ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2008

Сергей Никитович Мергелян (1928-2008)

Выдающийся армянский математик, видный деятель и организатор науки и образования, Сергей Никитович Мергелян родился 19 мая 1928 года в Симферополе, в семье ахалкалакца Мкртича Мергеляна. В 1941г. семья Мергелянов переехала в Ереван.

Исключительный математический талант Сергея Мергеляна проявился еще в школьные годы. В восьмом классе, после победы на республиканской олимпиаде по математике и физике, он экстерном сдал экзамены за 9-ый и 10-ый классы и в 1944г. поступил в Ереванской Государственный Университет на физико-математический факультет.

Вскоре Мергелян обратил на себя внимание и в университете, где он за год сдал экзамены за первый и второй курсы и начал посещать лекции академика Арташеса Шагиняна, основателя армянской математической школы, учась уже на третьем курсе.

За три с половиной года окончив университет, 19-летний Сергей Мергелян, по рекомендации академика А. Л. Шагиняна уехал в Москву и поступил в аспирантуру Института математики им. В. А. Стеклова АН СССР, под руководством академика Мстислава Келдыша. Через два года, в 1949г., он представил для зашиты свою диссертацию на соискание ученой степени кандидата наук.

За полученные в области теории приближений исключительные результаты Ученый Совет, возглавляемый академиком И. М. Виноградовым присвоил Сергею Мергеляну сразу степень доктора физико-математических наук. Сергею Мергеляну тогда был всего 21 год.

В 1951, Сергей Мергелян доказал свою знаменитую теорему о приближении многочленами. Эта теорема завершила длинную серию исследований, начатую в 1885г. и составленную из классических результатов К. Вейерштрасса, К. Рунге, Дж. Уолша, М. Лаврентьева, М. Келдыша и других. Новые термины "Теорема Мергеляна"и "Множества Мергеляна"нашли свое место в учебниках и монографиях по теории приближений.

За эти выдающиеся исследования Мергеляну в 1952г. была присуждена Государственная премия СССР, а в следующем году 25-летний ученый был избран членом-корреспондентом АН СССР. В том же году он был избран членом-корреспондентом АН Арм. ССР, а в 1956 – членом АН Арм. ССР.

Мергелян провел глубокие исследования и получил ценные результаты в таких областях как наилучшее приближение многочленами на произвольном континууме, весовые приближения многочленами на вещественной оси, точечная аппроксимация многочленами на замкнутых множествах комплексной плоскости, равномерное приближение гармоническими функциями на компактных множествах и целыми функциями на неограниченном континууме, единственность гармонических функций. В теории дифференциальных уравнений его результаты относились к сфере задачи Коши и некоторых других вопросов.

Научные достижения Мергеляна существенно способствовали становлению, развитию и международному признанию армянской математической школы, чему свидетельствовала организованная в Ереване в 1965г. по инициативе и при активном участии С. Мергеляна крупная международная конференция по теории функций. В работе конференции приняли участие многие видные математики мира, что способствовало международному сотрудничеству и дальнейшему продвижению армянской математической школы.

Мергелян был также талантливым организатором науки. В 1956-60гг. С. Мергелян был директором Научно-исследовательского института математических машин, который сегодня известен нам как "Институт Мергеляна".

Мергелян основал и в 1961-71 годах руководил Отделом комплексного анализа Института математики АН СССР, будучи заместителем академика-секретаря отделения математики АН СССР. В 1971-74гг. он был вице-президентом АН Арм. ССР, в 1974-79гг. – директором Вычислительного центра АН Арм. ССР, в 1979-82гг. был заведующим отдела Института математики АН Арм. ССР, а в 1982-86гг. был ректором Кироваканского Педагогического института.

В связи с разносторонней деятельностью и по случаю 80-летнего юбилея Сергей Мергелян в 2008г. был награжден орденом св. Месропа Маштоца.

Н. У. Аракелян, А. А. Саакян

P. S. Настоящий номер сборника Известия НАН Армении, серия математика, намеревалось посвятить 80-тилетию академика Мергеляна. К сожалению, в период подготовки, перед публикацией номера, из США, где по воле обстоятельств с начала 90-ых годов жил Мергелян, пришла печальная весть о его смерти. Этот номер стал сборником работ, посвященных его памяти.

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 6-20

РАВНОМЕРНАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ПОЛОСЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИИМИ ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ

С. АЛЕКСАНЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *asargis@instmath.sci.am*

Аннотация. Пусть функция f непрерывна на закрытой полосе $S_h = \{z : |\mathrm{Im} z| \leq h\}$ и голоморфна в ее внутренности. В работе исследуется задача равномерного и касательного приближения функции f мероморными функциями g с наилучшей оценкой роста g в терминах неванлинновской характеристики $T(r, g)$. Этот рост зависит от роста f на S_h и дифференциальных свойств f на ∂S_h. Предполагается, что возможные полюсы g лежат только на мнимой оси.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача равномерного и касательного приближения функций, голоморфных в угле ***мероморфными*** функциями с оценкой их роста исследовалась в работах [1] и [2]. Аналогичные приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемых функций рассматривались в [3]. В настоящей работе мы рассматриваем задачу равномерного и касательного приближения на закрытой полосе. Целью этой работы является конструировать мероморфные функции, аппроксимирующие заданную функцию f на полосе и имеющие возможный медленный рост на комплексной плоскости в терминах их неванлинновской характеристики. Аналогичная задача равномерного и касательного приближения *целыми* функциями исследовалась в [4].

Работа состит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и предварительные сведения, а второй представляет основные результаты со своими доказательствами.

1.1. Некототрые обозначения и определения. 1. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Расширенную комплексную плоскость обозначим через $\overline{\mathbb{C}}$. Для множества $E \subset \mathbb{C}$

обозначим через $\overline{E}$, E^o и ∂E соответственно *замыкание, внутренность* и *границу* E в $\mathbb{C}$.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$ и E – относительно закрытое множество в Ω. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \to \mathbb{C}$ введем равномерную норму

$$\|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|,$$

и пусть

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Пусть $C^p(\Omega)$ – класс p раз непрерывно дифференцируемых в смысле $\mathbb{R}^2$ комплексных функций в Ω. Для жордановой области D с положительно ориентированной кусочно гладкой границей и для функции u из класса C^1 в окрестности $\overline{D}$ следующая формула является комплексной версией теоремы дивергенции:

$$\int_{\partial D} u(z)\,dz = i\int_D 2\overline{\partial} u d\sigma, \tag{1}$$

где σ – плоская мера Лебега на D и

$$2\overline{\partial} u = \partial_1 u + \partial_2 u. \tag{2}$$

Обычно, класс функций, голоморфных в Ω обозначается через $H(\Omega)$. Таким образом, условие $f \in H(\Omega)$ означает, что $f \in C^1(\Omega)$ и $\overline{\partial} f \equiv 0$ в Ω. Для $\Omega = \mathbb{C}$ функция f обычно называется целой. Для относительно закрытого множества $E \subset \Omega$ возьмем $A(E) = C(E) \cap H(E^o)$ и $A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^o)$. Обозначим через $A'(E)$, $A''(E), \ldots, A^p(E)$ классы функций $E \to \mathbb{C}$ соответственно один, два, ..., p раз непрерывно дифференцируемые на E в смысле $\mathbb{C}$.

Положим также

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}, \quad a \in \mathbb{C},\ a > 0 \quad (\text{– открытый круг}),$$

$$D_r = D_r(0),$$

$$S_h := \mathbb{R} \times [-h, h], \quad h > 0 \quad (\text{– полоса}),$$

$$\Delta_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg\zeta| \leq \alpha/2\}, \quad \alpha \in (0, 2\pi) \quad (\text{– угол}),$$

$$\Delta_\alpha(\beta) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg\zeta - \beta| \le \alpha/2\}, \quad \alpha, \beta \in (0, 2\pi),$$

$$\Delta_\alpha(\beta, a) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta - a) \in \Delta_\alpha(\beta)\}, \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{– угол с центром в} \quad a,$$

$$\Omega_h^\alpha := \mathbb{C} \setminus \left(\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^o \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^o\right) \cup S_{2h}, \quad h > 0,$$

$$\Omega_{h,r}^\alpha := \Omega_h^\alpha \cap \overline{D}_r, \quad h, r > 0.$$

Мы используем функцию Неванлинны $\log^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определенную следующим образом

$$\log^+ x = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ \log x & \text{при} \quad x \ge 1, \end{cases}$$

которая является неотрицательной и неубывающей функцией на $\mathbb{R}^+$. $T(r, g)$ обозначает неванлинновскую характеристику мероморфной функции g, $g(0) \ne \infty$:

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| g\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \int_0^r n(t, g)\, t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ – число *полюсов* g в D_t с учетом их кратностей.

Пусть теперь $f \in C(E)$, где $E \subset \mathbb{C}$ – закрытое неограниченное множество такое, что $E \cap \partial D_r \ne \emptyset$ для $r \ge r_0 \ge 0$. Обозначим для $r \ge r_0$

$$M_f(r) = M(f, E) := \|f\|_{E \cap D_r}.$$

2. Обозначим через B класс неубывающих C^1-функций $q \ge 0$ на $\mathbb{R}^+$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rq'(r)}{q(r)} = \rho.$$

3. Для неубывающих функций $\mu \ge 0$ on $[r_0, +\infty)$, величина

$$\rho_\mu := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\log r}$$

называется порядком μ. Если $\nu \ge 0$ – другая неубывающая функция на $[t_0, +\infty)$ конечного порядка, то величина

$$\sigma_\mu^\nu := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\nu(r)}$$

называется ν-типом функции μ.

Пусть теперь $E \subset \mathbb{C}$ – закрытое ограниченное множество такое, что $E \cap \partial D_r \ne \emptyset$ для $r \ge r_0$. Так же как и в [4] здесь тоже используем следующую терминологию фля функций $f \in C(E)$.

1. Величина $d_f = d_f(E) := \rho_\mu$ для $\mu = M_f$ является *степенью*f на E.
2. $\sigma_f^\nu = \sigma_f^\nu(E) := \sigma_\mu^\nu$ для $\mu = M_f$ является *ν-типом* f на E.

3. Для $\mu = \log^+ M_f$ *порядком* и *типом* f на E соответственно будут величины $\rho_f = \rho_f(E) := \rho_\mu$, $\sigma_f = \sigma_f(E) := \sigma_\mu$.

1.2. Аппроксимация на S_h функциями из класса $A(\Omega_h^\alpha)$. Следующая лемма аналогична лемме 1 из работы [3] для полосы.

Лемма 1. *Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\varphi \in A(\Omega_h^\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi/2)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ такая, что*

$$\|f\varphi - F\|_{S_h} < \varepsilon, \tag{3}$$

$$M_f(r) < 3M_f(lr+h)\, M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\{ca_{2r}\}, \tag{4}$$

где

$$a_r(f,\varphi) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \le lr+h} \left[|z|^2 \left| f''_\partial(z) \right| \right] M_\varphi(lr+h) \tag{5}$$

для $l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$, f_∂ – сужение f на ∂S_h и $c = c(h,\alpha) > 0$ – константа, зависящая только от α и h.

Доказательство. При доказательстве мы воспользуемся тем же методом, что использовался при доказательстве леммы 5 из работы [4].

Заменяя f на $\varepsilon^{-1} f$ и F на $\varepsilon^{-1} F$, можно свести доказательство леммы к случаю, когда $\varepsilon = 1$. Продолжим f как в лемме 5 работы [4], взяв $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in S_h$, и

$$f_*(\zeta) := if(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) + (1-i)\, f(\xi + ih\sigma_\eta) \tag{6}$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \backslash S_h$, где σ_η знаковая функция, т.е. $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\eta = \eta / |\eta|$ для $\eta \neq 0$. Тогда из (6) следует, что $f_* \in C^1(\mathbb{C})$ и оценка

$$M_{f_*}(r, \Omega_h^\alpha) \le 3M_f(lr+h, S_h), \quad r \ge 0, \tag{7}$$

для роста f_* на Ω_h^α. Очевидно, что из (6) следует $\overline{\partial} f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S_h$. При этом из (2) и (6) следует

$$2\overline{\partial} f_*(\zeta) = (1-i)\left[f'(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) - f'(\xi + ih\sigma_\eta) \right] \tag{8}$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \backslash S_h$. Очевидно, что $f_* \in A''(\Omega_h^\alpha)$ и, следовательно, из (8) приходим к оценке

$$\left| \overline{\partial} f_*(\zeta) \right| \le (|\eta| - h)\, M_{f'}(l|\xi| + h, \partial S_h), \quad \zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h. \tag{9}$$

Из (5) и (9) следует

$$\left| \left(\varphi \overline{\partial} f_* \right)(\zeta) \right| \le 2(|\eta| - h)\, a_{l|\xi|+h} / |\zeta|^2, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Omega_h^\alpha. \tag{10}$$

Чтобы конструировать аппроксимирующую функцию F мы должны реализовать для любого фиксированного полюса $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h^o$ конструктивную аппроксимацию ядра Коши $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$, $z \in S_h$ функциями по z, голоморфными и ограниченными в Ω_h^α, при этом аппроксимацию необходимо реализовать не только для $z \in S_h$, но и для любого компактного подмножества Ω_h^α при достаточно больших $|\zeta|$. Очевидно, что аппроксимация данного вида эквивалентна аппроксимации нуль-функции функциями, голоморфными в Ω_h^α, которые равны 1 при $\zeta \in \Omega_h^\alpha$.

Пусть $\zeta \to n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ – кусочно постоянная функция, зафиксируем (однозначно) $n(|\zeta|)$, удовлетворяющую следующему условию

$$0 \le a_{|\zeta|} - n(|\zeta|) < 1, \quad \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha. \tag{11}$$

Для $(\zeta, z) \in (\Omega_h^\alpha)^2$ определим функцию $Q_\zeta(z) = Q(\zeta, z) \in H(\Omega_h^\alpha)$ так, что $Q_\zeta(\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha$,

$$Q(\zeta, z) := \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{n(|\zeta|)}, \tag{12}$$

где $\mathrm{Re}\zeta_0 = \mathrm{Re}\zeta$ для любого $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h$ и $2d(\zeta, \partial S_h) = d(\zeta_0, \partial S_h)$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$. Отсюда по теореме Коши

$$\int_{\partial D} Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z)\, dz = \begin{cases} -2\pi i & \text{при} \quad \zeta \in D, \\ 0 & \text{при} \quad \zeta \in \Omega_h^\alpha - \overline{D} \end{cases} \tag{13}$$

для любой жордановой области $D \subset \Omega_h^\alpha$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей. Теперь для $r > 0$ рассмотрим следующие интегралы

$$I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_{h,r}^\alpha \backslash S_h} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta, \quad z \in \Omega_{h,r}^\alpha, \tag{14}$$

с поынтегральной функцией

$$G_\zeta(z) = \left(\varphi \overline{\partial} f_*\right)(\zeta)\, Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z).$$

Введем новые функции $F_r \in C\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)$ следующим образом

$$F_r(z) = (\varphi f_*)(z) + I_r(z), \quad z \in \Omega_{h,r}^\alpha. \tag{15}$$

Из (1), условия $\overline{\partial}\varphi = 0$ и теоремы Морера можем сказать, что

$$F_r(z) \in H\left(\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)^o\right).$$

Таким образом, очевидно, что $F_r \in A\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)$ для всех $r > 0$.

Докажем, что I_r локально-равномерно сходится на Ω_h^α при $r \to \infty$ к следующему интегралу

$$I_\infty(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_h^\alpha \backslash S_h} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta, \quad z \in \Omega_h^\alpha. \tag{16}$$

Ввиду (15) искомая функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ может быть определена формулой

$$F(z) := (\varphi f_*)(z) + I_\infty(z), \quad z \in \Omega_h^\alpha, \tag{17}$$

откуда следует, что

$$\|\varphi f - F\|_{S_h} = \|I_\infty\|_{S_h}, \tag{18}$$

$$|F(z)| \le |(\varphi f_*)(z)| + |I_\infty(z)| \text{ for } z \in \Omega_h^\alpha. \tag{19}$$

Итак, при помощи этой схемы аппроксимация φf на S_h функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ и оценка роста F на Ω_h^α сведены к оценке I_∞.

Из (12) для $z \in \Omega_h^\alpha$ и $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h$ имеем

$$|G_\zeta(z)| \le \frac{\left|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)\right|}{|\zeta - z|} \left[\frac{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta| + h}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)}\right]^{n(l|\xi|+h)}. \tag{20}$$

Для компактного множества $K \subset \Omega_h^\alpha$ существует $r_0 > 2h$ так, что $K \subset D_{r_0}$ и пусть $r'' > r' > 3r_0$. Получая, что

$$\int\limits_h^{2h+|\xi|\tan(\alpha/2)} \left[\frac{3h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta|}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)}\right]^{n(l|\xi|+h)} d\eta < \frac{1}{n(l|\xi| + h) + 1}, \tag{21}$$

и учитывая, что $|\eta| - h < |\zeta - z|$ для $z = x + iy \in K$ and $\zeta \in \Omega_{h,r''}^\alpha \backslash \Omega_{h,r'}^\alpha$, получим

$$|I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \le 4 \int_{r'}^{r''} \xi^{-2} d\xi < 4\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r', r'' \to +\infty \tag{22}$$

равномерно для $z \in K$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость $I_\infty(z)$ для $z \in \Omega_h^\alpha$, а также то, что $I_\infty \in C(\Omega_h^\alpha)$.

Для доказательства (3) мы должны оценить $I_\infty(z)$, $z \in S_h$, которое следует из (18):

$$|I_\infty(z)| \le \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_h^\alpha \backslash S_h} \frac{\left|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)\right|}{|\zeta - z|} \left[\frac{3h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta|}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)}\right]^{n(l|\xi|+h)} d\sigma_\zeta. \tag{23}$$

Учитывая, что $|\eta| - h \le |\zeta - z|$ и

$$\left|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)\right| \le (|\eta| - h)\, n(|\zeta|) / |\zeta|^2, \quad z \in S_h,$$

из (20), (21) и (23) получим

$$|I_\infty(z)| \le \frac{1}{\pi} \int_{|\xi| \ge h} |\xi|^{-2}\, 1 d\xi = \frac{2}{\pi h}. \tag{24}$$

Таким образом, из (16), (17) и (24) мы приходим к (3).

Пусть теперь $z \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h = E$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \int_B G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \int_{E\backslash B} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = I_1(z) + I_2(z), \tag{25}$$

где

$$B = \Omega_h^\alpha \cap D_\rho(z), \quad \rho = 2|z|\sin(\alpha/2) + 4h.$$

Оценивая $I_1(z)$, получим

$$\begin{aligned} |I_1(z)| &\le c_1 \exp\{2n(2l|z| + 2h)\} \int_B (|\zeta||\zeta - z|)^{-1} d\sigma_\zeta < \\ &< c_2 \exp\{2n(2l|z| + 2h)\}, \end{aligned} \tag{26}$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ зависят от α и h. Второй интеграл можно оценить как в (24), т.е. $I_2(z) \le 2/(\pi h)$. Таким образом, из (17), (19) и (25), (26) мы перейдем к (4), что завершает доказательство леммы.

2. МЕРОМОРФНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ПОЛОСЕ

Процесс оптимально равномерного приближения на полосе мероморфными функциями реализуется в два шага, первый из которых – это лемма 1. Второй шаг – это аппроксимация функции $f \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями.

2.1. Мероморфная аппроксимация S_h. В этом параграфе мы аппроксимируем функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями. Потом, используя лемму 1, получим мероморфную аппроксимацию $f \in A''(S_h)$ на S_h. Мы воспользуемся следующей леммой (см. [2], стр. 548-549).

Лемма 2. *Для голоморфной функции $z \to \sqrt{z}$, $\sqrt{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in [0,1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$ с полюсами на $(-\infty, -1)$ такая, что*

$$\left|\omega(z) - \sqrt{z}\right| \le (1/2)\sqrt{|z|}, \quad |\arg z| \le \pi - \delta, \quad |z| \ge \delta, \tag{27}$$

и

$$T(r, \omega) = O\left(\log^2 r\right) \quad \textit{при} \quad r \to \infty. \tag{28}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ и чисел $p > 1$ и $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси такая, что*

$$|F(z) - G(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h, \tag{29}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}G\right) < c \int_h^{pr} \int_h^t \log^+ \frac{M_F(\tau)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^+ (r+h), \quad r \geq h, \tag{30}$$

где $c = c(h, p, \alpha) > 0$ – константа, звисящая только от h, α и p.

Доказательство. Заменяя F на $\varepsilon^{-1}F$ и G на $\varepsilon^{-1}G$, можно свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Возьмем $\omega(z) = \omega_\delta(2hiz)$ из леммы 2 с $\delta = \min\{2h, 1\}$ так, что

$$\begin{aligned} &|\omega(\zeta)| \geq (2h|\zeta|)^{1/2}, \quad \zeta \in \partial S_{2h}(\alpha), \\ &|\omega(z)| < c_1 + c_2 |z|^{1/2}, \quad z \in S_h, \end{aligned} \tag{31}$$

где через $c_j > 0$, $j = 1, 2, ...$ обозначаем константы, зависящие только от α, p и h. Из включения $S_h \subset \Omega_h^\alpha$ следует, что существует константа $c_3 \in (0, 1)$ такая, что

$$|\zeta - z| > c_3 (|\zeta| + |z|), \quad \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha, \quad z \in S_h. \tag{32}$$

Теперь рассмотрим рациональную по z и кусочно гладкую по $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ функцию Q такую, что $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right)^{n'},$$

где n' и ζ' выберем позднее. Зафиксируем

$$q = \min\{\sqrt{p}, (p+h)/p\} > 1$$

и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть

$$\Gamma = \partial\Omega_h^\alpha, \quad \Gamma_0 = \Gamma \backslash \partial S_{2h},$$

$$\Gamma^+ = \{\zeta \in \Gamma : \mathrm{Im}\zeta > 0\}, \quad \Gamma^- = \{\zeta \in \Gamma : \mathrm{Im}\zeta < 0\}, \quad \Gamma_r^\pm = \Gamma^\pm \cap \overline{D}_r(\pm i2h).$$

Обозначим $\zeta' = (q^k + 2h)i$ и для $\zeta \in \gamma_k^+ = \Gamma_{q_k}^+ \setminus \Gamma_{\rho_{qk-1}}^+$ рассмотрим соответствующий полюс $(q^k + 2h)i$, где $q_k = q^k \sin(\alpha/2)$ и $\zeta' = -(q^k + 2h)i$ для $\zeta \in \gamma_k^- = \Gamma_{\rho_k}^- \setminus \Gamma_{\rho_{k-1}}^-$. Каждому $\zeta \in \Gamma$ соответствует полюс на мнимой оси, так как $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1} \gamma_k$ и $\gamma_i = \gamma_i^+ \cup \gamma_i^-$. Для $\zeta \in \gamma_k$, $\zeta \in \Gamma/\gamma_1$ возьмем $n' = n_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Теперь, если $z \in S_h$, то при выборе полюсов ζ' получаем

$$|\zeta - \zeta'| / |z - \zeta'| \leq q/(q+h) \quad \text{для} \quad \zeta \in \gamma_1,$$

и

$$\left|\frac{\zeta-\zeta'}{z-\zeta'}\right| \le \left[\cos^2(\alpha/2) + \left(1-q^{-1}\right)^2 \sin^2(\alpha/2)\right]^{1/2} = d_1 < 1.$$

Существует $\mu = \mu(q,h,\alpha) \in (0,1)$ такое, что

$$\left|\frac{\zeta-\zeta'}{z-\zeta'}\right| \le d_2 < 1, \quad z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|},$$

где $d_2 = (1+d_1)/2$. Таким образом, для $d = \max\{d_2, q/(q+h)$ получим

$$|Q(\zeta,z)| \le d^{n_k}, \quad \zeta \in \gamma_k, \quad z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}. \tag{33}$$

Эта оценка выполняется также для $\zeta \in \Gamma\backslash\gamma_k$ и $|z| = \mu\rho_k$, $k = 1,2,...$, где ρ_k – расстояние от γ_{k+1} до 0. В самом деле, если $|\zeta| > q_k$, то мы приходим к предыдущему случаю, когда $|z| \le \mu|\zeta|$. Если же $|\zeta| \le q_{k-1}$, то тогда $q^{m-1}\sin(\alpha/2) < |\zeta| < q^m \sin(\alpha/2)$ для некоторого $m \le k-1$. Так что $|z-\zeta'| \ge q_m\left(\mu q^{k-m}-1\right)$, и мы получим

$$\left|\frac{\zeta-\zeta'}{z-\zeta'}\right| \le d.$$

Теперь определим последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию

$$0 \le n_k - c_4\left[A + \log^+ M(q_k,F)\right] < 1, \quad k = 1,2,\cdots, \tag{34}$$

где $c_4 = (\log(1/d))^{-1}$. Константу $A > 0$ выберем ниже так, чтобы

$$|F(\zeta)Q(\zeta,z)| \le e^{-A}, \tag{35}$$

если a) $\zeta \in \Gamma$ и $z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}$ или b) $\zeta \in \Gamma\backslash\gamma_k$, $|z| = \mu\rho_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{Q(\zeta,z)}{\zeta-z}d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma \tag{36}$$

локально-равномерно сходится на $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, поэтому $I \in H(\mathbb{C}\backslash\Gamma)$. Положим

$$F_0(z) = \begin{cases} F(z) & \text{при} \quad z \in \Omega_h^\alpha, \\ 0 & \text{при} \quad z \in \mathbb{C}\backslash(\Omega_h^\alpha), \end{cases}$$

Аппроксимирующую мероморфную функцию G можно определить для $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ формулой

$$G(z) = F_0(z) - I(z)\,\omega(z). \tag{37}$$

Полюсы G лежат на мнимой оси, так же как полюсы ω. Убедимся, что G действительно является мероморфной на $\mathbb{C}$ с теми же полюсами. Из (36), (37) и формулы Коши для F/ω для $z \in D_r\backslash\Gamma_r$, $r \ge h$ получим

$$\frac{G(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{1-Q(\zeta,z)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_r}\frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{Q(\zeta,z)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

где $L_r = \Omega_h^\alpha \cap \partial D_r$. Можно видеть, что последние два интеграла справа допускают голоморфное продолжение на D_r, а первый интеграл – мероморфное продолжение с полюсами на $(\zeta') \subset D_r$, так как $Q(\zeta,\zeta) \equiv 1$ для $\zeta \in \Gamma$.

