prove that the line process is Cox. I presented the result at a conference held in Columbus and according to the proceedings of that conference my talk was given on Easter Sunday, 29 March 1970. On exactly the same day Rollo sat down to write to me the letter that was published later in [2] and was to be his mathematical farewell. (For the date see page IV of [8] and page 379 of [2]. The result is on p.239 of [8].) He was to die four months later, on 29 July 1970, before he could realize a planned visit, sponsored by the Royal Society, to Rouben Ambartzumian in Armenia. He never saw the account of my result which was written up at about the time of his death and which, I should like to think, would have interested him. Some time in the autumn of 1970 I received a letter from Kendall informing me of Rollo's tragic death and of the plans that were afoot to publish what were ultimately the two memorial volumes Stochastic Geometry ([2]) and its companion Stochastic Analysis. I immediately sent David my manuscript, which he acknowledged as the first contribution received for publication in [2]. (A misprint on p.145 of [2] turned the year 1970 into 1971.)

Even after this I was unaware of an idea of Klaus's that emerged from his collaboration with Rollo in 1969. I was to remain unaware until the summer of 1971, doing in the mean time other work on point processes. In his thesis Rollo had shown that if the correlation measure σ of a regular line process has a density $g(l, l')$ with respect to $dldl'$ outside the diagonal of $L \times L$, then σ is invariant under reflections. In doing this he had made use of the fact that $g(l, l')$ is a function of the angle between l and l' alone. Klaus showed him how to do away with the need of a density.

Klaus's method was to disintegrate the measure σ with respect to the equivalence classes into which $L \times L$ is partitioned by the equivalence relation $\sim$, whereby $(l_1, l_2) \sim (l_3, l_4)$ if $(l_3, l_4) = (Tl_1, Tl_2)$ for some Euclidean displacement T. This led to Klaus's paper [5] and Davidson's Theorem in [1], which constitute the Armenian Connection of the title of the present article. These two papers were reprinted in [2] and it is worth mentioning that two more contributions to [2], one each by L.A.Santaló and R.E.Miles, were reprinted from the same volume of the Izvestia of the Armenian Academy of Sciences, which also included an article by Rouben Ambartzumian on line processes. The disintegration method provided the right tool for the study of moment measures of line processes and processes of higher-dimensional flats in Euclidean spaces and led to Klaus's more systematic treatment of moment measures in [6]. Klaus later proceeded to use it in the statistical analysis of hyperplane processes.

In [1] Davidson showed that the product form $Z(d\theta)dp$ for stationary random measures on L, referred to above, is still valid if we drop the assumption of the existence of a density $X(l), l \in L$ and replace it with the assumption that the stationary random measure almost surely charges no set of parallel lines. In the summer of 1971 Klaus came through Columbus and gave a seminar talk on moment measures of point processes, which included the assertion just made and his 'disintegration' approach to it. Before he finished his talk I knew what my next task was going to be: to construct the random measure W which stands in for the measure with differential $Y_0(l)dl$ if no density $Y_0(l)$ exists, and to use the factorizability of this W to establish Cox structure in cases where the Palm probability may not be absolutely continuous. I knew where to look for this W in view of my earlier work on point processes on the real line.

Klaus and I drove together from Columbus to Yorktown Heights, NY (and got stuck in a traffic jam) where a conference on Stochastic Point Processes was held in August 1971 and I remember that on the way I formulated a conjecture that was fairly close to the result I later proved in [7], a result which demonstrated Cox structure under weak conditions and shed a little more light on Davidson's Big Problem. To be sure, the problem remained open but at least this paper indicated that, whereas for ordinary point processes Cox structure is the exception, in the case of line processes Cox structure is the rule rather than the exception. The paper included a rather laborious construction of the random measure W for a general spatial point process, which I called the 'conditional intensity measure' in view of its intuitive meaning: in sloppy language, $W(dl)$ is the conditional expectation of $N(dl)$ (where N is the point or line process), given the events occurring in $(dl)^c$.

The cause of line (and hyperplane) processes was later taken up by Olav Kallenberg who, in a series of papers beginning in 1976, explored further not only the structure of line processes but their asymptotic behavior as well, when the plane is 'translated away'. Among other things he pointed out that the assumption of stationarity under rotations is redundant. In 1977 he published in [3] his ingenious counterexample to Davidson's question and won for it the Rollo Davidson prize, an annual prize established in memory of Rollo Davidson. Thus Davidson's Big Problem was at last solved. The answer to his question may have turned out to be in the negative but the counterexample itself shows how exceptional non-Cox line processes are.

In another direction the concept of conditional intensity measure of a spatial point process (on which much light was shed by Kallenberg's work in 1978) turned out to have intimate connections with the theory of Gibbs processes in statistical mechanics, which was also the focus of intense activity at that time. In 1979, following hard on the heels of Nguyen Xuan Xanh and Hans Zessin who dealt with a case of an absolutely continuous Palm probability, K.Matthes, W.Warmuth and J.Mecke established the general link with so-called 'specifications' of Gibbs random fields in terms of local potentials. This work was continued by several authors (E.Glötzl, B.Rauchenschwandtner, A.Wakolbinger). The concept of conditional intensity measure was further elucidated by P.C.T. van der Hoeven, prompted partly by a problem suggested by Klaus, and a little later, in the third edition of his book on Random Measures ([4]), Kallenberg presented his comprehensive treatment of condition al intensity measures and their variants. Davidson's problem in stochastic geometry had come a long way.

The seventies were a lively time for stochastic geometry and for spatial point processes. There were sessions on stochastic geometry at European meetings (ISI 40^{th} Session in Warsaw 1975, 10^{th} European Meeting of Statisticians in Leuven 1977). In 1976 an international conference sponsored by the Armenian Academy of Sciences was organized in Armenia by Rouben Ambartzumian to mark the 200^{th} anniversary of Buffon's problem of the needle, probably the first problem in geometric probability ever posed. International conferences on point processes were held in the German Democratic Republic. The book on infinitely divisible point processes by J.Kerstan, K.Matthes and J.Mecke came out in 1974 (in German), followed by an English edition four years later and a Russian one in 1982. Chris Preston's book on Random Fields as well as the first edition of Olav Kallenberg's book on Random Measures appeared in 1976. G.$Math\acute{e}ron's$ book was published in 1975. But it is not my intention to give a survey of these areas as they were evolving in the seventies.

After the encounter in Columbus, Klaus and I used to meet from time to time: in Bielefeld, Paris, even Manchester where he visited when we both acted as external examiners for Adrian Baddeley's Cambridge PhD thesis, and of course at some of the conferences mentioned above. By the late seventies our mathematical paths had diverged. I cannot, however, conclude my recollections without mentioning one other period in which our paths crossed again. This was in the early nineties when I got him involved in the appointments process of the newly founded University of Cyprus, which opened its doors to students in 1992. His role was crucial in the successful launch of the Department of Mathematics and Statistics and what he did was an excellent illustration of his desire, manifest throughout his life, to help young states in their development.

It only remains for me to wish him a happy ninth decade.

LETTER TO H. ZESSIN, 28^{th} SEPTEMBER 2008

$>$From **Fredos Papangelou**

[*This letter was sent to Zessin on his request to comment the historical development of the condition* (Σ') *in the beginning of the seventies.*]

You ask me a couple of questions and since I am not absolutely certain what sort of answers you expect, I will outline my perspective and leave it to you to extract the answers from it.

The distinction between two levels that I draw is the following.

(A) Level 1. The case of an absolutely continuous conditional intensity measure, i.e. where a density function exists.

(B) Level 2. The more general case where the conditional intensity measure is not absolutely continuous but may satisfy some weaker smoothness condition.

The condition in Theorem 1 of my 1976 paper you cite corresponds to case (A) and is, in view of the definition of the Palm probability $P(.|l)$, only a short step away from the condition of absolute continuity $P(.|l) \ll P(.)$ on a reduced σ-field, which I first introduced in 1970 in connection with line processes. (See Lecture Notes in Math. 160 , page 239.) I will say something about how this condition came about in my article of reminiscences that I promised for the Krickebergband. Very briefly, Rollo Davidson had earlier observed that stationary stochastic processes indexed by lines must be constant on sets of parallel lines. My idea was then that if $P(.|l) \ll P(.)$ on the reduced σ-field, then the constancy of the corresponding Radon-Nikodym density on sets of parallel lines can be used to prove that the line process has Cox structure. This gave a partial answer to a question raised by Davidson. (The proof of the theorem I presented in 1970 was published in 'Stochastic Geometry'. See Theorem 9 on page 144 there.) When Klaus later extended Davidson's result from stochastic processes to random measures, I was motivated to construct the spatial conditional intensity measure in my paper in Zeitschrift f. Wahrschein. 28, 207-226 (1974) and use it to prove Cox structure under the weaker conditions of Theorem 7 there.

The condition (Σ') assumed at the top of p.118 in Matthes et al. corresponds to case (B) and is equivalent to condition (Σ) in my ZW 1974 paper referred to above. The equivalence was proved by Kallenberg in his 1978 paper in ZW 41, 205-220 but you have to look at the proof of his Theorem 2.11 on page 211 to find it. (See also Matthes et al., Theorem 2.4.) This is the earliest appearance of statement (Σ') that I know of in a published paper and I therefore assume that Kallenberg was the first to state (Σ') . I do not remember if it emerged in discussions at earlier conferences. In any case, this relaxation of the absolute continuity condition of the Campbell measure was not suggested by me. The kernel arising in (Σ') is exactly the conditional intensity measure appearing in Theorem 2 of my ZW 1974 paper if the non-atomicity condition of that theorem is satisfied. (There are some discrepancies if there is a discrete component.)

As you well know, the condition (Σ') replaces the formula

$$\eta(\mu, B) = \int_{x\in B} \frac{P(\xi - \delta_x \in d\mu | x)}{P(\xi \in d\mu)} \rho(dx) \qquad (\rho(.)) = E\xi(.)), \tag{0.1}$$

which holds when the conditional intensity measure is absolutely continuous, by the formula

$$\eta(\mu, B) = \frac{\int_{x\in B} P(\xi - \delta_x \in d\mu | x)\rho(dx)}{P(\xi \in d\mu)} \tag{0.2}$$

in the more general case. In the context of the Remark on p.110 of your 1979 paper with Nguyen Xuan Xanh the differential $V(x|\pi S)\rho(dx)$, which is essentially the same as $X(l, .)\nu(dl)$ on p.145 of 'Stochastic Geometry', is replaced in Matthes et al. by the more general $\eta(\pi S, dx)$ which may have no density.

Список литературы

[1] R. Davidson, "Construction of line processes: second order properties," Izv. Akad. Nauk Armiansk. SSR. Ser. Mat. **5**, Reprinted as article 2.4 in [2], 55-75 (1970).
[2] E. F. Harding, and D.G. Kendall (editors), *Stochastic Geometry* A Tribute to the Memory of Rollo Davidson, (Wiley, London, 1974).
[3] O. Kallenberg, "A counterexample to R.Davidson's conjecture on line processes," Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **82**, 301-307 (1977).
[4] O. Kallenberg, *Random Measures* (Akademie-Verlag, Berlin and Academic Press, London, 1983).
[5] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line processes," Izv. Akad. Nauk Armiansk. SSR. Ser. Mat. (5), 251-262. Reprinted as article 2.5 in [2], 76-88 (1970).
[6] K. Krickeberg, "Moments of point processes," Article 2.6 in [2], 89-113 (1974).
[7] F. Papangelou, "The conditional intensity of general point processes and an application to line processes," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **28**, 207-226 (1974).
[8] L. Sucheston, (editor) *Contributions to Ergodic Theory and Probability*, Lecture Notes in Mathematics, **160** (Springer, Berlin, 1970).

Поступила 25 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 35-44

KLAUS KRICKEBERG UND VIETNAM. ERINNERUNGEN

NGUYEN XUAN XANH

Es war eine gütige Fügung des Schicksals, daß ich in jungen Jahren einen Lehrer kennenlernen durfte, der nicht nur ein Freund für mein ganzes Leben, sondern auch ein Freund meines Heimatlandes wurde.

Ich traf auf Krickeberg erstmals im Frühjahr 1967. Nach einem kurzen Jahr in Bonn kam ich nach Heidelberg, und wollte dort mein Studium der Mathematik, das ich bereits in Vietnam begonnen hatte, fortsetzen. Die Welt erschien mir als zu groß, das Land war mir arg fremd, und das Studium und die Wissenschaft erschienen mir als uferlos. Ich war allein und unvorbereitet auf das Studium und das neue Land: nur die deutsche Sprache, die hatte ich in Saigon fleißig gelernt. In Bonn erwog ich sogar, Physik zu studieren. Ich kannte dort einen vietnamesischen Pfarrer und einen anderen Vietnamesen, beide beschäftigten sich mit Experimentalphysik; aber mir schwebte ein etwas stärker theoretisch ausgerichtes Studium vor. Auf meine Liebe zur theoretischen Physik war ich schon in Saigon gestoßen.

Ich fühlte mich schrecklich einsam in Deutschland. Im fernen Vietnam donnerten Bomben zunehmend auf das Land hernieder, welches seine 100jährige Französische Kolonialherrschaft eben hinter sich gelassen hatte. Der Krieg war mörderisch,und Unruhe erfasste viele der im Ausland studierenden Vietnamesen. Sogar im Schlaf verfolgte uns der Alptraum des Krieges. Dennoch hatte ich Glück, denn ich war einer der wenigen meines Alters, die nicht in diesem Krieg mit der Waffe kämpfen mußten. Die meisten meiner Altersgruppe waren gezwungen, in den Krieg zu ziehen. In Vietnam hatten mich oft Alpträume heimgesucht und diese verfolgten mich eine ganze Weile lang auch in Deutschland.

In Heidelberg besuchte ich die Vorlesungen von Prof. Krickeberg über Wahrscheinlichkeitstheorie und die über Analysis von Prof. Horst Leptin, und nahm an Seminaren beider teil. Das neue Institut für Mathematik am Klausenpfad und das angebotene

Lehrprogramm ist recht überschaubar. Prof. Krickeberg war damals gerade aus den USA zurückgekehrt und schon recht bekannt unter den Professoren seiner Generation.

Analysis war an sich meine 'Stärke' von zu Hause; ich war ein glühender Anhänger der Bourbakischen Schule, von deren Büchern tief beeindruckt. Das abstrakte Räsonieren machte mir Spaß. In Deutschland lernte man anderes, dachte ich. Meine Sicht war eng, wie bei den meisten meiner Kommilitonen in Vietnam. Aber der Lehrer der Wahrscheinilichkeitstheorie gefiel mir mit der Zeit persönlich immer besser. Bei ihm konnte ich ein neues und hochinteressantes Gebiet der Mathematik kennen lernen: Die Stochastik.

Sie war zu jener Zeit noch eine recht junge Disziplin. In manchen Teilgebieten hat es enge Verknüpfungen mit der Analysis. Die Stochastik erwies sich mir später wichtiger, ohne daß ich es zu Beginn ahnte, da sie mir in manchen Gebieten der Physik zu einem besseren Verständnis verhalf, wie zum Beispiel in der statistischer Mechanik oder Quantentheorie. Aber im nachhinein gesehen war doch die Wahl der Stochastik mehr ein reiner, aber glücklicher Zufall als das Ergebnis einer sachlichen Entscheidung, die auf einer bewußten Orientierung basierte, die mir damals fehlte.

Mit der Zeit kam ich Prof. Krickeberg näher. Er hatte einen wunderbaren, sympathischen, bescheidenen aber ganz eleganten Stil. Er war kein großer Redner, etwas schweigsam gegenüber dem Publikum, kein üppiger Redner; gegenüber dem Publikum immer etwas distanziert, gegenüber seinen Studenten aber stets hilfsbereit. Er strahlte eine große Wärme und etwas zutiefst Menschliches aus. Seine Vorlesungen waren unvergeßlich, alles genau durchgeführt, mit Stil und vornehm, er konnte die Stoffe, Formeln, Beweise alle auswendig und lückenlos lesen, stockte nie unterwegs, führte alles fehlerfrei tafelvoll aus, schaute gelegentich nur auf Stichworte seines winzigen Zettels. Er ist äußerlich sehr ruhig, innerlich auf sich bedacht und lebendig vor sich hin, wie eine Quelle, welche frisches Wasser still ausschüttete. Er ließ sich durch Lärmen von draußen nicht irritieren, sagte gelegentlich humorvoll, wie etwa, daß die Bauleute draußen Konkurenz mit ihm trieben, was die Studenten zum Lachen brachte.

Trotz seiner Wärmestrahlung gehörten wir beide verschiedenen Welten an. Seine Welt und zugleich die von seinesgleichen, war mir wie ein Buch mit sieben Siegeln, welches stets einen überwältigenden Eindruck auf mich ausübte, geheimnisvoll und unverständlich. Zu dieser Welt habe ich lange keinen Schlüssel gefunden. Das dauerte mehr als fünfzehn Jahre.

Mit der Zeit stieß ich vielleicht bei ihm auf Sympathie. Ich weiß nicht, aus welchem Grund. Ich verdiente es bestimmt nicht. Vielleicht, weil ich der einzige Asiate im Institut war und und weil ich aus einem Land kam, in dem gerade ein furchtbarer Krieg tobte. Er und sein Freund, Prof. Leptin, unterstützten mich äußerst freundlich bei meiner Arbeit. Bald nahmen sie mich in die Liste der Tutoren auf. Diese Hilfe war mir äußerst wertvoll. Denn mein Stipendium der damaligen Saigoner Regierung konnte nur die Hälfte der Kosten meines Lebensunterhalts decken.

Die andere Hälfte steuerte mein Vater bei. Die Tutorenstelle war mir deshalb hochwillkommen. Sie wurde umso wichtiger, als die Saigoner Regierung 1969 endgültig mein Stipendium strich und meinen vietnamesischen Paß nicht mehr verlängerte. Der Grund für diese Maßnahmen war: Meine kritische Haltung gegenüber der amerikanischen Kriegsführung und meine Kritik an dem korrupten Regime in Südvietnam und mein politisches Engagement unter den in Deutschland lebenden Vietnamesen. Dank des verdienten Geldes am Institut konnte ich weiter leben und studieren.

In den Jahren in Heidelberg wurde ich politisch immer aktiver. Mit dem Entzug des Stipendiums und der Nichtverlängerung des Paßes war ich gewissermaßen ein vцllig freier Mensch geworden. Der Vietnamkrieg eskalierte auf die Spitze seiner Grausamkeit, und brachte Millionen von Menschen in den großen Zentren der Welt zunehmend auf die Straßen. Zusammen mit einigen anderen Vietnamesen gab ich heimlich eine vietnamesische Zeitung heraus.

Ich benutzte dafür meinen Assistentenraum am Mathematischen Institut als heimliche Redaktionsstube. Des öfteren arbeiteten wir dort nachts und auch am Wochenende. Ich investierte fast mein ganzes Geld in die Zeitung. Natürlich ahnte der eine oder der andere Mensch am Institut, was wir dort trieben. Aber niemand hinderte uns daran, vielmehr man tolerierte unsere Tätigkeit verständnisvoll. Aber einmal geschah dann doch: Nach einem durchgearbeiteten Wochenende war mein Arbeitszimmer so durcheinander, daß ein Professor sich nicht zurückhalten konnte und an die Tafel meines Zimmers schrieb: 'Dies ist ein Saustall!'. Er hatte einfach recht. Ьberall lagen Papiere, Klebstoffe und Werkzeuge herum, die wir wegen der Erschцpfung nicht rechtzeitig aufräumen konnten. Nach diesem Vorfall mussten wir mit der Redaktion in eine kleine private Wohnung umziehen.

Prof. Krickeberg wußte vielleicht nicht in allen Details von meiner politischen Tätigkeit, doch sehr wahrscheinlich ahnte er mehr als ich dachte. Meinerseits wußte ich damals nicht, dass er zu den ersten deutschen Professoren gezählt hatte, welche schon sehr früh gegen den Krieg der Amerikaner protestiert hatten. Bereits 1965 hat er die 'Hilfsaktion Vietnam' durch Beiträge unterstützt. Die 'Hilfsaktion Vietnam' war eine humanitäre Organisation, die vor allem die 'Befreiungsfront Südvietnams' unterstützte.

1966 hatte er den von Laurent Schwartz auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Moskau initiierten Aufruf gegen den Krieg in Vietnam als einziger westdeutscher Mathematiker mitunterschrieben. Das war eine sehr kühne Tat, denn man mußte bedenken, dass Deutschland zu dieser Zeit ein enger Verbündeter der USA im Vietnam Krieg war. Von diesen seinen Aktivitäten wußte ich damals nicht. Ich war zu sehr mit meinen und unseren eigenen vietnamesischen Problemen beschäftigt. Und zudem mußte ich mein Studium zum Abschluß bringen, was mir 1970 gelang.

1971 nahm Krickeberg einen Ruf der Universität Bielefeld an. Es ist eine ganz neue und großzügig gebaute Universität in Nordrhein-Westfalen. Unter seinen Assistenten, die er mitnahm, waren Herbert Ziezold, Reinhard Lang, Hans Zessin und ich. In Bielefeld dozierte er über sogenannte Punktprozesse, ein neues Gebiet der Stochastik mit vielseitigen Anwendungsmnglichkeiten. Alle seine Assistenten beteiligten sich an der Forschung und Lehre auf diesem Gebiet. Und dort, zusammen mit Hans Zessin, promovierte ich später. In der Zeit vor 1973, als das Pariser Friedensabkommen zwischen den Kriegsparteien in Vietnam geschlossen wurde, tobte der Krieg heftiger denn je. Die Amerikaner bombardierten sogar die Hauptstadt Hanoi zu Weihnachten, verbanden die Aktion mit der trügerischen Hoffnung, eine bessere Position beim Ausgang der Pariser Verhandlungen zu erreichen. Weltweit gab es Proteste und Demonstrationen. Schüsse sind gefallen und Menschen getötet worden.

Im Sommer 1974 traf Prof. Krickeberg eine ganz überraschende Entscheidung: Hanoi, damals die Hauptstadt der Demokratischen Republik Vietnam,zu besuchen, und zwar auf dem langen Weg der Eisenbahn von Bielefeld aus über Moskau, Sibirien, Mongolei, China und schließlich Hanoi! Für mich wie für viele Menschen in Deutschland war das nicht nur eine sensationelle Nachricht; die beabsichtigte Reise in den Norden Vietnams war auch ein Abenteuer. Es war eine Reise in das Land der derzeit weltweit geachteten Widerstandskämpfer. Ich konnte erst in 1976 und erneut 1977, also 2 Jahr später, das wiedervereinigte Land kurz nach dem Kriegsende betreten. Die Kriegsspannung, die Krickeberg bestimmt erlebt hatte, war nicht mehr da, nur noch die äußerlichen Spuren des mörderischen Kriegs waren zu sehen.

Während seines Aufenthaltes in Nordvietnam hielt Krickeberg mehrere Vorlesungen am Institut für Mathematik in Hanoi und traf mit den vietnamesischen Wissenschaftlern zusammen. Diese waren äußerst wißbegierig und ließen großes Interesse an stochastischen Methoden erkennen. Unter seinen Zuhörern waren Prof. Hoang Tuy und Le Van Thiem, zwei berühmte Mathematiker. Er traf auch mit der Delegation der Provisorischen Revolutionsregierung Südvietnams zusammen, übergab ihr Spenden und diskutierte mit solch berühmten Medizinern wie Prof. Ton That Tung über Anwendungen der Stochastik auf dem Gebiet der Medizin.

Ich weiß nicht genau, wann er begonnen hatte, Vietnamesisch zu lernen, wahrscheinlich in der Pariser Zeit zwischen 1974-1976, als er begann, in Paris regelmäßig Vorlesungen zu halten, bevor er wenig später endgültig Abschied von Deutschland nahm, und für längere Zeit nach Paris übersiedelte. Er lernte Vietnamesisch mit großer Ausdauer und unendlich viel Mühe. Bald schon konnte er die neue Sprache für seine mathematischen Vorlesungen schriftlich wie mündlich benutzen. Er hat überhaupt eine erstaunliche Gabe für Sprachen. Viele europäische Fremdsprachen spricht er fließend: Dänisch, Englisch, Französisch, Russisch, Spanisch, dazu kommt noch ein wenig modernes Griechisch.

Ich erinnere mich einmal an eine Solidaritätsveranstaltung für Chile im Großen Hörsaal der Universität Bielefeld. Der Übersetzer für Deutsch-Spanisch, ein Genosse aus Südamerika, der in Bielefeld studierte, geriet an dem Tag so oft ins Stocken, daß die Veranstalter sich gezwungen sahen, Prof. Krickeberg aus der Reihe der Zuhörer nach oben zu bitten, um die schwierige Übersetzung zu übernehmen. Er hatte die Aufgabe in der Tat mit Bravour erledigt. Man muss bedenken, dass er bereits 1972 Vorlesungen in Chile auf Spanisch gehalten hatte.

Mit verstärkten und stetigen Aktivitäten in den 70er Jahren war sein Engagement für Vietnam in eine neue eingeebnete Bahn gelenkt worden. Eine neue Phase seines wissenschaftlichen Weges zeichnete sich ab. Er selber sagte in dem Zusammenhang: *Zugleich aber geschah etwas, was meinem Leben nach und nach eine ganz andere Richtung gab.* Er kam wieder öfter nach Vietnam, initiierte Projekte und führte sie aus, um das mathematische statistische Fundament für das Gesundheitswesen des Landes zu legen und half dabei, grundlegende Probleme in der Praxis zu lösen. Der wichtigste Angelpunkt seiner Arbeit war das Nationale Institut für Hygiene und Epidemologie, NIHE genannt, mit dem er bereits 1978 Kontakt angeknüpft hatte. Ьber dieses Institut breitete sich seine Arbeit und Wirkung im ganzen Land aus: Hanoi, Ho Chi Minh-Stadt, Nha Trang, Dalat, Buon Ma Thuot... .

Er hielt zahlreiche Vorlesungen und gab Seminare, betreute Studenten, Doktoranden, schickte Forscher ins Ausland zur Weiterqualifikation. Er ging zu unzähligen Gemeinden auf das Land, um das Gesundheitswesen besser kennenzulernen. Er schrieb Memoranden, schlug dem Gesundheitsministerium des Landes Reformen vor. Bei diesen Aktivitäten standen ihm verschiedene Organisationen bei: Das französiche Außenministerium gewährte ihm seit 1981 ein über 10 Jahre laufendes Entwicklungsprogramm zur Weiterbildung höherer Mitarbeiter des Gesundheitswesens über Themen wie Allgemeine Epidemiologie, Epidemiologie chronischer Erkrankungen, Epidemiologie von Infektionskrankheiten, klinische Versuche, Effizienz und Erprobung von Impfstrategien (insbesondere Phase III), Gesundheitsstatistik und Gesundheitsinformationssysteme u.a.. UNICEF bat ihn seit 1984 sieben Mal um Beratung zu Themen wie CDD (Control of Diarrhoeal Diseases), EPI (Extended Programm of Immunization), MCH (Mother and Child Health), Malaria, Tuberkulose, Epidemiologie an den kommunalen Gesundheitsstationen.

In Zusammenarbeit mit der Deutschen Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ) führte er 1994 eine Pilotstudie über Familienplanung, Planung sowie die Ausführung einer Pilotstudie durch Stichproben in den Provinzen Nghe An und Ha Tinh durch.

Das Institut NIHE war, wie er selber sagte, seine neue wissenschaftliche 'Heimat' geworden, und die kleinen Gesundheitsstationen der Gemeinden, auf denen der grцßte Teil der primären, präventiven und kurativen Gesundheitspflege beruht, wurde zu seiner 'großen Leidenschaft'. Die konkreten Probleme Vietnams regten ihn zur Entwicklung neuer mathematischer und statistischer Verfahren an. Von der Mathematik wechselte er immer mehr zu den Problemen des öffentlichen Gesundheitswesens über, und er stellte seine Arbeit mehr in den Dienst der Menschen.

