ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2008

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 3-16

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ II

А. Б. АБРАМЯН

Ванадзорский Государственный Педагогический Институт, Ванадзор, Армения

Аннотация. Настоящая работа посвящена алгебраическим свойствам рациональных функций, ортогональных на единичной окружности, с фиксированными полюсами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($|z_k| < 1$, $k = 0, 1, \ldots$) – произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим систему Такенака–Мальмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$r_0(z) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \overline{z_0} z},$$

$$r_n(z) = \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \overline{z_n} z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z} \varepsilon_k,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{|z_k|}{z_k}, & z_k \neq 0 \\ -1, & z_k = 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ортогонализируя упорядоченную последовательность $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ на единичной окружности $T = \{\xi : |\xi| = 1\}$ относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu(\vartheta)$, где $\mu(\vartheta)$ – произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $(0, 2\pi)$ с бесконечным множеством точек роста, получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом:

$$\varphi_n(z) = \alpha_n r_n(z) + \ldots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\vartheta}) \overline{\varphi_m(e^{i\vartheta})} d\mu(\vartheta) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

Рациональные функции $\{\varphi_k(z)\}$ были введены М. М. Джрбашяном в работе [1], где и были получены аналоги некоторых хорошо известных соотношений теории ортогональных на единичной окружности многочленов.

Настоящая работа посвящена изучению ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}$. Установленные здесь теоремы сводятся к соответствующим известным утверждениям теории ортогональных на единичной окружности в предельном случае, когда все полюсы системы $\{\varphi_k(z)\}$ отождествляются с бесконечностью.

Пусть $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда $\varphi_k(z) = \alpha_k z^k + \ldots$. Обозначим

$$\overline{e_k} = -\frac{\varphi_{k+1}(0)}{\alpha_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Числа e_k называются параметрами ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}$ и были впервые введены С. Верблюнским [2]. Как было замечено Е. М. Никишиным в работе [9], "параметры e_k являются весьма полезными, поскольку в их терминах удобно формулировать достаточные, а иногда необходимые и достаточные условия на меру μ". Параметрам ортогональных систем посвящено много работ (см., например, [3]–[9]).

Во второй части настоящей работы введен аналог параметров e_k для рациональных функций и доказана теорема об абсолютной непрерывности меры ортогональности (теорема 6).

В работе потребуются некоторые соотношения, см. [10].

1. Для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_{n+1}(z) = a_n \varepsilon_{n+1} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n(z) + b_n \frac{1 - \overline{z_n} z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n^*(z),$$

(1.1)

$$\varphi_{n+1}^*(z) = \overline{a_n} \frac{1 - \overline{z_n} z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n^*(z) + \overline{b_n} \varepsilon_{n+1} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n(z),$$

где

$$\varphi_0(z) = \gamma (1 - \overline{z_0} z)^{-1}, \quad \gamma^{-1} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{d\mu(\vartheta)}{|\xi - z_0|^2} \right\}^{1/2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

$$\varphi_n^*(z) = \frac{B_n(z)}{z} \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z} \varepsilon_k,$$

$$\overline{a_n} = \frac{1 - \overline{z_{n+1}} z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}^*(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}, \quad b_n = \frac{1 - \overline{z_{n+1}} z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}.$$

2. Справедливы соотношения:

$$c_0 \mathrm{Re}\left\{\frac{\psi_n(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right\} = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{1.2}$$

$$c_0\psi_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\xi+z}{\xi-z}\big[\varphi_k(\xi)-\varphi_k(z)\big]d\mu + \frac{1}{2\pi}\int_T \varphi_k(\xi)d\mu, \tag{1.3}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_T d\mu, \quad k = 0,1,\ldots$$

3. Для любого $n = 0,1,\ldots$

$$|a_n|^2 - |b_n|^2 = \frac{1-|z_{n+1}|^2}{1-|z_n|^2}. \tag{1.4}$$

2. АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Следующее утверждение доказывается как соответствующий аналог для ортогональных многочленов для случая $z_k = 0$ $(k = 0,1,\ldots)$, см. [11]

Теорема 1. *Пусть рациональные функции*

$$\varphi_{n,k}(z) = \alpha_{n,k} r_k(z) + \ldots, \quad \alpha_{n,k} > 0, \quad k = 0,1,\ldots,$$

ортонормальны на единичной окружности T относитено меры

$$d\nu_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{d\vartheta}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

где $n \geq 0$ – зафиксировано. Тогда

$$\varphi_{n,k}(z) = \varphi_k(z), \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

$$\varphi_{n,k}(z) = \chi_{n,k} c_{n,k}\frac{1-\overline{z_n}z}{1-\overline{z_k}z}\varphi_n(z)\prod_{i=n}^{k-1}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\varepsilon_i, \quad k = n, n+1,\ldots,$$

где

$$|\chi_{n,k}| = 1 \quad and \quad c_{n,k} = \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-|z_n|^2}\right)^{1/2}, \quad k = n, n+1, \ldots$$

Следствие 1. 1. *Справедливо соотношение*

$$\int_T r_i(\xi)\overline{r_j(\xi)}d\nu_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_T r_i(\xi)\overline{r_j(\xi)}d\mu(\vartheta), \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

2. *Если $z_0 = 0$, то*

$$\int_T r_i(\xi)d\nu_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_T r_i(\xi)d\mu(\vartheta), \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

Доказательство следует из первого равенства теоремы 1.

Заметим, что аналогичное утверждение доказано в [12], когда $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$|B_n(z)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|z|}{1+|z|}\sum_{k=0}^{n}(1-|z_k|)\right\}, \quad |z| \leq 1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство следует из неравенств $\ln t \leq t - 1$ $(t > 0)$ и из тождества

$$\left|\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Для случая, когда $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ следующая теорема доказана в работе [12].

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|) = +\infty,$$

то равномерно внутри круга $|z| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-|z_n|^2}\;\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi c_0}\int_T \frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu.$$

Доказателство. Так как

$$\frac{\sqrt{1-|z_n|^2}}{|\varphi_n^*(z)|} \leq \frac{|1-\overline{z_n}z|}{\sqrt{1-|z_n|^2}}\frac{1}{|\varphi_0^*(z)|} \leq \frac{4}{\gamma}\frac{1}{(1-r)^{1/2}}, \quad |z| = r < 1,$$

то из (1.3) следует

$$\left|\sqrt{1-|z_n|^2}\;\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} - \frac{1}{2\pi c_0}\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu\right| \leq \frac{8\sqrt{c_0}}{\gamma}\frac{|B_n(z)|}{(1-r)^{3/2}}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из леммы 1. Теорема доказана.

Теорема 3. *Справедливы равенства:*

$$\overline{e_n}^k = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{1-|z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2}\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 \lambda_n^k(\xi)d\vartheta, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n, k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\overline{e_n} = -\frac{b_n}{a_n}, \quad \lambda_n(\xi) = \varepsilon_{n+1}\frac{z_n - \xi}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Из (1.1) при $|\xi| = 1$ следует

$$\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \left|\overline{a_n} + \overline{b_n}\lambda_n(\xi)\right|^{-2}$$

$$= \left(|a_n|^2 - |b_n|^2\right)^{-1} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + e_n\lambda_n(\xi)}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\}$$

$$= \frac{1 - |z_n|^2}{1 - |z_{n+1}|^2} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + e_n\lambda_n(\xi)}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\}. \tag{2.1}$$

Следовательно,

$$\frac{1 - |z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2} \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (e_n\lambda_n(\xi))^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(e_n\lambda_n(\xi))^k}\right\}. \tag{2.2}$$

То, что $|e_n| < 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ следует из того, что все нули $\varphi_n(z)$ лежат внутри единичного круга (см. [10]). Так как

$$\lambda_n^k(\xi)\overline{\lambda_n^p(\xi)} = \lambda_n^{k-p}(\xi) = \varepsilon_{n+1}^{k-p} \left(\frac{z_n - \xi}{1 - \overline{z_n}\xi}\right)^{k-p} \left(\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}\right)^{k-p},$$

то, считая для определенности $k \geq p$, с учетом того, что $\varphi_n^*(z) \neq 0$ $(|z| < 1)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \lambda_n^k(\xi)\overline{\lambda_n^p(\xi)}\, \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} d\vartheta = \delta_{k,p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 2. *Последовательность рациональных функций*

$$R_n(z) = \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \overline{z_n}z} \frac{(1 - |e_n|^2)^{1/2}}{1 - e_n\lambda_n(z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{e_k} - \lambda_k(z)}{1 - e_k\lambda_k(z)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ортонормальна на единичной окружности T *относительно меры* $(2\pi)^{-1}d\vartheta$.

Доказательство. Так как при $|\xi| = 1$ (см. (1.1))

$$|1 - e_n\lambda_n(\xi)|^2 = |a_n|^{-2} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \left|\frac{\varphi_{n+1}(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right|^2.$$

то

$$|R_n(\xi)|^2 = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2} |a_n|^2 (1 - |e_n|^2) \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \frac{1 - |z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2} \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2.$$

Следовательно, из теоремы 3 вытекает

$$\frac{1}{2\pi} \int_T |R_n(\xi)|^2\, d\vartheta, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Далее, пусть $n > m$. Тогда

$$R_n(\xi)\overline{R_m(\xi)} = \gamma_{n,m} \frac{\xi\varphi_n(\xi)}{(1 - \overline{z_n}\xi)(1 - \overline{z_m}\xi)\varphi_m^*(\xi)}$$

$$\times \frac{1}{1 - e_n\lambda_n(\xi)} \frac{1}{1 - e_m\lambda_m(\xi)} \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{\overline{e_k} - \lambda_k(\xi)}{1 - e_k\lambda_k(\xi)},$$

где

$$\gamma_{n,m} = \varepsilon_{m+1}\big[(1-|z_n|^2)(1-|z_m|^2)(1-|e_n|^2)(1-|e_m|^2)\big]^{1/2}.$$

Откуда следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_T R_n(\xi)\overline{R_m(\xi)}d\vartheta = 0, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть* $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *тогда*

(a) $|e_n| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|1 - \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|\right| d\vartheta, \quad n = 0, 1, \ldots,$

(b) $e_n^k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \overline{\lambda_n^k(\xi)}\frac{\Phi_n^*(\xi)}{\Phi_{n+1}(\xi)}d\vartheta, \quad \Phi_n^*(\xi) = \frac{\varphi_n^*(\xi)}{\alpha_n}, \quad n, k = 0, 1, \ldots,$

(c) $(n+1)\overline{e_n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \lambda_n(\xi)\frac{K_n(\xi)}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2}d\vartheta, \quad K_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(\xi)|^2,$

(d) $|e_n| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|1 - \frac{1}{n+1}\frac{K_n(\xi)}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2}\right| d\vartheta, \quad n = 0, 1, \ldots,$

(e) $-\overline{e_n}e_{n-1} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \xi\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 d\vartheta, \quad n = 1, 2, \ldots,$

(f) $\overline{e_n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \overline{\xi}^{n-1}\varphi_n^2(\xi)d\mu(\vartheta), \quad n = 0, 1, \ldots,$

(g) $-\overline{e_{n-1}} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 d\vartheta, \quad n = 1, 2, \ldots,$

(h) $|e_{n-1}| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 - \left|\frac{\varphi_{n-1}(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right|^2\right| d\vartheta, \quad n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если $z_k = 0$ $(k \ge 0)$, то $\varphi_n(z)$ – обыкновенный многочлен от z и

$$\lambda_n(\xi) = \xi\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}.$$

Тогда, учитывая, что

$$\int_T \lambda_n(\xi)d\vartheta = 0$$

из теоремы 3 имеем

$$\overline{e_n} = \frac{1}{2\pi}\int_T \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 \lambda_n(\xi)d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_T \lambda_n(\xi)\left(\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 - 1\right)d\vartheta.$$

Учитывая, что если $|\xi| = 1$, то $|\lambda_n(\xi)| = 1$, из этого неравенства получаем неравенство пункта (a). Доказательства остальных пунктов аналогичны.

Отметим, что пункт (a) доказан в работе [7] в виде

$$|e_n| \le \mathrm{const}\int_T \left|1 - \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2\right| d\vartheta,$$

с использованием теоремы Колмогорова о сопряженных функциях.

3. ТЕОРЕМА ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Обозначим через $C(T)$ пространство непрерывных на T комплексных функций. Пусть $\nu(\vartheta)$ – неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция и $f \in C(T)$. Часто нам будет удобно трактовать интеграл $\int_T f(e^{i\vartheta})d\nu(\vartheta)$ как интеграл по конечной мере ν (или $d\nu(\vartheta)$), заданной на окружности T. Саму эту меру отождествим с линейным непрерывным функционалом на $C(T)$. Под нормой меры ν будем понимать норму соответствующего функционала:

$$\|d\nu\| = \sup_{|f|\le 1}\left|\int_T f d\nu\right| = \int_T d\nu.$$

Отметим (см., например, [13]) что любая такая мера может быть разложена на абсолютно непрерывную и сингулярную относительно меры Лебега на $[0, 2\pi]$ составляющие $P(\vartheta)d\vartheta + d\nu_s$.

Пусть ν и ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – конечные положительные меры на T. Символом $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ будем обозначать слабую сходимость мер, т.е. соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f d\nu_n = \int_T f d\nu, \quad f \in C(T).$$

Пусть данная последовательность равномерно ограничена по норме, т.е. $\|d\nu_n\| \le c$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если семейство функций $\Lambda \subset C(T)$ плотно в $C(T)$, то из теоремы о слабой сходимости в сопряженном пространстве (см. [13]) вытекает, что если для любой функции $f \in \Lambda$

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f d\nu_n = \int_T f d\nu,$$

то $d\nu_n \xrightarrow{*} d\nu$.

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. *Если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(0)}{|\varphi_n^*(0)|} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_T d\nu_n = \int_T d\mu,$$

где

$$d\nu_n = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{d\vartheta}{|\varphi_n(\xi)|}, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Из (1.3) следует

$$c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu-\frac{B_n(0)}{\varphi_n^*(0)}\frac{1}{\pi}\int_T\overline{\xi\varphi_n(\xi)}d\mu,\quad n=0,1,\ldots \tag{3.1}$$

Заметим, что

$$\left|\int_T\xi\varphi_n(\xi)d\mu\right|\le\left\{\int_T d\mu\int_T|\varphi_n(\xi)|^2d\mu\right\}^{1/2}=2\pi\sqrt{c_0}. \tag{3.2}$$

Так как рациональные функции $\{\varphi_k^*(z)\}_{k=0}^{\infty}$ не имеют нулей в замкнутом круге $|z|\le 1$, то из формулы Шварца следует

$$c_0\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}=i\beta_n+\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}d\nu_n,$$

$$\beta_n=\operatorname{Im}\left\{c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}\right\},\quad n=0,1,\ldots \tag{3.3}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Re}\left\{c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n,\quad n=0,1,\ldots$$

Тогда из (3.1) и (3.3) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n=\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu-B_n(0)\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\varphi_n^*(0)}\frac{1}{\pi}\int_T\overline{\xi\varphi_n(\xi)}d\mu\right\}.$$

Учитывая (3.2), из (3.3) следует

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n-\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu\right|\le\sqrt{c_0}\,\frac{B_n(0)}{|\psi_n^*(0)|},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Если* $|z_k|\le 1-\alpha$ $(k=0,1,\ldots)$, $0<\alpha\le 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_T\xi^k d\nu_n=\int_T\xi^k d\mu,\quad |k|=1,2,\ldots$$

Доказателство. Из (1.2) и (3.3) следует

$$i\beta_n+\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\nu_n=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\mu-\frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\frac{1}{\pi}\int_T\frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi}z}d\mu.$$

Перепишем это выражение в виде

$$i\beta_n+\frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\frac{1}{\pi}\int_T\frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi}z}d\mu=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\sigma_n, \tag{3.4}$$

где $d\sigma_n=d\mu-d\nu_n$. Так как

$$\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}=1+2\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\xi}z\right)^k+2\frac{\left(\overline{\xi}z\right)^{n+1}}{1-\overline{\xi}z}$$

то из (3.4) следует, что

$$i\beta_n + \frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\frac{1}{\pi}\int_T \frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi}z}d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_T d\sigma_n$$
$$+2\sum_{k=1}^{n} c_k\left(d\sigma_n\right)z^k + 2z^{n+1}\frac{1}{\pi}\int_T \frac{\overline{\xi}^{n+1}}{1-\overline{\xi}z}d\nu_n,$$

где

$$c_k\left(d\sigma_n\right) = \frac{1}{2\pi}\int_T \overline{\xi}^k d\sigma_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < 1)$, тогда получим

$$c_k\left(d\sigma_n\right)r^k = \frac{1}{\pi}\int_T \frac{e^{-ik\varphi}B_n\left(re^{i\varphi}\right)}{\varphi_n^*\left(re^{i\varphi}\right)}\left(\frac{1}{\pi}\int_T \frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-r\overline{\xi}e^{i\varphi}}d\mu(\vartheta)\right)d\varphi.$$

откуда с учетом (3.2) следует

$$|c_k\left(d\sigma_n\right)|\,r^k \le \frac{2\sqrt{c_0}}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_T \left|\frac{B_n\left(re^{i\varphi}\right)}{\varphi_n^*\left(re^{i\varphi}\right)}\right|d\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Так как,

$$\frac{1}{|\varphi_n^*(z)|} \le \frac{|1-\overline{z_n}z|}{(1-|z_n|^2)^{1/2}}\frac{1}{(1-|z|^2)^{1/2}}\frac{1}{|\varphi_0(z)|} \le \frac{4}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-r}}\frac{1}{\sqrt{1-|z_n|^2}},$$

то из (3.5) имеем

$$|c_k\left(d\sigma_n\right)|\,r^k \le \frac{8\sqrt{c_0}}{\gamma}\frac{1}{(1-r)^{3/2}}\frac{1}{(1-|z|^2)^{1/2}}\frac{1}{2\pi}\int_T \left|B_n\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi,$$

и применение леммы1 дает

$$\lim_{n\to\infty}|c_k\left(d\sigma_n\right)| = 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Если* $|z_k| \le 1-\alpha$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $0 < \alpha \le 1$, *то* $d\nu_n \xrightarrow{*} d\mu$.

Доказательство. Так как семейство функций $\left\{e^{ik\vartheta}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ плотно в $C(T)$, то утверждение теоремы следует из лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Имеет место равенство:*

$$\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta + \int_T u_{n+1}^2(\vartheta)d\vartheta$$
$$= \frac{2|a_n|^2}{|a_n|^2-|b_n|^2}\int_T u_n(\vartheta)u_{n+1}(\vartheta)d\vartheta + \Delta_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$u_n(\vartheta) = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2}\frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$
$$\Delta_n = 4\pi(1-|z_n|^2)^2\mathrm{Re}\left\{I_n^2(0)\right\},$$

$$I_n(0) = \frac{\varepsilon_{n+1}\overline{b_n}B_n(0)}{\varphi_n^*(0)\varphi_{n+1}^*(0)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $z = \xi$, $|\xi| = 1$. Перепишем (1.1) в виде

$$\frac{\overline{a_n}}{1-\overline{z_{n+1}}\xi}\frac{1}{\varphi_{n+1}^*(\xi)} = \frac{1}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{1}{\varphi_n^*(\xi)} + \overline{b_n}\varepsilon_{n+1}\frac{\xi - z_n}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{1}{1-\overline{z_{n+1}}\xi}\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)\varphi_{n+1}^*(\xi)}.$$

Откуда следует

$$\frac{|a_n|^2 - |b_n|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2}\frac{1}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2} - \frac{1}{|\xi - z_n|^2}\frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2} = I_n(\xi) + \overline{I_n(\xi)}, \tag{3.7}$$

где

$$I_n(\xi) = \overline{b_n}\varepsilon_{n+1}\frac{B_n(\xi)}{(1-\overline{z_n}\xi)(1-\overline{z_{n+1}}\xi)}\frac{1}{\varphi_n^*(\xi)\varphi_{n+1}^*(\xi)}.$$

Из (3.7) получим

$$\int_T \frac{\left(|a_n|^2 - |b_n|^2\right)^2}{|\xi - z_{n+1}|^4}\frac{d\vartheta}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^4} + \int_T \frac{d\vartheta}{|\xi - z_n|^4|\varphi_n(\xi)|^4}$$
$$= 2\mathrm{Re}\left\{I_n^2(0)\right\} + 2|a_n|^2\int_T \frac{d\vartheta}{|\xi - z_n|^2|\xi - z_{n+1}|^2|\varphi_{n+1}(\xi)\varphi_n(\xi)|^2}.$$

Доказательство следует из этого равенства, с учетом (1.4) и (3.6).

