ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2007, стр. 3-17

ОЦЕНКИ ОШИБОК ПРИ АППРОКСИМАЦИЯХ СЛЕДОВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

Бостонский Университет, Институт математики НАН Армении
E-mail: *mamgin.55@gmail.com*
Ереванский Государственный Университет
E-mail: *sart@ysu.am*

Аннотация. В статье устанавливаются порядки ошибок при интегральных предельных аппроксимациях следов произведений усеченных операторов Теплица, порожденных интегрируемыми вещественными четными функциями, определенными на вещественной прямой. Эти аппроксимации и оценки соответствующих ошибок имеют большое значение в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным временем (асимптотические распределения и большие отклонения квадратичных Теплицевых функционалов, оценка спектра, и т.д.). Результаты улучшают оценки, полученные авторами в предыдущих статьях.
Найдено асимптотическое разложение второго порядка в явном виде для следа произведения двух усеченных Теплицевых операторов, порожденных спектральными плотностями стационарных дробных движений Рисса-Бесселя с непрерывным временем. Показано, что порядок величины второго члена в этом разложении зависит от параметров долговременной памяти этих процессов. Показано также, что особенность первого члена компенсируется вторым членом разложении, что гарантирует существенно лучшее приближение исходного функционала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Усеченные Теплицевы операторы (соотв. матрицы) обычно возникают в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным (соотв. дискретным) временем: асимптотические распределения и большие отклонения Теплицевых квадратичных функционалов, оценка спектральных функционалов и прогнозирование проверки гипотезы, основанное на прошлых наблюдениях за процессом и т.д., (см., например, [4, 8, 10] - [16], [18] - [23], и библиографии там же).

Настоящая статья посвящена задаче аппроксимации следов произведений усеченных Теплицевых операторов и оцениванию соответствующих ошибок. Эта задача представляет интерес, в частности, в случаях, когда основной моделью является стационарный процесс с непрерывным временем с возможно неограниченной или обращающейся в нуль спектральной плотностью. Такие случаи возникают при изучении стационарных процессов с непрерывным временем долговременной памяти (спектральная плотность не ограничена) а также противоустойчивых (спектральная плотность имеет нули).

Пусть $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ – интегрируемые вещественные четные функции на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Пусть $B_T(f)$ и $B_T(g)$ – усеченные Теплицевы операторы, порожденные функциями $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ сответственно (см. [15, 18, 20]): при $u(\lambda) \in L^2[0,T]$

$$[B_T(f)u](\lambda) = \int_0^T \hat{f}(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu, \tag{1.1}$$

$$[B_T(g)u](\lambda) = \int_0^T \hat{g}(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu, \tag{1.2}$$

где

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda \quad \text{и} \quad \widehat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} g(\lambda)\, d\lambda \tag{1.3}$$

являются преобразованиями Фурье функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ соответственно.

Пусть ν – произвольное фиксированное натуральное число. Определим

$$S_{T,\nu} := S_{T,\nu}(f,g) = \frac{1}{T}\mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g)]^\nu, \tag{1.4}$$

$$M_\nu := M_\nu(f,g) = (2\pi)^{2\nu-1}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\lambda)g(\lambda)]^\nu\, d\lambda \tag{1.5}$$

и положим

$$\Delta_{T,\nu} := \Delta_{T,\nu}(f,g) = |S_{T,\nu} - M_\nu|. \tag{1.6}$$

Задача аппроксимации $S_{T,\nu}$ величиной M_ν и оценки порядка ошибки $\Delta_{T,\nu}$ для Теплицевых матриц рассматривалась еще в классической монографии Гренадера и Сеге [18], и была широко изучена в литературе (см., например, Ибрагимов [20], Розенблатт [23], Аврам [4], Фокс и Такку [8], Гиратис и Сургалис [16], Гиновян [10], Гиновян и Саакян [14], Либерман и Филипс [22], и библиографии там же).

Для Теплицевых операторов вышеупомянутая задача частично исследована Ибрагимовым [20], Гиновяном [11, 13], а также Гиновяном и Саакяном в работе [15]. В этих работах получены достаточные условия (в терминах порождающих функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$) для

$$\Delta_{T,2} = |S_{T,2} - M_2| = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.7}$$

В частности, в работе Гиновяна и Саакяна [15] доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Если функция*

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, u_2, u_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda - u_1) f(\lambda - u_2) g(\lambda - u_3)\, d\lambda \tag{1.8}$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ *и непрерывна в* $\mathbf{0} = (0,0,0)$, *тогда имеет место (1.7).*

Теорема 2. *Пусть* $f(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $(p \ge 1)$ *и* $g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ $(q \ge 1)$, $1/p + 1/q = 1/2$. *Тогда имеет место (1.7).*

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $fg \in L^2(\mathbb{R})$ *и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda - \mu)\, d\lambda \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda \quad \textit{при} \quad \mu \to 0. \tag{1.9}$$

Тогда имеет место (1.7).

Пусть $SV_\cdot(\mathbb{R})$ – класс медленно изменяющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$u(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{\lambda \to 0} u(\lambda) = 0$$

и

$$u(\lambda) = u(-\lambda),\ 0 < u(\lambda) < u(\mu) \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < \mu.$$

Теорема 4. *Пусть функции* f *и* g *интегрируемы на* $\mathbb{R}$ *и ограничены на* $\mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$ *и*

$$f(\lambda) \le |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda), \quad |g(\lambda)| \le |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{1.10}$$

где $L_1(\lambda)$ *и* $L_2(\lambda)$ *– медленно изменяющиеся в нуле функции, а*

$$\alpha < 1,\ \beta < 1,\ \alpha + \beta \le 1/2 \quad \textit{и} \quad L_i \in SV,\ \ \lambda^{-(\alpha+\beta)} L_i(\lambda) \in L^2(\mathbb{T}),\ i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Тогда выполняется (1.7).

Ниже мы получим условия в терминах порождающих функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, обеспечивающие асимптотическое сотношение

$$\Delta_T = \Delta_{T,2} = |S_{T,2} - M_2| = O(T^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{1.12}$$

Результаты улучшают порядок $o(1)$, полученный в теоремах 1 и 2. Мы получаем также точное асимптотическое разложение второго порядка в явном виде для

$S_{T,1}(f,g)$, в случае, когда функции f и g являются спектральными плотностями стационарных дробных движений Риса-Бесселя с непрерывным временем.

Статья построена следующим образом. В параграфе 2 устанавливаются оценки для ошибок $\Delta_{T,2}$, в параграфе 3 содержатся некоторые предварительные результаты, параграф 4 посвящен доказательствам результатов, установленных в параграфе 2, а параграф 5 содержит разложение второго порядка для $S_{T,1}$.

2. ОЦЕНКИ ДЛЯ $\Delta_{T,2}$

Для $\psi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ обозначим через $\omega_p(\psi,\delta)$ L^p–модуль непрерывности ψ:

$$\omega_p(\psi,\delta) := \sup_{0<h\le\delta} \|\psi(x+h)-\psi(x)\|_p, \quad \delta > 0.$$

Для заданного $0 < \alpha \le 1$ и $1 \le p \le \infty$, обозначим через $\mathrm{Lip}(p,\alpha) = \mathrm{Lip}(\mathbb{R};p,\alpha)$ L^p-класс Липшица функций, определенных на $\mathbb{R}$ (см., например, [1], [6]):

$$\mathrm{Lip}(p,\alpha) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbb{R}); \quad \omega_p(\psi;\delta) = O(\delta^\alpha), \quad \delta \to 0\}.$$

Заметим, что если $\psi \in \mathrm{Lip}(p,\alpha)$, тогда существует постоянная C такая, что $\omega_p(\psi;\delta) \le C\,\delta^\alpha$ для всех $\delta > 0$.

Теорема 5. *Пусть функция $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1,u_2,u_3) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ такая, как в (1.8). Предположим, что для некоторых постоянных $L > 0$ и $\alpha \in (0,1]$ имеем*

$$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{0})| \le L|\mathbf{u}|^\alpha, \quad \mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{0} = (0,0,0)$ и $|\mathbf{u}| = |u_1| + |u_2| + |u_3|$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\Delta_T = O\left(\frac{1}{T^{\alpha-\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{2.2}$$

Теорема 6. *Пусть $f(\lambda) \in \mathrm{Lip}(p,\alpha)$ и $g(\lambda) \in \mathrm{Lip}(q,\alpha)$, $\alpha \in (0,1]$ и $p,q \ge 1$ так, что $1/p + 1/q = 1/2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место (2.2).*

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $D_T(u)$ – ядро Дирихле:*

$$D_T(u) = \frac{\sigma n(Tu/2)}{u/2}. \tag{3.1}$$

Тогда для любого $\delta \in (0,1)$ существует постоянная $C_\delta > 0$ такая, что имеет место

$$|D_T(u)| \le 2\frac{T^\delta}{|u|^{1-\delta}}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для фиксированного $T > 0$ и $u \in \mathbb{R}$ из (3.1) имеем

$$|D_T(u)| \le \min\left\{T, \frac{2}{|u|}\right\}.$$

С другой стороны, так как функция

$$I(\delta) := \frac{T^\delta}{|u|^{1-\delta}} = \frac{1}{|u|}(T|u|)^\delta$$

монотонна относительно δ, то

$$I(\delta) \ge \min\{I(0),\ I(1)\} = \min\left\{T, \frac{1}{|u|}\right\} \ge \frac{1}{2}|D_T(u)|,$$

откуда получаем (3.2).

Лемма 2. *Пусть $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$, причем $\alpha + \beta > 1$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha |x+y|^\beta} dx \le \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}}, \tag{3.3}$$

где M – постоянная, зависящая от α и β.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha |x+y|^\beta} dx &\le \int_{|x| \le \frac{|y|}{2}} \frac{2}{|x|^\alpha |y|^\beta} dx + \int_{\frac{|y|}{2} < |x| < 2|y|} \frac{2}{|y|^\alpha |x+y|^\beta} dx \\ &+ \int_{|x| \ge 2|y|} \frac{2}{|x|^{\alpha+\beta}} dx \le \frac{M_1}{|y|^{\alpha+\beta-1}} \\ &+ \frac{M_1}{|y|^\alpha} \int_{0<t<3|y|} \frac{1}{t^\beta} dt + \frac{M_1}{|y|^{\alpha+\beta-1}} \le \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}},\end{aligned}$$

откуда следует (3.3).

Обозначим $E = \{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 : |u_i| \le 1,\ i = 1,2,3\}$ и $E^C = \mathbb{R}^3 \setminus E$.

Лемма 3. *Пусть $0 < \alpha \le 1$ и $\frac{3}{4} < \beta < \frac{\alpha+3}{4}$. Тогда имеет место оценка*

$$B_i := \int_E \frac{|u_i|^\alpha}{|u_1 u_2 u_3 (u_1+u_2+u_3)|^\beta} du_1 du_2 du_3 < \infty, \quad i = 1,2,3. \tag{3.4}$$

Доказательство. Используя лемму 2, можем записать

$$\begin{aligned}B_1 &\le \int_{\{|u_1|\le 1\}} \frac{1}{|u_1|^{\beta-\alpha}|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u_2|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_3(u_1+u_2+u_3)|^{\beta}}\, du_3du_2du_1 \\ &\le M \int_{\{|u_1|\le 1\}} \frac{1}{|u_1|^{\beta-\alpha}|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^{\beta}|(u_1+u_2)|^{2\beta-1}} du_2du_1 \\ &\le M^2 \int_{\{|u_1|\le 1\}} \frac{1}{|u_1|^{4\beta-\alpha-2}} du_1 < \infty,\end{aligned}$$

откуда получаем формулу (3.4) при $i = 1$. Величины B_2 и B_3 можно оценить аналогично.

Лемма 4. *Пусть* $\frac{3}{4} < \beta < 1$. *Тогда имеет место оценка*

$$I := \int_{E^C} \frac{1}{|u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)|^{\beta}}\, du_1du_2du_3 < \infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. Имеем

$$I \le \int_{|u_1>1} + \int_{|u_2>1} + \int_{|u_3>1} \frac{1}{|u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)|^{\beta}}\, du_1du_2du_3 =: I_1+I_2+I_3. \tag{3.6}$$

Используя лемму 2, получим

$$\begin{aligned}I_1 &\le \int_{|u_1|>1} \frac{1}{|u_1|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_3(u_1+u_2+u_3)|^{\beta}}\, du_3du_2du_1 \\ &\le M \int_{|u_1|>1} \frac{1}{|u_1|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^{\beta}|u_1+u_2|^{2\beta-1}}\, du_2du_1 \\ &\le M^2 \int_{|u_1|>1} \frac{1}{|u_1|^{4\beta-2}}\, du_1 < \infty.\end{aligned}$$

Величины I_2 и I_3 можно оценить тем же способом, и в силу (3.6) получим требуемый результат.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 5: Обозначим

$$\Phi(\mathbf{u}) := \Phi_T(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{8\pi^3 T} \cdot D_T(u_1)D_T(u_2)D_T(u_3)D_T(u_1+u_2+u_3), \tag{4.1}$$

и

$$\Psi(\mathbf{u}) := \Psi(u_1,u_2,u_3) = \varphi(u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3), \tag{4.2}$$

где $D_T(u)$ определена как в (3.1), а $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ – как в (1.8). В работе [15] доказано следующее представление для $\Delta_T = \Delta_{T,2}$:

$$\begin{aligned}\Delta_T := &\frac{1}{T}\operatorname{tr}[B_T(f)B_T(g)]^2 - 8\pi^3\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda\\ = &\int_{\mathbb{R}^3}[\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})]\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \quad \mathbf{0} = (0,0,0).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (2.1) и (4.2) следует, что

$$|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| \le 3L|u_1|^\alpha + 2L|u_2|^\alpha + L|u_3|^\alpha, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3. \tag{4.4}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Тогда, применяя лемму 1 при $\delta = \frac{1+\varepsilon-\alpha}{4}$ и используя (4.3) и (4.4), получим

$$\begin{aligned}|\Delta_T| \le &\int_E |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \int_{E^C}|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u}\\ \le &\frac{C_\delta}{T^{1-4\delta}}\sum_{i=1}^3 C_i\int_E \frac{|u_i|}{|u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)|^{1-\delta}}\,du_1du_2du_3\\ &+ 2\|\varphi\|_\infty\frac{C_\delta}{T^{1-4\delta}}\int_{E^C}\frac{1}{|u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)|^{1-\delta}}\,du_1du_2du_3.\end{aligned}$$

Отсюда и из лемм 3 и 4 следует утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6: Согласно теореме 5 достаточно доказать, что функция

$$\varphi(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{R}} f_0(u)f_1(u-t_1)f_2(u-t_2)f_3(u-t_3)du, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{4.5}$$

принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и для некоторых положительных постоянных L и $\alpha \in (0,1]$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi(\mathbf{t}) - \varphi(\mathbf{0})| \le L|\mathbf{t}|^\alpha, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{4.6}$$

при условиях

$$f_i \in \operatorname{Lip}(p_i, \alpha), \quad 1 \le p_i \le \infty, \quad i = 0,1,2,3, \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^3 \frac{1}{p_i} \le 1. \tag{4.7}$$

Из неравенства Гелдера и условий (4.7) следует, что

$$|\varphi(\mathbf{t})| \le \prod_{i=0}^3 \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})} < \infty, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Докажем (4.6). Зафиксируем $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ и обозначим

$$\overline{f}_i(u) = f_i(u-t_i) - f_i(u), \quad i = 1,2,3. \tag{4.8}$$

Так как $f_i \in \mathrm{Lip}(p_i, \alpha)$, то имеем

$$\|\overline{f}_i\|_{p_i} \le L_i |\mathbf{t}|^\alpha, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.9}$$

В силу (4.5) и (4.8)

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f_0(u) \prod_{i=1}^{3} \left(\overline{f}_i(u) + f_i(u)\right) du = \varphi(\mathbf{0}) + W.$$

Каждый из пяти интегралов, составляющих W содержит по крайней мере одну функцию $\overline{f}_i$, и ввиду (4.9)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_0(u) \overline{f}_1(u) f_2(u) f_3(u) du \right| \le \|f_0\|_{L^{p_0}} \|\overline{f}_1\|_{L^{p_1}} \|f_2(u)\|_{L^{p_2}} \|f_3\|_{L^{p_3}} \le L|\mathbf{t}|^\alpha$$

что и завершает доказательство теоремы 6.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ $S_{T,1}$.

В этом параграфе приводится разложение второго порядка в явном виде для $S_{T,p}$ при $p = 1$, распространяющее результат, полученный О. Либерманом и А. Филипсом [22] на стационарные дробные движения Рисса-Бесселя с непрерывным временем.

Напомним, что дробное движение Рисса-Бесселя (ддРБ), введнное в работе Ана и др. [2], и затем интенсивно обсужденное в ряде работ (см., например, [3], [9] и библиографии там же), определено как Гауссовский процесс с непрерывным временем $X(t)$ со спектральной плотностью вида

$$f(\lambda) = \frac{C}{|\lambda|^{2\alpha}(1 + \lambda^2)^\beta}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

где C – положительная постоянная, $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 1/2$.

Заметим, что процесс $X(t)$ – стационарный, если $0 < \alpha < 1/2$ и нестационарный со стационарными приращениями, если $1/2 < \alpha < 1$. Тогда параметр α определяет долгосрочную зависимость (ДСЗ), или самоподобие (СП) ддРБ, а β показывает прерывистость процесса второго порядка (см., например, [3], [9]).

Таким образом, вид (5.1) означает, что ддРБ может проявлять как ДСЗ/СП, так и прерывистость.

Мы рассматриваем стационарный случай и предполагаем, что $0 < \alpha < 1/2$ и $\beta > 1/2$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $f_i(\lambda)$, $i=1,2$, – функции спектральной плотности двух дробных движений Рисса-Бесселя, определенные следующим образом*

$$f_i(\lambda)=\frac{C_i}{|\lambda|^{2\alpha_i}(1+\lambda^2)^{\beta_i}},\quad 0<\alpha_i<1/2,\quad \beta_i>1/2,\quad i=1,2. \tag{5.2}$$

Если $\alpha_1+\alpha_2<1/2$, то при $T\to\infty$,

$$\begin{aligned} S_{T,1}&=\frac{1}{T}tr[B_T(f_1)B_T(f_2)]\\ &=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)f_2(\lambda)\,d\lambda-\frac{C(\alpha_1,\alpha_2)}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}}+o\left(\frac{1}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}}\right), \end{aligned}\tag{5.3}$$

где

$$C(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{2C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)}\cdot\left[\frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\right]. \tag{5.4}$$

Во-первых, докажем две леммы. В первой лемме дается асимптотическая формула ковариационной функции процесса ддРБ.

Лемма 5. *Пусть функция $f(\lambda)$ определена как в (5.1), где $0<\alpha<1/2$ и $\beta>1/2$, и пусть $r(t)$ – преобразование Фурье функции $f(\lambda)$. Тогда при $t\to\infty$ имеет место*

$$r(t)=t^{2\alpha-1}\frac{\pi C}{\cos(\pi\alpha)\Gamma(2\alpha)}\left(1+o(1)\right). \tag{5.5}$$

Доказательство. Мы используем технику [21], где (5.5) доказано при $\beta=1$. Так как базовый процесс $X(t)$ является действительным, то мы имеем для $t>0$

$$r(t):=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\lambda}f(\lambda)\,d\lambda=2\int_0^{+\infty}\frac{C}{\lambda^{2\alpha}(1+\lambda^2)^{\beta}}\cos(t\lambda)\,d\lambda. \tag{5.6}$$

Используя замену переменной $t\lambda=1/u$, $\lambda=1/(tu)$, $d\lambda=-du/(tu^2)$, из (5.6) получим

$$\begin{aligned} r(t)&=2C\int_0^{+\infty}\frac{1}{((1/(tu))^{2\alpha}(1+(tu)^2))^{\beta}}\cos(1/u)\,\frac{du}{tu^2}\\ &=2Ct^{2\alpha-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(tu)^2}{1+(tu)^2}\right)^{\beta}u^{2\alpha-2}\cos(1/u)\,du\\ &=2Ct^{2\alpha-1}\int_0^{+\infty}L(tu)k(u)\,du, \end{aligned}\tag{5.7}$$

где

$$L(u)=\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)^{\beta},\quad k(u)=u^{2\alpha-2}\cos(1/u).$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \min(1-2\alpha, 2\alpha)$. Тогда существуют несобственные интегралы

$$\int_{0+}^{1} u^{-\delta} k(u)\, du, \quad \int_{1}^{\infty-} u^{\delta} k(u)\, du.$$

Следовательно, по теореме Боянича-Караматы (см. [5], теорема 4.1.5) имеем

$$\int_{0}^{+\infty} k(u) L(tu)\, du \longrightarrow \int_{0+}^{\infty-} k(u)\, du \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5.8}$$

Далее, используя замену переменной $1/u = v$ и формулу (см., например, [7], #858.813)

$$\int_{0}^{\infty-} x^{-p} \cos(mx)\, dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2\cos(p\pi/2)\Gamma(p)}, \quad 0 < p < 1, \quad m > 0,$$

при $p = 2\alpha$ и $m = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{\infty-} k(u)\, du &= \int_{0}^{\infty-} u^{2\alpha-2} \cos(1/u)\, du = \int_{0}^{\infty-} v^{-2\alpha} \cos(v)\, dv \\ &= \frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha)\Gamma(2\alpha)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Из формул (5.6)-(5.9) получаем (5.5).

Замечание 1. *Из формулы*

$$\Gamma(2\alpha)\Gamma(1-2\alpha) = \frac{\pi}{\sigma n(2\pi\alpha)},$$

и выражения (5.5) мы получаем следующее асимптотическое соотношение для ковариационной функции $r(t)$:

$$r(t) = C t^{2\alpha-1} \sigma n(\pi\alpha) \Gamma(1-2\alpha)\,(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{5.10}$$

В следующей лемме получена явная формула для $S_{T,1}$ в общем случае.

Лемма 6. *Пусть* $f_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, *– интегрируемые действительные четные функции на* $\mathbb{R}$ *такие, что* $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $r_i(t)$ *– преобразования Фурье функции* $f_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, *и* $B_T(f_i)$ *– усеченные Теплицевы операторы, порожденные функцией* $f_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. *Тогда имеет место*

$$S_{T,1} := \frac{1}{T} tr[B_T(f_1) B_T(f_2)] = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\lambda - \mu) f_1(\lambda) f_2(\mu)\, d\lambda d\mu \tag{5.11}$$

$$= \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) r_1(t) r_2(t)\, dt, \tag{5.12}$$

где

$$F_T(t) = \frac{1}{2\pi T} \left[\frac{\sigma n(Tt/2)}{t/2}\right]^2 \tag{5.13}$$

- *ядро Фейера.*

Доказательство. Операторы $B_T(f_i)$ $i=1,2$, действуют как интегральные операторы в $L^2(\mathbb{R})$ с ядрами

$$\Gamma_T(f_i;\lambda,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_T(\lambda,t)G_T(t,\mu)f_i(t)\,dt,\quad i=1,2,$$

где

$$G_T(\lambda,\mu)=e^{iT(\lambda-\mu)/2}\cdot\frac{\sigma n[T(\lambda-\mu)/2]}{(\lambda-\mu)/2}. \tag{5.14}$$

Учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G_T(u,t)G_T(t,v)\,dt=G_T(u,v), \tag{5.15}$$

заметим, что оператор $B_T(f_1)B_T(f_2)$ действует как интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с ядром

$$\begin{aligned}\Gamma(f_1,f_2;\lambda,\mu)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_T(f_1;\lambda,t)\Gamma_T(f_2;t,\mu)\,dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_T(\lambda,u)G_T(u,v)G_T(v,\mu)f_1(u)f_2(v)\,du\,dv.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Используя формулу для следов интегральных операторов (см. [17]), получим

$$\begin{aligned}S_{T,1}&=\frac{1}{T}\mathrm{tr}[B_T(f_1)B_T(f_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(f_1,f_2;\lambda,\lambda)\,d\lambda\\ &=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_T(\lambda,u)G_T(u,v)G_T(v,\lambda)f_1(u)f_2(v)\,du\,dv\,d\lambda\\ &=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_T(u,v)G_T(v,u)f_1(u)f_2(v)\,du\,dv\\ &=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|G_T(u,v)|^2f_1(u)f_2(v)\,du\,dv\\ &=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_T(u-v)f_1(u)f_2(v)\,dudv,\end{aligned} \tag{5.17}$$

откуда следует (5.11). Равенство (5.12) следует из теоремы Персеваля-Планшереля.