Durch seine Projekte in Vietnam hat er viele wertvolle neue Erkenntnisse über die Verbreitung von Krankheiten, die vorbeugenden Maßnahmen zu ihrer Bekämpfung gewonnen. Er hielt darüber viele Vorträge und hatte entsprechende Veröffentlichungen im In- und Ausland. Die Punktprozesse, über welche er in den 70er Jahren in Bielefeld aus rein mathematischem Interesse gelehrt hatte, wurden jetzt aus einer Anwendungsperspektive verfolgt und auf praktischem Boden fruchtbar. Die Liste seiner in Vietnam geleisteten Arbeiten ist zu lang, um hier im Einzelnen besprochen zu werden.

Einige Jahre lang sahen wir uns nicht mehr. Anfang der 80er Jahre ging ich für 6 Jahre an die Technische Universität Berlin, während er in Paris lebte. Nur einmal traf ich ihn in diesen Jahren sehr kurz in Berlin. Zum Abschied brachte ich ihn zum Berliner Bahnhof und habe ihm dabei kurz gesagt, daß mir das kulturelle Leben innerlich fehlte, damit man überhaupt ein Mensch wäre. Die Jahre in Berlin waren mir ein Umbruch ohnegleichen. Auf dramatische Weise schuf ich langsam den Eingang zu der deutschen Welt, die mir einst zu fremd und unheimlich war. Ich bekam auf mühsamen Wegen neue Einsichten ins Leben und gefestigte Kraft, um künftig unter anderen Umständen bestehen zu können, ohne sich selbst zu verlieren. Es dauerte einige Jahre mehr,bis ich den Weg nach Vietnam freiwillig wiederfand. Die Zeit in Deutschland kam für mich zu einem Ende.

Die Rückkehr nach Vietnam war für mich nicht einfach , ja im gewissen Sinne sogar abenteuerlich, zurück in ein Land des Lebenstillstandes, der Wirtschaftkollapse, der selbst besiegten Sieger, wo gerade mit 'Doi Moi', sprich: Öffnungspolitik, eine Wende zum Leben herbeigeführt wurde. Nicht nur die Wirtschaft, sondern sämtliche geistigen Aktivitäten sowie das Unviversitätsleben, sind landesweit auf das äußerst Notwendige reduziert worden. Das Land erlebte aus der tiefsten Krise eine schwere Geburt.

Nach einigen Jahren Trennung trafen Krickeberg und ich uns wieder auf dem neuen Boden: In Saigon. Es war mir erstaunlich. Ich konnte seine unermüdliche Arbeit und fließende Kraft nur bewundern. Gerade in der schwierigsten Zeit des Landes war er konsequent im Gesundheitswesen weiter aktiv geblieben. Seine Projekte, insbesondere das, welches das französische Außenministerium unterstützt hatte, liefen im Stillen weiter. Mehrere Jahre konzentrierte sich seine Arbeit auf den Norden, so daß der Kontakt unter uns eher sporadisch wurde. Aber dann trafen wir uns in Saigon doch wieder . Zuletzt 2006 mit seiner Lebensgefährtin Helga. Das Land hat inzwischen einen langen, mühsamen Weg hinter sich gelegt. Man konnte jetzt in einem Restaurant gemütlich miteinander plaudern. Und mein erstes Buch über Deutschland war inzwischen erschienen.

Von 1974 bis 2008 hat Krickeberg insgesamt 23 Reisen nach Vietnam unternommen. Er kennt das Land und die Menschen mehr als ich, und er hat für die bedürftigen Menschen vielleicht mehr als andere getan. Seine über 30 Jahre lange Arbeit zeitigte in vielerlei Hinsicht Früchte. Ein Informationssystem für das oben erwähnte CDD-Programm, welches im Rahmen von UNICEF mit seiner Hilfe geschaffen wurde, hat sicher sehr vielen Kindern das Leben gerettet, viel mehr als es einzelne Ärzte mit nur kurativer Arbeit hätten tun kųnnten.

Inzwischen ist CDD in die allgemeine Gesundheitsfürsorge integriert worden und damit auch das von ihm geschaffene Informationssystem. Er hat die ganze 'Mathematikgruppe' in der Abteilung 'Epidemiologie' von NIHE ausgebildet, sowohl theoretisch als auch durch sehr viel praktische Arbeit. Eine seiner Schülerinnen aus der Gruppe ist mittlerweile Direktorin dieser Abteilung geworden. Die vielen anderen höheren Mitarbeiter des ganzen vietnamesischen Gesundheitssystems, die durch sein zehnjähriges, von Frankreich finanziertes Programm weiter gebildet worden sind, vergessen bestimmt nicht, was sie gelernt haben. Mehrere der Wissenschaftler, die seinerzeit seine Vorlesung über Stichprobenmethoden im Allgemeinen Statistischen Institut gehört haben, haben heute leitende Positionen im Institut für Familienplanung in Hanoi und wenden diese Methoden weiter an. Durch Krickebergs Arbeit hat das Niveau der Arbeit am NIHE international anerkannte Standards erreicht.

Doch er selbst hat sich trotz seines hohen Alters noch nicht zur Ruhe gesetzt. 2005 begann er im Alter von 76 mit der Ausarbeitung von Reformvorschlägen für das Fach des Öffentlichen Gesundheitswesens an der Medizinischen Hochschule der Provinz Thai Binh. Dabei strebte er eine partnerschaftliche Zusammenarbeit mit der Fakultät für Gesundheitswissenschaften der Universität Bielefeld an, an der er nach der Emeritierung immer noch ehrenamtlich arbeitet.

Auch wollte er dabei das laotische Nationale Institut für Öffentliches Gesundheitswesen in dieses Projekt einbezogen wissen. Das Ziel des Programms besteht darin, die institutionelle Struktur und vor allem die Lehrinhalte der Universität von Thai Binh, aber auch die des laotischen Instituts auf einen den internationalen Standards vergleichbaren, aber zugleich den lokalen Gegebenheiten angepaßten Stand zu bringen.

Originell dabei ist die Idee, dass hier ein hoch entwickeltes vietnamesisches Institut, nämlich NIHE, zusammen mit der Bielefelder Fakultät den weniger fortgeschrittenen Partnern helfen wird. Krickeberg erkannte bald, daß dieses Modell für die Lebensfähigkeit der Universitäten wirschaftlich ärmerer Provinzen wie der von Thai Binh ganz allgemein von großer Bedeutung ist. Der Aufbau von nachhaltig wirksamen Strukturen im Gesundheitswesen und eine für Wissenschaftler höhere Attraktivität der Arbeit an Universitäten in solchen ärmeren Provinzen sollten u.a. dabei helfen, einen "brain drain" innerhalb des Landes zu verhindern.

Das Modell sollte eine Vorbildfunktkion für den Aufbau ähnlicher Strukturen und Institutionen in anderen Provinzen Vietnams haben. Eine gute Gesundheitsstruktur ist auch noch eine wesentliche Voraussetzung für den Erfolg ausländischer Investitionen.

Im Mai 2008 wurde die Finanzierung der Hauptaktivitäten der Partnerschaft für 5 Jahre durch die deutsche Else Kröner-Fresenius-Stiftung zugesagt. Bereits im Oktober 2008 begann Krickeberg mit der Arbeit. Die angestrebte Partnerschaft sollte etwas Institutionalisiertes und Dauerndes bleiben.

Anfang 2008 vereinbarten wir, uns am 1. März 2009 in Dalat, einem alten schönen, immer noch einer kleinen französischen Provinzstadt ähnelnden Ort im Hochland Vietnams, mit Freunden aus Deutschland und Vietnam zu treffen. Wir wollen dort gemeinsam Krickebergs 80. Geburtstag feiern. Auch in hohem Alter ist Krickeberg noch kräftig, rüstig, und fähig zu Neuem. Er möchte, so hat er angekündigt, im Hochland wieder Berge ersteigen. Das Stadtleben und und das an den Touristenorten findet er immer langweilig. Er sehnt sich nach der Einsamkeit der Wälder und der Stille abgelegener Meeresbuchten. Dort findet er die beste Erholung und geistige Inspiration. Ein deutscher Wissenschaftler (Helmholtz) soll einmal in einem Trinkspruch gesagt haben, dass Spaziergehen die heilige Pflicht der Wissenschaftler sei.

Krickeberg hat diese Pflicht im hohen Alter mit Liebe erfüllt und schöpft daraus seine ganze Kraft.

Wenn der von A. Einstein formulierte ethische Anspruch, demzufolge *nur ein für andere gelebtes Leben lebenswert (ist)'*, zutreffend ist, so hat Klaus Krickeberg diesem Anspruch in hohem Maße Genüge getan. Seine Solidarität mit Vietnam ging über die Kriegszeit hinaus und blieb dem Land und seinem Volk in der schwierigen Aufbauphase nach dem Krieg wie kaum ein anderer treu.

Ich bin Krickeberg, meinem verehrten Lehrer und Förderer, im doppelten Sinne und aus tiefstem Herzen dankbar: Für seine großzügige Hilfe für mich und für seine Unterstützung während meiner Zeit in Heidelberg und Bielefeld, aber auch für sein Werk, mit dem er das Volk von Vietnam unterstützt hatte und immer noch unterstützt, ein Volk, das in seiner langwierigen erkämpften Freiheit immer noch leidet und sich auf der Suche nach dem wahren Glück noch weiter anstrengt.

Поступила 25 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 45-60

ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *rhambart@aua.am*

Аннотация. Некоторые результаты комбинаторной интегральной геометрии относятся к геометрической томографии. Настоящая статья рассматривает томографию случайных выпуклых многоугольников *параллельными X-пучками.* Введение кратко представляет ранее полученные результаты автора, относящиеся к восстановлению (неслучайных) выпуклых областей с помощью *точечных X-пучков.* Основным инстументом исследования *параллельных X-пучков* является *дезинтегрированное тождество Плейеля*, точнее, его усредненная версия (содержится их подробный вывод). В статье определяется класс случайных многоугольников, так называемых *томографических моделей*, дающий существенные преимущества для анализа. Определение томографической модели дается в терминах стохастической независимости, причем, случайные инвариантные относительно сдвига *процессы прямых Пуассона* в $\mathbb{R}^2$ доставляют широкий класс примеров. Напомним, что каждый такой процесс прямых определяется своей *розой направлений* $\rho(\phi)$. Для общих $\rho(\phi)$, *типичный многоугольник* в разбиении плоскости прямыми Пуассоновского процесса оказывается томографической моделью. Для общих томографических моделей выведено дифференциальное уравнение, его можно использовать для исследования *преобразования Лапласа* и решения ряда интересных вычислительных задач.

Посвящено 80-летию Клауса Криккеберга

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из вопросов, занимавших автора во время работы над книгой [1], состоял в применении Комбинаторной интегральной геометрии в задачах Математической стереологии. С тех пор возникла дуальная тематика – Геометрическая томография, не менее привлекательная для Комбинаторной интегральной геометрии. И действительно, Комбинаторная интегральная геометрия уже имеет результаты, которые можно интерпретировать как принадлежащие к области томографии. Основная цель настоящей работы – томография случайных выпуклых многоугольников *параллельными X-пучками.*

Однако, прежде дадим обзор некоторых результатов автора, которые относятся к восстановлению (неслучайных) ограниченных выпуклых областей с помощью *точечного X-пучка*: впервые они опубликованы в [3].

Точечный X-пучок есть функция $\chi(\phi)$, определенная на $[P]$, где

$[P]$ = пучок прямых, проходящих через точку P на плоскости. Определим

$g(\phi)$ = прямая из пучка $[P]$, имеющая плоское направление ϕ,

$\chi(\phi)$ = длина хорды $g(\phi) \cap \mathbf{D}$, где

$\mathbf{D}$ = ограниченная выпуклая плоская область.

В работе [3] точка P выбирается на границе $\partial\mathbf{D}$ области $\mathbf{D}$. Поэтому прямая $g \in [P]$ определяется с помощью угла $\psi \in (0, \pi)$ между g и направлением, касательным к $\partial\mathbf{D}$ в точке P (существование касательной в P является существенным предположением) и $\chi = \chi(\psi)$ оказывается длиной хорды, исходящей из P под углом ψ. Интеграл

$$T(P) = \frac{1}{2}\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \chi \sin\psi \, d\psi, \tag{1.1}$$

принадлежит к точечной томографии:

$T(P)$ = интеграл X-пучка из точки $P \in \partial\mathbf{D}$, с весом $\sin\psi$.

Как показано в работе [3]

$$T(P) \le \frac{H}{4}, \tag{1.2}$$

где H есть длина периметра $\mathbf{D}$. Следующее предложение [3] относится к $\mathbf{D}$ с гладкими границами:

если в (1.2) *равенство справедливо хотя бы для одной точки $P \in \partial\mathbf{D}$, то $\mathbf{D}$ необходимо является круговым диском.*

Согласно неравенству Шварца имеем

$$4T^2(P) = \left[\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi\right]^2 \le \frac{\pi}{2}\int_{[P]} \chi^2 \; d\psi$$

Ясно, что $\frac{1}{2}\chi^2 \, d\psi$ есть элемент площади в $\mathbf{D}$, так, что из

$$T_1(P) = \int_{[P]} \chi^2 \, d\psi = 2\,||\mathbf{D}||, \quad \text{дважды площадь } \mathbf{D}, \tag{1.3}$$

следует

$$4T^2(P) \le \pi\,||\mathbf{D}||,$$

или, эквивалентно,

$$4T^2(P) \le \frac{\pi}{2} T_1(P). \tag{1.4}$$

Как показано в [3], в формуле (1.4) равенство справедливо тогда и только тогда, когда имеет место $\chi = C \sin\psi$ т.е. когда $\mathbf{D}$ является диском диаметра C.

Очевидно, что $T_1(P)$ также принадлежит точечной томографии (интеграл квадрата X-пучка). Из формулы (1.4) следует возможность проверки гипотезы о том, что $\mathbf{D}$ является круговым диском, если известны две томографические величины $T(P)$ и $T_1(P)$.

Укажем на связь $T(P)$ с классическим изопериметрическим неравенством. Используя координату длины l вдоль $\partial\mathbf{D}$, запишем $T(P) = T(l)$ и рассмотрим интеграл $T(l)$ относительно меры длины dl на $\partial\mathbf{D}$. Из вида якобиана

$$dg = \sin\psi \, dl \, d\psi,$$

где dg – мера, инвариантная относительно евклидовых движений в пространстве прямых на плоскости, следует, что

$$\int_{\partial\mathbf{D}} T(l) \, dl = \int |\chi| \, dg = \pi \, \|\mathbf{D}\|.$$

Интегрирование (1.2) по $\partial\mathbf{D}$ дает классическое неравенство

$$\pi \, \|\mathbf{D}\| \le \frac{H^2}{4}.$$

Поэтому (1.2) в [3] называется *дезинтегрированным изопериметрическим неравенством.*

Вернемся к теме *параллелельных X-пучков.*

Параллелельный X-пучок в направлении α есть функция $X_\alpha(t)$, определенная на $\mathbf{G}_\alpha$ = семействе прямых, имеющих направление α, следующим образом:

$X = X_\alpha(t) = |tg_0 \cap \mathbf{D}|$, где $|...|$ есть длина,

g_0 = прямая в $\mathbf{G}_\alpha$, проходящая через начало координат,

t = параллельный перенос, перпендикулярный направлению α,

$\mathbf{D}$ = выпуклый ограниченный многоугольник.

Далее $\mathbf{D}$ будет обозначать *случайный ограниченный выпуклый многоугольник*, таким образом, $X_\alpha(t)$ будет случайной функцией. Основной интерес будут представлять математические ожидания интегралов *томографических величин*

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} f(X(t))\,dt,$$

где

dt = мера Лебега в пространстве $\mathbf{G}_\alpha$,

$f(x)$ = функция, определенная на $[0,\infty)$.

Например, если

$$f_0(x) = 1 \text{ если } x > 0, \text{ и } f(0) = 0,$$

то

$$b_\phi = \int_{\mathbf{G}_\phi} f_0(X(t))\,dt$$

равняется ширине параллельного пучка прямых в направлении, перпендикулярном к ϕ, для которых $X > 0$.

Основным инструментом в исследовании *параллельных X-лучей* является *дезинтегрированное тождество Плейеля*, или его усредненная версия. Интересно отметить, что равенство (1.2) есть предельная форма этого тождества.

В параграфе 3 выделяется класс случайных многоугольников, называемых *томографическими моделями*. Определение томографической модели дается в терминах стохастической независимости. Насколько богат класс томографических моделей?

Примеры доставляют случайные инвариантные относительно сдвигов *процессы прямых Пуассона* в $\mathbb{R}^2$. Напомним, что каждый такой процесс прямых определяется своей *розой направлений* $\rho(\phi)$. Для общих $\rho(\phi)$, *типичный многоугольник* в разбиении плоскости на многоугольники, порожденном соответствующими прямыми процесса Пуассона оказывается томографической моделью. Для общих томографических моделей выведено дифференциальное уравнение, откуда возникает несколько интересных вычислительных задач.

2. ДЕЗИНТЕГРИРОВАННОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Пусть $\mathbf{D}$ есть *строго выпуклая* ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbf{D}$. Обозначим

$[\mathbf{D}]$ = пространство ориентированных линейных хорд области $\mathbf{D}$,

ν = элемент $[\mathbf{D}]$, мы говорим о *начале* и *конце* хорды ν,

$\nu_1, ..., \nu_n,\ n > 1$ = последовательность элементов $[\mathbf{D}]$,

$\mathbf{G}$ = пространство прямых на плоскости, $g \in \mathbf{G}$ не имеет ориентации,

$[\nu_i]$ = множество прямых, которые пересекают хорду ν_i, $[\nu_i] \subset [\mathbf{D}]$,

$I_m(\nu) = 1$, если ν пересекаются m хордами из совокупности $\nu_1, ..., \nu_n$, в противном случае $I_m(\nu) = 0$.

Положим

$$A = \bigcap_1^n [\nu_i] \subset \mathbf{G}.$$

Выберем некоторую прямую g_0, пересекающую $\mathbf{D}$, $g_0 \in \mathbf{G}$, и в пространстве $\mathbf{G}$ рассмотрим дельта–меру δ_0, концентрированную на g_0. Так как никакие три конца хорд $\nu_1, ..., \nu_n$ не лежат на прямой, применение известной формулы четырех индикаторов [1] дает

$$2\delta_0(A) = 2\sum_{i=1}^n I_{n-1}(\nu_i)\,\delta_0([\nu_i]) + \sum I_{n-2}(d_i)\delta_0([d_i]) - \sum I_{n-2}(s_i)\delta_0([s_i]), \tag{2.1}$$

где d_i или s_i всегда есть сегмент, соединяющий пару концов двух различных хорд, скажем ν_1^* и ν_2^* из совокупности $\nu_1, ..., \nu_n$,

d_i = две хорды ν_1^* и ν_2^* лежат в различных полуплоскостях относительно продолжения сегмента d_i,

s_i = две хорды ν_1^* и ν_2^* лежат в одной и той же полуплоскости относительно продолжения сегмента s_i.

В пространстве $[\mathbf{D}]^n$ последовательностей $\nu_1, ..., \nu_n$, рассмотрим произведение мер

$$d\nu_1 ... d\nu_n,$$

где каждая мера $d\nu_i$ есть сужение на $[\mathbf{D}]$ меры

dg = мера на $\mathbf{G}$, инвариантная относительно евлидовых движений.

Проинтегрируем (2.1) относительно произведения мер. Имеем

$$2\int ... \int \delta_0(A)\, d\nu_1 ... d\nu_n = 2\prod_1^n \int I_{[\chi_0]}(\nu_i)\, d\nu_i = 2\,(4\chi_0)^n, \tag{2.2}$$

где

$$\chi_0 = |g_0 \cap \mathbf{D}|.$$

Используя принцип симметрии, найдем

$$2\int\ldots\int\sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\nu_i)\,\delta_0([\nu_i])\,d\nu_1\ldots d\nu_n$$

$$=\;2n\int_{[\chi_0]} d\nu_1\int\ldots\int I_{n-1}(\nu_1)\,d\nu_2\ldots d\nu_n$$

$$=4n\int_{[\chi_0]}(4\chi)^{n-1}\,dg, \tag{2.3}$$

здесь и ниже $[\chi_0]\subset\mathbf{G}$. Как и в аналогичном вычислении в работе [1] находим

$$\int\Big[\sum I_{n-2}(d_i)\delta_0([d_i])\;-\;\sum I_{n-2}(s_i)\delta_0([s_i])\Big]\;d\nu_1\ldots d\nu_n$$

$$=\;-8n(n-1)\left[\int_{L_1}\int_{L_2}+\int_{L_2}\int_{L_1}\right](4\chi_{12})^{n-2}\,\cos\beta_1\,\cos\beta_2\,dl_1\,dl_2$$

$$=\;-4n(n-1)\int_{[\chi_0]}(4\chi)^{n-1}\,\cot\beta_1\,\cot\beta_2\,dg. \tag{2.4}$$

Во второй строке,

χ_{12} = прямолинейная хорда между l_1 и l_2,

L_1, L_2 = части $\partial\mathbf{D}$, разделенные концами хорды χ_0,

β_1,β_2 = уголы между χ и $\partial\mathbf{D}$ на концах χ,

dl_i = мера длины на $\partial\mathbf{D}$, $i=1,\,2$,

тогда как χ есть функция от $g\in\mathbf{G}$, т.е. $\chi\;=\;|g\cap\mathbf{D}|$ и мы используем Якобиан

$$dg\;=\;\frac{\sin\beta_1\,\sin\beta_2}{\chi}dl_1\,dl_2. \tag{2.5}$$

Сопоставив (2.2), (2.3) и (2.4), после сокращения на 4^n получим *дезинтегрированное тождество Плейеля*

$$\chi_0^n=\frac{n}{2}\int_{[\chi_0]}\chi^{n-1}\,dg\;-\;\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\int_{[\chi_0]}\chi^{n-1}\,\cot\beta_1\,\cot\beta_2\,dg. \tag{2.6}$$

Из него в работе [3] было получено неравенство (1.2). Ниже (2.6) служит для исследования параллельных X-пучков.

Простое интегрирование формулы (2.6) по мере dg_0 по всем $g_0\in[\mathbf{D}]$ приводит к *тождеству Плейеля* более непосредственно, (см. [1]). Уравнение (2.6) получает дополнительные члены в случае, когда $\mathbf{D}$ является выпуклым многоугольником.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{G}_\alpha$ И СЛУЧАЕ МНОГОУГОЛЬНИКА

Для параллельных X-пучков используем те же обозначения, что и во Введении, предполагаем, что $\alpha =$ направление прямой g_0 остается фиксированным.

Запишем версию уравнения (2.6) для хорды $\chi_0 = X(t)$, (соотв. сдвигу t):

$$X^n = \frac{n}{2} \int_{[X]} \chi^{n-1}\, dg - \frac{1}{2}\, n\,(n-1) \int_{[X]} \chi^{n-1} \cot\beta_1 \cot\beta_2\, dg, \tag{3.1}$$

и проинтегрируем это тождество вдоль $\mathbf{G}_\alpha$ по мере dt. Для фиксированного g, интегрирование индикаторной функции $I_{[X]}(g)$ дает

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} I_{[X]}(g)\, dt = \chi \sin\widehat{\alpha\phi}, \quad \chi = |g \cap \mathbf{D}|,$$

где ϕ – направление g, $\widehat{\alpha\phi}$ – угол между двумя направлениями. Отсюда, изменением порядка интегрирования получаем, что для любой функции $f(g)$, определенной на $\mathbf{G}$,

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} dt \int_{[X]} f(g)\, dg = \int_{\mathbf{G}} f(g)\, dg \int_{\mathbf{G}_\alpha} I_{[X]}(g)\, dt = \int_{\mathbf{G}} f(g)\, \chi \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg.$$

Поэтому, интегрирование (2.6) дает

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} X^n\, dt = \frac{n}{2} \int_{\mathbf{G}} \chi^n \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg - \frac{n(n-1)}{2} \int_{\mathbf{G}} \chi^n \cot\beta_1 \cot\beta_2 \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg. \tag{3.2}$$

Пусть теперь $\mathbf{D}$ есть многоугольник со сторонами $\mathbf{a}_k$. Обозначим

$\phi_k =$ направление стороны $\mathbf{a}_k$.

Уравнение (3.2) для многоугольника $\mathbf{D}$ места не имеет: причина в том, что выражение (2.5) не может быть использовано для l_1, l_2, принадлежащих отдельной стороне $\mathbf{a}_k$. Используя аппроксимацию многоугольника $\mathbf{D}$ областями, для которых применимо уравнение (3.2), для многоугольника $\mathbf{D}$, получаем

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} X^n\, dt = \frac{n}{2} \int_{\mathbf{G}} \chi^n \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg - \frac{n(n-1)}{2} \int_{\mathbf{G}} \chi^n \cot\beta_1 \cot\beta_2 \sin\widehat{\alpha\phi}\, dg$$
$$- \frac{n(n-1)}{4} \sum_{\mathbf{a}_k} \sin\widehat{\alpha\phi_k} \int\!\!\int_{\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_k} |l_1, l_2|^{n-1}\, dl_1\, dl_2.$$

Используя переменные $|l_1, l_2| = \tau$ и $l = l_1$, легко находим

$$\int_0^x \int_0^x |l_1, l_2|^{n-1}\, dl_1\, dl_2 = 2 \int_0^x |\tau|^{n-1} (x - \tau)\, d\tau$$
$$= 2\, \frac{x^{n+1}}{n} - 2\, \frac{x^{n+1}}{n+1} = 2\, \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Таким образом, (3.2) для многоугольника **D** имеет вид

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} X^n\,dt = \frac{n}{2}\int_{\mathbf{G}} \chi^n \sin\widehat{\alpha\phi}\,dg - \frac{n(n-1)}{2}\int_{\mathbf{G}} \chi^n \cot\beta_1 \cot\beta_2 \sin\widehat{\alpha\phi}\,dg$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n+1}\sum_{\mathbf{a}_k}\sin\widehat{\alpha\phi_k}\;|\mathbf{a}_k|^{n+1}. \tag{3.3}$$

Используя линейность выражения (3.3), находим

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} f(X)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{G}} f'(\chi)\,\chi\,\sin\widehat{\alpha\phi}\,dg - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{G}} f''(\chi)\chi^2 \cot\beta_1 \cot\beta_2 \sin\widehat{\alpha\phi}\,dg$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{a}_k}\sin\widehat{\alpha\phi_k}\;F(|\mathbf{a}_k|) \tag{3.4}$$

сначала, для полиномиальных функций $f(x) = a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, а затем для степенных рядов вида

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\,x^n,$$

предполагая, что ряды сходятся. В формуле (3.4) $f'(x)$ и $f''(x)$ являются обычными производными и

$$F(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\,a_n\,x^{n+1} = xf(x) - 2\int_0^x f(u)\,du.$$

4. ОБРАЩЕНИЕ SIN-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Используя стандартные полярные координаты для прямых, то есть

$\phi =$ направление g, $g \in \mathbf{G}$, $\phi \in (0,\pi)$, и

$p =$ расстояние со знаком прямой g от начала координат,

мера dg, инвариантная относительно евклидовых движений в пространстве **G** запишется в виде

$$dg = d\phi\,dp.$$

Отсюда тождество (3.4) можно представить так:

$$\int_{\mathbf{G}_\alpha} f(X)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin\widehat{\alpha\phi}\;d\phi\int_{\mathbf{G}_\phi} f'(\chi)\,\chi\,dp$$

$$-\frac{1}{2}\int \sin\widehat{\alpha\phi}\,d\phi\int_{\mathbf{G}_\phi} f''(\chi)\,\chi^2 \cot\beta_1 \cot\beta_2\,dp$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{a}_k}\sin\widehat{\alpha\phi_k}\;F(|\mathbf{a}_k|). \tag{4.1}$$

Очевидно, что соотношение (4.1) имеет специальный вид

$$F(\alpha) = \int_0^\pi f(\phi)\, \sin\widehat{\alpha\phi}\, d\phi, \tag{4.2}$$

где обе функции $F(\alpha)$ и $f(\phi)$ определены на $(0, \pi)$. Хорошо известно (см., например, [4]), что выражение (4.2) можно обратить:

$$f(\phi) = \mathcal{A}\{F(\alpha)\},$$

где оператор $\mathcal{A}$ определяется формулой

$$\mathcal{A}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2}\left[F(\phi) + \frac{d^2}{d\phi^2}F(\phi)\right].$$

Имеем представление

$$\sum_{\mathbf{a}_k} \sin\widehat{\alpha\phi_k}\; F(|\mathbf{a}_k|) = \sum_{\mathbf{a}_k} \int \sin\widehat{\alpha\phi_k}\; F(|\mathbf{a}_k|)\, \delta_{\phi_k}(\phi),$$

показывающее, что применение оператора $\mathcal{A}$ к (4.1) приводит к δ -функциям

$\delta_{\phi_k}(\phi) = \delta$ -функция, концентрированная на направлении ϕ_k стороны $\mathbf{a}_k$.