Для доказательства (29) оценим $I(z)\,\omega(z)$ на S_h. Из (36), (31), (32) и (35) следует, что

$$|I(z)|\,e^A \le \frac{1}{c_3}\int_\Gamma (|\zeta|+|z|)^{-1}\,|\zeta|^{-1/2}\,|d\zeta|,\quad z\in S_h.$$

Последний интеграл ограничен интегралом

$$c_5\int_{2h}^\infty (t+|z|)^{-1}t^{-1/2}dt \le c_6\left(1+|z|^{1/2}\right)^{-1}.$$

Следовательно, из (31) получим, что

$$|I(z)\,\omega(z)| \le c_7 e^{-A},\quad z\in S_h.$$

Для (29) с $\varepsilon = 1$ возьмем $A = \log^+ c_7$.

Теперь оценим характеристику $T(r,G)$. Из (37) имеем

$$m(r,G) \le \log^+ M(r,F) + m(r,I) + m(r,\omega) + 1.$$

Поскольку $N(r,G) \le N(r,G/\omega) + N(r,\omega)$, то из (28) получим, что для $r \ge h$

$$T(r,G) < N(r,G/\omega) + m(r,I) + \log^+ M(r,F) + c_8\log^2(r+1)\,. \tag{38}$$

Полюсы G/ω лежат на множестве (ζ'). Следовательно, учитывая (34), получим, что для $r \ge h$

$$N(r,G/\omega) \le \sum_{|\zeta'|\le r} n'\log\frac{r}{|\zeta'|} \le c_9\sum_{q_k\le r} n_k\log\frac{r}{q_k}$$

$$\le c_{10}\sum_{q_k\le r}\left[1+\log^+ M(q_k,F)\right]\log\frac{r}{q_k}.$$

Отсюда получим для $r \ge h$

$$N(r,G/\omega) \le c_{11}\int_h^{qr}\left[1+\log^+ M(t,F)\right]\log\frac{qr}{t}\frac{dt}{t}$$

$$\le c_{11}\int_h^{qr}\int_h^t \log^+ M(t,F)\,\frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{12}\log^2(r+h)\,, \tag{39}$$

поскольку

$$\left[1+\log^+ M(q_k,F)\right]\log\frac{r}{q_k} \le \frac{1}{\log q}\int_{q_k}^{qq_k}\left[1+\log^+ M(t,F)\right]\log\frac{qr}{t}\frac{dt}{t}.$$

Оценим теперь $m(r, I)$ для $r = r_k = \mu\rho_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Разобьем интеграл $I(z)$ на сумму двух интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$ соответственно по контурам $\Gamma \backslash \gamma_k$ и γ_k. Если $\zeta \in \Gamma \backslash \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то $|\zeta - z| \geq (1-\mu)|\zeta|$, и из (32) и (35) получим

$$|I_k(z)| < \frac{1}{1-\mu} \int_\Gamma |\zeta|^{-3/2} |d\zeta| < e^{c_{13}}, \quad |z| = r_k. \tag{40}$$

Если $\zeta \in \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то

$$|Q(\zeta, z)| = \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right|^{n'} < 1,$$

и из (32) $|\omega(\zeta)| \geq 2h^2$. Поэтому, согласно (34) имеем

$$\left| J_k\left(r_k e^{i\varphi}\right) \right| \leq \exp\left\{ c_{14} + c_{14} \log^+ M(\rho_k, f) \right\} \alpha_k(\varphi), \tag{41}$$

где

$$\alpha_k(\varphi) = \int_{\gamma_k} \left| \zeta - r_k e^{i\varphi} \right|^{-1} |d\zeta|.$$

Полагая

$$c_{15} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \alpha_1(\varphi)\, d\varphi$$

и учитывая, что $\alpha_k(\varphi) \leq \alpha_1(\varphi)$, $k = 1, 2, \cdots$, из (40) и (41) получим

$$m(r_k, I) \leq c_{13} + c_{14}\left[1 + \log^+ M(\rho_k, f)\right] + c_{15} + 1.$$

Отсюда и из (38), (39) и $r_1 > h$ получаем

$$\begin{aligned} T(r_k, G) < c_{13} \int_h^{qr_k} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} \\ + c_{16} \log^+ M(q_k, F) + c_{16} \log^2(r_k + h), \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{q_k}^{qr_k} \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log^2(\mu q) = c_{17},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \log^+ M(q_k, F) &\leq \frac{1}{c_{17}} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M(\tau, F) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{c_{17}} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$T(r_k, G) < c_{18} \int_h^{qr_k} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{16} \log^2(r_k + h), \quad k \geq 1. \tag{42}$$

Теперь пусть $r \geq h$. Тогда существует $k \geq 1$ такое, что $r \leq r_k < qr$, так как $r_k = q\sigma_k r_{k-1}$, где $\sigma_k \to 1$ при $k \to \infty$ для $k = 2, 3, \ldots$ Поскольку $T(r, G) \leq T(r_k, G)$, то из (42) получим

$$T(r, G) < c_{20} \int_h^{q^2 r} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{21} \log^2(r + h) \quad r \geq r_1.$$

Учитывая, что $q^2 \leq p$ и $r_1 > h$, получим (30).

Следствие 1. *Из теоремы 1 и* (29), (30) *следует, что функцию* $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ *порядка* $\rho_F < +\infty$ *можно равномерно приблизить на* S_h *мероморфными функциями* G *так, что* $T(r, G) = O(r^{\rho_F})$ *при* $r \to +\infty$.

Следующая теорема является основным результатом этой работы. Для ее доказательстве используем следующую лемму (см. [3], стр. 542).

Лемма 3. *Для* $q \in B$ *и* $\beta \in (0, \pi/2)$ *существует мероморфная функция* φ *такая, что*

$$q(|z|) < |\varphi(z)| < b_1 q(|z|), \quad z \in S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi), \tag{43}$$

$$T(r, \varphi) < b_2 \left(1 + \log^+ q(r)\right) \log^2(r + 1), \quad r \geq h, \tag{44}$$

где $b_1 = b_1(\beta, q, h) > 0$ *и* $b_2 = b_2(\beta, q, h) > 0$ *– некоторые константы.*

Теорема 2. *Пусть* $f \in A''(S_h)$, *тогда для* $q \in B$, $q \geq 1$, $\varepsilon > 0$ *и* $p > 1$ *существует мероморфная функция* g *такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{q(|z|)}, \quad z \in S_h, \tag{45}$$

$$\begin{aligned} T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) &< k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} \\ &+ k\left[1 + \log q(r)\right] \log^2(pr), \quad r \geq h, \end{aligned} \tag{46}$$

где a_r $(r > 0)$ *определена из* (5) *с* $\varphi \equiv 1$ *и* $k = k(p, q, h) > 0$ *– константа.*

Доказательство. Выберем $l = l(p) > 0$ так, чтобы $l < \min\{p, 2\}$, и положим $\alpha := 2\arctan(l - 1)$. Пусть φ – мероморфная функция, удовлетворяющая условиям леммы 3. Очевидно, можно выбрать $\beta = \beta(\alpha)$ так, чтобы $\Omega_h^\alpha \subset S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi)$. Из леммы 1 следует, что для $f\varphi$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, удовлетворяющая (3). Согласно (4) и (44) рост функции F для $\tau = lr + h$ оценивается следующим неравенством

$$\log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k_1 \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau)\, q(\tau)}{\varepsilon}\right]. \tag{47}$$

Применяя теорему 1 к F, из (3) и (29) получим

$$|f(z)\varphi(z) - G(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h, \tag{48}$$

и, согласно (4) и (2.21) рост функции G для $r \geq h$ будет оцениваться следующим образом

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) < k_2 \int_h^{pr} \int_h^t \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau)\, q(\tau)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t}.$$

Окончательно, для $r \geq h$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) <& k_3 \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} \\ &+ k_3 \left[1 + \log q(r)\right] \log^2(pr). \end{aligned} \tag{49}$$

Положим теперь $g = G/\varphi$. Из (29) и (43) следует, что полюсы g лежат на $\Delta_{\pi-\beta}(\pi/2) \cup \Delta_{\pi-\beta}(-\pi/2)$. Неравенство (45) следует из (48) с учетом (43). При этом, поскольку $|\varphi(0)| > q(0) \geq 1$, то получим

$$\begin{aligned} T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) &\leq T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T(r, 1/\varphi) = T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T(r, \varphi) - \log|\varphi(0)| \\ &< T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T(r, \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (49) и (44) доказательство завершено.

Из теоремы 2 (с $q \equiv 1$) следует следующая теорема для *равномерного* приближения.

Теорема 3. *Пусть $f \in A''(S_h)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси так, что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h, \tag{50}$$

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(pr) \tag{51}$$

для $r \geq h$, где $k = k(p, h) > 0$ – константа.

2.2. Представление классов M^ρ. В работе [4] доказано, что если функция $f \in A''_b(S_h)$ равномерно непрерывна на ∂S_h, то ее можно приблизить *целыми* функциями порядка 1, который нельзя уменьшить. Тем не менее, теорема 3 приводит к новым условиям на f, которые позволяют ее равномерную аппроксимацию на S_h *мероморфными* функциями порядка $\rho \in (0,1)$.

Определение 1. *Скажем, что мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси принадлежит классу M^ρ, если g ограничена на S_h и*

$$T(r,g) = O(r^\rho) \quad \textit{при} \quad r \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть $\nu_0(r) = r^{\rho/2}$, ν выбрано на $\mathbb{R}$ так, чтобы $\nu(r) = -\nu(-r)$, определим*

$$\mu(z) = \mu_0(x) + iy, \quad z = x + iy \in S_h,$$

где $\mu_0 = \nu^{-1}$ on $\mathbb{R}$. Если все функции $f \in A_b''(S_h)$, $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h, то f допускает равномерное приближение на S_h функциями из класса M^ρ.

Доказательство. Из теоремы 3 имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, удовлетворяющая (50) и (51). Из условия теоремы следует, что $\left|(f \circ \mu)'\right| \le M$ и $\left|(f \circ \mu)''\right| \le M$ на ∂S_h.

Учитывая, что $\mu'(r) = 1/\nu'(r)$, получим $|z f_\partial'(z)| \le M|z|^\rho$. Из определения μ следует, что $|f'(z)\mu''(z)| \le M_0$, отсюда получим $\left|z^2 f''(z)\right| \le M_1|z|^\rho$. Таким образом, из (51) для $\varphi \equiv 1$ получим $T(r,g) = O(r^\rho)$ при $r \to \infty$, что завершает доказательство.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю проф. Н. У. Аракеляну за постановку задачи и помощь при ее решении.

Abstract. The paper discusses the problem of approximation of functions continuous on a closed stripe $S_h = \{z : |\mathrm{Im} z| \le h\}$ and holomorphic in its interior. The results relate to the uniform and tangential approximation of such functions f by meromorphic functions g with minimal growth in terms of Nevanlinna characteristic $T(r,g)$. The growth depends on the growth of f in S_h and certain differential properties of f on ∂S_h. It is assumed that the possible poles of g are restricted to the imaginary axis.

Список литературы

[1] Л. А. Тер-Исраелян, "Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста," Изв. НАН Армении, Математика **6** (1), 67-80 (1971).

[2] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях,” Изв. НАН Армении, Математика **23** (6), 546-556 (1988).

[3] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси,” Изв. НАН Армении, Математика **25** (6), 534-548 (1990).

[4] N. Arakelian and H. Shahgholian, “Uniform and Tangential Approximation on a Stripe by Entire Functions, Having Optimal Growth,” Computational Methods and Function Theory **3** (1), 359-381 (2003).

Поступила 30 октября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 21-38

О ЗАДАЧАХ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. У. АРАКЕЛЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *arakelian@instmath.sci.am*

Аннотация. Целью настоящей работы является изучение некоторых аспектов краевых задач для гармонических функций в полупространствах, относящихся к теории приближений. М. В. Келдыш упоминал любопытный факт о *богатстве* в некотором смысле решений задачи Дирихле в верхней полуплоскости для фиксированных непрерывных граничных условий на вещественной оси. Это можно рассматривать как модель для задачи Дирихле с непрерывным граничным условием, определенным, за исключением отдельной граничной точки, без ограничений, наложенных на решения вблизи этой точки.

Получены некоторые обобщения и многомерные версии результата Келдыша и обсуждены вопросы, связанные с существованием, представлением и изобилием решений для задач Дирихле и Неймана.

Посвящено памяти академика С. Н. Мергеляна

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначения и постановка задачи. 1. Ниже, буквы $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества *натуральных* и *вещественных* чисел, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Комплексную плоскость обозначим через $\mathbb{C}$ и *расширенную* комплексную плоскость (*Риманову сферу*) через $\overline{\mathbb{C}}$. Удобно отождествлять евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, полагая $z = x + iy$ для точки (x, y) из $\mathbb{R}^2$. *Верхняя полуплоскость* в $\mathbb{C}$ есть множество $\mathbb{C}_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. *Внутренность, замыкание* и *граница* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначаются соответственно через $E^o, \overline{E}$ и ∂E.

2. Пусть Ω – область в $\mathbb{C}$, и E – относительно замкнутое подмножество Ω. Тогда $C(E)$ обозначает топологическое векторное пространство непрерывных функций $f : E \to \mathbb{C}$ с равномерными полунормами

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

где $K \neq \emptyset$ – компактное подмножество E.

3. Пусть I – *открытое* подмножество $\mathbb{R}$. Тогда $C^k(I)$ для $k \in \mathbb{N}$ обозначает класс k раз непрерывно дифференцируемых функций на I.

4. Для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{N}$ через $C^k(\Omega)$ обозначим класс k раз непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций на Ω. Положим для $u \in C^1(\Omega)$ $\partial_1 u = \partial u/\partial x$ и $\partial_2 u = \partial u/\partial y$. Класс $C^1(\overline{\Omega})$ можно определить стандартным образом, как класс функций $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, позволющих непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$ производных $\partial_1 u$ и $\partial_2 u$; это однозначно определяет их на $\partial\Omega$.

Производные $\partial_1 u$ для $u \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+)$ совпадают на $\mathbb{R}$ с обычными производными $u\,|_{\mathbb{R}}$, а $\partial_2 u$ представляют на $\mathbb{R}$ (внутреннюю) производную u *по нормали*, которую по правилу Лопиталя можно представить следующим образом

$$(\partial_2 u)(x) = \lim_{y\to+0}[u(x+iy) - u(x)]y^{-1}.$$

5. Далее, положим для $u \in C^2(\Omega)$ и $i, j = 1, 2$ $\partial^2_{ij}u = \partial_j(\partial_i u)$ так, что $\Delta u = \Delta_2 u = \partial^2_{11}u + \partial^2_{22}u$ есть *Лапласиан* u. Обозначим через $\mathcal{H}(\Omega)$ класс комплексных функций, *гармонических* в Ω, т.е. функций $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих в Ω *уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$. Заметим, что мы различаем класс $\mathcal{H}(\Omega)$ от класса функций $H(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$, *голоморфных* в Ω.

6. Пусть теперь $f, \varphi \in C(\mathbb{R})$. Задача нахождения функции u, удовлетворяющей условию

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+), \\ u = f \quad \text{на} \quad \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

является *задачей Дирихле* в $\mathbb{C}_+$, а задача нахождения u, удовлетворяющей условию

$$\begin{cases} u \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+), \\ \partial_2 u = \varphi \quad \text{на} \quad \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

– задача Неймана в $\mathbb{C}_+$, где $\partial_2 u$ – (внутренняя) производная u по нормали на $\mathbb{R}$.

7. *Интеграл Пуассона*

$$u(z) = \mathcal{P}_f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t,z)dt \quad \text{при} \quad z = x+iy \in \mathbb{C}_+, \tag{3}$$

где $K(t,z) = (y/\pi)\,|t-z|^{-2}$ – *ядро Пуассона*, является решением задачи (1), если f удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,(1+t^2)^{-1}dt < +\infty, \tag{4}$$

обеспечивающему локально равномерную сходимость (3) в $\mathbb{C}_+$. Задача (2) имеет решение $u = u_\varphi$ вида

$$u_\varphi(z) := \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \log |t-z|\, dt, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+, \tag{5}$$

если φ, например, удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \log(1+|t|) dt < +\infty, \tag{6}$$

обеспечивающему локально равномерную сходимость в $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ интеграла в (5). Это следует из (2) – (3), поскольку $\partial_2 \log|t-z| = \pi K(t,z)$, откуда следует $\partial_2 u_\varphi = \mathcal{P}_\varphi$.

Замечание 1. *Если, в дополнение к* (3)*, имеем $f \in C^2(I)$ для открытого подмножества I $\mathbb{R}$, то $u = \mathcal{P}_f \in C^1(\mathbb{C}_+ \cup I)$, и u имеет непрерывные производные по нормали $\partial_2 u$ на I (ср. лемма 1).*

Разрешимость задачи *Дирихле* (1) без ограничений на граничное условие $f \in C(\mathbb{R})$ была установлена Р. Неванлинной [1]. Разрешимость задачи *Неймана* (2) при граничном условии $\varphi \in C(\mathbb{R})$ была доказана позднее С. Дж. Гардинером в [2], содержащем также обобщение обоих результатов для полупространств $\mathbb{R}^n_+$ $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Заметим также, что применение теоремы Т. Карлемана о целом приближении на $\mathbb{R}$ (см. теорему 2 ниже) позволяет легко свести вопрос о *существовании* решений для обеих задач (1) и (2) к упомянутым выше случаям, когда f и φ удовлетворяют условиям (4) и (6) (см. пункты 2.1 и 2.2 ниже).

Замечание 2. *Решение $u = u_f$ задачи* (1) *определяется по принципу симметрии с точностью до функции $u_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, **обращающейся в нуль** на $\mathbb{R}$. В общем, функция u_f не может быть представлена интегралом Пуассона* (3)*. Что касается решения $u = u_\varphi$ задачи* (2) *при граничном условии $\varphi \in C(\mathbb{R})$, то оно определяется с точностью до функции $u_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию $\partial_2 u_0 = 0$ на $\mathbb{R}$, которое эквивалентно условию*

$$u_0(z) = u_0(\overline{z}) \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Достаточность (7) для $\partial_2 u_0 = 0$ на $\mathbb{R}$ ясна. Что касается необходимости, пусть u_0 – вещественно-значное решение (2) для $\varphi \equiv 0$. Тогда из $u_1 := \partial_2 u_0 \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$ следует $u_1 = 0$ на $\mathbb{R}$. По принципу симметрии можем предположить, что $u_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ так, что для $z = x = iy \in \mathbb{C}$,

$$u_0(x+iy) = u_0(x) + \int_0^y u_1(x+it)dt.$$

Так как при этом $u_1(z) = -u_1(\overline{z})$, то получим (7).

М. В. Келдыш упоминал следующий факт (см. [3, Гл. 2]): *Семейство* $\{u_f\}$ *всех решений задачи Дирихле* (1) *для фиксированного граничного условия* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *настолько богато, что соответствующее семейство* $\{\partial_\nu u_f\}$ *производных* u_f *по нормали на* $\mathbb{R}$ *равномерно плотно в* $C(\mathbb{R})$, *из чего следует, что среди решений* u_f *существуют "приближенные" решения задачи Неймана* (2) *для фиксированного граничного условия* $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Заметим, что в этом утверждении более сильное условие $f \in C^2(\mathbb{R})$ (вместо $f \in C(\mathbb{R})$) поставлено для того, чтобы гарантировать существование производной по нормали $\partial_\nu u_f$ на $\mathbb{R}$ и ее непрерывность. Ниже мы представим точную формулировку результата Келдыша и его доказательство (см. теорему 3 параграфа 2). Наряду с другими мы обсудим следующие вопросы.

(a) Возможно ли поменять местами роли задач (1) и (2) и поставить задачу: построить решение u_φ задачи Неймана (2) при граничном условии $\varphi \in C(\mathbb{R})$, которое одновременно было бы "приближенным" решением задачи Дирихле (1) при заранее фиксированном граничном условии $f \in C(\mathbb{R})$?

(b) Возможно ли обобщить утверждение Келдыша и обратный результат для (a) для соответствующих краевых задач в полупространствах $\mathbb{R}^n$, $n > 2$?

Ответ на последний вопрос потребует некоторых технических инноваций, так как изначальное доказательство для $\mathbb{C}_+$ использует факты из теории комплексных приближений и теории аналитических функций (уравнения Коши-Римана), подходящие только для $n = 2$.

Ответы на оба упомянутых вопроса, представляющие некоторый теоретический интерес, положительны. Следующий вопрос:

(c) Возможно ли представить для некоторых из указанных задач "конструктивные" решения, кроме утверждения об их существовании?
также получает свой ответ ниже. Параграф 2 содержит ответы на (a) и (c), данные вместе с доказательством утверждения Келдыша для полноты. Вопрос (b) и некоторые, связанные с ним вопросы обсуждаются в параграфе 3.

2. ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В $\mathbb{C}_+$

2.1. Наблюдение Келдыша для задачи Дирихле в $\mathbb{C}_+$. Начнем с главного результата Р. Неванлинны ([1], 1925) о задаче Дирихле (1).

Теорема 1. *Для любого* $f \in C(\mathbb{R})$ *задача Дирихле* (1) *разрешима.*

Решение u не единственно, и, в общем, если условие (4) не удовлетворяется, u нельзя представить с помощью интеграла Пуассона (3). Для преодоления этой сложности Неванлинна ввел [1] обобщение интеграл Пуассона, фактически, справедливого для любой функции $f \in C(\mathbb{R})$ и основанного на модификации ядра Пуассона $K(t,z)$, зависящего от роста f в бесконечности. Впоследствии аналогичные результаты были получены также для задачи Дирихле в полупространствах $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $n > 1$ (см. [2], теорема 2 и [4], теорема 7.11).

Кроме формулы представления, теорема 1 может быть легко выведена из известных результатов теории аппроксимации. Следующая основополагающая теорема теории комплексных приближений Т. Карлемана (см. [5], 1927), является наиболее приемлемой для этого.

Теорема 2. *Для $f, \varepsilon \in C(\mathbb{R})$ при $\varepsilon(\mathbb{R}) \subset (0,1]$ существует целая функция g такая, что имеет место*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x) \quad \textit{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Это обобщение теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами положило начало новому типу аппроксимации на $\mathbb{R}$: так называемым *равномерно-касательным* приближениям целыми функциями. В формуле (8) функция ε (*скорость* касания в бесконечности) может быть выбрана произвольно малой всюду на $\mathbb{R}$, и, в дополнение, ε может стремиться к нулю на бесконечности произвольно быстро. Можно предположить, что в теореме 2 функция g является вещественно-значной, если такова f.

Из теоремы 2 легко следует теорема 1: выбрав $\varepsilon \equiv 1$, можно положить $u = g + \mathcal{P}_{f-g}$.

Затем, выведем из теоремы 2 наблюдение М. В. Келдыша (см. [3], Доказательство леммы 2.3). Глава 2 работы [3] содержит подробное изложение и доказательства результатов о приближении целыми функциями, сформулированных М. В.Келдышем в [6].

Теорема 3. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ и $\varphi, \varepsilon \in C(\mathbb{R})$, при $\varepsilon(\mathbb{R}) \subset (0,1]$. Существует функция $u \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$, являющаяся решением задачи Дирихле (1) такая, что*

$$|(\partial_2 u)(x) - \varphi(x)| < \varepsilon(x) \quad \textit{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Можно интерпретировать u как *"приближенное"* решение задачи *Неймана* (2)
.

Доказательство: Достаточно предположить, что f и φ – вещественно-значные. Пусть u_0 – (вещественно-значное) решение задачи Дирихле (1). Согласно замечанию 1, можно предположить, что $u_0 \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+)$ и, в частности, $\partial_2 u_0 \mid_{\mathbb{R}} \in C(\mathbb{R})$. По теореме 2 существует целая функция $g_1 = u_1 + iv_1$ такая, что $v_1 = 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$|u_1(x) + (\partial_2 u_0 - \varphi)(x)| < \varepsilon(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Пусть теперь $g_2 = u_2 + iv_2$ – *первообразная* для $-ig_1$, удовлетворяющая условию $g_2(0) = 0$. Тогда $u_2 = 0$ на $\mathbb{R}$ и по формуле Коши-Римана имеем

$$\partial_2 u_2 = -\partial_1 v_2 = u_1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \tag{11}$$

Получаем требуемую функцию $u \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$, положив $u = u_0 + u_2$. Тогда $u = u_0 = f$ на $\mathbb{R}$, и (9) следует из (10) и (11).

Замечание 3. *Теорема 3 может быть обобщена на неограниченную жорданову область с аналитической границей с помощью конформного отображения. В таком виде это было использовано М. В. Келдышем в задачах построения целых функций, убывающих к нулю на бесконечности вдоль неограниченных замкнутых областей (подобно секторам или полосам; см. [3], Гл. 2).*

2.2. Измененные роли задач Дирихле и Неймана. Следующий результат дает ответ на вопрос (a) параграфа 1 о возможности взаимозамены ролей задач Дирихле и Неймана в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $f, \varphi, \varepsilon \in C(\mathbb{R})$, *где* $\varepsilon(\mathbb{R}) \subset (0, 1]$. *Существует решение* u *задачи Неймана* (2) *такое, что*

$$|u(x) - f(x)| < \varepsilon(x) \quad \textit{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Естественно, u можно интерпретировать как "приближенное" решение задачи Дирихле (1).

Доказательство. Можно предположить, что f и φ – вещественно-значные. По теореме 2 существует целая функция $g_1 = u_1 + iv_1$ такая, что $v_1 = 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$|\varphi(x) - u_1(x)| < (1 + |x|^2)^{-1} \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это условие обеспечивает условие (6) для $\psi = \varphi - u_1$ так, что функция $u_\psi \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$, определенная с помощью (5), решает задачу Неймана (2) с граничным условием ψ.