Лемма 5. *Справедливо равенство:*

$$\int_T u_n(\vartheta)u_{n+1}(\vartheta)d\vartheta = \int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta + 2\int_T \mathrm{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\}u_n^2(\vartheta)d\vartheta$$
$$+4\pi(1-|z_n|^2)^2 B_n^2(0)\mathrm{Re}\left\{\frac{e_n^2\overline{a_n}\varepsilon_{n+1}^2}{\varphi_n^*(0)\left(\varphi_n^*(0)\right)^3}\right\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)} = 1 + 2e_n\lambda_n(\xi) + 2\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1-e_n\lambda_n(\xi)},$$

то из (2.1) имеем

$$u_{n+1}(\vartheta) = u_n(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n(\vartheta)u_{n+1}(\vartheta)d\vartheta = \int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}d\vartheta$$
$$= \int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta + 2\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\}d\vartheta$$
$$+2\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}d\vartheta.$$

Заметим, что при $|\xi| = 1$

$$\frac{\lambda_n^2(\xi)}{|\varphi(\xi)|^4} = \varepsilon_{n+1}^2 \left(\frac{z_n - \xi}{1 - \overline{z_n}\xi}\right)^2 \frac{B_n^2(\xi)}{\xi^2 \left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4}$$

и

$$u_n^2(\vartheta)\lambda_n^2(\xi) = \varepsilon_{n+1}^2 \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 - \overline{z_n}\xi)^4} \frac{B_n^2(\xi)}{\left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4}.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\} d\vartheta$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\varepsilon_{n+1}^2(1 - |z_n|^2)^2 \int_T \frac{1}{(1 - \overline{z_n}\xi)^4} \frac{e_n^2}{1 - e_n\lambda_n(\xi)} \frac{B_n^2(\xi)}{\left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4} d\vartheta\right\}$$

$$= 2\pi(1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0)\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon_{n+1}^2 e_n^2}{\left(1 - e_n\lambda_n(0)\right)\left(\varphi_n^*(0)\right)^4}\right\}.$$

Теперь заметим, что при $z = 0$ (1.1)

$$\varphi_{n+1}^*(0) = \overline{a_n}\varphi_n^*(0)\left(1 - e_n\lambda_n(0)\right).$$

Следовательно, имеем окончательно

$$\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\} d\vartheta = 2\pi(1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0)\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon_{n+1}^2\overline{a_n}e_n^2}{\varphi_{n+1}^*(0)\left(\varphi_n^*(0)\right)^3}\right\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Справедливо равенство:*

$$\int_T u_{n+1}^2(\vartheta)d\vartheta = \frac{1 + |e_n|^2}{1 - |e_n|^2}\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta$$

$$+\frac{4}{1 - |e_n|^2}\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\} d\vartheta + \Omega_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\Omega_n = 4\pi(1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0)\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon_{n+1}^2\overline{b_n}^2}{\left(\varphi_{n+1}^*(0)\varphi_{n+1}^*(0)\right)^2}\right\}$$

$$+\frac{8\pi(1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0)}{1 - |e_n|^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon_{n+1}^2 e_n^2\overline{a_n}}{\varphi_{n+1}^*(0)\left(\varphi_n^*(0)\right)^3}\right\}.$$

Доказателство следует из лемм 4, 5.

Следующее утверждение доказывается в [14].

Лемма 6. *Пусть неотрицательная функция $F(x)$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}F(x) = +\infty.$$

Предположим, что неотрицательные функции $f_n(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\int_0^{2\pi} F\left(f_n(t)\right) dt \le \text{const}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если $f_n(t) \xrightarrow{*} d\sigma(t)$ при $n \to \infty$, где $\sigma(t)$ – мера на $[0, 2\pi]$, то мера $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна.

Теорема 6. *Пусть $z_0 = 0$ и существует натуральное число n_0 такое, что*

$$\int_T \operatorname{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\} u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le 0, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n \ge n_0.$$

Если $|z_k| \le 1 - \alpha$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $0 < \alpha \le 1$ и бесконечное произведение

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2}$$

сходится, то мера $\mu(\vartheta)$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Из условия $z_0 = 0$ следует, что $\Omega_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. В силу теоремы 5 следует, что

$$\int_T u_{n+1}^2(\vartheta)d\vartheta \le \frac{1 + |e_n|^2}{1 - |e_n|^2} \int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta, \quad n \ge n_0.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2} \int_T u_{n_0}^2(\vartheta)d\vartheta, \quad n \ge n_0.$$

Пусть

$$c_1 = \max_{0\le k\le n_0} \int_T u_k^2(\vartheta)d\vartheta, \quad c_2 = c_{n_0} \prod_{k=n_0}^{\infty} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2},$$

$$c_{n_0} = \int_T u_{n_0}^2(\vartheta)d\vartheta \quad \text{и} \quad c = \max\{c_1, c_2\}.$$

Тогда

$$\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le c, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Учитывая следствие 1, из условий теоремы следует, что

$$\int_T d\nu_n = \int_T d\mu, \quad n = 0, 1, \ldots ,$$

где

$$d\nu_n = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \frac{d\vartheta}{|\varphi_n^*(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

а из теоремы 4 имеем $d\nu_n \xrightarrow{*} d\mu$, Утверждение теоремы следует теперь иь леммы 6. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть* $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *и* $\{e'_k\}_{k=0}^{\infty}$ – *произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию* $|e'_k| < 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *а* n_0 – *произвольное фиксированное натуральное число. Рассмотрим многочлены* $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, *соответствующие параметрам* $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$, *где*

$$e_k = e'_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1,$$

$$e_k = -|\mathrm{Re}\ e'_k|\,\mathrm{sign}\ \mathrm{Re}\ \nu_k + i\,|\mathrm{Im}\ e'_k|\,\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \nu_k, \quad k = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

$$\nu_k = \int_0^{2\pi} \xi \frac{\varphi_k(\xi)}{\varphi_k^*(\xi)} \frac{d\vartheta}{|\varphi_k(\xi)|^4}, \quad \xi = e^{i\vartheta}.$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} |e'_k|^2 < \infty,$$

то мера $\mu(\vartheta)$, *соответствующая параметрам* $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ *абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Так как многочлен $\varphi_k(z)$ зависит только от параметров e_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, то ν_k не зависит от параметра e_k. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{e_k \xi \frac{\varphi_k(\xi)}{\varphi_k^*(\xi)}\right\} \frac{d\vartheta}{|\varphi_k(\xi)|^4} = |\mathrm{Re}\ e'_k|\,|\mathrm{Re}\ \nu_k| - |\mathrm{Im}\ e'_k|\,|\mathrm{Im}\ \nu_k| \leq 0$$

при $k = n_0, n_0{+}1, \ldots$ и $\xi = e^{i\vartheta}$. Учитывая, что $|e_k| = |e'_k|$ то из теоремы 6 при $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ получаем утверждение следствия. Доказательство завершено.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. А. Саакяну и С. Г. Рафаеляну за ценные замечания.

Abstract. The paper is devoted to the algebraic properties of rational functions which are orthogonal on the unit circle and have fixed poles.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, “Ортогональные системы рациональных функций на окружности,” Изв. АН Арм. ССР, Математика, **1**, 3-24 (часть I), **1**, 106-125 (часть II) (1966).
[2] S. Verblinskii, “On Positive Harmonic Functions. II,” Proc. London Math. Soc., **40**, 290-320 (1935).
[3] G. Baxter, “A Convergence Equivalence Related to Polynomials Orthogonal on the Unit Circle,” Trans. Amer. Math. Soc., **99** (3), 471-487 (1961).
[4] Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, “О предельной теореме Г. Сеге,” Изв. АН СССР, Мат., **35** (2), 408-427 (1971).
[5] Б. Л. Голинский, “О связи между порядком убывания параметров ортогональных многочленов и свойствами соответствующей функции распределения,” Изв. АН Арм. ССР, Математика, **15** (2), 127-144 (1980).

[6] Е. А. Рахманов, "Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II," Мат. сборник, **118 (160)** (1(5)), 104-117 (1977).
[7] Attila Máaté, Paul Nevai and Vilmos Totik, "Asymptotic for the Ratio of Leading Coefficients of Orthonormal Polynomials on the Unit Circle," Constr. Approx, **1**, 63-69 (1985).
[8] Е. М. Никишин, "Об одной оценке ортогональных многочленов," Acta Sci. Math. Szeged, **48** (1-4), 395-399 (1985).
[9] Е. М. Никишин, "Дискретный оператор Штурма-Лиувилля и некоторые задачи теории функций," Труды семинара им. И. Г. Петровского, **10**, 3-78 (1984).
[10] А. В. Абрамян, "О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами," Изв. НАН Армении, Математика **41** (3), 1-9 (2006).
[11] У. Гренадер, Г. Сеге, *Теплицевы формы и их приложения* (IL, Moscow, 1961).
[12] Я. Л. Геронимус, *Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке* (Физматгиз, Москва, 1958).
[13] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).
[14] П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H^p (Мир, Москва, 1984).

Поступила 15 ноября 2006

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 17-24

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА-ГАЙНЦА И ПРИМЫКАЮЩИЕ К НЕЙ НЕРАВЕНСТВА

Л. З. ГЕВОРГЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *levgev@hotmail.com*

Аннотация. В настоящей заметке приводится количественная форма теоремы фон Неймана, а также некоторые родственные неравенства, позволяющие оценить снизу расстояние между началом координат и нормализированным числовым образом оператора.

1. В связи с теорией спектральных множеств линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ фон Нейман доказал [6] следующее утверждение.

Теорема A. Пусть функция u *аналитична в некоторой области, охватывающей замкнутый единичный круг* $\overline{D}$ *и удовлетворяет неравенству* $|u(z)| \leq 1$, $z \in \overline{D}$. *Тогда для любого оператора* A *такого, что* $\|A\| \leq 1$ *имеет место неравенство* $\|u(A)\| \leq 1$.

В дальнейшем в [5] было установлено , что теорема А может быть легко получена из следующего результата.

Теорема B. Пусть функция u *аналитична в некоторой области, охватывающей замкнутый единичный круг* $\overline{D}$ *и отображает* $\overline{D}$ *в правую полуплоскость* $\mathbb{C}^+ = \{z : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$. *Тогда для любого оператора* A, $\|A\| \leq 1$ *и любого элемента* $x \in H$ *имеет место неравенство* $\mathrm{Re}\langle u(A)x, x\rangle \geq 0$.

Следует отметить, что приведенные выше формулировки взяты из [7] (глава 11, 153, §2).

Сначала мы докажем количественный вариант второго из этих утверждений. Затем будут установлены некоторые неравенства для нормы трансляций произвольного оператора.

В конце оценивается снизу норма некоторой функции от оператора, что в комбинации с уже полученным результатом позволяет судить о величине зазора между началом координат и так называемым нормализированным числовым образом оператора.

Подобные оценки играют важную роль при определении скорости сходимости различных итерационных методов решения линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве [3].

Прежде чем перейти к изложению этих результатов, заметим, что условия, что *функция u аналитична в U и $\|A\| \leq 1$* можно заменить на *аналитичность функции u в открытом единичном круге D и $\|A\| < 1$*. Действительно, границы множеств $\overline{D}$ и U лежат на некотором положительном расстоянии m. Тогда функция, определяемая формулой $f(z) = u((1+m)z)$ будет аналитична внутри единичного круга и норма оператора $B = A/(1+m)$ будет строго меньше единицы 1.

Предложение 1. *Пусть f - функция, аналитичная в открытом единичном круге D и отображает его в правую полуплоскость. Тогда для любого оператора B, $\|B\| < 1$*

$$\mathrm{Re}\langle f(B)x, x\rangle \geq \frac{1-\|B\|}{1+\|B\|}\|x\|^2 \,\mathrm{Re}\{f(0)\}, \quad x \in H. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть r - число, удовлетворяющее неравенствам $\|B\| < r < 1$. Согласно формуле Шварца

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt, \quad |z| < r.$$

Откуда

$$\mathrm{Re}\, f(B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(re^{it})\mathrm{Re}\left(\left(re^{it}I + B\right)\left(re^{it}I - B\right)^{-1}\right)dt,$$

и

$$\left\langle \mathrm{Re}\, f(B)x, x\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\mathrm{Re}\Big\langle \left(re^{it}I + B\right)\left(re^{it}I - B\right)^{-1}x, x\Big\rangle\, dt$$

или, что то же самое

$$\left\langle \mathrm{Re}\left\{f\left(B\right)\right\}x, x\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\mathrm{Re}\Big\langle \left(re^{it}I + B\right)y_t, \left(re^{it}I - B\right)y_t\Big\rangle\, dt,$$

где $y_t = \left(re^{it}I - B\right)^{-1}x$. Очевидно

$$\mathrm{Re}\Big\langle \left(re^{it}I + B\right)y_t, \left(re^{it}I - B\right)y_t\Big\rangle = r^2\|y_t\|^2 - \|By_t\|^2 \geq \left(r^2 - \|B\|^2\right)\|y_t\|^2.$$

Так как
$$\|y_t\| \geq \frac{\|x\|}{\|re^{it}I - B\|} \geq \frac{\|x\|}{r + \|B\|},$$
то
$$\mathrm{Re}\Big\langle \left(re^{it} + B\right) y_t, \left(re^{it}I - B\right) y_t \Big\rangle$$
$$\geq \left(r^2 - \|B\|^2\right) \frac{\|x\|^2}{(r + \|B\|)^2} = \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|}\|x\|^2.$$
Таким образом,
$$\mathrm{Re}\big\langle f(B)x, x\big\rangle \geq \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|}\|x\|^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f\left(re^{it}\right)\, dt.$$
Так как для аналитической функции ее действительная часть является гармонической функцией, то
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f\left(re^{it}\right)\, dt = \mathrm{Re}\{f(0)\}$$
и
$$\mathrm{Re}\big\langle f(B)x, x\big\rangle \geq \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|}\|x\|^2\, \mathrm{Re}\{f(0)\}.$$
Переходя к пределу при $r \to 1$ получим (1).

Пример 1. *Пусть*
$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad 0 < b < a < 1, \quad f(z) = \frac{1 - z}{1 + z}.$$
Тогда $\|B\| = a$ *и*
$$f(B) = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{1+a} & 0 \\ 0 & \frac{1-b}{1+b} \end{pmatrix}.$$

Числовой образ $W(B) = \big\{\langle Bx, x\rangle : \|x\| = 1\big\}$ оператора B равен $[b, a]$, а
$$W\big(f(B)\big) = \left[\frac{1 - a}{1 + a}, \frac{1 - b}{1 + b}\right],$$
т.е. неравенство (1) по крайней мере для оператора B является точным.

Напомним, что числовым радиусом оператора A называется величина
$$w(A) = \sup_{\lambda \in W(A)} |\lambda|.$$

Лемма 1. *Для любого оператора A и произвольного комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\|A - \lambda I\| \leq w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно теореме 2 из [1], условия

$$w(B) \le 1, \quad \|B - \lambda I\| \le 1 + \sqrt{1 + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

эквивалентны. Пусть $B = A/w(A)$. Тогда

$$\left\| \frac{A}{w(A)} - \mu I \right\| \le 1 + \sqrt{1 + |\mu|^2}$$

и

$$\big\|A - w(A)\mu I\big\| \le w(A) + \sqrt{w^2(A) + w^2(A)|\mu|^2}.$$

Заметим, что в силу формулы из [2]

$$\lim_{\substack{|\lambda| \to +\infty \\ \arg \lambda = \phi}} \big(|\lambda| - \|A - \lambda I\|\big) = \inf \operatorname{Re} \left\{ W\left(e^{-i\phi} A\right) \right\}.$$

Если имеет место неравенство

$$\|A - \lambda I\| \le a + \sqrt{a^2 + |\lambda|^2} \quad (a > 0),$$

то $w(A) \le a$, т.е. оценка (2) для любого оператора является точной.

Пример 2. *Пусть* J_2 *– двумерная клетка Жордана*

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Простой подсчет показывает, что

$$w(J_2) = 1/2 \quad \text{и} \quad \|J_2 - \lambda I\| = 1/2 + \sqrt{1/4 + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, неравенство (2) для J_2 превращается в тождество.

Оказывается, что этот результат справедлив также для более широкого класса операторов.

Лемма 2. *Пусть* $A^2 = 0$. *Тогда* $D\big(0, \|A\|/2\big) \subset W(A) \subset \overline{D}\big(0, \|A\|/2\big)$.

Доказательство. Как хорошо известно, гильбертово пространство H может быть разложено в ортогональную сумму:

$$H = N(A^*) \oplus \overline{R}(A),$$

где $N(A)$ – ядро, а $R(A)$ – образ оператора A. Пусть $h = f + g$, где $f \in N(A^*)$ и $g \in \overline{R}(A)$. Очевидно, что

$$Ah = Af, \quad \langle Ah, h \rangle = \langle Af, f + g \rangle = \langle f, A^*(f + g) \rangle = \langle f, A^* g \rangle = \langle Af, g \rangle.$$

Откуда

$$\big|\langle Ah, h \rangle\big| = \big|\langle Af, g \rangle\big| \le \|A\| \|f\| \|g\| \le \frac{1}{2} \|A\| \left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) = \frac{1}{2} \|A\| \|h\|^2.$$

Так как $\|A\| \le 2w(A)$, то $\|A\| = 2w(A)$. Тогда существует последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\langle Ah_n, h_n\rangle \to \|A\|e^{i\alpha}/2$. Пусть $h_n = f_n + g_n$ – ортогональное разложение элемента h_n. Тогда

$$\langle Ah_n, h_n\rangle = \langle Af_n, g_n\rangle \quad \text{и} \quad \Big\langle Af_n, e^{i(\alpha-\beta)}g_n\Big\rangle \longrightarrow \frac{\|A\|}{2}e^{i\beta}.$$

Предложение 2. *Пусть* $A^2 = 0$. *Тогда*

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Имеем

$$\|(A - \lambda I)h\|^2 = \|Af\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle Af, \lambda g\rangle + |\lambda|^2\|h\|^2.$$

Тогда, если $\|h\| = 1$, это выражение подходящим выбором элемента g может быть сведено к виду

$$\|Af\|^2 + 2|\lambda|\|Af\|\|g\| + |\lambda|^2 \le \|A\|^2\|f\|^2 + 2|\lambda|\|A\|\|f\|\sqrt{1 - \|f\|^2} + |\lambda|^2.$$

Максимум правой части этого выражения, как функции от $\|f\|$, достижим и равен

$$\frac{\|A\|^2}{2} + \|A\|\sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} + |\lambda|^2 = \left(\frac{\|A\|}{2} + \sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2}\right)^2.$$

За счет выбора элемента f, разность между левой и правой частями неравенства можно сделать сколь угодно малой. Тогда

$$\big\|(A - \lambda I)h\big\| \longrightarrow \frac{\|A\|}{2} + \sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2},$$

что завершает доказательство.