Доказательство теоремы 7. По лемме 6

$$S_{T,1}=\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)r_1(t)r_2(t)\,dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)f_2(\lambda)\,d\lambda-I_1-I_2, \tag{5.18}$$

где

$$I_1=\int_{|t|>T}r_1(t)r_2(t)\,dt \tag{5.19}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |t| r_1(t) r_2(t)\, dt. \tag{5.20}$$

Следовательно, для $\alpha_1 + \alpha_2 < 1/2$ из леммы 5 и (5.19) при $T \to \infty$ получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|t|>T} r_1(t) r_2(t)\, dt = 2\int_{t>T} r_1(t) r_2(t)\, dt \\ &= \frac{2C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \int_{t>T} t^{2(\alpha_1+\alpha_2-1)} \left(1+o(1)\right) \\ &= \frac{2C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \\ &\quad\times \frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)} T^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1}\left(1+o(1)\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Из леммы 5 и формулы (5.20) при $T \to \infty$ имеем для $\alpha_1 + \alpha_2 < 1/2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |t| r_1(t) r_2(t)\, dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\, r_1(t) r_2(t)\, dt \\ &= \frac{2}{T}\frac{C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \int_0^T t^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1}\, dt \left(1+o(1)\right) \\ &= \frac{2C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \\ &\quad\times \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)} T^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1}\left(1+o(1)\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Из формул (5.18), (5.21) и (5.22) получаем требуемый результат.

Замечания. (a) Мы анализируем поведение аппроксимации при $\alpha_1, \alpha_2 \to 1/4$.

Во-первых, заметим, что асимптотическая формула первого порядка имеет полюс в точке $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 = 1/2$. В частности, обозначая $\beta := \beta_1 + \beta_2$, и подставляя переменную $\lambda^2 = u$, имеем

$$\begin{aligned} 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, d\lambda &= 2\pi C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^{2(\alpha_1+\alpha_2)}(1+\lambda^2)^{\beta_1+\beta_2}} d\lambda \\ &= 4\pi C_1 C_2 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{-2\alpha}}{(1+\lambda^2)^{\beta}} d\lambda \\ &= 2\pi C_1 C_2 \int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2-\alpha}}{(1+u)^{\beta}} du. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Применяя формулу (см., например, [7], #856.11)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(1+\lambda)^{m+n}} d\lambda = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m > 0,\ n > 0, \tag{5.24}$$

при $m = 1/2 - \alpha$ и $n = \beta - m = \alpha + \beta - 1/2$, из формулы (5.23) получим

$$(5.25)\quad 2\pi C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, d\lambda = 2\pi C_1 C_2 \frac{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-1/2)}{\Gamma(\beta)}.$$

Тогда, используя разложение Лорана гамма функции $\Gamma(1/2-\alpha)$ вокруг полюса $\alpha = 1/2$, из формулы (5.25) получаем

$$(5.26)\quad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, d\lambda = \frac{4\pi C_1 C_2}{1-2\alpha} + O(1) \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \to 1/2.$$

Однако, легко видеть, что асимптотическое поведение члена второго порядка $C(\alpha_1, \alpha_2)$ (см. (5.4)) при $\alpha_1, \alpha_2 \to 1/4$ проявляется следующим образом

$$\begin{aligned} C(\alpha_1,\alpha_2) &= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \left[\frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\right] \\ &= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos^2(\pi/4)[\Gamma(1/2)]^2} \left[\frac{1}{1-2\alpha} + O(1)\right] \\ (5.27)\qquad &= \frac{4\pi C_1 C_2}{1-2\alpha} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, полюс аппроксимации первого порядка исчезает, так что

$$(5.28)\qquad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, d\lambda - \frac{C(\alpha_1,\alpha_2)}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

ограничена при $\alpha_1, \alpha_2 \to 1/4$.

Это поведение объясняет почему аппроксимация второго порядка производит аппроксимацию равномерно хорошую по $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1/4]$, включая границы области.

(b) Эквивалентность второго порядка имеет место вдоль произвольного луча, для которого $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \to 1/2$.

Действительно, пусть $\alpha_1^0 \in [0, 1/2]$ – любое фиксированное число такое, что $\alpha_1 \to \alpha_1^0$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \to 1/2$, тогда представление (5.26) для асимптотического члена первого порядка продолжает выполняться.

С другой стороны, используя формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sigma n(\pi z)$ при $z = 2\alpha_1^0$, имеем из формулы (5.4) при $\alpha_1 \to \alpha_1^0$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \to 1/2$

$$C(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1\pi)\cos(\alpha_2\pi)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \left[\frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\right]$$

$$= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1^0\pi)\cos[(1-2\alpha_1^0)\pi/2]\Gamma(2\alpha_1^0)\Gamma(1-2\alpha_1^0)}\frac{1}{1-2\alpha} + O(1)$$
$$= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1^0\pi)\sigma n(\alpha_1^0\pi)}\frac{\sigma n(2\alpha_1^0\pi)}{\pi}\frac{1}{1-2\alpha} + O(1)$$
$$= \frac{4\pi C_1 C_2}{1-2\alpha} + O(1),$$

и имеет место эквивалентность второго порядка.

Таким образом, в этом специальном случае, асимптотическое разложение второго порядка удаляет особенность и обеспечивает существенно лучшую аппроксимацию к исходному функционалу.

Abstract. The paper establishes error orders for integral limit approximations to the traces of products of truncated Toeplitz operators generated by integrable real symmetric functions defined on the real line. These approximations and the corresponding error bounds are of importance in the statistical analysis of continuous-time stationary processes (asymptotic distributions and large deviations of Toeplitz type quadratic functionals, estimation of the spectrum, etc.). The results improve the rates obtained by the authors (in an earlier paper). An explicit second-order asymptotic expansion is found for the trace of a product of two truncated Toeplitz operators generated by the spectral densities of continuous-time stationary fractional Riesz-Bessel motions. The order of magnitude of the second term in this expansion is shown to depend on the long-memory parameters of the processes. Also, it is shown that the pole in the first-order approximation is removed by the second-order term, which provides a substantially improved approximation to the original functional.

Список литературы

[1] N. I. Akhiezer, *Theory of Approximation* (Frederick Ungar, New York, 1956).

[2] V.V. Anh, J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, "Possible long-range dependence in fractional random fields". Journal of Statistical Planning and Inference, **80**, 95-110 (1999).

[3] V. V. Anh, N. N. Leonenko, R. McVinish, "Models for Fractional Riesz-Besses Motion and Related Processes". Fractals, **9**, 329-346 (2001).

[4] F. Avram, "On Bilinear Forms in Gaussian Random Variables and Toeplitz Matrices". Probab. Th. Rel. Fields, **79**, 37-45, 1988.

[5] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, New York, 1989).

[6] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation I*, (Academic Press, New York, 1971).

[7] H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, (The Macmillan Company, New York, 1961).

[8] R. Fox, M. S. Taqqu, "Central Limit Theorem for Quadratic Forms in Random Variables Having Long-Range Dependence", Probab. Th. Rel, Fields, **74**, 213-240 (1987).

[9] J. Gao, V. Anh, C. Heyde, Q. Tieng, "Parameter Estimation of Stochastic Processes with Long-range Dependence and Intermittency". Journal of Time Series Analysis, **22**, 517-535 (2001).

[10] M. S. Ginovian, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals on Spectral Density with Zeros", Theory Probab. Appl., **33**, 315-322 (1988).

[11] M. S. Ginovian, "On Estimate of the Value of the Linear Functional in a Spectral Density of Stationary Gaussian Process", Theory Probab. Appl., **33**, 777-781 (1988).

[12] M. S. Ginovian, "A Note on Central Limit Theorem for Toeplitz Type Quadratic Forms in Stationary Gaussian Variables", Izv. NAN Armenii, Matematika [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)] **28**, 78-81 (1993).

[13] M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probab. Th. Rel. Fields, **100**, 395-406 (1994).

[14] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, "On the Central Limit Theorem for Toeplitz Quadratic Forms of Stationary Sequences". Theory Probab. and Appl. **49**, 612-628 (2004).

[15] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, "Limit Theorems for Toeplitz Quadratic Functionals of Continuous-Time Stationary Process". Probab. Theory Rel. Fields, **138**, 551-579 (2007).

[16] L. Giraitis, D. Surgailis, "A Central Limit Theorem for Quadratic Forms in Strongly Dependent Linear Variables and its Application to Asymptotical Normality of Whittle's Estimate", Probab. Th. Rel. Fields, **86**, 87-104 (1990).

[17] И. З. Гоберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в Гильбертовом пространстве* (Наука, Москва, 1965).

[18] U. Grenander, G. Szegö, *Toeplitz Forms and Their Applications* (University of California Press, 1958).

[19] R. Z. Hasminskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals of a Spectral Density Function", Probab. Th. Rel. Fields, **73**, 447-461 (1986).

[20] I. A. Ibragimov, "On Estimation of the Spectral Function of a Stationary Gaussian Process", Theory Probab. and Appl., **8** (4), 391-430 (1963).

[21] A. Inoue, Y. Kasahara, "On the Asymptotic Behavior of the Prediction Error of a Stationary Process", in: *Trends in Probability and Related Analysis*, 207-218, N. Kono and N.R. Shieh, Ed. (World Scientific, River Edghe, NJ, 1999).

[22] O. Lieberman, A. Philips, "Error Bounds and Asymptotic Expansions for Toeplitz Product Functionals of Unbounded Spectra". Journal of Time Series Analysis, **25**, 733-753 (2004).

[23] M. Rosenblatt, "Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Toeplitz Forms", Journal of Math. and Mech., **11** (6), 941-950 (1962).

Поступила 13 мая 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2008, стр. 18-28

О СХОДИМОСТИ ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМЕ УОЛША В ПРОСТРАНСТВЕ $C(0,1)$

Г. АМИРХАНЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *a_gagik@mail.ru*

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространстве $C(0,1)$. Приведены достаточные условия для равномерной сходимости гриди алгоритма по системе Уолша. Доказано существование функции, удовлетворяющей более сильным условиям, для которой последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша расходится в точке 0.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F = \{f_n\}$ – полная, минимальная, нормированная система в Банаховом пространстве X и $G = \{g_n\}$ – ее сопряженная система. Слабый гриди алгоритм по системе F определяется следующим образом. Пусть $t \in (0,1]$ фиксировано и функция $f \in X$. Обозначим через $\Lambda_m(t)$ множество из m индексов, для которого справедливо неравенство:

$$\min_{k\in\Lambda_m(t)} |c_k(f)| \geq t \max_{k\notin\Lambda_m(t)} |c_k(f)|,$$

где $c_k(f) = \langle g_k, f\rangle$, и определим

$$G_m^t(f) := G_m^t(f,F) := \sum_{k\in\Lambda_m(t)} c_k(f) w_k,$$

которое называется слабым гриди аппроксимантом функции f по системе F. В случае $t = 1$

$$G_m(f) = G_m(f,F) := G_m^1(f,F)$$

называется гриди аппроксимантом функции f. Вопросы сходимости гриди алгоритма по тригонометрической системе изучались Корнером [1, 2], Темляковым и Конягином [3, 4, 5]. В работе автора [6] эти вопросы рассмотрены для системы Уолша $\mathcal{W} = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $L_p(0,1)$.

В настоящей работе мы приводим аналоги некоторых результатов Конягина и Темлякова [5] для системы Уолша в пространстве непрерывных функций $C(0,1)$. Для любой функции $f \in L_1(0,1)$ обозначим через $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ убывающую перестановку последовательности $\{|c_k(f)|\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $c_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша.

Теорема 1. *Пусть убывающая последовательность $\{A_n\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{M<n\le e^M} A_n = o(1) \quad \textit{при} \quad M \to \infty.$$

Тогда для каждой функции $f \in C(0,1)$ такой, что $a_n(f) \le A_n$, $n = 1,2,\dots$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - G_m^t(f,\mathcal{W}) \right\|_{\infty} = 0.$$

Ясно, что последовательность $\{A_n\}$ может удовлетворять условию теоремы 1 и не быть суммируемой. Из следующей теоремы, в частности, следует, что существует непрерывная функция, гриди алгоритм которой по системе Уолша равномерно сходится, а ряд Фурье-Уолша расходится в некоторой точке.

Теорема 2. *Пусть убывающая последовательность положительных чисел A_n, $n = 1,2,\dots$ не суммируема. Тогда существует непрерывная функция f такая, что $a_n(f) \le A_n$, для которой последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша расходится в точке* 0.

Теорема 1 доказывается аналогично случаю тригонометрической системы (см. [5]), в обосновании нуждается только доказанная в следующем параграфе лемма 2.

Ниже мы докажем теорему 2.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что система Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} \left(r_i(x)\right)^{\varepsilon_i} \quad \text{если} \quad n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i \quad (\varepsilon_i = 0 \,\text{или}\, 1),$$

где $\{r_i(x)\}$ – система Радемахера. Ядро Дирихле для системы Уолша определяется следующим образом:

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x).$$

Для функции $f(x)$ определим $\omega(f)$ следующим образом:

$$\omega(f,x)=\lim_{\delta\to 0+}\sup_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|,$$
$$\omega(f)=\sup_x \omega(f,x).$$

Рассмотрим поле $F_2:=\{0;1\}$, где сложение и умножение определяются по модулю 2.

Лемма 1. *Пусть* $\epsilon_i^j\in F_2$ $(i=1,2,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$, $n\ge m$ *и* $b_j\in F_2$ $(j=1,\dots,m)$. *Тогда, если система линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^j x_i=b_j,\quad j=1,\dots,m,$$

имеет хотя бы одно решение в поле F_2, *то она имеет как минимум* 2^{n-m} *разных решений.*

Доказательство. Так как система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то из переменных $x_1,x_1,\dots,x_n$, как минимум, $n-m$ независимы. Следовательно, задавая каждому из них значения 0 или 1, получим разные решения системы линейных уравнений. Таким образом, будем иметь 2^{n-m} разных решений.

Лемма 2. *Пусть функция* f, $\|f\|_\infty=1$ *имеет вид*

$$f=\sum_{k\in\Lambda}c_k w_k(x),\quad |\Lambda|\le m.$$

Тогда для всякой функции g *такой, что* $\|g\|_2\le 2^{-m/2-1}$ *справедливо неравенство*

$$\|f+g\|_\infty\ge 1/2.$$

Доказательство. Пусть $x_0\in[0,1]$ и $y_0=f(x_0)$, докажем, что

$$m\{x:f(x)=y_0\}\ge 2^{-m}.$$

Пусть $\{x_i\}$ – последовательность коэффициентов двоичного разложения числа x (конечная в случае двоично-рационального x), т.е.

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}x_i 2^{-i-1},\quad x_i=0 \text{ или } 1.$$

Воспользуемся следующим представлением функции Уолша (см. [7], 1.2.12):

$$w_n(x)=(-1)^{\sum_{i=0}^k \epsilon_i x_i},$$

где $n = \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i$ и $\epsilon_i = 0$ или 1.

Пусть

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j w_{n_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j (-1)^{\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i}.$$

Значение f в точке x зависит от четности числа $\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i$. Положим

$$b_j(x) := \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i \mod 2, \quad b_j(x) = 0 \text{ или } 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как $y_0 = f(x_0)$, то равенство $f(x) = y_0$ будет выполняеться во всех точках x, для которых

$$\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i = b_j(x_0) \mod 2, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Можно считать, что $k \geq m$, в противном случае можно добавить нулевые коэффициенты: $\epsilon_i^j = 0$, $i > k$. Систему уравнений (2.1) можно рассмотреть в поле F_2. Согласно лемме 1 имеем 2^{k+1-m} разных решений уравнений (2.1), а каждому решению $x_0, x_1, \ldots, x_k$ соответствует множество

$$\left[\sum_{i=0}^{k} x_i 2^{-i-1}, \sum_{i=0}^{k} x_i 2^{-i-1} + 2^{-k-1}\right)$$

меры 2^{-k-1}, для которого $f(x) = y_0$. Заметим, что эти множества попарно не пересекаются. Таким образом, имеем множество меры $2^{k+1-m} 2^{-k-1} = 2^{-m}$, на котором $f(x) = y_0$. Пусть $y_0 = 1 = \|f\|_\infty$ и $A = \{x : f(x) = 1\}$. Тогда

$$mA \geq 2^{-m},$$

где mA – Лебегова мера множества A. Предположим, что

$$\|f + g\|_\infty < 1/2.$$

Тогда на множестве A будем иметь, что $g(x) < -1/2$. Следовательно,

$$\|g\|_2 \geq \left(\int_A |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} > \left(\int_A \frac{1}{4} dx\right)^{1/2} \geq 2^{-m/2-1}.$$

Что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Через

$$S_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} c_n(f) w_n(x)$$

обозначим частную сумму ряда Фурье-Уолша интегрируемой функции f.

Лемма 3. *Пусть убывающая последовательность* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \searrow 0$ *не суммируема. Тогда для произвольного* $k \in \mathbb{N}$ *существует полином Уолша* q *и натуральное число* N *такие, что*

$$a_n(q) \leq A_n, \quad n \geq 1, \tag{2.2}$$

$$\|q\|_{\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty, \tag{2.3}$$

$$S_N(q, 0) \to \infty \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Константы Лебега для системы Уолша

$$L_n := \int_0^1 |D_n(t)| dt$$

удовлетворяют неравенству

$$L_{n_k} > C \ln n_k$$

для некоторой последовательности n_k (см. [7], 2.2.5). Пусть

$$p_k(x) := sgn(D_{n_k}(x)).$$

Тогда

$$|p_k(x)| \leq 1 \quad \text{и} \quad p_k(x) D_{n_k}(x) = |D_{n_k}(x)|, \quad x \in [0, 1]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что p_k есть полином по системе Уолша степени не больше $2n_k$. Далее, имеем

$$S_{n_k}(p_k, 0) = \int_0^1 p_k(t) D_{n_k}(t) dt = \int_0^1 \big|D_{n_k}(t)\big| dt = L_{n_k}. \tag{2.6}$$

Откуда получим

$$|c_n(p_k)| \leq 1. \tag{2.7}$$

Можно считать, что $A_n \to 0$. Имеем

$$\sum_n A_{2ln} = \infty, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Поэтому для $l = n_k$ можно найти числа $m_2 > m_1$ такие что

$$(\ln l)^{-1/2} \leq \sum_{m_1 < n \leq m_2} A_{2ln} \leq 2(\ln l)^{-1/2}. \tag{2.8}$$

Пусть $p_k = \sum_{j=0}^{k_0} a_j w_j$, где $k_0 < 2l$. Положим

$$p_k^s(x) := \sum_{j=0}^{k_0} a_j w_{2^s j}(x). \tag{2.9}$$

Если рассматривать функции Уолша на всей числовой оси как периодические функции с периодом 1, то справедливы равенства (см. [7], 1.1.9)

$$w_{2^s j}(x) = w_j(2^s x)$$

$$p_k^s(x) = p_k(2^s x). \tag{2.10}$$

Определим

$$q_n(x) := A_{2ln} w_n(x) p_k^s(x), \tag{2.11}$$

где $2^s > m_2$. Возьмем

$$q(x) := \sum_{m_1 < n \le m_2} q_n(x)$$

Заметим, что спектры полиномов q_n не пересекаются. Действительно, поскольку $n < 2^s$, слагаемые в q_n будут иметь вид

$$w_n w_{2^s j} = w_{n \oplus 2^s j} = w_{n + 2^s j}.$$

Поэтому для коэффициентов Фурье-Уолша функции q справедливо

$$|c_{n+2^s j}(q)| = |c_j(p_k) A_{2ln}| \le A_{2ln} \le A_{2ln-j}, \quad 0 \le j \le k_0,$$

Заметим, что индексы $2ln - j$ при $m_1 < n \le m_2$ и $0 \le j \le k_0$ различны и больше $2m_1$. Это доказывает (2.2). Из (2.5), (2.8), (2.10) и (2.11) получим

$$\|q\|_\infty \le \sum_{m_1 < n \le m_2} \|q_n\|_\infty \le \sum_{m_1 < n \le m_2} A_{2ln} \le 2(\ln l)^{-1/2},$$

откуда следует (2.3). Пусть $N = 2^s n_k + m_2$. Тогда

$$S_N(q_n, 0) = A_{2ln} S_N(w_n(x) p_k^s(x), 0) = A_{2ln} S_N(p_k^s(x), 0).$$

Используя (2.9) получим, что

$$S_N(q_n, 0) = A_{2ln} \sum_{j=0}^{n_k} a_j = A_{2ln} S_{n_k}(p_k, 0) = A_{2ln} L_{n_k} > C A_{2ln} \ln l.$$

Следовательно,

$$S_N(q, 0) = \sum_{m_1 < n \le m_2} S_N(q, 0) > C \sum_{m_1 < n \le m_2} A_{2ln} \ln l > C(\ln l)^{1/2}$$

(см. (2.8)), откуда следует (2.4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \searrow$ не суммируемая последовательность. По индукции построим последовательности полиномов Уолша $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$. Возьмем последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\epsilon_i\}$:

$$\frac{1}{2} = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha < 1 \quad \text{и} \quad \epsilon_i = 2^{-i}.$$

Используя лемму 3, построим полином q_1 так, чтобы выполнялись соотношения:

$$a_n(q_1) < \frac{1}{2} A_n, \quad n \geq 1, \tag{3.1}$$

$$\|q_1\|_\infty < \epsilon_0, \tag{3.2}$$

$$S_{N_1}(q_1, 0) > 1. \tag{3.3}$$

Функция q_1 кусочно постоянна и имеет разрывы в двоично рациональных точках. Пусть c одна из таких точек разрыва, тогда q_1 постоянна на некоторых двоичных интервалах $[a, c)$ и $[c, b)$. Рассмотрим последовательность вложенных двоичных интервалов

$$I_j = [a_j, c), \quad j = 0, 1, \ldots, l, \quad a = a_0 < a_1 < \ldots < c,$$

таких, что

$$|I_j| = \frac{1}{2}|I_{j-1}|, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

Тогда для некоторого $k > 0$

$$|I_j| = \frac{1}{2^{k+j}}, \quad j = 1, \ldots \tag{3.4}$$

Обозначим через X_I – характеристическую функцию интервала I и построим функцию вида

$$p_1 = \sum_{j=1}^{l} b_j X_{I_j}$$

так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\omega(q_1 + p_1, x)_{[a,b)} < \epsilon_1. \tag{3.5}$$

$$\|p_1\|_\infty \leq \omega(q_1), \tag{3.6}$$

$$a_n(q_1 + p_1) < \alpha_1 A_n, \tag{3.7}$$

$$S_{N_1}(q_1 + p_1, 0) > 1. \tag{3.8}$$

Для выполнения (3.5) и (3.6) достаточно, чтобы $\{b_j\}_{j=1}^{l}$ удовлетворяли условиям:

(i) b_j имеет тот же знак, что и $q_1(c+0) - q_1(c-0)$,

(ii) $|b_j| < \epsilon_1$, $j = 1, \ldots, l$,

(iii) $\omega(q_1, c) - \epsilon_1 < \sum_{j=1}^{l} |b_j| < \omega(q_1, c)$.