Как при доказательстве теоремы 3, можно найти для $u_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ функцию $u_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ такую, что $\partial_2 u_2 = u_1$ на $\mathbb{R}$. Тогда, полагая $u_\varphi = u_\psi + u_2 \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$, получим, что

$$\partial_2 u_\varphi = \psi + u_1 = \varphi \quad \text{на} \quad \mathbb{R} \tag{13}$$

так, что функция u_φ решает задачу Неймана (2) .

Далее, по теореме 2, можно найти целую функцию $g_3 = u_3 + iv_3$ такую, что

$$|(f - u_\varphi)(x) - u_3(x)| < \varepsilon(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Теперь определим $u_4 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, полагая

$$u_4(z) = 2^{-1}[u_3(z) + u_3(\overline{z})] \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}$$

так, что $u_4 = u_3$ и $\partial_2 u_4 = 0$ на $\mathbb{R}$, и найдем требуемое u, полагая $u = u_\varphi + u_4$. Тогда (2) следует из (13) (при замене u_φ на u), а (12) из (14) (при замене u_3 на u_4).

2.3 Конструктивное решение задачи Неймана в $\mathbb{C}_+$. Разрешимость *задачи Дирихле* (1) для произвольного граничного условия $f \in C(\mathbb{R})$ установлена Р. Неванлинной [1], предложившим конструктивное решение с помощью *модификации* интеграла Пуассона (2) . Основой идеи было приближение ядра Пуассона $K(t, z)$ (для $|z| \le r$ и $|t| \ge 2r$) гармоническими полиномами в z, *обращающимися в нуль* на $\mathbb{R}$ так, что измененное ядро (как функция от t) стремится к нулю с заданной необходимой скоростью при $|t| \to \infty$. Много позднее, подобные модификации интеграла Пуассона были представлены в работе [7]. Ниже эта идея применяется для конструктивного решения задачи *Неймана* (2). Прежде всего, определим вещественно-значную функцию $R_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{1\})$ для $n \in \mathbb{N}$ по формуле

$$R_n(z) = \mathrm{Re} \int_0^z \zeta^{n-1}(\zeta - 1)^{-1} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}. \tag{15}$$

Интегрирование проводится по любому пути в $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, соединяющему точку 0 с z. Так как $R_1(z) = \log|1 - z|$ и по (15), точка $z = 1$ является *устранимой* для $R_n - R_1$. Отсюда следует, что $R_n(z) \to -\infty$ при $z \to 1$, и можно продолжить R_n до $\mathbb{C}$, положив $R_n(1) = -\infty$. Рассмотрим R_n при $n > 1$ как модификацию R_1, обращающуюся в нуль в начале координат с более высокой скоростью: для $n \in \mathbb{N}$

неравенство

$$|R_n(z)| < |z|^n\,(1-|z|)^{-1} \quad \text{при} \quad |z|<1 \tag{16}$$

следует непосредственно из (15), оценивая интеграл взятый вдоль $[0, z]$. Оценив тем же способом разность $R_n - R_1$, получим неравенство

$$|R_n(z) - R_1(z)| \le (n-1)\,|z|^n \quad \text{если} \quad |z| \ge 1,\ z \ne 1. \tag{17}$$

Вспомним обозначение Р. Неванлинны:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ \log x, & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Далее, предположим, что $n : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ – кусочно постоянная функция, $n(t) = 1$ при $|t| \le 2$. Рассмотрим новое ядро $R(t, z)$ для $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, полагая

$$R(t, z) = R_{n(t)}(z/t) - \log^+(1/\,|t|), \tag{18}$$

в частности, $R(t, z) = \log|t - z|$ для $|t| \le 1$ и $R(t, z) = \log|1 - z/t|$ для $1 \le |t| \le 2$. Заметим также, что $R(t, \cdot) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{t\})$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Из (16) и (18) имеем

$$|R(t, z)| < 2\,(|z|\,/\,|t|)^{n(t)} \quad \text{для} \quad |t| \ge 2\,|z|\,. \tag{19}$$

Решение задачи Неймана (2) для $\varphi \in C(\mathbb{R})$ можно представить в виде

$$u_\varphi(z) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) R(t, z) dt \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{20}$$

при соответствующем выборе функции $n(t)$, зависящей от φ. Это дает обобщение формулы (5), не удовлетворяющее условию (6).

Подынтегральное выражение в (20) локально интегрируемо в точке t на каждом замкнутом интервале $I \subset \mathbb{R}$, а соответствующий интеграл по I непрерывен в $\mathbb{C}$ и гармоничен в $\mathbb{C} \setminus I$. Чтобы гарантировать интегрируемость на $\mathbb{R}$ (локально равномерную относительно $z \in \mathbb{C}$) зафиксируем параметр $\lambda \in (1, 2)$ и для $|t| > 2$ однозначно определим $n(t)$ с помощью неравенства

$$0 \le n(t) - \lambda\left[1 + \frac{\log^+|\varphi(t)|}{\log|t|}\right] < 1. \tag{21}$$

В частности, если φ удовлетворяет условию

$$\lim_{|t| \to \infty} \sup \frac{\log^+|\varphi(t)|}{\log|t|} = \mu < +\infty, \tag{22}$$

то можно положить $n(t) = 2 + [\mu]$ для $|t| > 2$, где $[\mu]$ – целая часть ν.

Пусть теперь $|z| \le r$ с $r \ge 2$ и $\eta = (\lambda - 1)/3$. Тогда для $|t| \ge r^{1/\eta} (> 2r)$ получаем из (19) и (21) следующую оценку для подынтегрального выражения в (20):

$$|\varphi(t)|\,|R(t,z)| < 2\,|\varphi(t)|\,|t|^{(\eta-1)n(t)} \le 2\,|t|^{-(1+\eta)}. \tag{23}$$

Это доказывает локально равномерную сходимость интеграла (20) по z для $z \in \mathbb{C}_+$ и что $u \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$.

Из (15) и (17) для любых фиксированных $t \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}_+$ следует, что

$$(\partial_2 R)(t,z) = \operatorname{Im}[(z/t)^{n(t)-1}\,(t-z)^{-1}] = \pi K(t,z) - L(t,z), \tag{24}$$

где $K(t,z)$ –*ядро Пуассона* для $\mathbb{C}_+$ (см. (3)) и

$$L(t,z) = t^{-1} \sum_{k=0}^{n(t)-1} \operatorname{Im}(z/t)^k$$

–*гармонический полином* от z. Мы должны положить $L(t,z) \equiv 0$ для $|t| \le 2$, поскольку тогда $n(t) - 1 = 0$. Заметим также, что $L(t,z)$ *обращается в нуль для* $z \in \mathbb{R}$, если $|t| \ge 2$. Эти свойства позволяют рассмотреть $\pi^{-1}(\partial_2 R)(t,z)$ как ядро, модифицирующее ядро Пуассона $K(t,z)$ (см. [1]).

Пусть $|z| \le r$ при $r \ge 2$. Так как из (24) следует

$$|(\partial_2 R)(t,z)| < 2(r/|t|)^{n(t)} \text{ при } |t| \ge 2r,$$

то получим, как в (23), что

$$|\varphi(t)|\,|(\partial_2 R)(t,z)| < 2\,|t|^{-(1+\eta)} \text{ при } |t| \ge r^{1/\eta}. \tag{25}$$

Это неравенство доказывает локально равномерную сходимость по z интеграла

$$v_\varphi(z) := \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\partial_2 R)(t,z)dt, \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{26}$$

так что $v_\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$. Отсюда имеем

$$u_\varphi(x+iy) - u_\varphi(x) = \int_0^y v_\varphi(x+i\tau)d\tau \text{ для } x+iy \in \mathbb{C}_+,$$

из которого следует, что $(\partial_2 u_\varphi)(z) = v_\varphi(z)$ для $z \in \mathbb{C}_+$. Покажем, что (20) определяет решение u_φ *задачи Неймана* (2) для любого $\varphi \in C(\mathbb{R})$, для этого достаточно доказать, что функция $v = v_\varphi$ решает *задачу Дирихле*

$$\begin{cases} v \in C(\overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}_+), \\ v = \varphi \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{27}$$

Из (24)–(26) следует, что *хвост* $v_{\varphi,r}(z)$ интеграла (26), в котором $|t| \ge r > 2$, гармоничен $|z| < r$ и обращается в нуль на интервале $I_r = (-r, r)$. Пусть χ_r –

характеристическая функция I_r. Тогда в силу (24), (26) имеем

$$v_\varphi(z) = \mathcal{P}_{\varphi\chi_r}(z) + v_{\varphi,r}(z) - \pi^{-1}\int_{\gamma_r} \varphi(t)L(t,z)dt \text{ для } z \in \mathbb{C}_+,$$

где $\gamma_r = I_r \backslash I_2$. Пусть теперь $r > |x_0| + 2$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда, если $z \in \mathbb{C}_+$ и $z \to x_0$, то отсюда следует, что $\mathcal{P}_{\varphi\chi_r}(z) \to \varphi(x_0)$, $v_{\varphi,r}(z) \to 0$. Последний интеграл также приближается к нулю, так как $L(t,z) = 0$ для $z \in \mathbb{R}$.

Вывод 1. *Интеграл* (20) *для* $\varphi \in C(\mathbb{R})$ *представляет решение* u_φ *задачи Неймана* (2) , *а интеграл* (26) - *решение* v_φ *задачи Дирихле* (27).

Замечание 4. *Формулы для решений u_φ и v_φ являются в некотором смысле конструктивными и эффективными: они позволяют, в частности, оценить рост решений в $\mathbb{C}_+$, зависящий от роста φ на $\mathbb{R}$.*

3. ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$.

3.1. Необходимые обозначения. 1. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ обозначает n-мерное евклидово пространство с базисной точкой $x = (x_1, \cdots, x_n)$, представленной ее *координатами* x_k, $k = 1, 2, \cdots, n$. *Внутреннее произведение* двух точек x=$(x_1, \ldots x_n)$ и y=$(y_1, \ldots y_n)$ в $\mathbb{R}^n$ есть $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, а норма есть $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$B^n_{x,r} := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

– открытый *шар* (*круг* для $n = 2$) в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r. Для $x = 0$ положим $B^n_r := B^n_{0,r}$, так что $B^n := B^n_1$ – *единичный шар*, а ∂B^n – *единичная сфера* в $\mathbb{R}^n$. Далее, через v_n обозначим n-мерный объем B^n, а через σ_n обозначим $(n-1)$-мерную площадь поверхности ∂B^n, для которых имеем

$$v_n = \frac{\sigma_n}{n} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где Γ – гамма функция Эйлера (см. [10], Предварительные замечания).

2. *Верхнее полупространство* евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$ есть область

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}_+\},$$

где, как прежде, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ с его замыканием $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$; тогда $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$ есть замыкание $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ есть его граница, которая, естестественно, может отождествляться с $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{C}_+$ и $\partial\mathbb{C}_+ = \mathbb{R}$.

3. Пусть для $E \subset \mathbb{R}^n$ $C(E)$ обозначает векторное пространство непрерывных комплексных функций на E. Для $\alpha \in (0,1)$ обозначим через $C^\alpha(E)$ подкласс $C(E)$ функций φ, удовлетворяющих *условию Гельдера*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L\,|x-y|^\alpha\,,\ x, y \in E, \tag{28}$$

для некоторой константы $L = L_\varphi < \infty$, так что функции из $C^\alpha(E)$ равномерно непрерывны на E.

Определение 1. *Для заданного $E \subset \mathbb{R}^n$ отображение $\varphi : E \to \mathbb{C}$ является непрерывным по Гельдеру в точке $x_0 \in E$,, если либо x_0 – изолированная точка E, либо существует $\alpha = \alpha(x_0, \varphi) \in (0,1)$ такая, что для $x, y \in E$ имеет место*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = O(|x-y|^\alpha) \quad \text{при} \quad x, y \to x_0. \tag{29}$$

Положим $\varphi \in C_H(E)$, если φ непрерывна по Гельдеру в каждой точке E.

Очевидно, что $C^\alpha(E) \subset C_H(E) \subset C(E)$ для любого $\alpha \in (0,1)$, но, в общем, $C_H(E)$ может содержать функции, не принадлежащие никакому $C^\alpha(E)$. Ясно, что $C_H(E)$ вместе с $C(E)$ является *алгеброй* комплексных функций на E.

Предложение 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и E – относительно замкнутое подмножество Ω. Тогда $\varphi : E \to \mathbb{C}$ принадлежит $C_H(E)$ тогда и только тогда, когда для любого компактного множества $K \subset E$ имеем $\varphi \mid K \in C^\alpha(K)$ при $\alpha = \alpha(K, \varphi)$.*

Соответственно $C_H(E)$ есть метрическое пространство, порожденное соответствующими гельдеровыми полунормами на компактных подмножествах E.

Доказательство. Для заданного $x_0 \in E$ выберем достаточно малое $r > 0$, для которого $K = E \cap \overline{B}^n_{x_0,r} \subset \Omega$ является компактным множеством. Тогда $\varphi \mid K \in C^\alpha(K)$ для некоторого α, и из условия (28) на K следует (29). Обратно, пусть $\varphi \in C_H(E)$, и K – компактное подмножество E. Чтобы показать, что $\varphi \mid K \in C^\alpha(K)$ для некоторой константы $\alpha \in (0,1)$, имеем две возможности:

(a) существуют $\rho \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$ и $L > 0$, такие, что (28) удовлетворяется для $x, y \in K$ при условии $|x-y| \le \rho$. Но тогда, если $x, y \in K$ и $|x-y| > \rho$, (28), очевидно, удовлетворяется при $2M\rho^{-\alpha}$ вместо L, где $M = \sup|\varphi|(K) < +\infty$, так как $\varphi \in C(E)$. Таким образом, (28) удовлетворяется для всех $x, y \in K$, если заменим L на $\max\{L, 2M\rho^{-\alpha}\}$.

(b) вторая возможность состоит в том, что (28) не удовлетворяется для $x, y \in K$ с $|x-y| \leq \rho$ при любом выборе $\rho \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$ и $L > 0$. Покажем, что для $\varphi \in C_H(E)$ второй случай фактически невозможен. Предположим, что обратное верно. Положим $\rho = \alpha = 1/n$ и $L = n$ для $n \in \mathbb{N}$. Можно найти две последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset K$, $|x_n - y_n| \leq 1/n \to 0$ такие, что

$$|\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| > n\,|x_n - y_n|^{1/n}\,. \tag{30}$$

Заменяя $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ подходящими подпоследовательностями, предположим, что $x_n \to x_0$ и $y_n \to x_0$ для некоторого $x_0 \in K \subset E$. Но тогда (30) противоречит (29) для достаточно больших n.

4. Далее, пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $C^k(\Omega)$ множество k раз непрерывно дифференцируемых комплексных функций на Ω. Положим $\partial_i u = \partial u/\partial x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ для $u \in C^1(\Omega)$, так что $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$ есть *градиент* функции u. Тогда для $u \in C^2(\Omega)$ положим $\partial^2_{ij} u = \partial_j(\partial_i u)$, так что $\Delta = \Delta_n = \partial^2_{11} + \ldots + \partial^2_{nn}$ обозначает *оператор Лапласа*. Как обычно, через $\mathcal{H}(\Omega)$ обозначаем класс *гармонических* в Ω функций, т.е. функций $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Теперь для $x, y \in \mathbb{R}^n$ функция

$$F_n(x,y) = \begin{cases} -\log|x-y|\,, & \text{если} \quad n = 2, \\ |x-y|^{2-n}\,, & \text{если} \quad n > 2, \end{cases} \tag{31}$$

является так называемым *фундаментальным решением* $F_n(\cdot, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \backslash \{y\})$ уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ с полюсом в точке $y \in \mathbb{R}^n$.

3.2. Интеграл Пуассона и задача Дирихле для $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *задачу Дирихле* с граничным условием $f \in C(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1}_+), \\ u = f \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{32}$$

В случае

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left(1 + |t|^2\right)^{-(n+1)/2} dt < +\infty, \tag{33}$$

решение задачи (32) можно представить с помощью *интеграла Пуассона* $\mathcal{P}_f = \mathcal{P}^{n+1}_f$ функции f для верхнего полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$, определенного для $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ формулой

$$\mathcal{P}_f(x,y) = \frac{2y}{\sigma_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)(|t-x|^2 + y^2)^{-(n+1)/2} dt. \tag{34}$$

После линейной замены переменных $t = x + y\tau$ (с якобианом $J(\tau) = y^n$) это можно записать в виде

$$\mathcal{P}_f(x,y) = \frac{2}{\sigma_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y\tau) \left(1+|\tau|^2\right)^{-(n+1)/2} d\tau. \tag{35}$$

Чтобы показать существование решения (32) без условия (33), достаточно использовать обощение вышеупомянутой теоремы 2 Т. Карлемана. Неограниченное замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством Карлемана*, если для любой пары функций $f \in C(E) \cap \mathcal{H}(E^o)$ и $\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, с $\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subset (0,1]$, существует функция $g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию

$$|f(t) - g(t)| < \varepsilon(t) \quad \text{при} \quad t \in E. \tag{36}$$

Описание множеств Карлемана $\mathbb{R}^n$ можно найти в [10].

Пример 1. *Простейшим примером множества Карлемана в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *является множество* $E = \mathbb{R}^n$ *с* $E^o = \emptyset$, *отождествленное с границей* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *(ср. теорема 2 для случая* $\mathbb{R}^2$*). В этом случае приближение* (36) *можно получить по аналогии с изначальным подходом Карлемана* [5] *для* $n = 2$.

Пусть теперь $f \in C(\mathbb{R}^n)$ – произвольная функция, не обязательно удовлетворяющая условию (33). Существование решения u задачи Дирихле (32) можно легко доказать, используя аппроксимацию с учетом (36) для $E = \mathbb{R}^n$.

Предложение 2. *Задача Дирихле* (32) *имеет решение вида* $u = g + \mathcal{P}^{n+1}_{f-g}$ *с* $g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$, *удовлетворяющим на* $\mathbb{R}^n$ *условию* (36) *для некоторого* $\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subset (0,1]$.

Рассмотрим некоторые другие свойства интеграла Пуассона $\mathcal{P}_f = \mathcal{P}^{n+1}_f$. Предположим сначала, что $f \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$ так, что $\Delta f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ с $\Delta = \Delta_n$. Учитывая, что из (35) следует

$$\partial^2_{yy}\mathcal{P}_f = -\Delta\mathcal{P}_f = -\mathcal{P}_{\Delta_n f}, \tag{37}$$

получаем, что локально равномерно в $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{y\to 0}(\partial^2_{yy}\mathcal{P}^{n+1}_f)(x,y) = -(\Delta_n f)(x). \tag{38}$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^2(G)$, *где* G *– открытое подмножество* $\mathbb{R}^n$. *Тогда решение* $u = g + \mathcal{P}^{n+1}_{f-g}$ *задачи Дирихле* (32) *удовлетворяет условию*

$$\lim_{y\to 0}(\partial^2_{yy}u)(x,y) = -(\Delta f)(x), \tag{39}$$

локально равномерно при $x \in G$. *Отсюда следует, в частности, существование производной по нормали* $\partial_\nu u \in C(G)$ *для любого решения* (32)

Доказательство. Заменяя u на $u-g$ и f на $f-g$, доказательство (39) сводится к случаю $g=0$, т.е. $u=\mathcal{P}_f$, с дополнительным допущением, что f ограничена на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим, сначала два случая: (a) $f=0$ на G, тогда по принципу симметрии, u имеет гармоническое продолжение в окрестности G в $\mathbb{R}^n$, откуда следует (39). (b) $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$; тогда формула (39) доказана в (38). Общий случай следует из (a)-(b). Поскольку для замкнутого n-мерного шара $\overline{B}^n_{r,x} \subset B^n_{r_1,x} \subset \overline{B}^n_{r_1,x} \subset G$, можно найти две функции $f_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ и $f_2 \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ такие, что $f_1 = 0$ на $\overline{B}^n_{r,x}$, $f_2 = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus B^n_{r_1,x}$ и $f = f_1 + f_2$ на $\mathbb{R}^n$. Доказательство завершено.

Лемма 2. *Для* $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ *существует функция* $v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ *такая, что* $v(x,0)=0$ *и*

$$(\partial_y v)(x,0) = u(x,0) \quad \textit{для} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{40}$$

Отметим, что нельзя непосредственно положить

$$v(x,y) = \int_0^y u(x,t)dt,$$

так как, в общем, v не будет гармонической в $\mathbb{R}^{n+1}$ (для $u(x,y) \equiv y$ имеем $v(x,y) = y^2/2$ с $\Delta v(x,y) \equiv 1$).

Proof: Определим функцию $v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ по формуле

$$v(x,y) = 2^{-1}\int_{-y}^y u(x,t)dt \quad \text{для} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{41}$$

Тогда из (41) следует $v(x,0)=0$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$(\partial_y v)(x,y) = 2^{-1}\left[u(x,y) + u(x,-y)\right] \quad \text{для} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{42}$$

В частности, $(\partial_y v)(x,0) = u(x,0)$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, из (42) следует

$$(\partial^2_{yy} v)(x,y) = 2^{-1}\left[(\partial_y u)(x,y) - (\partial_y u)(x,-y)\right] \quad \text{для} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{43}$$

Так как $\Delta_{n+1} u = \Delta_n u + \partial^2_{yy} = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, то из (42) имеем

$$\begin{aligned}(\Delta_n v)(x,y) &= -2^{-1}\int_{-y}^y \partial^2_{tt} u(x,t)dt \\ &= -2^{-1}\left[(\partial_y u)(x,y) - (\partial_y u)(x,-y)\right].\end{aligned}$$

Отсюда и из (43) следует $\Delta_{n+1} v = \Delta_n v + \partial^2_{yy} v \equiv 0$ на $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.3. Уравнение Пуассона и задача Неймана для $\mathbb{R}_+^{n+1}$. 1. Фундаментальные решения $F_n(\cdot, y)$ уравнения Лапласа $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с полюсом в точке $y \in \mathbb{R}^n$ (см. (31)) являются основными при решении уравнений *Пуассона*

$$(\Delta u)(x) + \rho(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{44}$$

где $\rho \in C(\Omega)$. Предполагается, что любое решение u уравнения (44) (определенное с точностью до функции, гармонической в Ω) принадлежит $C^2(\Omega)$. Полезным инструментом является известная формула представления *Грина*.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу C^1. Для $\zeta \in \partial\Omega$ через $\nu(\zeta)$ обозначим внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. Символ ∂_ν обозначает дифференцирование относительно ν так, что $(\partial_\nu u)(\zeta) = \langle(\nabla u)(\zeta), \nu(\zeta)\rangle$ для $u \in C^1(\overline{\Omega})$ и $\zeta \in \partial\Omega$. Положим $u = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Тогда для $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и $x \in \Omega$

$$u(x) = c_n^{-1} \int_{\partial\Omega} [u(y)\partial_\nu F_n(x, y) - (\partial_\nu u)(y) F_n(x, y)] d\sigma - u_\rho(x), \tag{45}$$

где $c_n = \sigma_n \max\{1, n-2\}$ и

$$u_\rho(x) = c_n^{-1} \int_\Omega F_n(x, y)\rho(y) dy, \quad x \in \Omega. \tag{46}$$

Так как первый интеграл в (45) гармоничен в Ω, потенциал (46) является хорошим кандидатом на решение уравнения Пуассона (44) с $\rho \in C(\overline{\Omega})$. В действительности, необходимы некоторые дополнительные условия на ρ. Следующая лемма следует из теоремы 12.1 работы [8].

Лемма 3. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей $\partial\Omega$ из класса C^1 и $\rho \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Тогда потенциал* (46) *определяет функцию $u_\rho \in C^2(\Omega) \cap C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую в Ω уравнению Пуассона* (44) *и $u_\rho \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$.*

Лемма 4. *(полезна для обсуждения основных результатов) Для $\rho \in C_H(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, существует функция $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая на $\Omega = \mathbb{R}^n$ уравнению Пуассона* (44).

Доказательство. Для $n = 1$ лемма тривиальна, поэтому пусть $n \geq 2$. Выберем последовательность $\{r_k\}_0^\infty \subset \mathbb{R}_+$ такую, что $r_k \uparrow +\infty$ при $k \uparrow +\infty$, и положим $\Omega_0 = B_{r_0}^n$ и $\Omega_k = B_{r_k}^n \setminus \overline{B}_{r_{k-1}}^n$ для $k \in \mathbb{N}$. Положим $\rho_k = \rho$ на $\overline{\Omega}_k$ и $\rho_k = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k$. Тогда согласно предложению 1, $\rho_k \in C^\alpha(\overline{\Omega}_k)$ для некоторого $\alpha = \alpha_k \in (0, 1)$, и по лемме 3 потенциал $u_{\rho_k} \in C^2(\Omega_k) \cap C(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (44) в Ω_k, а также

$u_{\rho_k} \in \mathcal{H}(B_{r_{k-1}})$. Тогда, полагая $p_0 = p_1 \equiv 0$ для $k \in \mathbb{N}$, из степенного разложения Лапласа u_{ρ_k} в $B^n_{r_{k-1}}$ (на однородные гармонические полиномы) можно найти гармонический полином p_k, $k \geq 2$, удовлетворяющий условию

$$|u_{\rho_k}(x) - p_k(x)| < 2^{-k} \quad \text{для} \quad x \in B_{r_{k-2}}. \tag{47}$$

Теперь определим искомое решение u уравнения Пуассона (44) в $\mathbb{R}^n$:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[u_{\rho_k}(x) - p_k(x)] \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{48}$$

Условие (47) гарантирует равномерную сходимость ряда (48) на каждом замкнутом шаре $\overline{B}^n_r$. Выбирая для $r > 0$ число $i \in \mathbb{N}$ такое, что $r_{i-2} = \eta > r$ для $x \in \overline{B}^n_r$ из (27) следует

$$u(x) = c_n^{-1}\int_{B_\eta} F_n(x,y)\rho(y)dy + \sum_{k=\nu}^{+\infty}[u_{\rho_k}(x) - p_k(x)]. \tag{49}$$

По лемме 3 интеграл в (49) удовлетворяет уравнению Пуассона (44) для $x \in B_\eta$. Что касается ряда в (49), то он определяет функцию, *гармоническую* в B^n_r, так как $u_{\rho_k} - p_k \in \mathcal{H}(B_\eta)$, ряд равномерно сходится на $\overline{B}_r$ согласно (47). Доказательство завершено.