Оказывается, что в некоторых случаях, если в (2) для значения $\lambda = 0$ имеет место равенство (т.е. если $\|A\| = 2w(A)$), то оно сохраняется также для всех остальных значений $\lambda \in \mathbb{C}$.

Предложение 3. *Пусть оператор* A *достигает своей нормы и* $\|A\| = 2w(A)$. *Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|}.$$

Доказательство. Так как это равенство однородно, то можно дополнительно предположить, что $\|A\| = 1$. Согласно теореме из [8] J_2 есть прямое слагаемое для оператора A, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $W(B) \subset W(J_2)$. Тогда

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\lambda|^2} = \|J_2 - \lambda I\| \leq \|A - \lambda I\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\lambda|^2},$$

влекущее

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Предложение 4. *Оператор A достигает своей нормы на элементе x тогда и только тогда, когда x является собственным элементом оператора A^*A, отвечающим собственному значению $\|A\|^2$.*

Доказательство. Пусть $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Тогда

$$\|A\|^2\|x\|^2 = \|Ax\|^2 = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*A\|\|x\|^2 = \|A\|^2\|x\|^2.$$

Таким образом, неравенство превращается в равенство, откуда $A^*Ax = \|A\|^2\|x\|$.

Следовательно, множество элементов, на котором оператор достигает своей нормы, пополненное нейтральным элементом, образует подпространство.

Следующий пример призван проиллюстрировать это предложение.

Пример 3. *Пусть V – оператор, действующий в пространстве $L^2(0,1)$ по формуле*

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|V\| = \frac{2}{\pi}, \quad \left\|\cos\pi\frac{x}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}, \quad V\cos\pi\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{x}{2},$$
$$\left\|V\cos\pi\frac{x}{2}\right\|^2 = \frac{2}{\pi^2}, \quad V^*V\cos\pi\frac{x}{2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\cos\pi\frac{x}{2}.$$

Покажем, что два условия предложения 4 независимы. Очевидно, что из достижимости нормы не следует $\|A\| = 2w(A)$ (для этого можно взять любой нормальный оператор, достигающий своей нормы, в частности, нормальный оператор, действующий в конечномерном пространстве).

Следующий пример показывает невозможность обратной импликации.

Пример 4. *Пусть $H = \oplus_{n\in N}\mathbb{C}^2$, а A является ортогональной суммой жордановых клеток*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{-\frac{1}{n}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что $\|A\| = 1$ и $W(A) = \{z : |z| < 1/2\}$, так что $w(A) = 1/2$. Равенство $\|A\| = 2w(A)$ для этого оператора выполняется, но A не достигает своей нормы.

Замечание 1. *Оценка*

$$\|A-\lambda I\| \le \|A\| + |\lambda| \tag{3}$$

является более точной, чем (2) *для операторов, удовлетворяющих условию* $\|A\| = w(A)$, *а оценка* (2) *точнее, чем* (3) *для операторов, удовлетворяющих* $\|A\| = 2w(A)$. *Если* $c\|A\| = w(A)$, *где* $1/2 < c < 1$, *то из неравенства*

$$c\|A\| + \sqrt{c^2\|A\|^2 + |\lambda|^2} \le \|A\| + |\lambda|$$

будем иметь

$$|\lambda| \ge \frac{c-0.5}{1-c}\|A\|,$$

означающее, что при малых $|\lambda|$ *оценка* (2) *точнее, чем* (3), *а при больших* $|\lambda|$ *– наоборот, оценка* (3) *точнее, чем* (2).

Предложение 5. *Пусть оператор* B, *действующий в гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяет условию* $w(B) < 1$. *Пусть функция* f *аналитична в круге* D *и отображает его в правую полуплоскость* $\mathbb{C}^+$. *Тогда*

$$\big\|f(B)x\big\| \le \left(\big|\mathrm{Im}\{f(0)\}\big| + \frac{w(B)+\sqrt{w^2(B)+1}}{1-w(B)}\mathrm{Re}\{f(0)\}\right)\|x\|. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно формуле Шварца при $w(B) < r < 1$

$$f(B) = i\,\mathrm{Im}\,f(0)\,I + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\left(re^{it}I+B\right)\left(re^{it}I-B\right)^{-1}dt.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}
\|f(B)x\| &\le \big|\mathrm{Im}\,f(0)\big|\|x\| \\
&+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\left\|\left(re^{it}I+B\right)\left(re^{it}I-B\right)^{-1}x\right\|dt \\
&\le \left(|\mathrm{Im}\,f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\left\|re^{it}I+B\right\|\left\|\left(re^{it}I-B\right)^{-1}\right\|dt\right)\|x\| \\
&\le \left(\big|\mathrm{Im}\,f(0)\big| + \frac{w(B)+\sqrt{w^2(B)+r^2}}{2\pi}\right. \\
&\left.\times\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{f\left(re^{it}\right)\right\}\left\|\left(re^{it}I-B\right)^{-1}\right\|dt\right)\|x\|.
\end{aligned}$$

Хорошо известно (см., напр., [4], Лемма 6.1 о росте резольвенты оператора), что

$$\left\|(B-\lambda I)^{-1}\right\| \le \frac{1}{d\left(\lambda, \overline{W}(B)\right)}, \quad \lambda \notin \overline{W}(B),$$

где d - расстояние между λ и $\overline{W}(B)$. Таким образом,

$$\left\|\left(re^{it}I - B\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{d\left(re^{it}, \overline{W}\left(B\right)\right)} \leq \frac{1}{r - w\left(B\right)}.$$

Откуда

$$\left\|f(B)x\right\| \leq \left(\left|\mathrm{Im}\, f(0)\right| + \frac{w(B) + \sqrt{w^2(B) + r^2}}{r - w(B)} \mathrm{Re}\, f(0)\right) \|x\|.$$

В пределе получим (4).

Замечание 2. *Если* $\|B\| < 1$, *то неравенство* (4) *может быть заменено на*

$$\left\|f(B)x\right\| \leq \left(\left|\mathrm{Im}\, f(0)\right| + \frac{1 + \|B\|}{1 - \|B\|} \mathrm{Re}\, f(0)\right) \|x\|.$$

Комбинируя это неравенство с (1), будем иметь

$$\frac{\mathrm{Re}\left\langle f(B)x, x\right\rangle}{\left\|f(B)x\right\|\|x\|} \geq \frac{(1 - \|B\|)\mathrm{Re}\, f(0)}{\left|\mathrm{Im}\, f(0)\right|(1 - \|B\|) + (1 + \|B\|)\mathrm{Re}\, f(0)} \frac{1 - \|B\|}{1 + \|B\|}.$$

Abstract. The paper gives a quantitative refinement of von Neumann's theorem with some relevant inequalities permitting to estimate from below the distance between the origin of the coordinate system and the so-called normalized numerical range of an operator acting in the Hilbert space.

Список литературы

[1] C. A. Berger, J. G. Stampfli, "Mapping Theorems for the Numerical Range," Amer. J. Math., **89**, 1047-1055 (1967).

[2] L. Z. Gevorgyan, "On Some Geometric Characteristics of the Numerical Range", Electronic Journal "Investigated in Russia," **53**, 574-582 (2002). http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/053.pdf

[3] L. Z. Gevorgyan, "On the Convergence Rate of Iterations and the Normalized Numerical Range," Math. Sci. Res. J., **8**, 16-26 (2004).

[4] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators in Hilbert Space* (AMS, 1995).

[5] E. Heinz, "Ein Neumannscher Satz Uber Beschrankte Operatoren im Hilbertschen Raum," Gott. Nachr., 5-6 (1952).

[6] J. Neumann, "Eine Spektraltheorie fur Allgemeine Operatoren Eines Unitaren Raumes," Math. Nachr., **4**, 258-281 (1951).

[7] F. Riesz, B. Szekevalvi-Nagy, *Lecons d'Analyse Fonctionelle* (Akademiai Kiado, 1972).

[8] J. P. Williams, T. Crimmins, "On the Numerical Radius of a Linear Operator," Amer. Math. Monthly, **74**, 832-833 (1974).

Поступила 16 августа 2007

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 25-42

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^1(\rho)$

Г. М. АЙРАПЕТЯН И М. С. АЙРАПЕТЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *hhairapet@seua.am; mushegh.h@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается граничная задача Гильберта в $L^1(\rho)$, где $\rho(t) = |1-t|^\alpha$ и α – действительное число. При $\alpha > -1$ устанавливается, что однородная задача имеет $n+\kappa$ линейно независимых решений, если $n+\kappa \geq 0$, где $a(t)$ – коэффициент задачи, $\kappa = ind\ a(t)$, $n = [\alpha]+1$, если α – нецелое число и $n = \alpha$, если α – целое. Условия, при которых задача разрешима, найдены при $\alpha > -1$ и $n+\kappa < 0$. При $\alpha \leq -1$ устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи зависит от поведения функции $a(t)$ в точке $t = 1$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Граничная задача Гильберта в весововых пространствах L^p $(p > 1)$, когда весовая функция имеет особенности степенного порядка, исследована в работах Б. В. Хвелидзе [1], И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника [2]. Задача, когда весовая функция $\rho(t)$ имеет конечное число особых точек, а порядки особенностей являются произвольными действительными числами, рассмотрена в работе К. Казаряна, И. Спитковского и Ф. Сория [3].

Отметим, что методы исследования указанных работ принципиально не применимы, когда граничная функция принадлежит весовому пространству $L^1(\rho)$. Это обусловлено тем, что интеграл типа Коши не ограничен в L^1 и $L^1(\rho)$.

В данной работе предложен один метод для исследования задачи Гильберта в единичном круге $D^+ = \{z, |z| < 1\}$ в пространстве $L^1(\rho)$, когда

$$\rho(t) = |1-t|^\alpha, \quad t \in T = \{t : |t| = 1\},$$

где α – произвольное действительное число. Введем обозначения

$$n = \begin{cases} [\alpha]+1 & \text{если } \alpha \text{ – нецелое}, \\ \alpha & \text{если } \alpha \text{ – целое}, \end{cases}$$

$$\rho_r(t) = \begin{cases} \rho(t) & \text{если } \alpha > -1, \\ |1-rt|^n|1-t|^{\alpha-n} & \text{если } \alpha \le -1 \end{cases}$$

Под задачей Гильберта $L^1(\rho)$ понимается следующая граничная задача

Задача H. *Определить аналитическую функцию $\Phi(z)$ $(\Phi(\infty)=0)$ вне единичной окружности T так, чтобы имело место граничное условие*

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\right\|_{L^1(\rho_r)} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Phi^\pm(z)$ – сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно, $f \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$ и $a(t) \ne 0$.

Обозначим $\kappa = \operatorname{ind} a(t)\Big|_T$. В данной статье установлено, что при $\alpha > -1$ однородная задача H имеет $n+\kappa$ линейно независимых решений, если $n+\kappa \ge 0$. В случае $n+\kappa < 0$ описаны необходимые и достаточные условия на f для того, чтобы задача H имела решение, а также установлено, что количество линейно независимых решений однородной задачи зависит от поведения функции $a(t)$ в точке $t=1$.

Задача H в полуплоскости, когда ρ имеет единственную особенность в $z=\infty$, и порядок особенности неотрицателен, исследована в работах [4, 5].
Если Φ – функция, аналитическая в $D^+ \cup D^-$, то обозначим

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

а через $C, C_1, \dots$ обозначим различные постоянные.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

1. Пусть $\kappa = \operatorname{ind} a(t)\Big|_T$, тогда функция a допускает представление (см. [6])

$$a(t) = S^+(t)\big(S^-(t)\big)^{-1}, \quad t \in T,$$

где

$$S^+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\ln t^{-\kappa}a(t)}{t-z}dt\right\}, \quad z \in D^+$$

$$S^-(z) = z^{-k}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\ln t^{-\kappa}a(t)}{t-z}dt\right\}, \quad z \in D^-,$$

$S^\pm \in C^\delta\big(\overline{D^\pm}\big)$ и $\big|S^-(z)\big| = O\big(|z|^{-\kappa}\big)$ при $z \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1$ и $\Phi(z)$ – решение задачи H при $f \in L^1(\rho)$. Тогда справедливы следующие утверждения* (а) *если* $n+\kappa \geq 0$, *то*

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n}\int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)(t-z)}\,dt + \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n}, \tag{2.1}$$

где $P(z)$ – *некоторый полином порядка* $n+\kappa-1$*;*

(б) *если* $n+\kappa < 0$, *то* $\Phi(z)$ *представима в виде* (2.1), *где* $P(z)\equiv 0$, *а* $f(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)}t^k dt = 0, \quad k = 0,1,\ldots,-(n+\kappa)-1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $n+\kappa \geq 0$. Так как $\alpha - n \leq 0$, то из (1.1) получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T \left|\frac{\Phi^+(rt)(1-t)^n}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^n}{S^-(t)} - \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)}\right||dt| = 0.$$

Положив

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)(1-z)^n}{S^+(z)}, \qquad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^n}{S^-(z)},$$

$$\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t), \quad t\in T,$$

получаем задачу Гильберта относительно функции $\Psi_r^{\pm}$, причем

$$|\Psi_r^-(z)| < C|z|^{n+\kappa-1}$$

в окрестности $z=\infty$. Поэтому

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(t)}{t-z}dt + P_r(z),$$

где $P_r(z)$ – полином порядка $n+\kappa-1$. Так как в L^1

$$\Psi_r(z) \to \Phi(z)(1-z)^n(S(z))^{-1} \quad \text{при} \quad r\to 1-0$$

равномерно вне окружности T, а

$$f_r(t) \to f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1} \quad \text{при} \quad r\to 1-0,$$

то переходя к пределу, получаем (2.1). Утверждение (а) доказано.

Пусть теперь $n+\kappa<0$. Тогда $P_r(z)\equiv 0$ и

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n}\int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)(t-z)}dt.$$

Так как $S(z)(1-z)^{-n}$ имеет полюс порядка $-(n+\kappa)$ в бесконечности, то для того, чтобы имело место $\Phi(\infty)=0$, необходимы условия (2.2).

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \leq -1$, *тогда в* L^1

$$f(t)(1-rt)^n(S^+(t))^{-1} \to f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1} \quad \textit{при} \quad r\to 1-0.$$

Доказательство. Так как функция $(S^+(t))^{-1}$ ограничена, то достаточно установить, что

$$f(t)(1-rt)^n \to f(t)(1-t)^n \quad \text{в} \quad L^1.$$

Учитывая неравенство $|1-t| < 2|1-rt|$, получаем

$$\left|(1-rt)^n - (1-t)^n\right| \le C\frac{(1-r)|1-t|^n}{|1-rt|}.$$

Из $f(t) \in L^1(\rho)$ следует, что $f(t) = g(t)|1-t|^{-\alpha}$, где $g(t) \in L^1$. Следовательно,

$$\left|f(t)(1-rt)^n - f(t)(1-t)^n\right| \le \frac{C|g(t)|(1-r)}{|1-rt||1-t|^{-n+\alpha}}.$$

Так как

$$\frac{1-r}{|1-rt||1-t|^{-n+\alpha}} < 2\frac{1-r}{|1-rt|},$$

то

$$\left|f(t)(1-rt)^n - f(t)(1-rt)^n\right| < \frac{2C|g(t)|(1-r)}{|1-rt|}.$$

Учитывая, что функции $(1-r)|1-rt|^{-1}$ равномерно ограничены на T, $(1-r)|1-rt|^{-1} \to 0$ $(t \ne 1)$ при $r \to 1-0$ и применяя теорему Лебега, получаем доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть m – натуральное число, тогда справедливы следующие утверждения*

(а) $\left|(1-rt)^m - \left(1-r^{-1}t\right)^m\right| < C(1-r)|1-rt|^{m-1}$;

(б) *если m – нечетное число, то существует постоянная $c > 0$ такая, что при условии $|1-t| < c(1-r)$ имеет место*

$$\left|(1-rt)^m - \left(1-r^{-1}t\right)^m\right| > (1-r)|1-t|^{m-1};$$

(в) *если m – четное число, то существует постоянная $c > 0$, такая, что при условии $m(1-r)^2 < |1-t| < c(1-r)$ имеет место*

$$\left|(1-rt)^m - \left(1-r^{-1}t\right)^m\right| > (1-r)|1-t|^{m-1}.$$

Доказательство. Так как (см. [7])

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| < C\frac{(1-r)((1-r)^{m-1} + |1-t|^{m-1})}{|1-rt|^{2m}},$$

то справедливость утверждения (а) следует из неравенств $1-r < |1-rt|$ и $|1-t| < 2|1-rt|$. Далее, имеем

$$\left|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m\right| = \frac{(1-r^2)}{r}\left|\sum_{k=0}^{m-1}(1-rt)^k(1-r^{-1}t)^{m-1-k}\right|$$

$$= \frac{(1-r^2)}{r}|1-t|^{m-1}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1-r}{1-t}+r\right)^k\left(1-\frac{1-r}{1-t}\right)^{m-k-1}r^{-(m-1-k)}\right|.$$

Обозначив

$$\frac{1-r}{1-t}=u \quad \text{и} \quad P_r(u)=\frac{1+r}{r}\sum_{k=0}^{m-1}(-r)^{-(m-1-k)}(u+r)^k(u-1)^{m-1-k},$$

будем иметь

$$\left|(1-rt)^m-(1-r^{-1}t)^m\right|=(1-r)|1-t|^{m-1}|P_r(u)|.$$

Пусть m – нечетное число. Тогда

$$P_r(u)=A_1(r)u^{m-1}+A_2(r)u^{m-2}+\ldots+A_m(r),$$

где

$$A_1(r)=r^{-(m-1)}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k r^k,$$

и $A_1(r)\to 1$ при $r\to 1-0$. Так как числа $A_k(r)$, $k=2,\ldots,m$, равномерно ограничены, то

$$\left|P_r(u)\right||u|^{-(m-1)}\to 1 \quad \text{когда} \quad |u|\to\infty, \quad r\to 1.$$

Следовательно, существует $A>0$ такое, что если $|u|>A$, то $|P_r(u)|>1$. Обозначив $c=A^{-1}$, получаем доказательство утверждения (б). Если m – четное число, то $A_1(r)\to 0$, $A_2(r)\to m$ при $r\to 1-0$. Поэтому

$$\left|P_r(u)-A_1(r)u\right||u|^{-(m-2)}\to m \quad \text{при} \quad |u|\to\infty, \quad r\to 1.$$

Из условия леммы имеем $|A_1(r)||u|<1$ и

$$|P_r(u)||u|^{-(m-2)}>m-1$$

для достаточно больших $|u|$. Следовательно, для некоторого $A>0$ при $|u|>A$ имеем $|P_r(u)|>1$. Лемма доказана.