А условия (3.7) и (3.8) будут выполнены, если при достаточно маленьком β ($0 < \beta < \alpha_1 - \alpha_0$) мы будем иметь, что

$$a_n(p_1) < \beta A_{n_1+n}, \quad n > 0, \tag{3.9}$$

где

$$n_1 = \max\{n : a_n(q_1) \neq 0\}.$$

Действительно, тогда (3.8) будет следовать из (3.3), а (3.7) из (3.1), так как в силу определения n_1

$$a_n(q_1 + p_1) \leq a_n(q_1) + a_1(p_1) \quad \text{при} \quad n \leq n_1$$

и

$$a_n(q_1 + p_1) \leq a_{n-n_1}(p_1) \quad \text{при} \quad n > n_1.$$

Определим коэффициенты b_j

$$|b_j| = \frac{\beta}{2} A_{n_1+2^{k+j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{3.10}$$

(см. также (i)), и проверим выполнение условий (ii), (iii) и (3.9).

Условие (ii) очевидно выполняется, если число β достаточно мало. Возможность выбора числа l такого, чтобы имело место (iii) следует из (ii) и из того, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} A_{n_1+2^{k+j}}$ расходится. Действительно, в силу монотонности A_n

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{n_1+2^{k+j}} > \frac{1}{2^k} \sum_{j=n_1+2^k}^{\infty} A_j = \infty.$$

Для коэффициентов Фурье-Уолша функции p_1 имеем

$$c_n(p_1) = \int_0^1 w_n(x) p_1(x) dx = \int_{I_1} w_n(x) p_1(x) dx. \tag{3.11}$$

Если $n < 2^k$, то (см. (3.10), (3.11))

$$\left|c_n(p_1)\right| = \left|\int_{I_1} p_1(x) dx\right| = \sum_{j=1}^{l} |b_j||I_j| < \beta A_{n_1+2^{k+1}} < \beta A_{n_1+n+1}.$$

Пусть $a_i(p_1) = |c_{k_i}(p_1)|$. Так как k_i при $0 < i \leq n$ неотрицательны и различны, то для некоторого $j \leq n$ справедливо $k_j \geq n - 1$. Учитывая монотонность $a_i(p_1)$ имеем

$$a_n(p_1) \leq a_j(p_1) = |c_{k_j}(p_1)| \leq \beta A_{n_1+n}.$$

Пусть теперь $2^{k_1} \le n < 2^{k_1+1}$. Тогда

$$c_n(p_1) = \int_0^1 w_n(x)p_1(x)dx = \int_0^1 w_n(x)\sum_{j=1}^{l} b_j X_{I_j}(x)dx = \sum_{j=k_1}^{l} b_j \int_{I_j} w_n(x)dx$$

при $1 \le k_1 < l$. Следовательно,

$$\left|c_n(p_1)\right| \le \left|\int_{I_{k_1}} p_1(x)dx\right| = \sum_{j=k_1}^{l} |b_j||I_j| < \beta A_{n_1+2^{k_1+1}} \le \beta A_{n_1+n+1}$$

откуда, как и в случае $n < 2^k$ следует (3.9). Таким образам, мы построили полином p_1, удовлетворяющий условиям (3.5)-(3.8).

Если повторить этот процесс для кождой точки разрыва функции q_1, то можно получить

$$\omega(q_1 + p_1, x)_{[0,1]} < \epsilon_1 \tag{3.12}$$

вместе с условиями (3.6)-(3.8).

Допустим полиномы p_k и q_k построены. Применив лемму 3 для последовательности $A_{n+m_{k+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$, найдем полином q_{k+1} такой, что:

(a) любой коэффициент полинома q_{k+1} по модулю меньше, чем коэффициенты полинома

$$f_k := \sum_{i=1}^{k}(q_i + p_i),$$

(b) спектры у q_{k+1} и f_k не пересекаются, т.е.

$$\min\{n : c_n(q_{k+1}) \neq 0\} > \max\{n : c_n(f_k) \neq 0\},$$

(c) выполняются условия:

$$a_n(q_{k+1}) < \alpha_k A_{n+m_{k+1}}, \quad n > 0, \tag{3.13}$$

$$\|q_{k+1}\|_\infty < \epsilon_k, \tag{3.14}$$

$$S_{N_{k+1}}(q_{k+1}, 0) > 2^k, \tag{3.15}$$

где

$$m_{k+1} = \max\{n : a_n(f_k) \neq 0\}.$$

Затем, аналогично случаю $k = 1$, построим полином p_{k+1} так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\omega(f_{k+1}, x)_{[0,1]} < \epsilon_{k+1}, \tag{3.16}$$

$$\|p_{k+1}\|_\infty \leq \omega(f_k + q_{k+1}) \leq 2\epsilon_k, \tag{3.17}$$

$$a_n(f_{k+1}) < \alpha_{k+1} A_n, \tag{3.18}$$

$$S_{N_{k+1}}(q_{k+1} + p_{k+1}, 0) > 2^k. \tag{3.19}$$

Последовательности $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ построены. Положим

$$f := \sum_{i=1}^{\infty}(q_i + p_i) = \lim_{i\to\infty} f_i. \tag{3.20}$$

Равномерная сходимость этого ряда следует из (3.14) и (3.17). Докажем непрерывность функции f. Пусть $x_0 \in [0, 1]$. Из (3.16) следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \epsilon_k \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Следовательно (см. (3.14) и (3.17))

$$|f(x) - f(x_0)| < |f_k(x) - f_k(x_0)| + 2^{-k+3} < \epsilon_k + 2^{-k+3}, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Непрерывность доказана.

Из ((3.18) и (3.20) следует, что $a_n(f) < A_n$. Остается увидеть, что последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша функции f расходятся в точке 0. Это следует из (3.19), если учесть, что

$$\min(n : c_n(q_{k+1} + p_{k+1}) \neq 0) > \max(n : c_n(f_k) \neq 0).$$

Abstract. The paper studies convergence of the greedy algorithm by the Walsh system in the space $C(0,1)$. Some sufficient conditions for uniform convergence are given. It is proved that there exists a function satisfying more restrictive conditions, for which the sequence of the partial sums of the Fourier-Walsh series diverges at the point 0.

Список литературы

[1] T. W. Körner, "Divergence of Decreasing Rearranged Fourier Series", Ann. of Math., **144**, 167-180 (1996).

[2] T. W. Körner, "Decreasing Rearranged Fourier Series", J. Fourier Analysis and Applications, **5**, 1-19 (1999).

[3] V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Foundations of Computational Mathematics, **3** (1), 33-107 (2003).

[4] V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation", Constructive Approximation, **107**, 569-587 (1998).
[5] V. N. Temlyakov and S.V. Konyagin, "Convergence of Greedy Approximation II, The trigonometric system", Studia Math., **159** (2), 161-184 (2003).
[6] Г. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространствах L_p", Изв. НАН Армении, Математика. **43** (3), 127-134 (2008).
[7] Б. И. Голубов, *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, Москва, 1987).

Поступила 18 июня 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2008, стр. 29-37

BLASCHKE STRUCTURE FOR A SPECIAL AFFINE IMMERSION

M. FAGHFOURI, A. HAJI BADALI AND E. POURREZA

University of Tabriz, Tabriz, Iran
E-mails: *faghfouri@tabrizu.ac.ir, a_haji@tabrizu.ac.ir, pourreza@tabrizu.ac.ir*

Аннотация. In this paper we determine a Blaschke structure for affine immersion of Euclidian and Hyperbolic type for plane equi-affine curve. In particular, we consider this structure in the case where the Ricci tensor of affine immersion is constant and give a necessary and sufficient condition for Ricci tensor to be constant.

1. INTRODUCTION

The paper studies nondegenerate affine surfaces in affine space $\mathbb{R}^3$. Such surfaces are endowed with an affine connection ∇, a symmetric bilinear form h which is called the affine metric, and a volume form θ. The concept of affine immersion is presented in Section 2. One of the big problems here is to understand those surfaces for which the immersion is Blaschke. The purpose of this paper is to determine Blaschke structure for affine immersion.

Patrick Lehebel investigated in [7] affine surfaces (and hypersurfaces) which are affine rotation surfaces. In 3-space these surfaces can be characterized by the fact that all affine normals (in the Blaschke sense) intersect a fixed straight line (the axis) and the section with planes containing the axis are shadow boundries with respect to parallel light. In case the axis is a proper line (not at infinity) there are three types of surfaces: elliptic, hyperbolic, and parabolic. Friedrich Manhart in [8] investigated the problem with the additional property of vanishing affine Gauss curvature. But there is no classification of affine revolution surfaces, whose generators are equi-affine curves, so in this work we consider those surfaces from this point of view.

This paper consists of five sections. In Section 2 we give some necessary preliminaries. In Section 3 we introduce the concepts of an Euclidian (or Hyperbolic) affine immersion with respect to a curve. Then we compute its Ricci tensor component, second fundamental form, and its shape operator.

In Proposition 2 using the concept of affine arc-length we give a necessary and sufficient condition for Ricci tensor to be constant in terms of the components of the base curve α. In Theorem 2 we describe those curves for which their related Ricci tensor of immersion f is constant. Section 4 is devoted to transversal and the second fundamental form, and points at a case where the related affine immersion into the produced transversal is Blaschke .

2. PRELIMINARIES

In this section we introduce the general notion of affine immersion and some terminology and definitions of affine differential geometry. We shall always assume that the given affine connections have zero torsion.

We consider two differentiable manifolds with affine connections ($\bar{M}$,$\bar{\nabla}$) and (M,∇) of dimensions m and n, respectively. Let $k = m - n$.

Definition 1. *A differentiable immersion $f : M \to \bar{M}$ is said to be an affine immersion if the following condition is satisfied. There is a k-dimensional differentiable distribution N along $f : x \in M \to N_x$, a subspace of $T_{f(x)}(\bar{M})$, such that*

$$T_{f(x)}(\bar{M}) = f_*(T_x(M)) \oplus N_x, \tag{2.1}$$

$$(\bar{M}r\nabla_X f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + (\alpha(X,Y))_x, \tag{2.2}$$

at each point $x \in M$ where $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and $\alpha(X,Y) \in N_x$.

Since the given distribution $x \in M \to N_x$ is differentiable, each point x has a local basis, namely, a system of k differentiable vectors $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ on a neighborhood U of x that span N_y at each point $y \in U$. This distribution may be regarded as a bundle of transversal $k-$space. Now we explain the main proposition of the affine immersion. Note that for $k = 1$, ξ_1 is called a transversal vector field.

Proposition 1. *For a hypersurface immersion $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, suppose we have a transversal vector field ξ on M. Then we have a torsion-free induced connection ∇^ξ satisfying*

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla^\xi_X Y) + h^\xi(X,Y)\xi \qquad \textit{(Gauss)}, \tag{2.3}$$

$$D_X \xi = -f_*(S^\xi X) + \tau^\xi(X)\xi \qquad \textit{(Weingarten)}, \tag{2.4}$$

where h^ξ is a symmetric bilinear function on the tangent space $T_x(M)$ and D is the flat connection of $\mathbb{R}^3$, while S^ξ is a tensor of type $(1,1)$ called the affine shape operator, and τ^ξ is a 1-form, called the transversal connection form.

Proof: See [9]. □

Definition 2. *For a hypersurface immersion $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, a transversal vector field ξ is said to be equi-affine if $D_X\xi$ is tangent to M for each $X \in T_xM$, $x \in M$.*

Definition 3. *The Ricci tensor of connection ∇ is defined by*

$$Ric(Y, Z) = trace\{X \to R(X, Y)Z\}.$$

Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a nondegenerate immersion. If we choose an arbitrary transversal vector field ξ, then we obtain on M the affine fundamental form h, the induced connection ∇, and the induced volume element θ^ξ. By an appropriate choice of ξ we achieve the following two goals:

(1) (∇, θ^ξ) is an equi-affine structure, that is $\nabla\theta^\xi = 0$;

(2) θ^ξ coincides with the volume element ω_h of the nondegenerate metric h^ξ.

Theorem 1. *Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a nondegenerate hypersurface immersion. For each point $x_0 \in M$, there is a transversal vector field defined in a neighborhood of x_0 satisfying the conditions* (2.1) *and* (2.2) *above. Such a transversal vector field is unique up to sign.*

Proof: See[9]. □

Definition 4. *A transversal vector field satisfying* (2.1) *and* (2.2) *is called affine normal field or Blaschke normal field. Locally, it is uniquely determined up to sign. For each point $x \in M$ we take the line through x in the direction of the affine normal vector ξ_x. This line is independent of the choice of sign for ξ, and is called the affine normal through x.*

3. EUCLIDIAN (HYPERBOLIC) AFFINE IMMERSION IN $\mathbb{R}^3$

In this section we consider affine immersions $f : M \to \mathbb{R}^3$, where M is two dimensional affine space. In that case f is called a hypersurface immersion and M is called a hypersurface.

Now let $\{u, v\}$ be a flat coordinate system for affine space $M :=\mathbb{R}^2$ with basis $\partial_u := \frac{\partial}{\partial u}$ and $\partial_v := \frac{\partial}{\partial v}$. Let $\xi = (\cos u, \sin u, 0)$ be a transversal vector field for affine immersion $f : M \to \mathbb{R}^3$ such that

$$f(u, v) = \big(\zeta(v)\cos u, \zeta(v)\sin u, \eta(v)\big), \quad \eta' \neq 0.$$

Definition 5. *The affine immersion f is called Euclidian affine immersion with generator $\alpha(v) = (\zeta(v), \eta(v))$.*

Now suppose that

$$\xi = (\cosh u, \sinh u, 0)$$

is a transversal vector field for affine immersion $f : M \to \mathbb{R}^3$ with

$$f(u, v) = \big(\zeta(v)\cosh u, \zeta(v)\sinh u, \eta(v)\big).$$

Definition 6. *In the above notation f is called Hyperbolic affine immersion with generator $\alpha(v) = (\zeta(v), \eta(v))$.*

Lemma 1. *For the Ricci tensor of the induced connection (determined by f and ξ) are*

$$R_{11} = \frac{\zeta'\eta'' - \zeta''\eta'}{\zeta\eta'}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = 0. \tag{3.1}$$

Proof: From Gauss equation we have

$$D_{\partial_u} f_*(\partial_u) = f_*(\nabla^{\xi}_{\partial_u}\partial_u) + h(\partial_u, \partial_u)\xi,$$
$$D_{\partial_u} f_*(\partial_v) = f_*(\nabla^{\xi}_{\partial_u}\partial_v) + h(\partial_u, \partial_v)\xi,$$

and

$$D_{\partial_v} f_*(\partial_v) = f_*(\nabla^{\xi}_{\partial_v}\partial_v) + h(\partial_v, \partial_v)\xi.$$

Therefore

$$\begin{array}{llll} \Gamma^1_{11} = 0, & \Gamma^1_{12} = \zeta'/\zeta, & \Gamma^2_{11} = 0, & \Gamma^2_{12} = 0, \\ \Gamma^1_{21} = \zeta'/\zeta, & \Gamma^1_{22} = 0, & \Gamma^2_{21} = 0, & \Gamma^2_{22} = \eta''/\eta', \end{array} \tag{3.2}$$

where Γ^k_{ij}s are the components of ∇^{ξ}, that is,

$$\nabla^{\xi}_{\partial x^i}\partial x^j = \Gamma^k_{ij}\partial x^k$$

where $x^1 := u$ and $x^2 := v$. For calculations concerning Γ^k_{ij} we refer to [1, 4]. In coordinates, the affine curvature and Ricci tensors of the connection ∇^{ξ} are

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} &= \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}, \\ R_{ij} &= R^k_{ikj}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

andwe have

$$R^1_{122} = -R^2_{121} = \frac{\zeta'\eta'' - \zeta''\eta'}{\zeta\eta'}.$$

For other cases

$$R^i_{jkl} = 0,$$

therefore from Ricci equation (3.3)) we get

$$R_{11} = \frac{\zeta'\eta'' - \zeta''\eta'}{\zeta\eta'}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = 0$$

that completes the proof of lemma. □

In terms of Gauss formula for Euclidian immersion we have

$$h^\xi(\partial_u, \partial_u) = \zeta \ , \ h^\xi(\partial_v, \partial_v) = \frac{\zeta''\eta' - \zeta'\eta''}{\eta'}, \tag{3.4}$$

and

$$h^\xi(\partial_u, \partial_v) = h^\xi(\partial_v, \partial_u) = 0.$$

For Hyperbolic immersion the components of h^ξ are the same as for Euclidian, except $h^\xi(\partial_u, \partial_u) = -\zeta$.

By Weingarten formula we have the components of the shape operator:

$$S^\xi_{11} = 1/\zeta, \quad S^\xi_{22} = 0, \tag{3.5}$$

and

$$S^\xi_{12} = S^\xi_{21} = 0. \tag{3.6}$$

Corollary 1. *The transversal vector field ξ both for Euclidian and Hyperbolic affine immersions is equi-affine.*

Definition 7. *The parameter of differential curve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ is called affine arc-length if $|\alpha' \wedge \alpha''| = 1$ [2, 3].*

In other words, for $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, then the parameter t is affine arc-length if

$$x'y'' - y'x'' = 1.$$

Definition 8. *A curve α is called equi-affine, if its parameter is arc-length parameter* [2, 5].

Proposition 2. *Let f be an Euclidian affine immersion with equi-affine curve generator $\alpha(v) = (\zeta(v), \eta(v))$. Then the components of Ricci tensor of immersion f are constant if and only if ζ and η satisfy the equation*

$$\zeta\eta' = c \neq 0. \tag{3.7}$$

Proof: The parameter of the generator α for affine immersion f is the arc-length, therefore $\zeta'\eta'' - \zeta''\eta' = 1$. From equation (3.1) if $R_{11} = k$ then $\zeta\eta' = 1/k = c$, and vice versa. □

By equation (3.7) and the fact that α has an affine arc-length parameter, we have:

$$-c(\zeta')^2 - c\zeta''\zeta = \zeta^2. \tag{3.8}$$

Theorem 2. *If the components of Ricci tensor of Euclidian (or Hyperbolic) affine immersion are constant, then we have*

$$\zeta = \pm\sqrt{\varphi}, \quad \eta = \pm \int k^{-1}\varphi^{-1/2}\, dv. \tag{3.9}$$

Proof: Setting in the equation (3.8) $\varphi = \zeta^2$, we get

$$c\varphi'' + 2\varphi = 0.$$

Under the assumption $c = 1/k$, solving the above differential equations yields

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \cos\sqrt{2k}\, v + c_2 \sin\sqrt{2k}\, v, & k > 0, \\ \varphi &= c_1 \cosh\sqrt{-2k}\, v + c_2 \sinh\sqrt{-2k}\, v, & k < 0. \end{aligned}$$

It is easy to show that

$$\zeta = \pm\sqrt{\varphi}, \quad \eta = \pm \int k^{-1}\varphi^{-1/2}\, dv. \tag{3.10}$$

□

4. BLASCHKE STRUCTURE

A well-known choice of relative normals, concerning the induced volume element θ^ξ and the second fundamental form h^ξ, comes from the fact, that there exists a unique choice (up to a sign) of a relative normal ξ that satisfies

$$\theta^\xi = \omega_h,$$

where ω_h is the volume element with respect to h^ξ. In this case, one calls ξ the affine normal, h^ξ the affine metric, and f a Blaschke immersion.

In this section we introduce the Blaschke structure for Euclidian and Hyperbolic immersions that we defined in previous section. Accordingly to [9], we have to find the affine normal field. We first do that procedure for Euclidian immersion.

- **Step 1.:** We choose $\xi = (\cos u, \sin u, 0)$ for a tentative transversal vector field. As we computed in the previous section and from Proposition 1, necessarily $\tau^\xi = 0$.
- **Step 2.:** From the computations of Section 2 and from the equation (3.4) we conclude that the second fundamental form h is nondegenerate.

Step 3.: For ξ as in Step 1, the induced volume element θ^{ξ} we write as

$$\theta^{\xi}\big(\partial_u, \partial_v\big) = \omega\big(f_*(\partial_u), f_*(\partial_v), \xi\big),$$

hence

$$\theta^{\xi}\big(\partial_u, \partial_v\big) = \eta'(v)\zeta(v).$$

Step 4.: We introduce a unimodular basis $\{X_1, X_2\}$ with

$$\theta^{\xi}(X_1, X_2) = 1.$$

(special case of the statement that we have established for Ricci tensor in Proposition 2). This choice implies

Proposition 3. *If*

$$\eta'(v)\zeta(v) = 1, \tag{4.1}$$

then the basis $\{\partial_u, \partial_v\}$ is unimodular.

Proof: follows from the definition of unimodular basis. □

Step 5.: Taking $\phi = |\det_{\theta^{\xi}} h|^{\frac{1}{4}}$, we obtain

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{\zeta(\zeta''\eta' - \zeta'\eta'')}{\eta'}}.$$

Now let $\bar{\xi} = \phi\xi + Z$, where Z is to be determined from

$$\tau^{\xi} + \frac{1}{\phi}h^{\xi}(Z, \cdot) + d\log\phi = 0.$$

From the previous section $\tau^{\xi} = 0$, therefore this equation is simply $h(Z, X) = -X\phi$ for every X, so we choose a unimodular basis of Step 4 by taking $Z = a\partial_u + b\partial_v$ In this case we have

$$h^{\xi}(a\partial_u + b\partial_v, X) = -X\phi.$$

First by taking

$$X = \partial_u,$$

we obtain

$$ah^{\xi}(\partial_u, \partial_u) = a\zeta = 0,$$

therefore,

$$a = 0.$$

Secondly,

$$X = \partial_v,$$

so,

$$h^{\xi}(a\partial_u + b\partial_v, \partial_v) = -\partial_v \phi,$$

$$bh^{\xi}(\partial_v, \partial_v) = b\frac{\zeta''\eta' - \zeta'\eta''}{\zeta},$$

$$b = -\frac{\zeta}{4}\left(\frac{\zeta}{\eta'}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\zeta'\eta' - \eta''\zeta}{\eta'^2}\right),$$

therefore

$$Z = b\partial_v.$$

Step 6.: Once we get the affine normal field $\bar{\xi}$, it is easy to compute the affine metric $\bar{h} = h^{\xi}/\phi$, the affine shape operator S, and the induced connection ∇^{ξ}.