Поэтому, чтобы обойти осложнения в процессе усреднения обращения формулы (4.1), в следующем параграфе, сначала усредним тождество (4.1), а затем применим оператор $\mathcal{A}$ к результату.

5. УСРЕДНЕНИЕ ТОЖДЕСТВА (4.1) ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЙНОГО D

Пусть $\mathbf{P}$ – распределение вероятностей для некоторого случайного многоугольника $\mathbf{D}$. Другими словами, $\mathbf{P}$ есть вероятность в пространстве $\mathcal{D}$,

$\mathcal{D}$ = пространство ограниченных выпуклых многоугольников на плоскости, $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$. Для заданного направления $\alpha \in (0, \pi)$ обозначим

b_α = ширина многоугольника $\mathbf{D}$ в направлении, перпендикулярном к α,

и предположим, что

$$B_\alpha = \int_{\mathcal{D}} b_\alpha\, d\mathbf{P} < \infty.$$

Величина B_α есть средная ширина многоугольника $\mathbf{D}$ в направлении, перпендикулярном к α. Согласно сказанному во Введении, B_α принадлежит параллельной томографии.

На произведении

$$\mathcal{D} \times \mathbf{G}_\alpha$$

рассмотрим вероятность

$$\frac{1}{B_\alpha}\, I_{[\mathbf{D}]}(X)\, d\mathbf{P}\, dt \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_\alpha \text{ - соответствующее ожидание.}$$

Имеем

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P} \int_{\mathbb{G}_\alpha} f(T)\, dt \;=\; B_\alpha\, \mathbf{E}_\alpha\, f(X).$$

Таким же образом

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P} \int \sin\widehat{\alpha\phi}\, d\phi \int_{\mathbb{G}_\phi} f'(\chi)\chi\ dp = \int \sin\widehat{\alpha\phi}\ B_\phi\ \mathbf{E}_\phi f'(X)X\ d\phi,$$

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P} \int \sin\widehat{\alpha\phi}\ d\phi \int_{\mathbb{G}_\phi} f''(\chi)\, \chi^2 \cot\beta_1\, \cot\beta_2\, dp$$

$$= \int \sin\widehat{\alpha\phi}\ B_\phi\, \mathbf{E}_\phi\, \left[f''(X)\, X^2\, \cot\psi_1\, \cot\psi_2\right]\ d\phi$$

Усредненная версия тождества (4.1) запишется в виде:

$$B_\alpha\, \mathbf{E}_\alpha\, f(X) \;=\; \frac{1}{2}\int \sin\widehat{\alpha\phi}\ B_\phi\ \mathbf{E}_\phi f'(X)X\ d\phi$$

$$(5.1) \qquad -\frac{1}{2}\int \sin\widehat{\alpha\phi}\ B_\phi\ \mathbf{E}_\phi\ \left[f''(X)\, X^2\, \cot\psi_1\, \cot\psi_2\right]\ d\phi$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P}\ \sum_k \sin\widehat{\alpha\phi_k}\, F(|\mathbf{a}_k|).$$

Применяя оператор $\mathcal{A}$ к обеим сторонам формулы (5.1), получим

$$B_\phi\ \mathbf{E}_\phi\, f(X) \;+\; \frac{d^2}{d\phi^2}[\, B_\phi\ \mathbf{E}_\phi\, f(X)\,] \;=\; B_\phi\ \mathbf{E}_\phi f'(X)X$$

$$(5.2) \qquad -\, B_\phi\, \mathbf{E}_\phi\, \left[f''(X)\, X^2\, \cot\psi_1\, \cot\psi_2\right] \,-\, \frac{1}{2}\,\mathcal{A}\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P}\ \sum_k \sin\widehat{\alpha\phi_k}\, F(|\mathbf{a}_k|).$$

Определим случайный линейный сегмент **a**, который назовем *случайной стороной* **D**.

Рассмотрим случайную переменную H = длина периметра **D**, и предположим, что существует среднее значение:

$$H_0 \;=\; \int H\, d\mathbf{P} < \infty.$$

Сначала выберем реализацию случайного многоугольника, обладающего распределением

$$\frac{H}{H_0}\, d\mathbf{P},$$

а затем выберем одну из сторон a_i этой реализации с вероятностью

$$\frac{|a_i|}{H}.$$

Случайный сегмент, построенный этим двухступенчатым алгоритмом, есть искомое $\mathbf{a}$. Отображение

$$\mathbf{a} \longmapsto (|\mathbf{a}|, \phi)$$

где

$|\mathbf{a}|$ = длина $\mathbf{a}$,

ϕ = направление $\mathbf{a}$,

определяет совместное распределение вероятностей $(|\mathbf{a}|, \phi)$. Далее предполагаем, что оно обладает плотностью вероятности

$u(x, \phi)$ = совместная плотность вероятности для $|\mathbf{a}|$ и ϕ, $x \in (0, \infty)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Соответствующая условная плотность вероятности величины $|\mathbf{a}|$, при условии ϕ, дается формулой

$$V_\phi(x) \;=\; u(x, \phi)\, U^{-1}(\phi), \tag{5.3}$$

где функция

$$U(\phi) \;=\; \int_0^\infty u(x, \phi)\, dx \tag{5.4}$$

есть маргинальная плотность вероятности случайного направления ϕ; назовем $U(\phi)$ *плотностью по направлениям* для $\mathbf{D}$.

Рассмотрим также случайный сегмент $\mathbf{b}$, определенный следующим образом. Сначала выберем реализацию случайного многоугольника с распределением

$$\frac{N}{N_0}\, d\mathbf{P},$$

где N – число сторон $\mathbf{D}$, а N_0 – среднее значение N. Затем выберем одну из сторон a_i этой реализации с вероятностью $\frac{1}{N}$. Случайный сегмент, построенный этим двухступенчатым алгоритмом есть искомое $\mathbf{b}$. Через $W_\phi(x)$ обозначим плотность условного распределения длины $\mathbf{b}$, при ϕ = направление $\mathbf{b}$.

Лемма 1. *Пусть*

$$b_\phi = \int x\, W_\phi(x)\, dx \;<\; \infty,$$

тогда

$$V_\phi(x) = \frac{x W_\phi(x)}{b_\phi}.$$

Лемма 2. *Если для случайного многоугольника* $\mathbf{D}$ *существует плотность* $u(x,\phi)$, *то имеет место*

$$\mathcal{A}\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P}\,\sum_k \sin\widehat{\alpha\phi_k}\,F(|\mathbf{a}_k|) \;=\; \frac{H_0}{b_\phi}\,U(\phi)\int_0^\infty F(x)\,W_\phi(x)\,dx. \tag{5.5}$$

Доказательство. По определению случайной стороны $\mathbf{a}$ и плотности вроятности $u(x,\phi)$ имеем

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P}\,\sum_k \sin\widehat{\alpha\phi_k}\,F(|\mathbf{a}_k|)\\
&= H_0\int_{\mathcal{D}}\sum_k \frac{\sin\widehat{\alpha\phi_k}\,F(|\mathbf{a}_k|)}{|\mathbf{a}_k|}\,\frac{|\mathbf{a}_k|}{H}\,\frac{H}{H_0}\,d\mathbf{P}\\
&= H_0\int_0^\pi \sin\widehat{\alpha\phi}\;d\phi\int_0^\infty F(x)\,x^{-1}u(x,\phi)\,dx\\
&= H_0\int_0^\pi \sin\widehat{\alpha\phi}\;d\phi\;U(\phi)\int_0^\infty F(x)\,x^{-1}\,V_\phi(x)\,dx\\
&= H_0\int_0^\pi \sin\widehat{\alpha\phi}\,\frac{U(\phi)}{b(\phi)}\,d\phi\int_0^\infty F(x)\,W_\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Остается применить $\mathcal{A}$.

6. ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В пространстве $\mathcal{D}\times\mathbf{G}_\alpha$ рассмотрим отображение

$$(\mathbf{D},t)\longmapsto(X,\psi_1,\psi_2) \tag{6.1}$$

где

X = длина хорды $\mathbf{D}\cap tg_\alpha$,

ψ_1,ψ_2 = два угла, возникающие при пересечении tg_α со сторонами $\mathbf{D}$.

С точки зрения стохастической геометрии, наиболее привлекательными являются случайные многоугольники $\mathbf{P}$, для которых имеет место *независимость* случайных переменных X,ψ_1,ψ_2, определенных отображением (6.1), причем для каждого направления α.

Определение. Случайный многоугольник $\mathbf{D}$ называвается *томографической моделью*, если его $\mathbf{P}$ удовлетворяет двум условиям:

I. для любого α случайные переменные X,ψ_1,ψ_2 независимы и

II. для любого α и любой функции F имеем

$$\mathbf{E}_\alpha F(X) \;=\; \int_0^\infty F(x)\,W_\alpha(x)\,dx. \tag{6.2}$$

Грубо говоря, (6.2) утверждает, что X и $|\mathbf{b}|$ совпадают в смысле условных распределений, при каждом условии α.

Существует ли томографические модели? Утвердительный ответ дается следующей теоремой. Рассмотрим

$\rho = \rho(\phi) \geq 0 =$ кусочно-непрерывную плотность на $(0, \pi)$, $\int_0^\pi \rho(\phi)\, d\phi < \infty$

$\{g_i\}_\rho =$ случайный процесс прямых Пуассона в $\mathbb{R}^2$ управляемый мерой

$\rho(\phi)\, dg =$ мера на $\mathbf{G}$ с плотностью $\rho(\phi)$, где $\phi =$ направление g,

$\mathbf{P}_\rho =$ "типичный многоугольник"в разбиении плоскости $\{g_i\}_\rho$.

В следующей теореме через $\mathbf{r}_\psi$ обозначим поворот на угол ψ, так что $\mathbf{r}_\psi \alpha$ есть образ направления α при этом повороте. Условие непрерывности функции ρ, возможно, можно ослабить.

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции ρ случайный многоугольник $\mathbf{P}_\rho$ является томографической моделью. Случайная хорда X направления α имеет экспоненциальное распределение с параметром*

$$\lambda(\alpha) \;=\; \int \sin\psi\, \rho(\mathbf{r}_\psi \alpha)\, d\psi,$$

независимые углы ψ_1, ψ_2 обладают общей плотностью распределения

$$\frac{1}{\rho(\alpha)}\, \sin\psi\, \rho(\mathbf{r}_\psi \alpha)\, d\psi.$$

Мера направления для $\mathbf{P}_\rho$ совпадает с ρ, т.е

$$U(\phi) \;=\; \rho(\phi).$$

Условное (при условии ϕ) распределение длины стороны $\mathbf{b}$ имеет плотность

$$W_\phi(x) \;=\; \lambda(\phi)\, \exp[-\lambda(\phi)x]$$

Схема доказательства. Для многоугольника $\mathbf{P}_\rho$ независимость случайных переменных X, ψ_1, ψ_2 можно получить, используя теорию распределений Пальма, как в работе [3]. Рассмотрим процесс прямых Пуассона $\{g_i\}_\rho$. На *тестовой прямой* направления ϕ наблюдаются случайные переменные $Y =$ длина типичного интервала между двумя соседними пересечениями (скажем, с прямыми g_1, g_2) процесса, а η_1, $\eta_2 =$ соответствующие углы пересечений.

По теории распределений Пальма тройка Y, η_1, η_2 на самом деле имеет то же распределение вероятностей, что и тройка X, ψ_1, ψ_2 в упомянутой теореме. Остается показать, что совместное распределение вероятностей Y, η_1, η_2 и X, ψ_1, ψ_2 фактически совпадают. Что касается свойства II, оно также следует из теории распределений Пальма процесса прямых Пуассона и соответствует тому факту, что последнее утверждение справедливо даже если *тестовая прямая* совпадет, в смысле распределения Пальма, с одной из прямых из $\{g_i\}_\rho$.

7. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В силу леммы 2 и свойства II в определении томографических моделей получаем следующее выражение для последнего члена в уравнении (5.2):

$$\mathcal{A} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{P} \sum_k \sin \widehat{\alpha\phi_k}\, F(|\mathbf{a}_k|) \;=\; \frac{H_0}{\mathbf{E}_\phi X}\, U(\phi)\, \mathbf{E}_\phi F(X).$$

Плотность $U(\phi)$ входит также в тождество

$$C(\alpha) \;\equiv\; \mathbf{E}_\alpha \cot \psi_1 \;=\; -\,\mathbf{E}_\alpha \cot \psi_2 \;=\; \frac{1}{\tau(\alpha)} \int \cos \psi\, U(\mathbf{r}_\psi \alpha)\, d\psi\,, \tag{7.1}$$

с

$$\tau(\alpha) \;=\; \int \sin \psi\, U(\mathbf{r}_\psi \alpha)\, d\psi,$$

справедливое для произвольного случайного многоугольника, когда существуют H_0 и т.д. Для любой томографической модели тождество (5.2) записывается в виде

$$B_\phi\, \mathbf{E}_\phi\, f(X) \;+\; \frac{d^2}{d\phi^2}[\, B_\phi\; \mathbf{E}_\phi\, f(X)\,] \;=\; B_\phi\; \mathbf{E}_\phi f'(X)X +$$

$$+\, B_\phi\, C^2(\phi)\, \mathbf{E}_\phi\, f''(X)\, X^2 \;-\; \frac{H_0}{2\,\mathbf{E}_\phi X}\, U(\phi)\, \mathbf{E}_\phi F(X). \tag{7.2}$$

Естественная задача в теории томографических моделей: может ли функция $U(\phi)$ быть восстановлена на основе томографических величин H_0, B_ϕ и $\mathbf{E}_\phi\, f(X)$? Фактически уравнение (7.2) для функций $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^3$ дает два линейных алгебраических уравнения для неизвестных функций $C^2(\phi)$ и $U(\phi)$. Этого может быть достаточно, чтобы выразить их в терминах упомянутых томографических величин.

Уравнение (7.2) может также применяться в теории многоугольников $\mathbf{P}_\rho$, порожденных процессом прямых Пуассона $\{g_i\}_\rho$. Линейные алгебраические уравнения могут оказаться применимыми для вычисления B_ϕ = средней ширины типичного многоугольника в $\{g_i\}_\rho$. Записывая уравнение (7.2) для $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ и $f(x) = x^4$ получаем три уравнения для неизвестных

$$H_0^{-1} B_\phi, \quad H_0^{-1} \frac{d}{d\phi} B_\phi \quad \text{и} \quad H_0^{-1} \frac{d^2}{d\phi^2} B_\phi.$$

Коэффициенты в этих уравнениях полностью определяются с помощью $\rho(\phi)$ (теорема 1), так что возможна численная проверка. Соотношение между B_ϕ и $\rho(\phi)$ можно также найти и другим способом, который мы рассмотрим в другой статье.

Закончим замечанием, что в (7.2) $f(x)$ можно выбрать следующим образом

$$f(x) = e^{-\tau x} - 1 + \tau x = \sum_{n=2,3,4,\ldots} \frac{(-\tau x)^n}{n!},$$

что сводит (7.2) к дифференциальному уравнению для преобразования Лапласа

$$L_\phi(\tau) = \mathbf{E}_\phi \exp(-\tau X).$$

Возможно это может помочь в исследовании вопроса о существовании томографических моделей вне класса $\mathbf{P}_\phi$.

Abstract. Combinatorial integral geometry possesses some results that can be interpreted as belonging to the field of Geometric Tomography. The main purpose of the present paper is to present a case of *parallel X-ray* approach to tomography of random convex polygons. However, the Introduction reviews briefly some earlier results by the author that refer to reconstruction of (non-random) convex domains by means of a *point X-ray*. The main tool in treating the *parallel X-rays* is *disintegrated Pleijel identity*, or rather, its averaged version, whose derivation is represented in complete detail. The paper singles out a class of random polygons called *tomography models*, that offer essential advantages for the analysis. The definition of a tomography model is given in terms of stochastic independence. Fortunately, random translation-invariant *Poisson processes of lines* in $\mathbb{R}^2$ suggest a class of examples. We recall that each such line process is determined by its *rose of directions* $\rho(\phi)$. For rather general $\rho(\phi)$, the *number weighted typical polygon* in the polygonal partition of the plane generated by the corresponding Poisson line process happens to be a tomography model. For general tomography models, a differential equation is derived for the

Laplace transform for parallel X- rays, that rises several interesting computational problems.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).

[2] R. J. Gardner, *Geometric Tomography* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

[3] Р. В. Амбарцумян, "Вычисления хорды и стохастическая геометрия," Изв. НАН Армении, математика **42** (1), 3-27 (2007).

[4] R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[5] Р. В. Амбарцумян, "Аналитические приложения комбинаторной интегральной геометрии: обзор," Изв. НАН Армении, математика **34** (6), 2-46 (1999).

Поступила 25 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 61-72

DER PAPANGELOU PROZESS

HANS ZESSIN

Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany
E-mail: *zessin@math.uni-bielefeld.de*

Аннотация. Das Ziel dieser Note ist die Konstruktion von Punktprozessen in einem abstrakten Raum, die spezifiziert sind durch eine gewisse Klasse von Kernen, die für diese Prozesse Papangelou Kerne , d.h. bedingte Intensitäten sind. Wir bezeichnen sie aus diesem Grunde als Papangelousche Prozesse. Diese Klasse von Prozessen enthält viele Gibbssche Prozesse der klassischen statistischen Mechanik sowie neben dem Poissonschen Prozeß die neue Klasse der hier so genannten Polyaschen Summenprozesse. Diese haben eine ebenso fundamentale Bedeutung wie Poissonsche Prozesse.

Meinem verehrten Lehrer Klaus Krickeberg zum achtzigsten Geburtstag gewidmet

1. DER ALLGEREINE RAHREN

X bezeichnet im Folgenden einen Polnischen Raum, $\mathcal{B}(X)$ bzw. $\mathcal{B}_0(X)$ seine Borelschen bzw. beschränkten Borelschen Teilmengen. $\mathcal{M}(X)$ ist der vag polnische Raum aller lokalendlichen Maße auf X (i.e. der Radonmaße auf X). Mit $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ bezeichnen wir den Teilraum Y aller Radonschen Punktmaße, und schließlich mit $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_B(X), B \in \mathcal{B}_0(X)$, die Menge aller Punktmaße, deren Tr"ager in der Borelschen Menge B liegen. Y_f sei der Raum $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_f(X)$ aller endlichen Punktmaße. Alle diese Maßräume seien versehen mit der natürlichen, von der vagen Topologie induzierten Borelschen σ-Algebra, die wir mit $\mathcal{F}^{\cdot\cdot}, \mathcal{F}^{\cdot\cdot}_f$ oder $\mathcal{F}^{\cdot\cdot}_B$ bezeichnen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}^{\cdot\cdot}_\infty$ die 'tail'-σ-Algebra $\cap_{B\in\mathcal{B}_0}\mathcal{F}^{\cdot\cdot}_{B^c}$.

Ausgangspunkt ist für uns ein Kern $\pi(\eta, dx)$ von Y nach X, d.h. eine meßbare Abbildung $\eta \longmapsto \pi(\eta, .)$ von Y in die Menge $\mathcal{M}(X)$. Wir geben zunächst einige *Beispiele* solcher Kerne, auf die wir in der Folge zurückkommen werden.

Bezeichne dazu ρ ein Radon Maß auf X, das nicht das Nullmaß ist. Offenbar ist $\alpha(\eta, .) = \rho, \eta \in Y$, ein Beispiel. Ebenso sind $\beta(\eta, dx) = z \cdot (\rho + \eta)(dx), z > 0$, solche. Wir nennen β einen *Polyaschen Summenkern.*

Eine weiteres Beispiel erhält man so: Sei $X = E \times K$ das Produkt zweier Polnische Räume, $\rho(dq)$ sei ein Radonsches Maß auf E . Bezeichnet η_2 das Bild von η unter der Projektion auf K , so definiert $\gamma(\eta, d(q,p)) = \rho(dq) \otimes \eta_2(dp)$ einen Kern von dem Raum Y_2 nach X, wobei Y_2 die Menge aller $\eta \in Y$ mit $\eta_2 \in \mathcal{M}(K)$ bezeichnet. Wir denken uns diesen Kern trivial fortgesetzt auf ganz Y. Wir nennen ihn *Polyaschen Produktkern.* (Eine etwas allgemeinere Formulierung solcher Produktkerne wird weiter unten gegeben.)

Eine letzte bedeutende Beispielklasse ist die folgende: Ist E eine meßbare Funktion von $X \times Y$ in die erweiterte Zahlengerade $]-\infty, +\infty]$, so ist der Kern gegeben durch $\gamma(\eta, dx) = \exp(-E(x,\eta)) \cdot \rho(dx)$, falls E geeignete Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt. Dies ist der sogenannte *Boltzmannsche Kern.* Zu seiner (nicht trivialen) Konstruktion mit Hilfe eines superstabilen, nach unten regulären Paarpotentials verweisen wir auf Ruelle [16], Lemma 5.1 und Proposition 5.2 (a).

Für den gegebenen Kern π definieren wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $\eta \in Y$ die Maße

(1.1) $\pi^{(m)}(\eta; dx_1, ..., dx_m) = \pi(\eta, dx_1)\pi(\eta + \delta_{x_1}, dx_2)...\pi(\eta + \delta_{x_1} + ... + \delta_{x_{m-1}}, dx_m).$

Ebenso betrachten wir unten die folgenden, durch $\pi^{(m)}$ und damit durch π definierten Kerne: Sind $B \in \mathcal{B}_0(X)$ und $\eta \in Y$, so setzen wir

$$\pi_B(\eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{B^m} \varphi(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m})\, \pi^{(m)}(\eta_{B^c}; dx_1, \ldots, dx_m). \tag{1.2}$$

Hier ist $\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}$ das Nullmaß, falls $m = 0$, und die Integration bedeutet Multiplikation mit 1. π_B ist offenbar ein Kern von $(Y, \mathcal{F}_{\ddot{B}^c})$ nach $\mathcal{M}_{\ddot{B}}(X)$.

2. DER ENDLICHE PAPANGELOU PROZEss

Wir betrachten hier zunächst den Fall, daß π ein *endlicher* Kern ist, d.h. ein Kern von Y mit Werten in $\mathcal{M}_f(X)$, dem Raum der endlichen Radonmaße, ist. Sie treten weiter unten in der folgenden Form auf: Ist π ein Kern von Y nach X und sind B, C beschränkte Borelsche Mengen in X , so ist $\eta \mapsto 1_C \cdot \pi(\eta_{B^c}, .)$ ein endlicher Kern.

Wir beginnen nun, Bedingungen an π zu stellen. Die erste ist:

(2.1) $\pi^{(m)}(\eta, .), m \geq 1,$ ist ein endliches Maß auf X^m für alle $\eta \in Y$.

Wir bezeichnen mit $Z^{(m)}(\eta)$ die Gesamtmasse von $\pi^{(m)}(\eta, .)$ und setzen für jedes η $Z^{(0)}(\eta) = 1$. Wir nehmen weiterhin an, da"s für jedes η

(2.2) die Reihe $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^{(m)}(\eta)}{m!}$ gegen ein $0 < \Xi(\eta) < +\infty$ konvergiert .

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so sagen wir, daß π *integrierbar* ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist für jedes η der folgende endliche Punktprozeß wohldefiniert.

$$\mathcal{P}_\pi^\eta(\varphi) = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{X^m} \varphi(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \ldots, dx_m). \tag{2.3}$$

Hier bezeichnet φ eine nichtnegative, meßbare Funktion. (Und es gelten für $m = 0$ die oben gemachten Konventionen.) Man beachte, daß der Prozeß $\mathcal{P}_\pi^\eta$ auf der Menge $Y_f = \mathcal{M}_f^{\cdot}$ aller endlichen Konfigurationen in X konzentriert ist. Wir schreiben dann $\mathcal{P}_\pi^\eta \in \mathcal{P}Y_f$.

Das Konstruktionsprinzip von $\mathcal{P}_\pi^\eta$ ist das folgende: Für gegebenes η realisiert man eine Teilchenzahl m gemäß der Verteilung

$$\mathcal{P}_\pi^\eta\{\zeta_X = m\} = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \frac{Z^{(m)}(\eta)}{m!}, m \geq 0. \tag{2.4}$$

Und dann realisiert man $\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}$ gemäß des Bildes von

$$\frac{1}{Z^{(m)}(\eta)} \cdot \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \ldots, dx_m)$$

unter der Transformation $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}$.

Schließlich setzen wir noch voraus, daß π *symmetrisch* ist, d.h. daß

(2.5) die Maße $\pi^{(m)}(\eta), \eta \in Y, m \geq 1,$ symmetrisch sind.

Dies bedeutet, daß die folgende sogenannte *cozykel-Bedingung* erfüllt ist:

(2.6) $\pi(\eta, dx)\pi(\eta + \delta_x, dy)$ ist ein symmetrisches Maß auf X für alle $\eta \in Y$.

Wir haben damit alle Vorbereitungen für das folgende *Hauptlemma* getroffen .

Lemma 1. *Ist π ein endlicher Kern von Y nach X, der integrierbar und symmetrisch ist, so ist jedes $\mathcal{P}_\pi^\eta, \eta \in Y$, eine Lösung $P^\eta \in \mathcal{P}Y_f$ der folgenden partiellen Integrationsformel*

$(\sum'_\pi)$ $\qquad \mathcal{C}_{\mathcal{P}^\eta}(h) = \int_{Y_f} \int_X h(x, \mu + \delta_x) \pi(\mu + \eta, dx) \mathcal{P}^\eta(d\mu), h \in F_+.$

Hier bezeichnet $\mathcal{C}_P$ das Campbellsche Maß von P; und F_+ steht kurz für die Klasse der nichtnegativen, meßbaren Funktionen auf dem jeweils zugrunde liegenden Meßraum.