2. Теперь рассмотрим для $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ задачу Неймана в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$:

$$\begin{cases} u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1}_+), \\ \partial_\nu u = \varphi \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{50}$$

где ∂_ν обозначает внутреннюю *производную по нормали* на $\mathbb{R}^n$. Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *При дополнительном условии* $\varphi \in C_H(\mathbb{R}^n)$ *задача Неймана* (50) *разрешима для* $n \geq 1$.

Доказательство. По лемме 4 существует $u_\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$(\Delta u_\varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{51}$$

Далее, по лемме 1 существует решение u задачи Дирихле (32) с $f = u_\varphi$ такое, что из (39) и (51) следует для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{y\to 0}(\partial^2_{yy}u)(x,y) = (\Delta u_\varphi)(x) = \varphi(x).$$

Полагая $u = \partial_y u_\varphi$, получим, что u удовлетворяет (50).

3.4. Результаты для $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Следующие две теоремы являются многомерными обобщениями теоремы 3 М. В. Келдыша и теоремы 4.

Теорема 5. *Для произвольных функций $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi, \varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, где $\varepsilon(R^n) \subset (0,1]$, существует функция u, решающая в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ задачу Дирихле* (12) *такая, что u – "приближенное" решение задачи Неймана* (50) *в $\mathbb{R}_+^{n+1}$:*

$$|(\partial_\nu u)(x) - \varphi(x)| < \varepsilon(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{52}$$

Доказательство. Согласно предложению 2, существует функция u_f, решающая задачу Дирихле (32) в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, и, поскольку $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то по лемме 1 существует производная по нормали $\partial_y u_f \in C(\mathbb{R}^n)$. Полагая $\varphi_1 = \varphi - \partial_y u_f \in C(\mathbb{R}^n)$, можно найти из (36) (с $E = \mathbb{R}^n$) функцию $g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющую условию

$$|g(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^n. \tag{53}$$

Теперь по лемме 2 существует функция $v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ такая, что $v = 0$ на $\mathbb{R}^n$ и $\partial_y v = g$ на $\mathbb{R}^n$. Мы найдем искомую функцию u, положив $u = u_f + v$. Тогда (52) следует из (53), и доказательство завершено.

В следующей теореме роли задач Дирихле и Неймана взаимозаменены.

Теорема 6. *Для данных произвольных функций $f, \varphi, \varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, где $\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subset (0,1]$ и $n \geq 1$, существует функция u, решающая в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ задачу Неймана* (50) *такая, что u является "приближенным" решением задачи Дирихле* (32) *в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с граничным условием f:*

$$|u(x) - f(x)| < \varepsilon(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{54}$$

Доказательство. Согласно примеру 1 и (36), существует функция $u_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(t) - u_1(t)| < (1 + |t|^2)^{-1} \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R}^n, \tag{55}$$

такая, что $\varphi - u_1$ удовлетворяет (33). Рассмотрим интеграл Пуассона $\mathcal{P}_{\varphi - u_1}^{n+1}$. Условие (55) с (31) также гарантирует локально равномерную сходимость для $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ интеграла

$$u_2(x, y) = -\frac{2}{c_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} F_{n+1}[(x, y), t](\varphi - u_1)(t)dt,$$

определяющего функцию $u_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}) \cap (\mathcal{H}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Так как из (31) имеем

$$\partial_y F_{n+1}[(x, y), t] = -\max\{1, n-1\} y(|x - t|^2 + y^2)^{-(n+1)/2},$$

то из (34) следует, что $\partial_y u_2 = \mathcal{P}^{n+1}_{\varphi-u_1}$, откуда получаем

$$\partial_\nu u_2 = \varphi - u_1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n. \tag{56}$$

По лемме 2 существует функция $v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ такая, что $\partial_\nu v = u_1$ на $\mathbb{R}^n$. Ввиду (56) функция $u_4 = u_2 + v$ решает задачу Неймана (50). Далее, пусть $g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет (36) для $E = \mathbb{R}^n$ и $f - u_4 |_{\mathbb{R}}$ вместо f. Положим

$$u_5(x,y) = 2^{-1}[g(x,y) + g(x,-y)],$$

так, что $u_5 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_5 = g$ на $\mathbb{R}^n$ и $\partial_\nu u_5 = 0$ на $\mathbb{R}^n$. Учитывая (36) получим искомую функцию u, полагая $u = u_4 + u_5$.

Abstract. The aim of the paper is to examine some aspects of the boundary value problems for harmonic functions in half-spaces related to approximation theory. M. V. Keldysh mentioned curious fact on *richness* in some sense of the solutions of Dirichlet problem in upper half-plane for a fixed continuous boundary data on the real axis. This can be considered as a model version for the Dirichlet problem with continuous boundary data, defined except a single boundary point, with no restrictions imposed on solutions near that point.

Some extensions and multi-dimensional versions of Keldysh's results are obtained and related questions on existence, representation and richness of solutions for the Dirichlet and Neumann problems discussed.

Список литературы

[1] R. Nevanlinna, "Über eine Erweiterung des Poissonschen Integrals," Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **24** (4), 1-15 (1925).
[2] S. J. Gardiner, "The Dirichlet and Neumann Problems for Harmonic Functions in Half-Spaces," J. London Math. Soc. (2), **24**, 502-512 (1981).
[3] С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного," Успехи мат. наук **7** (2(48)), 31-122 (1952). English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. **3** (1962).
[4] Sh. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, II-nd Edition (Springer, New York, 2001).
[5] T. Carleman, "Sur un Théorème de Weierstrass," Arkiv Math., Astr. Fys. **20B**, 1-5 (1927).
[6] М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями," ДАН СССР **47** (4), 243-245 (1945).
[7] M. Finkelstein and S. Scheinberg, "Kernels for Solving Problems of Dirichlet Type in a Half-Plane," Adv. in Math. **18**, 108-113 (1975).
[8] E. Di Benedetto, *Partial Differential Equations* (Birkhäuser, Boston, 1995).
[9] L. L. Helms, *Introduction to Potential Theory* (Wiley, New York, 1969).
[10] S. J. Gardiner and M. Goldstein, "Carleman Approximation by Harmonic Functions," Amer. J.Math. **117**, 245-255 (1995).

Поступила 27 октября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 39-54

ON A CONJECTURE OF MERGELYAN

J. E. BRENNAN

University of Kentucky, Lexington, KY, USA
E-mail: *brennan@ms.uky.edu*

Аннотация. A solution is presented to the problem of uniform weighted polynomial approximation on bounded simply connected domains in the complex plane, that is analogous to Mergelyan's solution to the classical Bernstein problem on the real line.

To Sergei Nikitovich Mergelyan on his 80-th birthday

1. INTRODUCTION

Let Ω be a bounded simply connected domain in the complex plane $\mathbb{C}$, let Ω_∞ be the unbounded complementary component of its closure, and let w be a positive continuous function defined throughout Ω. Denote by dA the two-dimensional Lebesgue measure (area measure) and for each p, $1 \leq p < \infty$, let $H^p(\Omega, wdA)$ be the closed subspace of $L^p(\Omega, wdA)$ that is spanned by the complex analytic polynomials. Since w is bounded away from zero on each compact subset of Ω, it follows that

$$H^p(\Omega, w\ dA) \subseteq L^p_a(\Omega, w\ dA),$$

the apparently larger of the two spaces consisting of functions in $L^p(\Omega, wdA)$ analytic in Ω. It is an old problem to find necessary and sufficient conditions on either the region Ω or on the weight w in order that $H^p(\Omega, wdA) = L^p_a(\Omega, wdA)$. Whenever the two spaces coincide, the polynomials are said to be *complete* in $L^p_a(\Omega, wdA)$.

By analogy with uniform polynomial approximation on compact subsets of the plane, it would seem natural to assume from the outset that $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, at least for $w \equiv 1$. Regions for which $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$ are known as *Carathéodory domains*: they evidently include all regions bounded by a single Jordan curve, as well as many other non-Jordan regions. By 1923 Carleman [11] was able to prove that $H^p(\Omega, dA) = L^p_a(\Omega, dA)$ for all p whenever Ω is a Jordan domain, and a decade later Markushevich [18] and Farrell [13] obtained independently the corresponding theorem for Carathéodory regions (cf. also [26], p. 112). That left unresolved the question of polynomial completeness on non-Carathéodory regions; regions for which the following are representative examples:

(a) the *crescent*, topologically a region bounded by two internally tangent circles;

(b) *domains with boundary cuts*, that is regions obtained from a Jordan domain by introducing cuts in the form of simple arcs extending outward to the boundary.

In 1939, Keldysh [16] made the initial and somewhat surprising discovery: For a crescent Ω the polynomials may or may not be dense in $L^p_a(\Omega, dA)$ depending on the *thickness*, or *metric properties*, of Ω in the vicinity of the multiple-boundary point. Not until 1947-48 was a condition found that is both necessary and sufficient for completeness of the polynomials in that context. That was due to the combined efforts of Djrbashyan [12], who established sufficiency, and Shaginyan [30], who established necessity. They showed that if Ω is a crescent lying between the two circles $|z-1| = 1$ and $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, having its multiple-boundary point at the origin, and if $l(r)$ is the total length of $(|z| = r) \cap \Omega$ then $H^p(\Omega, dA) = L^p_a(\Omega, dA)$ if and only if

$$\int_0 \log\, l(r)\, dr = -\infty, \tag{1.1}$$

provided $l(r)$ is subject to certain additional and rather restrictive regularity conditions (cf. [26], p. 158). The condition that Ω lies between two tangent circles precludes the possibility of a cusp at the multiple-boundary point, and is essential to the theorem (cf. [4], p. 142). Between the years 1968 and 1977 more precise criteria were found for completeness in a much wider class of crescent domains by Maz'ja and Havin [15], [20], [21] and the author [3], [4]. In addition to vastly weaker regularity restrictions, the intersection of the exterior and the interior boundaries of the crescent was no longer assumed to be a singleton.

It had been noticed at a rather early stage that whenever the polynomials fail to be complete in a crescent domain that was due to, or at least accompanied by, the fact that every function in $H^p(\Omega, dA)$ then admits an analytic continuation across $\partial_i\Omega = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\infty$ into the bounded region complementary to $\bar{\Omega}$. If in a slit domain Ω the total planar measure of the cuts is zero, then the polynomials are evidently not complete in $L^p_a(\Omega, dA)$ for essentially the same reason.

However, for cuts sufficiently massive, Mergelyan and Tamadyan [29] have shown that even in a slit domain it can happen that $H^2(\Omega, dA) = L^2_a(\Omega, dA)$, and their argument extends to all $p \geq 1$. In an attempt to fully explain the completeness phenomenon when $w \equiv 1$ Mergelyan [27] subsequently conjectured, at least for $p = 2$, that in order to have $H^p(\Omega, dA) = L^p_a(\Omega, dA)$, it is necessary and sufficient that for each point $\xi \in \partial\Omega$, and each $\epsilon > 0$ a polynomial P should exist, such that

(1) $||P||_{L^p(\Omega,dA)} < \epsilon$;

(2) $\sup\limits_{|z-\xi|<\epsilon} |P(z)| > 1$.

In other words, completeness fails if and only if at least for one point $\xi \in \partial\Omega$ and a constant $C > 0$ the inequality

$$|P(z)| \leq C||P||_{L^p(\Omega,dA)} \tag{1.2}$$

is satisfied for all polynomials P and all z in some (possibly small) neighborhood of ξ. In particular, every function in $H^p(\Omega, dA)$ must therefore admit an analytic continuation across $\partial\Omega$ to a fixed neighborhood of ξ. Mergelyan's conjecture has since been confirmed, not only in its original form, but in many instances for weighted polynomial approximation as well (cf. [5], p. 418 and [8]). Moreover, it has turned out, rather unexpectedly, that (1.2) is equivalent to demanding merely that the inequality

$$|P(\xi)| \leq C||P||_{L^p(\Omega,dA)} \tag{1.3}$$

be satisfied for all polynomials P at a single point $\xi \in \partial\Omega$. Such points are generally referred to as *bounded point evaluations* (or BPE's for short), and they play a key role in connection with the dichotomy between completeness and analytic continuation as envisioned by Mergelyan (cf. [10]).

In order to study the completeness question for the most general regions where boundary cuts are present, we consider a weighted measure wdA. We might expect that $H^p(\Omega, wdA) = L^p_a(\Omega, wdA)$ if $w(z) \to 0$ sufficiently rapidly at $\partial_i\Omega$ so that the underlying measure respects any and all cuts.

But, to avoid certain technical difficulties we shall further assume that w depends only on Green's function. More specifically, $g(z, a)$ will denote Green's function with pole at some fixed point $a \in \Omega$. We put $g(z) = \min\,(g(z, a), 1)$ and require that $w(z) = w(g(z))$ be a function of $g(z)$ alone. This makes the problem conformally invariant, and every significant result concerning weighted polynomial approximation on open subsets of the plane, going back to Keldysh [17], is based on this or some roughly equivalent assumption.

If, in addition, we assume that $g\ \log w(g) \downarrow -\infty$ as $g \downarrow 0$ then $H^p(\Omega, wdA) = L^p_a(\Omega, wdA)$ for all p, $1 \leq p < \infty$, whenever

$$\int_0 \log\,\log\,\frac{1}{w(g)}\,dg = +\infty. \tag{1.4}$$

Moreover, if $\partial_i\Omega$ contains an isolated *smooth* arc lying in the interior of $\bar{\Omega}$ then $H^p(\Omega, wdA) \neq L^p_a(\Omega, wdA)$ whenever the integral in (1.4) converges and furthermore every function in $H^p(\Omega, wdA)$ then extends analytically across the exposed arc, a fact consistent with Mergelyan's conjecture (cf. [8] and [6], p. 46).

Much of what has been said concerning L^p-completeness has a natural interpretation in the context of uniform weighted approximation. Beurling [2] has considered, for example, the following generalization of the classical Bernstein problem for weighted polynomial approximation on the real line to approximation on open subsets in the plane: With Ω and w as above, let $C_w(\Omega)$ be the Banach space of all complex-valued functions f for which the product $f(z)w(z)$ is continuous on $\bar{\Omega}$ and vanishes on $\partial\Omega$, the norm being defined by

$$||f||_w = \sup_{\Omega} |f|\, w.$$

Evidently, the collection of functions

$$A_w(\Omega) = \{f \in C_w(\Omega) : \ f \text{ is analytic in } \Omega\}$$

is a closed subspace of $C_w(\Omega)$. The problem is to determine whether or not the polynomials are dense in $A_w(\Omega)$. The present paper offers a solution in terms of suitably understood bounded point evaluations which is analogous to Mergelyan's solution [28] to the aforementioned Bernstein problem (cf. also [14], Chapter IV). With some minor restrictions on w we verify Mergelyan's conjecture in the context of uniform weighted approximation by establishing the general principle that either the polynomials are dense in $A_w(\Omega)$, or else, every function in $A_w(\Omega)$ admits an analytic extension to a fixed neighborhood of some point $\xi \in \partial\Omega$.

An extensive and in-depth discussion of the background and history of the completeness problem in its various aspects can be found in the survey articles of Mel'nikov and Sinanyan [25] Mergelyan [26], [28] and the author [9], as well as in the monograph of Walsh [35].

2. THE CAUCHY INTEGRAL AND ANALYTIC CAPACITY

In order to show that one collection of functions is dense in another we argue by duality, taking into account the fact that in this case every continuous linear functional on $A_w(\Omega)$ can be identified with a bounded complex-valued Borel measure μ on Ω. Hence we are immediately led to questions concerning the behavior of the

Cauchy integral

$$\hat{\mu}(z) = \int_\Omega \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

at points belonging to $\partial_i\Omega$, and ultimately to the notion of analytic capacity.

The *analytic capacity* $\gamma(X)$ of a compact planar set X is defined as follows:

$$\gamma(X) = \sup\ |f'(\infty)|,$$

where the supremum is taken over all functions analytic in $\hat{\mathbb{C}} \setminus X$ and normalized so that

(a) $||f||_\infty = \sup\limits_{\hat{\mathbb{C}}\setminus X} |f| \le 1$,
(b) $f(\infty) = 0$.

Here $\hat{\mathbb{C}}$ is the extended complex plane or Riemann sphere. For an arbitrary set E we let $\gamma(E) = \sup \gamma(X)$, the supremum now being taken over all compact sets $X \subseteq E$.

It is of utmost importance that γ is equivalent to a second auxiliary capacity γ^+ which is defined directly in terms of the Cauchy integral. For a compact set X we define

$$\gamma^+(X) = \sup_\nu \nu(X)$$

to be the supremum over all *positive* measures ν supported on X such that $\hat{\nu} \in L^\infty(\mathbb{C})$ and $||\hat{\nu}||_\infty \le 1$. Since $\hat{\nu}$ is analytic in $\hat{\mathbb{C}} \setminus X$ and $|\hat{\nu}'(\infty)| = \nu(X)$, the function $\hat{\nu}$ is also admissible for γ and so $\gamma^+(X) \le \gamma(X)$. As before, if E is an arbitrary planar set we let $\gamma^+(E) = \sup\ \gamma^+(X)$ where X is compact and $X \subseteq E$. Tolsa [32] has shown that there exists an absolute constant $C > 0$ such that

(i) $\gamma^+(E) \le \gamma(E) \le C\gamma^+(E)$ for all sets $E \subseteq \mathbb{C}$
(ii) $\gamma(\cup_n E_n) \le C \sum_n \gamma(E_n)$ for any countable collection of Borel sets $E_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$

Since γ^+ is semiadditive in the sense that it enjoys property (ii), it follows that (i) implies (ii). These results of Tolsa have their roots in the work of Mattila, Mel'nikov and Verdera [19], [23] (cf. also [24] and [33]).

The capacity γ^+ can be used in order to establish a certain lower semicontinuity associated with the Cauchy integral, a property essential for our main theorem. Given a finite, complex, compactly supported measure μ, by $\hat{\mu}$ we denote the Cauchy transform as defined above, and

$$U^{|\mu|}(z) = \int \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|}$$

will be the corresponding Newtonian potential.

Lemma 1. *Let x_0 be any point where $U^{|\mu|}(x_0) < \infty$. For each $r > 0$ let $B_r = B(x_0, r)$ be the disk with center at x_0 and radius r, and E be a set with the property that for every $r > 0$ there is a relatively large subset $E_r \subseteq (E \cap B_r)$ on which $U^{|\mu|}$ is bounded; that is,*

(i) $U^{|\mu|} \leq M_r < \infty$ *on* E_r,

(ii) $\gamma(E_r) \geq \epsilon\gamma(E \cap B_r)$ *for some absolute constant* ϵ.

If, moreover, E is thick at x_0 in the sense that

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\gamma(E \cap B_r)}{r} > 0, \tag{2.1}$$

then necessarily

$$|\mu(x_0)| \leq \limsup_{z\to x_0, z\in E} |\hat{\mu}(z)|.$$

For a proof see [10], p. 224. Let us also emphasize that it is essential for our purpose that the conclusion of the lemma be valid at every point x_0 were $U^{|\mu|}(x_0) < \infty$, and not simply almost everywhere with respect to area.

3. BOUNDED POINT EVALUATIONS AND ANALYTIC CAPACITY

If Φ is a bounded linear functional on $A_w(\Omega)$, by Hahn-Banach theorem there exists a finite Borel measure μ on Ω such that

$$\Phi(f) = \int_\Omega fw\, d\mu$$

for all $f \in A_w(\Omega)$. Throughout this section we shall assume that μ is an annihilator for $A_w(\Omega)$; that is

$$\int_\Omega fw\, d\mu = 0,$$

whenever $f \in A_w(\Omega)$. By definition $\nu = w\mu$ and $\hat{\nu}$ is its Cauchy transform. Thus, $\hat{\nu} \equiv 0$ in Ω_∞. Our results are based on the following elementary fact:

Lemma 2. *If $H^1(|\hat{\nu}|dA)$ has a BPE at a point $x_0 \in \mathbb{C}$, then the polynomials also have a BPE at x_0 in the $A_w(\Omega)$-norm.*

Proof. By assumption there exists a function $h \in L^\infty(dA)$ with the property

$$P(x_0) = \int Ph|\hat{\nu}|\, dA$$

for every polynomial P. Setting $k = h\,\dfrac{|\hat{\nu}|}{\hat{\nu}}$ for $\hat{\nu} \neq 0$ and $k = 0$ otherwise, we have $||k||_\infty = ||h||_\infty$, and by an interchange in the order of integration

$$P(x_0) = \int Pk\hat{\nu}\, dA = -\int \widehat{Pk}\, d\nu.$$

On the other hand, by Weyl's lemma $\widehat{Pk} = P\hat{k} + F$ a.e.-dA where F is entire. But, $\widehat{Pk}$ and $P\hat{k}$ are continuous and so equality holds everywhere. Since, by assumption, ν annihilates all polynomials and so also F

$$P(x_0) = -\int P\hat{k}\,d\nu = -\int P\hat{k}w\,d\mu.$$

It follows that

$$|P(x_0)| \leq C \sup_{\Omega} |P|w = C||P||_w$$

for all polynomials P and some absolute constant C. That is, the polynomials have a BPE at x_0 in the $A_w(\Omega)$-norm. □

The question therefore arises: Under what conditions might we expect $H^1(|\hat{\nu}|dA)$ to have a BPE at a given point? In order to provide a satisfactory answer we adopt a scheme due to Thomson [31], which has its origins in the work of Mel'nikov [22] and Vitushkin [34].

For each positive integer n we consider a grid in the plane consisting of lines parallel to the coordinate axes, and intersecting at those points with both coordinates integral multiples of 2^{-n}. The resulting collection of squares $\mathcal{G}_n = \{S_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ of side lengths 2^{-n} is an edge-to-edge tiling of the plane. Its members will be referred to as squares of the *n-th generation*. Let x_0 be any point in $\partial\Omega$ at which $U^{|\nu|}(x_0) < \infty$. Beginning with a fixed generation, the n-th say, pick a square $S^* \in \mathcal{G}_n$ with $x_0 \in S^*$. For each $\lambda > 0$ let $E_\lambda = \{z : |\hat{\nu}(z)| < \lambda\}$ and denote by $\mathcal{G}_n^\lambda$ the collection of all n-th generation squares S for which

$$|E_\lambda \cap S| > \frac{1}{100}|S|. \tag{3.1}$$

K_n will denote the union of all squares in $\mathcal{G}_n^\lambda$ that can be joined to S^* by a finite chain of squares also lying in $\mathcal{G}_n^\lambda$. If K_n is bounded or empty, then there exists a closed *corridor*, or *barrier*, $Q_n = \cup_j S_{nj}$ composed of squares from $\mathcal{G}_n$ abutting $S^* \cup K_n$, separating the latter from ∞, adjacent to one another along their sides, and such that for each j

$$|E_\lambda \cap S_{nj}| \leq \frac{1}{100}|S_{nj}|. \tag{3.2}$$

The polynomial convex hull of Q_n is a polygon Π_n with its boundary Γ_n lying along the sides of squares for which (3.2) is satisfied. Thus, $|\hat{\nu}| \geq \lambda$ on a large portion of every square S_{nj} meeting Γ_n. By adjoining to Π_n additional n-th generation squares we obtain a polygon Π_n^* with boundary Γ_n^* in such a way that

(i) $\Pi_n^* \supseteq \Pi_n$,

(ii) $n^2 2^{-n} \leq \text{dist}\,(\Gamma_n^*, \Gamma_n) \leq 3n^2 2^{-n}$.

At this point let K_{n+1} denote the union of all squares in $\mathcal{G}_{n+1}^\lambda$ that can be joined to Π_n^* by a chain of squares in $\mathcal{G}_{n+1}^\lambda$ and continue as before. In this way we obtain a nested sequence of polygons

$$\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \Pi_{n+l} \subseteq \cdots \tag{3.3}$$

and compact sets $K_j \subseteq (\Pi_j \setminus \Pi_{j-1})$, $j \geq n$, some of which may be empty, such that if $K_j \neq \emptyset$, then

(a) K_j is the union of squares in $\mathcal{G}_j$ connecting Γ_{j-1}^* to Q_j;
(b) $|E_\lambda \cap S| \geq |S|/100$ for each $S \subseteq K_j$;
(c) $\text{dist}\,(K_j, \Gamma_j^*) \leq \text{dist}\,(K_j, \Gamma_j) + \text{dist}\,(\Gamma_j, \Gamma_j^*) < 4j^2 2^{-j}$.

There are two mutually exclusive possibilities: either the sequence (3.3)

(A) terminates after l steps and $\infty \in \Pi_{n+l}$, or
(B) it continues indefinitely and $\infty \notin \Pi_j$ for any j.

In the second instance there exists an *infinite* sequence of barriers Q_j bounded by polygonal curves Γ_j extending outward from x_0, and accumulating in a finite portion of the plane. This implies

Lemma 3. *If there exists an infinite sequence of barriers Q_j, $j = n, n+1, n+2, \cdots$ surrounding a point x_0, then there is a BPE at x_0 for the polynomials in the $L^1(|\hat{\nu}|dA)$-norm. Hence, there is also a BPE at x_0 in the $A_w(\Omega)$-norm.*

A complete proof can be found in [10], pp. 230-232. Moreover, a closer examination of the argument shows that each point ξ in the region bounded by the initial barrier Q_n corresponds to a BPE for $A_w(\Omega)$ with norm depending only on $\text{dist}\,(\xi, Q_n)$. Thus, if Ω_0 is a neighborhood of x_0 with $\text{dist}\,(\Omega_0, Q_n) > 0$, then there exists a fixed constant $C > 0$ such that

$$|P(\xi)| \leq C \sup_{\Omega} |P|w = C||P||_w$$

for all $\xi \in \Omega_0$ and all polynomials P. It follows that every function f in $A_w(\Omega)$ must necessarily admit an analytic continuation to Ω_0. The role played here by the Cauchy integral of an annihilating measure is illustrative of a general principle associated with the analytic continuation of a given family of functions obtained in one or another completion process (cf. [7]).