Theorem 3. *Let f be an Euclidian(Hyperbolic) affine immersion with equi-affine curve generator α, and ξ, h^{ξ} be transversal and second fundamental form respectively. The choice of ϕ, Z and $\bar{\xi} = \phi\xi + Z$ renders f Blaschke immersion.*

Proof: By Steps $1-6$ and the fact that α is an equi-affine curve we obtain

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{\zeta}{\eta'}}.$$

From Step 5 by a simple calculation we get $Z = b\partial_v$, where

$$b = -\frac{\zeta}{2}\left(\frac{\zeta}{\eta'}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\zeta'}{\eta'^2}\right).$$

As we saw in Step 6,

$$\bar{\xi} = \sqrt[4]{\frac{\zeta}{\eta'}}\,\xi + Z.$$

By taking $\bar{\xi}$ as above, f becomes a Blaschke immersion. $\square$

5. Acknowledgments

The authors would like to thank professor M. Toomanian and professor F. Manhart for help and encouragement through many invaluable discussion, suggestions, and stimulating questions during the preparation of this work. Finally, we are grateful to the referee for his/her comments and suggestions that helped to improve the manuscript.

Список литературы

[1] M. Do Carmo, *Differential Curve and Surface* (Prentice Hall, New Jersey, 1976).

[2] F. J. E. Dillen, L. C. A. Verstraelen, *Handbook of Differential Geometry, I* (North-Holland, 2000).

[3] R. B. Gardner, G. R. Wilkense, "The Fundamental Theorem of Curves Hypersurfaces in Centro-Affine Geometry", Bull. Belg.Math. Soc. **4**, 379-401 (1997).

[4] A. Gray, *Modern Diferential Geometry of Curves and Surface with Mathematica* (CRC Press, 1998).

[5] H. Guggenheimer, *Differential Geometry* (McGraw-Hill, New York 1963).

[6] C. I. Lee, "On Generalized Affine Rotation Surfaces", Res. Math., **27** 63-76 (1995).

[7] P. Lehebel, "Affine Rotation Surfaces and Hypersurfaces", in: *Geometry and Topology of Submanifolds, VIII* 198-208 (Brussels, 1995/Nordfjordeid, 1995), (World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996).

[8] F. Manhart, "Affine Rotational Surfaces with Vanishing Affine Curvature", J. Geom., **80** 166-178 (2004).

[9] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Gometry* (Cambridge University Press, 1994).

Поступила 4 февраля 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2007, стр. 38-54

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Э. А. МИРЗАХАНЯН И Н. Э. МИРЗАХАНЯН

Ереванский Государственный Университет

Аннотация. В статье приведены эквивалентные способы построения бесконечномерных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств вещественного гильбертова пространства. В допустимом классе K_0 -непрерывных отображений доказаны гомотопическая инвариантность этих групп и их изоморфизм, когда базисные точки принадлежат одной и той же компоненте K_0 -линейной связности.

1. ДОПУСТИМЫЙ КЛАСС K_0 -НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для построения содержательной теории бесконечномерной алгебраической топологии гильбертова пространства H класс всех непрерывных отображений между подмножествами гильбертова пространства является слишком широким. Например, многие основные теоремы классической топологии, в частности, теоремы Брауэра о неподвижной точке, инвариантности области, перестают быть справедливыми в гильбертовом пространстве.

Выход из этого положения заключаетя в том, что следует ограничить этот класс, т.е. рассматривать не все непрерывные отображения, а лишь более узкий класс непрерывных отображений. В частности, этот более узкий класс допустимых отображений должен обладать тем свойством, что, оставаясь в этом классе , невозможно сферу S стянуть в точку. Кажется естественным, принять в качестве такого класса отображений совокупность Q всех отображений вида $\lambda I + A$, где λ – действительное число, I – тождественное отображение гильбертова H пространства на себя, а A – вполне непрерывное отображение. Все же, класс Q не является удобным для построения бесконечномерной алгебраической топологии, поскольку этот класс является слишком узким. В самом деле, для того чтобы некоторый класс отображений был применим для построения бесконечномерной алгебраической топологии, нужно, чтобы он позволил перенести на случай гильбертова пространства стандартную гомотопическую технику, применяемую в конечномерных пространствах.

Следуя идеям Лере и Шаудера, в 1970 В. Г. Болтанский построил допустимый класс K_0 непрерывных отображений подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства, применимый для построения бесконечномерной алгебраической топологии в гильбертовом пространстве. Отображения класса K_0 , называемые K_0 -отображениями, локально (т.е. в окрестности каждой точки) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где, однако, λ зависит от точки x, следовательно, класс K_0 значительно шире класса Q. В дальнейшем, класс K_0 был естественно расширен до класса K непрерывных отображений в гильбертовом пространстве H, необязательно сепарабельном [1, 2].

Приведем теперь определения K_0 -отображения и некоторых других понятий. Пусть H – произвольное, необязательно сепарабельное, вещественное гильбертово пространство.

Определение 1. *Непрерывное отображение $f : G \to H$ открытого подмножества $G \subset H$ в H будем называть K_0 -отображением относительно H, если выполнено следующее условие*

(K_0) : *Для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\varepsilon > 0$, существует окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное линейное подпространство $L \subset H$ и вещественные числа λ и $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что если для точек $x, y \in U$ угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|. \tag{1}$$

Условие (1) равносильно одновременному выполнению следующих двух условий [1]:

K **-условие:** для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$, существует окрестность $U \subset H$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и вещественное число λ такие, что, если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение (1).

Локальное условие Липшица: для каждой точки $x_0 \in G$ существуют числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$ такие, что если точки $x, y \in G$, $\|x - x_0\| < r$ и

$\|y - x_0\| < r$, то

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Пусть теперь подмножество $X \subset H$ – произвольное, необязательно открытое, непрерывное отображение $f : X \to H$ будем называть K_0 *-отображением*, если существуют открытое подмножество $G \subset H$ и K_0 -отображение $g : G \to H$ такие, что $X \subseteq G$ и $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Пусть даны произвольные подмножества $X, Y \subset H$, непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется K_0 *-отображением*, если композиция $i \circ f : X \to H$, где $i : Y \to H$ есть вложение, является K_0 -отображением. Композиция двух K_0 -отображений есть K_0 -отображение [1]. Гомеоморфизм $f : X \cong Y$ называется K_0 *-гомеоморфизмом* и пишется $f : X \overset{K_0}{\cong} Y$, если f и f^{-1} суть K_0 -отображения.

Определение 2. *Семейство (f_t) $(0 \leq t \leq 1)$ отображений $f_t : X \to Y$ называется K_0 -гомотопией, и пишется*

$$(f_t) : X \overset{K_0}{\simeq} Y,$$

если отображение $F : I \times X \to Y$, определяемое формулой

$$F(t, x) = f_t(x), \quad x \in X, \quad t \in I = [0, 1],$$

является K_0 -отображением.

Два K_0 -отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными и записываюся в виде $f \overset{K_0}{\simeq} g$, если существует связывающая их K_0 -гомотопия (f_t), т.е. такая, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Равносильным образом, отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными, если существует K_0 -отображение $F : I \times X \to Y$ такое, что

$$F(0, x) = f(x), \quad F(1, x) = g(x), \quad x \in X.$$

Определение 3. *K_0 -гомотопия называется связной или неподвижной на подмножестве $A \subset X$ или относительно A, и пишется*

$$(f_t) : X \overset{K_0}{\square} Y (\mathrm{rel}\ A),$$

если $f_t(x) = f_0(x)$ для всех $x \in A$ и $t \in I$. Два K_0 -отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными относительно A и пишется

$$f \overset{K_0}{\simeq} g (\mathrm{rel}\ A).$$

Отношение гомотопности между K_0 -отображениями есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности, в этом случае называются гомотопическими классами и гомотопический класс отображения f принято обозначать через $[f]$. Множество всех K_0 -отображений $f : X \to Y$ обозначается через $K_0(X, Y)$, а множество всех гомотопических классов таких отображений через $K_0[X, Y]$. Приведенные выше понятия аналогичным образом определяются и для K_0 -отображений $f(X, A) \to (Y, B)$ для пар подмножеств из H.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

Описание основных бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q(X, A, x_0)$ пунктированых подмножеств (X, x_0) и пунктированых пар (X, A, x_0) подмножеств вещественного гильбертова пространства H, а также определения приведенных в дальнейшем понятий подробно изложены в [3].

Напомним, что линейное подпространство M пространства H называется *подпространством конечного дефекта* или *конечной коразмерности* $q \geq 0$, $q \in \mathbb{Z}$, если ортогональное дополнение подпространства M относительно H имеет размерность q. Если q – отрицательное целое число, то гильбертово пространство M будем называть подпространством *дефекта* q *относительно* H, если M содержит H в качестве подпространства дефекта $-q$. Условимся через $B(M)$, $B^*(M)$ и $S(M)$ обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства $M \subset H$.

Обозначим через $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ множество всех отображений

$$f : (B(M), S(M)) \to (X, x_0),$$

принадлежащих к классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем в множестве $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ отношение K_0 -гомотопности $\mathrm{rel}\,(S(M))$. Полученное фактор-множество, обычно называемое гомотопическим множеством обозначим через $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Предложение 1. *Существует биективное соответствие между элементами группы* $\Pi_q(X, x_0)$ *и элементами множества (*K_0 *-гомотопическими классами)*

$$K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big].$$

Доказательство. Каждому $f \in K_0\big(M, M \setminus B(M); X, x_0\big)$ сопоставляя ограничение $f' = f\big|B(M)$, получим инъективное отображение множества $K_0\big(M, M \setminus B(M); X, x_0\big)$ в множество $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$. Это отображение сюръективно, ибо каждое $g' \in K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ есть ограничение на $B(M)$ отображения $g = g'r\,\mathrm{in}$, где $r : M \to B(M)$ есть K_0 -ретракция, определенная формулой

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in B(M), \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{при} \quad x \in M \setminus B(M). \end{cases}$$

Далее, если f и g суть K_0 -гомотопны и

$$h_t : f \overset{K_0}{\simeq} g\big(\mathrm{rel}\ M \setminus B(M)\big),$$

то гомотопия $h'_t = h_t\big|B(M)$ будет K_0 -гомотопией между f' и g'. С другой стороны, если

$$h'_t : f' \overset{K_0}{\simeq} g'\mathrm{rel}\,(S(M), x_0),$$

то $h_t = h'_t r$ будет K_0 -гомотопией между f и g относительно $\big\{M \setminus B(M), x_0\big\}$. Таким образом, существует биективное соответствие между элементами множества $\Pi_q(X, x_0)$ и элементами множества $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Следствие 1. ***Перенося посредством этого сответствия групповую операцию из*** $\Pi_q(X, x_0)$ ***в*** $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$***, получим изоморфизм группы*** $\Pi_q(X, x_0)$ ***на группу*** $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Таким образом, согласно предложению 1, мы можем символом $\Pi_q(X, x_0)$ обозначать также построенную группу $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$, т.е. положить

$$\Pi_q X, x_0) = K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$$

и элементы группы $\Pi_q(X, x_0)$ определять так же, как K_0 -гомотопические классы относительно сферы $S(M)$ K_0 -отображений $f(B(M), S(M)) \to (X, x_0)$.

Выберем единичный вектор $e \in M$ и обозначим через M_e векторное подпространство всех векторов из M, ортогональных к e. Рассмотрим единичную сферу $S(M)$, единичный замнутый шар $B(M_e)$ и единичную сферу $S(M_e)$. Ясно, что их дефекты соответственно равны $q+1$, $q+1$ и $q+2$. Нижнюю замкнутую полусферу (т.е. содержащую точку $-e$) сферы $S(M)$ обозначим через E и рассмотрим пару $(S(M), E)$. Далее, обозначим через $K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$ множество всех отображений $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем в этом множестве отношение

K_0 -гомотопности $\operatorname{rel}(E)$ и получающееся фактор-множество обозанчим через $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$.

Предложение 2. *Существует биективное соответствие между элементами группы*

$$\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0\big[B(M_e), S(M_e), X, x_0\big]$$

и элементами гомотопического множества $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$.

Доказательство. Обозначая через E_+ верхнюю полусферу (содержащую точку e) сферы $S(M)$, каждому $f \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$ сопоставим отображение $f' : S(M) \to X$, задаваемое следующим образом

$$f'(E) = x_0, \quad f'(E_+) = \big(f_{P_{M_e}}\big)\,(E_+),$$

где $P_{M_e} : M \to M_e$ – ортогональное проектирование, т.е. K_0 -отображение. f' является K_0 -отображением [4], и $f' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$. Соответствие $f \to f'$ инъективно, покажем, что оно сюръективно. Пусть $g' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$. Рассмотрим отображение $g : (B(M_e), S(M_e)) \to (X, x_0)$, определяемое формулой $g = g' \circ h$, где $h : (B(M_e), S(M_e)) \to (E_+, S(M_e))$ – отображение, определяемое формулой

$$h(x) = x + \sqrt{1 - \|x\|^2}\, e, \quad x \in B(M_e),$$

g является K_0 -отображением [4] и $g \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$. Ясно, что g' есть образ отображения g при рассматриваемом соответствии.

Отметим, что h есть K_0 -гомеоморфизм, а $P_{M_e}|E_+$ является обратным к h. Посредством отображения h построенное биективное соответствие распространяется до биективного соответствия между K_0 -гомотопическими множествами

$$K_0\big[B(M_e), S(M_e); X, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[S(M), E; X, x_0\big].$$

Действительно, $f, g \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$ будут K_0 -гомотопными относительно $S(M_e)$ тогда и только тогда, когда $f', g' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$ будут K_0 -гомотопными относительно E.

Следствие 2. Как и в следствии 1, перенося групповую структуру в $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *посредством указанного биективного соответствия в* $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$ *мы можем его превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_{q+1}(X, x_0)$. *Таким образом, мы и в данном случае можем писать*

$$\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$$

и элементы группы $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *определять так же как и* K_0 *-гомотопические классы относительно* E K_0 *-отображений* $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$.

Опишем еще одно альтернативное определение абсолютных гомотопических групп. Сохраняя обозначения предыдущего случая, обозначим через s_0 точку $-e$ полусферы E и рассмотрим пару $(S(M), s_0)$. Пусть $K_0\big(S(M), s_0; X, x_0\big)$ – множество всех отображений $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 , относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем отношение $\mathrm{rel}\,\{x_0\}$ K_0 -гомотопности в $K_0\big(S(M), s_0; X, x_0\big)$ и рассмотрим фактор-множество

$$K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Предложение 3. *Существует биективное соответствие между гомотопическими множествами*

$$K_0\big[S(M), E; X, x_0\big] \quad \textit{и} \quad K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Доказательство. Поскольку полусфера E в классе K_0 стягиваема по себе в точку s_0 и пара $(S(M), E)$ есть K_0 -пара Борсука, то стянув E в точку s_0, мы получим пару $(S(M), s_0)$, K_0 -гомотопически эквивалентную паре $(S(M), E)$ [5].

Пусть

$$\varphi : (S(M), E) \to (S(M), s_0), \quad \psi : (S(M), s_0) \to (S(M), E)$$

– K_0 -гомотопически взаимно обратные K_0 -гомотопические эквивалентности, т.е.

$$\psi \circ \varphi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}(E), \quad \varphi \circ \psi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\{s_0\}.$$

Посредством отображений φ и ψ, обычным способом, строится соответствие между множествами

$$K_0\big[S(M), E; X, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Следствие 3. *Согласно следствию 2, множество* $K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big]$ *можно превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_{q+1}(X, x_0)$.

Таким образом, элементы группы $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *можно определить как* K_0 *-гомотопические классы* $\mathrm{rel}\,\{s_0\}$ K_0 *-отображений* $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$.

Подытоживая результаты предложений 1, 2 и 3, можем при рассмотрении K_0 *-абсолютных бесконечномерных гомотопических групп, кроме основного определения, пользоваться любым из трех описанных альтернативных определений этих групп.*

Рассмотрим множество

$$K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big)$$

всех отображений $f : \big(B(M), S(M), E\big) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относильно гильбертова пространства $M \cup H$, и в нем отношение K_0 -гомотопности относительно семейства $\big\{S(M), E; A, x_0\big\}$. Полученное фактор-множество обозначим через $K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big)$.

Предложение 4. *Существует биективное соответствие между элементами группы*

$$\Pi_q(X, A, x_0) = K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big]$$

и элементами гомотопического множества $K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big]$.

Доказательство. Каждому $f \in K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big]$ сопоставим ограничение $f' = f \setminus B(M)$, где f' есть K_0 -отображение [4]. Следовательно,

$$f' \in K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big).$$

Соответствие $f \to f'$ инъективно, покажем его сюръективность. Пусть

$$g' \in K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big).$$

Построим отображение $g : M \to X$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &g(x) = g'(x), \quad x \in B(M), \\ &g\left(J^e(M)\right) = x_0, \\ &g(L_x) = g'(x), \quad x \in S(M), \quad (x, e) \geq 0, \end{aligned}$$

где полупрямая L_x с началом в точке x параллельна прямой L_e, проходящей через вектор e. Отображение g есть K_0 -отображение [4, 5], следовательно, $g \in K_0\big(M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big)$ и его ограничение на $B(M)$ есть g'.

Построенное биективное соответствие можно распространить до биективного соответствия между гомотопическими множествами

$$K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big],$$

ибо в приведенных обозначениях имеют место отношения

$$h_t : f \overset{K_0}{\simeq} g \operatorname{rel} \big\{M \setminus B^*(M), J^e(M); A, x_0\big\}$$

тогда и только тогда, когда

$$h_t' : f' \overset{K_0}{\simeq} g' \operatorname{rel} \big\{S(M), E; A, x_0\big\}.$$

Следствие 4. *Предложение 4 позволяет* $K_0\big[B(M),S(M),E;X,A,x_0\big]$ *превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_q(X,A,x_0)$. *Таким образом, мы можем писать*

$$\Pi_q(X,A,x_0)=K_0\big[B(M),S(M),E;X,A,x_0\big],$$

т.е. элементы группы $\Pi_q(X,A,x_0)$ *определять как* K_0 *-гомотопические классы относительно семейства* $\big\{S(M),E;A,x_0\big\}$ K_0 *-отображений*

$$f:\big(B(M),S(M),E\big)\to(X,A,x_0).$$

Рассмотрим теперь тройку $\big(B(M),S(M),s_0\big)$ и множество $K_0\big(B(M),S(M),s_0;X,A,x_0\big)$ всех отображений $f:\big(B(M),S(M),s_0\big)\to(X,A,x_0)$, принадлежащих классу K_0 в гильбертовом пространстве $M\cup H$. Введем в этом множестве отношение K_0 -гомотопности относительно семейства $\big\{S(M),s_0;A,x_0\big\}$ и полученное фактор-множество обозначим через $K_0\big[B(M),S(M),s_0;X,A,x_0\big]$.

Предложение 5. *Существует биективное сответствие между элементами гомотопических множеств*

$$K_0\big[B(M),S(M),E;X,A,x_0\big]\quad\textit{и}\quad K_0\big[B(M),S(M),s_0;X,A,x_0\big].$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны рассуждениям, приведенным при доказательстве предложения 3. Полусферу E K_0-стянув в точку s_0, получим $\big(B(M),S(M),s_0\big)$, K_0-гомотопически эквивалентную тройке $\big(B(M),S(M),E\big)$. Пусть

$$\varphi:\big(B(M),S(M),E\big)\to\big(B(M),S(M),s_0\big)$$

$$\psi:\big(B(M),S(M),s_0\big)\to\big(B(M),S(M),E\big)$$

суть взаимно обратные K_0 -гомотопические эквивалентности, т.е.

$$\varphi\psi\overset{K_0}{\simeq}id\,\mathrm{rel}\,(S(M),E)\quad\text{и}\quad\psi\varphi\overset{K_0}{\simeq}id\,\mathrm{rel}\,(S(M),s_0).$$

Обычным образом посредством φ и ψ строится биективное соответствие между элементами множеств

$$K_0\big[B(M),S(M),E;X,A,x_0\big]\quad\text{и}\quad K_0\big[B(M),S(M),s_0;X,A,x_0\big].$$

Следствие 5. *В силу предложения 5 множество* $K_0\big[B(M),S(M),E;X,A,x_0\big]$ *можно наделить структурой группы, изоморфной группе* $\Pi_q(X,A,x_0)$.

Таким образом, мы можем группу $\Pi_q(X,A,x_0)$ *отождествлять с группой* $K_0\big[B(M),S(M),s_0;X,A,x_0\big]$, *и, следовательно, элементы группы* $\Pi_q(X,A,x_0)$

можно определять как K_0 -гомотопические классы относительно семейства $\{S(M), s_0; A, x_0\}$ отображений $f : (B(M), S(M), s_0) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$.

Итак, в относительном случае наряду с основным определением существуют альтернативные, эквивалентные основному, определения K_0 -бесконечномерных относительных гомотопических групп.

3. K_0 -ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

В этом пункте снова под M будем понимать подпространство или надпространство дефекта $q \in \mathbb{Z}$ вещественного гильбертова пространства H, а под $B(M)$, $S(M)$ – единичные замкнутый шар и сферу в M.

Построим в H следующие категории:

I. $\mathbf{P}K_0(H)$ – категория, объектами которой являются пунктированные подмножества (X, x_0) из H, а морфизмами – K_0 -отображения относительно H $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, сохраняющие отмеченные точки.

II. $\mathbf{P}K_{02}(H)$ – категория, объектами которой служат пары (X, A, x_0) с отмеченной точкой $x_0 \in A$ подмножеств из H, а морфизмами – K_0-отображения относительно H $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$.

Предложение 6. (i) *Каждый морфизм $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_0(H)$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_* : \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(Y, y_0)$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$,*

(ii) *для любых морфизмов $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $\psi : (Y, y_0) \to (\mathbb{Z}, z_0)$ имеет место $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$,*

(iii) *при любом $q \in \mathbb{Z}$ гомоморфизм id_*, индуцированный тождественным отображением $id : (X, x_0) \to (X, x_0)$ есть тождественный автоморфизм группы $\Pi_q(X, x_0)$.*

Доказательство. (i) Согласно следствию 1 K_0 -сфероидом дефекта q множества X в точке x_0 можно считать всякое K_0 -отображение $f : (B(M), S(M)) \to (X, x_0)$. Соответствие $f \to \varphi \circ f$ порождает отображение

$$\varphi_\# : K_0(B(M), S(M); X, x_0) \to K_0(B(M), S(M); Y, y_0).$$

При этом, имеет место $\varphi\circ(f+g)=\varphi\circ f+\varphi\circ g$. Далее, если $f \overset{K_0}{\simeq} g$ и $h_t : f \overset{K_0}{\simeq} g$ есть K_0 -гомотопия относительно $S(M)$, то $\varphi\circ h_t$ будет K_0 -гомотопией относительно $S(M)$, соединяющей K_0 -сфероиды $\varphi\circ f$ и $\varphi\circ g$. Отсюда следует, что можно корректно определить отображение

$$\varphi_* : K_0\big[B(M),S(M);X,x_0\big] \to K_0\big[B(M),S(M);Y,y_0\big].$$

Наконец, если $f \overset{K_0}{\simeq} f'$ и $g \overset{K_0}{\simeq} g'$, то $(f+g) \overset{K_0}{\simeq} (f'+g')$, откуда следует, что φ_* будет гомоморфизмом группы $\Pi_q(X,x_0)$ в группу $\Pi_q(Y,y_0)$, называемым *гомоморфизмом, индуцированным морфизмом* φ.

(ii) Для любого элемента $[f]\in\Pi_q(X,x_0)$ будем иметь

$$(\psi\circ\varphi)_*([f])=[\psi\circ\varphi\circ f]=\psi_*([\varphi f])=\psi_*(\varphi_*([f])).$$

(iii) Справедливость очевидна.