Beweis. Für gegebenes h ist

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\pi^\eta}(h) = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m} \int_{X^m} h(x_j, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \ldots, dx_m).$$

Aufgrund der Symmetrie der Maße $\pi^{(m)}$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\pi^\eta}(h) = & \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \int_{X^{m-1}} \int_X h(x, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}} + \delta_x) \\ & \pi(\eta + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}}, dx) \pi^{(m-1)}(\eta; dx_1, \ldots, dx_{m-1}) \\ = & \int \int h(x, \mu + \delta_x) \pi(\eta + \mu, dx) \mathcal{P}_\pi^\eta(d\mu). \qquad \textbf{qed}\end{aligned}$$

Bisher haben wir nur endliche Papangelousche Prozesse betrachtet. Die partielle Integrationsformel $(\sum'_\pi)$ macht aber auch Sinn für Prozesse, die unendliche Teilchenkonfigurationen realisieren.

3. DER ALLGERELINE PAPANGELOU PROZESS

Wir werden jetzt Papangelousche Prozesse konstruieren, die unendliche Teilchenkonfigurationen realisieren.

Es sei π nun ein Kern von Y nach X. Wir machen wieder eine Integrierbarkeitsvoraussetzung an π, die wir wie oben in zwei Schritten formulieren. Wir setzen die Existenz einer ***lokalendlichen*** Zerlegung $\Delta = (X_n)_{n\geq 0}$ von X voraus (lokalendlich bedeutet, daß jede beschränkte Menge nur von endlich vielen Elementen der Zerlegung getroffen wird), so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die Kerne $\pi^{(m)}$, $m \geq 1$, seien ***lokalendlich*** in dem Sinne, daß

$$Z_n^{(m)}(\eta) = \pi^{(m)}(\eta_{X_n{}^c}, X_n{}^m) < +\infty \;\forall\, \eta \in Y, m \geq 1, n \geq 0. \tag{3.1}$$

Wir setzen zusätzlich voraus, daß π ***lokal integrierbar*** ist in dem folgenden Sinne.

$$\Xi_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z_n^{(m)}(\eta)}{m!} \in]0, +\infty[, n \geq 0, \eta \in Y. \tag{3.2}$$

Unter diesen beiden Bedingungen sind die folgenden endlichen Punktprozesse für alle $\eta \in Y, n \geq 0$ wohldefiniert:

(3.3)

$$\Pi_{X_n}(\eta, \varphi) = \frac{1}{\Xi_n(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{X_n^m} \varphi(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \, \pi^{(m)}(\eta_{X_n^c}; dx_1, \ldots, dx_m), \varphi \in F_+.$$

(Wieder gelten hier die üblichen Konventionen für $m = 0$.) Man beachte, daß die Π_{X_n} Markoffsche Kerne von $(Y, \mathcal{F}_{\ddot{X}_n^c})$ nach $(\mathcal{M}_{\ddot{X}_n}, \mathcal{F}_{\ddot{X}_n})$ sind. Die Π_{X_n} sind die Normalisierungen derjenigen π_{X_n} , die in (1.2) definiert sind.

Das Ziel ist nun, mit Hilfe dieser Kerne unter geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen und der Randkonfigurationen η einen globalen Prozeß in X zu konstruieren, der π als Papangelouschen Kern besitzt. Wir benutzen dazu die Methode des Satzes von

Ionescu Tulcea (siehe z.B. [10]), die es erlaubt, Prozesse mit Hilfe einer Anfangsverteilung und bedingten Verteilungen zu konstruieren.

Für gegebene $(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_0} \times \cdots \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_{m-1}}$ betrachten wir nun die Markoffschen Kerne

$$Q_m(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}; d\eta_m) = \Pi_{X_m}(\eta_0 + \cdots + \eta_{m-1}, d\eta_m) \tag{3.4}$$

von $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_0} \times \cdots \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_{m-1}}$ nach $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_m}$.

Nach dem zitierten Satz von Ionescu Tulcea existieren zufällige Elemente ξ_n in $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{X_n}, n \geq 0$, mit der Eigenschaft, daß die endlichdimensionalen Verteilungen von $(\xi_n)_{n \geq 0}$ gegeben sind durch

$$\mathcal{L}(\xi_0, \dots, \xi_n) = \Pi_{X_0}(0, d\eta_0) \cdot Q_1(\eta_0, d\eta_1) \cdots Q_n(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}; d\eta_n). \tag{3.5}$$

Wir betrachten dann auf dem soeben konstruierten Wahrscheinlichkeitsraum das zufällige Element

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n. \tag{3.6}$$

Nach Konstruktion ist ξ ein zufälliges Element in $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$, d.h. ein Punktprozeß in X. Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß ξ ein Papangelou Prozeß in X ist, der spezifiziert wird durch Kern π . Dazu benötigen wir, wie im endlichen Fall, als weitere Voraussetzung an π die *cozykel-Bedingung*, die schon unter (2.6) auftauchte:

$$\pi(\eta, dx)\pi(\eta + \delta_x, dy) = \pi(\eta, dy)\pi(\eta + \delta_y, dx), \eta \in Y, x, y \in X. \tag{3.7}$$

Außerdem benötigen wir, daß π die *Fellersche Bedingung* erfüllt : Diese beinhaltet, daß

$$\pi(\eta_{X^n}, .) \rightharpoonup \pi(\eta, .), \text{ falls } n \to +\infty. \tag{3.8}$$

Hier bezeichnet $\rightharpoonup$ die vage Konvergenz Radonscher Maße, und $X^n = X_0 \cup \cdots \cup X_n$.

Schließlich benötigen wir dazu auch die folgende Bedingung: Außerhalb eines jeden y hat $\pi(\eta+\delta_y, dx)$ eine Dichte f_π bezüglich $\pi(\eta, dx)$, die von η unabhängig ist, m.a.W.:

$$1_{\{y\}^c}(x) \cdot \pi(\eta + \delta_y, dx) = 1_{\{y\}^c}(x) \cdot f_\pi(x, y) \cdot \pi(\eta, dx), \eta \in Y, y \in X. \tag{3.9}$$

Wir berechnen das Campbellsche Maß C_ξ von ξ. Für gegebenes $h \in F_+$ ist

$$C_\xi(h) = \sum_{n \geq 0} \int \int h(x, \xi)\xi_n(dx)dP \tag{3.10}$$

Wir folgen der Argumentation von Mecke [8] und nehmen zunächst an, daß h von der Form $g \otimes \varphi$ ist, wobei g außerhalb eines $X_k, 0 \leq k \leq n$, verschwindet und φ

meßbar ist bzgl. der $\sigma-$Algebra $\mathcal{F}_{\dot{X}^n}$. In diesem Fall ist , wenn man $\xi_{X^k} = \sum_{j=0}^k \xi_j$ und $\eta_{X^k} = \sum_{j=0}^k \eta_j$ setzt und (3.5) beachtet ,

$$\begin{aligned} C_\xi(h) &= \int \xi_k(g) \cdot \varphi(\xi_{X^n}) dP \\ &= \int \Pi_{X_0} 0, d\eta_0) \int \dots \int \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k)\, \eta_k(g) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k), \end{aligned}$$

wobei ψ die folgende Funktion bezeichnet:

$$\begin{aligned} \psi(\eta_{X^k}) = \quad & \int \Pi_{X_{k+1}}(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \int \dots \\ & \dots \int \Pi_{X_n}(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots \eta_{n-1}, d\eta_n)\, \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n). \end{aligned}$$

Wendet man hier Lemma 2.1 auf das innere Integral an, so ergibt sich unter Beachtung von (3.7)

$$\begin{aligned} \int \quad & \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \eta_k(g) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k) = \\ \int \quad & \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \int_{X_k} \pi(\eta_{X^k}, dx)\, g(x) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k + \delta_x). \end{aligned}$$

Nun ist andererseits wegen (3.9)

$$\Pi_{X_{l+1}}(\eta_{X^l} + \delta_x, d\eta_{l+1}) = f_\pi(x, \eta_{l+1}) \cdot \Pi_{X_{l+1}}(\eta_{X^l}, d\eta_{l+1}), \text{ falls } x \in X_l. \tag{3.11}$$

Hier bezeichnet $f_\pi(x, \eta_{l+1}) = \prod_{y \in \eta^*_{l+1}} f_\pi(x, y)^{\eta_{l+1}(y)}$, wobei η^* der Träger von η ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(\eta_{X^k} + \delta_x) = \quad & \int \Pi_{X_{k+1}}(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \int \dots \int \Pi_{X_n}(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots \eta_{n-1}, d\eta_n) \\ & \prod_{l=k+1}^n f_\pi(x, \eta_l) \cdot \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n + \delta_x), \end{aligned}$$

und damit unter nochmaliger Beachtung von (3.9)

$$C_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \pi(\xi_{X^n}, dx) dP. \tag{3.12}$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn man n durch irgend ein größeres n ersetzt. Aber dann ergibt sich aus der Fellerschen Eigenschaft von π

$$C_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \pi(\xi, dx) dP. \tag{3.13}$$

Damit ist die Gleichung (3.13) für das oben betrachtete Subsystem von Funktionen h gezeigt worden. Standardargumente, wie man sie z.B. im Beweis des Satzes 3.1. der zitierten Meckeschen Arbeit findet, beschlie"sen den Beweis des folgenden Satzes.

Theorem 1. *Ist π ein symmetrischer Fellerscher Kern von Y nach X, der lokal integrierbar ist und die Eigenschaft (3.9) besitzt, so ist ξ ein Punktprozeß in X, der den Kern π als Papangelou Kern besitzt, d.h. ξ genügt der partiellen Integrationsformel*

$$C_\xi(h) = \int h(x, \xi + \delta_x)\pi(\xi, dx)dP, h \in F_+. \tag{3.14}$$

Wir nennen den Prozeß ξ einen *Papangelou Prozeß zu* π und schreiben dafür P_π.

Die *wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des Kernes* π für einen Papangelou Prozeß ist die folgende: Sei X höchstens abzählbar unendlich und P ein Papangelou Prozeß in X, der spezifiziert ist durch einen Kern π, der außerdem der folgenden Bedingung genügt:

$$\pi(., x) \text{ ist meßbar bzgl. } \mathcal{F}_{\{x\}^c}^{\cdot} \text{ für alle } x. \tag{3.15}$$

Dann gilt für alle $f \in F_+$ und alle $\mathcal{F}_{\{x\}^c}^{\cdot}-$meßbaren φ, daß $\mathcal{C}_P(f \otimes \varphi) = E_P(\zeta_f \cdot \varphi) = P(\pi(., f) \cdot \varphi)$. Hieraus liest man sofort ab, daß $\pi(., x)$ gegeben ist durch die bedingte Erwartung $E_P(\zeta_{\{x\}}|\mathcal{F}_{\{x\}^c}^{\cdot})$ von $\zeta_{\{x\}}$ bzgl. der $\sigma-$Algebra seiner Außenwelt. Für gegebenes x ist $\pi(., x)$ also die bedingte Intensität in x.

Dieser Satz ist ein Existenzsatz für eine sehr große Klasse von Punktprozessen. Der Beweis zeigt, daß der Theorie der Papangelouschen Prozesse eine Theorie raumzeitlich geordneter stochastischer Prozesse mit unendlich langem Gedächtnis (Prozesse mit vollständigen Bindungen) zugrunde liegt, die mit der cozykel-Eigenschaft eine Symmetrieeigenschaft besitzen, die viel stärker ist als die zeitliche Reversibilität. Kurz gesagt liegt der Papangelouschen Theorie eine neue Raum-Zeit Struktur zugrunde, die es weiter zu entwickeln gilt.

4. BEISPIELE

Wir diskutieren nun Anwendungen des Satzes 3.1.

Poissonsche Prozesse.

Ist $\pi \equiv \rho, \rho \in \mathcal{M}(X)$, so ist die obige Konstruktion eine Modifikation der Meckeschen Konstruktion des Poisson Pozesses P_ρ in [8].

Coxsche Prozesse

Man kann die obige Konstruktion modifizieren, indem man anstelle des 'Vakuums' 0 mit einer zufälligen Anfangskonfiguration σ in die Konstruktion geht. Ist nämlich

π symmetrisch, lokal integrierbar mit der Eigenschaft

$$\pi(., dx) \text{ ist meßbar bezüglich } \mathcal{F}_{\infty}^{\cdot\cdot}, \tag{4.1}$$

sowie in einem geeignet modifizierten Sinne Fellersch, so erhält man durch die obige Konstruktion als Papangelouschen Prozeß P_π einen *Coxschen Prozeß mit bedingter Intensität* π, d.h. daß

$$P_\pi = \int P_{\pi(\sigma,.)}\, P_0(d\sigma). \tag{4.2}$$

Hier bezeichnet P_0 den Anfangsprozeß, der σ realisiert. (Für eine ausführliche Darstellung hiervon verweisen wir auf [9].) P_π ist nun ein Poissonscher Prozeß mit zufälliger Intensität π. Dies ist die Klasse von Punktprozessen, die Krickeberg [5] und Papangelou [12] im Zusammenhang des Davidsonschen Problems systematisch untersuchten. Papangelou gibt in [12], Theorem 2 als hinreichende Bedingung dafür, daß (4.1) vorliegt, die Bedingung an, daß π ein *Produktkern* in dem folgenden Sinne ist: Der zugrunde liegende Raum ist ein Produkt $X = E \times F$, und π ist Produkt eines unendlichen, diffusen Maßes ρ auf F und eines Kernes τ von Y nach E, d.h.

$$\pi(., dqdp) = \rho(dp)\tau(., dq). \tag{4.3}$$

Polyasche Summenprozesse.

Ist $\pi = \beta = \beta_{z,\rho}, \rho \in \mathcal{M}(X), 0 < z < 1$, ein Polyascher Summenkern, so liegt lokale Integrierbarkeit vor mit den von der Randbedingung unabhängigen Konstanten

$$\Xi_n(z) = \exp(\rho(X_n) \cdot \kappa(z)). \tag{4.4}$$

Hier ist $\kappa(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$; und wir benutzten die wohlbekannte Tatsache (siehe z.B. [13]), daß

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \cdot \rho(X_n)^{[m]} \cdot z^m = \exp(\rho(X_n) \cdot \kappa(z)). \tag{4.5}$$

$a^{[m]} = a(a+1) \cdots (a+m-1)$ bezeichnet das sogenannte *Pochhammer Symbol.* Der Polyasche Summenkern ist natürlich Fellersch und genügt der Bedingung (3.9). Den zugehörigen Papangelou Prozeß nennen wir den *Polyaschen Summenprozeß in* X, spezifiziert durch (z, ρ).

Wir wollen seine wichtigsten Eigenschaften studieren. Dazu zeigen wir nun, daß dieser Prozeß unabhängige Zuwächse besitzt. Aus dieser Überlegung wird sich auch die Verteilung der Zählvariablen ζ_B ergeben und die Tatsache, daß ein solcher Polyascher Summenprozeß durch seine bedingte Intensität π eindeutig festgelegt ist.

Es seien $B \in \mathcal{B}_0, k \geq 1$ und φ eine nichtnegative $\mathcal{F}_{\ddot{B}^c}$−meßbare Funktion. Dann ergibt sich für einen Polyaschen Prozeß P zu β die Rekursion

$$\begin{aligned} P(1_{\{\zeta_B=k\}} \cdot \varphi) &= \frac{1}{k} \cdot \int\int 1_B(x) \cdot 1_{\{\zeta_B=k\}}(\mu) \cdot \varphi(\mu)\, \mu(dx) P(d\mu) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \int\int 1_B(x) \cdot 1_{\{\zeta_B=k-1\}}(\mu) \cdot \varphi(\mu) \cdot z \cdot (\rho+\mu)(dx) P(d\mu) \\ &= \frac{z}{k} \cdot [\rho(B) + (k-1)] \cdot P(1_{\{\zeta_B=k-1\}} \cdot \varphi), \end{aligned}$$

so daß

$$P(1_{\{\zeta_B=k\}} \cdot \varphi) = \frac{z^k}{k!} \cdot \rho(B)^{[k]} \cdot P(1_{\{\zeta_B=0\}} \cdot \varphi).$$

Wählt nun für φ die Indikatorfunktion des Ereignisses $\{\zeta_{B_2} = k_2, \dots, \zeta_{B_n} = k_n\}$, wobei $k_j \geq 1$ und die $B_j \in \mathcal{B}_0$ paarweise disjunkt sind, so erhält man

$$P\{\zeta_{B_1} = k_1, \dots, \zeta_{B_n} = k_n\} = P\{\zeta_{B_1} = 0, \dots, \zeta_{B_n} = 0\} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{z^{k_j}}{k_j!} \cdot \rho(B_j)^{[k_j]}.$$

Diese Gleichung enthält nun alle gewünschten Informationen: Durch Summation über alle k_j ergibt sich zunächst der Wert von $P\{\zeta_{B_1} = 0, \dots, \zeta_{B_n} = 0\}$. Damit erhält man als Verteilung der $\zeta_B, B \in \mathcal{B}_0$,

$$P\{\zeta_B = k\} = \exp(-\rho(B) \cdot \kappa(z)) \cdot z^k \cdot \frac{\rho(B)^{[k]}}{k!}, k \geq 0. \tag{4.6}$$

Durch Verbindung obiger Resultate erhält man dann, daß P unabhängige Zuwächse besitzt. Schließlich berechnet sich der Erwartungswert von ζ_B auf folgende Weise:

$$P(\zeta_B) = z \cdot e^{\kappa(z)} \rho(B). \tag{4.7}$$

Die obigen Überlegungen benutzten nur die partielle Integrationsformel, von der P eine Lösung ist. Und wir sahen oben, daß diese vollständig die endlichdimensionalen Verteilungen des Feldes $(\zeta_B)_{B \in \mathcal{B}_0}$ bestimmt. Dies zeigt, daß eine Polyascher Summenprozeß vollständig durch seine bedingte Intensität bestimmt ist, so daß $P = \mathcal{P}_\beta$. Ein Polyascher Summenprozeß hat also ganz analoge Eigenschaften wie ein Poissonscher Prozeß.

GIBBSSCHE PROZESSE.

Der *Boltzmannsche Kern* $\gamma(\eta, .) = \exp(-E(., \eta)) d\rho$ ist symmetrisch, falls E die folgende Symmetriebedingung erfüllt:

$$E(x, \eta) + E(y, \eta + \delta_x) = E(y, \eta) + E(x, \eta + \delta_y) \text{ für alle } x, y, \eta. \tag{4.8}$$

Die lokale Integrabilität von π liegt vor, falls E die folgende, auf Preston [14] zurückgehende *Stabilitätsbedingung* erfüllt:

Für alle $\eta \in Y_f$ existiert ein $B(\eta) > 0$, so daß für alle $m \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_m$ gilt

$$(4.9)\quad E(x_1, \eta) + E(x_2, \eta + \delta_{x_1}) + \cdots + E(x_m, \eta + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}}) \geq -B(\eta) \cdot m.$$

Die Normalisierungskonstante $\Xi_n(\eta)$ ist kleiner oder gleich $\exp(\rho(X_n) \cdot e^{B(\eta)})$ und heißt nun die *großkanonische Partitionsfunktion.*

In der Regel ist E in der klassischen statistischen Mechanik durch ein geeignetes Paarpotential ϕ auf $X = \mathbb{R}^d$ gegeben. Ruelle formuliert in [16] Bedingungen unten denen ein solches Potential zusammen mit dem Lebesgueschen Maß ρ auf $\mathbb{R}^d$ einen Boltzmannschen Kern $\pi(\eta, dx) = \exp E(x, \eta)\rho(dx)$ von Y nach X definiert. E ist dabei gegeben durch

$$(4.10)\qquad E(x, \eta) = \sum_{\nu \leq_2 \eta, \nu(x) \geq 1} \phi(\nu), x \in X, \eta \in Y,$$

Hier wird über alle 2-elementigen Subkonfigurationen ν von η summiert, die x als Teilchen enthalten. Ein solches E ist natürlich symmetrisch. Ebenso ist Bedingung (3.9) erfüllt. Die lokale Integrierbarkeit liegt z.B. vor, wenn $\phi \geq 0$ oder ein sogenanntes hard-core Potential ist. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein, welche allgemeinen Bedingungen an das Potential die lokale Integrierbarkeit zur Folge haben, und verweisen auf [16]. Schließlich ist γ ein Fellerscher Kern für eine große Klasse von Potentialen. Auch dies findet man in [16], Lemma 5.1 und Proposition 5.2.

Der obige Satz liefert unter solchen Bedingungen die Existenz von Papangelouschen Prozessen, die nun *Gibbssche Prozesse zur bedingten Energie* E heißen. Die obige Konstruktion von Gibbsschen Prozessen im $\mathbb{R}^d$ ist neu. Man vergleiche diese mit der Rueleschen Konstruktion in [16], Theorem 5.5.

Natürlich schließen sich eine Reihe weiterer *Fragen* an: Wann sind allgemeine Papangelousche Prozesse durch π eindeutig festgelegt? Wann nicht? Welches ist die Struktur der Menge $\mathcal{P}(\pi)$ der durch π spezifizierten Papangelou Prozesse? Welches ist die zugehörige Martinrand Theorie?

5. ZUM ENSTEHUNGSZUAMREHANG DER OBIGEN ÜBERLEGUNGEN

Der Ausgangspunkt der hier entwickelten Theorie ist die fundamentale Arbeit von Papangelou [12], die die allgemeine Struktur von zufälligen Ebenenprozessen untersucht und deren Ergebnisse auf der Tagung ≪Second International Conference on the Theory and Applications of Point Processes$\gg$ im April 1974 in Bad Kühlungsborn in Anwesenheit von Klaus Krickeberg, Fredos Papangelou, Klaus Matthes, Joseph Mecke, Christopher Preston und mir vorgetragen wurden. Hier wurde zum ersten Mal die grundlegende Bedeutung der absolut stetigen Version der Bedingung (Σ') explizit gemacht, die mit Hilfe des Begriffs eine Campbellschen Maßes formuliert wird. (Eine ausführlichere Darstellung der Entwicklung dieser Bedingung findet man in dem Brief von Fredos Papangelou weiter unten.)

Nguyen Xuan Xanh und ich präsentierten dann 1976 auf der Tagung $\ll$ Buffon Bicentenary Symposium on stochastic geometry and directional statistics $\gg$ [2] am Sevan See in Armenien die Ergebnisse der Arbeit [11], in der Gibbssche Prozesse als Papangelousche Prozesse gekennzeichnet werden, die spezifiziert sind durch den Boltzmannschen Kern. (Auf dieser Tagung waren ebenfalls die genannten Kollegen anwesend.) Es entstand eine fruchtbare Diskussion zwischen den Genannten und mir, die dann die grundlegende Arbeit von Matthes, Mecke und Warmuth [7] stimulierte. In dieser werden Ideen unserer Arbeit, die noch ganz dem Kontext der klassischen statistischen Mechanik verhaftet sind, so wie sie in der für uns zentralen Arbeit von Preston [14] formuliert wurden, auf die allgemeinere Ebene der Papangelou Prozesse gehoben. M.a.W. es wird der Boltzmannsche Kern ersetzt durch einen beliebigen Papangelouschen Kern. (In der hier vorliegenden Arbeit wird auf genau dieser allgemeinen Ebenen gearbeitet.)

Parallel zu [11] und unabh"angig davon entwickelten Georgii [3] und Takahashi [17] ähnliche Ideen, die zu einer differentiellen Kennzeichnung von Gibbsschen Prozessen, d.h. ihrer Charakterisierung durch Palmsche Maße, führten. Eine systematische Behandlung der Arbeiten [12],[11] und [7] folgte danach durch die Arbeiten von Glötzl, Rauchenschwandtner und Wakolbinger, die schließlich ihre wertvolle Zusammenfassung in der Dissertation [15] fand. Zu guter Letzt fand die gesamte Theorie Eingang in die russische Ausgabe der Monographie [6] sowie diejenigen von *Kallenberg, Random measures, Akademie Verlag Berlin, Academic Press London (1983)* sowie *Kallenberg, Probabilistic symmetries and invariance principles. Springer (2005).*

Eine abschließende Bemerkung zu der Klasse Polyascher Prozesse. Die oben eingeführten Polyaschen Summenprozesse sind inspiriert durch die Arbeit von Blackwell, MacQueen [1]. Sie scheinen bisher als Punktprozesse noch nicht betrachtet worden zu sein. Sie haben einen ebenso fundamentalen Charakter wie Poissonsche Prozesse.

Danksagung. Ich danke Herrn Fredos Papangelou für Bemerkungen, die zur Erhellung des historischen Ausgangspunktes des Begriffes Papangelou Kern, der Bedingung (Σ') *und der partiellen Integrationsformel führten. Ebenso danke ich Herrn Benjamin Nehring für wertvolle Diskussionen der obigen Gedankengänge.*

Список литературы

[1] D. Blackwell, J. B. MacQueen, "Ferguson distributions via *Pólya* urn schemes", Ann. Statist. **1**, 353-355 (1973).

[2] Buffon bicentenary symposium on stochastic geometry and directional statistics, Lake Sevan (Armenia). Adv. Appl. Prob. **9**, 423-447 (1977).

[3] H. O. Georgii, "Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems", Commun. math. Phys. **48**, 31-51 (1976).

[4] O. Kallenberg, *Random measures* (Akademie-Verlag, Berlin, und Academic press, London, 1983).

[5] K. Krickeberg, "The Cox process", Sympos. Math. Roma **9** (1972), Calcolo Probab. Teor. Turbolenza, 151-167 (1971)

[6] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, *Infinitely divisible point processes* (Wiley 1978).

[7] K. Matthes, J. Mecke, W. Warmuth, "Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh und Hans Zessin"Math. Nachr. **88**, 117-127 (1979).

[8] J. Mecke, "Stationäre Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen", Z. W-Theorie verw. Geb. **9**, 36 - 58 (1967)

[9] B. Nehring, "Markoffsche Bosefelder und Papangelousche Prozesse", Diplomarbeit. Bielefeld (2009).

[10] J. Neveu, *Bases mathématiques des probabilités*, (Paris, 1964).

[11] X. X. Nguyen, H. Zessin, "Integral and differential characterizations of the Gibbs process", Math. Nachr. **88**, 105-115 (1979).

[12] F. Papangelou, "Point processes on spaces of flats and other homogeneous spaces", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80**, 297-314 (1976).

[13] S. Poghosyan, H. Zessin, " An integral characterization of random permutations. A point process approach", SFB-preprint, Bielefeld (2008).

[14] C. J. Preston, *Random fields*, (Lecture notes in mathematics **534**, Springer 1976).

[15] B. Rauchenschwandtner, *Gibbsprozesse und Papangeloukerne. VWGÖ*, (Wien, 1980).

[16] D. Ruelle, "Superstable interactions in classical statistical mechanics", Commun. math. phys. **18**, 127-159 (1970).

[17] Y. Takahashi, "A class of solutions of Bogolioubov system of equations for classical statistical mechanics of hard core particles", Scientific papers of the college of general education, University of Tokyo **26**, 15-26 (1976).

Поступила 18 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 73-84

JOINT DISTRIBUTION OF DIRECTION AND LENGTH OF THE TYPICAL I-SEGMENT IN A HOMOGENEOUS RANDOM PLANAR TESSELLATION STABLE UNDER ITERATION

JOSEPH MECKE

University of Jena, Germany
E-mail: *joseph.mecke@web.de*

Аннотация. The paper deals with homogeneous random planar tessellations stable under iteration (random STIT tessellations). The length distribution of the typical I-segment is already known in the isotropic case [8]. In the present paper, the anisotropic case is treated. Then also the *direction* of the typical I-segment is of interest.

The joint distribution of direction and length of the typical I-segment is evaluated. As a first step, the corresponding joint distribution for the so-called typical *remaining* I-segment is derived.

Dedicated to the 80th birthday of Klaus Krickeberg

1. Introduction

The subject of the paper are homogeneous random tessellations in $\mathbb{R}^2$ that are stable with respect to iteration (nesting). We refer to them as random STIT tessellations, where STIT is an abbreviation for "**st**able under **it**eration".