4. THE WEIGHTED APPROXIMATION PROBLEM

We are now in a position to consider the weighted approximation problem in a general context. The notation is as before: Ω is a bounded simply connected domain, $g(z,a)$ is Green's function for Ω with pole at a fixed point $a \in \Omega$, $g(z) = \min(g(z,a),1)$, and $w(z) = w(g(z))$ is a weight depending only on $g(z)$. Moreover, $\phi:\ \Omega \to D$ will be a conformal map of Ω onto the open unit disk D with $\phi(a) = 0$, and $\psi = \phi^{-1}$. For each point $z \in \Omega$ let $\delta(z)$ be the Euclidean distance from z to $\partial\Omega$.

The following two Lemmas are corollaries of the Koebe distortion theorem (cf. [9], p. 15 for a reference).

Lemma 4. *There exist constants C_1 and C_2, depending only on $\delta(a) = \text{dist}\,(a, \partial\Omega)$, such that for all $z \in \Omega$*

$$C_1 \frac{g(z)}{\delta(z)} \le |\phi'(z)| \le C_2 \frac{g(z)}{\delta(z)}.$$

Lemma 5. *There exists a constant C such that for all $z \in \Omega$*

$$g^2(z) \le C\,\delta(z).$$

Beurling [2] has studied the completeness problem for $A_w(\Omega)$ under the assumption that $\psi:\ D \to \Omega$ extends continuously to $\bar{D}$. This imposes a rather severe restriction on the region Ω, requiring that

(i) $\partial\Omega$ is arcwise connected and

(ii) $\partial\Omega_\infty$ is a Jordan curve.

The effect is to exclude from consideration any region for which either (i) or (ii) is violated; for example, the region Ω obtained by removing from D the spiral $z = re^{i\theta}$ defined by

$$r = e^{-1/\log\,\theta}, \quad \theta > 2\pi + 1.$$

The region Ω as described here was first examined by Keldysh in 1941 in order to exhibit an example where weighted L^p-completeness fails for weights having a slightly less than optimal rate of decay at $\partial\Omega$. The essential difficulty here lies in the fact that the rest of $\partial\Omega$ is effectively shielded from $\partial\Omega_\infty$. Our goal is to establish a general criterion sufficient for the completeness of the polynomials in the $A_w(\Omega)$-norm with no restrictions on Ω, save simple connectivity.

For an arbitrary weight w and any point $\zeta \in \partial\Omega$ let

$$M_w(\zeta) = \sup\,|P(\zeta)|,$$

the supremum being extended over all polynomials P for which $||P||_w \le 1$. Thus, the polynomials will have a BPE at ζ in the $A_w(\Omega)$-norm if and only if $M_w(\zeta) < +\infty$. In addition to demanding that $w \to 0$ at $\partial\Omega$ we adopt a standing assumption, that

$$\frac{w(g)}{g^2} \downarrow 0, \qquad \text{as } g \downarrow 0.$$

For convenience in notation let $w^*(g) = \dfrac{w(g)}{g^2}$.

Our contribution to Mergelyan's conjecture is this:

Theorem 1. *The polynomials are dense in $A_w(\Omega)$ whenever*

$$M_{w*}(\zeta) = +\infty \qquad \textit{for every } \zeta \in \partial\Omega.$$

If, conversely, the polynomials fail to be dense in $A_w(\Omega)$, then every $f \in A_w(\Omega)$ that can be approximated by polynomials admits an analytic continuation into a fixed neighborhood U intersecting $\partial\Omega$.

Proof. In order to establish the density of the polynomials in $A_w(\Omega)$ it is sufficient to verify that every function, bounded and analytic in Ω, can be so approximated by polynomials. To see why, we first transfer the problem to the open unit disk, setting $W = w(\psi)$ and thereby obtain a weight W on D which depends only on the radius. For any $f \in A_w(\Omega)$ the function $F = f(\psi)$ belongs to $A_W(D)$ and if $0 < r < 1$ the corresponding functions $f_r = F(r\phi)$ and $F_r = f_r(\psi)$ are bounded and analytic in Ω and D, respectively. Moreover, it is clear that

$$||f_r - f||_w = ||F_r - F||_W,$$

and it follows from the monotonicity of W that the right hand side approaches zero as $r \to 1$. Hence, $||f_r - f||_w \to 0$ as $r \to 1$. Since, by assumption, f_r lies in the closed span of the polynomials in $A_w(\Omega)$, the same must be true of f. The conclusion is that the polynomials are dense in $A_w(\Omega)$.

Suppose now that $M_{w*}(\zeta) = +\infty$ for every $\zeta \in \partial\Omega$. Let μ be an annihilating measure for the polynomials; that is

$$\int_\Omega Pw \, d\mu = 0$$

for all polynomials P. Consequently, $\hat{\nu} \equiv 0$ in Ω_∞ where $\nu = w\mu$. If $\zeta \in \partial\Omega$ it can then be inferred from Lemma 5 that

$$U^{|\nu|}(\zeta) = \int_\Omega \frac{w(z)|d\mu(z)|}{|z-\zeta|} \le C \sup_\Omega \frac{w(g)}{g^2} < \infty.$$

It follows from the semi-continuity of the Cauchy integral as described in Lemma 1 that $\hat{\nu} \equiv 0$ on $\partial\Omega_\infty$ (cf. [10], p. 236). Our first task is to prove that $\hat{\nu} \equiv 0$ on the rest of $\partial\Omega$ as well. It is here that we will make use of the fact that $M_{w*}(\zeta) = +\infty$ at every point $\zeta \in \partial\Omega$. By assumption, for any polynomial P and any $\zeta \in \partial\Omega$ we have

$$\int_\Omega \frac{P(z) - P(\zeta)}{z - \zeta}\, d\nu(z) = 0.$$

By an argument due essentially to Cauchy,

$$P(\zeta) = \frac{1}{\hat{\nu}(\zeta)} \int_\Omega \frac{P(z)}{z - \zeta}\, d\nu(z)$$

provided $\hat{\nu}(\zeta) \neq 0$. Since $\zeta \in \partial\Omega$, Lemma 5 implies

$$|P(\zeta)| \leq \frac{1}{|\hat{\nu}(\zeta)|} \int_\Omega \frac{|P(z)|}{|z - \zeta|}\, |d\nu(z)| \leq C \sup_\Omega |P|\, \frac{w(g)}{g^2} = C||P||_{w*}.$$

Because $M_{w*}(\zeta) = +\infty$ this is a contradiction unless $\hat{\nu}(\zeta) = 0$. Therefore, $\hat{\nu} \equiv 0$ on $\partial\Omega$.

The next intermediate step is to establish the fact that the functions $\phi^n\phi'$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ all lie in the closure of the polynomials in $A_w(\Omega)$. To that end we have to prove that

$$\int_\Omega \phi^n\phi' w\, d\mu = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Given $\epsilon > 0$, let $\Omega_\epsilon = \{z \in \Omega : \ g(z) > \epsilon\}$, and ν_ϵ be the restriction of the measure ν to Ω_ϵ. Note that for any point $\zeta \in \partial\Omega$ by Lemma 5

$$|\hat{\nu}_\epsilon(\zeta)| = |\hat{\nu}(\zeta) - \hat{\nu}_\epsilon(\zeta)| = \left| \int_{g \leq \epsilon} \frac{d\nu(z)}{z - \zeta} \right| \leq C\, \frac{w(\epsilon)}{\epsilon^2}. \tag{4.1}$$

Let $\eta < \epsilon$. By an interchange in the order of integration

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{g=\eta} \phi^n\phi'\hat{\nu}_\epsilon\, dz = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{g=\eta} \frac{\phi^n\phi'}{\zeta - z}\, dz \right) d\nu(\zeta) = -\int_{\Omega_\epsilon} \phi^n\phi' w\, d\mu.$$

The contour integral on the left is independent of η when $0 < \eta < \epsilon$ and satisfies an estimate from above:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{g=\eta} \phi^n\phi'\hat{\nu}_\epsilon\, dz \right| \leq \int_{g=\eta} |\hat{\nu}_\epsilon|\, |\phi'|\, \frac{|dz|}{2\pi}.$$

As $\eta \to 0$ the measures $|\phi'|\, \frac{|dz|}{2\pi}$ on $g = \eta$ converge $wk - *$ to harmonic measure $d\omega$ on $\partial\Omega$. By (4.1)

$$\left| \int_{\Omega_\epsilon} \phi^n\phi' w\, d\mu \right| \leq \int_{\partial\Omega} |\hat{\nu}_\epsilon|\, d\omega \leq C \frac{w(\epsilon)}{\epsilon^2}.$$

Finally, letting $\epsilon \to 0$ we conclude that

$$\int_\Omega \phi^n\phi' w\, d\mu = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

and therefore each of the functions $\phi^n\phi'$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ lies in the closure of the polynomials in $A_w(\Omega)$ as claimed.

To complete the proof of the first half of the theorem let $f \in H^\infty(\Omega)$ and fix $\epsilon > 0$. If we can show that there exists a polynomial P such that

$$\sup_{\Omega} |f - P(\phi)\,\phi'|w = ||f - P(\phi)\phi'||_w < \epsilon,$$

the desired result will follow. To that end let us note that, by virtue of the Koebe distortion theorem (i.e. Lemmas 4 and 5),

$$|f - P(\phi)\phi'|w = \left|\frac{f}{\phi'} - P(\phi)\right| |\phi'|w \leq C\left|\frac{f}{\phi'} - P(\phi)\right| \frac{w(g)}{g}$$

for every polynomial P and some absolute constant C. In similar fashion

$$\left|\frac{f}{\phi'}\right| \frac{w(g)}{g} \leq C|f|\frac{w(g)}{g^2}.$$

Since f is assumed to be bounded, the right hand side $\to 0$ as $g \to 0$. Hence, the map $\phi : \Omega \to D$ carries the weight $\dfrac{w(g)}{g}$ from Ω into a corresponding weight W on D, while $\dfrac{f}{\phi'}$ goes over to a function $F \in A_W(D)$ and we have

$$|f - P(\phi)\phi'|w \leq C|F - P|W.$$

Since $W(r) \downarrow 0$ as $r \uparrow 1$ the same argument with which we began this discussion ensures that the right hand side can be made arbitrarily small by a suitable choice of P. Therefore, under the stated conditions the polynomials are dense in $A_w(\Omega)$.

Conversely, suppose now that the polynomials are not dense in $A_w(\Omega)$. It follows from the above argument that there exists an annihilating measure $\nu = w\mu$ for the polynomials and at least one point $x_0 \in \partial\Omega$ where $\hat{\nu}(x_0) \neq 0$. Since $U^{|\nu|}(x_0) < \infty$ we can further conclude that there exists an infinite sequence of barriers relative to a set where $|\hat{\nu}|$ is bounded away from zero, and surrounding the point x_0 as described above in Section 3.

Suppose for the sake of argument that this is not the case. For an arbitrary, but fixed, $\lambda > 0$ consider the set $E_\lambda = \{z : |\hat{\nu}(z)| < \lambda\}$. By assumption E_λ must in a sense escape from x_0 to ∞. More precisely, we can find a connected set X linking x_0 to ∞ such that X is the union of squares from some generation, the n-th say, and higher, and certain narrow rectangles R_j, $j > n$, where

(1) $|E_\lambda \cap S| > \dfrac{1}{100}|S|$ for each square $S \subset X$,
(2) diam $(R_j) \approx j^2 2^{-j}$.

Given $r > 0$, let $B_r = B(x_0, r)$. By discarding certain superfluous pieces we can assume that $X \cap B_r$ is connected and joins x_0 to ∂B_r. Thus,

$$\gamma(X \cap B_r) \geq \frac{1}{4} \text{ diam } (X \cap B_r) \geq \frac{r}{8}.$$

On the other hand, it follows from the countable semi-additivity of analytic capacity that

$$\frac{r}{16} \leq \gamma(X \cap B_{r/2}) \leq C \left[\gamma(K) + \sum_{j=n}^{\infty} j^2 2^{-j} \right],$$

where K is the union of squares in X for which (1) is satisfied, and C is an absolute constant. Since we are free to begin with an arbitrary generation, we can let $n \to \infty$. It follows that

$$\gamma(E_\lambda \cap B_r) \geq Cr$$

(cf. [10], p. 233 for details). The upshot is

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\gamma(E_\lambda \cap B_r)}{r} > 0,$$

and so Lemma 1 implies that

$$|\hat{\nu}(x_0)| \leq \limsup_{z \to x_0, z \in E_\lambda} |\hat{\nu}(z)| \leq \lambda.$$

Since this is valid for all $\lambda > 0$, we must conclude, contrary to assumption, that $\hat{\nu}(x_0) = 0$. We come to the conclusion that for some $\lambda > 0$ there exists an infinite sequence of barriers surrounding x_0 that correspond to the set with $|\hat{\nu}| > \lambda$.

From the discussion following Lemma 3 it is now clear that there is a fixed neighborhood U of x_0 such that every function $f \in A_w(\Omega)$ lying in the closure of the polynomials extends analytically to U. $\square$

To the best of author's knowledge there is at present no available criterion for deciding whether a given point $\zeta \in \partial\Omega$ is, or is not, a BPE for the polynomials in the $A_w(\Omega)$-norm. In certain cases, however, it is possible to nearly quantify the rate of decay of w required in order for the polynomials to be dense in $A_w(\Omega)$. The following is a case in point and was obtained by Beurling [2], p. 413, under the slightly stronger assumption

$$\frac{w(g)}{g^4} \downarrow 0, \qquad \text{as } g \downarrow 0.$$

We shall continue to assume only that $\dfrac{w(g)}{g^2} \downarrow 0$ as $g \downarrow 0$.

Theorem 2. *Assume that the conformal map $\psi : D \to \Omega$ extends continuously to $\bar{D}$. Then, the polynomials are dense in $A_w(\Omega)$ whenever*

$$\int_0 \log\log \frac{1}{w(g)}\, dg = +\infty. \tag{4.2}$$

If, conversely, the integral in (4.2) *converges and $\partial_i\Omega$ contains an isolated smooth arc lying in $\bar{\Omega}$, then the polynomials are not dense in $A_w(\Omega)$.*

Proof (outline) Assume that the integral in (4.2) diverges. Let μ be any bounded Borel measure on Ω such that

$$\int_\Omega Pw\, d\mu = 0$$

for all polynomials P. Thus, the Cauchy integral

$$f(\zeta) = \int_\Omega \frac{w(z)}{z-\zeta}\, d\mu(z)$$

vanishes identically in Ω_∞ and converges absolutely at every point $\zeta \in \partial\Omega$. The essential step is to verify that $f \equiv 0$ on $\partial\Omega$, then the proof proceeds exactly as in Theorem 1. To accomplish that task let

$$f_\epsilon(\zeta) = \int_{\Omega_{2\epsilon}} \frac{w(z)}{z-\zeta}\, d\mu(z),$$

where as before $\Omega_{2\epsilon} = \{z : \ g(z) > 2\epsilon\}$. It is a simple matter to check that for some absolute constant C

(i) $|f(\zeta) - f_\epsilon(\zeta)| \le C\, \dfrac{w(2\epsilon)}{\epsilon^2}$ if $\zeta \in \partial\Omega$

(ii) $|f_\epsilon(\zeta)| \le \dfrac{C}{\epsilon^2}$ if $g(\zeta) < \epsilon$.

Both inequalities are consequences of the Koebe distortion theorem as embodied in Lemmas 4 and 5. The first has been noted in (4.1) above. To arrive at the second let $z \in \Omega_{2\epsilon}$, set $D_\epsilon = \phi(\Omega_\epsilon)$, and recall that by Lemma 5

$$\text{dist}\,(z, \partial\Omega_\epsilon) \ge C\,\text{dist}\,(\phi(z), \partial D_\epsilon)^2 > C\epsilon^2$$

for all ϵ sufficiently small, $\epsilon < 1/2$ say. This in effect is (ii).

Letting $\epsilon \to 0$ in (i) we see that $f_\epsilon \to f$ uniformly on $\partial\Omega$, and so f is continuous there. Under the conformal map we obtain the functions $F = f(\psi)$ and $F_\epsilon = f_\epsilon(\psi)$ where F is continuous on ∂D while F_ϵ is analytic in the region $D \setminus D_\epsilon$ abutting ∂D. Our assumptions allow (i) and (ii) to be expressed in the form

(iii) $|F - F_\epsilon| \le e^{-ch(\epsilon)}$ on ∂D

(iv) $|F_\epsilon| \le \dfrac{c}{\epsilon^2}$ in $D \setminus D_\epsilon$,

where $h(\epsilon) \uparrow +\infty$ as $\epsilon \downarrow 0$ and $\int_0 \log\, h(t)\, dt = +\infty$. Since $F = 0$ on a nontrivial subarc of ∂D, we can reason as in [6], p. 44, to infer from (4.2) that $F \equiv 0$ on ∂D.

The argument here goes back to Beurling [1], and even earlier to a series of lectures he presented during the summer of 1961 at Stanford University. The result is that $f \equiv 0$ on $\partial\Omega$ and the density of the polynomials follows. For the proof in the converse direction see [6], p. 46. $\square$

In the case of a slightly more regular manner in which $w \to 0$ at $\partial\Omega$, we are able to obtain a result similar to Theorem 2 valid for every bounded simply connected domain (cf. [8]).

Theorem 3. *If* $g \log w(g) \downarrow -\infty$ *as* $g \downarrow 0$ *and if*

$$\int_0 \log \log \frac{1}{w(g)}\, dg = +\infty,$$

then necessarily

(1) $H^p(\Omega, wdA) = L^p_a(\Omega, wdA)$ *for all* p, $1 \le p < \infty$

(2) *the polynomials are dense in* $A_w(\Omega)$.

In addition to the ideas of Beurling already mentioned, the proof makes use of concepts from the theory of asymptotically holomorphic functions begun by Vol'berg and further developed by the author [8] (cf. also [9]).

Список литературы

[1] A. Beurling, "Analytic Continuation across a Linear Boundary," Acta Math. **128**, 153-182 (1972).

[2] A. Beurling, *Collected Works, vol.1* (Birkhäuser, Boston, 1989).

[3] J.E. Brennan, "Invariant Subspaces and Weighted Polynomial Approximation," Ark. Mat. **11**, 167-189 (1973).

[4] J.E. Brennan, "Approximation in the Mean by Polynomials on non-Carathéodory Domains," Ark. Mat. **15**, 117-168 (1977).

[5] J.E. Brennan, "Point Evaluations, Invariant Subspaces and Approximation in the Mean by Polynomials," J. Funct. Anal. **34**, 407-420 (1979).

[6] J.E. Brennan, "Weighted Polynomial Approximation, Quasianalyticity, and Analytic Continuation," J. Reine Angew. Math. **357**, 23-50 (1985).

[7] J.E. Brennan, "The Cauchy Integral and Analytic Continuation," Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **97**, 491-498 (1985).

[8] J.E. Brennan, "Weighted Polynomial Approximation and Quasianalyticity for General Sets," Algebra i analiz **6**, 69-89 (1994); English transl: St. Petersburg Math. J. **6**, 763-779 (1995).

[9] J.E. Brennan, "The Cauchy Integral and Certain of Its Applications," Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Matematika **39** no. 1,, 5-48 (2004); J. Contemp. Math. Anal. **39** no. 1, 2-49 (2004).

[10] J.E. Brennan, "Thomson's Theorem on Mean-square Polynomial Approximation," Algebra i analiz **17** no. 2, 1-32 (2005); English transl.: St. Petersburg Math. J. **17** no. 2, 217-238 (2006).

[11] T. Carleman, "Über die Approximation analytische Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen," Ark. Mat. Astr. Fys. **17**, 1-30 (1923).

[12] M.M. Djrbashyan, "Metric Theory of Completeness and the Representation of Analytic Functions," Thesis, Yerevan (1948).

[13] O.J. Farrell, "On Approximation to an Analytic Function by Polynomials," Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 908-914 (1934).

[14] W.H.J. Fuchs, *Topics in the Theory of Functions of One Complex Variable* (V.Nostrand, New York, 1967).

[15] V.P. Havin, "On Some Potential Theoretic Themes in Function Theory," in The Maz'ja Anniversary Collection, Operator Theory Advances and Applications, **109**, 99-110 (1999).

[16] M.V. Keldysh, "Sur l'Approximation en Moyenne Quadratique des Fonctions Analytiques," Mat. Sb. (N.S.) **5(47)**, 391-402 (1939).

[17] M.V. Keldysh. "Sur l'Approximation en Moyenne par Polynomes des Fonctions d'une Variable Complexe," Mat. Sb. **16**, 1-20 (1945).

[18] A.I. Markushevich, "Conformal Mapping of Regions with Variable Boundary and an Application to the Approximation of Analytic Functions by Polynomials," Thesis, Moscow (1934).

[19] P. Mattila, M.S. Mel'nikov and J. Verdera, "The Cauchy Integral, Analytic Capacity and Uniform Rectifiability," Ann. of Math. (2) **144**, 127-136 (1996).

[20] V.G. Maz'ja and V.P. Havin, "Approximation in the Mean by Analytic Functions," Vestnik Leningrad Univ. **13**, 62-74 (1968); English transl.: Vestnik Leningrad Univ. Math. **1**, 231-245 (1974).

[21] V.G. Maz'ja and V.P. Havin, "Applications of (p,l)-capacity to Some Problems in the Theory of Exceptional Sets," Mat. Sb. **90**, 558-591 (1973); English transl., Math. USSR-Sb. **19**, 547-580 (1973).

[22] M.S. Mel'nikov, "On the Gleason Parts of the Algebra $R(X)$," Mat. Sb. **101** no.2, 293-300 (1976); English transl.: Math.USSR-Sb **30**, 261-268 (1976).

[23] M.S. Mel'nikov, "Analytic Capacity: Discrete Approach and the Curvature of Measure," Mat. Sb. **186** no. 6, 57-76 (1995), English transl: Sb. Math **186** no. 6, 827-846 (1995).

[24] M.S. Mel'nikov, "The Saga of the Painlevé Problem and of Analytic Capacity," Trudy Mat. Inst. Steklov **235**, 157-164 (2001). English transl. Proc. Steklov Inst. Math. **235** no.4, 150-157 (2001).

[25] M.S. Mel'nikov and S.O. Sinanyan, "Questions in the Theory of Approximation of Functions of One Complex Variable," Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat., vol. **4** VINITI, Moscow, 1975.: English transl., J. Soviet Math. **5**, 688-752 (1976).

[26] S.N. Mergelyan, "On the Completeness of Systems of Analytic Functions," Uspehi Mat. Nauk **8** no. 4, 3-63 (1953). English transl. Amer. Math. Soc. Translations **19**, 109-166 (1962).

[27] S.N. Mergelyan, "General Metric Criteria for the Completeness of Systems of Polynomials," Dokl. Akad. Nauk SSSR **105** no. 5, 901-904 (1955).

[28] S.N. Mergelyan, "Weighted Approximation by Polynomials," Uspehi Mat. Nauk **11**, 107-152 (1956). English transl. Amer. Math. Soc. Translations **10**, 59-106 (1958).

[29] S.N. Mergelyan and A.P. Tamadyan, "On Completeness in a Class of non-Jordan Regions," Izv. Akad. Nauk Arm. SSR Mat. **7**, 1-17 (1954). English transl. Amer. Math. Soc. Translations **35**, 79-94 (1964).

[30] A.L. Shaginyan, "On a Criterion for the Incompleteness of a System of Analytic Functions," Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR **5**, 97-100 (1946).

[31] J.E. Thomson, "Approximation in the Mean by Polynomials," Ann. of Math. **133**, 477-507 (1991).

[32] X. Tolsa, "Painlevé's Problem and the Semiadditivity of Analytic Capacity," Acta Math. **190**, 105-149 (2003).

[33] J. Verdera, "L^2-boundedness of the Cauchy Integral and Menger Curvature," Harmonic Analysis Boundary Value Problems (Fayetteville, AR, 2000), Contemp. Math., vol. **277** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 139-158 (2001).

[34] A.G. Vitushkin, "Analytic Capacity of Sets and Problems in Approximation Theory," Uspehi Mat. Nauk **22**, 141-199 (1967). English transl: Russian Math. Surveys **22**, 139-200 (1967).

[35] J.L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain (5-th Edition)* (Math Surveys Monogr. **20**, Amer.Math. Soc., 1969).

Поступила 18 августа 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 55-72

RATIONAL APPROXIMATION AND UNIVERSALITY FOR A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION

P. M. GAUTHIER AND N. TARKHANOV

Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada
Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, Germany
E-mails: *gauthier@dms.umontreal.ca*;
tarkhanov@math.uni-potsdam.de

Аннотация. Approximation theorems, analogous to results known for linear elliptic equations, are obtained for solutions of the heat equation. Via the Cole-Hopf transformation, this gives rise to approximation theorems for one of the simplest examples of a nonlinear partial differential equation, Burgers' equation.

1. INTRODUCTION

The theory of polynomial approximation was brought to perfection in the 20th century by Academician Sergei Nikitovich Mergelyan. The senior author first learned of Mergelyan's famous theorem on polynomial approximation as a student in a colloquium lecture by Walter Schneider, who said that at last, in Mergelyan's theorem, he had a theorem whose statement was so beautiful and natural that he could explain it to his mother (who was not a mathematician). The senior author also fondly recalls the warmth with which he was received in Mergelyan's home, when he (the author) first visited Yerevan, the Mount Olympus of complex approximation.

This paper is concerned, not with polynomial approximation, but rather with the closely related theory of rational approximation. It is well known that each holomorphic function on a compact set K in the complex plane can be approximated by rational fractions with poles away from K.

In fact the set of poles can be fixed arbitrarily to satisfy the only condition that it meets each connected component of the complement of K. If it has at least one limit point at each component of $\mathbb{C} \setminus K$, then it is actually possible to approximate by finite linear combinations of the Cauchy kernel.

The Cauchy kernel is a fundamental solution for the Cauchy-Riemann operator in $\mathbb{C}$. This gives insight into what can be thought of as rational solutions to linear partial differential equations. These are just finite linear combinations of a right fundamental solution to the given equation. In this way the rational approximation theory naturally extends to solutions of linear elliptic equations, see [16, 5.3.2].