Следствие 6. *Соответствие* $(X,x_0)\to\Pi_q(X,x_0)$, $\varphi\to\varphi_*$ *является ковариантным функтором из категории* $\mathbf{P}K_0(H)$ *в категорию* A *абелевых групп.*

Предложение 7. K_0 *-гомотопные морфизмы* $\varphi,\psi : (X,x_0)\to(Y,y_0)$ *категории* $\mathbf{P}K_0(H)$ *индуцируют одинаковые гомоморфизмы* $\varphi_*,\psi_* : \Pi_q(X,x_0)\to\Pi_q(Y,y_0)$.

Доказательство. Пусть $h_t : \varphi \overset{K_0}{\simeq} \psi(\operatorname{rel} S(M))$. Тогда для любого K_0 -сфероида $f : \big(B(M),S(M)\big)\to(X,x_0)$ семейство $(h_t f)$, $0\le t\le 1$, будет K_0 -гомотопией между φf и ψf. Откуда для любого элемента $[f]\in\Pi_q(X,x_0)$ будем иметь $\varphi([f])=[\varphi f]=[\psi f]=\psi_*([f])$.

Определение 4. *Морфизм* $\varphi : (X,x_0)\to(Y,y_0)$ *категории* $\mathbf{P}\,K_0(H)$ *будем называть* K_0 *-гомотопической эквивалентностью, если существует морфизм* $\psi : (Y,y_0)\to(X,x_0)$ *категории* $\mathbf{P}K_0(H)$ *такой, что*

$$\psi\varphi \overset{K_0}{\simeq} id_x(\operatorname{rel}\{x_0\}) \quad \textit{и} \quad \varphi\psi \overset{K_0}{\simeq} id_y(\operatorname{rel}\{\nu_0\}).$$

Теорема 1. (О K_0 -гомотопической инвариантности.) K_0 *-гомотопическая эквивалентность* $\varphi : (X,x_0)\to(Y,y_0)$ *категории* $\mathbf{P}K_0(H)$ *индуцирует изоморфизм*

$$\varphi_* : \Pi_q(X,x_0)\cong\Pi_q(Y,y_0)$$

для любого $q\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ – морфизм категории $\mathbf{P}K_0(H)$, удовлетворяющий условиям из определения 4. Переходя в них к индуцированным гомоморфизмам, в силу предложения 6 будем иметь: $\psi_*\varphi_* = id$ и $\varphi_*\psi_* = id$. Откуда следует, что φ_* есть изоморфозм и $(\varphi_*)^{-1} = \psi_*$.

Переходя теперь к относительному слеучаю, отметим, что все доказанные утверждения относительно абсолютного случая остаются справедливыми и в относительном случае, мы их сформулируем без доказательства, так как эти доказательства аналогичны.

Пусть (X, A, x_0) и (Y, B, y_0) – произвольные пунктированные пары подмножеств из H и $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ – морфизм категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$. Тогда согласно следствию 4 K_0 -сфероиды пары (X, A, x_0) можно определять как K_0 -отображения

$$f : \big(B(M), S(M), E\big) \to (X, A, x_0).$$

Поэтому композиция $\varphi \circ f$ будет K_0 -сфероидом дефекта $q \in \mathbb{Z}$ пары (Y, B, y_0), при этом, если f и g будут K_0-гомотопными относительно семейства $\big\{S(M), E, A, x_0\big\}$, то K_0-сфероиды $\varphi \circ f$, $\varphi \circ g$ будут K_0-гомотопными относительно $\big\{S(M), E, B, y_0\big\}$. Следовательно, φ индуцирует отображение $\varphi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0)$.

Предложение 8. (i) *Всякий морфизм* $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ *категории* $\mathbf{P}K_{02}(H)$ *индуцирует гомоморфизм* $\varphi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0)$ *для каждого* $q \in \mathbb{Z}$,

(ii) *Имеет место* $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$,

(iii) *Тождественное отображение* $id : (X, A, x_0) \to (X, A, x_0)$ *индуцирует тождественный автоморфизм* $id_* : \Pi_q(X, A, x_0) \cong \Pi_q(X, A, x_0)$.

Следствие 7. *Соответствие* $(X, A, x_0) \to \Pi_q(X, A, x_0)$, $\varphi \to \varphi_*$ *есть ковариантный фактор из категории* $\mathbf{P}K_{02}(H)$ *в категорию* A *абелевых групп.*

Предложение 9. K_0 *-гомотопные морфизмы*

$$\varphi, \psi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$$

категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ *индуцируют одинаковые морфизмы*

$$\varphi_*, \psi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0).$$

Определение 5. *Морфизм* $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ *категории* $\mathbf{P}K_{02}(H)$ *называется* K_0 *-гомотопической эквивалентностью, если существует морфизм*

$\psi : (Y, B, y_0) \to (X, A, x_0)$ *из этой же категории, такой что выполнены условия*

$$\psi\varphi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\,\{S(M), E, A, x_0\}, \quad \varphi\psi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\,\{S(M), E, B, y_0\}.$$

Теорема 2. (О K_0 -гомотопической инвариантности) *K_0 -гомотопическая эквивалентность $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ индуцирует изоморфизм*

$$\varphi_* : \Pi_q(X, x_0) \cong \Pi_q(Y, B, y_0)$$

при любом $q \in \mathbb{Z}$.

4. ЗАВИСИМОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ОТ ВЫБОРА БАЗИСНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим вопрос о зависимости групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q(X, A, x_0)$ от выбора базисной точки x_0. Мы продолжаем под M понимать произвольное зафиксированное подпространство или надпространство дефекта $q \in \mathbb{Z}$ пространства H. Напомним, что через $B(M)$ и $S(M)$ обозначаются единичные замкнутый шар и сфера в M. Положим $M' = \mathbb{R} \times M$ и пусть $[0, 1]$ – отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$. Введем следующую модификацию обычного понятия непрерывного пути.

Определение 6. *K_0 -путем в множестве $X \subset H$ будем называть всякое отображение $\sigma : [0, 1] \to X$, принадлежащее классу K_0 относительно гильбертова пространства $M' \cup H$.*

Путь, обратный к K_0 -пути и постоянный путь суть K_0 -пути, произведение двух K_0 -путей снова есть K_0 -путь. Естественным образом определяются понятия K_0 -гомотопности K_0 -путей K_0 -линейно связанного множества X и компоненты K_0 -линейной связности точки $x_0 \in X$.

Определение 7. *Пусть $f_0 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ и $f_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$ – K_0 -сфероиды и $\sigma : I \to X$ есть K_0 -путь в X такой, что $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$. Будем говорить, что f_0 и f_1 σ-гомотопны, если существует такая K_0 -гомотопия $f_t : B(M) \to X$, соединяющая f_0 с f_1 и $f_t(S(M)) = \sigma(1 - t)$ при $t \in I$. Такую гомотопию называют также гомотопией вдоль пути σ.*

Лемма 1. *Пусть $\sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ – произвольный K_0-путь в X и*

$$f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$$

есть K_0 -сфероид, тогда существует K_0 -сфероид

$$f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$$

, σ-гомотопный сфероиду f.

Доказательство. Определим отображение $\varphi_t(S(M)) \to X$, приняв $\varphi_t(S(M)) = \sigma(1-t)$. Гомотопия φ_t есть частичная гомотопия f. Покажем, что φ_t есть K_0 -гомотопия, т.е. отображение $\Phi : I \times S(M) \to X$, задаваемое формулой $\Phi(t,x) = \varphi_t(x)$ есть K_0 -отображение, но это следует из того, что Φ есть композиция трех K_0 -отображений $(t,x) \to t \to (1-t) \to \sigma(1-t)$. Поскольку $(B(m), S(M))$ есть K_0 -пара Борсука [5], то существует K_0 -гомотопия $f_t : B(M) \to X$, продолжающая гомотопию φ_t. Приняв $f_1 = f'$, получим K_0 -сфероид

$$f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1),$$

σ-гомотопный f.

Лемма 2. *Пусть $f, g : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$ есть K_0 -сфероиды, K_0 -гомотопные* $\mathrm{rel}\,(S(M))$ *и*

$$\sigma, \tau : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1) - -$$

K_0 -гомотопные K_0 -пути относительно концов отрезка I. Пусть $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия f вдоль σ и $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия g вдоль пути σ. Тогда, приняв $f_1 = f'$ и $g_1 = g'$, получим K_0 -сфероиды

$$f', g' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0),$$

K_0 -гомотопные $\mathrm{rel}\,(S(M))$.

Доказательство. Рассмотрим K_0 -отображения $F, G : I \times B(M) \to X$, порожденные гомотопиями f_t и g_t соответственно, т.е. $F(t,x) = f_t(x)$ и $G(t,x) = g_t(x)$. Положим

$$\widetilde{S(M)} = \{0\} \times B(M) \cup I \times S(M)$$

и обозначим через $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ ограничения на $\widetilde{S(M)}$ отображений соответственно F и G . Из отношений

$$f \overset{K_0}{\simeq} g\,\mathrm{rel}\,(S(M)) \quad \text{и} \quad \sigma \overset{K_0}{\simeq} \tau\,\mathrm{rel}\,(\partial I)$$

следует, что отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ K_0 -гомотопны относительно подпространств $\{0\} \times S(M)$ и $\{1\} \times S(M)$ соответственно. Поскольку $\big(B(M), S(M)\big)$ есть K_0 -пара Борсука [5], то $\widetilde{S(M)}$ есть K_0 -ретракт для $I \times B(M)$, и поэтому $\big(I \times B(M), \widetilde{S(M)}\big)$

есть K_0 -пара Борсука [5], так как $I \times B(M)$ есть $K_0 N\mathbb{R}$. Отсюда следует, что существует K_0 -гомотопия $F_t : I \times B(M) \to X$ такая что

$$F_0 = f, \quad F_1|\widetilde{S(M)} = G|\widetilde{S(M)}, \quad F_t(1 \times S(M)) = x_0, \quad t \in I.$$

Пусть $\psi_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия, порожденная F_1, т.е. $\psi_t(x) = F_1(t,x)$. Гомотопия ψ_t есть K_0 -гомотопия g вдоль пути τ. Так как

$$F_t\big(\{1\} \times S(M)\big) = x_0, \quad t \in I,$$

то $f_1 \overset{K_0}{\simeq} \psi \operatorname{rel}(S(M))$, т.е. K_0 -сфероиды $f_1, \psi_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Докажем теперь, что K_0 -сфероиды ψ_1 и g_1 K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Построим отображение $P : I \times B(M) \to X$ следующим образом:

$$P(t,x) = \begin{cases} g_{1-2t}(x) & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ \psi_{2t-1}(x) & \text{при} \quad 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \qquad x \in B(M).$$

Так как $P(t,x) = P(1-t,x)$, $x \in S(M)$, то, положив

$$Q_t(s,x) = \begin{cases} P(s,x) & \text{при} \quad x \in B(M), \quad s \in \partial I, \\ P(s-ts,x) & \text{при} \quad x \in S(M), \quad 0 \le s \le 1/2, \\ Q_t(1-s,x) & \text{при} \quad x \in S(M), \quad 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

получим K_0 -частичную гомотопию $Q_t : \partial\big(I \times B(M)\big) \to X$ отображения P на $\partial\big(I \times B(M)\big) = I \times S(M) \cup \partial I \times B(M)$. Множество $\partial\big(I \times B(M)\big)$ есть K_0 -окрестностный ретракт для $I \times B(M)$, поэтому $\big(I \times B(M), \partial\big(I \times B(M)\big)\big)$ есть K_0 -пара Борсука [5]. Следовательно, существует K_0 -гомотопия $P_t : I \times B(M) \to X$ отображения P, продолжающая Q_t. Пусть $\mu_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия, порождающая K_0 -отображение P_1, т.е.

$$P_1(t,x) = \mu_t(x), \quad x \in B(M), \quad t \in I,$$

тогда $\mu_0 = g_1$, $\mu_1 = \psi_1$. Поскольку $\mu_t(S(M)) = P_1\big(\{t\} \times S(M)\big)$ для всех $t \in I$, то K_0 -сфероиды

$$g_1, \psi_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$$

K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Таким образом, $f_1 = f'$ и $g_1 = g'$ K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$.

Следствие 8. Пусть $\alpha = [f]$ *– произвольный элемент группы* $\Pi_q(X, x_1)$,

$$f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1) \quad \text{и} \quad \sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1).$$

Тогда согласно лемме 1 существует K_0 *-сфероид* $f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ σ*-гомотопный* f. *Далее, согласно лемме 2 класс* $\beta[f']$ *зависит только от класса*

$[f]$, *и получаем однозначно определенное отображение*

$$\sigma_q : \Pi_q(X, x_1) \to \Pi_q(X, x_0).$$

Причем, в силу леммы 2, если $\sigma \overset{K_0}{\simeq} \tau \operatorname{rel}(\partial I)$, *то* $\sigma_q = \tau_q$.

Лемма 3. (i) *если* K_0 *-пути* $\sigma, \tau : I \to X$ *таковы, что* $\sigma(1) = \tau(0)$, *то*

$$(\sigma\tau)_q = \sigma_q \tau_q,$$

(ii) *отображение* $\sigma_q : \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(X, x_0)$, *порожденное постоянным путем* $\sigma(I) = x_0$, *есть тождественное отображение группы* $\Pi_q(X, x_0)$.

Доказательство. (i) Пусть

$$\sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1), \quad \tau : (I, 0, 1) \to (X, x_1, x_2), \quad f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_2),$$

пусть далее $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль пути τ сфероида f, а $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль пути σ сфероида $f_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$. Тогда произведение этих гомотопий будет K_0 -гомотопией вдоль пути $\sigma\tau$ сфероида f.

Справедливость (ii) очевидна.

Теорема 3. *Для всякого* K_0 *-пути* $\sigma : I \to X$ *в множестве* X *из* H *с* $\sigma(0) = x_0$ *и* $\sigma(1) = x_1$, *порожденное* σ *отображение*

$$\sigma_q : \Pi_q(X, x_1) \to \Pi_q(X, x_0)$$

является изоморфизмом между этими группами для всякого $q \in \mathbb{Z}$, *зависящим только от* K_0 *-гомотопического класса пути* σ *относительно концов* 0 *и* 1 *отрезка* I.

Доказательство. Покажем сначала, что σ_q есть гомоморфизм, т.е.

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = \sigma_q(\alpha) + \sigma_q(\beta), \quad \alpha, \beta \in \Pi_q(X, x_1).$$

Пусть $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$ и $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль σ-сфероида f, а $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль σ-сфероида g. По определению σ_q будем иметь $\sigma_q(\alpha) = [f_1]$ и $\sigma_q(\beta) = [g_1]$. Рассмотрим K_0 -гомотопию $h_t : B(M) \to X$, полагая

$$h_t = f_t + g_t.$$

Ясно, что $\alpha + \beta = [h_0] = [f + g]$ и h_t есть K_0 -гомотопия вдоль пути σ и $[h_1] = [f_1] + [g_1]$. Следовательно,

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = [h_1] = \sigma_q(\alpha) + \sigma_q(\beta).$$

Покажем, что σ_q есть изоморфизм. Рассмотрим K_0 -путь $\tau(t) = \sigma(1-t)$, $t \in I$, обратный к σ. По соображениям симметрии

$$\tau_q : \Pi_q(X, x_0) \cong \Pi_q(X, x_1).$$

Поскольку пути $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ K_0 -гомотопны постоянному пути точки x_0, то согласно изложенному выше будем иметь $\sigma_q \circ \tau_q = id$ и $\tau_q \circ \sigma_q = id$, откуда следует, что σ_q есть изоморфизм и $\tau_q = (\sigma_q)^{-1}$.

Аналогичная теорема имеет место и для групп $\Pi_q(X, A, x_0)$.

Теорема 4. *K_0 -путь $\sigma : (I, 0, 1) \to (A, 0, x_1)$ порождает изоморфизм*

$$\sigma_q : \Pi_q(X, A, x_1) \cong \Pi_q(X, A, x_0),$$

зависящий толко от K_0 -гомотопического класса пути $\sigma\,\mathrm{rel}\,(\partial i)$.

Abstract. The paper discusses some equivalent ways of construction of infinite-dimensional homotopic groups of subsets and pairs of subsets in real Hilbert spaces. In the admissible class of K_0 -continuous mappings, the homotopic invariance of the mentioned groups and their isomorphism are demonstrated in the case where the basic points belong to the same component of K_0 -linear connectivity.

Список литературы

[1] Э. А. Мирзаханян, “О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, I”, Уч. записи ЕГУ, (3), 21-28 (1990).

[2] Э. А. Мирзаханян, “О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, II”, Уч. записи ЕГУ, (1), 3-10 (1991).

[3] Э. А. Мирзаханян, “Построение бесконечномерных относительных гомотопических групп в гильбертовом пространстве”, Изв. ВУЗов, Математика, Казань, (8), 43-52 (2002).

[4] Э. А. Мирзаханян, “Классы подпространств гильбертова пространства”, Изв. НАН Армении, Математика **37** (4), 31-44 (2002).

[5] Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян, “Модифицированные пары Борсука в гильбертовом пространстве”, Изв. НАН Армении, Математика **39** (6), 56-76 (2004).

[6] Ху Сы-Цзян, *Теория гомотопий*, (Мир, Москва, 1964).

Поступила 16 июля 2007

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2007, стр. 55-71

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ТИПА ОДНОМЕРНЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. КАМАЛЯН И В. В. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *kamalyan_armen@yahoo.com, smnvhn@yahoo.com*

Аннотация. В работе предлагается метод решения одномерных псевдодифференциальных уравнений неотрицательного порядка с символом вида $A_1(\xi) + \mathrm{th}(kx+\omega)A_2(\xi)$. Метод основан на сведении псевдодифференциального уравнения к некоторому сингулярному интегральному уравнению. Получены интегральные представления для решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах возникает необходимость обращения одномерных псевдодифференциальных операторов

$$A(x,D) = F^{-1}_{\xi\to x}A(x,\xi)F_{x\to\xi},$$

с символами вида

$$A(x,\xi) = A_1(\xi) + \varphi(x)A_2(\xi), \quad x,\xi \in \mathbb{R}.$$

Особый интерес представляют псевдодифференциальные операторы, допускающие явное обращение. Исключительным в этом смысле является оператор "плавного перехода", обнаруженный Ю. И. Черским [1] (см. также [2, 3, 4]). Им было показано, что уравнение

$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)y(t)dt + \varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)y(t)dt = f, \tag{1}$$

$$k_1, k_2 \in L_1(\mathbb{R}), \quad y, f \in L_2(\mathbb{R})$$

может быть решено в замкнутой форме в случае когда $\varphi(x) = \mathrm{th}(x/2)$. Метод решения, предложенный в [1], основан на сведении интегрального уравнения к краевой задаче для аналитических функций.

Другой подход исследования операторов “плавного перехода” предложен в работе [5], где исследование на разрешимость оператора $A(x, D)$ в случае непрерывных на оси φ (включая $\pm\infty$) и $A_i \in L_\infty(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$, сводится к соответствующей задаче для некоторого сложного интегрального оператора на полуоси (т.е. представителя алгебры, порожденной сингулярным оператором и операторами умножения на функцию). Последнее обстоятельство позволило несколько расширить класс уравнений “плавного перехода”, разрешаемых в замкнутой форме.

Данная работа посвящена исследованию псевдодифференциальных операторов $A(x, D)$ неотрицательного порядка в случае

$$\varphi(x) = \operatorname{th}(kx + \omega), \quad k > 0, \quad \omega \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im} \omega| < \pi/2.$$

Разрешимость уравнения $A(x, D)u = f$ в классах Соболева–Слободецкого сводится к соответствующей задаче для характеристичского сингулярного уравнения на оси в некотором весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho)$. Теория разрешимости характеристических сингулярных интегральных уравнений общеизвестна (см. [6]) и основана на возможности факторизации символа сингулярного оператора.

В случае, когда функция факторизуема и известен ее индекс, факторизация может быть явно постоена с помощью интегралов Коши. В настоящее время (см. [6, 7]) критерии существования факторизации и формулы вычисления индекса получены для широких классов функций (непрерывных, кусочно-непрерывных и т.д.).

В случае дифференциальных операторов, т.е. когда $A_i(\xi)$ – полиномы, в настоящей статье строится явная факторизация символа сингулярного оператора и для решений из класса Соболева–Слободецкого получены интегральные представления.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ – линейные пространства над полем комплексных чисел,

$$\widetilde{\omega}_1 : X_1 \to X_2, \ \widetilde{\omega}_2 : X_2 \to X_1, \ \widetilde{\omega}_3 : X_1 \to X_3, \ \widetilde{\omega}_4 : X_4 \to X_1, \ \widetilde{\omega}_5 : X_4 \to X_5$$

– линейные отображения и $\widetilde{\omega}_4$ – обратимое отображение. Рассмотрим линейные отображения

$$\widetilde{T} : X_2 \to X_2 \oplus X_3, \qquad \widetilde{K} : X_4 \oplus X_5 \to X_1 \oplus X_3 \oplus X_5,$$
$$A_{12} : X_1 \oplus X_3 \oplus X_5 \to X_2 \oplus X_3, \quad A_{21} : X_2 \to X_4 \oplus X_5,$$
$$A_{22} : X_1 \oplus X_3 \oplus X_5 \to X_4 \oplus X_5, \quad B_{11} : X_2 \oplus X_3 \to X_2,$$
$$B_{12} : X_4 \oplus X_5 \to X_2, \qquad B_{21} : X_2 \oplus X_3 \to X_1 \oplus X_3 \oplus X_5,$$

определенные равенствами

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} I_{X_2} + \widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_3\widetilde{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\omega}_1 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\omega}_3 & I_{X_3} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\omega}_4^{-1}\widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_5\widetilde{\omega}_4^{-1}\widetilde{\omega}_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_4^{-1} & 0 & 0 \\ -\widetilde{\omega}_5\widetilde{\omega}_4^{-1} & 0 & I_{X_5} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} I_{X_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_2 & 0 \\ 0 & I_{X_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{K} = \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_4 & 0 \\ \widetilde{\omega}_3\widetilde{\omega}_4 & 0 \\ \widetilde{\omega}_5 & I_{X_5} \end{bmatrix}.$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться в тождестве

$$\begin{bmatrix} \widetilde{T} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & \widetilde{K} \end{bmatrix}.$$

Из этого тождества и результатов работы [8] следует следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $\widetilde{K}^{(-1)}$ – псевдообратное к $\widetilde{K}$, то отображение*

$$\widetilde{T}^{(-1)} = B_{11} - B_{12}\widetilde{K}^{(-1)}B_{21}$$

является псевдообратным к $\widetilde{T}$. Аналогично, если $\widetilde{T}^{(-1)}$ – псевдообратное к $\widetilde{T}$, то

$$\widetilde{K}^{(-1)} = A_{22} - A_{21}\widetilde{T}^{(-1)}A_{12}$$

является псевдообратным к $\widetilde{K}$. Пространства $\operatorname{Ker}\widetilde{T}$ *и* $\operatorname{Ker}\widetilde{K}$ *изоморфны. Кроме того справедливы равенства:*

$$\operatorname{Ker}\widetilde{T} = B_{12}\operatorname{Ker}\widetilde{K}, \quad \operatorname{Ker}\widetilde{K} = A_{21}\operatorname{Ker}\widetilde{T},$$

$$\operatorname{Im}\widetilde{T} = B_{21}^{-1}\operatorname{Im}\widetilde{K}, \qquad \operatorname{Im}\widetilde{K} = A_{12}^{-1}\operatorname{Im}\widetilde{T}.$$

2.2. Пусть S_Γ – оператор сингулярного интегрирования вдоль контура Γ:

$$(S_\Gamma y)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{ v.p. } \int_\Gamma y(\tau)\frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \Gamma).$$

Если Γ – замкнутый контур расширенной плоскости и оператор S_Γ ограничен в пространстве $L_2(\Gamma, \widetilde{\rho})$, где $\widetilde{\rho}$ – весовая функция, определенная на контуре Γ, то через $\mathbb{P}_\Gamma^\pm$ обозначим действующие в пространстве $L_2(\Gamma, \widetilde{\rho})$ проекторы, определенные равенствами $\mathbb{P}_\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma)$. Пусть $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ и $p > 0$. Обозначим через $H_p^+(\mathbb{T})$ $(H_p^-(\mathbb{T}))$ класс Харди аналитических внутри (вне) круга функций, а через $H_p^+(\mathbb{R})$ $(H_p^-(\mathbb{R}))$ класс Харди аналитических в верхней (нижней) полуплоскости функций. Скажем, что $f \in L_p^\pm(\mathbb{T})$ $(f \in L_p^\pm(\mathbb{R}))$, если существует функция из $H_p^\pm(\mathbb{T})$ $(H_p^\pm(\mathbb{R}))$, граничные значения которой совпадают с f.