2. Функцию $a(t)$ отнесем к классу R^α ($a(t)\in R^\alpha$), если

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|S^+(rt)-a(t)S^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho_r)}=0. \tag{2.3}$$

К примеру, пусть

$$a(t)=cos^{\gamma_1}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\gamma_2}\right), \quad t\in T,$$

где γ_1 – произвольное целое число, а γ_2 – неотрицательное целое число. Имеем $\gamma_1 = \operatorname{ind} a(t)$ и, если $\gamma_2 > -n-1$, то $a(t) \in R^\alpha$. Действительно, пусть $\gamma_1 \geq 0$, тогда $S^+(z) \equiv 1$ и

$$S^-(z) = cos^{-\gamma_1}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma_2}\right),$$

$$\left|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\right| \leq C\left|(1-r^{-1}t)^{\gamma_2} - (1-t)^{\gamma_2}\right| \leq C(1-r)|1-rt|^{\gamma_2-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\right|\rho_r(t) &\leq C(1-r)|1-rt|^{\gamma_2-1}|1-rt|^n|1-t|^{\alpha-n}\\ &= C(1-r)|1-rt|^{\gamma_2+n}|1-t|^{\alpha-n}.\end{aligned}$$

Так как $\gamma_2 + n > -1$, то $a(t) \in R^\alpha$. Аналогично устанавливается, что $a(t) \in R^\alpha$ при $\gamma_1 < 0$.

Лемма 4. *Пусть $\alpha \leq -2$, $a(t) \in R^\alpha$,*

$$P(z) = A_1(1-z) + A_2(1-z)^2 + \ldots + A_{-n-1}(1-z)^{-n-1} - -$$

полином порядка $-n-1$. Тогда, если

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то $P(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как

$$S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t) = I_1(r,t) + I_2(r,t),$$

где

$$\begin{aligned}I_1(r,t) &= \left(S^+(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right)P(rt),\\ I_2(r,t) &= a(t)S^-(r^{-1}t)(P(rt) - P(r^{-1}t)),\end{aligned}$$

то из условия леммы имеем $\|I_1(r,t)\|_{L^1(\rho)} \to 0$. Пусть $A_1 \neq 0$, тогда по лемме 3

$$\left|P(rt) - P\left(r^{-1}t\right)\right| > (1-r),$$

при $|1-t| < c(1-r)$, где $c > 0$. Поэтому

$$\int_T |I_2(r,t)|\rho(t)|dt| \geq \int_{|1-t|<c(1-r)} \frac{(1-r)|dt|}{|1-rt|^{-n}|1-t|^{n-\alpha}}.$$

Так как $|1-rt| \approx 1-r$ при $|1-t| < c(1-r)$, то

$$\int_T |I_2(r,t)|\rho(t)|dt| \geq (1-r)^{n+1}\int_0^{c(1-r)} \frac{d\theta}{\theta^{n-\alpha}} = A(1-r)^{2+\alpha},$$

где $A = c^{1+\alpha-n}(1+\alpha-n)^{-1}$. Тем самым, лемма доказана при $A_1 \neq 0$.

Пусть $A_k \neq 0$, n – нечетное число и $A_1 = A_2 = \ldots = A_{k-1} = 0$. Применяя снова лемму 3, получаем

$$|P(rt) - P(r^{-1}t)| > (1-r)|1-t|^{k-1} \quad \text{при} \quad |1-t| < c(1-r).$$

Поэтому

$$\int_T |I_2(r,t)|\rho(t)|dt| \geq \int_{|1-t|<c(1-r)} \frac{(1-r)|1-t|^{k+\alpha-n-1}}{|1-rt|^{-n}} dt$$
$$> (1-r)^{n+1} \int_0^{c(1-r)} \theta^{k+\alpha-n-1} d\theta = A(1-r)^{k+\alpha+1},$$

где $A = c^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}$. Так как $k+\alpha+1 \leq 0$, то

$$\varliminf_{r\to 1-0} \int_T |I_2(r,t)|\rho(t)|dt| > 0. \tag{2.4}$$

Если n – четное число, то

$$\int_T |I_2(r,t)|\rho(t)|dt| > (1-r)^{n+1} \int_{m(1-r)^2}^{c(1-r)} \theta^{k+\alpha-n-1} d\theta$$
$$= (1-r)^{k+\alpha+1}(A - B(1-r)^{k+\alpha-n}),$$

где

$$A = c^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}, \quad B = m^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}.$$

Так как $k+\alpha-n > 0$, то получаем (2.4).

Лемма 5. *Пусть $\alpha \leq -1$, $k \geq -n$, тогда*

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| S^+(rt)(1-rt)^k - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\left(1-r^{-1}t\right)^k \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$S^+(rt)(1-rt)^k - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\left(1-r^{-1}t\right)^k = I_1(r,t) + I_2(r,t),$$

где

$$I_1(r,t) = \left(S^+(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right)(1-rt)^k,$$
$$I_2(r,t) = a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\left((1-rt)^k - \left(1-r^{-1}t\right)^k\right).$$

Учитывая, что $\left|S^+(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right| < A(1-r)^\delta$, $\delta > 0$, получаем

$$\int_T |I_1(r,t)|\rho_r(t)|dt| \leq (1-r)^\delta \int_T \frac{|1-rt|^k|dt|}{|1-rt|^{-n}|1-t|^{n-\alpha}} \leq (1-r)^\delta \int_T \frac{|dt|}{|1-t|^{n-\alpha}}$$

и

$$\lim_{r\to 1-0} \int_T |I_1(r,t)|\rho_r(t)|dt| = 0.$$

Далее, имеем $|(1-rt)^k - (1-r^{-1}t)^k| < (1-r)|1-t|^{k-1}$. Поэтому

$$\int_T |I_2(r,t)|\rho_r(t)|dt| \leq (1-r)\int_T \frac{|1-rt|^{k-1}|dt|}{|1-rt|^{-n}|1-t|^{n-\alpha}}$$

$$\leq (1-r)\int_T \frac{|dt|}{|1-rt||1-t|^{n-\alpha}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $r \to 1-0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $f \in L^1(\rho)$ *и*

$$K(f,z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau-z)}, \quad z \in D^+ \cup D^-, \tag{2.5}$$

тогда

$$\left\|K^+(f,rt) - a(t)K^-\left(f,r^{-1}t\right)\right\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Доказательство. Из (2.5) имеем

$$K^+(f,rt) - a(t)K^-\left(f,r^{-1}t\right) = I_1(r,t) + I_2(r,t),$$

где

$$I_1(r,t) = \frac{S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i(1-rt)^n}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau-rt)},$$

$$I_2(r,t) = \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i}\Bigg(\frac{1}{(1-rt)^n}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau-rt)}$$

$$-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^n}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau-r^{-1}t)}\Bigg).$$

Так как

$$\left|S^+(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right| < A(1-r)^\delta,$$

то

$$|I_1(r,t)| \leq \frac{A(1-r)^\delta}{|1-rt|^n}\int_T \frac{|f(\tau)|1-\tau|^n||d\tau|}{|\tau-rt|}.$$

Далее $I_2(r,t) = I_2^{(1)}(r,t) + I_2^{(2)}(r,t)$, где

$$I_2^{(1)}(r,t) = \frac{a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)}{2\pi i(1-rt)^n}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n(1-r^2)}{S^+(\tau)|\tau-rt|^2}|d\tau|,$$

$$I_2^{(2)}(r,t) = \frac{a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)}{2\pi i}\left(\frac{1}{(1-rt)^n} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^n}\right)\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{S^+(\tau)(\tau-rt)}|d\tau|.$$

Учитывая, что функция $a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)$ равномерно ограничена, когда r достаточно близко к 1, получаем

$$\left|I_2^{(1)}(r,t)\right| < \frac{M}{|1-rt|^n}\int_T \frac{|f(\tau)||1-\tau|^n|1-r^2|}{|\tau-rt|^2}|d\tau|$$

и

$$\left|I_2^{(2)}(r,t)\right| < M\left|\frac{1}{(1-rt)^n} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^n}\right| \int_T \frac{|f(\tau)||1-\tau|^n}{|\tau - rt|}|d\tau|.$$

Пусть теперь $\alpha > -1$. Тогда $n \geq 0$ и

$$\|I_1(r,t)\|_{L^1(\rho_r)} \leq A\int \frac{(1-r)^\delta|1-t|^\alpha}{|1-rt|^n}\int_T \frac{|f(\tau)||1-\tau|^n}{|\tau-rt|}|d\tau||dt|$$

$$\leq A\int |f(\tau)||1-\tau|^\alpha|1-\tau|^{n-\alpha}\int_T \frac{(1-r)^\delta|dt|}{|1-t|^{n-\alpha}|\tau-rt|}|d\tau|.$$

Так как

$$\sup|1-\tau|^\lambda\int_T \frac{(1-r)^\delta|dt|}{|1-t|^\lambda|\tau-rt|} < \infty, \quad r\in(0,1), \quad \tau\in T,$$

то получаем $\|I_1(r,t)\|_{L^1(\rho_r)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}$. Далее имеем

$$\left\|I_2^{(1)}(r,t)\right\|_{L^1(\rho_r)} \leq M\int |f(\tau)||1-\tau|^\alpha|1-\tau|^{n-\alpha}\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|1-t|^{n-\alpha}|\tau-rt|^2}|d\tau|.$$

Так как (см. [7])

$$\sup|1-\tau|^\lambda\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|1-t|^\lambda|\tau-rt|^2} < \infty, \quad r\in(0,1), \quad \tau\in T,$$

то

$$\left\|I_2^{(1)}(r,t)\right\|_{L^1(\rho_r)} < M\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая неравенство (см. [7])

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^n} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^n}\right| \leq \frac{A(1-r^2)}{|1-rt|^{n+1}},$$

получаем

$$\left\|I_2^{(2)}(r,t)\right\|_{L^1(\rho_r)} \leq A\int |f(\tau)||1-\tau|^\alpha|1-\tau|^{n-\alpha}\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|1-rt|^{1+n-\alpha}|\tau-rt|}|d\tau|.$$

Используя следующую оценку из [7]

$$\sup|1-\tau|^\lambda\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|1-rt|^{1+\lambda|}\tau-rt|^2} < \infty, \quad r\in(0,1), \quad \tau\in T,$$

получаем

$$\left\|I_2^{(2)}(r,t)\right\|_{L^1(\rho_r)} \leq A\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым при $\alpha > -1$ лемма доказана.

Пусть теперь $\alpha \leq -1$. Так как в этом случае $\rho_r(t) = |1-rt|^n|1-t|^{\alpha-n}$, то

$$\|I_1(r,t)\|_{L^1(\rho_r)} \leq A\int |f(\tau)||1-\tau|^\alpha|1-\tau|^{n-\alpha}$$

$$\times\int_T \frac{(1-r)^\delta|dt|}{|1-t|^{n-\alpha}|\tau-rt|}|d\tau| < A\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Аналогично, в силу леммы 3

$$\left\| I_2^{(1)}(r,t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \le A \|f\|_{L^1(\rho)},$$

$$\left\| I_2^{(2)}(r,t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \le A \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Лемма доказана.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ H

1. Нам необходимо следующее утверждение

Лемма 7. *Пусть* $f \in L^1(\rho)$. *Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| K^+(f,rt) - a(t)K^-\left(f, r^{-1}t\right) - f(t) \right\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где функция $K(f,z)$ *определяется формулой* (2.5). *Тем самым, если* $n+\kappa \ge 0$, *то функция* $K(f,z)$ *является решением задачи* H. *Если* $n+\kappa < 0$, *то* $K(f,z)$ *будет решением задачи* H *тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет условиям* (2.2)

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция $f \in L^1(\rho)$ обращается в нуль в окрестности точки $t = 1$. Пусть $f \equiv 0$ при $|1-t| < \beta$, тогда функция

$$\Phi_1(z) = \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{S^+(\tau)(\tau - z)}\, d\tau$$

аналитична в окрестности $|1-z| < \beta$ точки $z = 1$. Поэтому

$$\Phi_1(z) = A_0 + A_1(z-1) + \ldots + A_k(z-1)^k + \ldots,$$

где

$$A_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{S^+(\tau)(\tau-1)^{k+1}}.$$

Ясно, что

$$\left| \Phi_1(rt) - \Phi_1\left(r^{-1}t\right) \right| < A(1-r),$$

при $|1-t| < \beta$, и поэтому

$$K^+(f,rt) - a(t)K^-(f,r^{-1}t) = I_1(r,t) + I_2(r,t),$$

где

$$I_1(r,t) = \frac{S(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\Phi_1(r^{-1}t)}{|1-rt|^n},$$

$$I_2(r,t) = -a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\Phi_1\left(r^{-1}t\right)\left(\frac{1}{|1-rt|^n} - \frac{1}{|1-r^{-1}t|}\right).$$

Так как

$$\left| S(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\Phi_1(r^{-1}t) \right| < C(1-r)^\delta,$$

где $\delta > 0$ и $|t-1| < \beta$, то

$$\int_{T_\beta} |I_1(r,t)|\,\rho(t)|dt| \le \int_{T_\beta} \frac{(1-r)^\delta |1-t|^\alpha}{|1-rt|^n} dt \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Далее, учитывая лемму 4 имеем

$$\left|(1-rt)^{-n} - \left(1-r^{-1}t\right)^{-n}\right| < C(1-r)|1-rt|^{-(n+1)},$$

поэтому

$$\int_{T_\beta} |I_2(r,t)|\,\rho(t)|dt| \le C\int_{T_\beta} \frac{(1-r)|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{n+1}} dt \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Тем самым,

$$\int_{T_\beta} \left|K^+(f,rt) - a(t)K^-\left(f,r^{-1}t\right)\right| \rho(t)|dt| \to 0.$$

Пусть теперь $t \in T \setminus T_\beta$. Так как $f(t)(1-t)^n \in L^1(T)$, то функция

$$\Phi_2(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau - z)}$$

удовлетворяет соотношению (см. [8])

$$\left\|\Phi_2^+(rt) - a(t)\Phi_2^-\left(r^{-1}t\right) - f(t)(1-t)^n\right\|_{L^1} \to 0.$$

Учитывая, что

$$\left|(1-rt)^{-n} - \left(1-r^{-1}t\right)^{-n}\right| < A(1-r), \quad t \in T \setminus T_\beta,$$

получаем доказательство леммы, если $f \in L^1(\rho)$ обращается в нуль в окрестности точки $t = 1$.

Пусть теперь $f \in L^1(\rho)$ – произвольная функция. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем функцию f_ε так, чтобы она обращалась в нуль в окрестности $t = 1$, и имело место $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} < \varepsilon$. Учитывая лемму 6, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\left\|K^+(f,rt) - a(t)K^-\left(f,r^{-1}t\right) - f(t)\right\|_{L^1(\rho_r)} \\
&\le \left\|K^+(f-f_\varepsilon,rt) - a(t)K^-\left(f-f_\varepsilon,r^{-1}t\right) - f(t)\right\|_{L^1(\rho_r)} \\
&+ \left\|K^+(f_\varepsilon,rt) - a(t)K^-\left(f_\varepsilon,r^{-1}t\right) - f_\varepsilon(t)\right\|_{L^1(\rho_r)} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)} \\
&\le C\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} + \left\|K^+(f_\varepsilon,rt) - a(t)K^-\left(f_\varepsilon,r^{-1}t\right) - f_\varepsilon(t)\right\|_{L^1(\rho_r)}.
\end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое стремится к нулю при $r \to 1-0$, то лемма доказана.

2. Для однородной задачи H имеет место

Теорема 1. *Пусть $\alpha > -1$, тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если $n+\kappa>0$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде*

$$\Phi_0(z)=S(z)\left(\sum_{k=1}^{n}A_k(1-z)^{-k}+\sum_{s=0}^{\kappa-1}B_s(1-z)^s\right),$$

при $\kappa>0$ и

$$\Phi_0(z)=S(z)\sum_{s=-\kappa+1}^{n}A_s(1-z)^{-s},$$

при $\kappa\le 0$;

(б) *если $n+\kappa\le 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Положим

$$P(z)=\sum_{s=0}^{n-1}B_s(1-z)^s.$$

Так как

$$|S^+(rt)-a(t)S^-(r^{-1}t)|<A(1-r)^{\delta},\quad \delta>0,$$

то

$$\left|S^+(rt)P(rt)-a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)P\left(r^{-1}t\right)\right|<A(1-r)^{\delta}.$$

Поэтому

$$\left\|S^+(rt)P(rt)-a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)P\left(r^{-1}t\right)\right\|_{L^1(\rho)}\to 0.$$

Рассмотрим функции $\Phi_k(z)=S(z)(1-z)^{-k}$, где $k<n$ – натуральное число. Используя оценку

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^k}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^k}\right|<C\frac{1-r}{|1-rt|^{k+1}},$$

получаем

$$\left|\Phi_k^+(rt)-a(t)\Phi_k^-\left(r^{-1}t\right)\right|\le\frac{\left|S^+(rt)-a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right|}{|1-rt|^k}$$
$$+\left|a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right|\left|\frac{1}{(1-rt)^k}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^k}\right|\le C\left(\frac{(1-r)^{\delta}}{|1-rt|^k}+\frac{(1-r)}{|1-rt|^{k+1}}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\left\|\Phi_k^+(rt)-a(t)\Phi_k^-\left(r^{-1}t\right)\right\|_{L^1}(\rho)\\
&\le C\left(\int_T\frac{(1-r)^{\delta}|1-t|^{\alpha}}{|1-rt|^k}|dt|+\int_T\frac{(1-r)|1-t|^{\alpha}}{|1-rt|^{k+1}}|dt|\right)\\
&\le C\left(\int_T\frac{(1-r)^{\delta}|1-t|^{\alpha}}{|1-rt|^n}|dt|+\int_T\frac{(1-r)|1-t|^{\alpha}}{|1-rt|^{n+1}}|dt|\right)\\
&\le C\left((1-r)^{\delta}\int_T\frac{|dt|}{|1-rt|^{n-\alpha}}+\int_T\frac{(1-r)|dt|}{|1-rt|^{n+1-\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Так как, $n-\alpha<1$ и $n+1-\alpha<2$, то последнее выражение стремится к нулю при $r\to 1-0$.

3. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть $\alpha>-1$, тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если $n+\kappa\geq 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде*

$$\Phi(z)=K(f,z)+\Phi_0(z), \tag{3.1}$$

где $K(f,z)$ определяется формулой (2.5), а $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи H;

(б) *если $n+\kappa<0$, то решение задачи H единственно и представимо в виде (3.1), где $\Phi_0(z)\equiv 0$, а f удовлетворяет условиям (2.2).*

4. Рассмотрим случай $\alpha\leq -1$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha\leq -1$ и $a(t)\in R^{\alpha}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если $n+\kappa\geq 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде*

$$\Phi(z)=K(f,z)+S(z)P(z), \tag{3.2}$$

где

$$P(z)=A_0+A_{-n}(1-z)^{-n}+\ldots+A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}--$$

полином порядка $\kappa-1$ с произвольными комплексными коэффициентами $A_0,A_{-n},\ldots,A_{\kappa-1}$.