Since the analogue of rational approximation has been well developed for elliptic equations, it is natural, from the theoretical viewpoint, to attempt a similar theory for parabolic equations. Thus, we seek to approximate a solution of a parabolic equation by solutions having isolated singularities, and we also attempt to specify the location of these singularities.

As a possible physical interpretation for rational parabolic approximation, consider the following. Let B be an open set in $\mathbb{R}^n$ and let u be a heat distribution on B, that is a solution of the heat equation on

$$\mathbb{R} \times B \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

We call the pair (B, u) a thermal box. Thus, a thermal box is a domain endowed with a heat distribution.

We may think of ovens and refrigerators as examples, but we may also think of a house or a region of physical space as examples. In the case that B is a refrigerator, an oven or a house, we are usually interested in prescribing a temperature distribution $u(t, x)$, which is constant as a function of x.

But we could ask for much more. We could ask for different temperatures in different parts of B and, indeed, this is often done in houses. For example, let B_1 and B_2 be two subregions of B and let u_1 and u_2 be heat distributions on B_1 and B_2, respectively.

Is it possible to design the thermal box (B, u) to these specifications? That is, can we find a temperature distribution u on B such that $u = u_1$ on B_1 and $u = u_2$ on B_2? Since the heat distribution u is analytic in the space variable, the answer is in general "no".

However, from the point of view of every conceivable physical application, it would be sufficient to find u_ε on B, which approximate u_1 and u_2 on B_1 and B_2, respectively, within some tolerance ε, provided we can do this for arbitrarily small tolerances ε. This is precisely the kind of approximation we wish to investigate: uniform approximation on subsets of B by solutions of the heat equation on all of B.

From the engineering point of view, one is interested not merely in the mathematical existence of the global approximating heat distribution u_ε. One seeks a way of designing B to obtain such a heat distribution u_ε. A mathematical model for this is to take as u a finite linear combination of fundamental solutions whose singularities lie on the boundary of B.

We shall call these simple rational functions. We may think of such a boundary point as a heat source, or infinitely hot spot, if the coefficient is positive at that point, and we may think of it as a heat sink or infinitely cold spot, if the coefficient is negative. As an engineering approximation, one can impose hot temperatures at the hot spots and cold temperatures at the cold spots on the walls of the thermal box B.

In addition to proving results on approximation by rational solutions to parabolic equations, we shall also investigate the problem of approximating solutions in one domain by solutions in a given larger domain. Pairs of domains where this is possible are called Runge pairs.

In 1929, Birkhoff [2] showed the existence of an entire function $u(z)$ with the following remarkable property. For any entire function $f(z)$, there is a sequence $\{a_j\}$ such that the sequence $\{u(z+a_j)\}$ of translates of u converges to the function $f(z)$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$. Thus, the translates of the function u approximate all entire functions f. Such a function u is said to be universal.

Another kind of universality is that of universal series. Let V be a space of functions and $\{u_j\}$ a sequence of functions in V. The series $\sum u_j$ is said to be universal in V if the set formed by the partial sums is dense in V. Of course, such series are to be thought of as formal series. They are never convergent, if V is not trivial. In 1951, Seleznev [15] showed the existence of a universal power series and this result was refined in [12], [3] and [13]. Subsequently, other universal series were found for solutions to the Cauchy-Riemann as well as the Laplace equation and other elliptic equations. Recently, an abstract theory of universal series, covering most of these results, was introduced in [14]. For a broader view of universality, we refer the reader to the excellent survey [6].

This work is intended as an attempt to specify these results in the context of nonlinear partial differential equations. We shall present results on universality for solutions to a quasi-linear parabolic equation arising in aerodynamics, Burgers' equation.

Burgers equation is one of the simplest examples of a nonlinear partial differential equation and also perhaps the simplest equation describing waves under the influence of diffusion. The crucial role in our investigation is due to the so-called Cole-Hopf transformation.

2. THE COLE-HOPF TRANSFORMATION

The Cole-Hopf transformation was discovered independently by Cole [4] and Hopf [8] around 1950. It changes Burgers' equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ into the heat equation $v_t = v_{xx}$. To derive the transform, we let $u = -p_x$. Then Burgers' equation can be integrated yielding $p_t - p_x^2/2 = p_{xx}$ up to a function depending on t only. Let $p = 2\log v$. Applying some algebra to this we get $v_t = v_{xx}$.

The n-dimensional forced Burgers equation $u_t + (u \cdot \nabla)u = \nu\nabla^2 u - \nabla f(t,x)$ for $u = -\nabla p$, which describes the dynamics of a stirred, pressureless and vorticity-free fluid, has found interesting applications in a wide range of non-equilibrium statistical physics problems and in particular in aerodynamics, see [1]. Here, ν stands for the viscosity. The associated Hamilton-Jacobi equation, satisfied by the velocity potential p,

$$p_t - \frac{1}{2}|\nabla p|^2 = \nu\nabla^2 p + f(t,x), \tag{2.1}$$

has been frequently studied as a nonlinear model for the motion of an interface under deposition, when the forcing potential f is random, delta-correlated in both space and time. Equation (2.1) is the well-known Kardar-Parisi-Zhang equation, see [10].

Starting with this example, we consider a quasilinear partial differential equation

$$p_t = \Delta p + a(p)|\nabla p|^2 \tag{2.2}$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$, where a is a continuous positive function on the real axis. Choose a strictly monotone increasing C^2 function $u = U(p)$ on $\mathbb{R}$ with the property that

$$a(p) = \frac{U''(p)}{U'(p)}$$

for all $p \in \mathbb{R}$.

The general solution of this ordinary differential equation satisfying the initial condition $U'(0) = U_1 > 0$ is

$$U'(p) = U_1 \exp\Big(\int_0^p a(t)dt\Big), \tag{2.3}$$

which is a smooth function on $\mathbb{R}$ with positive values. The function $u = U(p)$ may be found by integration. In this way we recover what is referred to as the Cole-Hopf transformation.

A simple computation shows that the change of variables $u = U(p)$ reduces (2.2) to the heat equation

$$u_t = \Delta u \tag{2.4}$$

for the new unknown function u. Hence, the general solution to (2.2) is $p(t,x) = U^{-1}(u(t,x))$, with u satisfying (2.4).

Example 1. Let a be constant. Then

$$\begin{aligned} U(p) &= U_0 + U_1 \frac{1+\exp(ap)}{a}, \\ U^{-1}(u) &= \frac{1}{a}\log\Big(a\,\frac{u-U_0}{U_1} - 1\Big). \end{aligned}$$

Using the function U allows one to endow the set of solutions to equation (2.2) with the symmetry defined by the binary operation $p_1 \circ p_2 := U^{-1}(U(p_1)+U(p_2))$.

3. RATIONAL APPROXIMATION

If U is an open subset of $\mathbb{R}^{n+1}$, we shall denote by $\mathcal{S}(U)$ the family of all complex-valued solutions $u \in C^\infty(U)$ of the heat equation $u_t = \Delta u$ on U. The topology on $\mathcal{S}(U)$ induced by embedding this space into $C^\infty(U)$ is actually equivalent to the topology of uniform convergence on compact subsets of U.

If Σ is an arbitrary subset of $\mathbb{R}^{n+1}$, we shall denote by $\mathcal{S}(\Sigma)$ the family of germs on Σ of solutions u to the heat equations on some open set (depending on u) containing Σ. Such solutions form a complete locally convex space under the inductive limit topology.

Functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ will be called entire solutions of the heat equation. They have singularities at points at infinity of a suitable compactification of $\mathbb{R}^{n+1}$.

Set

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\Big(-\dfrac{|x|^2}{4t}\Big), & \text{if} \quad t>0, \\ 0, & \text{if} \quad t \le 0. \end{cases}$$

This function is locally integrable over $\mathbb{R}^{n+1}$, infinitely differentiable in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, and it satisfies $(\partial_t - \Delta)\Phi = \delta$ in the sense of distributions in $\mathbb{R}^{n+1}$, δ being Dirac's measure at $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. The distribution Φ is referred to as the standard fundamental solution of convolution type [1] for the heat equation on $\mathbb{R}^{n+1}$.

Solutions of the heat equation of the form

$$\sum_{j=0}^{J} \sum_{|\alpha|\le A} c_{j,\alpha}\, \partial_t^j \partial_x^\alpha \Phi(t-t_0, x-x_0), \tag{3.1}$$

where $c_{j,\alpha} \in \mathbb{R}$, play the role of rational solutions with pole at the point $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. These are nothing but the potentials of distributions supported at (t_0,x_0).

[1]Serge Lange, near the end of his life, asserted in a lecture at the Université de Montréal, that the heat kernel is the most important object in all of mathematics.

By a simple rational solution of the heat equation on $\mathbb{R}^{n+1}$ we mean any finite linear combination

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \, \Phi(t-t_\nu, x-x_\nu)$$

of the heat kernel itself with poles at points $(t_1, x_1), \ldots, (t_N, x_N)$. From this point of view, the following is an analogue, for the heat operator, of Runge's theorem on approximation by simple rational solutions for the Cauchy-Riemann operator. Earlier, we endowed the family $S(\Sigma)$ of germs of solution to the heat equation on (neighbourhoods of) Σ with an inductive limit topology. For a compact set K, we introduce a second topology on $S(K)$, the topology of uniform convergence. This is just the topology which $S(K)$ inherits as a subspace of $C(K)$.

Theorem 1. *For each compact set $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, the simple rational solutions to the heat equation with poles outside of K are dense in the space $\mathcal{S}(K)$, in the topology of uniform convergence. In fact, for each $u \in \mathcal{S}(K)$, there is a sequence (r_j) of rational solutions which converge uniformly together with all derivatives on K to u and its derivatives, respectively.*

It will be clear from the proof that, for every open set $U \supset K$, the poles in $U \setminus K$ are sufficient for approximation.

Доказательство. Let $u \in \mathcal{S}(K)$. We may suppose that $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ has compact support and satisfies $\partial_t u = \Delta u$ in a neighbourhood U of K. Thus,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int \Phi(t-t', x-x') \, (\partial_t u - \Delta u) \, (t', x') dt' dx' \\ &= \int_{\mathrm{supp}\,(\partial_t u - \Delta u)} \Phi(t-t', x-x') \, (\partial_t u - \Delta u) \, (t', x') dt' dx', \end{aligned}$$

where $dt'dx'$ denotes Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{n+1}$. For fixed (t,x) away from the support of $\partial_t u - \Delta u$, this is a Riemann integral.

In order to estimate this integral by Riemann sums, let Q be a compact set containing the support of $\partial_t u - \Delta u$ and disjoint from K, such that Q is a finite union of hypercubes whose sides are parallel to the coordinate hyper-planes. The integral over $\mathrm{supp}\,(\partial_t u - \Delta u)$ is the same as the integral over Q, and it is easier to take Riemann sums over Q. If $\mathcal{P} = \{Q_1, \ldots, Q_N\}$ is a partition of Q into hypercubes, we denote by $|\mathcal{P}|$ the mesh of $\mathcal{P}$, that is, the maximum of the diameters of the hypercubes of the partition $\mathcal{P}$. For each Q_ν of the partition $\mathcal{P}$, choose a point $(t_\nu, x_\nu) \in Q_\nu$. For each $(t,x) \in U \setminus Q$, denote by $\Sigma_{\mathcal{P}}(t,x)$ the corresponding Riemann sum of the integral over Q. Then, for any fixed $(t,x) \in U \setminus Q$, the Riemann sums converge to $u(t,x)$, as $|\mathcal{P}| \to 0$.

Each such Riemann sum has the form

$$\Sigma_{\mathcal{P}}(t,x) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \, \Phi(t - t_\nu, x - x_\nu),$$

where the points (t_ν, x_ν) are in Q. This Riemann sum $\Sigma_{\mathcal{P}}(t,x)$ is a simple rational solution to the heat equation. Thus, we have simple rational solutions to the heat equations $\Sigma_{\mathcal{P}}$ which converge point-wise to u on $U \setminus Q$, as $|\mathcal{P}| \to 0$. Since

$$(t,x;t',x') \mapsto \Phi(t-t', x-x') \, (\partial_t u - \Delta u) \, (t',x')$$

is uniformly continuous on each compact subset of $(U \setminus Q) \times Q$, the convergence of these Riemann sums (rational solutions) to u is in fact uniform on each compact subset of $U \setminus Q$, as $|\mathcal{P}| \to 0$.

It is not hard to see that not only do these rational solutions to the heat equation converge to u, but also their partial derivatives converge uniformly on compact subsets of $U \setminus Q$ to the corresponding partial derivatives of u. Thus, we in fact have C^∞ approximation. □

One sees that the proof actually goes through for solutions of any differential equation possessing a left fundamental solution smooth away from the diagonal.

The following result can be thought of as a theorem on rational approximation with a fixed set of singularities. It contains Theorem 1 as a very particular case, however, the proof is no longer constructive.

Theorem 2. *Let K be a compact set in $\mathbb{R}^{n+1}$ and $\wp$ be a subset of $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ with the property that any solution g to $-\partial_t g = \Delta g$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ which, together with its derivatives in t up to order J and in x up to order A, vanishes on $\wp$, is zero in some layer around K. Then the linear combinations of potentials (3.1), where $(t_0, x_0) \in \wp$ and $c_{j,\alpha} \in \mathbb{R}$, are dense in the space of all solutions to the heat equation on K.*

By a layer around K is meant any open set $U \setminus K$, where U is a neighbourhood of K in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Denote by $\mathcal{S}(K)$ the space of all solutions of the heat equation on K. Since the heat equation is hypo-elliptic, each distribution u satisfying (2.4) on an open set $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ belongs actually to $C^\infty(U)$. Hence $\mathcal{S}(K)$ can be specified as a closed subspace of $C^\infty(K)$, this latter is the space of all C^∞ functions on neighbourhoods of K endowed with the inductive limit topology.

Let $\mathcal{R}$ stand for the subspace of $\mathcal{S}(K)$ consisting of the potentials (3.1), where $(t_0, x_0) \in \wp$ and $c_{j,\alpha} \in \mathbb{R}$. Our task is to show that $\mathcal{R}$ is dense in $\mathcal{S}(K)$.

To this end we use the Hahn-Banach theorem. Pick a continuous linear functional $\mathcal{F}$ on $C^\infty(K)$. Since the dual space for $C^\infty(K)$ just amounts to $\mathcal{E}'_K$, the space of all distributions on $\mathbb{R}^{n+1}$ with support in K, there is a $v \in \mathcal{E}'_K$ such that $\mathcal{F}(u) = \langle v, u \rangle$ for all $u \in C^\infty(K)$. Here, we have taken any representative of u which is in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Consider the convolution of distributions

$$g(t', x') = \langle \Phi(t - t', x - x'), v(t, x) \rangle = \Phi' * v,$$

where $\Phi'(t, x) = \Phi(-t, -x)$ is the transposed kernel.

Since Φ' is the fundamental solution of the transposed heat equations on $\mathbb{R}^{n+1}$, it follows that

$$(-\partial_{t'} - \Delta_{x'})g = (-\partial_{t'} - \Delta_{x'})\Phi' * v\delta * v = v$$

on all of $\mathbb{R}^{n+1}$. In particular, g is a solution of the transposed heat equation in the complement of K.

If $\mathcal{F}$ vanishes on $\mathcal{R}$, then

$$\begin{aligned} \partial_{t'}^j \partial_{x'}^\alpha g(t', x') &= \langle \partial_{t'}^j \partial_{x'}^\alpha \Phi(t - t', x - x'), v(t, x) \rangle \\ &= (-1)^{j+|\alpha|} \mathcal{F}\left(\partial_t^j \partial_x^\alpha \Phi(\cdot - t', \cdot - x') \right) = 0 \end{aligned}$$

for all $(t', x') \in \wp$ and for all j and α satisfying $j \le J$ and $|\alpha| \le A$. By assumption, there is a neighbourhood U of K in $\mathbb{R}^{n+1}$, such that $g = 0$ in $U \setminus K$.

Thus, if u is a solution of the heat equation in a neighbourhood of K, then we obtain

$$\mathcal{F}(u) = \langle (-\partial_t - \Delta)g, u \rangle = \langle g, (\partial_t - \Delta)u \rangle = 0.$$

Now the assertion follows from the Hahn-Banach theorem. □

4. CHOICE OF POLE SETS

To effectively use Theorem 2 we should be able to show explicit sets $\wp$ for which the hypotheses of the theorem are fulfilled. In an appropriate sense, the sets $\wp \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ are uniqueness sets for solutions of the transposed heat equation in the complement of K. More precisely, each solution g to $-\partial_t g = \Delta g$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ satisfying $\partial_t^j \partial_x^\alpha g = 0$ on $\wp$ for all j and α with $j \le J$ and $|\alpha| \le A$ must vanish in some layer around K.

Example 2. Set $\wp = U \setminus K$ where U is an arbitrary neighbourhood of K in $\mathbb{R}^{n+1}$. Then the hypotheses of Theorem 2 are obviously fulfilled with $J = 0$ and $A = 0$.

Example 3. Let U be an arbitrary neighbourhood of K in $\mathbb{R}^{n+1}$ and $\wp$ a subset of $U \setminus K$, such that, for any hyperplane H orthogonal to the time axis, each connected component of $H \cap (U \setminus K)$ contains at least one point of $\wp$. By the above, the hypotheses of Theorem 2 are fulfilled with $J = 0$ and $A = \infty$.

Example 4. Suppose K is a compact subset of $\mathbb{R}^{n+1}$ and $\wp$ a subset of $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$, such that, for any hyperplane H orthogonal to the time axis, each connected component of $H \setminus K$ contains an open subset of the closure $\overline{\wp}$. Then the hypotheses of Theorem 2 are fulfilled with $J = 0$ and $A = 0$.

Further explicit sets $\wp$ for which the hypotheses of Theorem 2 are fulfilled can be derived from the analyticity of solutions to the heat equation on characteristics, using an idea of [11] which is known as elliptic continuation of solutions of a parabolic equation.

Theorem 3. *Let g be a bounded solution to $\partial_t g + \Delta g = 0$ in a cylinder $Z = (0, t_0] \times B(0, R)$. Then for each $R' < R$ there are positive constants ε and C depending on t_0, R and R', such that in $Z' = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B(0, R')$ there is a solution g' to the elliptic equation $\partial_t^2 g' + \Delta g' = 0$ with Cauchy data*

$$\begin{array}{rcl} g'(t_0, x) & = & g(t_0, x), \\ \partial_t g'(t_0, x) & = & 0 \end{array}$$

for $x \in B(0, R')$, satisfying

$$\sup_{(t,x) \in Z'} |g'(t, x)| \leq C \sup_{(t,x) \in Z} |g(t, x)|.$$

Доказательство. The existence follows from the Cauchy-Kovalevskaya theorem once we observe that the restriction of g to the characteristic hyperplane $t = t_0$ is real analytic in $x \in B(0, R')$. The estimate is a consequence of an explicit construction. □

We note that if g is a solution to $\partial_t g + \Delta g = 0$ in the cylinder Z and, for some $x_0 \in B(0, R)$, the restriction $g(t_0, x)$ decreases faster than any power $|x - x_0|^k$ as $x \to x_0$, then $g(t_0, x) \equiv 0$ for all $x \in B(0, R)$, since $g(t_0, \cdot)$ is analytic in $B(0, R)$.

In order to effectively implement this elliptic continuation of solutions to a parabolic equation, it is useful to consult a fuller discussion of rational approximations for elliptic equations, for which we refer the reader to [16, 5.3.3].

5. RUNGE PAIRS

The previous section is concerned with approximation on compact sets. We now turn to approximation on open sets.

Let Ω_1 and Ω_2 be open subsets of the complex plane $\mathbb{C}$. From Runge's theorem on rational approximation it follows that a necessary and sufficient condition, in order that each function holomorphic in Ω_1 can be approximated uniformly on compact subsets of Ω_1 by functions holomorphic in Ω_2, is that the complement $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ has no compact components in Ω_2. This 'Runge' theorem was extended by Lax and Malgrange to approximation by solutions of elliptic equations.

For the heat equation, which is of course not elliptic, the analogous approximation problem was investigated by Jones [9] and Diaz [5].

If Ω is an open set in $\mathbb{R}^{n+1}$, we say that Ω is a Runge open set for the heat operator, if the entire solutions to the heat equation are dense in the solutions to the heat equation on Ω. One has the following characterisation of Runge open set, proved in [9].

Theorem 4. *An open set $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is a Runge open set for the heat operator if and only if, for every hyperplane H in $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal to the time axis, $H \setminus \Omega$ has no compact components.*

Let us say that two open sets Ω_1 and Ω_2 in $\mathbb{R}^{n+1}$, with $\Omega_1 \subset \Omega_2$, form a Runge pair for the heat operator, if $\mathcal{S}(\Omega_2)$ is dense in $\mathcal{S}(\Omega_1)$ in the C^∞ topology. That is, if for each $u \in \mathcal{S}(\Omega_1)$ there is a sequence $\{u_j\}$ in $\mathcal{S}(\Omega_2)$, such that the restrictions of the u_j to Ω_1 and their partial derivatives of all orders converge to u and the corresponding partial derivatives of u, respectively, uniformly on compact subsets of Ω_1.

The following theorem of Diaz [5] gives a necessary and sufficient condition that a pair (Ω_1, Ω_2) of open sets in $\mathbb{R}^{n+1}$, with $\Omega_1 \subset \Omega_2$, be a Runge pair for the heat operator.

Theorem 5. *Let $\Omega_1 \subset \Omega_2$ be open sets in $\mathbb{R}^{n+1}$. A necessary and sufficient condition in order that (Ω_1, Ω_2) be a Runge pair for the heat operator is that, for every hyperplane H in $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal to the time axis, the complement of Ω_1 in H has no compact components in $\Omega_2 \cap H$.*

There is a small mistake in the proof of sufficiency in [5]. The assertion on p. 645, line 19, that an arbitrary component of $D_i \setminus Z$ has the form $A \times (a, b)$, is not correct. Perhaps this is easily fixed, however, we do not see how to do this.

We denote by $H(t)$ the hyperplane in $\mathbb{R}^{n+1}$ which is orthogonal to the time axis at time t. Moreover, for a set S in $\mathbb{R}^{n+1}$, we denote by $S(t)$ the slice $S \cap H(t)$.

Example 5. Let Ω_1 be the slit plane $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,x) : |x| \le 1\}$ and Ω_2 be the punctured plane $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Then, for $t \neq 0$, the set $H(t) \setminus \Omega_1$ is empty, and $H(0) \setminus \Omega_1$ has a single compact component, the slit $\{(0,x) : |x| \le 1\}$, which does not belong to the set $\Omega_2 \cap H(0) = \{(0,x) : x \neq 0\}$. Hence it follows that the pair (Ω_1, Ω_2) satisfies the condition of Theorem 5. However, we do not know whether or not (Ω_1, Ω_2) is a Runge pair for the heat operator in $\mathbb{R}^2$.

In order to highlight the problem, let us discuss some steps towards the proof of sufficiency in Theorem 5. They develop Theorem 3.4.3 of [7] which concerns general scalar differential operators with constant coefficients in $\mathbb{R}^{n+1}$. Suppose that, for each hyperplane H orthogonal to the time axis, every compact component of $H \setminus \Omega_1$ contains a component of $H \setminus \Omega_2$. Choose a continuous linear functional $\mathcal{F}$ on $C^\infty(\Omega_1)$ which vanishes on $\mathcal{S}(\Omega_2)$. There is a distribution $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ with a compact support K in Ω_1, such that $\mathcal{F}(u) = \langle v, u \rangle$ for all $u \in C^\infty(\Omega_1)$. Since v is orthogonal to all exponential solutions of the heat equation, we conclude that there exists a distribution $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ satisfying $(-\partial_t - \Delta) g = v$ on $\mathbb{R}^{n+1}$. Now, the transposed operator $-\partial_t - \Delta$ is hypo-elliptic and g satisfies $(-\partial_t - \Delta) g = 0$ away from K, so g is an infinitely differentiable function on $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$. Moreover, the transposed kernel Φ' satisfies $\Phi'(-\partial_t - \Delta) = I$ on $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$, whence $g = \Phi' * v$ on all of $\mathbb{R}^{n+1}$. Since $(\partial_t - \Delta)(\partial_{t'}^j \partial_{x'}^\alpha \Phi(t-t', x-x')) = 0$ for all $(t,x) \in \Omega_2$ and $(t',x') \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_2$ and all multi-indices j and α and $\mathcal{F}$ vanishes on $\mathcal{S}(\Omega_2)$, we get

$$\partial_{t'}^j \partial_{x'}^\alpha g(t',x') = \langle v(t,x), \partial_{t'}^j \partial_{x'}^\alpha \Phi(t-t', x-x') \rangle = 0$$

for all (t',x') away from Ω_2 and all multi-indices j and α. Thus, g vanishes to infinite order on $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_2$. If we prove that $\operatorname{supp} g \subset \Omega_1$, then $\mathcal{F}$ vanishes on $\mathcal{S}(\Omega_1)$ and the assertion readily follows by the Hahn-Banach theorem. For any t, we denote by $\hat{K}(t)$ the topological hull of $K(t)$ in $\Omega_1(t)$. That is, $\hat{K}(t)$ is the union of $K(t)$ and all components of $\Omega_1(t) \setminus K(t)$ which are relatively compact in $\Omega_1(t)$. It is always a compact subset of $\Omega_1(t)$. Since $H(t) \setminus \Omega_1(t)$ has no compact components in $\Omega_2(t)$, the topological hull of $K(t)$ in $\Omega_1(t)$ just amounts to the topological hull of $K(t)$ in $\Omega_2(t)$. For each t the function $g(t,x)$ is an analytic function of x for $x \in H(t) \setminus K(t)$ (for solutions of the transposed heat equation are analytic in the space variables) which vanishes to infinite order on $H(t) \setminus \Omega_2(t)$ and for all sufficiently large x (because g has compact support). Denote by $\hat{K}$ the union of $\hat{K}(t)$ over all times. By the very construction, $\hat{K}$ is a subset of Ω_1. If $(t,x) \notin \hat{K}$, then either x lies in the unbounded component of $H(t) \setminus \hat{K}(t)$ or x lies in the bounded component of $H(t) \setminus \hat{K}(t)$ which meets $H(t) \setminus \Omega_1(t)$ and hence $H(t) \setminus \Omega_2(t)$. In the former case $g(t,x) = 0$, for the support of g is compact. In the latter case $g(t,x) = 0$, for $g(t,x)$ vanishes to infinite order on $H(t) \setminus \Omega_2(t)$. We thus conclude that the function g vanishes away from $\hat{K}$. Unfortunately, $\hat{K}$ fails to be a compact subset of Ω_1, for it is not bounded away from the boundary of Ω_1. The arguments of [5] include approximation of g by functions with compact support in Ω_1.