Пусть $B : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{T})$ – оператор "пересадки", определенный равенством

$$(B\varphi)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1}\varphi(\tau(\zeta)), \quad \tau(\zeta) = i(\zeta + 1)/(1 - \zeta),$$

так, что $B^{-1}S_\mathbb{T}B = S_\mathbb{R}$ (см. [6]). Кроме того, условие $g_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ эквивалентно условию $B^{-1}g_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{R})$ [9].
Как известно (см. [10])

$$L_2^\pm(\mathbb{T}) = \mathbb{P}_\mathbb{T}^\pm L_2(\mathbb{T}) \quad \text{и} \quad L_2^\pm(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_\mathbb{R}^\pm L_2(\mathbb{R}).$$

Пользуясь данной аналогией, под пространством $L_2^\pm(\Gamma, \widetilde{\rho})$ мы понимаем пространство $\mathbb{P}_\Gamma^\pm L_2(\Gamma, \widetilde{\rho})$ (см. [6]).

Ниже под $\rho(z) = z^\beta(-1 < \beta < 1)$ мы понимаем аналитическую в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0)$ ветвь этой функции, принимающую положительные значения на положительной полуоси. Рассмотрим функции

$$\rho_+(z) = \rho(\tau(z)) \quad (|z| < 1) \quad \text{и} \quad \rho_-(z) = \rho(\tau(z)) \quad (|z| > 1).$$

Условие $f_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ эквивалентно условию $f_\pm\rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$. Действительно, из условия $f_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ следует, что $f_\pm = \mathbb{P}_\mathbb{T}^\pm f$, где $f \in L_1(\mathbb{T})$, следовательно, $f_\pm \in L_1^\pm(\mathbb{T})$. Поскольку $\rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$, то $f_\pm\rho_\pm^{1/2} \in L_{2/3}^\pm(\mathbb{T}) \cap L_2(\mathbb{T})$, и потому $f_\pm\rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ (см. [11], стр. 264-266). Обратно, если $f_\pm\rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$, то из условия $\rho_\pm^{-1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ следует, что $f_\pm \in L_1^\pm(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$\int_\mathbb{T} f_+(t)t^k dt = 0$$

для всех неотрицательных целых значений k, и

$$\int_{\mathbb{T}} f_-(t)t^k dt = 0$$

для всех неположительных целых k. Поскольку $f_\pm \in L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$, то из этих условий следует, что $f_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ (см. [6], гл. II, теоремы 4.4 и 4.5).

Под факторизацией функции $\Psi \in L_\infty(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ мы будем понимать представление

$$\Psi(t) = \Psi_-(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^\kappa \Psi_+(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{t-i}\left(t^{\beta/2}\Psi_-(t)\right)^{\pm 1} \in L_2^-(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{t+i}\left(t^{-\beta/2}\Psi_+(t)\right)^{\pm 1} \in L_2^+(\mathbb{R}), \tag{3}$$

оператор $\Lambda_{\Psi_+^{-1}} S_\mathbb{R} \Lambda_{\Psi_+}$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, а число κ (индекс функции Ψ) – целое. Обозначим

$$\widetilde{\Psi}(\zeta) = \Psi(\tau(\zeta)), \quad \widetilde{\Psi}_\pm(\zeta) = \Psi_\pm(\tau(\zeta)),$$

пользуясь равенством

$$L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta) = \rho_\pm^{-1/2} L_2^\pm(\mathbb{T})$$

и свойствами оператора “пересадки”, нетрудно убедиться, что (2) является факторизацией в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ тогда и только тогда, когда представление

$$\widetilde{\Psi}(\zeta) = \widetilde{\Psi}_-(\zeta)\zeta^\kappa \widetilde{\Psi}_+(\zeta)$$

является обобщенной факторизацией $\widetilde{\Psi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ относительно контура $\mathbb{T}$ (см. [6], гл.8). Эта связь позволяет перевести известные результаты теории сингулярных интегральных операторов, определенных на ограниченных контурах (см. [6], гл. 8) на случай вещественной оси. Приведем некоторые из этих результатов, необходимые нам в дальнейшем. Ниже через Λ_u обозначается оператор умножения на функцию u (т.е $\Lambda_u y = uy$).

Предложение 2. *Пусть функция Ψ допускает факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$. Тогда оператор $\mathbb{P}_\mathbb{R}^+ \Lambda_\Psi + \mathbb{P}_\mathbb{R}^-$ обратим справа, слева или с двух сторон в зависимости от того будет ли число κ соответственно отрицательным, положительным или равным нулю.*

Во всех случаях оператор, обратный к $\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_\Psi + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}}$ *с существующей стороны задается равенством*

$$(\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_\Psi + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}})^{-1} =$$

$$= \left(\Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_{\Psi_+^{-1}} + \Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}^-_{\mathbb{R}}\Lambda_{\Psi_+^{-1}}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\Lambda_\Psi\right)\left(\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} I + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}}\right).$$

Если $\kappa < 0$, *то*

$$\operatorname{Ker}\,[\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_\Psi + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}}]$$

$$= \operatorname{span}\,\left\{\frac{1}{t+i}\Psi_+^{-1}(t), \frac{1}{t+i}\Psi_+^{-1}(t)\frac{t-i}{t+i}, \dots, \frac{1}{t+i}\Psi_+^{-1}(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa-1}\right\},$$

если $\kappa > 0$, *то уравнение* $(\mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_\Psi + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}})y = f$ $(f \in L_2(\mathbb{R}, |t|^\beta))$ *разрешимо тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\Psi_-^{-1}(t) - \Psi_+(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\right]\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-j}\frac{dt}{t+i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \kappa.$$

3. СВЯЗЬ С СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

3.1. Пусть $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{R})$ – пространство Соболева–Слободецкого обобщенных функций u, преобразование Фурье $\widehat{u}$ которых принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, (1+|x|)^r)$. Следуя [12], класс локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций A, удовлетворяющих условию

$$|A(\xi)| \le c(1+|\xi|)^r$$

будем обозначать через $\mathbb{S}_r^\circ$. Как известно, псевдодифференциальный оператор $A(D) = F^{-1}\Lambda_A F$ с символом $A \in \mathbb{S}_r^\circ$ непрерывно отображает $\mathbb{H}_s(\mathbb{R})$ в $\mathbb{H}_{s-r}(\mathbb{R})$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\alpha > 0, \quad -1 < \beta < 1, \quad \varphi(x) = \operatorname{th}\frac{\pi}{\alpha}\left(x - \zeta + i\frac{\alpha\beta}{2}\right), \quad x, \zeta \in \mathbb{R}$$

и

$$A_i \in \mathbb{S}_r^\circ, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$A(x,\xi) = 1 + A_1(\xi) + \varphi(x)A_2(\xi)$$

и псевдодифференциальный оператор $A(x,D)$ с символом $A(x,\xi)$:

$$A(x,D)u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} A(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R})).$$

Поскольку

$$A(x,D)u = u + A_1(D)u + \Lambda_\varphi A_2(D)u,$$

то очевидно, что $r \geq 0$ отображение $A(x,D)$ можно продолжить до непрерывного отображения из $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим функцию $A_0(\xi) = 1 + A_1(\xi) - A_2(\xi)$. Далее будем предполагать, что

$$A_0^{-1} \in \mathbb{S}^\circ_{-r}. \tag{5}$$

Пусть $h(x) = \alpha^{-1} \ln x$ $(x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty))$. Определим функции

$$\Psi_0 = A_0 \circ h, \quad \Psi_1 = (1 + (A_1 \circ h))\Psi_0^{-1}, \quad \Psi_2 = (A_2 \circ h)\Psi_0^{-1}$$

на $\mathbb{R}_+$ и $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = 0$ на $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}_+$. Определим также сингулярный интегральный оператор

$$K = \Lambda_{\Psi_1} + S_\mathbb{R}\Lambda_{\Psi_2} : L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)) \to L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)).$$

Наша ближайшая цель – установление связи между решениями уравнений

$$A(x,D)y = f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad \text{и} \quad Kz = g, \quad g \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)).$$

3.2. Для функции y, определенной на $\mathbb{R}_+$ через γy будем обозначать функцию $e^{sx}y(e^{\alpha x})$, где $\sigma = \alpha(\beta+1)/2$ и $s = \sigma + i\zeta$. Очевидно, что операторы γ и $\omega_1 = F^{-1}\gamma$ непрерывно отображают $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Оператор $\omega_2 : \mathbb{H}_r(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ определим равенством

$$\omega_2 = \gamma^{-1}FA_1(D) + S_{\mathbb{R}_+}\gamma^{-1}FA_2(D).$$

Пусть $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ – некоторое прямое дополнение к линейному пространству $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а

$$\pi_1 : L_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}_r(\mathbb{R}), \quad \pi_2 : L_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$$

операторы проектирования, связанные соотношением

$$\pi_1 y + \pi_2 y = y, \quad y \in L_2(\mathbb{R}).$$

Определим пространство $W = \{f : \Psi_0^{-1} f \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)\}$ и оператор $\pi_3 : W \to L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, действующий тождественно на $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Далее, применим предложение 1 для пространств

$$X_1 = L_2(\mathbb{R}_+, \rho), \quad X_2 = \mathbb{H}_r(\mathbb{R}), \quad X_3 = \mathbb{M}_r(\mathbb{R}),$$

$$X_4 = W, \quad X_5 = L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|))$$

и операторов

$$\widetilde{\omega}_1 = \pi_1 \omega_1, \quad \widetilde{\omega}_2 = \omega_2, \quad \widetilde{\omega}_3 = \pi_2 \omega_1, \quad \widetilde{\omega}_4 = \Lambda_{\Psi_0^{-1}} \quad \text{и} \quad \widetilde{\omega}_5 = \omega_5 \pi_3,$$

где $\omega_5 : L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \to L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|))$ определен равенством

$$(\omega_5 y)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \Psi_2(\tau) y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Пользуясь равенством $F^{-1} \gamma S_{\mathbb{R}_+} \gamma^{-1} F = \Lambda_\varphi$ (см., например, [5]), нетрудно убедиться, что

$$\omega_1 \omega_2 = A_1(D) + \Lambda_\varphi A_2(D),$$

т.е. оператор $\widetilde{T}$, действующий из $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, совпадает с $A(x, D)$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\widetilde{f} = (f, 0, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus \mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Функция z является решением уравнения $\widetilde{K} z = \widetilde{f}$ тогда и только тогда, когда $z \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ и $K z = f_0$, где

$$f_0 = (f, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Доказательство. Пусть $z = (z_+, z_-)$ – решение уравнения $\widetilde{K}z = \widetilde{f}$, i.e.

$$\widetilde{\omega}_4 z_+ + \widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_4 z_+ = f, \quad \widetilde{\omega}_3\widetilde{\omega}_4 z_+ = 0, \quad \widetilde{\omega}_5 z_+ + z_- = 0. \tag{6}$$

Сначала докажем, что $z_+ \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Действительно, из второго равенства (6) следует, что $g = \omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R})$. Следовательно, $\gamma z_+ = FA_0(D)g \in L_2(\mathbb{R})$, т.е. $z_+ \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Заметим, что из (6) следует также, что

$$\pi_1\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = \omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \quad \text{и} \quad \widetilde{\omega}_5 z_+ = \omega_5 z_+.$$

Нетрудно также убедиться, что $\omega_2\omega_1 = \Lambda_{A_1\circ h} + S_{\mathbb{R}_+}\Lambda_{A_2\circ h}$. Отсюда в силу первого и третьего равенств в (6) $Kz = f_0$.

Пусть теперь $z \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ и $Kz = f_0$. Тогда

$$(\Lambda_{\Psi_1} + S_{\mathbb{R}_+}\Lambda_{\Psi_2})z_+ = f, \quad \omega_5 z_+ + z_- = 0. \tag{7}$$

Кроме того, из равенства $\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = A_0^{-1}(D)\omega_1 z_+$ и условия (5) следует, что

$$\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R}),$$

т.е. $\pi_2\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = 0$. Отсюда и из первого равенства (7)имеем

$$\begin{aligned}(\Lambda_{\Psi_1} + S_{\mathbb{R}_+}\Lambda_{\Psi_2})z_+ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + \Lambda_{A_1\circ h}\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + S_{\mathbb{R}_+}\Lambda_{A_2\circ h}\Lambda_{\Psi_0^{-1}})z_+ \\ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + (\Lambda_{A_1\circ h} + S_{\mathbb{R}_+}\Lambda_{A_2\circ h})\Lambda_{\Psi_0^{-1}})z_+ \\ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + \omega_2\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}})z_+ = \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ + \omega_2\pi_1\omega_1\Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливы равенства (6), т.е. $\widetilde{K}z = \widetilde{f}$. Доказательство завершено.

Определим функцию $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Легко видеть, что $K = \mathbb{P}^+_{\mathbb{R}}\Lambda_\Psi + \mathbb{P}^-_{\mathbb{R}}$.

Теорема 1. *Пусть $r \geq 0$ и функции $A_i(\xi)$ $(i = 0, 1, 2)$ удовлетворяют условиям (4), (5). Тогда справедливо равенство*

$$\dim \operatorname{Ker} A(x, D) = \dim \operatorname{Ker} K.$$

Если функция y принадлежит пространству $\operatorname{Ker} A(x, D)$, *то функция z, определенная равенствами*

$$z = -\Lambda_{\Psi_0}\omega_2 y \quad \textit{на} \quad \mathbb{R}_+ \quad \textit{и} \quad z = \omega_5\Lambda_{\Psi_0}\omega_2 y \quad \textit{на} \quad \mathbb{R}_-,$$

принадлежит пространству $\mathrm{Ker}K$.

Обратно, если функция z *принадлежит пространству* $\mathrm{Ker}\ K$, *то функция* y, *определенная равенством*

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{st}A_0^{-1}(t)z(e^{\alpha t})dt,$$

принадлежит $\mathrm{Ker}\ A(x,D)$. *Более того, если представление (2) является факторизацией функции* $\Psi \in L_\infty(\mathbb{R})$ *в пространстве* $L_2(\mathbb{R},\rho(|t|))$, *то при* $\kappa \geq 0$ *уравнение* $Ky = 0$ *имеет лишь тривиальное решение, а при* $\kappa < 0$ *система функций*

$$y_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{st}A_0^{-1}(t)\frac{1}{e^{\alpha t}+i}\Psi_+^{-1}\left(e^{\alpha t}\right)\left(\frac{e^{\alpha t}-i}{e^{\alpha t}+i}\right)^{j-1}dt, \quad j = 1, ..., -\kappa,$$

является базисом $\mathrm{Ker}\ A(x,D)$.

Доказательство. Из леммы 1 и предложения 1 следуют равенства

$$\mathrm{Ker}\ A(x,D) = \begin{pmatrix}\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_4 & 0\end{pmatrix}\mathrm{Ker}\ K, \quad \mathrm{Ker}\ K = \begin{pmatrix}-\widetilde{\omega}_4^{-1}\widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_5\widetilde{\omega}_4^{-1}\widetilde{\omega}_2\end{pmatrix}\mathrm{Ker}\ A(x,D),$$

$$\dim\ \mathrm{Ker}\ A(x,D) = \dim\ \mathrm{Ker}\ K.$$

Из этих соотношений и предложения 2 следует доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g = \omega_1^{-1}f$ *и функция* g_0 *совпадает с* g *на* $\mathbb{R}_+$ *и равна нулю на* $\mathbb{R}_-$.

Тогда, если $z \in L_2(\mathbb{R},\rho(|t|))$ *является решением уравнения* $Kz = g_0$, *то функция* y, *определяемая равенством*

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{st}A_0^{-1}(t)z(e^{\alpha t})dt, \tag{8}$$

является решением уравнением $A(x,D)y = f$.

Пусть, дополнительно, представление (2) является факторизацией функции Ψ *в пространстве* $L_2(\mathbb{R},\rho(|t|))$ *и функция* z *определена равенством*

$$z = \left(\Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{+}\Lambda_{\Psi_+^{-1}} + \Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-}\Lambda_{\Psi_+^{-1}}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\Lambda_{\Psi}\right)\left(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{+}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} I + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-}\right) g_0.$$

Тогда, если $\kappa \le 0$, то функция y, определенная равенством (8) является решением уравнения $A(x,D)y = f$. Если $\kappa > 0$, то уравнение $A(x,D)y = f$ разрешимо в $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} \big(\omega_1^{-1} f\big)(t)\left[\Psi_-^{-1}(t) - \Psi_+(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\right]\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-j}\frac{dt}{t+i} = 0, \ j = 1,\dots,\kappa.$$

При выполнении этих условий формула (8) дает единственное решение уравнения $A(x,D)y = f$ в $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что, если $z \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ является решением уравнения $Kz = g_0$, то z является решением уравнения $\widetilde{K}z = g_{00}$, где

$$g_{00} = (g, 0, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus \mathbb{H}_r(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Пусть функция z_+ есть сужение функции z на $\mathbb{R}_+$. В силу предложения 1 функция $y = \widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_4 z_+$ является решением уравнения $A(x,D)y = f$ в классе $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$. Остальные утверждения теоремы следуют из предложения 2.

Теорема 3. *Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, функция g_0, определенная на $\mathbb{R}$, совпадает с g на $\mathbb{R}_+$ и равна нулю на $\mathbb{R}_-$. Тогда, если $y \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ является решением уравнения*

$$A(x,D)y = \omega_1 g,$$

то функция

$$z_+ = -\Lambda_{\Psi_0}(\omega_2 y - g)$$

принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, и функция z

$$z(x) = z_+(x) \quad (x > 0) \quad \text{и} \quad z(x) = -(\omega_5 z_+)(x) \quad (x < 0)$$

является решением уравнения $Kz = g_0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{z}_+ = -\widetilde{\omega}_4^{-1}\widetilde{\omega}_2 y$ и $\widetilde{z}_- = -\widetilde{\omega}_5\widetilde{z}_+$. Из предложения 1 следует, что функция $\widetilde{z}$, равная $\widetilde{z}_+$ на $\mathbb{R}_+$ и равная $\widetilde{z}_-$ на $\mathbb{R}_-$, удовлетворяет равенству $\widetilde{K}\widetilde{z} = (-\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1 g, -\widetilde{\omega}_3 g, 0)$. Подставляя в это равенство $\widetilde{z}_+ = z_+ - \widetilde{\omega}_4^{-1} g$ и $\widetilde{z}_- = z_- + \widetilde{\omega}_5\widetilde{\omega}_4^{-1} g$ получим, что $\widetilde{K}z = (g, 0, 0)$. Применяя лемму 1, получим доказательство теоремы.

4. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

4.1. Рассмотрим теперь случай, когда функции A_i $(i = 1, 2)$ являются полиномами, т.е. когда $A(x, D)$ является дифференциальным оператором. Заметим, что условие (4) выполняется автоматически для

$$r = n = \max\left\{\deg A_1, \deg A_2\right\}.$$

Определим полиномы

$$Q_i = 1 + A_1 - (-1)^i A_2 \quad (i = 1, 2).$$

Ясно, что полином Q_2 совпадает с функцией A_0. Ниже мы будем требовать, чтобы $\deg Q_i = n$ $(i = 1, 2)$. Это условие обеспечивает выполнение условия (5).

4.2. Пусть ξ и η –комплексные числа такие, что $\alpha(\xi - \eta)/(2\pi i)$ не является неотрицательным целым числом. Функцию G определим по формуле

$$G(z, \xi, \eta) = z^{-1/2}(z + i)\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta\right) \mathrm{B}\left[\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi\right), -\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta\right)\right],$$

где B – хорошо известная бета-функция. Приведем некоторые оценки, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 2. *Существуют числа $c, c' \in \mathbb{R}_+$ и $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ такие, что для достаточно больших $|\ln |z||$ справедлива следующая оценка*

$$c\,|\ln|z||^{\delta} < |G(z, \xi, \eta)| < c'\,|\ln|z||^{\delta'}.$$

Доказательство. Пусть $f(z) = \frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi\right)$. Поскольку

$$\operatorname{Re} f = -\frac{\alpha}{2\pi}\operatorname{Im}\xi + \frac{1}{2\pi}\arg z, \quad \operatorname{Im} f = -\frac{\ln|z|}{2\pi} + \frac{\alpha}{2\pi}\operatorname{Re}\xi,$$

то очевидно, что если $|\ln|z|| \to +\infty$, то $f(z) \to \infty$, оставаясь в полосе

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\operatorname{Im}\xi - \frac{1}{2} \le \operatorname{Re} f \le -\frac{\alpha}{2\pi}\operatorname{Im}\xi + \frac{1}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что для достаточно больших $|z|$ имеет место

$$\left|\arg f + \frac{\pi}{2}\right| < tg\left|\arg f + \frac{\pi}{2}\right| = O\left((\ln|z|)^{-1}\right).$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $|z|$ справедливо равенство

$$|z|^{\frac{1}{2\pi}\arg\left(\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha}-\xi\right)\right)} = \widetilde{O}\left(|z|^{-1/4}\right), \tag{9}$$

где под записью $f_1 = \widetilde{O}(f_2)$ мы подразумеваем одновременное выполнение условий $f_1 = O(f_2)$ и $f_2 = O(f_1)$.

Аналогичным образом, нетрудно убедиться, что для достаточно малых $|z|$ справедливо равенство

$$|z|^{\frac{1}{2\pi}\arg\left(\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha}-\xi\right)\right)} = \widetilde{O}\left(|z|^{1/4}\right). \tag{10}$$

Пользуясь известным асимптотическим разложением гамма-функции (см. [13])

$$\Gamma(z) = \frac{e^{(z-1/2)\ln z}}{e^z}\left[1 + O\left(z^{-1}\right)\right], \quad |\arg z| < \pi,$$

при достаточно больших $|\ln|z||$ мы получим следующее равенство

$$|\Gamma\left(f(z)\right)| = \widetilde{O}\left(e^{\mathrm{Re} f - \frac{\alpha \mathrm{Re}\xi}{2\pi}\arg f}|z|^{\frac{1}{2\pi}\arg f}|f|^{\mathrm{Re} f - \frac{1}{2}}\right).$$

Учитывая равенства (9), (10) и соотношение $|f| = \widetilde{O}(|\ln|z||)$, а также ограниченность функции $e^{\mathrm{Re} f - \frac{\alpha \mathrm{Re}\xi}{2\pi}\arg f}$, нетрудно убедиться в существовании положительных чисел c_1, c_2 и действительных чисел δ_1, δ_2 таких, что при достаточно больших значениях $|z|$ имеем место оценка

$$c_1|z|^{-1/4}\left(\ln|z|\right)^{\delta_1} < |\Gamma(f)| < c_2|z|^{-1/4}\left(\ln|z|\right)^{\delta_2}, \tag{11}$$

а при достаточно малых значениях $|z|$ имеет место оценка

$$c_1|z|^{1/4}|\ln|z||^{\delta_1} < |\Gamma(f)| < c_2|z|^{1/4}|\ln|z||^{\delta_2}. \tag{12}$$

Взяв в (11) и (12) $1/z$ вместо z получим оценки для $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha}-\eta\right)\right)$. Справедливость утверждения леммы вытекает из вышеуказанных оценок.