(б) *если $n+\kappa<0$ и $\kappa>0$, то общее решение задачи H представимо в виде*

$$\Phi(z)=K(f,z)+A_0S(z), \tag{3.3}$$

где A_0 – произвольное комплексное число, а $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_T\frac{f(t)(1-t)^nt^k}{S^+(t)}dt=0,\quad k=0,1,\ldots,-(n+\kappa)-1; \tag{3.4}$$

(в) *если $n+\kappa<0$ и $\kappa\leq 0$, то решение задачи H единственно, представимо в виде (3.3), где*

$$A_0=-\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)t^{n+1}}dt, \tag{3.5}$$

а $f(t)$ удовлетворяет условиям (3.4) при $\kappa\neq -n-1$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi(z)$ есть решение задачи H при заданном $f \in L^1(\rho)$. Тогда из (1.1) имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T \left|\frac{\Phi^+(rt)(1-rt)^n}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)(1-rt)^n}{S^-(t)} - \frac{f(t)(1-rt)^n}{S^+(t)}\right| |dt| = 0.$$

Полагая

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)(1-rz)^n}{S^+(z)}, \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)(1-rz)^n}{S^-(z)}$$

и

$$\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t), \qquad t \in T,$$

получаем задачу Гильберта относительно функций $\Psi_r^{\pm}(z)$, где $\Psi_r^-(z)$ имеет полюс порядка $-n$ в точке r^{-1}, а в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место неравенство $|\Psi_r^-(z)| < C|z|^{n+\kappa-1}$. Пусть

$$Q_r(z) = \frac{A_1(r)}{1-rz} + \ldots + \frac{A_{-n}(r)}{(1-rz)^{-n}} \text{ -- }$$

главная часть разложения Лорана функции $\Psi_r^-(z)$ в окрестности точки r^{-1}. Тогда будем иметь

$$\Psi_r^+(t) - \big(\Psi_r^-(t) - Q_r(t)\big) = f_r(t) + Q_r(t).$$

Пусть теперь $n + \kappa \geq 0$. Тогда

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(t)}{t-z}dt + Q_r(z) + P_r(z),$$

где $P_r(z)$ – некоторый полином порядка $n+\kappa-1$, если $n+\kappa > 0$, и $P_r(z) \equiv 0$, если $n+\kappa = 0$. Так как $\Psi_r(z) \to \Phi(z)(1-z)^n(S(z))^{-1}$ равномерно вне окружности T и по лемме 2

$$f_r(t) \to f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1}$$

в L^1, то

$$\Phi(z) = K(f,z) + \frac{S(z)(Q(z)+P(z))}{(1-z)^n} \quad \text{при} \quad r \to 1,$$

где

$$Q(z) = \frac{C_1}{1-z} + \frac{C_2}{(1-z)^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{(1-z)^{-n}},$$
$$P(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_{\kappa+n-1}z^{n+\kappa-1}.$$

Ясно, что функция $(Q(z)+P(z))(1-z)^{-n}$ – полином порядка $\kappa - 1$, поэтому

$$(Q(z)+P(z))(1-z)^{-n} = P_1(z) + P_2(z),$$

где

$$P_1(z) = A_1(1-z) + \ldots + A_{-n-1}(1-z)^{-n-1},$$

$$P_2(z) = A_0 + A_{-n}(1-z)^{-n} + \ldots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}.$$

Так как в силу леммы 7,

$$\left\| K^+(f, rt) - a(t)K^-\left(f, r^{-1}t\right) - f(t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \to 0,$$

а по лемме 5 и условию теоремы

$$\left\| S^+(rt)P_2(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)P_2\left(r^{-1}t\right) \right\|_{L^1(\rho_r)} \to 0,$$

то

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| S^+(rt)P_1(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)P_1(r^{-1}t) \right\|_{L^1(\rho_r)} = 0.$$

Применяя лемму 4, получаем $P_1(z) \equiv 0$. Тем самым, если $n + \kappa \geq 0$ и функция $\Phi(z)$ есть решение задачи H, то для этой функции получаем представление (3.2), где $A_0, A_{-n}, A_{-n+1}, \ldots, A_{\kappa-1}$ – некоторые комплексные числа. Применяя снова леммы 7 и 5, получаем, что при любых числах $A_0, A_{-n}, A_{-n+1}, \ldots, A_{\kappa-1}$ функция (3.2) удовлетворяет условию (1.1), т.е. является решением задачи H. Таким образом, утверждение (a) теоремы доказано.

Пусть теперь $n + \kappa < 0$, $\kappa > 0$. Тогда $\Psi_r^-(z)$ имеет полюс порядка $-n$ в точке r^{-1} и обращается в нуль в точке $z = \infty$. Поэтому

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)} \frac{dt}{t-z} + S(z)P(z),$$

где

$$P(z) = A_0 + A_1(1-z) + \ldots + A_{-n-1}(1-z)^{-n-1}$$

– некоторый полином порядка $-n-1$. Учитывая лемму 3, получаем $A_1 = A_2 = \ldots = A_{-n-1} = 0$ и $P(z) = A_0$. Тем самым $\Phi(z)$ представляется в виде (3.3). Так как $a(t) \in R^\alpha$, то $A_0 S(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.1). Поэтому для того, чтобы имело место (3.4), необходимы условия $\Phi(\infty) = 0$.

Пусть теперь $\kappa < 0$. Тогда $S(z)$ имеет полюс порядка $-\kappa$ в бесконечно удаленной точке, и поэтому $A_0 S(z)$ не является решением однородной задачи H. Для того, чтобы имело место $\Phi(\infty) = 0$, следует выбрать A_0 по формуле (3.5) и потребовать условия (3.4) для функции f. Теорема доказана.

Из теоремы 3 получаем

Теорема 4. *Пусть $\alpha \leq -1$ и $a(t) \in R^\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если $n+\kappa>0$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде*

$$\Phi_0(z)=S(z)\left(A_0+A_{-n}(1-z)^{-n}+\ldots+A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}\right), \tag{3.6}$$

где $A_0, A_{-n}, \ldots, A_{\kappa-1}$ – произвольные комплексные числа,

(б) *если $n+\kappa\le 0$ и $\kappa>0$, то $\Phi(z)=A_0S(z)$, где A_0 – произвольное комплексное число;*

(в) *если $n+\kappa\le 0$ и $\kappa<0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение $\Phi(z)\equiv 0$.*

5. Задачу H принято называть нетеровой, если количество линейно независимых решений N однородной задачи и количество условий P на f, при которых задача H имеет решение, конечны. Разница $N-P$ называется *индексом задачи* H. Из теорем 1 и 2 следует, что если $\alpha>-1$, то $N=n+\kappa$ при $n+\kappa\ge 0$ и $P=-n-\kappa$ при $n+\kappa<0$. Это означает, что при $\alpha>-1$ числа N и P зависят только от α и $\kappa=\operatorname{ind} a(t)$. Отметим, что при $\alpha\le -1$ числа N и P зависят не только от α и κ. В случае, когда $a(t)\in R^\alpha$ и $n+\kappa\ge 0$, мы имеем $N=n+\kappa+1$. Можно привести примеры, когда $a(t)\notin R^\alpha$ и $N=n+\kappa$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha\le -2$, $a(t)=(A+(1-t)^\beta)a_1(t)$, где $\beta\in(0,1)$, $a_1(t)\in C^1(T)$, $a_1(t)\ne 0$, а число A выбрано так, чтобы функция $A+(1-z)^\beta$ не обращалась в нуль в D^+. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если $n+\kappa\ge 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде* (3.2), *где*

$$P(z)=A_{-n}(1-z)^{-n}+\ldots+A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}$$

и $A_{-n},\ldots,A_{\kappa-1}$ – произвольные комплексные числа,

(б) *если $n+\kappa<0$, то задача H разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям* (3.4). *Решение единственно и $\Phi(z)=K(f,z)$.*

Доказательство. Через $S_1^\pm(z)$ обозначим фактор-функцию $a_1(t)$. Если $S^\pm(z)$ фактор-функция $a(t)$, то

$$S(z)=\begin{cases}(A+(1-z)^\beta)S_1^+(z), & z\in D^+\\ S_1^-(z), & z\in D^-.\end{cases}$$

Так как

$$\left|S_1^+(rt)-a_1(t)S_1^-\left(r^{-1}t\right)\right|<C(1-r)^\delta,$$

где $\beta < \delta < 1$, то получаем

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| > (1-r)^\beta,$$

при $|1-t| < c(1-r)$, $c > 0$. Следовательно,

$$\left\|S^+(rt) - a(t)S^-\left(r^{-1}t\right)\right\|_{L^1(\rho_r)} \to \infty.$$

Поэтому, повторяя рассуждения теоремы 3, заключаем, что $A_0 = 0$.

Из этой теоремы следует

Теорема 6. *Пусть* $\alpha \leq -2$ *и*

$$a(t) = (A + (1-t)^\beta)a_1(t),$$

где $\beta \in (0,1)$, $a_1(t) \in C^1(T)$, $a_1(t) \neq 0$, *а число* A *выбрано так, чтобы функция* $A + (1-z)^\beta$ *не обращалась в нуль в* D^+. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если* $n+\kappa > 0$, *то общее решение однородной задачи* H *можно представить в виде*

$$\Phi_0(z) = S(z)\left(A_{-n}(1-z)^{-n} + \ldots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}\right),$$

где $A_{-n}, \ldots, A_{\kappa-1}$ – *произвольные комплексные числа,*

(б) *если* $n+\kappa \leq 0$, *то* $\Phi(z) \equiv 0$.

Abstract. The paper studies a Hilbert boundary value problem in $L^1(\rho)$, where $\rho(t) = |1-t|^\alpha$ and α is a real number. For $\alpha > -1$, it is proved that the homogeneous problem has $n+\kappa$ linearly independent solutions when $n+\kappa \geq 0$, where $a(t)$ is the coefficient of the problem, besides, $\kappa = ind\ a(t)$ and $n = [\alpha]+1$ if α is not an integer, and $n = \alpha$ if α is an integer. Conditions under which the problem is solvable are found for the case when $\alpha > -1$ and $n+\kappa < 0$. For $\alpha \leq -1$ the number of linearly independent solutions of the homogeneous problem depends on the behavior of the function $a(t)$ at the point $t = 1$.

Список литературы

[1] Б. В. Хвелидзе, *Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций, Современные проблемы математики, том. 7*, (Москва, 1975).

[2] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов* (Штиинца, Кишенев, 1973).

[3] К. Казарян, Ф. Сория, И. Спитковский, "Краевая задача Римана в пространствах с весом, допускающим особенности," ДАН СССР, **353** (6), 717-719 (1997).

[4] Г. М. Айрапетян, "О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом," Мат. заметки, **76**, 643-650 (2004).

[5] Г. М. Айрапетян, П. Э. Меликсетян, "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом," Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 17-32 (2003).
[6] Н. И. Мусхелешвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, Москва, 1968).
[7] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в весовых пространствах," Изв. НАН Армении, Математика **36** (3), 22-44 (2001).
[8] Г. М. Айрапетян, "Граничная задача сопряжения со смещением в классе L^1," Изв. НАН Армении, Математика **22**, 238-252 (987).

Поступила 15 ноября 2006

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 43-47

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ВНЕ ЭЛЛИПСА

А. Я. СААКЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *artak1982b@yahoo.com*

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка вне эллипса. Не ставятся ограничения на кратность корней характеристического уравнения.

Пусть область $D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1\right\}$ – внешность эллипса, $\Gamma=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ – его граница, $\overline{D}=D\cup\Gamma$ – замыкание D. Рассмотрим задачу

(1) $$\sum_{k=0}^{4}A_k\frac{\partial^4u(z)}{\partial y^k\partial x^{4-k}}=0,\quad z\in D,$$

(2) $$u(z)=f_0(z),\quad \frac{\partial u(z)}{\partial n}=f_1(z),\quad z\in\Gamma,$$

(3) $$|u(z)|\le C,$$

где $z=x+iy$, $\frac{\partial u(z)}{\partial n}$ – производная $u(z)$ по направлению внешней нормали к Γ в точке $z\in\Gamma$, A_k – комплексные постоянные, C – положительная постоянная. Требуется, чтобы f_0, f_1 и $\partial f_0/\partial s$ были из класса Гельдера ($\partial/\partial s$ – производная по дуговой абсциссе s контура Γ). Относительно u требуется, чтобы

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x}\in C(\overline{D})\quad\text{и}\quad\frac{\partial u(z)}{\partial y}\in C(\overline{D}).$$

Задача (1)-(3) при $f_0\equiv f_1\equiv 0$ называется однородной.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ – корни характеристического уравнения

(4) $$A_0+A_1\lambda+A_2\lambda^2+A_3\lambda^3+A_4\lambda^4=0.$$

Уравнение (1) называется эллиптическим, если $\operatorname{Im}\lambda_j\ne0$, $j=1,2,3,4$. Если $\operatorname{Im}\lambda_1>0$, $\operatorname{Im}\lambda_2>0$, $\operatorname{Im}\lambda_3<0$, $\operatorname{Im}\lambda_4<0$, то уравнение (1) называется правильно эллиптическим.

В работе предполагается, что уравнение (1) – правильно эллиптическое. Задача, где условие (3) заменяется на условие $|u(z)| \leq c|z|$, была рассмотрена в [1]. При этом предполагалось также, что характеристическое уравнение имеет только простые корни. В настоящей работе не ставится ограничение на кратность корней характеристического уравнения.

Теорема 1. *В области* D *однородная задача* (1)-(3) *имеет только нулевое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи в* D *необходимо и достаточно, чтобы* $f_0(z)$ *и* $f_1(z)$ *удовлетворяли условиям*

$$\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t} dt = 0, \quad \int_\Gamma (f_0(t) + f_1(t))\, dt = 0, \quad \int_\Gamma \frac{f_0(t) + f_1(t)}{t^2} dt = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Предположим сначала, что область D – внешность единичного круга, т.е. $D = \{z : |z| > 1\}$, а $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, где $z = x + iy$. Рассмотрим следующий случай

$$\text{a)} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, \quad \mathrm{Im}\, \lambda > 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 =: \mu, \quad \mathrm{Im}\, \mu < 0. \tag{6}$$

Обозначим

$$\mu_1 = \frac{i - \lambda}{i + \lambda} \quad \text{и} \quad \mu_2 = \frac{i + \mu}{i - \mu}$$

Из (6) следует, что $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2$. Формула общего решения уравнения высшего порядка типа (1) при условии (3) получена в [3]. В рассматриваемом случае это представление имеет вид

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1\overline{z}) + (1 - z\overline{z})\varphi_2(z + \mu_1\overline{z}) + \varphi_3(\overline{z} + \mu_2 z) + (1 - z\overline{z})\varphi_4(\overline{z} + \mu_2 z) + c_0, \tag{7}$$

где c_0 – произвольная комплексная постоянная, φ_1 и φ_2 – произвольные функции, аналитические в $D_1(\mu_1) = \{z + \mu_1\overline{z} : |z| > 1\}$, а φ_3 и φ_4 – произвольные функции, аналитические в $D_2(\mu_2) = \{\overline{z} + \mu_2 z : |z| > 1\}$, которые удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_1(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_2(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad |\varphi_3(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_4(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \tag{8}$$

где c – произвольная положительная постоянная, зависящая от u.

Подставляя (7) в (2) и, учитывая, что $\overline{z} = 1/z$ при $z \in \Gamma$, получим

$$\left[\varphi_3\left(\frac{1}{z} + \mu_2 z\right) + c\right] - \left[-\varphi_1\left(z + \frac{\mu_1}{z}\right)\right] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\left[\varphi_3'\left(\frac{1}{z} + \mu_2 z\right) - 2\varphi_4\left(\frac{1}{z} + \mu_2 z\right)\right]$$

$$- \left[-2\varphi_2\left(z + \frac{\mu_1}{z}\right) - \varphi_1'\left(z + \frac{\mu_1}{z}\right)\left(z + \frac{\mu_1}{z}\right)\right] = f_1(z), \quad z \in \Gamma. \tag{10}$$

В представлениях (9), (10) первые слагаемые аналитически продолжаются внутрь круга, а вторые слагаемые – вне круга. Таким образом, имеем задачу сопряжения, решая которую по формулам Сохоцкого-Племеля, получим (см. [2], стр. 135)

$$\varphi_3\left(\frac{1}{z}+\mu_3 z\right)+c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(t)}{t-z}dt, \quad |z|<1, \tag{11}$$

$$\varphi_1\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(t)}{t-z}dt, \quad |z|>1, \tag{12}$$

$$\varphi_3'\left(\frac{1}{z}+\mu_2 z\right)\left(\frac{1}{z}+\mu_2 z\right)-2\varphi_4\left(\frac{1}{z}+\mu_2 z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}dt, \quad |z|<1, \tag{13}$$

$$\varphi_1'\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)-2\varphi_2\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}dt, \quad |z|>1. \tag{14}$$

Подставляя $\varphi_1\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)$ и $\varphi_3\left(\frac{1}{z}+\mu_3 z\right)$ из (11) и (12) в (13) и (14), получим

$$\varphi_2\left(z+\frac{\mu_1}{z}\right)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}dt-\frac{1}{4\pi i}\frac{z(z^2+\mu_1)}{z^2-\mu_1}\int_\Gamma \frac{f_0(t)}{(t-z)^2}dt, \quad |z|>1, \tag{15}$$

$$\varphi_4\left(\frac{1}{z}+\mu_2 z\right)=-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(t)}{t-z}dt+\frac{1}{4\pi i}\frac{z(\mu_2 z^2+1)}{\mu_2 z^2-1}\int_\Gamma \frac{f_0(t)}{(t-z)^2}dt, \quad |z|<1. \tag{16}$$

Из (11), (12), (15) и (16) следует, что аналитические функции $\varphi_j(z)$, $j=1,2,3,4$ удовлетворяют условиям (8) тогда и только тогда, когда

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(t)}{t}\,dt \tag{17}$$

и выполняются условия (5). Таким образом, условия (5) необходимы для того, чтобы функция (7) являлась решением задачи (1)-(3). При выполнении этих условий функции (11) (12), (15) и (16) удовлетворяют условиям (8) и, следовательно, функция (7), где c_0 определяется из (17), является решением задачи (1)-(3). Итак, в случае а) теорема доказана.

Пусть теперь

(18)

б) $\quad \operatorname{Im}\lambda_1>0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2>0, \quad \lambda_1\neq\lambda_2, \quad \operatorname{Im}\lambda_3<0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4<0, \quad \lambda_3\neq\lambda_4.$

Обозначим

$$\mu_1=\frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}, \quad \mu_2=\frac{i-\lambda_2}{i+\lambda_2}, \quad \mu_3=\frac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}, \quad \mu_4=\frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}.$$

Из (18) следует, что $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_3 \neq \mu_4$. В этом случае общее решение уравнения (1) с дополнительным условием (3), определяется формулой (см. [3])

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1\overline{z}) + \varphi_2(z + \mu_2\overline{z}) + \varphi_3(\overline{z} + \mu_4 z) + \varphi_4(\overline{z} + \mu_4 z)$$
$$+c_0 + c_1 \ln \frac{z + \mu_1\overline{z}}{z + \mu_2\overline{z}} + c_2 \ln \frac{\overline{z} + \mu_3 z}{\overline{z} + \mu_4 z}, \tag{19}$$

где c_0, c_1, c_2 – произвольные комплексные постоянные,

$$\varphi_1(z + \mu_1\overline{z}), \quad \varphi_2(z + \mu_2\overline{z}), \quad \varphi_3(\overline{z} + \mu_3 z) \quad \text{и} \quad \varphi_4(\overline{z} + \mu_4 z)$$

– произвольные функции, аналитические по соответствующим аргументам при $|z| > 1$ и удовлетворяющие оценкам

$$|\varphi_j(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{20}$$

где c – произвольная положительная постоянная.

Если

$$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, \quad \mathrm{Im}\ \lambda > 0, \quad \mathrm{Im}\ \lambda_3 < 0, \quad \mathrm{Im}\ \lambda_4 < 0, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

то общее решение уравнения (1) с дополнительным условием (3), определяется формулой (см. [3])

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1\overline{z}) + (1 - z\overline{z})\varphi_2(z + \mu_2\overline{z}) + \varphi_3(\overline{z} + \mu_3 z) + \varphi_4(\overline{z} + \mu_4 z)$$
$$+c_0 + c_1 \ln \frac{\overline{z} + \mu_3}{\overline{z} + \mu_4}, \tag{21}$$

где c_0 и c_1 – произвольные комплексные постоянные,

$$\mu_1 \equiv \mu_2 = \frac{i - \lambda}{i + \lambda}, \quad \mu_3 = \frac{i + \lambda_3}{i - \lambda_3}, \quad \mu_4 = \frac{i + \lambda_4}{i - \lambda_4},$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – произвольные аналитические функции в $D_1(\mu_1)$, $D_1(\mu_2)$, $D_2(\mu_3)$, $D_2(\mu_4)$ соответственно, которые удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_1(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_2(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad |\varphi_3(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_4(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \tag{22}$$

где c – произвольная положительная постоянная.