R. V. Ambartzumian informed about a vision of these random tessellations more than twenty years ago in a discussion with the author, and he intuitively anticipated some of the properties of this remarkable mathematical object.

An exact mathematical treatment of random STIT tessellations was presented by Nagel and Weiss in [6].

A short explanation of the subject under consideration is given in the next section. For the details, see the fundamental paper of Nagel and Weiss [6] and additionally [4, 5, 7]. Concerning the basic notions in the theory of random tessellations, the reader is referred to the book of Schneider and Weil [11]. Especially, there can be found an exact construction of the measurable space of tessellations.

Nagel and Weiss evaluated a lot of mean values for random STIT tessellations [5, 7]. A first step was made towards the calculation of more complex characteristics in [8] by deriving the lengths distribution of the typical I-segment in the isotropic case. Our aim is now to treat the anisotropic situation.

The notion of an I-segment goes back to MILES [3]. Roughly speaking, an I-segment is a maximal segment which is a subset of the set of all boundary points of cells belonging to the tessellation (network of edges). It may consist of more than one edge.

It is possible to interpret the random STIT tessellations as the random states of a spatially homogeneous Markovian process of subsequent cell divisions in $\mathbb{R}^2$ [9, 10]. This insight can be helpful for a better understanding of some properties of random STIT tessellations and for evaluating characteristics of them. But in the present paper, only the stability under iteration is used for establishing the results.

In the mentioned model of cell division, which can be thought of being behind the random STIT tessellations, the I-segments are the chords dividing the cells.

2. BASIC NOTIONS AND NOTATIONS

2.1. **Space of lines and space of directions.** Let $\mathcal{G}$ be the set of lines in $\mathbb{R}^2$. Given $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ with $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, denote by $\operatorname{span}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ the line determined by $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Let $\mathfrak{G}$ be the σ-algebra on $\mathcal{G}$ induced by the map span : $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}\} \to \mathcal{G}$ and the system of $\mathfrak{B}_4$ of Borel sets in $\mathbb{R}^4$: $\mathfrak{G} = \{B \subseteq \mathcal{G} : \operatorname{span}^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_4\}$.

For every subset $U \subset \mathbb{R}^2$,let $[U]$ be the set of lines intersecting U:

$$[U] = \{g \in \mathcal{G} : g \cap U \neq \emptyset\}.$$

The set of lines through the origin of $\mathbb{R}^2$ is denoted by $\mathcal{H}$. A suitable $\sigma - algebra$ on $\mathcal{H}$ is $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cap \mathcal{H}$.

Given a line $g \in \mathcal{G}$, the line $\mathrm{r}(g) \in \mathcal{H}$ parallel to g is said to be the *direction* of g. By the direction $\mathrm{r}(\mathfrak{s})$ of a segment $\mathfrak{s}$ with positive length we mean the direction of the line containing $\mathfrak{s}$.

2.2. **Directional measure.** Let Φ be a homogeneous random tessellation with edge length intensity $0 < \lambda < \infty$.

For given $B \in \mathfrak{H}$, we consider the (homogeneous) field Φ_B of that edges of Φ the direction of which is in B. Let us denote the edge length intensity of Φ_B by $\kappa(B)$. We obtain in this way a finite, non-vanishing, non-degenerate measure κ on the space of directions $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ that is said to be the *directional measure* of Φ.

Obviously, $\kappa(\mathcal{H}) = \lambda$, and we may write $\kappa = \lambda\vartheta$, where ϑ is a probability measure on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$. The latter is called *directional distribution* of Φ. The assumptions about κ imply that ϑ is not a Dirac-measure.

2.3. **Iteration.** If an iteration procedure in the sense of Nagel and Weiss [6, 7] is carried out, where a homogeneous random tessellation with law (distribution) P is the frame, and its cells are subdivided independently of each other according to a homogeneous law Q, the law of the resulting homogeneous random tessellation is denoted by $P \oplus Q$.

Informally, the intuitive meaning of that operation may be described in the following manner:

Let Φ, Ψ be homogeneous random tessellations in $\mathbb{R}^2$ with laws P, Q respectively. The cells of Φ are subdivided in a special way. The conditional procedure, given a realization φ of Φ, is the following. If the set of cells of φ is denoted by $\mathcal{C}_\varphi$, let $\{\Psi_C : C \in \mathcal{C}_\varphi\}$ be a family of independent copies of Ψ, i. e. a family of independent homogeneous random tessellations identically distributed according to Q. Given $C \in \mathcal{C}_\varphi$, denote by Ξ_C the set of all intersections of cells of Ψ_C with C. Then the set

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}_\varphi} \Xi_C$$

of compact convex polygons forms a new random tessellation in $\mathbb{R}^2$; we allow us to denote it by

$$\varphi \circ \{\Psi_C : C \in \mathcal{C}_\varphi\}.$$

The resulting unconditioned random tessellation, temporarily written as

$$\Phi \circ \{\Psi_C : C \in \mathcal{C}_\Phi\},$$

turns out to be homogeneous again, see for instance [10]; its law is denoted by $P \oplus Q$. With respect to the described operation of iteration or nesting, the random tessellation Φ is said to be the frame tessellation.

A satisfying special definition of iteration is provided in [10].

3. Stability with respect to iteration

3.1. **Characteristic equation.** We describe tessellations mathematically by their network of edges, i. e. we identify a tessellation φ with the union of the boundaries of all cells. Given a number $0 < a < \infty$, and a tessellation φ, the tessellation $a\varphi$ is defined by

$$a\varphi = \{a\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \varphi\}.$$

If P is the law of a random tessellation Φ, then for the law of $\frac{1}{t}\Phi$ the notation $D_t P$ (or $P(t\,\cdot\,)$) is used; $0 < t < \infty$.

Definition 1. *A homogeneous random tessellation with law Q is said to be stable under iteration if for all $0 < s, t < \infty$,*

$$D_{s+t}Q = D_s Q \oplus D_t Q. \tag{3.1}$$

Equation (3.1) means the following: Let Φ be a homogeneous random tessellation with law Q. In the sense of an iteration, take $\frac{1}{s}\Phi$ as the frame and split up its cells independently of each other according to the law of $\frac{1}{t}\Phi$, i. e. according to $D_t Q$. Then the resulting tessellation and $\frac{1}{s+t}\Phi$ are identically distributed.

Formula (3.1) is closely related to the Chapman-Kolmogorov equation for the Markovian process of cell divisions mentioned in the introduction.

Homogeneous random tessellations stable under iteration are also addressed as *random STIT tessellations.*

According to Nagel and Weiss [6], a homogeneous random tessellation with law Q is called stable under iteration if for each $k = 2, 3, \ldots$ the equation $Q_k = D_k Q$ is fulfilled, where the Q_k are defined recursively by

$$Q_2 = Q \oplus Q, Q_3 = Q_2 \oplus Q, Q_4 = Q_3 \oplus Q, \ldots$$

.

The results in [10] imply that the two definitions are equivalent. Only recently, Nagel and Weiss have proved that $Q_2 = Q \oplus Q$ is already sufficient. They presented an equivalent of equation (3.1) in a lecture some years ago.

The higher-dimensional analogue is treated in [10]. Note that the 1-dimensional counterpart corresponds to nothing else than the well-known homogeneous Poisson point field on $\mathbb{R}$ [4].

3.2. **Directional measure of random STIT tessellations.** The following result can be derived from [6], and it is pointed out in [9].

Proposition 1. *For every finite, non-vanishing, non-degenerate measure κ on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ there exists a random STIT tessellation with directional measure κ. If two random STIT tessellations have the same directional measure, then they are identically distributed.*

Denote by $\mathbb{K}$ the set of finite, non-vanishing, non-degenerate measures on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ and by $\mathbb{S}$ the set of laws of random STIT tessellations. Proposition 1 says that there is a one-to-one correspondence between $\mathbb{K}$ and $\mathbb{S}$.

3.3. **Intersection with lines.** The function $s_\kappa : \mathcal{H} \to (0, \infty)$ with

$$s_\kappa(k) = \int\limits_{\mathcal{H}} \kappa(\mathrm{d}h) \left|\sin(\widehat{h,k})\right|$$

is said to be the *rose of intersections* to κ.

In [5], there is proved that the intersection of a random STIT tessellation with a line leads to a homogeneous Poisson point field on that line:

Proposition 2. *Let Φ be a random STIT tessellation with directional measure κ, and let g be an arbitrary line. Then the set $\Phi \cap g$ of intersection points forms a homogeneous* Poisson *point field on g with intensity $s_\kappa(\mathrm{r}(g))$, where $\mathrm{r}(g) \in \mathcal{H}$ is the direction of g, and s_κ means the rose of intersections to the directional measure κ of Φ.*

3.4. **Further Results.** For the convenience of the reader, additional properties of random STIT tessellations should be mentioned, which will not be used explicitly in this paper.

According to Nagel and Weiss [5], the interior of the typical cell of a random STIT tesselation is the interior of a Poisson polygon.

Proposition 3. *The interior of the typical cell of a random STIT tessellation with directional measure κ has the same distribution as the interior of the typical cell of a homogeneous Poisson line tessellation with directional measure κ.*

Note that in the case of STIT tessellations there are in general more nodes on the boundary of a cell as in the case of line tessellations.

The following statement can be deduced from the characteristic equation (3.1).

Proposition 4. *Any affine image of a random STIT tessellation is again a random STIT tessellation.*

4. Typical *remaining* I-segment

4.1. **Preliminaries.** Let Φ be a random STIT tessellation with directional measure $\kappa = \lambda\vartheta$; i. e. the edge length intensity is equal to λ and the directional distribution is ϑ.

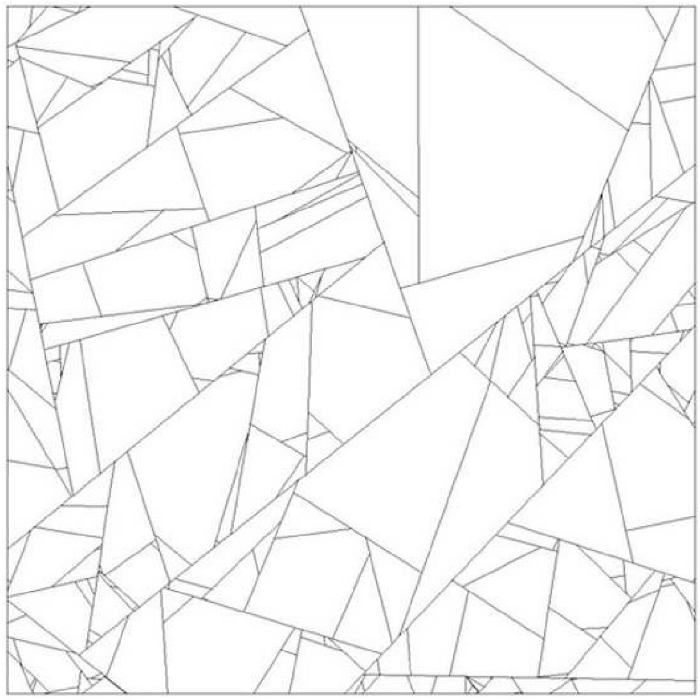

Рис. 1. Simulation of an isotropic random STIT tessellation, provided by Joachim Ohser, Hochschule Darmstadt, and based on an algorithm of Nagel and Weiss [6]

The notion "typical *remaining* segment" was introduced in [8]. It is the segment starting from the typical point of Φ and stopping at the upper endpoint (right endpoint in the horizontal case) of the I-segment containing the typical point. (There are several similar settings leading to the same distribution of a random segment.)

4.2. **Ambartzumian's metric.** Let Λ be a fixed locally finite line measure with $\Lambda([\{\boldsymbol{x}\}]) = 0$ for every $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Ambartzumian [1], [2] introduced a pseudometric

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$

in $\mathbb{R}^2$, where the distance between the points $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ is given by

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\{g \in \mathcal{G} : g \text{ separates } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\right).$$

Denote by Λ_κ the translation invariant line measure with directional measure κ. The corresponding Ambartzumian-pseudometric d_κ is even a metric in this case, which is translation invariant as well. In this way, we got a family of translation invariant metrics

$$\left\{d_\kappa : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty);\ \kappa \in \mathbb{K}\right\},$$

where the distance between the points $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ is given by

$$d_\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\Lambda_\kappa\left(\{g \in \mathcal{G} : g \text{ separates } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\right).$$

If κ is isotropic and has total mass $\kappa(\mathcal{H}) = \pi$, then Λ_κ is the invariant line measure known from conventional integral geometry, and d_κ coincides with the Euclidean metric.

Analog to the situation in the Euclidean metric, the shortest way with respect to the $d_\kappa-$ metric connecting two points $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ is the segment with endpoints $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, and its "length" measured in the $d_\kappa-$ metric is equal to $d_\kappa(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Hence, the "length" $\widetilde{l}_\kappa(\mathfrak{s})$ of a segment $\mathfrak{s}$ measured in the $d_\kappa-$ metric is given by

$$\widetilde{l}_\kappa(\mathfrak{s}) = \frac{1}{2}\Lambda_\kappa\left([\mathfrak{s}]\right)$$

or

$$\widetilde{l}_\kappa(\mathfrak{s}) = \frac{1}{2}s_\kappa(\mathrm{r}\mathfrak{s})l(\mathfrak{s}), \tag{4.1}$$

where $l(\mathfrak{s})$ denotes the Euclidean length of $\mathfrak{s}$. We shall call $\widetilde{l}_\kappa(\mathfrak{s})$ the Ambartzumian$-\kappa-$length of the segment $\mathfrak{s}$.

If $K \subset \mathbb{R}^2$ is compact convex, then

$$\widetilde{L}_\kappa(K) = \Lambda_\kappa\left([K]\right)$$

is the Ambartzumian$-\kappa-$perimeter of K.

4.3. **Modification.** For our special purposes, another normalization is more convenient. Define the κ-length $l_\kappa(\mathfrak{s})$ of $\mathfrak{s}$ to be

$$l_\kappa(\mathfrak{s}) = s_\kappa(\mathrm{r}\mathfrak{s})l(\mathfrak{s}).$$

As can be easily seen from formula (4.1) that the simple relation $l_\kappa = 2\widetilde{l}_\kappa$ holds.

Proposition 2 has an obvious consequence.

Corollary 1. *Let Φ be a random STIT tessellation with directional measure κ, g an arbitrary line and s a positive number. Then the set $\frac{1}{s}\Phi \cap g$ of intersection points of the random tessellation $\frac{1}{s}\Phi$ with the line g forms a homogeneous* Poisson *point field on g with $\kappa-$intensity s, i. e. the mean number of intersection points per unit $\kappa-$length is equal to s.*

4.4. **Functional equation.** We consider a random STIT tessellation Φ with directional measure κ and law Q.

Let (ρ, ξ) be a random vector with range $\mathcal{H} \times (0, \infty)$ the distribution of that coincides with the joint distribution of direction and $\kappa-$length of the typical remaining I-segment. Given $B \in \mathfrak{H}$, $0 < x < \infty$, put

$$H(B; x) = \mathcal{P}(\rho \in B, \xi \geq x).$$

Having formula (3.1) in mind, we think of a random tessellation $\frac{1}{s}\Phi$ as a frame, the cells of which are divided independently of each other according to the law of $\frac{1}{t}\Phi$. The outcome is a homogeneous random tessellation with the same law as that of $\frac{1}{s+t}\Phi$.

The typical point of the resulting random tessellation lies with probability $s/(s+t)$ in the frame and with probability $t/(s+t)$ in the new fillings of the old cells. Hence the distribution of the typical remaining segment in the resulting random tessellation is a mixing with weights $s/(s+t)$ and $t/(s+t)$ resp. of the distribution of the typical remaining segment in the frame and the distribution of the *truncated* typical remaining I-segment in a tessellation with law $D_t Q$.

Note that a resulting remaining I-segment which comes from a filling is a remaining I-segment from a random tessellation with law $D_t Q$ truncated by the frame. Its $\kappa-$length is the minimum of the $\kappa-$length of a remaining I-segment of a random tessellation with law $D_t Q$ and the $\kappa-$distance of the starting point of that remaining I-segment to the frame in the direction of that segment. According to Corollary 1, the mentioned $\kappa-$distance is exponentially distributed with parameter s.

We obtain

$$H\left(B; (s+t)x\right) = \frac{s}{s+t} H(B; sx) + \frac{t}{s+t} H(B; tx) e^{-sx}. \tag{4.2}$$

4.5. **Solution.** Equation (4.2) can be rewritten in the form

$$(s+t) H\left(B; sx + tx\right) = s H(B; sx) + t H(B; tx) e^{-sx}. \tag{4.3}$$

Fix $B \in \mathfrak{H}$ for the next few steps of calculation and define an auxiliary function $u : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ by

$$u(y) = y H(B; y); \ 0 < y < \infty. \tag{4.4}$$

Then (4.3) transforms for $sx = a, \ tx = b$ into

$$u(a+b) = u(a) + u(b) e^{-a}; \ 0 < a, b < \infty.$$

Changing the notations a, b leads to

$$u(a+b) = u(b) + u(a)e^{-b};\ 0 < a, b < \infty.$$

Combining the last two equations yields

$$u(a) + u(b)e^{-a} = u(b) + u(a)e^{-b}$$

or

$$\frac{u(a)}{1-e^{-a}} = \frac{u(b)}{1-e^{-b}};\ 0 < a, b < \infty.$$

Hence, the expression $u(a)/(1-e^{-a})$ does not depend on a, but of course, it can depend on B. We find

$$\frac{u(a)}{1-e^{-a}} = c(B);\ 0 < a < \infty$$

with a suitable set function $c : \mathfrak{H} \to [0, \infty)$, or with (4.4),

$$H(B; x) = c(B)\frac{1-e^{-x}}{x};\ 0 < x < \infty.$$

The definition of H implies that for $x \downarrow 0$ the expression $H(B; x)$ tends towards the probability that the direction of Φ at a typical point lies in B, i. e.

$$\lim_{x\downarrow 0} H(B; x) = \vartheta(B).$$

Finally, we get

$$H(B; x) = \vartheta(B)\frac{1-e^{-x}}{x};\ 0 < x < \infty,\ B \in \mathfrak{H}. \tag{4.5}$$

4.6. **Results.** Formula (4.5) and its consequences should be explained in detail.

Proposition 5. *Let Φ be a random STIT tessellation with directional measure κ. The direction and the $\kappa-$length of the typical* remaining *I-segment of Φ are independent. The survival function of the $\kappa-$length of the typical* remaining *I-segment is given by*

$$x \to \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

The distribution of the direction of the typical remaining *I-segment coincides with the directional distribution ϑ of Φ, which is obtained from κ by normalization.*

Corollary 2. *Given a random line $\mathfrak{h}$ through the origin with distribution ϑ, a random positive number γ uniformly distributed in $(0, 1)$ and a random positive number η exponentially distributed with parameter 1. The three random variables $\mathfrak{h}, \gamma, \eta$ are supposed to be independent. Then the distribution of the pair*

$$\left(\mathfrak{h}, \frac{\eta}{\gamma s_\kappa(\mathfrak{h})}\right)$$

is equal to the joint distribution of direction and Euclidean *length of the typical* remaining *I-segment.*

The Lebesgue measure on $(0,\infty)$ is denoted by ν.

Corollary 3. *The joint distribution of direction and* Euclidean *length of the typical* remaining *I-segment is a probability measure on $\mathcal{H}\times(0,\infty)$, which has a density*

$$(h,x)\to\frac{1}{s_\kappa(h)}\int\limits_0^{s_\kappa(h)}\mathrm{d}t\,te^{-tx}$$

with respect to $\vartheta\times\nu$.

Corollary 4. *The conditional distribution of the* Euclidean *length of the typical* remaining *I-segment, given its direction $h\in\mathcal{H}$, is a mixture of exponential distributions, where the mixing distribution for the parameter of the exponential distribution is the uniform distribution on $(0,s_\kappa(h))$.*

Remark 1. *It should be noticed that the typical point in the definition of the typical remaining segment was chosen according to the* Euclidean *length measurement.*

5. Typical I-segment

The subject under consideration is again a random STIT tessellation with directional measure $\kappa\in\mathbb{K}$.

The joint distribution A of direction and length of the typical I-segment and the joint distribution A^{rem} of direction and length of the typical *remaining* I-segment are probability measures on $\mathcal{H}\times(0,\infty)$ connected by the formula

$$\int A^{rem}(\mathrm{d}(h,x))f(h,x)=\frac{i_\kappa}{2\lambda}\int A(\mathrm{d}(h,x))\int\limits_0^x\mathrm{d}y\,f(h,y);\tag{5.1}$$

$$f:\mathcal{H}\times(0,\infty)\to[0,\infty)\text{ measurable,}$$

where

$$i_\kappa=\int\kappa(\mathrm{d}h_1)\int\kappa(\mathrm{d}h_2)\left|\sin(\widehat{h_1,h_2})\right|.\tag{5.2}$$

We obtain from Corollary 3 and from formula (5.1),

$$\frac{i_\kappa}{2\lambda}\int A(\mathrm{d}(h,x))\int\limits_0^x\mathrm{d}y\,f(h,y)=\int\vartheta(\mathrm{d}h)\int\limits_0^\infty\mathrm{d}x\frac{1}{s_\kappa(h)}\int\limits_0^{s_\kappa(h)}\mathrm{d}t\,te^{-tx}f(h,x)$$

or

$$\frac{i_\kappa}{2\lambda}\int A(\mathrm{d}(h,x))\int_0^x \mathrm{d}y\; f(h,y)=\int \vartheta(\mathrm{d}h)\frac{1}{s_\kappa(h)}\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^{s_\kappa(h)} \mathrm{d}t\; t^2 e^{-tx}\int_0^x \mathrm{d}y\; f(h,y).$$

The last equation must be valid for all measurable functions $f:\mathcal{H}\times(0,\infty)\to[0,\infty)$, hence the measure $\frac{i_\kappa}{2\lambda}A$ has a density with respect to $\vartheta\times\nu$

$$(h,x)\to\frac{1}{s_\kappa(h)}\int_0^{s_\kappa(h)} \mathrm{d}t\, t^2 e^{-tx}.$$

Theorem 1. *Given a random STIT tessellation with directional measure κ, the joint distribution of direction and* Euclidean *length of the typical I-segment is a probability measure on $\mathcal{H}\times(0,\infty)$, which has a density with respect to $\kappa\times\nu$*

$$(h,x)\to\frac{2}{i_\kappa s_\kappa(h)}\int_0^{s_\kappa(h)} \mathrm{d}t\; t^2 e^{-tx}.$$

Corollary 5. *The conditional distribution of the* Euclidean *length of the typical I-segment, given its direction $h\in\mathcal{H}$, is a mixture of exponential distributions, where the mixing distribution for the parameter of the exponential distribution is a probability measure on $(0,s_\kappa(h))$ with density $t\to\left(2/s_\kappa^2(h)\right)t$.*

The following result can also be deduced from Theorem 1.

Proposition 6. *Let Φ be a random STIT tessellation with directional measure κ. The direction and the $\kappa-$length of the typical I-segment of Φ are independent. The survival function of the $\kappa-$length of the typical I-segment is given by*

$$x\to\frac{2}{x^2}\left(1-e^{-x}-xe^{-x}\right).$$

The distribution of the direction of the typical I-segment has a density with respect to κ given by

$$h\to\frac{1}{i_\kappa}s_\kappa(h). \tag{5.3}$$

Corollary 6. *Given a random positive number γ uniformly distributed in $(0,1)$, a random positive number η exponentially distributed with parameter 1 and a random line $\mathfrak{h}$ through the origin, which has a density (5.3) with respect to κ. The three random variables $\mathfrak{h},\gamma,\eta$ are supposed to be independent. Then the distribution of the pair*

$$\left(\mathfrak{h},\frac{\eta}{s_\kappa(\mathfrak{h})\sqrt{\gamma}}\right)$$

is equal to the joint distribution of direction and Euclidean *length of the typical I-segment.*

In the isotropic case, the rose of intersections s_κ is constant and it is easily seen that the results in [8] are confirmed.

6. Outlook

It would be desirable to treat the whole problem again, now using the knowledge from [9], [10] that random STIT tessellations can be interpreted as the random states of a spatially homogeneous Markovian process of cell divisions in the whole plane. In this situation also the *time of birth* of the typical I-segment is of interest.

We expect that the conditional length distribution of the typical I-segment, given its direction and time of birth, is an exponential distribution. In this context, it becomes clear why we have to do with *mixtures* in the statements above. The mixing distributions, e. g. the uniform distribution in corollary 4, reflect in some way the age distribution of I-segments.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, "A note on pseudometrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **37**, 145-155 1976.

[2] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).

[3] R. E. Miles and M. S. Mackisack, "A large class of random tessellations with the classic Poisson polygon distributions," Forma **17**, 1-17 (2002).

[4] W. Nagel and V. Weiss, "Limits of sequences of stationary planar tessellations," Adv. Appl. Prob. (SGSA) **35**, 123-138 (2003).

[5] W. Nagel and V. Weiss, "Crack STIT tessellations - Existence and uniqueness of tessellations that are stable with respect to iterations," Izvestija Akademii Nauk Armenii, Matematika **39** (4), 84-114 (2004).

[6] W. Nagel and V. Weiss, "Crack STIT tessellations: Characterization of the stationary random tessellations stable with respect to iteration," Adv. Appl. Prob. (SGSA) **37**, 859-883 (2005).

[7] W. Nagel and V. Weiss, "STIT tessellations in the plane," Rendiconti del circulo matematico di Palermo, Serie II **77**, 441-458 (2006).

[8] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "Length distributions of edges in planar stationary and isotropic STIT tessellations," Izvestija Akademii Nauk Armenii, Matematika **42** (1), 39-60 (2007).

[9] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration," Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes **80** (1), 51-67 (2008).

[10] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "The iteration of random tessellations and a construction of a homogeneous process of cell divisions," Adv. Appl. Prob. (SGSA) **40**, 49-59 (2008).

[11] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry* (Springer, Berlin, 2008).

Поступила 25 сентября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 85-96

KLASSISCHE SYMMETRISCHE PUNKTPROZESSE

HANS ZESSIN

Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany
E-mail: *zessin@math.uni-bielefeld.de*

Аннотация. Das Ziel dieser Note ist eine Neuformulierung und Verallgemeinerung grundlegender Untersuchungen von Bach [1, 2] zum Begriff der Wahrscheinlichkeit bei Boltzmann [3] in der Sprache der modernen Punktprozesstheorie. Die Leitidee ist dabei ihre Einordnung unter die Krickebergsche Zerlegungstheorie invarianter Masse [6]. Diese macht Bachs Überlegungen transparenter und führt über diese hinaus. Gleichzeitig wird die konzeptionelle Überlegenheit der Punktprozessformulierung für die Beschreibung quantenmechanischer Modelle deutlich.

Meinem verehrten Lehrer Klaus Krickeberg zum achtzigsten Geburtstag gewidmet

1. ZERLEGUNG VON INVARIANTEN DISKRETEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Wir stellen hier Krickebergs Zerlegungstheorie in einer diskreten Form vor, wie man sie für quantenmechanische Anwendungen benötigt. Es wird dabei der Kleinsche Gesichtspunkt zugrundegelegt, bei dem man von einer Invarianzgruppe ausgeht und nach der Gesamtheit der Masse bzw. Prozesse fragt, die unter dieser invariant bleiben.