4.3. Обозначим через l_i количество нулей многочлена Q_i $(i = 1, 2)$ в верхней полуплоскости. Пусть $\lambda_1^+ \ldots \lambda_{l_1}^+$, $\lambda_1^- \ldots \lambda_{n-l_1}^-$ – нули Q_1, а $\mu_1^+ \ldots \mu_{l_2}^+$, $\mu_1^- \ldots \mu_{n-l_2}^-$ – нули Q_2, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{Im}\ (\lambda_k^+) > 0, \quad \mathrm{Im}\ (\mu_s^+) > 0 \quad (k = 1\ldots l_1, s = 1\ldots l_2),$$

$$\mathrm{Im}\ (\lambda_k^-) < 0, \quad \mathrm{Im}\ (\mu_s^-) < 0 \quad (k = 1\ldots n-l_1, s = 1\ldots n-l_2).$$

Напомним, что

$$\Psi(x) = Q_1(\alpha^{-1}\ln x)Q_2^{-1}(\alpha^{-1}\ln x) \quad \text{при} \quad x > 0$$

и $\Psi(x) = 1$ при $x < 0$. Обозначим

$$q = \lim_{x\to+\infty} \Psi(x).$$

Лемма 3. *Для факторизуемости функции Ψ в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ необходимы и достаточны условия*

$$Q_i(x) \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\arg q + \beta\right| \neq 1. \tag{14}$$

Если эти условия выполнены, то индекс функции Ψ вычисляется по формуле $\kappa = l_1 - l_2$. Кроме того, если m – целое число, определяемое из условия

$$\left|\frac{1}{\pi}\arg q + \beta + 2m\right| < 1$$

и

$$\Psi_+(z) = z^{-m} z^{-\frac{\ln q}{2\pi i}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{l_1} G\left(z, -i, \lambda_k^+\right) \prod\limits_{k=1}^{n-l_2} G\left(z, \mu_k^-, i\right)}{\prod\limits_{k=1}^{l_2} G\left(z, -i, \mu_k^+\right) \prod\limits_{k=1}^{n-l_1} G\left(z, \lambda_k^-, i\right) \left[G\left(z, -i, i\right)\right]^{l_1 - l_2}},$$

$$\Psi_-(t) = \Psi(t)\Psi_+^{-1}(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa},$$

то представление (2) является факторизацией Ψ в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$.

Доказательство. Пусть выполнены условия (13), (14) и пусть

$$\nu = \frac{1}{\pi}\arg q + \beta + 2m.$$

Пользуясь монотонностью действительной функции $x^{-k}\ln^{\delta}(x)$ $(k > 1)$ при достаточно больших x и леммой 2 нетрудно убедиться, что существуют положительные числа c и M такие, что для $z = x + iy$,

$$\left|\frac{z^{-\beta/2}\Psi_+(z)}{z+i}\right|^2 \le c\frac{\ln^\delta |x|}{|x|^{2+\nu}}, \quad \text{при } |x| \ge M,\ y \ge 0,$$

$$\left|\frac{z^{-\beta/2}\Psi_+(z)}{z+i}\right|^2 \le c\frac{\ln^\delta \sqrt{x^2+M^2}}{\sqrt{x^2+M^2}^{2+\nu}}, \quad \text{при } |x| \le M, \quad |y| \ge M.$$

Поскольку функция $\partial_y(|z|^{-\nu}\left|\ln|z|\right|^\delta)$ знакопостоянна в интервале $(0,\Delta)$ при достаточно малых Δ, то либо

$$|z|^{-\nu}\left|\ln|z|\right|^\delta \le |x|^{-\nu}\left|\ln|x|\right|^\delta,$$

либо

$$|z|^{-\nu}\left|\ln|z|\right|^\delta \le \sqrt{x^2+\Delta^2}^{-\nu}\left|\ln\sqrt{x^2+\Delta^2}\right|^\delta,$$

как только $x \in (-\Delta,\Delta)$, а $y \in (0,\Delta)$. Из этих оценок и аналитичности $\Psi_+(z)$ в верхней полуплоскости следует, что

$$\frac{z^{-\beta/2}\Psi_+(z)}{z+i} \in L_2^+(\mathbb{R}).$$

Аналогичным образом доказываются остальные включения (3.
Пусть

$$\widetilde{\Psi}(\zeta) = \Psi(\tau(\zeta)) \quad \text{и} \quad \widetilde{\Psi}_\pm(\zeta) = \Psi_\pm(\tau(\zeta)).$$

Как мы уже отмечали, условия (3) эквивалентны условиям

$$\widetilde{\Psi}_-^{\pm1} \in L_2^-(\mathbb{T},|\tau|^{\pm\beta}), \quad \widetilde{\Psi}_+^{\pm1} \in L_2^+(\mathbb{T},|\tau|^{\mp\beta}). \tag{15}$$

Функция $\widetilde{\Psi}$ непрерывна и отлична от нуля на множестве $\mathbb{T}\backslash\{-1,1\}$. Кроме того, существуют конечные пределы

$$\widetilde{\Psi}(-1-0) = \lim_{\zeta\to-1}\widetilde{\Psi}(\zeta) = 1, \qquad \operatorname{Im}\zeta > 0, \quad \zeta\in\mathbb{T},$$

$$\widetilde{\Psi}(-1+0) = \lim_{\zeta\to-1}\widetilde{\Psi}(\zeta) = q, \qquad \operatorname{Im}\zeta < 0, \quad \zeta\in\mathbb{T},$$

$$\widetilde{\Psi}(1-0) = \lim_{\zeta\to1}\widetilde{\Psi}(\zeta) = q, \qquad \operatorname{Im}\zeta < 0, \quad \zeta\in\mathbb{T},$$

$$\widetilde{\Psi}(1+0)=\lim_{\zeta\to 1}\widetilde{\Psi}(\zeta)=1, \qquad \operatorname{Im}\zeta>0, \quad \zeta\in\mathbb{T}.$$

Отсюда, в силу условия $\left|\frac{1}{\pi}\arg q+\beta\right|\neq 1$ следует, что функция $\widetilde{\Psi}$ допускает обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T},|\tau|^{\beta})$ (см. [6], гл. 9). Из существования обобщенной факторизации и условий (15) следует, что

$$\widetilde{\Psi}(\zeta)=\widetilde{\Psi}_-(\zeta)\zeta^{\kappa}\widetilde{\Psi}_+(\zeta)$$

также является обобщенной факторизацией $\widetilde{\Psi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T},|\tau|^{\beta})$. Это означает, что представление (2) является факторизацией Ψ в $L_2(\mathbb{R},\rho(|t|))$.

Выполнение условий (13) и (14) необходимо для существования обобщенной факторизации $\widetilde{\Psi}$ (см. [6], гл. 9) и потому необходимо и для факторизации Ψ. Это завершает доказательство.

Следующее утверждение непосредственно следует из леммы 3 и теорем 1, 2.

Теорема 4. *Пусть* $Q_i(x)\neq 0$ $(x\in\mathbb{R},\ i=1,2)$, $\left|\frac{1}{\pi}\arg q+\beta\right|\neq 1$ *и* $\kappa=l_1-l_2$. *Тогда: (A) При* $\kappa<0$, *функции*

$$y_j(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}e^{st}A_0^{-1}(t)\frac{\Psi_+^{-1}(e^{\alpha t})}{e^{\alpha t}+i}\left(\frac{e^{\alpha t}-i}{e^{\alpha t}+i}\right)^{j-1}dt, \quad j=1,...,-\kappa,$$

составляют базис в $\operatorname{Ker}A(x,D)$, *а при* $\kappa\geq 0$ *однородное уравнение* $A(x,D)y=0$ *имеет лишь тривиальное решение.*

(B) При $\kappa\leq 0$, $f\in L_2(\mathbb{R})$,

$$g_0=(\omega_1^{-1}f,0)\in L_2(\mathbb{R}_+,\rho)\oplus L_2(\mathbb{R}_-,\rho(|t|)),$$

$$z=\left(\Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{+}\Lambda_{\Psi_+^{-1}}+\Lambda_{\Psi_-^{-1}}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-}\Lambda_{\Psi_+^{-1}}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\Lambda_{\Psi}\right)\left(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{+}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}I+\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-}\right)g_0,$$

функция

$$y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}e^{st}A_0^{-1}(t)z(e^{\alpha t})dt \tag{16}$$

является решением уравнения $A(x,D)y=f$. *При* $\kappa>0$ *неоднородное уравнение* $A(x,D)y=f$ *разрешимо лишь при выполнении условий*

$$\int_0^{\infty}(\omega_1^{-1}f)(t)\left[\Psi_-^{-1}(t)-\Psi_+(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\right]\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-j}\frac{dt}{t+i}=0,$$

$j=1,2,\ldots,\kappa$. *В случае выполнения этих условий единственное решение неоднородного уравнения задается формулой (16).*

В заключение авторы выражают благодарность профессору А. О. Оганесяну за внимание и полезное обсуждение.

Abstract. The paper suggests an approach to one-dimensional pseudodifferential equations of nonnegative order, whose symbols are of the form $A_1(\xi) + \mathrm{th}(kx + \omega)A_2(\xi)$. The method is based on reduction of the considered pseudodifferential equation to an integral equation. Some integral representations of solutions are found.

Список литературы

[1] Ю. И. Черский, "Нормально разложимое уравнение плавного перехода" ДАН СССР **190** (1), 57-60 (1970).

[2] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки* (Наука, Москва, 1978).

[3] Фан Танг Да, "Об одном интегральном уравнении типа плавного перехода," Диф. уравнения **8** (6), 1058-1067 (1972).

[4] Фан Танг Да, "Об одной краевой задаче Газемана для полуплоскости и интегральных уравнениях типа свертки с аналитическими ядрами," Изв. ВУЗов, мат. (10), 73-82 (1973).

[5] А. Г. Камалян, А. Б. Нерсесян, "Интегральные уравнения типа свертки," АН СССР, Функ. анализ и прим. **23** (2) 32-39 (1989).

[6] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов* (Кишинев, Штиница, 1992).

[7] З. Престдорф, "Линейные интегральные уравнения," Итоги науки и техники **27**, 5-130 (ВИНИТИ, Москва, 1988).

[8] H. Bart, I. Ts. Gohberg, M. Kaashoek, The Coupling Method for Solving Integral Equations. Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel, 1984)

[9] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций* (ИЛ, Москва, 1975).

[10] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, *Factorization of Measurable Matrix Functions* (Akademie Verlag, Berlin, 1987).

[11] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций* (ГИТЛ, Москва, 1950).

[12] Г. И. Эскин, *Краевые задачидля эллиптических псевдодифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1973).

[13] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions* **1,2** (Wiley, NY, London, 1953).

Поступила 28 декабря 2007

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2007, стр. 72-84

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФЛЕРА В КЛАССАХ $L^2(D)$

М. А. ГАЛДУНЦ И С. Г. РАФАЕЛЯН

Ереванский Государственный университет,
Европейская региональная образовательная академия (ERIICTA)
E-mail: *rafayelyansg@mail.ru*

Аннотация. Статья посвящена выявлению параметрического представления пространств $W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ типа Винера-Пэли целых функций экспоненциального типа многих переменных, изучена базисность систем функций типа Миттаг-Лефлера в этих пространствах, а также в явном виде построена биортогональная система функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена выявлению параметрического представления пространств $W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ типа Винера-Пэли целых функций экспоненциального типа многих переменных, изучена базисность систем функций типа Миттаг-Лефлера в этих пространствах, а также в явном виде построена биортогональная система функций.

Исходным пунктом для данной работы являются теоремы типа Винера-Пэли о параметрическом представлении некоторых весовых пространств целых функций [1]. В частности, в [1] установлена следующая теорема, на которую мы часто будем опираться.

Пусть $W^{p,w}_{\sigma}$ $(1 < p < \infty, -1 < w < p-1, \sigma > 0)$ – пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,w} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^w dx \right\}^{1/p} < +\infty, \tag{1.1}$$

а

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}, \quad \rho > 0, \ -\infty < \mu < +\infty, --$$

целая функция типа Миттаг-Лефлера порядка ρ и типа $\sigma = 1$, которая обладает известными асимптотическими свойствами, обеспечивающими возможность установления многих результатов [7].

Теорема 1. *Класс $W_\sigma^{2,w}$ $(-1 < w < 1,\ \sigma > 0)$ совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx;\mu)\varphi(x)|x|^{\mu-1}\,dx \tag{1.2}$$

где $\mu = 1 + w/2$ and $\varphi(x) \in L^{2,-w}(-\sigma,\sigma)$, т.е.

$$\|\varphi\|_{L^{2,-w}(-\sigma,\sigma)} = \left\{\int_{-\sigma}^{\sigma} |\varphi(x)|^2|x|^{-w}dx\right\}^{1/2} < +\infty.$$

В данной статье рассматриваются весовые классы целых функций экспоненциального типа в двумерном случае. Функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ n-переменных называется функцией экспоненциального типа $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, если при любом $\varepsilon > 0$

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \le e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z_1|+(\sigma_2+\varepsilon)|z_2|+\cdots+(\sigma_n+\varepsilon)|z_n|}$$

Через $W_{\sigma_1,\sigma_2}^{p,w_1,w_2}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < w_i < p-1,\ \sigma_i > 0)$ мы обозначаем пространство целых функций $f(z_1, z_2)$ экспоненциального типа (σ_1, σ_2) с нормой

$$\|f\|_{p,w_1,w_2} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1,x_2)|^p|x_1|^{w_1}|x_2|^{w_2}dx_1\,dx_2\right\}^{1/p} < +\infty, \tag{1.3}$$

где $z_i = x_i + iy_i$ $(i = 1, 2)$. Это пространство является двумерным аналогом пространства $W_\sigma^{p,w}$ Винера-Пэли, и для него будет доказан следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Класс $W_{\sigma_1,\sigma_2}^{2,w_1,w_2}$ $(-1 < w_i < 1,\ \sigma_i > 0,\ i = 1, 2)$ совпадает с классом функций, допускающих представление следующего вида*

$$f(z_1, z_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_1 z_1;\mu_1)E_1(i\tau_2 z_2;\mu_2)\varphi(\tau_1,\tau_2)|\tau_1|^{\mu_1-1}|\tau_2|^{\mu_2-1}d\tau_1\,d\tau_2, \tag{1.4}$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ $(i = 1, 2)$ и $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$ причем $D = (-\sigma_1, \sigma_1) \times (-\sigma_2, \sigma_2)$, т.е.

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \equiv \left\{ \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx_1\, dx_2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Получен также ряд результатов о базисности систем функций типа Миттаг-Лефлера, ассоциированных с последовательностями нулей целых функций, обобщающих классы целых функций типа синуса.

Через S_λ $(-1 < \lambda < 1)$ мы обозначаем класс целых функций $s(z)$ экспоненциального типа $\le \sigma$, с последовательностью нулей $\{z_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\inf_{k \ne j} |z_k - z_j| > 0$$

и таких, что при некоторых положительных константах c, C и K, зависящих от функции $s(z)$,

$$0 < c < |s(z) z^{-\lambda}|\, e^{-\sigma |\mathrm{Im}\ z|} < C < +\infty, \quad |\mathrm{Im}\ z| > K.$$

Отметим, что класс целых функций типа синуса Б. Я.Левина [4, 5] – это подкласс тех функций из S_0, которые не имеют кратных нулей.

Далее, через $S_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ мы обозначаем класс целых функций $s(z^1, \dots, z^n)$ n переменных, имеющих вид

$$s(z^1, z^2, \dots, z^n) = s_1(z^1) s_2(z^2) \cdots s_n(z^n),$$

где $s_i(z^i) \in S_{\lambda_i}$ $(i = \overline{1,n} = 1, 2, \dots, n)$.

Полагая, что $\left\{z_k^i\right\}_0^\infty$ – последовательность корней $s_i(z^i)$, пронумерованных в порядке неубывания модулей, через $s_k^i \ge 1$ и $p_k^i \ge 1$ $(k \ge 0)$ мы обозначаем кратности появления числа z_k^i соответственно на отрезке $\left\{z_j^i\right\}_0^k$ и во всей последовательности $\left\{z_j^i\right\}_0^\infty$. Далее, полагая, что

$$a_\nu^i\left(z_k^i\right) = \frac{1}{\nu_1^1} \left\{ \frac{d^\nu}{(dz^i)^\nu} \frac{\left(z - z_k^i\right)^{p_k^i}}{s_i(z^i)} \right\}_{z^i = z_k^i}$$

и

$$g_i^k(z^i) = \sum_{\nu=0}^{p_k^i - s_k^i} a_\nu^i\left(z_k^i\right) \left(z - z_k^i\right)^\nu$$

будем рассматривать целые функции

$$\Omega_i^k(z^i) = \frac{s_i(z^i)\, q_i^k(z^i)}{(s_k^i - 1)!\, \left(z^i - z_k^i\right)^{p_k^i - s_k^i + 1}} = \frac{s_i(z^i)}{(s_k^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k^i - s_k^i} \frac{a_\nu^i\left(z_k^i\right)}{\left(z^i - z_k^i\right)^{p_k^i - s_k^i - \nu + 1}}.$$

Как известно [6], для функции

$$\Omega^{\kappa}(z) = \Omega_1^{i_1}(z^1)\cdots\Omega_n^{i_n}(z^n) = \prod_{i=1}^{n}\Omega_i^{\kappa}(z^i), \quad \kappa = (i_1,\ldots,i_n), \quad i_j = \overline{0,\infty}:$$

справедливы следующие утверждения:

(1.5)

$$1)\ \left.\frac{\partial^{\left(s_{i_1}^1-1+s_{i_2}^2-1+\cdots+s_{i_n}^n-1\right)}\Omega^{\kappa}}{\partial^{\left(s_{i_1}^1-1\right)}z_1\,\partial^{\left(s_{i_2}^2-1\right)}z_2\cdots\partial^{\left(s_{i_n}^n-1\right)}z_n}\right|_{\left(z_{j_1}^1,\ldots,z_{j_n}^n\right)} = \delta_{\kappa_i,\kappa_j} = \begin{cases} 1, & \kappa_i = \kappa_j \\ 0, & \kappa_i \neq \kappa_j\,, \end{cases},$$

2) Если $S(z)\in S_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ и $p\lambda_i + w_i < p-1$, то

$$\Omega^{\kappa}(z)\in W^{p,w_1,\ldots,w_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}. \tag{1.6}$$

2. ТЕОРЕМЫ ТИПА ВИНЕРА-ПЭЛИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Доказательство теоремы 2: Как известно (см. [1], стр. 364) в представлении (1.2) класса $W_{\sigma}^{2,w}$ $(-1<w<1,\ \sigma>0)$ для функции $\varphi(x)$ имеет место следующая формула обращения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}f(x)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\,v}|v|\right)^{\mu-1}dv, \tag{2.1}$$

где $x\in(-\sigma,\sigma)$

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m}}\,\varphi_{\sigma}(x) = \varphi(x), \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{-i\tau v}f(v)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\,v}|v|\right)^{\mu-1}dv \tag{2.3}$$

и

$$\|f\|_{2,w}\asymp\|\varphi\|_2, \tag{2.4}$$

где символ $a\asymp b$ означает, что отношение величин a/b заключено между двумя положительными постоянными.

В функции $f(z_1,z_2)$ зафиксируем переменную z_2 и получим функцию $f(z_1,\cdot)$ одной переменной, принадлежащую классу $W_{\sigma_1}^{2,w_1}$. Следовательно, имет место следующее интегральное представление:

$$f(z_1,\cdot)=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}E_1(i\tau_1 z_1;\mu_1)\varphi^*(\tau,\cdot)|\tau_1|^{\mu_1-1}d\tau_1, \tag{2.5}$$

где $\mu_1=w_1/2+1$, $\varphi^*(\tau_1,\cdot)\in L_2(-\sigma_1,\sigma_1)$. Согласно формуле обращения (2.1),

$$\varphi^*(\tau_1,\cdot)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau_1 v_1}-1}{-iv_1}f(v_1,\cdot)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\, v_1}|v_1|\right)^{\mu_1-1}dv_1, \tag{2.6}$$

где $\tau_1\in(-\sigma_1,\sigma_1)$. Вне интервала $(-\sigma_1,\sigma_1)$ функция φ^* равна нулю. Аналогично, согласно формулам (2.2) и (2.3)

$$\underset{s_1\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\varphi^*_{\sigma_1}(\tau_1,\cdot)=\varphi^*(\tau_1,\cdot),$$

где

$$\varphi^*_{\sigma_1}(\tau_1,\cdot)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}e^{-i\tau_1 v_1}f(v_1,\cdot)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\, v_1}|v_1|\right)^{\mu_1-1}dv_1. \tag{2.7}$$

Мы докажем, что функция $\varphi^*(\cdot,z_2)$, которая уже зависит от второй переменной, принадлежит классу $W^{2,w_2}_{\sigma_2}$. Для этого достаточно доказать, что $\varphi^*_{\sigma_1}(\cdot,z_2)\in W^{2,w_2}_{\sigma_2}$. Очевидно, функция $\varphi^*_{\sigma_1}(\cdot,z_2)$ – целая функция от z_2, так как $f(z_1,z_2)$ – целая функция. Далее, ввиду (2.7)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi^*_{\sigma_1}(v_1,v_2)\right|^2|v_2|^{2(\mu_2-1)}dv_2\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}e^{-i\tau_1 v_1}f(v_1,v_2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\, v_1}|v_1|\right)^{\mu_1-1}dv_1\right|^2|v_2|^{2(\mu_2-1)}dv_2\\
&\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|f(v_1,v_2)|\,|v_1|^{\mu_1-1}dv_1\right)|v_2|^{2(\mu_2-1)}dv_2\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|f(v_1,v_2)|\,|v_1|^{\mu_1-1}|v_2|^{\mu_2-1}dv_1\right)^2dv_2\\
&\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|f(v_1,v_2)|^2|v_1|^{2(\mu_1-1)}|v_2|^{2(\mu_2-1)}dv_1\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}dv_1\right)dv_2\\
&=2\sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|f(v_1,v_2)|^2|v_1|^{2(\mu_1-1)}|v_2|^{2(\mu_2-1)}dv_1dv_2\\
&\le 2\sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(v_1,v_2)|^2|v_1|^{w_1}|v_2|^{w_2}dv_1dv_2=\|f\|_{p,w_1,w_2}<+\infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi^*_{\sigma_1}(\cdot,\tau_2)\in L^{2,w_2}(-\infty,\infty)$. Осталось доказать, что $\varphi^*_{\sigma_1}(\cdot,z_2)$ – функция экспоненциального типа $\le\sigma_2$ относительно z_2. Для этого заметим, что

$$\left|\varphi^*_{\sigma_1}(\cdot,z_2)\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}e^{-iz_1 v_1}f(v_1,z_2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}sign\, v_1}|v_1|\right)^{\mu_1-1}dv_1\right|$$

$$\leq C\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|f(v_1,z_2)|\,|v_1|^{\mu_1-1}dv_1\leq C_1\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}e^{\sigma_2|z_2|}|v_1|^{\mu_1-1}dv_1$$
$$=e^{\sigma_2|z_2|}C_1\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|v_1|^{\mu_1-1}dv_1=C_2e^{\sigma_2|z_2|}.$$

Итак, $\varphi^*(\cdot,z_2)\in W^{2,w_2}_{\sigma_2}$. Следовательно,

$$\varphi^*(\cdot,z_2)=\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}E_1(i\tau_2z_2;\mu_2)\varphi(\cdot,\tau_2)|\tau_2|^{\mu_2-1}d\tau_2, \tag{2.8}$$

где $\varphi(\cdot,\tau_2)\in L_2(-\sigma_2,\sigma_2)$. Формулу (2.8) подставим в (2.5). Получим

$$f(z_1,z_2)=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}E_1(i\tau_1z_1;\mu_1)\varphi^*(\tau_1,z_2)|\tau_1|^{\mu_1-1}d\tau_1$$
$$=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}E_1(i\tau_1z_1;\mu_1)E_1(i\tau_2z_2;\mu_2)\varphi(\tau_1,\tau_2)|\tau_1|^{\mu_1-1}|\tau_2|^{\mu_2-1}d\tau_1\,d\tau_2,$$

где $\mu_i=1+w_i/2$ and $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in L_2(D)$. Теорема доказана.