Используя полученные общие решения (19) и (21), аналогично исследуем задачу для внешности эллипса. Делая замену $x = a\xi$, $y = b\eta$, мы приводим этот случай к случаю внешности круга. Теорема доказана.

Abstract. The present paper considers the Dirichlet problem for properly elliptic equations of fourth order in the exterior of an ellipse. No restrictions on the multiplicities of the roots of the characteristic polynomial are assumed.

Список литературы

[1] Н. Е. Товмасян, "Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений," Изв. НАН Армении, Математика **35** (6), 10 (2000).
[2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, Москва, 1962).
[3] А. Я. Саакян, "Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга," ДАН Армении, Математика, (6), (2007).

Поступила 22 декабря 2006

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 48-52

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Г. Г. СААКЯН

Арцахский Государственный Университет, Степанакерт, НКР
E-mail: *ter_saak_george@mail.ru*

Аннотация. С использованием теоремы о сравнении для систем однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка доказывается теорема об осцилляции компонент собственных вектор-функций одной краевой задачи для канонической одномерной системы Дирака.

Рассматривается следующая краевая задача для канонической системы Дирака (см., например, [1])

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 = \lambda y_1, \\ -y_1' + r(t)y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0, \tag{3}$$

где $p(t)$ и $r(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на интервале $[0, \pi]$, т.е. $p, r \in C_R[0, \pi]$, α и β – произвольные действительные числа, λ – параметр.

Если при некотором λ_0 краевая задача (1), (2), (3) имеет нетривиальное решение

$$\bar{y}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(t, \lambda_0) \\ y_2(t, \lambda_0), \end{pmatrix}$$

то число λ_0 называется *собственным значением*, а соответствующее решение $\bar{y}(t, \lambda_0)$ – *собственной вектор-функцией* задачи.

Известно (см. [1], стр. 237), что собственные значения краевой задачи (1), (2), (3) действительны и для них верна следующая асимптотическая формула

$$\lambda_{\pm n} = \frac{\vartheta}{\pi} \pm n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

где число ϑ определяется формулой

$$\vartheta = \beta - \alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi \big\{p(\tau) + r(\tau)\big\} d\tau.$$

Известно также, что нули компонент собственных вектор-функций – простые и, следовательно, их можно пронумеровать в порядке возрастания.

Теория Штурма об осцилляционных свойствах решений уравнения Штурма–Лиувилля давно известна и до сих пор публикуются работы, обобщающие результаты Штурма (см., например, [2]–[4]). Однако, осцилляционные свойства решений системы Дирака мало изучены. Если уравнение Штурма–Лиувилля свести к краевой задаче для нормальной системы второго порядка, то спектральный параметр переходит в краевые условия. Для таких систем осцилляционные свойства решений изучались (см., например [5]).

Цель настоящей статьи – изучить задачу (1), (2), (3), используя теоремы 1 и 2 работы [6]. Сравниваются следующие системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p_i(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r_i(t)y_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где p_i, $r_i \in C_R[0,\pi]$ $(i = 1, 2)$.

Теорема 1. (О сравнении) *Пусть*

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

– нетривиальные решения системы (5) *при* $i = 1$ *и* $i = 2$ *соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям*

$$u_1(a) = v_1(a) \quad \text{и} \quad u_2(a) = v_2(a),$$

и пусть

$$\begin{aligned} &p_1(t)p_2(t) > 0, && r_1(t)r_2(t) > 0, \\ &p_i(t)r_i(t) < 0, && (i = 1, 2), \\ &|p_2(t)| \geq |p_1(t)|, && |r_2(t)| \geq |r_1(t)|. \end{aligned}$$

Тогда, если одна из компонент $\bar{u}(t)$ *имеет* ℓ *нулей на отрезке* $[a, b]$*, то одна из компонент* $\bar{v}(t)$ *имеет на том же отрезке не менее* ℓ *нулей, причем* k*-ый нуль этой компоненты* $\bar{v}(t)$ *не больше* k*-ого нуля компоненты* $\bar{u}(t)$.

Теорема 2. (О перемежаемости нулей) *Если в системе* (5) $p_i(t)r_i(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$, *то между всякими соседними нулями одной из компонент всякого нетривиального решения системы* (5) *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения.*

Рассмотрим теперь задачу (1), (2), (3). Справедлива

Теорема 3. *Для любого натурального числа* n *существует число* μ_n *такое, что если собственное значение задачи* (1), (2), (3) *удовлетворяет неравенству* $|\lambda| \geq \mu_n$, *то каждая из компонент собственной вектор-функции задачи* (1), (2), (3) *имеет на отрезке* $[0, \pi]$ *по крайней мере* n *нулей.*

Доказательство: Запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} y_1' + (\lambda - r(t))y_2 = 0, \\ y_2' + (p(t) - \lambda)y_1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для заданного натурального числа n выберем натуральное число s так, чтобы имело место неравенство $s \geq n+1$. Затем подберем пару натуральных чисел m и k так, чтобы $s = mk$. Поскольку функции $p(t)$ и $r(t)$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, то они будут ограничены, т.е. найдутся числа p_0, p_1, r_0 и r_1 такие, что $p_0 \leq p(t) \leq p_1$ и $r_0 \leq r(t) \leq r_1$. Далее, в соответствии с формулой (4) выберем λ_n – собственное значение задачи (1), (2), (3) так, чтобы оно удовлетворяло соотношению

$$\lambda_n \geq \max \left\{ r_1 + m^2,\, p_1 + k^2 \right\}. \tag{7}$$

Сравним теперь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y_1' + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - k^2 y_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если принять

$$p_1(t) = m^2, \quad r_1(t) = -k^2, \quad p_2(t) = \lambda_n - r(t) \quad \text{и} \quad r_2 = p(t) - \lambda_n,$$

то, учитывая (7), будем иметь

$$p_i(t) > 0, \quad r_i(t) < 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{и} \quad \bigl|p_2(t)\bigr| \geq \bigl|p_1(t)\bigr|, \quad \bigl|r_2(t)\bigr| \geq \bigl|r_1(t)\bigr|.$$

Далее, известно (см., например, [7]), что общее решение

$$\bar{\mathrm{u}}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

системы (8) можно записать в виде

$$u_1(t) = A\cos(mkt + \varphi),$$
$$u_2(t) = \frac{Ak}{m}\sin(mkt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные.

Предположим теперь, что

$$\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n) = \begin{pmatrix} v_1(t, \lambda_n) \\ v_2(t, \lambda_n) \end{pmatrix}$$

– соответствующая собственному значению λ_n собственная вектор-функция задачи (1), (2), (3), и, следовательно, $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ собственная вектор-функция задачи (6), (2), (3). Пусть

$$v_1(0, \lambda_n) = y_{10}, \quad v_2(0, \lambda_n) = y_{20}.$$

Очевидно, что можно подобрать значения A и φ так, чтобы для соответствующего им частного решения $\bar{\mathrm{u}}(t)$ системы (8) имело бы место условие

$$u_1(0) = y_{10}, \quad u_2(0) = y_{20}.$$

Заметим теперь, что для систем (8) и (6) и соответствующих им решений $\bar{\mathrm{u}}(t)$ и $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ имеют место условия теоремы 1. Так как компоненты решения $\bar{\mathrm{u}}(t)$ имеют на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $\left[\frac{\pi m k}{\pi}\right] = s > n$ нулей, то, применив теорему 1, получим, что одна из компонент собственной вектор-функции $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $n + 1$ нулей. Тогда, согласно теореме 2, другая компонента этой же собственной вектор-функции будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. Очевидно, что при $\lambda \geq \lambda_n$ число нулей может только увеличиваться.

Выберем теперь λ'_n – собственное значение задачи (1), (2), (3) так, чтобы оно удовлетворяло соотношению

$$\lambda'_n \leq \min\left\{r_0 - m^2, \, p_0 - k^2\right\}.$$

Примем

$$p_1(t) = -m^2, \quad r_1(t) = k^2, \quad p_2(t) = \lambda_n\prime - r(t) \quad \text{и} \quad r_2 = p(t) + \lambda'_n.$$

Сравним тепепь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y'_1 - m^2 y_2 = 0, \\ y'_2 + k^2 y_1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что при этом будем иметь

$$p_i(t) < 0, \quad r_i(t) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

причем

$$\left|p_2(t)\right| \geq \left|p_1(t)\right| \quad \text{и} \quad \left|r_2(t)\right| \geq \left|r_1(t)\right|.$$

Вновь воспользовавившись теоремами 1 и 2 и учитывая то, что компоненеты решения системы (9) будут иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $n + 1$ нулей, получим, что каждая из компонент собственной вектор-функции задачи (1), (2),

(3) будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. При $\lambda \leq \lambda'_n$ число нулей может только увеличичаться. Очевидно, что для завершения доказательства теоремы достаточно принять

$$\mu_n = max\{|\lambda_n|, |\lambda'_n|\}.$$

Теорема доказана.

Abstract. A theorem is proved on oscillation of the components of the eigenvector functions of a boundary value problem for the canonical one-dimensional Dirac system.

Список литературы

[1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака* (Наука, Москва, 1988).

[2] D. Hinton, "Sturm's 1836 Oscillation Results. Evolution of the Theory," pp. , 1-27 in: Sturm-Liouville Theory: Past and Present (Birkhäuser, Basel, 2005).

[3] B. Simon, "Sturm Oscillation and Comparison Theorems," pp. 29-43 in: Sturm-Liouville Theory: Past and Present (Birkhäuser, Basel, 2005).

[4] H. Krüger and G. Teschl, "Relative Oscillation Theory, Weighted Zeros of the Wronskian, and the Spectral Shift Function," Arxiv Math/0703574v1 [math.SP], 20 mar 2007.

[5] Е. В. Фолиадова, "Теорема об осцилляции для системы Дирака с параметром в краевом условии," стр. 111-122: Функциональный анализ. Спектральная теория. Межвузовский сборник научных трудов (Ульяновск, 1984).

[6] Г. Г. Саакян, "О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака," Ученые записки АрГУ, (2) 3-11 (2007).

[7] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения* **1** (ИЛ, Москва, 1953).

Поступила 26 ноября 2007

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 53-65

BLOW-UP THE SYMMETRY ANALYSIS FOR THE HIROTA-SATSUMA EQUATIONS

H. A. ZEDAN

University of Kafr El-Sheikh, Egypt
E-mail: *hassanzedan2003@yahoo.com*

Аннотация. The paper investigates the invariance and integrability properties of Hirota-Satsuma equations. Painleve analysis for the general similarity reduced ordinary differential equation is performed. Using Rung-Kutta-Merson method in shooting and matching technique, the nonlinear ordinary differential equations are solved that were numerically converted from similarity reduction.

1. INTRODUCTION

In 1981, R. Hirota and J. Satsuma first proposed the well-known Hirota – Satsuma KDV equation [1]. This equation describes an interaction of two long waves with different dispersion relations.

It is well known that the nonlinear partial differential equations are widely used to describe many important phenomena in physics, biology, chemistry, etc. This equations play a crucial rule in applied mathematics and physics and have many applications in physics and Engineering.

For the past two decades the Lie group method has been applied to solve a wide range of problems and to explore many physically interesting solutions of nonlinear phenomena [2]–[5]. In recent years several extensions and modifications of the classical Lie algorithm have been proposed in order to arrive at new solutions of PDE [6].

The present paper gives a systematic investigation of the invariance and integrability properties of Hirota-Satsuma coupled KDV equation. This enables us to obtain similarity reductions and allows us to derive a great variety of particular solutions which have not been reported for Hirota – Satsuma KDV equation.

An ordinary differential equation (ODE) is said to be Painleve type or to have the Painleve property if all its solutions are free from movable critical points. A critical point is a branching point or a singularity in the solution of the ODE. It is movable if its location depends on the initial values. The most well known ode of Painleve type are the so-called Painleve equations, PI-PVI [7].

The connection between complete integrability and Painleve property was first noticed by Ablowitz – Segur [8], who observed that the similarity reductions of nonlinear PDE solved by inverse scattering transform give rise to nonlinear ODEs.

First, we introduce a generalized nonlinear Hirota-Satsuma KDV equation in the following form:

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x, \tag{1.1}$$

$$v_t = -v_{xxx} + 3uv_x, \tag{1.2}$$

$$w_t = -w_{xxx} + 3uw_x. \tag{1.3}$$

This paper is arranged as follows. In Section 2, we briefly describe the invariance analysis and obtain the reduction system for equations (1.1)–(1.3). In Section 3, we describe the improved Painleve analysis and obtained new solutions of equations' (1.1)–(1.3). In Section 4, Shooting Method is used to study the reduction similarity system of Hirota-Satsuma KDV equation.

2. INVARIANCE ANALYSIS

Let us consider one-parameter Lie group of infinitesimal transformations of the form:

$$x \longrightarrow X = x + \epsilon\xi_1(x, t, u, v, w) + O(\epsilon^2),$$

$$t \longrightarrow T = t + \epsilon\xi_2(x, t, u, v, w) + O(\epsilon^2),$$

$$u \longrightarrow U = u + \epsilon\phi_1(x, t, u, v, w) + O(\epsilon^2),$$

$$v \longrightarrow V = v + \epsilon\phi_2(x, t, u, v, w) + O(\epsilon^2),$$

$$w \longrightarrow W = w + \epsilon\phi_3(x, t, u, v, w) + O(\epsilon^2), \quad \epsilon << 1, \tag{2.1}$$

depending one infinitesimal parameter ϵ. This Lie-Group based similarity method has already been applied successfully to construct and classify all possible classes of similarity solutions.

Applying the infinitesimal Lie-group technique [5], a straightforward calculation yields the following generators of the ϵ Lie group:

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= -\frac{2}{3}k_4 u,\\
\phi_2 &= k_1 v,\\
\phi_3 &= -\frac{1}{3}(3k_1 + 4k_4)w,\\
\xi_1 &= k_2 + \frac{1}{3}k_4 x,\\
\xi_2 &= k_3 + k_4 t, \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

where k_1, k_2, k_3 and k_4 are arbitrary constants.

The extremal Lie group of transformations, admitted by (2.2), is thus seen to depend on four arbitrary group constants (k_1, k_2, k_3, k_4). Consequently, the infinitesimal generators are:

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= v\frac{\partial}{\partial v} - w\frac{\partial}{\partial w},\\
\chi_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (2.3)\\
\chi_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, \qquad (2.4)\\
\chi_4 &= \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{3}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{4}{3}w\frac{\partial}{\partial w}. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

The commutation relation between these generators are given in the following table:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
χ_1	0	0	0	0
χ_2	0	0	0	$\frac{1}{3}\chi_2$
χ_3	0	0	0	χ_3
χ_4	0	$-\frac{1}{3}\chi_2$	$-\chi_3$	0

Group-invariant solutions can be found by solving the characteristic equation:

$$\frac{dt}{\xi_2} = \frac{dx}{\xi_1} = \frac{du}{\varphi_1} = \frac{dv}{\varphi_2} = \frac{dw}{\varphi_3} \qquad (2.6)$$

After solving the characteristic equation (9) associated with the infinitesimal symmetry (2.2), one obtains:

$$z = \frac{3k_2 + k_4 x}{(k_3 + k_4 t)^{\frac{1}{3}}}, \qquad (2.7)$$

and

$$
\begin{aligned}
\omega_1(z) &= (k_3 + k_4 t)^{\frac{2}{3}} u\\
\omega_2(z) &= (k_3 + k_4 t)^{-\frac{k_1}{k_4}} v,
\end{aligned}
$$

$$\omega_3(z) = (k_3 + k_4 t)^{(\frac{4}{3}+\frac{k_1}{k_4})} w, \tag{2.8}$$

where z is the similarity variable and $w_1(z), w_2(z), w_3(z)$ represent the similarity functions.

Substituting (2.7) and (2.8) into equations (1.1)–(1.3), we obtain an ordinary differential equations of the form:

$$\begin{aligned} &3k_1^2 w_1'''(z) + 2zw_1'(z) + 4w_1(z) \\ &\quad - 18w_1(z)w_1'(z) + 18w_3(z)w_2'(z) + 18w_2(z)w_3'(z) = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$3k_4^2 \omega_2'''(z) - zw_2'(z) + \frac{3k_1}{k_4} w_2(z) - 9w_1(z)w_2'(z) = 0, \tag{2.10}$$

$$3k_4^2 \omega_3'''(z) - zw_3'(z) - \frac{3k_1}{k_4} w_3(z) - 9w_1(z)w_3'(z) - 4w_3(z) = 0, \tag{2.11}$$

where

$$w_i^{'} = \frac{dw_i}{dz}, \quad w_i^{''} = \frac{d^2 w_i}{dz^2} \quad \text{and} \quad w_i^{'''} = \frac{d^3 w_i}{dz^3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

In the following sections we solve the ordinary differential equations (2.9)–(2.11) by two different methods.

3. PAINLEVÉ ANALYSIS

Following [9], we outline the WTC algorithm for testing ODEs for the Painleve property. Each of the three main steps of the algorithm is illustrated by the system (2.9)–(2.11).

We assume a Laurent series solution

$$w_i(z) = g^{\alpha_i}(z) \sum_{k=0}^{\infty} w_{i,k}(z) g^k(z), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

where the coefficients $w_{i,k}(z)$ are analytic functions of z with $w_{i,0}(z) \neq 0$ in a neighborhood of the manifold.

3.1. **Step 1 (Determination of the Dominant Behavior).**

To investigate the singularity structure analysis (2.9)–(2.11), we apply a local Laurent expansion in a neighborhood of a noncharacteristic singular $g(z) = 0$.

Assume that the leading orders of the solutions of system (2.9)–(2.11) have the form

$$w_i(z) = \chi_i \;\; g^{\alpha_i}(z), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.2}$$

or

$$
\begin{aligned}
w_1(z) &= \chi_1 \quad g^{\alpha_1}(z),\\
w_2(z) &= \chi_2 \quad g^{\alpha_2}(z),\\
w_3(z) &= \chi_3 \quad g^{\alpha_3}(z),
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

where χ_1, χ_2 and χ_3 are constants.

We substitute (3.3) into the equations (2.9)–(2.11) to determine the leading exponents α_i. Balancing between the highest order term and the non linear terms, we get:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -2.$$

The traditional Painleve test requires that all α_1, α_2 and α_3 be integers and at least one of them be negative.

If one or more exponents α_1, α_2 and α_3 remain undetermined, we assign integer values to the free $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ so that every equation in (2.9)–(2.11) has at least two different terms with equal lowest exponents.

For each solution α_i, we substitute

$$w_i(z) = w_{i,0}(z) g^{\alpha_i}(z), \quad i = 1, 2, 3,$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
w_1(z) &= a_0(z) g^{-2}(z),\\
w_2(z) &= b_0(z) g^{-2}(z),\\
w_3(z) &= c_0(z) g^{-2}(z)
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

(where $a_0(z), b_0(z)$ and $c_0(z)$ do not vanish) into (2.9)–(2.11). We then solve the nonlinear equation for $w_{i,0}$, found by balancing the leading terms with the lowest exponent of $g(z)$.