Es sei (Y, ν) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten eine Äquivalenzrelation $\sim$ in Y. Dann existiert eine abzählbare Menge Γ und eine Abbildung r von Y auf Γ, so dass$x \sim y$ genau dann gilt, wenn $r(x) = r(y)$. (Man kann für Γ die Menge der Äquivalenzklassen wählen und für r die Abbildung, die einem x die Klasse zuordnet, in der x liegt.) Für gegebenes $\gamma \in \Gamma$ sei $Y_\gamma = \{r = \gamma\}$, und κ bezeichne die Verteilung von r. Man kann dann ν mit Hilfe von r auf folgende Weise zerlegen: Es existiert eine Familie $(\nu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Wahrscheinlichkeiten auf Y_γ mit der Eigenschaft

$$\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu_\gamma \kappa(\gamma). \tag{1.1}$$

Hier sind ν_γ $\kappa - fast$ sicher (d.h. für alle γ mit $\kappa(\gamma) > 0$) die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\nu(.|r = \gamma)$.

Ist nun $\varphi : Y \longrightarrow Y$ eine Transformation, die $\kappa-$fast sicher die Klassen Y_γ erhält, dann ist ν invariant unter φ genau dann, wenn für φ $\kappa-$fast alle γ ν_γ invariant ist unter φ.

Wir betrachten nun die folgende spezielle Situation: Gegeben sei eine endliche Gruppe $\mathcal{G}$, die auf Y wirke. Uns interessieren Situationen, in denen $\mathcal{G}$ nicht transitiv operiert. Dann beschreibt die Äquivalenzrelation $\sim$, definiert durch $x \sim y$ genau dann, wenn $gx = y$ für ein $g \in \mathcal{G}$ gilt, die Abweichung von der Transitivität.

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{P}_0 Y$ aller Wahrscheinlichkeiten ν auf Y, die invariant unter $\mathcal{G}$ sind, d.h. dass$g\nu = \nu$ f"ur alle $g \in \mathcal{G}$ gilt. Hier bezeichnet $g\nu$ die Verteilung von g. In dieser Situation existiert, wie wir oben sahen, eine Menge Γ sowie eine surjektive Abbildung $r : Y \longrightarrow \Gamma$, so dass$x \sim y$ genau dann, wenn $r(x) = r(y)$. Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen unter $\mathcal{G}$.

Aufgrund des obigen Gedankenganges ist dann evident, dassjede $\mathcal{G}-$invariante Wahrscheinlichkeit ν auf Y bezüglich r so zerlegt werden kann, dass(1.1) gilt, wobei nun die Wahrscheinlichkeiten ν_γ $\kappa-$fast sicher $\mathcal{G}$-invariant sind, d.h. es gilt

$$\nu_\gamma = g\nu_\gamma \text{ für } \kappa - \text{ fast alle } \gamma. \tag{1.2}$$

Umgekehrt gilt: Sind κ eine Wahrscheinlichkeit auf Γ und $(\nu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeiten auf Y_γ, die für $\kappa-$ fast alle γ $\mathcal{G}-$invariant sind, dann ist ν, definiert vermöge (1.1), eine $\mathcal{G}-$invariante Wahrscheinlichkeit auf Y.

Auf diese Weise haben wir einen Überblick bekommen über alle $\mathcal{G}-$invarianten Wahrscheinlichkeiten ν auf Y.

In der Folge nehmen wir zusätzlich an, dass die folgende Voraussetzung erfüllt ist:

$$\text{Alle } Y_\gamma, \gamma \in \Gamma, \text{ seien endliche, nichtleere Mengen.} \tag{1.3}$$

Da $\mathcal{G}$ transitiv auf den Mengen Y_γ wirkt, hat dies zur Folge, dass Y_γ nur eine einzige $\mathcal{G}-$invariante Wahrscheinlichkeit trägt, nämlich die gleichmässige Verteilung, die wir mit λ_γ bezeichnen wollen.

Umgekehrt gilt: Ist κ eine Wahrscheinlichkeit auf Γ, so definiert definiert

$$\nu = \sum_\gamma \lambda_\gamma \kappa(\gamma) \tag{1.4}$$

eine $\mathcal{G}-$invariante Wahrscheinlichkeit auf Y mit der Eigenschaft

$$\nu(y) = \frac{1}{|Y_{r(y)}|} \cdot \kappa(r(y)) \text{für alle } y. \tag{1.5}$$

Zusammenfassend haben wir damit den folgenden grundlegenden Satz erhalten, der ein Spezialfall von Theorem 2 in [6] darstellt.

Theorem 1. *Unter den obigen Voraussetzungen liefert die Gleichung*

$$\nu = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma \kappa(\gamma) \tag{1.6}$$

eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen $\mathcal{G}-$invarianten Wahrscheinlichkeiten ν auf Y und Wahrscheinlichkeiten κ auf Γ. Es gilt dann (1.5).

Wir bemerken nebenbei, dass die Bedeutung des Satzes für die Statistik in der folgenden Interpretation liegt: Die Transformation r ist eine *erschöpfende Statistik* für die $\mathcal{G}-$invarianten Wahrscheinlichkeiten ν auf Y.

2. AUSTAUSCHBARE VERTEILUNGEN: MAXWELL-BOLTZMANN, BOSE-EINSTEIN UND FERMI-DIRAC STATISTIK

Wir folgen Bachs Ü berlegungen und leiten mit Hilfe von Theorem 1.1 die Maxwell-Boltzmann-, Bose-Einstein- und Fermi-Dirac Statistik ab.

Wir betrachten hier die folgende Situation, die *die unterste Ebene* beschreibt: X sei eine nichtleere, endliche Menge und Y das kartesische Produkt X^n. $\mathcal{G}$ sei die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ aller Permutationen σ der natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Diese wirkt vermöge

$$\sigma : y = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto gy = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \tag{2.1}$$

als Gruppe $\mathcal{G}$ auf Y. (Wir bezeichnen also die von $\mathcal{G}$ induzierte, auf Y wirkende Gruppe ebenfalls mit $\mathcal{G}$.)

$\mathcal{G}$ definiert die folgende Äquivalenzrelation in $Y : y \sim y'$ genau dann, wenn $\sigma y = y'$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}$. Diese Äquivalenzrelation kann durch das folgende Paar (Γ, r) dargestellt werden: $\Gamma = \mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X)$; das ist die Menge aller Punktmasse auf X mit der Gesamtmasse n, und

$$r : y = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}. \tag{2.2}$$

Man beachte, dass Γ und alle Y_γ endlich sind. Genauer gelten

$$|\Gamma| = \binom{|X| + n - 1}{n}; \tag{2.3}$$

$$|Y_\gamma| = \binom{n}{\gamma}. \tag{2.4}$$

(Ein Element $y \in Y_\gamma$ kann man mit der Zerlegung von $\{1, \ldots, n\}$) identifiziert werden, deren Elemente $\{j | x_j = a\}$, $a \in X$, $\gamma(a)$ Elemente besitzen.)

Der obige Satz hat damit den folgenden Satz als Konsequenz. Λ_γ bezeichnet dabei die gleichmässige Verteilung auf Y_γ.

Theorem 2. *Die Gleichung*

$$P = \sum_\gamma \Lambda_\gamma R(\gamma) \tag{2.5}$$

vermittelt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Punktprozessen $R \in \mathcal{PM}_n^{\cdot\cdot}$ *und* $\mathcal{G}-$*invarianten Wahrscheinlichkeiten* P *auf* Y.*; und es gilt dann*

$$P(y) = \Lambda_{r(y)}(y) \cdot R(r(y)), y \in Y. \tag{2.6}$$

Auf diese Weise kann man im Prinzip durch Vorgabe der Punktprozesse R alle $\mathcal{G}-$invarianten Wahrscheinlichkeiten P bekommen. Wir nennen im Folgenden solche $\mathcal{G}-$invarianten P *austauschbar oder auch symmetrisch*. Mit diesen beschreibt man in der statistischen Mechanik *ununterscheidbare Teilchen* ([1]).

Wir geben einige historisch wichtige *Beispiele*: Ist ρ eine Wahrscheinlichkeit auf X, so definiert

$$\mathcal{B}_\rho^n(\mu) = \binom{n}{\mu} \cdot \prod_{a \in X} \rho(a)^{\mu(a)}, \mu \in \mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X), \tag{2.7}$$

bekanntlich einen Punktprozess aus $\mathcal{PM}_n^{\cdot\cdot}(X)$. Ist ρ die gleichmässige Verteilung, so schreiben wir kürzer $\mathcal{B}^n$ und nennen ihn den *Boltzmannschen Prozess*, weil er auf Boltzmann [3] zurückgeht. Der vermöge (2.6) zugehörige symmetrische Prozess P_ρ^n ist

$$P_\rho^n(y) = \prod_{a \in X} \rho(a)^{r(y)(a)}, y \in Y. \tag{2.8}$$

P_ρ^n ist nichts anderes als das Produkt ρ^n. Die Darstellung (2.7) zeigt unmittelbar seine Symmetrie. P_ρ^n heisst in der statistischen Mechanik *Maxwell-Boltzmann Statistik zu* ρ.

Als nächstes betrachten wir den Prozess, der definiert ist durch

$$\mathcal{E}^n(\mu) = \frac{1}{\binom{d+n-1}{n}}, \mu \in \mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X). \tag{2.9}$$

Dies ist die gleichmässige Verteilung auf $\mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X)$. Man nennt $\mathcal{E}^n$ in der quantenstatistischen Mechanik den *Bose-Einstein Prozess zum Parameter* n.

Die zugehörige symmetrische Verteilung auf X^n ist offenbar gegeben durch

$$P^n_{\mathcal{BE}}(y) = \frac{1}{\binom{n}{r(y)}} \cdot \frac{1}{\binom{d+n-1}{n}}, y \in X^n. \tag{2.10}$$

In der statistischen Mechanik heisst $P^n_{\mathcal{BE}}$ die *Bose-Einstein Statistik.*

Schliesslich betrachten wir den Prozess

$$\mathcal{D}^n(\mu) = \frac{1}{\binom{d}{n}}, \mu \in \mathcal{M}^{\cdot}_n(X), n \leq d.(\mathcal{D}^n \equiv 0 \text{ sonst }) \tag{2.11}$$

Dies ist die gleichmässige Verteilung auf der Menge $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$ der einfachen Punktmasse auf X, d.h. der Teilmengen von X. Diese heisst in der Statistischen Physik der *Fermi-Dirac Prozess in* X.

Die zugehörige symmetrische Verteilung auf X^n ist offenbar gegeben durch

$$P^n_{\mathcal{FD}}(y) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{\binom{d}{n}}, y \in \{r \in \mathcal{M}^{\cdot}(X)\}. \tag{2.12}$$

In der quantenstatistischen Mechanik heisst $P^n_{\mathcal{FD}}$ die *Fermi-Dirac Statistik.*

3. SYMMETRISCHE PUNKTPROZESSE UND IHRE ZERLEGUNGEN

Wir formulieren nun Krickebergs Satz für die auf $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ operierende symmetrische Gruppe.

Wir gehen nun von X^n auf die nächst höhere Ebene $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_n(X)$ bzw. $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ und gehen ganz parallel vor. X sei wieder eine nichtleere endliche Menge; und Y nun die (abzählbare) Menge $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ aller Punktmasse auf X. $\mathcal{G}$ sei die endliche symmetrische Gruppe aller Permutationen g von X. Diese wirkt vermöge

$$g : \mu \longmapsto g\mu = \sum_{x \in X} \mu(x) \cdot \delta_{gx} \tag{3.1}$$

als Gruppe $\mathcal{G}$ auf Y.

$\mathcal{G}$ definiert nun die Äquivalenzrelation in $Y : \mu \sim \nu$ genau dann, wenn $g\mu = \nu$ für ein $g \in \mathcal{G}$. Diese Äquivalenzrelation kann durch das folgende Paar (Γ, r) dargestellt werden: $\Gamma = \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_d(\mathbb{N}_0)$, und

$$r : \mu \mapsto \gamma, \gamma(j) = cd\,\{\mu = j\}, j \geq 0. \tag{3.2}$$

Wieder sind alle Mengen Y_γ endlich. Genauer gilt

$$|Y_\gamma| = \binom{d}{\gamma} = \frac{d!}{\prod_{j \geq 0} \gamma(j)!}. \tag{3.3}$$

(Ein Element $\mu \in Y_\gamma$ kann mit derjenigen Zerlegung von X identifiziert werden, deren Elemente $M_j = \{\mu = j\}$ $\gamma(j)$ Elemente besitzen.)

Der obige Satz hat damit den folgenden Satz als Konsequenz. Λ_γ bezeichnet nun den Punktprozess in X, der durch die gleichmässige Verteilung auf Y_γ definiert ist.

Theorem 3. *Die Gleichung*

$$P = \sum_\gamma \Lambda_\gamma R(\gamma) \tag{3.4}$$

vermittelt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Prozessen $R \in \mathcal{PM}_d^{\cdot\cdot}(\mathbb{N}_0)$ *und* $\mathcal{G}-$*invarianten Punktprozessen* P *in* X. *Es gilt dann*

$$P(\mu) = \Lambda_{r(\mu)}(\mu) \cdot R(r(\mu)), \mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X). \tag{3.5}$$

Wieder nennen wir $\mathcal{G}-$invariante Punktprozesse P in X *symmetrisch.*

4. MAXWELL-BOLTZMANN, BOSE-EINSTEIN UND FERMI-DIRAC PROZESSE

Wir geben einige klassische Anwendungen des letzten Satzes, die auf Boltzmann [3] *zurückgehen und von Bach* [1, 2] *rekonstruiert wurden.*

r vermittelt nun zwischen den Ebenen $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ und $\mathcal{M}_d^{\cdot\cdot}(\mathbb{N}_0)$. Auf $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ haben wir schon die Prozesse $(\mathcal{B}_\rho^n)_{n\geq 0}, (\mathcal{E}^n)_{n\geq 0}$ sowie $(\mathcal{D}^n)_{n\geq 0}$ kennengelernt. Offenbar sind diese symmetrisch in dem neuen Sinne. Jede Mischung dieser Familien bezüglich n liefert natürlich einen symmetrischen Prozess in X. Diese Prozesse heissen in der statistischen Mechanik *Maxwell- Boltzmann, Bose-Einstein und Fermi-Dirac Prozesse in* X *zu* n *und (im ersten Fall)* ρ.

Wir ermitteln nun mit Hilfe von (3.5) die zu diesen Prozessen gehörigen Bildprozesse $R_{\mathcal{MB}}, R_{\mathcal{BE}}$ bzw. $R_{\mathcal{FD}}$.

Wir beginnen mit dem Fermi-Dirac Prozess. Das Bild $R_{\mathcal{FD}}$ von $\mathcal{D}^n$ unter der Transformation r ist offenbar

$$R_{\mathcal{FD}} = \Delta_{\gamma_0}. \tag{4.1}$$

Dies ist das Diracsche Mass für das spezielle Punktmass γ_0, definiert durch $\gamma_0(0) = d - n, \gamma_0(1) = n$, und $\gamma_0(j) = 0$ sonst.

Das Bild $R_{\mathcal{BE}}$ von $\mathcal{E}^n$ unter r ist gegeben durch

$$R_{\mathcal{BE}}(\gamma) = \binom{d}{\gamma} \cdot \frac{1}{\binom{d+n-1}{n}}, \gamma \in \mathcal{M}_d^{\cdot\cdot}(\{0, \dots, n\}) \tag{4.2}$$

Dies ist ein interessanter Punktprozess in $\{0, \ldots, n\}$.

Hieraus ergibt sich nebenbei die kombinatorische Identität

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{M}_d^{\cdot}(\{0,\ldots,n\})} \binom{d}{\gamma} = \binom{d+n-1}{n}. \tag{4.3}$$

Schliesslich ist, wie man leicht nachrechnet, das Bild $R^{n,\rho}_{\mathcal{MB}}$ von $\mathcal{B}^n_\rho$ unter r gegeben durch

$$R^{n,\rho}_{\mathcal{MB}}(\gamma) = \binom{d}{\gamma} \cdot \prod_{j \geq 0} \frac{1}{(j!)^{\gamma(j)}} \cdot \prod_j \prod_{a : \mu(\gamma)(a) = j} \rho(a)^j. \tag{4.4}$$

Hier ist $\mu(\gamma)$ irgendein Element aus $Y_\gamma = \{r = \gamma\}$. Ist hier ρ die gleichmässige Verteilung auf X, so erhält man

$$R^{n,\rho}_{\mathcal{MB}}(\gamma) = \binom{d}{\gamma} \cdot \prod_{j \geq 0} \frac{1}{(j!)^{\gamma(j)}} \cdot \frac{1}{d^n}. \tag{4.5}$$

Wie Bach [1, 2] bemerkte, gehen die Formeln (4.2) und (4.5) auf Boltzmann [3] zurück.

Wir betrachten nun noch zwei klassische Beispiele von Mischungen.

Mischt man etwa die Familie $(\mathcal{D}^n)_n$ mit Hilfe der Binomialverteilung zu den Parametern (d, p), wobei $0 < p < 1$, so erhält man offenbar den Bernoullischen Prozess

$$\mathcal{F}^d_p(\mu) = p^{|\mu|} \cdot (1-p)^{d-|\mu|}, \mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X). \tag{4.6}$$

Diesen symmetrischen Prozess $\mathcal{F}^d_p$ nennen wir in diesem Zusammenhang ebenfalls *Fermi-Diracsche Prozesszum Parameter (d,p)*. (Es ist nichts anderes als der Münzwurfprozess.) Sein Bild unter r ist natürlich die Binomialverteilung zu (n, p).

Sei schliesslich ρ ein beliebiges Mass auf X, das nicht das Nullmass ist und $\hat{\rho}$ seine Normalisierung zu einer Wahrscheinlichkeit. Mischt man nun die Familie der symmetrischen Prozesse $\mathcal{B}^n_{\hat{\rho}}, n \geq 0$, mit Hilfe der Poisson Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ zum Parameter $\rho(X)$, so erhält man bekanntlich den Poissonschen Prozess P_ρ, den man in der Statischen Mechanik den *Maxwell-Boltzmann Prozess mit Intensität* ρ nennt. Die Verteilung von r ist in diesem Fall gegeben durch

$$R_{\mathcal{MB}}(\gamma) = \binom{d}{\gamma} \cdot \frac{1}{N(\gamma)!} \cdot \exp(-\rho(X)) \cdot \prod_{j \geq 0} \frac{1}{(j!)^{\gamma(j)}} \cdot \prod_j \prod_{a : \mu(\gamma)(a) = j} \rho(a)^j. \tag{4.7}$$

Hier haben wir die Formel (4.4) benutzt. (Und $N(\gamma) = \sum_{j=0}^{n} j \cdot \gamma(j)$ ist die Kardinalitaet der zu γ gehörigen μ.) Die Invarianz des Poissonschen Punktprozesses P_ρ unter der 'Zeitentwicklung' einer Permutation ist eine Version eines grundlegenden Satzes von Doob [5] .

5. EWENS-SÜTÖ PROZESSE

Wir beschliessen diese Note mit einem berümten symmetrischen Prozess, der unabhängig voneinander von Ewens [4] *in der theoretischen Biologie und von Sütö* [9] *in der quantenstatistischen Mechanik gefunden wurde. Es handelt sich dabei um zufällige Permutationen, die unter Konjugationen invariant sind. Diese Invarianz ist insofern für die stochastische Geometrie von Bedeutung, als sie geometrische Eigenschaften von Permutationen invariant lässt. Genauer beinhaltet das Prinzip der Konjugation, zwei Teile: (1) Ist $\sigma \in \mathcal{G}$ eine Permutation eines bestimmten Typs, so ist auch $g.\sigma = g\sigma g^{-1}, g \in \mathcal{G}$, eine Permutation dieses Typs. (2) Ist Y_σ eine geometrische Eigenschaft von σ (z.B. Fixpunkt oder ein Zyklus oder ein Zyklus einer gegebenen Länge zu sein), so gilt $g.Y_\sigma = Y_{g.\sigma}$.*

Wieder sei $\mathcal{G}$ die Gruppe der Permutationen einer $n-$elementigen nicht leeren Menge X. Diese wirke nun auf sich selbst vermoege der inneren Automorphismen

$$g : \sigma \longmapsto g.\sigma = g\sigma g^{-1}. \tag{5.1}$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind die Konjugationsklassen . Diese werden durch das folgende tupel (Γ, r) dargestellt: Γ ist die Menge $\mathcal{M}_{(n)}^{\cdot\cdot}(\mathbb{N})$ aller Punktmasse γ auf $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N(\gamma) = \sum_j j \cdot \gamma(j) = n$; und $r : \mathcal{G} \longmapsto \Gamma$ ist definiert durch $r(\sigma) = \gamma$, wobei $\gamma(j)$ die Zahl der Zyklen der Länge j in der zyklischen Zerlegung von σ zählt. Es ist wohlbekannt, dass die Mächtigkeiten der Äquivalenzklassen Y_γ gegeben ist durch

$$|Y_\gamma| = n! \cdot q(\gamma), q(\gamma) = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{\gamma(j)! \cdot j^{\gamma(j)}}. \tag{5.2}$$

Wieder sind die Äquivalenzklassen endlich und besitzen als eindeutig bestimmte symmetrische Verteilung die gleichmässige Verteilung

$$\Lambda_\gamma(\sigma) = \frac{1}{n! \cdot q(\gamma(\sigma))}, \sigma \in Y_\gamma. \tag{5.3}$$

(*Symmetrisch* bedeutet nun, invariant gegen inneren Automorphismen zu sein!)

Als Konsequenz der Krickebergschen Theorie vermittelt also die Gleichung $P = \sum_\gamma \Lambda_\gamma R(\gamma)$ umkehrbar eindeutig zwischen den symmetrischen, zufä lligen Permutationen P auf $\mathcal{G}$ und den Punktprozessen $R \in \mathcal{PM}^{\cdot\cdot}_{(n)}(\mathbb{N})$. Wählt man etwa für R das Diracsche Mass Δ_γ für ein $\gamma \in \Gamma$, so ist die zugehö rige symmetrische Permutation gegeben durch die gleichmässige Verteilung Λ_γ. Ein interessanteres Beispiel erhдlt man so: Es sei d eine strikt positive Funktion auf $\mathbb{N}$. Man betrachte die ***kanonische Partitionfunktion des idealen Bosegases***, definiert durch

$$Q_n(d) = \sum_{\gamma : N(\gamma) = n} d(\gamma) \cdot q(\gamma). \tag{5.4}$$

Hier ist $d(\gamma) = \prod_{j \geq 1} d(j)^{\gamma(j)}$. Es ist wohlbekannt (siehe z.B. [8]), dass

$$\exp(\sum_j d(j) \cdot \frac{z^j}{j}) = \sum_{n \geq 0} Q_n(d) \cdot z^n, 0 < z < 1. \tag{5.5}$$

Dies ermöglicht die Berechnung von $Q_n(d)$. Ist z.B. d gegeben durch die konstante natürliche Zahl d, so ist $Q_n(d) = \binom{d+n-1}{n}$.

(5.4) ermöglicht die Definition des folgenden Punktprozesses $R \in \mathcal{PM}^{\cdot\cdot}_{(n)}(\mathbb{N})$:

$$R(\gamma) = \frac{1}{Q_n(d)} \cdot d(\gamma) \cdot q(\gamma) \cdot 1_{\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{(n)}(\mathbb{N})}(\gamma), \gamma \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{(n)}(\mathbb{N}). \tag{5.6}$$

Zu diesem Prozess R gehört die zufä llige symmetrische Permutation

$$\mathcal{S}_d^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{n! \cdot Q_n(d)} \cdot d(r(\sigma)) \cdot 1_{\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{(n)}(\mathbb{N})}(r(\sigma)), \sigma \in \mathcal{G}. \tag{5.7}$$

Bisher ist der Parameter n festgehalten. Eine natürliche Mischung der $\mathcal{S}_d^{(n)}, n \geq 0$, ist die folgende, wenn man (5.5) beachtet: Für $0 < z < 1$ sei

$$\mathcal{S}_{d,z}(\sigma) = \exp(-\sum_j d(j) \cdot \frac{z^j}{j}) \cdot \sum_{n \geq 0} \cdot z^n \cdot Q_n(d) \cdot \mathcal{S}_d^{(n)}. \tag{5.8}$$

Wir nennen $\mathcal{S}_{d,z}$ den *Ewens-Sütö Prozess zu den Parametern* (d, z). Eine detaillierte Analyse dieses interessanten Prozesses findet man in [8].

6. SCHOLION

Wir kommentieren hier noch eine sehr interessante Randbemerkung von Alexander Bach, die die obigen Überlegungen weiterführt. Dann geben wir einen Ausblick auf weitere nichtklassische Statistiken.

Sei $\mathcal{Z} = \{X_1, \ldots, X_f\}$ Zerlegung von X in nicht leere Teilmengen der Mächtigkeiten $d_1, \ldots, d_f$. $\mathcal{G}_j$ bezeichne die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}(X_j)$, und $\mathcal{G}$ sei die zugehörige

Produktgruppe $\prod_j \mathcal{G}_j$. Diese wirkt in natürlicher Weise auf $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ vermöge

$$g = (g_1, \ldots, g_f) : \mu = \mu_1 + \cdots + \mu_f \longmapsto g_1\mu_1 + \cdots + g_f\mu_f = g.\mu. \tag{6.1}$$

Hier sind μ_j die Restriktionen von μ auf X_j.

Diese Gruppe induziert eine Äquivalenzrelation, die repräsentiert wird durch das folgenden tupel $(\mathcal{K}, r)$.

$$\mathcal{K} = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{d}(\mathbb{N}_0)} \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(1)}(\mathbb{N}_0) \times \cdots \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(f)}(\mathbb{N}_0) \tag{6.2}$$

$$r(\mu) = \kappa = (r_1(\mu), \ldots, r_f(\mu)). \tag{6.3}$$

Hier ist $r_j(\mu) = r_j(\mu)$, wobei r_j die nun für X_j wie oben unter (3.2) definierte Transformation ist. Offenbar sind die Kardinalitäten der Äquivalenzklassen $Y_\kappa = \{r = \kappa\}$ gegeben durch

$$|Y_\kappa| = \prod_j \binom{d_j}{\gamma(j)}, \kappa \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(1)}(\mathbb{N}_0) \times \cdots \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(f)}(\mathbb{N}_0). \tag{6.4}$$

Man ist damit in der Situation des Krickebergschen Zerlegungssatzes und kann im Prinzip durch Vorgabe von Verteilungen Q von γ und Verteilungen R^γ auf dem Produktraum $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(1)}(\mathbb{N}_0) \times \ldots \times \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(f)}(\mathbb{N}_0)$ alle symmetrischen Prozesses bezüglich der Produktgruppe erhalten. Waehlt man hier z.B. für R^γ das Produkt der Verteilungen

$$R^\gamma_j \equiv \binom{d_j}{\gamma(j)} \cdot \frac{1}{\binom{d_j+\gamma(j)-1}{\gamma(j)}}, j = 1, \ldots, f, \tag{6.5}$$

auf $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{\gamma(j)}(\mathbb{N}_0)$ und für Q die gleichmäss ige Verteilung auf $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{d}\{0, \ldots, n\}$, so erhält man den von Bach [1] in der Formel (3.83) angegebenen Punktprozess

$$P^n(\mu) = \frac{1}{\binom{d+n-1}{n}} \cdot \prod_j \frac{1}{\binom{d_j+\gamma(j)-1}{\gamma(j)}}, \mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}_{n}(X). \tag{6.6}$$

Nebenbei erhält man wieder eine kombinatorische Identität, die diejenige von (4.3) verallgemeinert. Natürlich kann man nun auch bzgl. n mischen.

Für weitere Beispiele verweisen wir auf Bach. Im Prinzip kann man dann wieder auf die höheren Ebenen gehen.