Отметим, что при частных значениях параметров $\mu_1=\mu_2=1$ теорема 1 переходит в следующую известную теорему Пойа-Планшереля (см. [1]).

Теорема 3. (Пойа-Планшерель) *Класс* $W^{2,0,0}_{\sigma_1,\sigma_2}$ $(\sigma_i>0,\ i=1,2)$ *совпадает с классом функций, допускающих представление следующего вида*

$$f(z_1,z_2)=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}e^{i(z_1t_1+z_2t_2)}\varphi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

где

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}|\varphi(t_1,t_2)|^2dt_1\,dt_2=\|\varphi\|^2<+\infty.$$

Следующая теорема устанавливает связь между нормами функций $f(z_1,z_2)\in W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ и $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in L_2(D)$ из представления (1.4).

Теорема 4. *Если функция* $f(z_1,z_2)\in W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ $(-1<w_i<1,\,\sigma_i>0)$ *и* $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in L_2(D)$ *– соответствующая функция из представления* (1.4), *то*

$$\|f\|_{W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}}\asymp\|\varphi\|_{L_2(D)}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Зафиксировав переменную z_2 в функции $f(z_1,z_2)\in W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$, получим функцию одной переменной, принадлежащую классу $W^{2,w_1}_{\sigma_1}$. По отношению к такой функции можно применять одномерную оценку (2.4). В итоге имеем двойное неравенство

$$C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} dy_1 \leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 dy_1$$
$$\leq C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} dy_1.$$

Умножим это неравенство на $|y_2|^{w_2}$ и проинтегрируем по y_2. Получим

$$C_1' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2$$
$$\leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2$$
$$\leq C_2' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2.$$

Следовательно,

$$C_1' \, \|f\|^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2} \leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2 \leq C_2' \, \|f\|^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}. \tag{2.10}$$

При доказательстве теоремы 2, исходя из свойств функции $\varphi^*(z_1, z_2) \in W^{2,w_2}_{\sigma_2}$ мы пришли к функции $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$. По отношению к этим двум функциям еще раз применим одномерную оценку. В итоге получим

$$A_2 \, \|\varphi^*\|^{2,w_2}_{\sigma_2} \leq \|\varphi\|_{L_2(\cdot,R)} \leq A_1 \, \|\varphi^*\|^{2,w_2}_{\sigma_2},$$

т.е.

$$A_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_2 \leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |\varphi(y_1, y_2)|^2 dy_2$$
$$\leq A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_2.$$

и

$$A_2 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2 \leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(y_1, y_2)|^2 dy_1\, dy_2$$
$$\leq A_1 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1\, dy_2. \tag{2.11}$$

Связывая неравенства (2.10) и (2.11) получим

$$B_1 \, \|f\|^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2} \leq \|\varphi\|_{L_2(D)} \leq B_2 \, \|f\|^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$$

и

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \asymp \|f\|^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$$

3. БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФЛЕРА

Пусть $\sigma_i > 0$, $-1 < w_i < 1$ $(i = 1, 2)$ и $s(z) \in S_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$, т.е. $s(z) = s_1(z^1)\dots s_n(z^n)$, где $s_i(z^i) \in S_{\lambda_i}$. Напомним, что $\left\{z_k^i\right\}_0^\infty$ – последовательность корней $s_i(z^i)$, а s_k^i и p_k^i – соответственно кратности нулей на отрезке последовательности и во всей последовательности.

Докажем следующую теорему о базисности систем функций типа Миттаг-Леффлера.

Теорема 5. *Система функций*

$$\{G_{\ell,p}(\tau_1,\tau_2)\}_{\ell,p} \equiv$$

(3.1)
$$\left\{E_1^{\left(s_\ell^1-1\right)}\left(i\tau_1 z_\ell^1;\mu_1\right)\left(i\tau_1\right)^{s_\ell^1-1}E_1^{\left(s_p^2-1\right)}\left(i\tau_2 z_p^2;\mu_2\right)\left(i\tau_2\right)^{s_p^2-1}|\tau_1|^{\mu-1}|\tau_2|^{\mu_2-1}\right\}_{\ell,\,p},$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ *и* $-1 < w_i + 2\lambda_i < 1$ $(i = 1, 2)$ ***является базисом Рисса в пространстве*** $L_2(D)$, *т.е.* ***любая функция*** $f(x_1, x_2) \in L_2(D)$ ***единственным образом разлагается в ряд***

$$f(x_1,x_2) = \sum_{\ell,p} C_{\ell,p}(f)\, G_{\ell,p}(x_1,x_2), \tag{3.2}$$

сходящийся по норме пространства $L_2(D)$ *и*

$$C_{\ell,p}(f) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} f(x_1,x_2)\varphi_{\ell,p}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{3.3}$$

Также

$$\|f\|_{L_2(D)} \asymp \|\{C_{\ell,p}\}\|_{\ell^{2,\lambda_1,\lambda_2}}\,, \tag{3.4}$$

где $\{\varphi_{\ell,p}(x_1,x_2)\}$ – ***биортогональная система функций*** $\{G_{\ell,p}(\tau_1,\tau_2)\}$.

Доказательство. Как известно (см. [6]), если $\left\{z_k^i\right\}_0^\infty$ – нули функции $s_i(z^i)$ $(i = \overline{1,n}$, $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1))$, то система функций $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa\in\mathbb{R}_+^n}$ образует базис Рисса в пространстве $W_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{p,w_1,\dots,w_n}$, т.е. всякая $f(z) \in W_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{p,w_1,\dots,w_n}$ единственным образом разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{\kappa\in\mathbb{R}_+^n} C_\kappa(f)\Omega^\kappa(z), \tag{3.5}$$

где

$$C_\kappa(f) = \frac{\partial^{\left(s^1_{i_1}-1+\cdots+s^n_{i_n}-1\right)} f(z^1_{i_1},\ldots,z^n_{i_n})}{\partial^{s^1_{i_1}-1}z^1 \partial^{s^2_{i_2}-1}z^2\ldots\partial^{s^n_{i_n}-1}z^n}, \quad \kappa = (i_1, i_2, \ldots, i_n). \tag{3.6}$$

Так как ряд (3.5) сходится в $W^{p,w_1,\ldots,w_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ и

$$\|f\|^{p,w_1,\ldots,w_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} \asymp \|\{C_\kappa\}\|_{\ell^p,\lambda_1,\ldots,\lambda_n} ,$$

то, используя (1.6), при $w_i + 2\lambda_i < 1$ $(i = 1, 2)$ имеем

$$\Omega^\kappa(z) \in W^{2,w_1,,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}.$$

Следовательно, по теореме 2 существует система функций

$$\{\varphi_\kappa(x_1, x_2)\}_{\kappa\in\mathbb{R}^2_+} \quad (\varphi_\kappa(x_1, x_2) \in L_2(D)),$$

для которых имеют место равенства

$$\Omega^\kappa(z^1, z^2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1\left(i\tau_1 z^1; \mu_1\right) E_2\left(i\tau_2 z^2; \mu_2\right) |\tau_1|^{\mu-1} |\tau_2|^{\mu_2-1} \varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \tag{3.7}$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ $(i = 1, 2)$, и каждая из функций $\varphi_\kappa(x_1, x_2)$ определяется единственным образом по $\Omega^\kappa(z^1, z^2)$. После $\left(s^1_\ell - 1\right)$ и $\left(s^2_p - 1\right)$ - кратного дифференцирования (3.7) соответственно по z^1 и z^2, получим

$$\frac{\partial^{s^1_\ell-1+s^2_p-1}\Omega^\kappa(z^1_\ell; z^2_p)}{\partial^{s^1_\ell-1}z^1\partial^{s^2_p-1}z^2} = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}\left\{\frac{\partial^{s^1_\ell-1}E_1(i\tau_1 z^1_\ell; \mu_1)}{\partial^{s^1_\ell-1}z^1}(i\tau_1)^{\left(s^1_\ell-1\right)}\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^{s^2_p-1}E_1(i\tau_2 z^2_p; \mu_2)}{\partial^{s^2_p-1}z^2}(i\tau_2)^{\left(s^2_p-1\right)}|\tau_1|^{\mu_1-1}|\tau_2|^{\mu_2-1}\varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2)\right\} d\tau_1\, d\tau_2.$$

Далее, ввиду интерполяционных свойств (1.5) $\Omega^\kappa(z)$

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} G_{\ell,p}(\tau_1, \tau_2)\varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 = \delta_{(\kappa,\ell)},$$

где $\kappa = (i_1, i_2)$ и $e = (\ell, p)$. Следовательно, система функций $\{\varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2)\}_{\kappa\in\mathbb{R}^2_+}$ биортогональной системе $\{G_{\ell,p}(\tau_1, \tau_2)\}_{\ell,p}$, где

$$G_{\ell,p}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial^{s^1_\ell-1}E_1(i\tau_1 z^1_\ell; \mu_1)}{\partial^{s^1_\ell-1}z^1}(i\tau_1)^{s^1_\ell-1}$$
$$\times\frac{\partial^{s^2_p-1}E_1(i\tau_2 z^2_p; \mu_2)}{\partial^{s^2_p-1}z^2}(i\tau_2)^{s^2_p-1}|\tau_1|^{\mu_1-1}|\tau_2|^{\mu_2-1}.$$

Из теоремы 2 следует, что (1.4) - ограниченный интегральный оператор отображающий $L_2(D)$ на $W^{p,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$. С другой стороны, система функций $\{\Omega^{\kappa}(z)\}_{\kappa\in\mathbb{R}^2_+}$ образует базис Рисса в $W^{p,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ [6]. Следовательно, система $\{\varphi_\kappa(x_1,x_2)\}_{\kappa\in\mathbb{R}^2_+}$ также является базисом Рисса в пространстве $L_2(D)$. А так как эта система функций биортогональна с системой (3.1), то система (3.1) также образует базис Рисса в $L_2(D)$. Поэтому, если $f\in L_2(D)$, то

$$f(x_1,x_2)=\sum_{(\ell,p)}C_{\ell,p}(f)G_{\ell,p}(x_1,x_2), \tag{3.8}$$

где ряд (3.8) сходится по норме пространства $L_2(D)$, и имеют место соотношения:

$$C_{\ell,p}(f)=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}f(x_1,x_2)\varphi_{(\ell,p)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2,$$
$$\|f\|_{L_2(D)}\asymp\left\|\{C_{(\ell,p)}\}\right\|_{\ell^{\ell,\lambda_1,\lambda_2}}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые специальные случаи теоремы 5, которые представляют особый интерес.

1°. Пусть $w_i=0$, $\mu_i=1$ и $\lambda_i\neq 0$ $(i=1,2)$. Тогда ввиду того, что $E_1(z;1)=e^z$, система (3.1) переходит в

$$\left\{e^{i\left(z^1_\ell\tau_1+z^2_p\tau_2\right)}(i\tau_1)^{s^1_\ell-1}(i\tau_2)^{s^2_p-1}\right\}_{\ell,p}, \tag{3.9}$$

и приходим к следующей теореме

Теорема 6. *Пусть $\{z^i_k\}_{k,i}$ – последовательность нулей функций $s_i(z^i)=s_{\chi_i}$. Пусть $-\frac12<\chi_i<\frac12$ $(i=1,2)$, $s(z)=s_1(z^1)s_2(z^2)$, $s(z)\in s_{\lambda_1,\lambda_2}$, и пусть s^1_ℓ и s^2_p – кратности появления чисел z^1_ℓ, z^2_p на соответствующих отрезках. Тогда система функций* (3.9) *образует базис Рисса в $L_2(D)$.*

2°. При $-1<w_i<1$, $\chi_i=0$ $(i=1,2)$ и $s^1_\ell=s^2_p=1$ система (3.1) переходит в некоторую систему, для которой верна

Теорема 7. *Пусть $\{z^i_k\}_{k,i}$ – последовательность нулей функций $s_i(z^i)\in S_0$, $s(z)=s_1(z^1)s_2(z^2)$, $s(z)\in S_{0,0}$ $(\chi_i=0,\ s^1_\ell=s^2_p=1)$ $(i=1,2)$. Тогда система функций*

$$\left\{E_1\left(i\tau_1z^1_\ell;\mu_1\right)|\tau_1|^{\mu_1-1}E_1\left(i\tau_2z^2_p;\mu_2\right)|\tau_2|^{\mu_2-1}\right\}_{(\ell,p)\in\mathbb{R}^2_+},$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ *образует базис Рисса в* $L_2(D)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В этом параграфе будем полагать, что $\left\{z_\ell^1\right\}_\ell$ и $\left\{z_p^2\right\}_p$ – соответственно нули целых функций

$$s_1(z^1;\nu_1) = E_1(i\sigma_1 z^1;\nu_1) - E_1(-i\sigma_1 z^1;\nu_1), \quad 0<\nu_1<2, \quad s_1(z^1,\nu_1)\in s_{1-\nu_1},$$
$$s_2(z^2;\nu_2) = E_1(i\sigma_2 z^2;\nu_2) - E_1(-i\sigma_2 z^2;\nu_2), \quad 0<\nu_2<2, \quad s_2(z^2,\nu_2)\in s_{1-\nu_2}.$$

Мы докажем, что в этом случае биортогональная к (3.1) система имеет определенное аналитическое представление.

Как известно [1], функции $s_1(z^1;\nu_1)$ и $s_2(z^2;\nu_2)$ допускают представление вида

$$s_1(z^1;\nu_1) = 2iz^1E_{1/2}\left(-\sigma_1^2(z^1)^2;1+\nu_1\right), \tag{4.1}$$
$$s_2(z^2;\nu_2) = 2iz^2E_{1/2}\left(-\sigma_2^2(z^2)^2;1+\nu_2\right). \tag{4.2}$$

Кроме того, все нули функции $E_{1/2}(z;\mu)$ просты и вещественны $1\le\mu<3$ [7]. Отсюда и из (4.1) и (4.2) вытекает, что все нули функций s_1 и s_2 $(1\le\nu_{1,2}<2)$ тоже просты и вещественны.

Мы воспользуемся следующей формулой, которая имеет место для любых $\alpha,\beta>0$ и комплексных λ^* и λ [1]:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sigma_1} x^{\alpha-1}E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho};\alpha\right)(\sigma-x)^{\beta-1}E_\rho\left(\lambda^*(\sigma-x)^{1/\rho};\beta\right)dx\\ &=\frac{\lambda E\rho\left(\sigma^{1/\rho}\lambda;\lambda+\beta\right)-\lambda^*E\rho\left(\sigma^{1/\rho}\lambda^*;\alpha+\beta\right)}{\lambda-\lambda^*}\sigma^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Полагая $\rho=1$, $\alpha=\mu$, $\beta=1+\nu-\mu$ и пользуясь равенством

$$zE_1(z;\mu+1)=\frac{E_1(z;\mu)-1}{\Gamma(\mu)}$$

формулу (4.3) можем записать в виде

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sigma} x^{\mu-1}E_1(\lambda x;\mu)(\sigma-x)^{\beta-1}E_1(\lambda^*(\sigma-x);\beta)\,dx\\ &=\frac{E_1(\sigma\lambda;\nu)-E_1(\sigma\lambda^*;\nu)}{\lambda-\lambda^*}\sigma^{\nu-1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Вместо λ и λ^* подставим соответственно $-\lambda$ и $-\lambda^*$ и полученную формулу просуммируем с (4.4), тогда получим

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |x|^{\mu-1} E_1(\lambda x;\mu)(\sigma-|x|)^{\beta-1} E_1\big(\lambda^*(\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\beta\big)\,dx = \big(s_1(-i\lambda;\nu)+s_1(i\lambda^*;\nu)\big)\sigma^{\nu-1}.$$

Подставляя здесь $\lambda^* = iz^k$ и пользуясь обозначениями

$$\left\{E_1\left(iz_k^1 x;\mu\right)|x|^{\mu-1}\right\}_0^\infty \equiv \left\{e_\mu\left(x;iz_k^1\right)\right\}_0^\infty,$$

где $\left\{z_k^1\right\}_0^\infty$ – нули функции $s_1(z^1;\nu)$, получим

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\lambda) e_\beta\left(\sigma-|x|\right)\operatorname{sgn} x; iz_k^1\big)\,dx = \frac{s_1(i\lambda;\nu)}{\lambda-iz_k^1}\sigma^{\nu-1}$$

Так как $\lambda = iz_k^1$ – простые нули функции $s_1(-i\lambda;\nu)$, то

$$\left.\frac{s_1(-i\lambda;\nu)}{\lambda-iz_k^1}\right|_{\lambda=iz_n^1} = \begin{cases} -is_1'\left(z_n^1;\nu\right) & \text{при} \quad n=k \\ 0 & \text{при} \quad n\neq k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;iz_n^1) e_\beta\left((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x; iz_k^1\right)\,dx = \begin{cases} -is_1'\left(z_n^1;\nu\right)\sigma^{\nu-1}, & n=k \\ 0, & n\neq k. \end{cases}$$

Аналогичное равенство имеет место также для функции $s_2(z^2;\nu_2)$, т.е.

$$\int_{-\sigma_{1,2}}^{\sigma_{1,2}} e_{\mu_{1,2}}\left(x_{1,2}; iz_{k_{1,2}}^{1,2}\right) e_{\beta_{1,2}}\left((\sigma_{1,2}-|x_{1,2}|)\operatorname{sgn} x_{1,2}; iz_{k_{1,2}}^{1,2}\right)\,dx_{1,2} = \begin{cases} -is_{1,2}'\left(z_{n_{1,2}}^{1,2};\nu_{1,2}\right)\sigma_{1,2}^{\nu_{1,2}-1} & \text{при} \quad n_{1,2}=k_{1,2} \\ 0 & \text{при} \quad n_{1,2}\neq k_{1,2}. \end{cases}$$

Умножая эти два равенства, получим

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1\left(iz_{n_1}^1 x_1;\mu_1\right)|x_1|^{\mu_1-1} E_1\left(iz_{n_2}^2 x_2;\mu_2\right)|x_2|^{\mu_2-1} \times e_{\beta_1}\left((\sigma_1-|x_1|)\operatorname{sgn} x_1; iz_{k_1}^1\right) e_{\beta_2}\left((\sigma_2-|x_2|)\operatorname{sgn} x_2; iz_{k_2}^2\right)\,dx_1\,dx_2$$

$$= \begin{cases} -s_1'\left(z_{n_1}^1;\nu_1\right)\sigma_1^{\nu_1-1} s_2'\left(z_{n_2}^2;\nu_2\right)\sigma_2^{\nu_2-1} & \text{при} \quad (n_1,n_2)=(k_1,k_2) \\ 0 & \text{при} \quad (n_1,n_2)\neq(k_1,k_2) \end{cases}$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 8. *Системы функций*

$$\left\{E_1\left(iz_{n_1}^1 x_1;\mu_1\right)|x|^{\mu_1-1} E_1\left(iz_{n_2}^2 x_2;\mu_2\right)|x_2|^{\mu_2-1}\right\}_{n_1,n_2}$$

и

$$\left\{\frac{-e_{\beta_1}\left((\sigma_1-|x_1|)\operatorname{sgn}x_1;iz^1_{k_1}\right)e_{\beta_2}\left((\sigma_2-|x_2|)\operatorname{sgn}x_2;iz^2_{k_2}\right)}{\sigma_1^{\nu_1-1}\sigma_2^{\nu_2-1}s_1'\left(z^1_{k_1};\nu_1\right)s_2'\left(z^2_{k_2};\nu_2\right)}\right\}_{k_1,k_2},$$

где $\beta_{1,2}=1+\nu_{1,2}-\mu_{1,2}$, *биортогональны на* D.

В случае $\mu_1=\mu_2=1$ ($\beta_1=\nu_1$, $\beta_2=\nu_2$) система функций $\{e_\mu(x;iz_k)\}_0^\infty$ переходит в $\left\{e^{iz_kx}\right\}_0^\infty$, и получаем следующее

Следствие 1. . *Системы функций*

$$\left\{e^{iz^1_{n_1}x_1}e^{iz^2_{n_2}x_2}\right\}_{(n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2_+}$$

и

$$\left\{\frac{-e_{\beta_1}\left((\sigma_1-|x_1|)\operatorname{sgn}x_1;iz^1_{k_1}\right)e_{\beta_2}\left((\sigma_2-|x_2|)\operatorname{sgn}x_2;iz^2_{k_2}\right)}{\sigma_1^{\nu_1-1}\sigma_2^{\nu_2-1}s_1'\left(z^1_{k_1};\nu_1\right)s_2'\left(z^2_{k_2};\nu_2\right)}\right\}_{(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2_+},$$

которые образуют базис Рисса в $L_2(D)$, *биортогональны на* D.

Abstract. The paper finds some descriptive representations of the Wiener-Paley type spaces $W^{2,w_1,w_2}_{\sigma_1,\sigma_2}$ of exponential type entire functions of several variables, studies the basis property of Mittag-Leffler type functions in these spaces and explicitely constructs the biorthogonal system.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области* (Наука, Москва, 1966).

[2] С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа", Изв. АН АССР, Математика **18** (3), 167-186 (1983).

[3] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p", ДАН АССР, **53** (1), 29-36 (1981).

[4] Б. Я. Левин, "О базисах показательных функций в $L^2(-\pi,\pi)$", Зап. физ-мат. фак.-та Харьковского ГУ, **4** (27), 39-48 (1961).

[5] Б. Я. Левин, "Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа", Сб. Мат.-физика и функциональный анализ, ФТИНТ АН УССР, Харьков, **1** 136-146 (1969).

[6] М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в некоторых классах целых функций экспоненциального типа многих переменных", Изв. НАН Армении, Математика, **42** (5), 17-32 (2007).

[7] M. M. Djrbashian, *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain* (Birkhauser Verlag, Basel, 1993).

[8] М. М. Джрбашян, "Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представляемых рядами Дирихле-Тейлора", Изв. НАН Армении, Математика, **8** (4), 580-626 (1973).

Поступила 15 июня 2008

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 43, номер 4, 2008

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 43, No. 4, 2008

Contents