If any of the solutions contradicts the assumption $w_{i,0}(z) \neq 0$, then that branch of the algorithm fails the Painleve test [10].

If an α_i is non-integer, all the α_i are positive, or the assumption $w_{i,0}(z) \neq 0$ fails, then that branch of the algorithm terminates and does not pass the Painleve test.

We substitute (3.4) into (2.9)–(2.11). Requiring that the leading terms be $g^{-5}(z)$, and balancing at $g^{-5}(z)$ we obtain

$$a_0(z) = 4k_4^2 g'^2(z), \quad b_0(z) = \frac{4k_4^4}{c_0(z)} g'^4(z), \tag{3.5}$$

where $c_0(z)$ is arbitrary function.

3.2. **Step 2 (Determination of the resonance).** For each α_i and $w_{i,0}(z)$, we calculate the $r_1 \leq \ldots \leq r_m$ for which $w_{i,k}(z)$ are arbitrary functions (3.1). We substitute:

$$w_i(z) = w_{i,0}(z)g^{\alpha_i}(z) + w_{i,r}(z)g^{\alpha_i+r}(z). \tag{3.6}$$

or

$$\begin{aligned} w_1(z) &= 4k_4^2 g'^2(z)g^{-2}(z) + a_r(z)g^{r-2}(z),\\ w_2(z) &= \frac{4k_4^4}{c_0(z)} g'^4(z)g^{-2}(z) + b_r(z)g^{r-2}(z),\\ w_1(z) &= c_0(z)g^{-2}(z) + c_r(z)g^{r-2}(z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

into (2.9)–(2.11) and equate the coefficients of the dominant (with $g^{r-5}(z)$). We get the resonances values are:

$$r_1 = -2, r_2 = -1, r_3 = 0, r_4 = 2, r_5 = 3, r_6 = 4, r_7 = 6, r_8 = 7, r_9 = 8.$$

3.3. **Step 3 (Finding the Constants of Integration and Checking Compatibility Conditions).** By convention, the resonance $r_1 = -2$ is ignored since it violates the hypothesis that $g^{-2}(x,t)$ is the dominant term in the expansion near $g(z) = 0$.

Furthermore, this is not a principal branch since the series has only eight arbitrary functions instead of the required nine (as the term corresponding to the resonance $r_1 = -2$ does not contribute to the expansion). Thus, this leads to a particular solution, while the general solution may still be multivalued.

The constants of integration at level k are found by substituting the system of ordinary differential equations possessing the Painleve property. The arbitrariness of $w_{i,r}(z)$ must be verified up to the resonance level. This is done by substituting (3.5) into (3.1). We get

$$w_i(z) = g^{\alpha_i}(z)\sum_{k=0}^{r_m} w_{i,k}(z)g^k(z), \quad i = 1,2,3. \tag{3.8}$$

Therefore

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \sum_{k=0}^{8} a_k(z)g^{k-2}(z),\\ w_2(z) &= \sum_{k=0}^{8} b_k(z)g^{k-2}(z),\\ w_3(z) &= \sum_{k=0}^{8} c_k(z)g^{k-2}(z). \end{aligned} \tag{3.9}$$

From equation (3.5) and (3.9) we obtain:

$$\begin{aligned}
w_1(z) &= 4k_4^2 g'^2(z)g^{-2}(z) + a_1(z)g^{-1}(z) + a_2(z) + a_3(z)g(z) + a_4(z)g^2(z)\\
&\quad + a_5(z)g^3(z) + a_6(z)g^4(z) + a_7(z)g^5(z) + a_8(z)g^6(z),\\
w_2(z) &= \frac{4k_4^4}{c_0(z)} g'^4(z)g^{-2}(z) + b_1(z)g^{-1}(z) + b_2(z) + b_3(z)g(z) + b_4(z)g^2(z)\\
&\quad + b_5(z)g^3(z) + b_6(z)g^4(z) + b_7(z)g^5(z) + b_8(z)g^6(z),\\
w_3(z) &= c_0(z)g^{-2}(z) + c_1(z)g^{-1}(z) + c_2(z) + c_3(z)g(z) + c_4(z)g^2(z)\\
&\quad + c_5(z)g^3(z) + c_6(z)g^4(z) + c_7(z)g^5(z) + a_8(z)g^6(z). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

We now substitute (3.10) into equations (2.9)–(2.11) and group the terms in the same powers of $g(z)$. So, we get the coefficients of $g^{k-2}(z)$ at level k.

To find the functions $a_1(z), b_1(z)$ and $c_1(z)$, we equate the coefficients by $g^{-4}(z)$ to zero at level $k = 1$. By solving the equations, we obtain:

$$\begin{aligned}
a_1(z) &= -4k_4^2 g''(z),\\
b1(z) &= -\frac{4(-k_4^4 c_0'(z)g'^3(z) + 3c_0(z)k_4^4 g'^2(z)g''(z))}{c_0^2(z)},\\
c_1(z) &= -\frac{c_0'(z)g'(z) - c_0(z)g''(z)}{g'^2(z)}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

To find the functions $a_2(z), b_2(z)$ and $c_2(z)$ we equate the coefficients by $g^{-3}(z)$ to zero at level $k = r_4 = 2$. By solving the equations, we obtain:

$$a_2(z) = -\frac{zg'^2(z) + 9k_4^2 g''^2(z) - 12k_4^2 g'(z)g'''(z)}{9g'^2(z)}.$$

$$\begin{aligned}
c_2(z) &= -\frac{b_2(z)c_0^2(z)}{4k_4^4 g'^4(z)} - \frac{1}{18c_0(z)k_4^2 g'^4(z)}(4zc_0^2(z)g'^2(z) - 18k_4^2 c_0'^2(z)\\
&\quad + g'^2(z) + 72c_0(z)k_4^2 c_0'(z)g'(z)g''(z) - 63c_0^2(z)k_4^2 g''^2(z)\\
&\quad - 12c_0^2(z)k_4^2 g'(z)g'''(z)), \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

where the function $b_2(z)$ is arbitrary.

To find the functions $a_3(z), b_3(z)$ and $c_3(z)$, we equate the coefficients of $g^{-2}(z)$ to zero at level $k = r_5 = 3$. Solving the equations, we obtain:

$$\begin{aligned}
b_3(z) &= \frac{1}{3c_0^4(z)g'^2(z)}(-3c_0^4(z)b_2'(z)g'(z) + c_0^3(z)k_1k_4 g'^3(z)\\
&\quad - 14k_4^4 c_0'^3(z)g'^3(z) + 6a_3(z)c_0^3(z)k_4^2 g'4(z) + 24c_0(z)k_4^4 c_0'(z)\\
&\quad + g'^3(z)c_0''(z) + 60c_0(z)k_4^4 c_0'^2(z)g'^2(z)g''(z) - 30c_0^2(z)k_4^4 g'^2(z)\\
&\quad + c_0''(z)g''(z) - 42c_0^2(z)k_4^4 c_0'(z)g'(z)g''^2(z) + 9c_0^3(z)k_4^4 g''^3(z)
\end{aligned}$$

$$-4c_0^2(z)k_4^4g'^3(z)c_0''''(z) - 32c_0^2(z)kc_0'(z)g'^2(z)'''g(z)$$

$$+38c_0^3(z)k_4^4g'(z)g''(z)g'''(z) + 13c_0^3(z)k_4^4g'^2(z)g'''(z),$$

$$\begin{aligned} c_3(z) = {} & \frac{1}{36c_0^2(z)k_4^4g'^6(z)}(9c_0^4(z)b_2'(z)g'(z) + 18b_2(z)c_0^3(z)c_0'(z)g'(z) \\ & - 3c_0^3(z)k_1^4g'^3(z) + 4c_0^3(z)k_4^2g'^3(z) + 8zc_0^2(z)k_4^2c_0'(z)g'^3(z) \\ & + 36k_4^4c_0'^3(z)g'^3(z) + 18a_3(z)c_0^3(z)k_4^2g'^4(z) + 72c_0(z)k_4^4 \\ & + c_0'(z)g'^3(z)c_0''(z) - 36b_2(z)c_0^4(z)g''(z) - 16zc_0^3(z)k_4^2g'^2(z)g''(z) \\ & + 72c_0(z)k_4^4c_0'^2(z)g'^2(z)g''(z) + 90c_0^2(z)k_4^4g'^2(z)c_0''(z)g''(z) \\ & - 432c_0^2(z)k_4^4c_0'(z)g'(z)g''^2(z) + 387c_0^3(z)k_4^4g''^3(z) \\ & + 12c_0^2(z)k_4^4g'^3(z)c_0'''(z) + 72c_0^2(z)k_4^4c_0'(z)g'^2(z)g'''(z) \\ & - 90c_0^3(z)k_4^4g'(z)g''(z)g'''(z) - 33c_0^3(z)k_4^4g'^2(z)g''''(z)), \end{aligned} \tag{3.13}$$

where the function $a_3(z)$ is arbitrary.

To find the functions $a_4(z), b_4(z)$ and $c_4(z)$, we equate the coefficients of $g^{-1}(z)$ to zero at level $k = r_6 = 4$ and solve the equations.

To find the functions $a_5(z), b_5(z)$ and $c_5(z)$, we equate the coefficients of $g^0(z)$ to zero at level $r_6 = 5$ and solve the equations.

To find the functions $a_6(z), b_6(z)$ and $c_6(z)$, we equate the coefficients of $g(z)$ to zero at level $k = r_7 = 6$ and solve the equations.

To find the functions $a_7(z), b_7(z)$ and $c_7(z)$, we equate the coefficients of $g^2(z)$ to zero at level $k = r_8 = 7$ and solve the equations.

To find the functions $a_8(z), b_8(z)$ and $c_8(z)$, we equate the coefficients of $g^3(z)$ to zero at level $k = r_9 = 4$ and solve the equations.

Substitute from equations (3.11)–(3.13) into (3.10), we obtain w_1, w_2, w_3. Consequently, (2.8) yields u, v, w.

4. SECOND METHOD: SHOOTING METHOD

We try to solve equations (2.9)–(2.11) by using shooting method. The boundary and matching conditions of the problem can be written as:

$$w_1 = -\frac{1}{3}, \quad w_1' = \frac{1}{3}, \quad w_2 = -1, \quad w_2' = 1, \quad w_2'' = 0, \quad \text{at} \quad z = -1,$$

$$w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_1' = \frac{1}{3}, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 1 \quad \text{at} \quad z = 1. \tag{4.1}$$

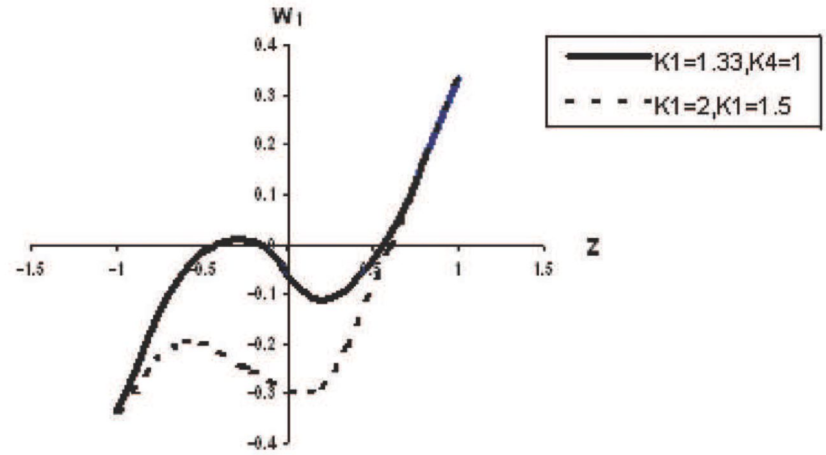

Fig. 1. The relation between z, w_1 in two cases of constants.

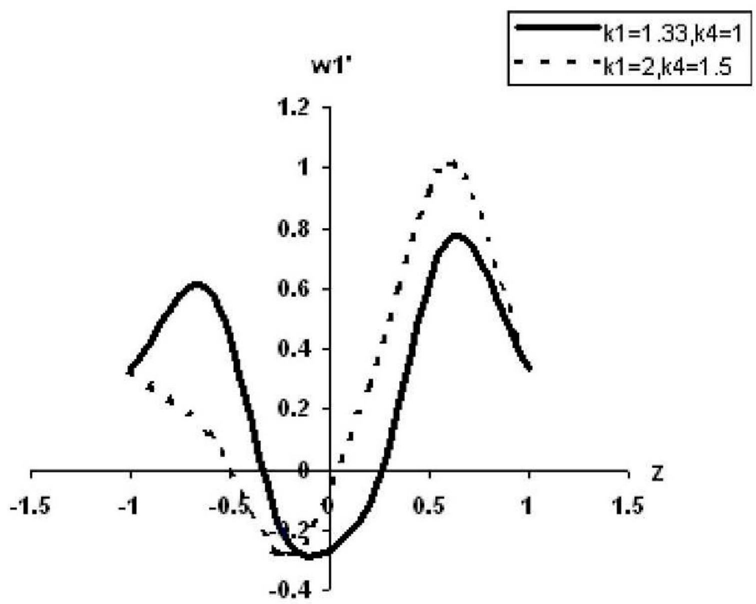

Fig. 2. The relation between z, w_1' in two cases of constants.

4.1. **Numerical Solution.** Equations (2.9)–(2.11) represent the governing equations of the problem under consideration. These equations are nonlinear and therefore, must be solved numerically by Runge-Kutta-Merson method within the shooting and matching technique [11]–[14].

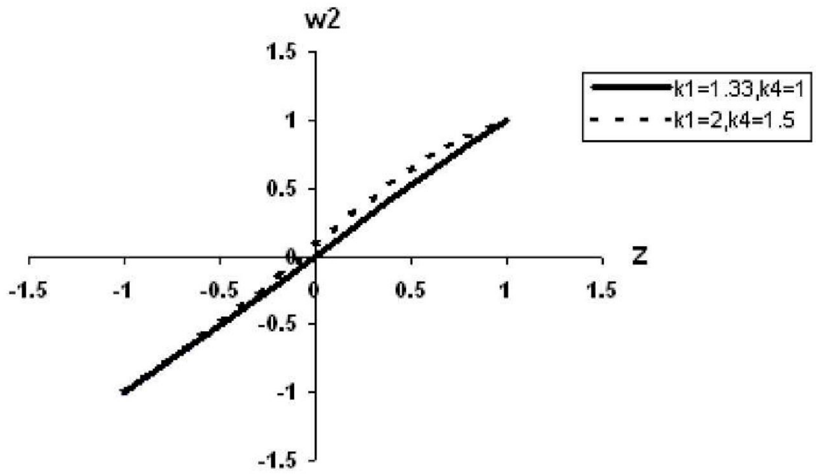

Fig. 3. The relation between z, w_2 in two cases of constants.

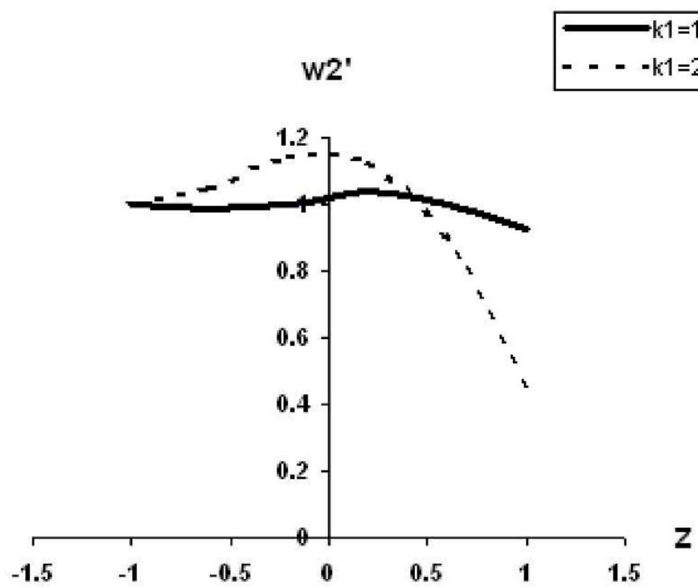

Fig. 4. The relation between z, w_2' in two cases of constants.

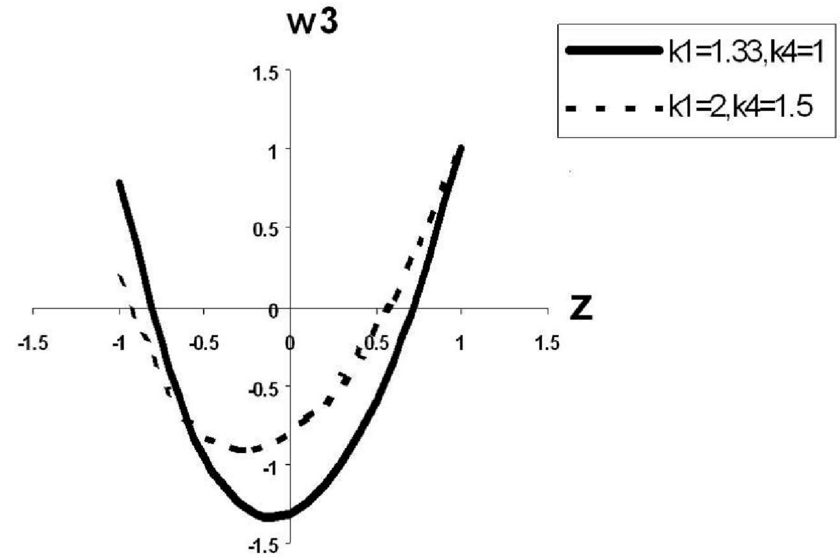

Fig. 5. The relation between z, w_3 in two cases of constants.

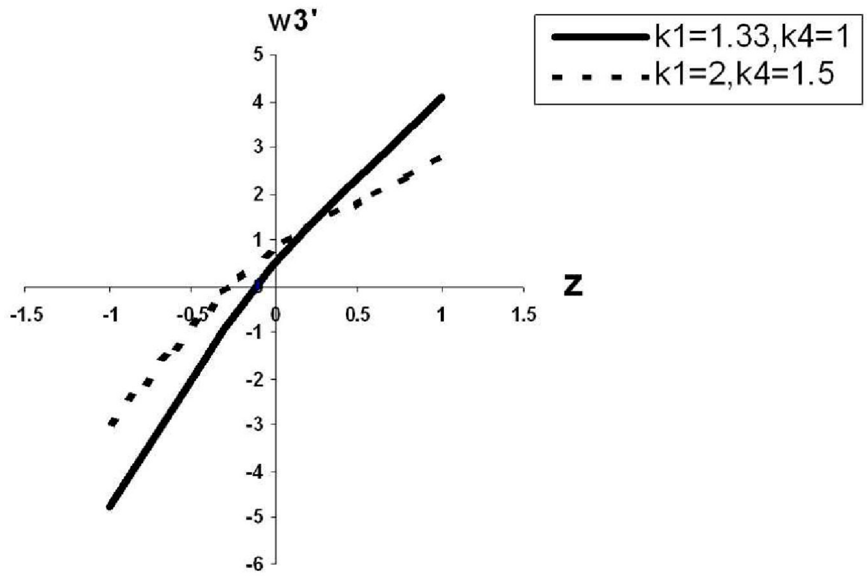

Fig. 6. The relation between z, w_3' in two cases of constants.