Wir betrachten *abschliessend* die folgenden, offenbar symmetrischen Verteilungen auf $Y = X^n$:

$$P^{(n)}_k((x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot d^{n-k} \cdot \sum_{\mathcal{J}:|\mathcal{J}|=n-k} \prod_{j \notin \mathcal{J}} \rho(x_j),\ k = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Dann ist auch $\phi(P^{(n)}_1, \ldots, P^{(n)}_n)$ für jedes Polynom ϕ in n Variablen symmetrisch und liefert folglich eine symmetrische Verteilung auf Y, falls man geeignet normiert. Z.B.

ist mit $S_\nu^{(n)}((x_1,\ldots,x_n)) = \frac{1}{n\cdot d^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sum_a \rho(a)^\nu} \sum_{j=1}^n \rho(x_j)^\nu, \nu \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_1^{(n)} &= P_1^{(n)};\\
S_2^{(n)} &= \frac{1}{n\cdot d^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sum_a \rho(a)^2}[P_1^{(n)^2} - 2\cdot P_2^{(n)}];\\
S_3^{(n)} &= \frac{1}{n\cdot d^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sum_a \rho(a)^3}[P_1^{(n)^3} - 3\cdot P_1^{(n)}\cdot P_2^{(n)} + 3\cdot P_3^{(n)}];\\
S_4^{(n)} &= \frac{1}{n\cdot d^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sum_a \rho(a)^4}[P_1^{(n)^4} - 4\cdot P_1^{(n)^2}\cdot P_2^{(n)} + 2\cdot P_2^{(n)^2}\\
&\quad +4\cdot P_1^{(n)}\cdot P_3^{(n)} - 4\cdot P_4^{(n)}].
\end{aligned}$$

$P_n^{(n)}$ ist die Maxwell-Boltzmann Statistik zu ρ. $P_1^{(n)}$ ist keine der klassischen Statistiken, falls ρ von der gleichmässigen Verteilung verschieden ist.

Wie ist das zufällige Zählmass r bei zugrunde liegendem $P_1^{(n)}$ verteilt? Wie man sofort nachrechnet, ist diese Verteilung gegeben durch

$$R_1^{(n)}(\mu) = \frac{1}{n\cdot d^{n-1}} \cdot \binom{n}{\mu} \cdot \rho(\mu), \mu \in \mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X). \tag{6.8}$$

Hier bezeichnet $\rho(\mu)$ den Erwartungswert von μ, betrachtet als Funktion auf X, bezäglich ρ. Es ist interessant, dass $R_1^{(n)}$ mit P_ρ^n, dem Maxwell-Boltzmann Prozess zu ρ, übereinstimmt, falls ρ die gleichmässige Verteilung auf X ist.

Wir betrachten zum Abschluss noch die symmetrische Statistik $P_{n-1}^{(n)}$ und rechnen die zugehörige Verteilung von r aus. Man erhält offenbar

$$R_{n-1}^{(n)}(\mu) = \frac{1}{n\cdot d} \cdot \binom{n}{\mu} \cdot \sum_{b\in X}[\rho(b)^{\mu(b)-1} \cdot \prod_{a\neq b} \rho(a)^{\mu(a)}] \cdot \mu(b), \mu \in \mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X). \tag{6.9}$$

Wieder ist dies der Maxwell-Boltzmann Prozess zu ρ, falls ρ die gleichmässige Verteilung auf X ist.

Sowohl $R_1^{(n)}$ als auch $R_{n-1}^{(n)}$ sind interessante neue Punktprozesse auf $\mathcal{M}_n^{\cdot\cdot}(X)$. Welche Eigenschaften haben sie? Sind sie Gibbssch? Wenn ja, zu welcher Interaktion? Wie sind die Zählvariablen $\zeta_B(\mu) = \mu(B), B \subseteq X$, verteilt?

Es wäre interessant, auch die anderen Prozesse $R_k^{(n)}, k = 2, ..., n-1$, zu betrachten und das obige Bachsche Programm, das wir für die klassischen Statistiken durchgeführt haben, zu entwickeln. Es stellt sich dabei wieder die Frage, welche Eigenschaften diese haben und ob unter diesen Prozessen Kandidaten sind, die für die quantenstatistische Mechanik von Bedeutung sind.

Список литературы

[1] A. Bach, *Indistinguishable Classical Particles* (Lecture notes in physics, Springer, 1997).

[2] A. Bach, "Boltzmann's probability distribution of 1877", Arch. Hist. Ex. Sci. **41**, 1-40 (1990).

[3] L. Boltzmann, "Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht", Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math. Nat. Kl. **76**, 373-435 (1877). Reprinted in Hasenöhrl (ed.), Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd.II, 164-223, Barth, Leipzig (1909).

[4] W. J. Ewens, "The sampling theory of selectively neutral alleles. Theoretical biology" **3**, 87-112 (1972).

[5] J. L. Doob, *Stochastic processes* (Wiley, 1953).

[6] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line-processes", In: Harding, E.F., Kendall, D.G. (ed.): Stochastic geometry. Wiley (1974).

[7] P. A. Meyer, "Une remarque sur les lois echangeables", In: Azema, Meyer, Yor (eds.), Seminaires de probabilites XXIV 1988/89, 486-487. Lecture notes in mathematics **1426** (1990).

[8] S. Poghosyan, H. Zessin, "An integral characterization of random permutations. A point process approach", SFB-preprint, Bielefeld (2008).

[9] Andras Sütö, "Percolation transition in the Bose gas", J. Phys. A: Math. Gen. 4689-4710 (1993).

Поступила 18 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 1, 2009, стр. 97-110

A NOTE ON STANDARD BOREL AND RELATED SPACES

CHRIS PRESTON

Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany
E-mail: *preston@math.uni-bielefeld.de*

Аннотация. The following is a fundamental construction in the theory of point processes: For a measurable space $(X, \mathcal{E})$ let $X_{\triangleleft}$ denote the set of all measures on $(X, \mathcal{E})$ taking only values in the set $\mathbb{N}$ (and so each $p \in X_{\triangleleft}$ is a finite measure, since $p(X) \in \mathbb{N}$); put $\mathcal{E}_{\triangleleft} = \sigma(\mathcal{E}_{\diamond})$, where $\mathcal{E}_{\diamond}$ is the set of all subsets of $X_{\triangleleft}$ having the form $\{p \in X_{\triangleleft} : p(E) = k\}$ with $E \in \mathcal{E}$ and $k \in \mathbb{N}$.

Dedicated to the 80th birthday of Klaus Krickeberg

1. INTRODUCTION

One purpose of this note is to give a proof of the following result (which is well-known to those working in point processes):

Theorem 1. *If $(X, \mathcal{E})$ is a standard Borel space then so is $(X_{\triangleleft}, \mathcal{E}_{\triangleleft})$.*

This theorem, or results which are equivalent to it, can be found in Matthes, Kerstan and Mecke [13], Kallenberg [9] and Bourbaki [2].

A measurable space $(X, \mathcal{E})$ is *standard Borel* if there exists a metric on X which makes it a complete separable metric space in such a way that $\mathcal{E}$ is then the Borel σ-algebra (the smallest σ-algebra containing the open subsets of X). The name 'standard Borel' was given to such spaces by Mackey in [12]. In particular, a standard Borel space $(X, \mathcal{E})$ is countably generated, i.e., $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{S})$ for some countable subset $\mathcal{S}$ of $\mathcal{E}$. (This follows because a separable metric space has a countable base for its topology.) Moreover, it is also *separable*, i.e., $\{x\} \in \mathcal{E}$ for each $x \in X$.

In fact we are not really going to work with standard Borel spaces but rather with spaces which we call substandard Borel. These are essentially equivalent to standard Borel spaces, although this equivalence (which is formulated precisely in Proposition 2) is by no means easy to establish.

The theory of substandard Borel spaces can be developed using only the kind of results to be found in an introductory course on measure theory. This makes it much more accessible than the usual theory of standard Borel spaces. Moreover, in many applications where a standard Borel space seems to be needed a substandard Borel space works just as well. (Some examples of this are discussed at the end of the note.) The term 'substandard' should here be considered in the sense of *indicating a (pattern of linguistic) usage which does not conform to that of the prestige group in a (speech) community.*

In order to define a substandard Borel space we need the following very special space M and some of its properties. Let $M = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (the space of all sequences $\{z_n\}_{n\geq 0}$ of 0's and 1's), considered as a compact metric space with respect to the metric $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ given by

$$d(\{z_n\}_{n\geq 0}, \{z'_n\}_{n\geq 0}) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}|z_n - z'_n|$$

(or any equivalent metric the reader might prefer), and let $\mathcal{B}$ be the σ-algebra of Borel subsets of M.

For each $m \geq 0$ let $\mathrm{q}_m : M \to \{0,1\}^{m+1}$ be given by $\mathrm{q}_m(\{z_n\}_{n\geq 0}) = (z_0, \ldots, z_m)$ and let $\mathcal{C}_m = \mathrm{q}_m^{-1}(\mathcal{P}(\{0,1\}^m))$. Then $\mathcal{C}_m$ is a finite algebra and each of the sets in $\mathcal{C}_m$ is both open and closed; also $\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}_{m+1}$. Let $\mathcal{C} = \bigcup_{m\geq 0} \mathcal{C}_m$; then $\mathcal{C}$ is a countable algebra (the algebra of *cylinder sets*) and each of the sets in $\mathcal{C}$ is both open and closed. Also for each $m \geq 0$ let $\mathrm{p}_m : M \to \{0,1\}$ be the projection mapping defined by letting $\mathrm{p}_m(\{z_n\}_{n\geq 0}) = z_m$ for each $\{z_n\}_{n\geq 0} \in M$ and let

$$\Lambda_m = \mathrm{p}_n^{-1}(\{1\}) = \{\{z_n\}_{n\geq 0} \in M : z_m = 1\} .$$

Lemma 1. *$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\{\Lambda_m : m \geq 0\}$ and so in particular $(M, \mathcal{B})$ is countably generated.*

Proof: Let $\mathcal{O}$ be the set of open subsets of M. Then the countable set $\mathcal{C}$ is a base for the topology on M, and so each $O \in \mathcal{O}$ can be written as a countable union of elements from $\mathcal{C}$. Hence $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$ and thus $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$, i.e., $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Moreover, each element of $\mathcal{C}$ can written as a finite intersection of elements from the set $\{\Lambda_m : m \geq 0\} \cup \{X \setminus \Lambda_m : m \geq 0\}$ and it therefore follows that $\mathcal{C} \subset \sigma(\{\Lambda_m : m \geq 0\})$. This implies that $\mathcal{B} = \sigma(\{\Lambda_m : m \geq 0\})$. $\square$

The following result appears as Theorem 2.1 in Mackey [12]:

Proposition 1. *A measurable space $(X, \mathcal{E})$ is countably generated if and only if there exists a mapping $f : X \to M$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$.*

Proof Suppose first $(X, \mathcal{E})$ is countably generated; then there exists a sequence $\{E_n\}_{n \geq 0}$ from $\mathcal{E}$ such that $\mathcal{E} = \sigma(\{E_n : n \geq 0\})$. Now define $f : X \to M$ by $f(x) = \{I_{E_n}(x)\}_{n \geq 0}$. Then $f^{-1}(\Lambda_n) = E_n$ for each $n \geq 0$ and so by Lemma 1

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\{\Lambda_n : n \geq 0\})) = \sigma(\{E_n : n \geq 0\}) = \mathcal{E} \ .$$

Suppose conversely there exists $f : X \to M$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ and for each $n \geq 0$ put $E_n = f^{-1}(\Lambda_n)$. Then by Lemma 1

$$\sigma(\{E_n : n \geq 0\}) = \sigma(\{f^{-1}(\Lambda_n) : n \geq 0\}) = f^{-1}(\sigma(\{\Lambda_n : n \geq 0\})) = f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$$

and thus $\mathcal{E}$ is countably generated. □

We call a measurable space $(X, \mathcal{E})$ a ***substandard Borel space*** if there exists a mapping $f : X \to M$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ such that $f(X) \in \mathcal{B}$. (This additional condition is nowhere near as harmless as it might first appear.) In particular, by Proposition 1 a substandard Borel space is countably generated. The notion of a substandard Borel space already occurs implicitly in Parthasarthy's proof of the Kolmogorov extension theorem for the inverse limit of standard Borel spaces in Chapter V of [14].

The relationship between standard Borel and substandard Borel is the following:

Proposition 2. *A measurable space $(X, \mathcal{E})$ is standard Borel if and only if it is separable and substandard Borel.*

Proof: The fact that a standard Borel space is substandard Borel can be proved using only results from an introductory course on measure theory, and we give a proof after we have proved Theorem 2. This fact will be needed in two places later and we refer to it as the elementary part of Proposition 2. The proof of the converse, however, requires the typical machinery associated with standard Borel spaces, which tends to be rather off-putting at a first acquaintance. A proof can be found, for example, in Parthasarathy [14] or Cohn [3]. At the end of the note we give some more details on what is involved here. □

The main part of this note is taken up with an elementary proof of the following:

Theorem 2. *If $(X, \mathcal{E})$ is a substandard Borel space then so is $(X_{\triangleleft}, \mathcal{E}_{\triangleleft})$.*

Proposition 2 implies that Theorem 1 follows from Theorem 2, since it is easily checked that $(X_{\triangleleft}, \mathcal{E}_{\triangleleft})$ is separable whenever $(X, \mathcal{E})$ is. However, as indicated above, in many situations Theorem 2 can be applied directly, and this avoids appealing to the non-elementary part of Proposition 2. The purpose of this note is not only to prove Theorem 2 but also to show how results are typically proved when working with substandard Borel spaces.

We now start preparing for the proof of Theorem 2.

Let $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$ be measurable spaces and let $f : (X, \mathcal{E}) \to (Y, \mathcal{F})$ be a measurable mapping. If $p \in X_\triangleleft$ and $f_* p$ is the image measure on $(Y, \mathcal{F})$ then $(f_* p)(F) = p(f^{-1}(F)) \in \mathbb{N}$ for all $F \in \mathcal{F}$ and so $f_* p \in Y_\triangleleft$. Thus there is a mapping $f_\triangleleft : X_\triangleleft \to Y_\triangleleft$ given by $f_\triangleleft(p) = f_* p$ for each $p \in X_\triangleleft$.

Lemma 2. *(1) The mapping $f_\triangleleft : (X_\triangleleft, \mathcal{E}_\triangleleft) \to (Y_\triangleleft, \mathcal{F}_\triangleleft)$ is measurable.*

(2) If $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ then $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\triangleleft) = \mathcal{E}_\triangleleft$.

(3) If $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ and $f(X) \in \mathcal{F}$ then $f_\triangleleft(X_\triangleleft) \in \mathcal{F}_\triangleleft$.

Proof: (1) Let $F \in \mathcal{F}$ and $k \in \mathbb{N}$; then

$$\begin{aligned} & f_\triangleleft^{-1}(\{q \in Y_\triangleleft : q(F) = k\}) \\ & \qquad = \{p \in X_\triangleleft : f_\triangleleft(p)(F) = k\} = \{p \in X_\triangleleft : p(f^{-1}(F)) = k\} \,. \end{aligned}$$

Thus $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\Diamond) \subset \mathcal{E}_\Diamond$ and therefore

$$f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\triangleleft) = f_\triangleleft^{-1}(\sigma(\mathcal{F}_\Diamond)) = \sigma(f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\Diamond)) \subset \sigma(\mathcal{E}_\Diamond) = \mathcal{E}_\triangleleft \,.$$

(2) Let $E \in \mathcal{E}$ and $k \in \mathbb{N}$; then there exists $F \in \mathcal{F}$ with $f^{-1}(F) = E$ and the calculation in (1) shows that

$$f_\triangleleft^{-1}(\{q \in Y_\triangleleft : q(F) = k\}) = \{p \in X_\triangleleft : p(E) = k\} \,.$$

This implies $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\Diamond) = \mathcal{E}_\Diamond$ (since in (1) we showed that $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\Diamond) \subset \mathcal{E}_\Diamond$). Therefore $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\triangleleft) = f_\triangleleft^{-1}(\sigma(\mathcal{F}_\Diamond)) = \sigma(f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{F}_\Diamond)) = \sigma(\mathcal{E}_\Diamond) = \mathcal{E}_\triangleleft$.

(3) Put $f(X) = D$ and so $D \in \mathcal{F}$. If $p \in X_\triangleleft$ then

$$(f_* p)(D) = p(f^{-1}(D)) = p(X) = p(f^{-1}(Y)) = (f_* p)(Y) \,.$$

On the other hand, if $q \in Y_\triangleleft$ with $q(D) = q(Y)$ then there exists a measure p on $(X, \mathcal{E})$ with $f_* p = q$ (but note that this is only true because $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ and $q(Y \setminus D) = 0$). Moreover, since $p(f^{-1}(F)) = q(F) \in \mathbb{N}$ for all $F \in \mathcal{F}$ and $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ it follows that $p \in X_\triangleleft$. Therefore

$$\begin{aligned} f_\triangleleft(X) = \{f_\triangleleft(p) : p \in X_\triangleleft\} &= \{f_* p : p \in X_\triangleleft\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Y_\triangleleft : q(D) = n\} \cap \{q \in Y_\triangleleft : q(Y) = n\} \end{aligned}$$

and hence $f_\triangleleft(X) \in \mathcal{F}_\triangleleft$. $\square$

It is also useful to partition the space $X_\triangleleft$ into components consisting of those measures having the same total measure, and for this we recall the definition of the

σ-algebra occurring in the disjoint union of measurable spaces. Let S be a non-empty set and for each $s \in S$ let $(Y_s, \mathcal{F}_s)$ be a measurable space. Assume the sets Y_s, $s \in S$, are disjoint and put $Y = \bigcup_{s \in S} Y_s$. Then

$$\mathcal{F} = \{A \subset Y : A \cap Y_s \in \mathcal{F}_s \text{ for each } s \in S\}$$

is a σ-algebra of subsets of Y and $(Y, \mathcal{F})$ is called the *disjoint union* of the measurable spaces $(Y_s, \mathcal{F}_s)$, $s \in S$.

Now for each $n \in \mathbb{N}$ let $X^n_\triangleleft$ denote the set of all measures p on $(X, \mathcal{E})$ taking only values in the set $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n\}$ and with $p(X) = n$; put $\mathcal{E}^n_\triangleleft = \sigma(\mathcal{E}^n_\diamondsuit)$, where $\mathcal{E}^n_\diamondsuit$ is the set of all subsets of $X^n_\triangleleft$ having the form $\{p \in X^n_\triangleleft : p(E) = k\}$ with $E \in \mathcal{E}$ and $k \in \mathbb{N}_n$. Thus $X_\triangleleft$ is the disjoint union of the sets $X^n_\triangleleft$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3. *$\mathcal{E}_\triangleleft = \{A \subset X_\triangleleft : A \cap X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}^n_\triangleleft$ for each $n \in \mathbb{N}\}$ and thus the measurable space $(X_\triangleleft, \mathcal{E}_\triangleleft)$ is the disjoint union of the measurable spaces $(X^n_\triangleleft, \mathcal{E}^n_\triangleleft)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Proof: Put $\mathcal{D} = \{A \subset X_\triangleleft : A \cap X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}^n_\triangleleft$ for each $n \in \mathbb{N}\}$, so $\mathcal{D}$ is the σ-algebra in the definition of the disjoint union.

Let $\mathcal{D}^n_\triangleleft = \{A \cap X^n_\triangleleft : A \in \mathcal{E}_\triangleleft\}$; then $\mathcal{D}^n_\triangleleft$ is the trace σ-algebra of $\mathcal{E}_\triangleleft$ on $X^n_\triangleleft$ and thus $\mathcal{D}^n_\triangleleft = \sigma(\mathcal{D}^n_\diamondsuit)$, where $\mathcal{D}^n_\diamondsuit = \{A \cap X^n_\triangleleft : A \in \mathcal{E}_\diamondsuit\}$. But $\mathcal{D}^n_\diamondsuit = \mathcal{E}^n_\diamondsuit$ and hence $\mathcal{D}^n_\triangleleft = \mathcal{E}^n_\triangleleft$, i.e., $\mathcal{E}^n_\triangleleft = \{A \cap X^n_\triangleleft : A \in \mathcal{E}_\triangleleft\}$. Therefore if $A \in \mathcal{E}_\triangleleft$ then $A \cap X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}^n_\triangleleft$ for each $n \in \mathbb{N}$, which implies that $A \in \mathcal{D}$. This shows $\mathcal{E}_\triangleleft \subset \mathcal{D}$.

Conversely, let $A \in \mathcal{D}$; then $A \cap X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}^n_\triangleleft$ and thus there exists $A_n \in \mathcal{E}_\triangleleft$ with $A \cap X^n_\triangleleft = A_n \cap X^n_\triangleleft$ and this implies that $A \cap X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}_\triangleleft$ for each $n \in \mathbb{N}$, since $X^n_\triangleleft \in \mathcal{E}_\triangleleft$. Finally, we then have $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap X^n_\triangleleft) \in \mathcal{E}_\triangleleft$, i.e., $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_\triangleleft$, and hence $\mathcal{D} = \mathcal{E}_\triangleleft$. $\square$

Lemma 4. *If $f : X \to Y$ is any mapping then $f(f^{-1}(F)) = F \cap f(X)$ holds for all $F \subset Y$.*

Proof: If $y \in f(f^{-1}(F))$ then there exists $x \in f^{-1}(F)$ with $y = f(x)$ and then $y \in F$. Hence $y \in F \cap f(X)$, i.e., $f(f^{-1}(F)) \subset F \cap f(X)$. On the other hand, if $y \in F \cap f(X)$ then there exists $x \in X$ with $y = f(x)$, thus $x \in f^{-1}(F)$ and so $f \in f(f^{-1}(F))$, i.e., $F \cap f(X) \subset f(f^{-1}(F))$. $\square$

Lemma 5. *Let $(X, \mathcal{E})$ be a measurable space, $(Y, \mathcal{F})$ a substandard Borel space and suppose there exists a mapping $f : X \to Y$ with $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ and $f(X) \in \mathcal{F}$. Then $(X, \mathcal{E})$ is also substandard Borel.*

Proof: Since $(Y, \mathcal{F})$ is substandard Borel there exists a mapping $g : Y \to M$ with $g^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ and $g(Y) \in \mathcal{B}$ and then $g(F) \in \mathcal{B}$ for all $F \in \mathcal{F}$. (There exists $B \in \mathcal{B}$

with $g^{-1}(B) = F$ and hence by Lemma 4 $g(F) = g(g^{-1}(B)) = B \cap g(Y) \in \mathcal{B}$.) Put $h = g \circ f$; thus $h : X \to M$ with $h^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$ and $h(X) = g(f(X)) \in \mathcal{B}$. Therefore $(X, \mathcal{E})$ is substandard Borel. □

We can now describe the main steps in the proof of Theorem 2, thus let $(X, \mathcal{E})$ be substandard Borel. Then there exists a mapping $f : X \to M$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ and $f(X) \in \mathcal{B}$. Thus by Lemma 2 $f_\triangleleft^{-1}(\mathcal{B}_\triangleleft) = \mathcal{F}_\triangleleft$ and $f_\triangleleft(X_\triangleleft) \in \mathcal{B}_\triangleleft$, and so by Lemma 5 it is enough to show that $(M_\triangleleft, \mathcal{B}_\triangleleft)$ is substandard Borel. But by Lemma 3 $(M_\triangleleft, \mathcal{B}_\triangleleft)$ is the disjoint union of the measurable spaces $(M_\triangleleft^n, \mathcal{B}_\triangleleft^n)$, $n \in \mathbb{N}$, and in Lemma 7 we will see that if $(Y, \mathcal{F})$ is the disjoint union of substandard Borel spaces $(Y_n, \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, then $(Y, \mathcal{F})$ is also substandard Borel. It is thus enough to show that $(M_\triangleleft^n, \mathcal{B}_\triangleleft^n)$ is substandard Borel for each $n \in \mathbb{N}$.

In the proof of this last step we will need the following remarkable property of the space $(M, \mathcal{B})$:

Proposition 3. *Let μ be a finite finitely additive measure on $(M, \mathcal{C})$. Then μ is a measure and so it extends to a unique measure on $(M, \mathcal{B})$.*

Proof: If $\{C_n\}_{n\geq 1}$ is a decreasing sequence from $\mathcal{C}$ with $\bigcap_{n\geq 1} C_n = \emptyset$ then, since the elements of $\mathcal{C}$ are compact, there exists $m \geq 1$ so that $C_n = \emptyset$ for all $n \geq m$. Thus $\mu(C_n) = 0$ for all $n \geq m$ and so in particular $\lim_n \mu(C_n) = 0$. This implies that μ is a measure. □

Now fix $n \in \mathbb{N}$. We consider $M_\triangleleft^n$ as a topological space: Let $\mathcal{U}_\triangleleft^n$ be the set of all non-empty subsets of $M_\triangleleft^n$ having the form

$$\{p \in M_\triangleleft^n : p(C) = v_C \text{ for all } C \in N\}$$

with N a finite subset of $\mathcal{C}$ and $\{v_C\}_{C\in N}$ a sequence from $\mathbb{N}_n$. Clearly for each $p \in M_\triangleleft^n$ there exists $U \in \mathcal{U}_\triangleleft^n$ with $p \in U$ and if U_1, $U_2 \in \mathcal{U}_\triangleleft^n$ and $p \in U_1 \cap U_2$ then there exists $U \in \mathcal{U}_\triangleleft^n$ with $p \in U \subset U_1 \cap U_2$. Thus $\mathcal{U}_\triangleleft^n$ is the base for a topology $\mathcal{O}_\triangleleft^n$ on $M_\triangleleft^n$. This means that $U \in \mathcal{O}_\triangleleft^n$ if and only if for each $p \in U$ there exists a finite subset N of $\mathcal{C}$ such that

$$\{q \in M_\triangleleft^n : q(C) = p(C) \text{ for all } C \in N\} \subset U\ .$$

Proposition 4. *The topological space $M_\triangleleft^n$ is compact and metrisable and $\mathcal{B}_\triangleleft^n$ is the Borel σ-algebra of $M_\triangleleft^n$.*

Proof: We start by showing that the topology $\mathcal{O}_\triangleleft^n$ on $M_\triangleleft^n$ is given by a metric. Let $\{C_k\}_{k\geq 1}$ be an enumeration of the elements in the countable set $\mathcal{C}$ and define a mapping $\varrho : M^n_\triangleleft \times M^n_\triangleleft \to \mathbb{R}^+$ by

$$\varrho(p,q) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}|p(C_k) - q(C_k)| \, .$$

If $\varrho(p,q) = 0$ then $p(C) = q(C)$ for all $C \in \mathcal{C}$ and hence $p = q$ (since $\mathcal{C}$ is an algebra with $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$). Thus ϱ is a metric since by definition it is symmetric and it is clear that the triangle inequality holds. Moreover, if $p \in M^n_\triangleleft$ then for each $\varepsilon > 0$ there exists a finite subset N of $\mathcal{C}$ with

$$\{q \in M^n_\triangleleft : q(C) = p(C) \text{ for all } C \in N\} \subset \{q \in M^n_\triangleleft : \varrho(q,p) < \varepsilon\}$$

and for each finite subset N of $\mathcal{C}$ there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$\{q \in M^n_\triangleleft : \varrho(q,p) < \varepsilon\} \subset \{q \in M^n_\triangleleft : q(C) = p(C) \text{ for all } C \in N\} \, .$$

This means that $\mathcal{O}^n_\triangleleft$ is the topology given by the metric ϱ. Note that if $\{p_k\}_{k\geq 1}$ is a sequence from $M^n_\triangleleft$ and $p \in M^n_\triangleleft$ then $\lim_k p_k = p$ (i.e., $\lim_k \varrho(p_k,p) = 0$) if and only if $\lim_k p_k(C) = p(C)$ for each $C \in \mathcal{C}$.