Remark 1. *If for each t the set $H(t) \setminus \Omega_1(t)$ has no compact components, then for each compact set $K \subset \Omega_1$, the hull $\hat{K}$ is a compact subset of Ω_1 as well. Hence, the proof of sufficiency in Theorem 4 is straightforward.*

Note that Theorem 5 is closely related to the Runge theorem for harmonic functions, for any harmonic function in a domain $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ is a solution of the heat equation in the tube domain $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, which is independent of t.

6. UNIVERSALITY

We shall investigate two types of universality with respect to the heat operator, universal series and universal functions. For an excellent survey of universality, we refer the reader to [6].

Let V be a topological vector space (real or complex) and $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a sequence of vectors of V. The series

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j$$

is said to be universal in V if the set formed by the partial sums is dense in V.

A subset Σ of a topological space of Baire category II is called residual if its complement is of Baire category I. In this topological sense, a residual subset of a second Baire category space contains 'most' points of this space. The following theorem is due to Nestoridis and Papadimitropoulos [14].

Theorem 6. *Assume that $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ is a sequence in a metrisable topological vector space V over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. The following statements are equivalent:*

(1) There exists a sequence $c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of scalars, such that the series $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j u_j$ is universal in V.

(2) The set Σ of such sequences c is residual in $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ endowed with the product topology.

(3) For each $n \in \mathbb{N}$, the set of finite linear combinations from $\{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$ is dense in V.

Доказательство. See [14]. □

We remark that the space

$$\mathbb{F}^{\mathbb{N}} = \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{F},$$

endowed with the product topology, is a complete metric space and hence, by Baire's theorem, of second category.

Combining Theorem 6 with Theorem 1, we arrive at universal series in spaces of solutions to the heat equation, whose terms are simple rational solutions.

Theorem 7. *Suppose that K is a compact set in $\mathbb{R}^{n+1}$ and U is a neighbourhood of K. Let $\{(t_j, x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a dense sequence in $U \setminus K$. Then there is a universal series for $\mathcal{S}(K)$, whose terms are simple rational solutions with poles at $\{(t_j, x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$. That is, there exists a sequence $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of real numbers, such that, for each $u \in \mathcal{S}(K)$, there is a sequence $\{j_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, such that*

$$\sum_{j=1}^{j_N} c_j \Phi(t - t_j, x - x_j) \to u$$

uniformly together with all derivatives on K.

The previous theorem gives universal series, whose terms are simple rational solutions, for approximating solutions to the heat equation on compact sets. Combining Theorem 6 with Theorem 2, we shall also obtain universal series in spaces of solutions to the heat equation on open sets.

For a compact subset K of an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, we denote by $K^{\Omega}(t)$ the $\Omega(t)$-convex hull of $K(t)$, that is, the union of $K(t)$ with all components of $\Omega(t) \setminus K(t)$ which are precompact in $\Omega(t)$. We define the thermal hull K^{Ω} of K in Ω as

$$K^{\Omega} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} K^{\Omega}(t),$$

and we shall say that K is thermally convex in Ω if $K = K^{\Omega}$. The open set Ω is said to possess a thermal exhaustion if there exists a sequence $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ of thermally convex compact subsets of Ω, such that

$$\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j^{\circ}.$$

The open set Ω is said to be thermally convex if it possesses a thermal exhaustion.

Theorem 8. *Suppose that Ω is an open set in $\mathbb{R}^{n+1}$ which is thermally convex. Suppose that U is a neighbourhood of $\overline{\Omega}$, such that $U_t \setminus \overline{\Omega}$ is unbounded for each time*

t. Let $\{(t_j, x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a dense sequence in $U \setminus \overline{\Omega}$. Then there is a universal series for $\mathcal{S}(\Omega)$, whose terms are simple rational solutions with poles at $\{(t_j, x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$. That is, there exists a sequence $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of real numbers, such that, for each $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, there is a sequence $\{j_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, such that

$$\sum_{j=1}^{j_N} c_j \Phi(t - t_j, x - x_j) \to u$$

in the topology of $C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. According to Theorem 2, for each $n \in \mathbb{N}$, the set of finite linear combinations of functions $\{\Phi(t - t_n, x - x_n), \Phi(t - t_{n+1}, x - x_{n+1}), \ldots\}$ is dense in the space $\mathcal{S}(\Omega)$. The desired conclusion now follows directly from Theorem 6. □

Using Examples 3 and 4 yields universal series for $\mathcal{S}(\Omega)$, whose terms are rational solutions with special sets of poles outside of Ω.

For Runge pairs, we moreover have the following result on universal series.

Theorem 9. *Suppose that (Ω_1, Ω_2) is a Runge pair for the heat operator in $\mathbb{R}^{n+1}$. Then there is a universal series for $\mathcal{S}(\Omega_1)$, whose terms are elements of $\mathcal{S}(\Omega_2)$. More precisely, there exists a sequence $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega_2)$ with the property that, for each solution $u \in \mathcal{S}(\Omega_1)$, there is a sequence $\{j_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, such that*

$$\sum_{j=1}^{j_N} u_j \to u$$

in the topology of $C^\infty(\Omega_1)$.

Доказательство. Since (Ω_1, Ω_2) is a Runge pair, the subspace $\mathcal{S}(\Omega_2)$ is dense in $\mathcal{S}(\Omega_1)$. Since $C^\infty(\Omega_1)$ is separable and every subspace of a separable space is also separable, we may choose a sequence $\{u'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega_2)$, which is dense in $\mathcal{S}(\Omega_1)$. Then, for each $n \in \mathbb{N}$, the sequence $\{u'_n, u'_{n+1}, \ldots\}$ is also dense in $\mathcal{S}(\Omega_1)$. By Theorem 6, there is a sequence $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of real numbers, such that the series $\sum c_j u'_j$ is universal in $\mathcal{S}(\Omega_1)$. To complete the proof, we set $u_j = c_j u'_j$. □

In order to prove the existence of universal solutions, we need a lemma on so-called tangential approximation on an unbounded set. In the case of the Cauchy-Riemann operator and the Laplace operator the theory of uniform approximation has been developed not only on compact sets, but also on (possibly unbounded) closed sets. For the heat operator, we shall confine ourselves to very simple closed sets. Given a sequence $\{K_j\}$ of disjoint compacta in $\mathbb{R}^{n+1}$, we write $K_j \nearrow \infty$ if

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x)\in K_j} |t| &< \inf_{(t,x)\in K_{j+1}} |t|, \\ \inf_{(t,x)\in K_j} |t| &\to \infty \end{aligned}$$

as $j \to \infty$.

Lemma 1. *Let $\{K_j\}$ be a sequence of convex compacta in $\mathbb{R}^{n+1}$, such that $K_j \nearrow \infty$. Then, for each sequence $\{u_j\}$ with $u_j \in \mathcal{S}(K_j)$ and each sequence $\{\varepsilon_j\}$ with $\varepsilon_j > 0$, there is an entire solution to the heat equation $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, such that*

$$\sup_{(t,x)\in K_j} |u(t,x) - u_j(t,x)| < \varepsilon_j$$

for all $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. For $j = 1, 2, \ldots$, choose R_j such that

$$\sup_{(t,x)\in K_j} |t| < R_j < \inf_{(t,x)\in K_{j+1}} |t|.$$

Set $Q_0 = \emptyset$ and, for $j = 1, 2, \ldots$, choose $S_j > 0$ such that $K_j \subset Q_j = \{(t,x) : |t| \le R_j, |x| \le S_j\}$. We may assume that the sequence $\{\varepsilon_j\}$ is decreasing. Let us proceed by induction. Since K_1 is convex, by Theorem 4 there exists $h_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ such that $|h_1 - u_1| < \varepsilon_1/2$ on K_1. Suppose functions $h_1, \ldots, h_j$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ have been constructed with the following properties:

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{j} h_i - u_j\Big| &< \frac{\varepsilon_j}{2^j} \quad \text{on} \quad K_j, \\ |h_j| &< \frac{\varepsilon_j}{2^j} \quad \text{on} \quad Q_{j-1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Since K_{j+1} and Q_j are convex and disjoint, by Theorem 4 there exists $h_{j+1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ such that

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{j+1} h_i - u_{j+1}\Big| &< \frac{\varepsilon_{j+1}}{2^{j+1}} \quad \text{on} \quad K_{j+1}, \\ |h_{j+1}| &< \frac{\varepsilon_{j+1}}{2^{j+1}} \quad \text{on} \quad Q_j. \end{aligned}$$

Hence, for each $j = 1, 2, \ldots$, there exists a solution to the heat equation $h_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ which satisfies (6.1). It follows that the series

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j$$

converges uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}^{n+1}$ to an entire solution to the heat equation $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ with the desired properties. $\square$

We are now in a position to construct a universal entire solution to the heat equation.

Theorem 10. *There is an entire universal solution to the heat equation, that is, an entire solution u, whose translates are dense in the space of all entire solutions to the heat equation. Thus, for each $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, there is a sequence $\{a_j\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, such that $u(\cdot + a_j) \to f(\cdot)$ in the topology of $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.*

It will be clear from the proof that, we can fix a sequence $b_n \to \infty$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ and, for each f, the sequence a_j may be chosen to be a subsequence of b_n, $n = 1, 2, \cdots$.

Доказательство. Let $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence of entire solutions to the heat equation, which is dense in the space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ of all entire solutions to the heat equations. Choose a sequence $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of pairwise disjoint closed balls in $\mathbb{R}^{n+1}$, such that $K_j \nearrow \infty$ and whose radii R_j tend to infinity. Denote by a_j the center of K_j and set $u_j(t,x) = h_j((t,x) - a_j)$. By Lemma 1, there is a solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ such that

$$\sup_{(t,x)\in K_j} |u(t,x) - u_j(t,x)| < \frac{1}{j}$$

for all $j = 1, 2, \ldots$. Equivalently,

$$\sup_{|(t,x)|\le R_j} |u((t,x) + a_j) - h_j(t,x)| < \frac{1}{j}$$

for all $j = 1, 2, \ldots$. Since $1/j \to 0$, $R_j \to \infty$ and the sequence $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ is dense in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, the proof is complete. □

We remark that the abstract universality Theorem 6 shows that the phenomenon of universality is generic. That is, once we know the existence of a universal series, it turns out that 'most' series are universal. One can also show that the result on the existence of a universal function, Theorem 10 above, is generic.

7. BURGERS' EQUATION REVISITED

We can now return to Burgers' equation (2.2) in $\mathbb{R}^{n+1}$. We shall tacitly assume that the coefficient $a(p)$ is independent of p to have an explicit transformation $u = U(p)$.

In order to be able to apply the inverse transformation $p = U^{-1}(u)$, we should remain in the domain of the inverse. It is described by

$$\frac{a}{U_1}\, u > 1 + U_0\, \frac{a}{U_1},$$

U_0 and U_1 being arbitrary constants of Example 1. We are thus led to the study of solutions to the heat equation which take their values on a half-axis, a fixed conical set. These correspond to temperature distributions which are lower bounded, which from the physical viewpoint is no restriction.

Another approach we follow is to allow solutions with singularities caused through U.

If $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ is an arbitrary distribution with compact support on $\mathbb{R}^{n+1}$, then the inhomogeneous equation

$$p_t = \Delta p + a(p)|\nabla p|^2 + f(t,x),$$

cf. (2.1), possesses a potential type solution $p = U^{-1}(\Phi * f)$ on $\mathbb{R}^{n+1}$, which explicitly reads

$$p(t,x) = \frac{1}{a}\log\Big(a\frac{\Phi * f\,(t,x) - U_0}{U_1} - 1\Big). \tag{7.1}$$

This 'solution' no longer makes sense as a distribution on $\mathbb{R}^{n+1}$, but rather, away from the singularities of f. If f is the unit mass at a point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, we call $p(t,x)$ and its constant multiples simple rational solutions to (2.2). More generally, by rational solutions of (2.2) are meant solutions of the form (7.1), where f is a distribution on $\mathbb{R}^{n+1}$ whose support consists of a finite number of points.

>From what has been proved for solutions to the heat equation we readily derive through the transformation $u = U(p)$ analogous results for solutions to Burgers' equation.

Theorem 11. *For each compact set $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, the simple rational solutions to (2.2) with poles outside of K are dense in the set of all smooth solutions on K.*

Since (2.2) is a quasilinear equation, its solutions do not survive under addition. Instead, we consider compositions of solutions defined by the formula $p_1 \circ p_2 := U^{-1}(U(p_1) + U(p_2))$, cf. Section 2. As usual we introduce the composition of an infinite number of solutions, to be referred to as an infinite composition, by

$$\circ_{j=1}^{\infty} p_j = \lim_{N\to\infty} p_1 \circ \ldots \circ p_N.$$

Theorem 12. *For each appropriate open set Ω in $\mathbb{R}^{n+1}$, there is a universal composition in the set of solutions to (2.2) on Ω, whose terms are simple rational solutions to (2.2) with poles outside of $\overline{\Omega}$.*

That is, there is a sequence $\{(t_j, x_j)\}$ of points outside of $\overline{\Omega}$, and a sequence $\{c_j\}$ in $\mathbb{R}$, such that, for each solution p to (2.2) on Ω, there is a sequence $\{j_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ with

$$\circ_{j=1}^{j_N} U^{-1}\left(c_j\, \Phi(t - t_j, x - x_j)\right) \to p$$

in the topology of $C^\infty(\Omega)$.

The proof of Theorem 12 is based on Theorem 8, hence we need some obvious restrictions on the open set Ω. This is what is meant by an appropriate open set in the statement of Theorem 12.

Acknowledgements. This research was done while the first author was visiting the Universität Potsdam and was supported by DFG (Deutschland) and NSERC (Canada). We thank Vassili Nestoridis for pointing out an error in an earlier version.

Список литературы

[1] J. Bec and K. Khanin, "Forced Burgers Equation in an Unbounded Domain," J. Stat. Phys. **113** (5-6), 741-759 (2003).

[2] G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théoreme élémentaire sur les fonctions entières," C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 473-475 (1929).

[3] C. K. Chui and M. N. Parnes, "Approximation by Overconvergence of a Power Series," J. Math. Anal. Appl. **36**, 693-696 (1971).

[4] J. D. Cole, "On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics," Quart. Appl. Math. **9**, 225-236 (1951).

[5] Ricardo Diaz, "A Runge Theorem for Solutions of the Heat Equation," Proc. Amer. Math. Soc. **80** (4), 643-646 (1980).

[6] K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal Families and Hypercyclic Operators," Bull. Amer. Math. Soc. **36** (3), 345-381 (1999).

[7] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators* (Springer-Verlag, Berlin, 1963).

[8] E. Hopf, "The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = u_{xx}$," Comm. Pure Appl. Math. **3**, 201-230 (1950).

[9] B. Frank Jones, "An Approximation Theorem of Runge Type for the Heat Equation," Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1), 289-292 (1975).

[10] M. Kardar, G. Parisi and Y.-C. Zhang, "On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics," Phys. Rev. Lett. **56**, 889-892 (1986).

[11] E. M. Landis and O. A. Oleynik, "Generalised Analyticity and Related Properties of Solutions of Elliptic and Parabolic Equations," Usp. Mat. Nauk **24** (2), 190-215 (1974).

[12] W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten," Mitt. Math. Sem. Giessen **88**, 1-56 (1970).

[13] V. Nestoridis, "Universal Taylor Series," Ann. Inst. Fourier **46** (5), 1293-1306 (1996).

[14] V. Nestoridis and C. Papadimitropoulos, "Abstract Theory of Universal Series and an Application to Dirichlet Series," C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341**, 539-543 (2005).

[15] A. E. Seleznev, "On Universal Power Series," Mat. Sbor. **28**, 453-460 (1951).

[16] N. Tarkhanov, *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations* (Akademie Verlag, Berlin, 1995).

Поступила 2 апреля 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 73-81

UNIVERSAL MEROMORPHIC APPROXIMATION ON VITUSHKIN SETS

W. LUH, T. MEYRATH AND M. NIESS

Universitaet Trier, Trier, Germany
E-mail: *luh@uni-trier.de; thierry.meyrath@gmx.net*
Katholische Universitaet Eichstaett-Ingolstadt, Eichstaett, Germany
E-mail: *markus.niess@ku-eichstaett.de*

Аннотация. The paper proves the following result on universal meromorphic approximation: Given any unbounded sequence $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, there exists a function ϕ, meromorphic on $\mathbb{C}$, with the following property. For every compact set K of rational approximation (i.e. Vitushkin set), and every function f, continuous on K and holomorphic in the interior of K, there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{\phi(z + \lambda_{n_k})\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.
A similar result is obtained for arbitrary domains $G \neq \mathbb{C}$. Moreover, in case $\{\lambda_n\} = \{n\}$ the function ϕ is frequently universal in terms of Bayart/Grivaux [3].

Dedicated to the memory of academician S. N. Mergelyan

1. INTRODUCTION

1.1. **Notations.** For a set S in the complex plane we denote by

$C(S)$: the family of all continuous functions on S,
$H(S)$: the family of all holomorphic functions on S,
$M(S)$: the family of all meromorphic functions on S.

For a compact set $K \subset \mathbb{C}$ we introduce the following spaces of functions (each of which is endowed with the uniform norm):

$A(K) :=$ $C(K) \cap H(\overset{\circ}{K})$, where $\overset{\circ}{K}$ stands for the (possibly empty) interior of K,
$P(K)$: all functions which are uniformly approximable on K by polynomials,
$R(K)$: all functions which are uniformly approximable on K by rational functions (with poles not in K).

We obviously have

$$P(K) \subset R(K) \subset A(K) \subset C(K).$$

The two main problems: Which topological assumptions on K guarantee that $P(K) = A(K)$ or $R(K) = A(K)$, respectively, were solved in the celebrated theorems of S. N. Mergelian [11] and A. G. Vitushkin [14, 15].

A compact set K is called a Mergelian set if its complement $K^c := \mathbb{C} \setminus K$ is connected. The set of all Mergelian sets will be denoted by $\mathcal{M}$. Then Mergelian's theorem states that $P(K) = A(K)$ if and only if $K \in \mathcal{M}$.

A compact set K is called a Vitushkin set if for all open disks $D \subset \mathbb{C}$ the following property is satisfied

$$\alpha(D \setminus K) = \alpha(D \setminus \overset{\circ}{K})$$

(where α denotes the continuous analytic capacity of the considered set; see for instance D. Gaier [6]). The family of all Vitushkin sets will be denoted by $\mathcal{V}$. Vitushkin's theorem states that $R(K) = A(K)$ if and only if $K \in \mathcal{V}$.

1.2. **Universal holomorphic approximation.** In 1929 Birkhoff [4] proved the following remarkable result (which we state in a slightly modified version).

Theorem B. Given any unbounded sequence $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Then there exists a function $\phi \in H(\mathbb{C})$ with the following property. For every set $K \in \mathcal{M}$ and every function $f \in A(K)$ there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{\phi(z + \lambda_{n_k})\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

This result, usually considered as the first example of a so-called universal entire function, has been the starting point and motivation for extended investigations dealing with different types of universalities. In the course of time a great number of universal functions has been discovered and there exists an extensive literature on this subject. For details and bibliographical information we refer to the excellent survey article of K.-G. Grosse-Erdmann [7], where the results on universalities of the relevant literature are completely collected and classified.

If instead of the whole complex plane an arbitrary open set $O \neq \emptyset$ is considered, then in the paper [8] by Luh and Martirosian a very elementary proof (using only standard methods of complex analyis) for the existence of a universal holomorphic function on O was given.

Theorem LM. Suppose that $O \neq \emptyset$ is an open set in the complex plane. Then there exists a function $\phi \in H(O)$ with the following properties: For every $K \in \mathcal{M}$, for every $f \in A(K)$ and for every $\zeta \in \partial O$ there exists a sequence $\{(a_n, b_n)\} \subset \mathbb{C}^2$ such that

$$\begin{aligned}
&t_n(z) := a_n z + b_n \in O \text{ for all } z \in K \text{ and } n \in \mathbb{N},\\
&\{t_n(z)\} \text{ converges to } \zeta \text{ for all } z \in K,\\
&\{\phi \circ t_n(z)\} \text{ converges to } f(z) \text{ uniformly on } K.
\end{aligned}$$

1.3. **Universal meromorphic approximation.** The first result on universal meromorphic approximation is due to Luh and Martirosian [9]. There the existence of a meromorphic function ϕ on $\mathbb{C}$ was proved which is universal under prescribed translates and has the same properties as Birkhoff's entire function; in addition it was shown that ϕ has slow transcendental growth: Its Nevanlinna characteristic satisfies $T(r, \phi) = O(q(r) \log^2 r)$ for $r \to \infty$, where $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is any increasing function with $\lim_{r\to\infty} q(r) = \infty$.

Using the techniques of the hypercyclicity criterion K. C. Chan constructed in the recent paper [5] a meromorphic function ϕ on $\mathbb{C}$ with the property that the sequence $\{\phi(z+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is dense in the metric space $S(G) := M(G) \cup \{f \equiv \infty\}$ for every domain $G \subset \mathbb{C}$ (where $S(G)$ is endowed with a metric defined by the chordal distance).

By A. Roth's nice result [13] and Vitushkin's famous theorem it seems to be more natural to investigate universal meromorphic approximation not on domains or on compacta in $\mathcal{M}$ but on Vitushkin sets.

It also seems to be interesting to obtain the existence of universal meromorphic functions not by a hypercyclicity criterion but by a constructive procedure.

2. MAIN RESULTS

It is the object of this article to prove the following two results on universal meromorphic approximation.

Theorem 1. Given any unbounded sequence $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Then there exists a function $\phi \in M(\mathbb{C})$ with the following property.

For every set $K \in \mathcal{V}$ and every function $f \in A(K)$ there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{\phi(z + \lambda_{n_k})\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

Theorem 2. Let $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ be a domain and suppose that there are given sequences $\{a_n\}$ with $a_n \to 0$ for $n \to \infty$ and $\{b_n\} \subset G$ such that ∂G is exactly the set of accumulation points of $\{b_n\}$.

Then there exists a function $\phi \in M(G)$ with the following property.

For every $K \in \mathcal{V}$, for every $f \in A(K)$ and every $\zeta \in \partial G$ there exist subsequences $\{m_k\}$ and $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ with

$$\begin{aligned} t_k(z) := \quad & a_{m_k} z + b_{n_k} \in G \quad && \text{for all } z \in K \text{ and all } k \in \mathbb{N}, \\ & b_{n_k} \to \zeta && \text{for } k \to \infty \end{aligned}$$

such that $\{\phi \circ t_k(z)\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

3. AUXILIARY RESULTS

For the proof of our main results a couple of auxiliary tools are necessary which we compile in this section. The first result is a combination of two results due to A. Roth, see [12] and [13, pp. 110-111].

Theorem R. Suppose that $G \subset \mathbb{C}$ is a domain and let F be a (relatively) closed subset of G.

Any function $f \in M(F)$ is uniformly approximable by functions from $M(G)$.

Any function $f \in H(F)$ is uniformly approximable by functions from $M(G)$ with poles only in $G \setminus F$.

Using this result we can prove the following Lemma (approximation with prescribed error).

Lemma 1. Suppose that $G \subset \mathbb{C}$ is a domain and let F be a closed subset of G. Let be given a function $\varepsilon \in H(F)$ with $|\varepsilon(z)| > 0$ for all $z \in F$. Then the following holds:

For every function $f \in M(F)$ there exists a function $m \in M(G)$ with

$$|f(z) - m(z)| < |\varepsilon(z)| \text{ for all } z \in F.$$

Proof. We may assume that $0 < |\varepsilon(z)| < 1$ for all $z \in F$. By Theorem R we find a function $m_1 \in M(G)$ with poles off F and

$$\left|\frac{2}{\varepsilon(z)} - m_1(z)\right| < 1 \text{ for all } z \in F.$$

It follows that m_1 must be zero-free on F. We consider the function $g \in M(F)$ with $g(z) := m_1(z)f(z)$ and find again by Theorem R a function $m_2 \in M(G)$ with

$$|g(z) - m_2(z)| = |m_1(z)f(z) - m_2(z)| < 1 \text{ for all } z \in F.$$

The function $\dfrac{m_2}{m_1}$ belongs to $M(G)$ and satisfies

$$\left|f(z) - \frac{m_2(z)}{m_1(z)}\right| < \frac{1}{|m_1(z)|} < |\varepsilon(z)| \text{ for all } z \in F.$$

□

Lemma 2. There exists a countable set $\mathcal{R}$ of rational functions which is dense in $A(K)$ for every $K \in \mathcal{V}$.