In order to show that $M^n_\triangleleft$ is compact it is enough to show that the metric space $M^n_\triangleleft$ is sequentially compact. Let $\{p_k\}_{k\geq 1}$ be a sequence of elements of $M^n_\triangleleft$. By the usual diagonal argument there exists a subsequence $\{k_j\}_{j\geq 1}$ such that $\lim_j p_{k_j}(C)$ exists for each $C \in \mathcal{C}$. Define $p : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ by $p(C) = \lim_j p_{k_j}(C)$. Then p is clearly finitely additive and $p(M) = m$ and so by Proposition 3 p is a measure on $(M, \mathcal{C})$ which has a unique extension to a measure (also denoted by p) on $(M, \mathcal{B})$. But $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}^n_\triangleleft : p(B) \in \mathbb{N}_n\}$ is a monotone class containing the algebra $\mathcal{C}$ and thus $p \in M^n_\triangleleft$. Therefore $p \in M^n_\triangleleft$ and $\lim_j \varrho(p_{k_j}, p) = 0$ and this shows that the metric space $M^n_\triangleleft$ is sequentially compact.

It remains to show that $\mathcal{B}^n_\triangleleft$ is the Borel σ-algebra of $M^n_\triangleleft$. First, the set $\mathcal{U}^n_\triangleleft$ is countable and so each element of $\mathcal{O}^n_\triangleleft$ can be written as a countable union of elements from $\mathcal{U}^n_\triangleleft$. Thus $\mathcal{O}^n_\triangleleft \subset \sigma(\mathcal{U}^n_\triangleleft)$, which implies that $\sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft) = \sigma(\mathcal{U}^n_\triangleleft)$, since $\mathcal{U}^n_\triangleleft \subset \mathcal{O}^n_\triangleleft$. Second, each element of $\mathcal{U}^n_\triangleleft$ is a finite intersection of elements from $\mathcal{B}^n_\diamondsuit$ and hence $\mathcal{U}^n_\triangleleft \subset \mathcal{B}^n_\triangleleft$. This shows that $\sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft) = \sigma(\mathcal{U}^n_\triangleleft) \subset \mathcal{B}^n_\triangleleft$. Finally, let $k \in \mathbb{N}_n$ and let $\mathcal{D}$ be the set of those $B \in \mathcal{B}$ for which $\{p \in M^n_\triangleleft : p(B) = k\} \in \sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft)$. Then $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ and $\mathcal{D}$ is a monotone class, and so by the monotone class theorem $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, and this means that $\{p \in M^n_\triangleleft : p(B) = k\} \in \sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft)$ for all $B \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}_n$, i.e., $\mathcal{B}^n_\diamondsuit \subset \sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft)$. Thus $\mathcal{B}^n_\triangleleft = \sigma(\mathcal{B}^n_\diamondsuit) \subset \sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft)$, and this shows $\mathcal{B}^n_\triangleleft = \sigma(\mathcal{O}^n_\triangleleft)$. $\square$

Proposition 4 and the elementary part of Proposition 2 imply that $(M^n_\triangleleft, \mathcal{B}^n_\triangleleft)$ is a substandard Borel space.

In order to show that the countable disjoint union of substandard Borel spaces is substandard Borel we will need the following fact:

Lemma 6. *Let S be a non-empty countable set considered as a topological space with the discrete topology (in which every subset of S is open); then the topological space $S \times M$ is separable and its topology can be given by a complete metric. Moreover, $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$ is the Borel σ-algebra of $S \times M$.*

Proof: Since M is separable there exists a countable dense subset D of M. Then $S \times D$ is countable and it is clearly a dense subset of $S \times M$; hence $S \times M$ is separable. Now a metric ϱ can be defined on $S \times M$ by letting

$$\varrho((s_1, z_1), (s_2, z_2)) = \max\{\delta(s_1, s_2), d(z_1, z_2)\} ,$$

where $\delta(s, s) = 0$ and $\delta(s, t) = 1$ if $s \neq t$, and it is easily checked that this metric is complete and that it generates the topology on $S \times M$. It remains to show that $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$ is the Borel σ-algebra of $S \times M$, which we denote by $\mathcal{E}$. Let $\mathcal{D}$ denote the set of all sets having the form $\{s\} \times C$ with $s \in S$ and $C \in \mathcal{C}$. Then $\mathcal{D}$ is a countable base for the topology on $S \times M$ and so $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{E}$. But each element of $\mathcal{D}$ is a measurable rectangle and hence $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$, and this shows $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$. Conversely, for each $s \in S$ the set $\mathcal{B}_s = \{B \in \mathcal{B} : \{s\} \times B \in \mathcal{E}\}$ is a monotone class containing $\mathcal{C}$ (since $\{s\} \times C$ is open for each $C \in \mathcal{C}$) and hence by the monotone class theorem $\mathcal{B}_s = \mathcal{B}$, i.e., $\{s\} \times B \in \mathcal{E}$ for all $B \in \mathcal{B}$, $s \in S$. Thus $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, since if $F \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$ then $F = \bigcup_{s \in S}(\{s\} \times F_s)$ and the section F_s is in $\mathcal{B}$ for each $s \in S$. $\square$

By Lemma 6 and the elementary part of Proposition 2 $(S \times M, \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B})$ is substandard Borel.

Lemma 7. *Let S be a non-empty countable set and for each $s \in S$ let $(X_s, \mathcal{E}_s)$ be a substandard Borel space. Assume the sets X_s, $s \in S$, are disjoint. Then the disjoint union $(X, \mathcal{E})$ of the measurable spaces $(X_s, \mathcal{E}_s)$, $s \in S$, is substandard Borel.*

Proof: For each $s \in S$ there exists a mapping $f_s : X_s \to M$ with $f_s^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_s$ and $f_s(X) \in \mathcal{B}$. Define $f : X \to S \times M$ by letting $f(x) = (s, f_s(x))$ for each $x \in X_s$, $s \in S$. Then it is easily checked that $f^{-1}(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}) = \mathcal{E}$ and $f(X) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B}$. But by Lemma 6 $(S \times M, \mathcal{P}(S) \times \mathcal{B})$ is substandard Borel and thus by Lemma 5 $(X, \mathcal{E})$ is substandard Borel. $\square$

This completes the proof of Theorem 2. $\square$

We next give a the proof of the elementary part of Proposition 2, i.e., we show that if (X, d) is a complete separable metric space then $(X, \mathcal{B}_X)$ is substandard Borel.

To start with consider the closed interval $I = [0,1]$ and let $b : M \to I$ be the mapping with $b(\{z_n\}_{n\geq 0}) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n-1} z_n$; then b is continuous and hence $b^{-1}(\mathcal{B}_I) \subset \mathcal{B}$, with $\mathcal{B}_I$ the σ-algebra of Borel subsets of I. Now for each $C \in \mathcal{C}$ there is a dyadic interval J such that $b^{-1}(J) = C$ and hence $b^{-1}(\mathcal{B}_I) \supset \mathcal{C}$, which implies that $b^{-1}(\mathcal{B}_I) \supset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, i.e., $b^{-1}(\mathcal{B}_I) = \mathcal{B}$. Put

$$N = \big\{\{z_n\}_{n\geq 0} \in M : z_0 = 0 \text{ and } z_n = 1 \text{ for all } n \geq m \text{ for some } m \geq 1\big\}\ ;$$

then N is countable and b maps $M_o = M \setminus N$ bijectively onto I. Let $v : I \to M$ be the unique mapping with $v(b(z)) = z$ for all $z \in M_o$; then $v(I) = M_o$ and so in particular $v(I) \in \mathcal{B}$. Let $B \in \mathcal{B}$; then $B \cap M_o \in \mathcal{B}$ and thus there exists $A \in \mathcal{B}_I$ with $b^{-1}(A) = B \cap M_o$, which implies $v^{-1}(B) = v^{-1}(B \cap M_o) = A \in \mathcal{B}_I$. This shows $v^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_I$. But if $A \in \mathcal{B}_I$ then $b^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ and $v^{-1}(b^{-1}(A)) = A$, and hence $v^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_I$. We therefore have a mapping $v : I \to M$ with $v^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_I$ and $v(I) \in \mathcal{B}$.

Now define $v_\diamond : I^{\mathbb{N}} \to M^{\mathbb{N}}$ by $v_\diamond(\{x_n\}_{n\geq 0}) = \{v(x_n)\}_{n\geq 0}$. Then it is easily checked that $v_\diamond^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$ and $v_\diamond(I^{\mathbb{N}}) = f(I)^{\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, where $\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$ and $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ are the product σ-algebras on $I^{\mathbb{N}}$ and $M^{\mathbb{N}}$. But the topological space $M^{\mathbb{N}}$ (with the product topology) is homeomorphic to M and the product σ-algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ is also the Borel σ-algebra (since $\mathbb{N}$ is countable and the topology on M has a countable base). Thus there is a mapping $g : I^{\mathbb{N}} \to M$ with $g^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$ and $g(I^{\mathbb{N}}) \in \mathcal{B}$. (Just take $g = u \circ v_\diamond$, with $u : M^{\mathbb{N}} \to M$ a homeomorphism.) This shows that $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ is a substandard Borel space. Moreover (as with $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$) the product σ-algebra $\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$ is the Borel σ-algebra of $I^{\mathbb{N}}$ with the product topology.

Finally, let (X,d) be a complete separable metric space. Then there is a standard construction (given below) producing a continuous injective mapping $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ such that h is a homeomorphism from X to $h(X)$ (with the relative topology) and such that $h(X)$ is the intersection of a sequence of open subsets of $I^{\mathbb{N}}$, and so in particular with $h(X) \in \mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$. Since h is continuous it follows that $h^{-1}(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}) \subset \mathcal{B}_X$. Let $U \subset X$ be open; since $h : X \to h(X)$ is a homeomorphism there exists an open subset V of $I^{\mathbb{N}}$ with $h^{-1}(h(X) \cap V) = U$. But then $h^{-1}(V) = U$, and this shows that $\mathcal{O}_X \subset h^{-1}(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}})$, where $\mathcal{O}_X$ is the set of open subsets of X. Hence $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{O}_X) \subset \sigma(h^{-1}(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}})) = h^{-1}(\sigma(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}})) = h^{-1}(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}})$.

We thus have a mapping $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ with $h^{-1}(\mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}) = \mathcal{B}_X$ and $h(X) \in \mathcal{B}_I^{\mathbb{N}}$ and $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ is substandard Borel. Therefore by Lemma 5 $(X, \mathcal{B}_X)$ is also substandard Borel.

Here is how the mapping h can be constructed: Choose a dense sequence of elements $\{x_n\}_{n\geq 0}$ from X and for each $n \geq 0$ let $h_n : X \to I$ be the continuous mapping given by $h_n(x) = \min\{d(x, x_n), 1\}$ for each $x \in X$. If $x, y \in X$ with $x \neq y$ then there exists $n \geq 0$ such that $h_n(x) \neq h_n(y)$ (since if $n \geq 0$ is such that $d(x, x_n) < \varepsilon$, where $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{d(x, y), 1\}$, then $h_n(x) < \varepsilon < h_n(y)$). Define $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ by letting $h(x) = \{h_n(x)\}_{n\geq 0}$ for each $x \in X$. Then h is continuous (since $\mathrm{p}_n \circ h = h_n$ is continuous for each $n \geq 0$, with $\mathrm{p}_n : I^{\mathbb{N}} \to I$ the projection onto the n th component) and injective. Moreover, for each $x \in X$ and each $0 < \varepsilon < 1$ there exists $n \geq 0$ so that $|h_n(y) - h_n(x)| > \varepsilon/2$ for all $y \in X$ with $d(y, x) > \varepsilon$. (Just take $n \geq 0$ so that $d(x, x_n) < \varepsilon/4$.) This implies that the bijective mapping $h : X \to h(X)$ is a homeomorphism from X to $h(X)$ with the relative topology. (Note that the completeness of X was not needed here.)

The topological space $I^{\mathbb{N}}$ is metrisable (since $\mathbb{N}$ is countable and I is metrisable). Let δ be any metric generating the topology on $I^{\mathbb{N}}$, and for each $n \geq 0$ let

$$U_n = \{y \in I^{\mathbb{N}} : \delta(y, y') < 2^{-n} \text{ for some } y' \in h(X)\} .$$

Then $\{U_n\}_{n\geq 0}$ is a decreasing sequence of open subsets of $I^{\mathbb{N}}$ with $h(X) \subset U_n$ for each $n \geq 0$. In fact $h(X) = \bigcap_{n\geq 0} U_n$: Let $y \in \bigcap_{n\geq 0} U_n$; then for each $n \geq 0$ there exists $y_n \in h(X)$ with $\delta(y, y_n) < 2^{-n}$ and so $\{y_n\}_{n\geq 0}$ is a Cauchy sequence in $h(X)$. Thus $\{x_n\}_{n\geq 0}$ is a Cauchy sequence in X, where x_n is the unique element with $h(x_n) = y_n$. Since X is complete the sequence $\{x_n\}_{n\geq 0}$ has a limit $x \in X$ and then $h(x) = y$, i.e., $y \in h(X)$. This shows that $h(X)$ is the intersection of a sequence of open subsets of $I^{\mathbb{N}}$.

We now indicate how the non-elementary part of Proposition 2 can be proved. Thus we have a separable substandard Borel space $(X, \mathcal{E})$ and want to that show that it is standard Borel.

Lemma 8. *Let $(Y, \mathcal{F})$ be a separable countably generated measurable space and let $f : Y \to M$ be a mapping with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$. Then f is injective.*

Proof: Let $y_1, y_2 \in Y$ with $f(y_1) = f(y_2) = z$. Since $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ and $\{y\} \in \mathcal{F}$ for each $y \in Y$ there exist $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ with $f^{-1}(B_1) = \{y_1\}$ and $f^{-1}(B_2) = \{y_2\}$. Therefore by Lemma 4

$$B_1 \cap f(Y) = f(f^{-1}(B_1)) = f(\{y_1\}) = \{z\} = f(\{y_2\}) = f(f^{-1}(B_2)) = B_2 \cap f(Y)$$

and thus (since $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(Y))$ holds for all $B \subset M$)

$$\{y_1\} = f^{-1}(B_1 \cap f(Y)) = f^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(B_2 \cap f(Y)) = \{y_2\} ;$$

i.e., $y_1 = y_2$. $\square$

Since $(X, \mathcal{E})$ is substandard Borel there exists a mapping $f : X \to M$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ such that $f(X) \in \mathcal{B}$ and since $(X, \mathcal{E})$ is separable f is injective. Thus if $f(X)$ is countable then X is countable and also $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$. In this case it is easy to see that $\mathcal{P}(X)$ is the Borel σ-algebra of X considered with the discrete topology. But this topology is generated by the discrete metric δ (with $\delta(x, x) = 0$ and $\delta(x, y) = 1$ if $x \neq y$) and the metric space (X, δ) is separable and complete. Hence $(X, \mathcal{E})$ is standard Borel.

Suppose then that $A = f(X)$ is uncountable, i.e., A is an uncountable element of $\mathcal{B}$. Here we need the following facts (which certainly do not belong to an introductory course on measure theory):

Proposition 5. *(1) If $f : M \to M$ is injective and $\mathcal{B}$-measurable then $f(B) \in \mathcal{B}$ for each $B \in \mathcal{B}$ (and so in particular $f(M) \in \mathcal{B}$).*

(2) If $A \in \mathcal{B}$ is uncountable then there exists an injective $\mathcal{B}$-measurable mapping $f : M \to M$ with $f(M) = A$.

Proof: Part (1) is a special case of a theorem of Kuratowski. Part (2) is contained in what goes under the name of the isomorphism theorem. For a treatment of these results see, for example, Chapter I of Parthasarathy [14]. $\square$

By Proposition 5 (2) there exists an injective $\mathcal{B}$-measurable mapping $h : M \to M$ with $h(M) = A$ and by Proposition 5 (1) $h(B) \in \mathcal{B}$ for each $B \in \mathcal{B}$. Define $g : X \to M$ by letting $g(x) = h^{-1}(f(x))$ for each $x \in X$; thus g is surjective and hence bijective.

Let $B \in \mathcal{B}$; then $g^{-1}(B) = f^{-1}(h(B)) \in \mathcal{E}$, since $h(B) \in \mathcal{B}$, and so $g^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$. On the other hand, for each $E \in \mathcal{E}$ there exists $B \in \mathcal{B}$ with $f^{-1}(B) = E$ and then $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ with $g^{-1}(h^{-1}(B)) = E$. This shows that $g^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$.

We now have a bijective mapping $g : X \to M$ with $g^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ and the mapping g can be used to pull the metric on M back to a metric on X; then g becomes a homeomorphism between the metric spaces X and M. Thus X is a separable complete metric space with respect to this metric and $\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{B})$ is the Borel σ-algebra. This shows that $(X, \mathcal{E})$ is standard Borel.

Let $(X, \mathcal{E})$ be a substandard Borel space, thus by definition there exists a mapping $f : X \to \mathcal{B}$ with $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$ such that $f(X) \in \mathcal{B}$. In fact it then follows from Proposition 5 that $g(X) \in \mathcal{B}$ for every mapping $g : X \to \mathcal{B}$ with $g^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$.

We end this note by looking at the kind of situations where substandard Borel spaces can be used instead of standard Borel spaces. These examples are taken from Preston [15].

Existence of conditional distributions:

Let $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$ be measurable spaces. We say that *conditional distributions exist for* $(X, \mathcal{E})$ *and* $(Y, \mathcal{F})$ if for each probability measure $\mu \in \mathrm{P}(X \times Y, \mathcal{E} \times \mathcal{F})$ there exists a probability kernel $\pi : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ such that

$$\mu(E \times F) = \int_E \pi(x, F)\, d\mu_1(x)$$

for all $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{F}$, where $\mu_1 = (\mathrm{p}_1)_*\mu$ is the image measure of μ with respect to the projection $\mathrm{p}_1 : X \times Y \to X$ onto the first component. (Beware that this definition is not symmetric in $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$.)

Conditional distributions do not exist in general. However, they do exist if $(X, \mathcal{E})$ is countably generated and $(Y, \mathcal{F})$ is standard Borel. Proofs of this fact can be found in Chapter 1 of Doob [4], Chapter 5 of Parthasarathy [14], Appendix 4 of Dynkin and Yushkevich [6]. Here standard Borel can be replaced by substandard Borel: A proof is given in Preston [15], Section 5.

The Dynkin extension property:

Let $(X, \mathcal{E})$ be a measurable space. If $\mathcal{E}_o$ is a sub-σ-algebra of $\mathcal{E}$ then a mapping $\pi : X \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ is called an *$\mathcal{E}_o$-measurable quasi probability kernel* if $\pi(x, \cdot)$ is a measure on $(X, \mathcal{E})$ with $\pi(x, X)$ either 0 or 1 for each $x \in X$ and the mapping $\pi(\cdot, E) : X \to \mathbb{R}^+$ is $\mathcal{E}_o$-measurable for each $E \in \mathcal{E}$. In this case let

$$\mathcal{G}(\pi) = \left\{ \mu \in \mathrm{P}(X, \mathcal{E}) : \mu(E' \cap E) = \int_{E'} \pi(x, E)\, d\mu(x) \text{ for all } E' \in \mathcal{E}_o,\ E \in \mathcal{E} \right\},$$

thus if $\mathrm{E}_\mu(I_E | \mathcal{E}_o)$ denotes the conditional expectation of I_E with respect to the measure μ and the sub-σ-algebra $\mathcal{E}_o$, then in fact

$$\mathcal{G}(\pi) = \{\mu \in \mathrm{P}(X, \mathcal{E}) : \mathrm{E}_\mu(I_E | \mathcal{E}_o) = \pi(\cdot, E) \ \mu\text{-a.e. for all } E \in \mathcal{E}\}\ .$$

Now let us consider a decreasing sequence $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$ of sub-σ-algebras of $\mathcal{E}$ and put $\mathcal{E}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{E}_n$. A sequence of kernels $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ is said to be *adapted to* $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$ if $\pi_n : X \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ is an $\mathcal{E}_n$-measurable quasi probability kernel for each $n \geq 0$. The sequence $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$ has the *Dynkin extension property* if for each sequence $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ adapted to $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$ there exists an $\mathcal{E}_\infty$-measurable quasi probability kernel $\pi : X \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ such that $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}(\pi_n) \subset \mathcal{G}(\pi)$. (Of course, in general the set $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}(\pi_n)$ will be empty, since no consistency assumptions have been placed on the kernels $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$.)

This property does not hold in general. However, if $(X, \mathcal{E})$ is standard Borel then any decreasing sequence of sub-σ-algebras of $\mathcal{E}$ has the Dynkin extension property. This is proved in Föllmer [7] (based on ideas in Dynkin [5]); another proof can be found in Chapter 7 of Georgii [8]. Again, standard Borel can be replaced by substandard Borel: A proof is given in Preston [15], Section 6.

The Kolmogorov extension property:

Let $(X, \mathcal{E})$ be a measurable space and let $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 0}$ be an increasing sequence of sub-σ-algebras of $\mathcal{E}$ with $\mathcal{E} = \sigma(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}_n)$. A sequence of measures $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ with $\mu_n \in \mathrm{P}(X, \mathcal{E}_n)$ for each $n \geq 0$ is said to be *consistent* if $\mu_n(E) = \mu_{n+1}(E)$ for all $E \in \mathcal{E}_n$, $n \geq 0$. The sequence $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 0}$ has the *Kolmogorov extension property* if for each consistent sequence $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ there exists $\mu \in \mathrm{P}(X, \mathcal{E})$ with $\mu(E) = \mu_n(E)$ for all $E \in \mathcal{E}_n$, $n \geq 0$. (This measure μ is then unique, since it is uniquely determined by the sequence $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ on the algebra $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}_n$ and $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.)

Again, this property does not hold in general. However, an increasing sequence of sub-σ-algebras $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 0}$ has the Kolmogorov extension property provided each $(X, \mathcal{E}_n)$ is standard Borel and $\mathcal{E}$ is the inverse limit of the sequence $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 0}$. The original proof for $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ can be found in Kolmogorov [10], and in the form considered here in Chapter 5 of Parthasarathy [14]. Once again standard Borel can be replaced by substandard Borel: A proof is given in Preston [15], Section 7.

There are, however, plenty of problems involving standard Borel spaces which cannot be dealt with directly using substandard Borel spaces. The common characteristic of the properties looked at above is that they involve constructing measures, and such problems seem to be relatively simple in comparison with questions involving the existence of certain measurable mappings. A typical example of this type concerns the existence of measurable selectors:

Let $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$ be measurable spaces and $h : X \to Y$ be a surjective mapping with $h^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. By the axiom of choice there then exists a *selector* for h, i.e., a mapping $\varphi : Y \to X$ such that $h \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$. If in addition $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$ then φ is called a *measurable selector*. Unfortunately, measurable selectors do not always exist, even when $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$ are standard Borel spaces: Let $I = [0, 1]$ and let $\mathrm{p}_1 : I \times I \to I$ be the projection onto the first component. Then there exists a Borel subset A of $I \times I$ with $\mathrm{p}_1(A) = I$ for which there does not exist a Borel measurable mapping $g : I \to I \times I$ with $g(I) \subset A$ such that $\mathrm{p}_1(g(x)) = x$ for all $x \in I$. (See, for example, Blackwell [1].) However, so-called universally measurable selectors exist:

Proposition 6. *Let $(X, \mathcal{E})$ and $(Y, \mathcal{F})$ be standard Borel and let $h : X \to Y$ be a surjective mapping with $h^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$. Then there exists a selector $\varphi : Y \to X$ for h with $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_*$. Here $\mathcal{F}_*$ is the intersection of all σ-algebras $\mathcal{F}_\mu$ with μ a finite measure on $(Y, \mathcal{F})$ and with $\mathcal{F}_\mu$ the completion of the σ-algebra $\mathcal{F}$ with respect to μ. ($\mathcal{F}_*$ is called the σ-algebra of universally measurable sets.)*

Proof: Proofs of equivalent results can be found in Cohn [3], Theorem 8.5.3, and Dynkin and Yushkevich [6], Appendix 3. □

If we try to prove this result using the methods introduced above for dealing with substandard Borel spaces then we end up having to show that the following holds:

Proposition 7. *Let D be a non-empty subset of $M \times M$ such that $D \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ and $B = \mathrm{p}_1(D) \in \mathcal{B}$. Then there exists a mapping $\psi : B \to M \times M$ with $\psi(B) \subset D$ and $\psi^{-1}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_*$ such that $\mathrm{p}_1 \circ \psi = \mathrm{id}_B$.*

This is a statement only involving a construction made on $(M, \mathcal{B})$, but the proof of Proposition 7 doesn't seem to be any easier than the proof of the general case given in Proposition 6.

Список литературы

[1] D. Blackwell, "A Borel set not containing a graph", Ann. Math. Stats. **39**, 1345-1347, (1968).
[2] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Integration* (Springer, 2004)
[3] D. L. Cohn, *Measure Theory* (Birkhäuser, Boston, 1980).
[4] J. L. Doob, *Stochastic Processes* (Wiley, New York, 1953).
[5] E. B. Dynkin, "The initial and final behaviour of trajectories of Markov processes", Russian Math Surveys **26**, 165-185 (1971).
[6] E. B. Dynkin, A. A. Yushkevich, *Controlled Markov Processes* (Springer-Verlag, Berlin 1979).
[7] H. Föllmer, *Phase transition and Martin boundary* Springer Lecture Notes in Mathematics **465**, (1975).
[8] H.-O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions* (de Gruyter, Berlin, 1988)
[9] O. Kallenberg, *Random Measures* (4th. ed.). (Academic Press, New York, 1986).
[10] A. N. Kolgomorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer-Verlag, Berlin, 1933).
[11] K. Kuratowski, *Topology, Volume 1* (Academic Press, New York, 1966)
[12] G. W. Mackey, "Borel structure in groups and their duals", Trans. Am. Math. Soc. **85**, 134-165 (1957).
[13] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, *Infinitely divisible point processes* (Wiley, Chichester 1978).
[14] K.R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces* (Academic Press, New York, 1967).
[15] C. Preston, "Some Notes on Standard Borel Spaces", *http:// www. mathematik.uni-bielefeld.de/ preston/*(2003)

Поступила 12 декабря 2008

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 44, номер 1, 2009

Содержание

Предисловие ... 6
К. Криккеберг, Немного математики ... 8
K. Krickeberg, My Encounters with Martingales ... 17
F. Papangelou, The Armenian Connection: Reminiscences from a Time of Interactions ... 25
Nguyen Xuan Xanh, Klaus Krickeberg und Vietnam. Erinnerungen ... 35
Р. В. Амбарцумян, Томографические модели случайных выпуклых многоугольников ... 45
Hans Zessin, Der Papangelou Prozess ... 61
Joseph Mecke, Joint distribution of direction and length of the typical I-segment in a homogeneous random planar tessellation stable under iteration ... 73
Hans Zessin, Klassische symmetrische Punktprozesse ... 85
Chris Preston, A Note on Standard Borel and Related Spaces ... 97

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 44, No. 1, 2009

Contents

Preface ... 6
K. Krickeberg, Some mathematics ... 8
K. Krickeberg, My Encounters with Martingales ... 17
F. Papangelou, The Armenian Connection: Reminiscences from a Time of Interactions ... 25
Nguyen Xuan Xanh, Klaus Krickeberg and Vietnam. Memoirs ... 35
R. V. Ambartzumian, Tomography Models of Random Convex Polygons ... 45
Hans Zessin, Papangelou Process ... 61
Joseph Mecke, Joint distribution of direction and length of the typical I-segment in a homogeneous random planar tessellation stable under iteration ... 73
Hans Zessin, Classical Symmetric Point Processes ... 85
Chris Preston, A Note on Standard Borel and Related Spaces ... 97