Proof. We consider the countable set $\mathcal{R}$ of all rational functions $\dfrac{p(z)}{q(z)}$, where p and q are polynomials with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

Let be given $K \in \mathcal{V}$, $f \in A(K)$ and $\varepsilon > 0$. Then by Vitushkin's theorem we find a rational function $r^*(z) = \dfrac{p^*(z)}{q^*(z)}$ with poles off K and

$$\max_K |f(z) - r^*(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Since q^* is zero-free on K we have $a := \min_K |q^*(z)| > 0$. We define

$$m(p^*) := \max_K |p^*(z)|, \qquad m(q^*) := \max_K |q^*(z)|$$

and fix $N \in \mathbb{N}$, with $K \subset \overline{\mathbb{D}}_N := \{z : |z| \leq N\}$. By Runge's approximation theorem there exist polynomials p and q with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ with

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}_N} |p(z) - p^*(z)| < \frac{a^2 \cdot \varepsilon}{8m(q^*)},$$
$$\max_{\overline{\mathbb{D}}_N} |q(z) - q^*(z)| < \min \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a^2 \varepsilon}{8m(p^*)} \right\}.$$

We first obtain $\min_K |q(z)| \geq \frac{a}{2}$ and the function $r := \frac{p}{q} \in \mathcal{R}$ satisfies for all $z \in K$:

$$|r^*(z) - r(z)| = \left| \frac{p^*(z)q(z) - p(z)q^*(z)}{q^*(z)q(z)} \right| \leq$$
$$\leq \frac{2}{a^2} \{|p^*(z)|\,|q(z) - q^*(z)| + |q^*(z)|\,|p(z) - p^*(z)|\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

and hence $\max_K |f(z) - r(z)| < \varepsilon$. $\square$

4. PROOFS OF THE MAIN RESULTS

4.1. **Proof of Theorem 1.** We consider for all $j \in \mathbb{N}$ closed disks $D_j := \{z : |z - \lambda_j| \leq \rho_j\}$ and suppose without loss of generality that $D_j \cap D_k = \emptyset$ for $j \neq k$ and $\rho_j < \rho_{j+1} \to \infty$ for $j \to \infty$ (if necessary we choose a subsequence of $\{\lambda_n\}$ with these properties).

Let $\{r_n\}$ be an enumeration of the set $\mathcal{R}$ from Lemma 2. On the closed set $F := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ we consider the functions g and ε which are defined by

$$g(w) := r_j(w - \lambda_j) \quad \text{if } w \in D_j,$$
$$\varepsilon(w) := \frac{1}{j} \quad \text{if } w \in D_j.$$

We have $g \in M(F)$ and $\varepsilon \in H(F)$. By Lemma 1 we find a function $\phi \in M(\mathbb{C})$ and

$$|g(w) - \phi(w)| < \varepsilon(w) \text{ for all } w \in F.$$

Consequently, we have

$$\max_{D_j} |r_j(w - \lambda_j) - \phi(w)| < \frac{1}{j}$$

or
$$\max_{|z|\le\rho_j} |r_j(z)-\phi(z+\lambda_j)| < \frac{1}{j}.$$
Now, let be given a set $K \in \mathcal{V}$ and a function $f \in A(K)$. According to Lemma 2 we find a sequence $\{n_k\}$ with $n_k \to \infty$ and
$$\max_K |f(z) - r_{n_k}(z)| < \frac{1}{k}.$$
For all sufficiently great k the set K is contained in $\{z : |z| \le \rho_{n_k}\}$ and we obtain for those k
$$\begin{aligned}&\max_K |\phi(z+\lambda_{n_k}) - f(z)| \le \\ &\quad\le \max_{|z|\le\rho_{n_k}} |\phi(z+\lambda_{n_k}) - r_{n_k}(z)| + \max_K |r_{n_k}(z) - f(z)| < \\ &\quad< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k},\end{aligned}$$
which proves Theorem 1. □

4.2. **Proof of Theorem 2.** There exists a sequence $\{H_n\}$ of compact sets with the properties:

- $H_n \subset \overset{\circ}{H}_{n+1} \subset G$ for all $n \in \mathbb{N}$.
- For every compact set $K \subset G$ there exists an $n_0 \in \mathbb{N}$ with $K \subset H_{n_0}$.

Suppose that $\{\zeta^{(k)}\}$ is a sequence of points in ∂G which is dense in ∂G. For each $k \in \mathbb{N}$ we choose a subsequence $\{z_\nu^{(k)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ of $\{b_n\}$ with $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu^{(k)} = \zeta^{(k)}$ such that for each $\nu \in \mathbb{N}$ the points $z_\nu^{(1)}, \cdots, z_\nu^{(\nu)}$ are pairwise distinct and such that for a sequence $\{H_{n_\nu}\}$ of $\{H_n\}$ we have $z_\nu^{(k)} \in \overset{\circ}{G}_{\nu+1} \setminus G_\nu$ for $k = 1, \ldots, \nu$, where $G_\nu := H_{n_\nu}$.

Next, we choose an increasing subsequence $\{l_\nu\}$ of $\mathbb{N}$ and radii $\rho_\nu := \sqrt{|a_{l_\nu}|}$ with the property that the closed disks
$$D_{\nu,k} := \{z : |z - z_\nu^{(k)}| \le \rho_\nu\}$$
are pairwise disjoint for $k = 1, \ldots, \nu$ and that
$$\Omega_\nu := \bigcup_{k=1}^{\nu} D_{\nu,k} \subset \overset{\circ}{G}_{\nu+1} \setminus G_\nu.$$
Let $\{r_n\}$ be again an enumeration of the set $\mathcal{R}$ from Lemma 2. On the set $F := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$, which is closed in G, we consider the functions g and ε which are defined by
$$\begin{aligned} g(w) &:= r_\nu\left(\frac{w - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}}\right) &&\text{if } w \in D_{\nu,k}, \\ \varepsilon(w) &:= \frac{1}{\nu} &&\text{if } w \in \Omega_\nu. \end{aligned}$$

We have $g \in M(F)$ and $\varepsilon \in H(F)$. By Lemma 1 we find a function $\phi \in M(G)$ with

$$|\phi(w) - g(w)| < \varepsilon(w) \text{ for all } w \in F.$$

Consequently, we have

$$\max_{D_{\nu,k}} \left| \phi(w) - r_\nu \left(\frac{w - z_\nu^{(k)}}{a_{l_\nu}} \right) \right| < \frac{1}{\nu},$$

or

$$\max_{|z| \le \frac{1}{\rho_\nu}} \left| \phi(a_{l_\nu} z + z_\nu^{(k)}) - r_\nu(z) \right| < \frac{1}{\nu}.$$

Now, let be given a set $K \in \mathcal{V}$, a function $f \in A(K)$ and a point $\zeta \in \partial G$. Obviously, ζ is an accumulation point of $\{\zeta^{(k)}\}$. According to Lemma 2 there exists a sequence $\{\nu_s\} \subset \mathbb{N}$ with $\nu_s \to \infty$ such that

$$\max_K |r_{\nu_s}(z) - f(z)| < \frac{1}{s}.$$

For all sufficiently great s, say $s > s_0$, the set K is contained in

$$\left\{ z : |z| \le \frac{1}{\rho_{\nu_s}} \right\},$$

and we obtain for all $s > s_0$ and all $k = 1, \ldots, \nu_s$:

$$\begin{aligned} \max_K & \left| \phi(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)}) - f(z) \right| \le \\ & \le \max_{|z| \le 1/\rho_{\nu_s}} |\phi(a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(k)}) - r_{\nu_s}(z)| + \max_K |r_{\nu_s}(z) - f(z)| < \\ & < \frac{1}{\nu_s} + \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

The point ζ is an accumulation point of the set

$$\{z : z = z_{\nu_s}^{(k)};\ k = 1, \ldots, \nu_s;\ s > s_0\}$$

and therefore we find $j_s \in \{1, \ldots, \nu_s\}$ such that $z_{\nu_s}^{(j_s)} \to \zeta$ for $s \to \infty$. For all $s > s_0$ and $z \in K$, we have $a_{l_{\nu_s}} z + z_{\nu_s}^{(j_s)} \in D_{\nu_s, j_s} \subset G$ for all $s > s_0$. If we now define for $k \in \mathbb{N}$

$$a_{m_k} := a_{l_{\nu_{s_0+k}}},\ b_{n_k} := z_{\nu_{s_0+k}}^{(j_{s_0+k})},$$

then $\phi(a_{m_k} z + b_{n_k})$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

5. REMARKS ON A DENSITY PROPERTY

In a recent paper [3] F. Bayart and S. Grivaux proved the following nice version of Birkhoff's theorem:

Theorem BG. There exists a function $\phi \in H(\mathbb{C})$ with the following property. For every set $K \in \mathcal{M}$, every function $f \in A(K)$ and every $\varepsilon > 0$ there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ with positive lower density such that

$$|\phi(z+n_k)+f(z)| < \varepsilon \text{ for all } z \in K.$$

(The lower density of $\{n_k\}$ in the sense of G. Pylya is defined by

$$\underline{d}(\{n_k\}) := \liminf_{t\to\infty} \frac{N(\{n_k\},t)}{t},$$

where $N(\{n_k\},t)$ denotes the number of elements of $\{n_k\}$ in the interval $[1,t]$.)

The authors prove this result by a technical lemma (Lemma 2.2 in [3]) and the usual application of Arakelian's theorem [1, 2]. Using this lemma and combining the techniques from the proofs of Theorem 1 and Theorem BG we easily obtain

Theorem 3. There exists a function $\phi \in M(\mathbb{C})$ with the following property. For every set $K \in \mathcal{V}$, every function $f \in A(K)$ and every $\varepsilon > 0$ there exists a sequence $\{n_k\}$ with positive lower density such that

$$|\phi(z+n_k)-f(z)| < \varepsilon \text{ for all } z \in K.$$

Of course, the sequence $\{n_k\}$ is depending on K, f and ε. It seems to be an interesting problem, whether $\{n_k\}$ with $\underline{d}(\{n_k\}) > 0$ can be constructed in such a way that it depends on K and f only, so that $\{\phi(z+n_k)\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

Список литературы

[1] N. U. Arakelian, "Uniform Approximation on Closed Sets by Entire Functions," [Russian] Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28**, 1187-1206 (1964).

[2] N. U. Arakelian, "Uniform and Tangential Approximation by Analytic Functions," [Russian] Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR Ser. Mat. **3**, 273-286 (1968).

[3] F. Bayart and S. Grivaux, "Frequently Hypercyclic Operators," Trans. Amer. Math. Soc. **358**, 5083-5117 (2006).

[4] G. D. Birkhoff, "Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres, C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 473-475 (1929).

[5] K. C. Chan, "Universal Meromorphic Functions," Complex Variables **46**, 307-314 (2001).

[6] D. Gaier, *Lectures on Complex Approximation* (Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985).

[7] K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal Functions and Hypercyclic Operators," Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 345-381 (1999).

[8] W. Luh and V. Martirosian, "An Elementary Construction of T-universal Functions on Open Sets," Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **32**, 84-88 (1997); English transl. Journal of Contemp. Math. Analysis **32**, 77 - 81 (1997).

[9] W. Luh and V. Martiosian, "On the Growth of Universal Meromorphic Functions," Analysis **20**, 137-147 (2000).

[10] W. Luh, V. Martirosian, J. Mьller, "Restriced T-universal Functions on Multiply Connected Domains," Acta Math. Hungar. **97**, 173-181 (2002).

[11] S. N. Mergelian, "Uniform Approximations to Functions of a Complex Variable," Uspekhi Matem. Nauk **7**, 31-122 (1952); English translation in: Amer. Math. Soc. Transl. **3**, 294-391 (1962).

[12] A. Roth, "Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen," Comment. Math. Helv. **11**, 77-125 (1938).

[13] A. Roth, "Uniform and Tangential Approximations by Meromorphic Functions on Closed Sets," Canad. J. Math. **28**, 104-111 (1976).

[14] A. G. Vitushkin, "Conditions on a Set which are Necessary and Sufficient in Order that any Continuous Function, Analytic at its Interiour Points, Admit Uniform Approximation by Rational Functions," Dokl. Akad. Nauk SSSR **171**, 1255-1258 (1966); English translation in: Soviet Math. Dokl. **7**, 1622-1625 (1966).

[15] A. G. Vitushkin, "The Analytic Capacity of Sets in Problems of Approximation Theory," Uspekhi Matem. Nauk **22**, 141-199 (1967); English translation in: Russian Math. Surveys **22**, 139-200 (1967).

Поступила 1 октября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 6, 2008, стр. 82-88

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ПОЛИНОМАМИ С ПРОПУСКАМИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРАТЕОДОРИ

В. А. МАРТИРОСЯН И С. Е. МКРТЧЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *mart@instmath.sci.am*

Аннотация. В статье излагаются новые результаты о возможности приближения многочленами с пропусками. Приближения осуществляются в норме пространства L_p, $1 \leq p < +\infty$, на множествах Каратеодори комплексной плоскости. Получены лакунарные варианты некоторых результатов Фаррелла–Маркушевича, С. Синаняна, А. Л. Шагиняна (Теоремы 1, 3, 5). Рассматриваются также аналогичные приближения вещественными частями многочленов с пропусками (Теоремы 2, 4, 6).

Посвящается памяти академика С. Н. Мергеляна

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть E – ограниченное измеримое множество из конечной комплексной плоскости X. Обозначим через $L_p(E)$, $1 \leq p < +\infty$, банахово пространство, элементами которого являются все определенные на E комплексные функции $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \left\{ \iint_E |f|^p \, dxdy \right\}^{1/p}.$$

Подпространство пространства $L_p(E)$, состоящее из голоморфных во внутренних точках множества E функций, обозначим через $H_p(E)$. Определим также банахово пространство $h_p(E)$, $1 \leq p < +\infty$, состоящее из всех определенных на E действительных функций $u(z)$, которые гармоничны во внутренних точках множества E и имеют конечную норму $\|u\|_p$.

Вопрос о возможности аппроксимации полиномами в норме пространства L_p (аппроксимации в среднем) является старым и сложным вопросом теории приближении. Его изучению посвящены ряд исследований (см., например, обзоры

[1, 2, 3], а также [4, 5]). Тем не менее, вплоть до настоящего времени не известно геометрического описания множеств E, на которых возможна полиномиальная аппроксимация в среднем. Наиболее полно возможность полиномиальной аппроксимации в среднем изучена для различных частных классов множеств. Один такой простейший класс образуют множества Каратеодори.

Определение 1. *Ограниченное измеримое множество $E \subset X$ называется множеством Каратеодори, если граница этого множества совпадает с границей неограниченной компоненты дополнения к его замыканию $\overline{E}$.*

Частным случаем множества Каратеодори, когда E – односвязная область, является область Каратеодори. Такие области, в отличии от жордановых областей, могут разбивать плоскость X. Для множеств Каратеодори известны следующие результаты.

Теорема A. *Пусть E – множество Каратеодори. Тогда множество полиномов всюду плотно в пространстве $H_p(E)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Теорема B. *Пусть E – множество Каратеодори. Тогда множество действительных гармонических полиномов всюду плотно в пространстве $h_p(E)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Отметим, что теоремы A и B установлены в работе [6] С. Синаняна. Теорема A обобщает и усиливает хорошо известный результат Фаррелла–Маркушевича, относящийся к случаю области Каратеодори (см. [7, 8]), а теорема B отвечает на вопрос, сформулированный академиком А. Л. Шагиняном [9].

В настоящий статье изучается возможность аппроксимации в среднем на множествах Каратеодори полиномами с пропусками, т.е. не содержащими наперед заданных степеней, а также действителными частями таких полиномов. Аналогичный вопрос для случая равномерной аппроксимации исследовался в работах [10]–[15]. Переход к аппроксимации в среднем уже на множествах Каратеодори приводит к выявлению новых специфических особенностей.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\{p_n\}_0^\infty$ $(p_0 = 0)$ – подпоследовательность из $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\{q_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность, дополнительная к $\{p_n\}_0^\infty$ относительно N_0. Для ограниченного множества $E \subset X$ обозначеим через Ω_∞ неограниченную компоненту дополнения $X \setminus \overline{E}$. Обозначим также через $H(\Omega)$ множество всех функций, голоморфных на открытом нмножестве Ω расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 1. *Пусть E – множество Каратеодори, для которого $0 \in \Omega_\infty$, и $\{p_n\}_0^\infty$ $(p_0 = 0)$ – подпоследовательность из N_0, удовлетворяющая условию*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 1. \tag{1}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ полна в пространстве $H_p(E)$, $1 \le p < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть множество E и подпоследовательность $\{p_n\}_0^\infty$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда вещественные части многочленов по системе функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ полны в пространстве $h_p(E)$, $1 \le p < +\infty$.*

Теорема 3. *Пусть E – множество Каратеодори, для которого $0 \in \partial E$ и является достижимой граничной точкой для области Ω_∞. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ полна в пространстве $H_p(E)$, $1 \le p < 2$ при выполнении одного из следующих условий:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n} < +\infty$ *и* $\displaystyle\frac{n}{q_n} \downarrow 0$ *при* $n \to \infty$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log q_n)^{1+\varepsilon}}{q_n} < +\infty$ *для какого-либо* $\varepsilon > 0$,
3. *нуль является достижимой граничной точкой прямолинейным отрезком для Ω_∞ и*
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n} < +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть множество E и подпоследовательность $\{p_n\}_0^\infty$ удовлетворяют предположениям теоремы 3. Тогда вещественные части многочленов по системе функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ плотны в пространстве $h_p(E)$, $1 \le p < 2$.*

При некоторых дополнительных ограничениях на множество E, аналогичных случаю равномерной аппроксимации, в теоремах 3, 4 предположения на подпоследовательность $\{p_n\}_0^\infty$ можно ослабить.

Теорема 5. *Пусть $\{p_n\}_0^\infty$ $(p_0 = 0)$ – подпоследовательность из N_0, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 1,$$

E – множество Каратеодори, для которого $0 \in \partial E$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_\infty$ такая, что $z_m \to 0$ и

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{|z_m|}{dist(z_m, \overline{E})} < +\infty, \tag{2}$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ полна в пространстве $H_p(E)$, $1 \le p < +\infty$.

Теорема 6. *Пусть множество E и подпоследовательность $\{p_n\}_0^\infty$ удовлетворяют предположениям теоремы 5. Тогда вещественные части многочленов по по системе функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$ плотны в пространстве $h_p(E)$, $1 \le p < +\infty$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Ограничимся доказательством случая $1 < p < +\infty$ (при $p = 1$ нужны лишь простые изменения). Согласно теоремам Хана–Банаха, Ф. Рисса и теореме A достаточно показать, что для любой функции $g \in L_q(E)$ $(q^{-1} + p^{-1} = 1)$, удовлетворяющей соотношениям ортогональности

$$\iint_E z^{p_n}\overline{g(z)}dxdy = 0, \quad n \in N_0. \tag{3}$$

будут выполняться также условия

$$\iint_E z^{q_n}\overline{g(z)}dxdy = 0, \quad n \in N_0. \tag{4}$$

С этой целью рассмотрим интеграл Коши

$$F(t) = \iint_E \frac{\overline{g(z)}}{t-z}dxdy, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что функция $F \in H\left(\overline{C} \setminus E\right)$ и ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. При $|t| > \sup\{|z| : z \in E\}$ она представляется лакунарным рядом Лорана

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-q_n-1} \iint_E z^{q_n}\overline{g(z)}dxdy. \tag{5}$$

С учетом (1) согласно одной теореме Г. Полиа (см. [17], стр. 737) заключаем, что ряд (5) опредяляет функцию $F_1 \in H\left(\overline{C} \setminus \{0\}\right)$. По теореме единственности аналитических функций из (5) следует равенство

$$F_1(t) = F(t), \quad t \in \Omega_\infty. \tag{6}$$

Поэтому, так как $0 \in \Omega_\infty$, то по теореме Лиувилля получим $F_1(t) \equiv const$. Отсюда и из (5) вытекают требуемые условия (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть заданы $g \in h_p(E)$ и число $\varepsilon > 0$. По теореме B существует вещественный гармонический полином u такой, что

$$\|g - u\|_p < \varepsilon.$$

Предположим, что f такая целая функция, что $\operatorname{Re} f = u$. По теореме 1 найдется многочлен s по системе функций $\{z^{p_n}\}_0^\infty$, для которого

$$\|f - s\|_p < \varepsilon.$$

Следовательно, получим,

$$\|g - \operatorname{Re} s\|_p < 2\varepsilon,$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Ограничимся доказательством случая $1 < p < 2$ (при $p = 1$ нужны лишь простые изменения). Предположим, что для произвольной функции $g \in L_q(E)$ $(q > 2)$ удовлетворяются соотношения ортогональности (3). Рассмотрим для g соответствующий интеграл Коши F. Функция $F \in H\left(\overline{C} \setminus E\right)$ и ограничена на $\overline{C}$ в силу ограничения $q > 2$. С учетом соотношений (3) при $|t| > \sup\{|z| : z \in E\}$ она представляется лакунарным рядом Лорана (5).

Так как при каждом из предположений 1), 2), 3), очевидно имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} = 0,$$

то, учитывая известную теорему Фабри о естественной границе степенного ряда, заключаем, что ряд (5) определяет функцию $F_1 \in H\left(\overline{C} \setminus \{0\}\right)$. По теореме единственности аналитических функций из (5) следует равенство (6). Таким образом, функция $F_1 \in H\left(\overline{C} \setminus \{0\}\right)$ ограничена на Ω_∞ и в окрестности бесконечности представима лакунарным рядом (5). Следовательно, применяя к ней соответственно случаям 1), 2), 3) результаты работ [19, 20, 21], получаем $F_1(t) \equiv const$. Отсюда и из (4) вытекают требуемые условия (5). Теорема 3 доказана.

Теорема 4 следует из теоремы B и теоремы 3.

Доказательство теоремы 5: Ограничимся доказательством случая $1 < p < +\infty$. Предположим, что для произвольной функции $g \in L_q(E)$ $(q^{-1} + p^{-1} = 1)$ удовлетворяются соотношения ортогональности (3). Рассмотрим для g соответствующий интеграл Коши F. С учетом соотношений (3)F представляется при $|t| > \sup\{|z| : z \in E\}$ лакунарным рядом Лорана (5). Рассуждая как при доказателстве теоремы 3, получим равенство (6), где функция $F_1 \in H\left(\overline{C} \setminus \{0\}\right)$ и представляется лакунарным рядом (5).

Рассмотрим теперь в области Ω_∞ круги

$$D_m = \left\{ t : t - z_m| \leq \frac{1}{2}\, dist\left(z_m, \overline{E}\right) \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

На них согласно неравенству Гельдера и равенству (6) выполняется оценка

$$|F_1(t)| = |F(t)| \leq \left\| \frac{1}{t-z} \right\|_p \|g\|_q \leq \frac{C}{dist\left(t, \overline{E}\right)}, \quad t \in D_m,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от m. Замечая еще, что с учетом (2) имеем неравенства

$$dist\left(t, \overline{E}\right) \geq \frac{1}{2} dist\left(z_m, \overline{E}\right) \geq C_1 |z_m| \geq C_2 |t|, \quad t \in D_m,$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от m, получим

$$|F_1(t)| \leq \frac{C_3}{|t|}, \quad t \in D_m,$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от m. Следовательно, применяя к F_1 лемму 8 из работы [8], получим, что F_1 является линейной функцией от переменной $1/t$. Поэтому с учетом (5) получим $F_1(t) \equiv 0$ при $t \in \overline{C} \setminus \{0\}$. Отсюда и из (5) вытекают условия (4). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6 следует из теоремы B и теоремы 5.

Abstract. The paper presents some new results on the possibility of approximation by polynomials with gaps. The approximations are done in the norm of the space L_p, $1 \leq p < +\infty$, on the Caratheodory sets in the complex plane. The lacunary versions of some results by Farrell–Markushevich, S. Sinanian, A. L. Shahinian are obtained (Theorems 1, 3, 5). Similar approximations by the real parts of lacunary polynomials are given (Theorems 2, 4, 6).

Список литературы

[1] С. Н. Мергелян, “О полноте систем аналитических функций,” УМН **8** (4), 3-63 (1953).

[2] М. С. Мельников, С. О. Синанян, “Вопросы теории приближения функций одного комплексного переменного,” в сб.: *Современные проблемы математики. Итоги науки и техники*, том 4, 143-245 (Наука, Москва, 1975).

[3] J. E. Brennan, “Approximation in the Mean by Polynomials on Non-Caratheodory Domains,” Ark. Math. **15** (1), 117-168 (1977).

[4] Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области* (Мир, Москва, 1986).

[5] J. E. Brennan, “The Cauchy Integral and Certain of its Applications,” Izv. NAN Armenii, Matematika [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)] **39** (1), 5-48 (2004).

[6] С. О. Синанян, “Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади,” Мат. сборник **69** (4), 546-578 (1966).

[7] O. J. Farrell, “On Approximation to Analytic Function by Polynomials,” Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 908-914 (1934).

[8] А. И. Маркушевич, *Конформные отображения областей с переменными границами с приложением к аппроксимации аналитических функций полиномами*, Диссертация (МГУ, 1934).
[9] А. Л. Шагинян, *Теория приближения в комплексной области* (Изд-во ЕГУ, Ереван, 1960).
[10] J. Korevaar, "Lacunary Forms of WalshŸs Approximation Theorems," в: *Теория приближения функций*, 229-237 (Наука, Москва, 1977).
[11] Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками," ДАН СССР **235** (2), 249-252 (1977).
[12] В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении полиномами с пропусками," Мат. сборник **120** (4), 451-472 (1983).
[13] В. А. Мартиросян, "О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками," **20** (3), 167-181 (1985).
[14] В. А. Мартиросян, "О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами и ограниченных на угле Жордана," Изв. НАН Армении, Математика **21** (3), 280-300 (1986).
[15] J. Mueller, "Ueber Analytische Fortsetzung mit Matrixverfahren," Mitteilungen Mathem. Seminar Giessen **199**, 1-90 (1990).
[16] G. Polya, "Untersuchungen űber Lűcken und Singularitaten von Potenzreihen (1. Mitteilung)," Math. Z. **29** 549-640 (1929).
[17] G. Polya, "Untersuchungen űber Lűcken und Singularitaten von Potenzreihen (2. Mitteilung)," Ann. Math. **34**, 731-777 (1933).
[18] L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.), Heft 3 (Springer, Berlin–Gőttingen–Heidelberg, 1955).
[19] А. И. Павлов, "О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами," Сиб. мат. журнал **13** (5), 1169-1181 (1972).
[20] J. M. Anderson and K. G. Binmore, "Coefficient Estimates for Lacunary Power Series and Dirichlet Series," I., Proc. London Math. Soc. (3) **18** (1), 36-49 (1968).
[21] A. J. Mcintyre, "Asymptotic Paths of Integral Functions with Gap Power Series," Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 286-296 (1952).

Поступила 5 июня 2008

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 43, номер 6, 2008

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 43, No. 6, 2008

Contents