The system of nonlinear ordinary differential equations (2.9)–(2.11) can be written as follows:

$$\omega_1'''(z) = \frac{1}{3k_4^2}(-2zw_1'(z) - 4w_1(z) + 18w_1(z)w_1'(z) - 18w_3(z)w_2'(z) - 18w_2(z)w_3'(z)), \tag{4.2}$$

$$\omega_2'''(z) = \frac{1}{3k_4^2}(zw_2'(z) - \frac{3k_1}{k_4}w_2(z) + 9w_1(z)w_2'(z)), \tag{4.3}$$

$$\omega_3'''(z) = \frac{1}{3k_4^2}(zw_3'(z) + \frac{3k_1}{k_4}w_2(z) + 9w_1(z)w_2'(z) + 4w_3(z)). \tag{4.4}$$

We take,

$$w_1 = Y_1, \quad w_2 = Y_4, \quad w_3 = Y_7,$$

and hence equations (4.2)–(4.4) can be written as

$$Y_1' = Y_2, \quad Y_2' = Y_3,$$

$$Y_3' = \frac{1}{3k_4^2}(-2zY_2 - 4Y_1 + 18Y_1Y_2 - 18Y_7Y_5 - 18Y_4Y_8),$$

$$Y_4' = Y_5, \quad Y_5' = Y_6,$$

$$Y_6' = \frac{1}{3k_4^2}(zY_5 - \frac{3k_1}{k_4}Y_4 + 9Y_1Y_5),$$

$$Y_7' = Y_8, \quad Y_8' = Y_9,$$

$$Y_9' = \frac{1}{3k_4^2}(zY_8 + \frac{3k_1}{k_4}Y_7 + 9Y_1Y_8 + 4Y_7), \tag{4.5}$$

subject to the boundary conditions

$$Y_1(-1) = -\frac{1}{3}, \quad Y_2(-1) = \frac{1}{3}, \quad Y_4(-1) = -1, \quad Y_5(-1) = 1, \quad Y_6(-1) = 0,$$

$$Y_1(1) = \frac{1}{3}, \quad Y_2(1) = \frac{1}{3}, \quad Y_4(1) = 1, \quad Y_7(1) = 1.$$

To apply the shooting method we use the subroutine D02HAF from the NAG Fortran library which requires the supply of starting values of the missing initial and terminal conditions. We take two special cases for k_1, k_4:

1) $k_1 = \frac{4}{3}$, $k_4 = 1$. The supplied values are

$$Y_3(-1) = 5.36, \quad Y_7(-1) = .786, \quad Y_8(-1) = -4.75, \quad Y_9(-1) = 4.37,$$

$$Y_3(1) = -5.3, \quad Y_5(1) = 0.924, \quad Y_6(1) = -0.183,$$

$$Y_8(1) = 4.11, \quad Y_9(1) = 4.58. \tag{4.6}$$

2) $k_1 = 2$, $k_4 = 1.5$. The supplied values are

$$Y_3(-1) = 1.86, \quad Y_7(-1) = 0.151, \quad Y_8(-1) = -2.95, \quad Y_9(-1) = 3.67,$$

$$Y_3(1) = -4.74, \quad Y_5(1) = 0.46, \quad Y_6(1) = -1.35,$$

$$Y_8(1) = 2.78, \quad Y_9(1) = 2.92. \tag{4.7}$$

The subroutine uses Runge-Kutta-Merson method with variable step size in order to control the local truncation error, then it applies modified Newton-Raphson technique to make successive corrections to the estimated boundary values.

Список литературы

[1] R. Hirota, J. Satsuma, Phys. Lett. A1981; 85: 407.
[2] P. J. Olever, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, New York, 1968).
[3] G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations* (Springer, New York, 1989).
[4] H. Stephen, *Differential Equations: Their Solutions Using Symmetries* (Cambridge Univ. Press, 1990).
[5] N. K. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations* (CRC Press, 1996).
[6] P. A. Clarkson, *Chaos, Soliton & Fractals* (1995;5:2261).
[7] E. I. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1989).
[8] M. J. Ablowitz and H. Segur H., *Solutions and the Inverse Scattering Transform* (Siam, Philadelphia, 1981).
[9] B. Douglas and W. Hereman, Journal of Nonlinear Math. Phys., 2005:1-21.
[10] R. A. Kraenkel and M. Senthilvelan M, *Chaos, Soliton & Fractals* (2001;12:463).
[11] G. Hall and J. M. Watt, *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (Clarendon Press, Oxford, 1976).
[12] Perdo E. Zadunaisky, Numer. Math. 1976;27:21.
[13] P. J. Prince, IMA Journal of Numerical Analysis, 1985;5:481.
[14] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineerings* (Mc Grow Hill, 2002).

Поступила 18 ноября 2007

Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 66-76

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

А. А. ПЕТРОСЯН И Г. С. АКОПЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *ara.petrosyan@hotmail.com; gurgenh@ysu.am*

Аннотация. В работе рассматривается задача, которая является некоторым обобщением псевдопараболических вариационных неравенств. Доказывается существование и единственность решения соответственной слабой задачи, а также регулярность полученного решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть V – банахово пространство, $K \subset V$ – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество V. Для заданного оператора $A : V \to V'$ основная задача вариационных неравенств состоит в следующем: для заданного $f \in V'$ найти $u \in K$ такое, что для любого $v \in K$ справедливо неравенство

$$(1.1) \qquad \big(Au, v - u\big) \geq \big(f, v - u\big).$$

Подобные неравенства возникают при изучении эллиптических и параболических начально-краевых задач со свободной границей (см. [1]–[4]). Эллиптические и параболические вариационные задачи для монотонных операторов исследованы многими авторами (см. [3]–[5]). В работах Ф. Е. Броудера и Г. Брезиса [6], Ж. Л. Лионса [1], Р. Е. Шовалтера и Т. В. Тинга [2, 7] и других авторов (см. библиографию в работе [8]) исследованы эллиптические и параболические неравенства для псевдомонотонных операторов и доказаны теоремы о существовании, единственности и регулярности их решений. Начально-краевые задачи для нелинейных псевдопараболических операторов исследованы в работах [7]–[11]. В работе Марии Пташник [8] исследованы вариационные неравенства для одного класса псевдопараболических операторов, где доказаны теоремы о существовании и единственности их решения.

В настоящей работе исследуются вариационные неравенства типа (1.1) для некоторого класса операторов, включающего псевдомонотонные операторы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано рефлексивное банахово пространство V, а $K \subset V$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Пусть, далее $D(A)$ – всюду плотное линейное многообразие в V, а A – оператор такой, что $A : D(A) \to V'$ и $f \in V'$. Дадим следующие определения.

Определение 1. *Семейство операторов* $\{G(s) : s \geq 0\}$ *называется линейной полугруппой, определенной на банаховом пространстве* V, *если* $G(s) : V \to V$ *является линейным непрерывным оператором для всех* $s \geq 0$ *и имеет место*

$$G(0) = I, \quad G(s+t) = G(s)G(t), \quad s,t \geq 0,$$

$$G(\cdot)x \in C([0,\infty), V), \quad x \in V.$$

Определение 2. *Пусть* $\{G(s) : s \geq 0\}$ *– некоторая линейная полугруппа над банаховым пространством* V *и*

$$D(B) = \left\{ x \in V : \exists \lim_{h \to 0+} \frac{G(h)x - x}{h} \in V \right\}.$$

Генератором линейной полугруппы $G(s)$ *называется оператор* $B : D(B) \to V$ *такой, что*

$$Bx = \lim_{h \to 0+} \frac{G(h)x - x}{h}$$

(см. [2]*).*

Допустим, что оператор A можно представить в виде

$$A = L\Lambda + M, \tag{2.1}$$

и имеют место условия (i)–(vii):

(i) Оператор $(-\Lambda)$ есть генератор для линейной полугруппы $G(s)$, определенной над пространством V, с областью определения $D(\Lambda)$.

Определяя оператор $\Lambda_h : V \to V$ по формуле

$$\Lambda_h \varphi = \frac{G(h) - I}{h} \varphi,$$

из определения 2 получим, что

$$-\Lambda\varphi = \lim_{h \to 0} (-\Lambda_h \varphi) = \lim_{h \to 0} \frac{I - G(h)}{h} \varphi, \quad \varphi \in D(\Lambda). \tag{2.2}$$

(ii) Справедливо следующее равенство:

$$D(A) = D(\Lambda). \tag{2.3}$$

(iii) Оператор

$$L : V \to V' \tag{2.4}$$

является непрерывным и ограниченным.

(iv) Для любого $\varphi, \psi \in K$

$$\big(L\Lambda_h(\varphi - \psi), \varphi - \psi\big) \leq \big(L\Lambda_h\varphi - L\Lambda_h\psi, \varphi - \psi\big). \tag{2.5}$$

(v) Для любого $\varphi \in K$

$$(L\Lambda_h\varphi, \varphi) \geq 0. \tag{2.6}$$

(vi) $M : V \to V'$ – псевдомонотонный оператор на K (см. [2]), т.е. он ограничен на K и из условий $u_n \rightharpoonup u$ в V $(u_n \in K)$ и $\overline{\lim}\big(Mu_n, u_n - u\big) \leq 0$ вытекает, что

$$\underline{\lim}\big(Mu_n, u_n - v\big) \geq \big(Mu, u - v\big), \quad v \in V. \tag{2.7}$$

(vii) $M : V \to V'$ – коэрцетивный оператор на K (см. [2]), т.е. для некоторого $v_0 \in K$ справедливо

$$\frac{\big(Mv, v - v_0\big)}{\|v\|} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{2.8}$$

Заметим, что операторы, удовлетворяющие условиям (2.5) и (2.6) являются монотонными. Из того, что

$$\lim_{h\to 0} \Lambda_h\varphi = \Lambda\varphi, \quad \varphi \in D(\Lambda),$$

и из непрерывности оператора L следует, что

$$\lim_{h\to 0} \big(L\Lambda_h\varphi, \psi\big) = \big(L\Lambda\varphi, \psi\big), \quad \varphi \in D(\Lambda), \quad \psi \in V.$$

Так что в условиях (2.5) и (2.6) переходя к пределу $h \to 0$, получим

$$\big(L\Lambda(\varphi - \psi), \varphi - \psi\big) \leq \big(L\Lambda\varphi - L\Lambda\psi, \varphi - \psi\big), \quad \varphi, \psi \in K \cap D(\Lambda), \tag{2.9}$$

$$\big(L\Lambda\varphi, \varphi\big) \geq 0, \quad \varphi \in K \cap D(\Lambda). \tag{2.10}$$

Сформулируем вариационную задачу, аналогичную (1.1) используя разложение (2.1):

$$\begin{cases} \big(L\Lambda u, v - u\big) + \big(Mu, v - u\big) \geq \big(f, v - u\big), \quad v \in K, \\ u \in K \cap D(\Lambda). \end{cases} \tag{2.11}$$

В классической теории эллиптических вариационных неравенств требуется, чтобы оператор A был псевдомонотонным и коэрцетивным (см. [1, 2]). В данной работе A разбит на две части: $A = L\Lambda + M$, причем псевдомонотонность и коэрцетивность требуются только для M. Разложение (2.1) получается при обобщении параболических вариационных неравенств. Классическая же параболическая задача в гильбертовом пространстве V

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + \big(Mu, v-u\big) \geq \big(f, v-u\big), \quad v \in K, \\ u \in K \cap \left\{u \in V : \dfrac{\partial u}{\partial t} \in V\right\}, \end{cases} \tag{2.12}$$

получается из (2.11) при (см. [1, 2])

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D(\Lambda) = \left\{u \in V,\ \frac{\partial u}{\partial t} \in V\right\}, \quad \big(L\varphi, \psi\big) = (\varphi, \psi).$$

Предположим, что имеют место (2.2)–(2.8), а u есть решение задачи (2.11). В таком случае из условий (2.9) и (2.10) следует, что для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ справедливо

$$\begin{aligned} &\big(L\Lambda v, v-u\big) + \big(Mu, v-u\big) \\ &\geq \big(L\Lambda(v-u), v-u\big) + \big(L\Lambda u, v-u\big) + \big(Mu, v-u\big) \\ &\geq (L\Lambda u, v-u) + (Mu, v-u) \geq (f, v-u). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Как видно из (2.13) решение задачи of (2.11) является решением и для следующей задачи

$$\begin{cases} \big(L\Lambda v, v-u\big) + \big(Mu, v-u\big) \geq (f, v-u), \quad v \in K \cap D(\Lambda), \\ u \in K. \end{cases} \tag{2.14}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Вариационные задачи (2.11) и (2.14) назовем соответственно сильной и слабой, а их решения соответственно сильным и слабым.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ

Введем условие согласования (см. [1]): *для всех $v \in K$ существует такая последовательность $v_j \in K \cap D(\Lambda)$ (которую назовем регулирующей последовательностью), для которой*

$$\lim_{j\to\infty} v_j = v \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} \big(L\Lambda v_j, v_j - v\big) \leq 0.$$

Теорема 1. *Пусть имеют место* (2.2)–(2.8) *с некоторым* $v_0 \in K \cap D(\Lambda)$ *в условии коэрцетивности и условие согласования. Тогда для любого* $f \in V'$ *существует решение* $u \in K$ *вариационого неравенства* (2.14).

Доказательство. Сперва докажем, что существует решение $u_h \in K$, которое является решением для вариационного неравенства

$$(3.1) \qquad \big(L\Lambda_h u_h, v - u_h\big) + \big(Mu_h, v - u_h\big) \geq \big(f, v - u_h\big), \quad v \in K.$$

Для этого определим семейство операторов $A_h : V \to V'$ по формуле $A_h = L\Lambda_h + M$ и перепишем вариационное неравенство (3.1) в следующей форме

$$(3.2) \qquad \big(A_h u_h, v - u_h\big) \geq \big(f, v - u_h\big), \quad v \in K.$$

Из того, что оператор $L\Lambda_h$ ограниченный, слабо непрерывный и монотонный, следует, что $L\Lambda_h$ – псевдомонотонный (см. [1, 2]). По условию (2.7) оператор M тоже псевдомонотонный. И, следовательно, оператор A_h есть псевдомонотонный оператор в K (см. [2]).

Докажем коэрцетивность A_h. Для любого $v \in K$ справедлива следующая оценка

$$\frac{\big(L\Lambda_h v, v - v_0\big)}{\|v\|} \geq \frac{\big(L\Lambda_h(v - v_0), v - v_0\big)}{\|v\|} + \frac{\big(L\Lambda_h v_0, v - v_0\big)}{\|v\|}$$

$$(3.3) \qquad \geq 0 - \frac{\big\|L\Lambda_h v_0\big\|_{V'}\|v - v_0\|_V}{\|v\|_V} \longrightarrow -\big\|L\Lambda_h v_0\big\|_{V'} = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty.$$

Из (3.3) и коэрцетивности оператора M получим, что A_h также коэрцетивен:

$$\frac{\big(A_h v, v - v_0\big)}{\|v\|} = \frac{\big(L\Lambda_h v, v - v_0\big)}{\|v\|} + \frac{\big(Mv, v - v_0\big)}{\|v\|} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty.$$

Следовательно, оператор A_h псевдомонотонен и коэрцетивен на множестве K. По основной теореме существования и решения эллиптических вариационных неравенств (см. [1], теорема 8.2), задача

$$\big(A_h u_h, v - u_h\big) \geq \big(f, v - u_h\big), \quad v \in K,$$

имеет решение $u_h \in K$, т.е. задача (3.1) разрешима.

Докажем теперь, что из решений u_h можно выделить такую последовательность, которая сходится к решению слабой задачи (2.14). Сперва покажем, что при $h \to 0$ решения u_h ограничены. Предположим обратное, что существует такая последовательность $h_k \to 0$, что $\|u_{h_k}\| \to \infty$ при $k \to \infty$. В таком случае имеем

$$\big(A_{h_k} u_{h_k}, v - u_{h_k}\big) \geq \big(f, v - u_{h_k}\big), \quad v \in K,$$

откуда следует

$$\frac{\big(A_{h_k}u_{h_k}, u_{h_k}-v_0\big)}{\|u_{h_k}\|} \le \frac{\big(f, u_{h_k}-v_0\big)}{\|u_{h_k}\|} \le \frac{\|f\|_{V'}\,\|u_{h_k}-v_0\|_V}{\|u_{h_k}\|_V} \longrightarrow \|f\|_{V'}$$

при $k \to \infty$. А из коэрцетивности A_{h_k} следует

$$\frac{\big(A_{h_k}u_{h_k}, u_{h_k}-v_0\big)}{\|u_{h_k}\|} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что и приводит к противоречию. Следовательно, при $h \to 0$ последовательность u_h ограничена. Так как оператор M ограничен, то последовательность Mu_h тоже ограничена в V'. Отсюда вытекает, что существует последовательность h_n такая, что $u_n = u_{h_n} \rightharpoonup u$ и $Mu_n \rightharpoonup \chi$ при $n \to \infty$. Для такой последовательности u_n и для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\big(L\Lambda_{h_n}v, v-u_n\big) + \big(Mu_n, v-u_n\big) - \big(f, v-u_n\big) \\ &\ge \big(L\Lambda_{h_n}(v-u_n), v-u_n\big) + \big(L\Lambda_{h_n}u_n, v-u_n\big) \\ &\quad + \big(Mu_n, v-u_n\big) - \big(f, v-u_n\big) \ge 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\big|\big(L\Lambda_{h_n}v, v-u_n\big) - \big(L\Lambda v, v-u\big)\big| \\ &\le \big|\big(L\Lambda_{h_n}v - L\Lambda v, v-u_n\big)\big| + \big|\big(L\Lambda v, u_n-u\big)\big| \\ &\le \big\|L\Lambda_{h_n}v - L\Lambda v\big\|_{V'}\|v-u_n\|_V + \big|\big(L\Lambda v, u_n-u\big)\big| \\ &\le C\big\|L\Lambda_{h_n}v - L\Lambda v\big\|_{V'} + \big|\big(L\Lambda v, u_n-u\big)\big| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$, то, переходя к пределу в (3.4) при $n \to \infty$, получим для любого $v \in K \cap D(\Lambda)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\big(Mu_n, u_n\big) \le \big(L\Lambda v, v-u\big) + \big(\chi, v\big) - \big(f, v-u\big) \tag{3.5}$$

или

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\big(Mu_n, u_n-u\big) \le \big(L\Lambda v, v-u\big) + \big(\chi - f, v-u\big). \tag{3.6}$$

Условие согласования гарантирует существование регулирующей последовательности $v_j \in K \cap D(\Lambda)$, которая сходится к u. Переписав (3.6) для $v = v_j$, получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\big(Mu_n, u_n-u\big) \le \big(L\Lambda v_j, v_j-u\big) + \big(\chi - f, v_j-u\big), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

откуда следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\big(Mu_n, u_n-u\big) \le \lim_{j\to\infty}\Bigg(\underbrace{\big(L\Lambda v_j, v_j-u\big)}_{\le 0} + \underbrace{\big(\chi - f, v_j-u\big)}_{\to 0}\Bigg) \le 0. \tag{3.7}$$

Из (3.7) и псевдомонотонности M следует, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\big(Mu_n, u_n - v\big) \geq \big(Mu, u - v\big), \quad v \in K,$$

$$\begin{aligned}(Mu, u - v) &\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(Mu_n, u_n - v) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(Mu_n, u_n - v)\\ &= \overline{\lim}_{n\to\infty}(Mu_n, u_n) - (\chi, v).\end{aligned}$$

С другой стороны, из (3.5) следует, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\big(Mu_n, u_n\big) - \big(\chi, v\big) \leq \big(L\Lambda v, v - u\big) - \big(f, v - u\big), \quad v \in K \cap D(\Lambda),$$

откуда и получается, что u является слабым решением вариационного неравенства. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о единственности слабого решения вариационного неравенства.

Теорема 2. *Предположим, что кроме условий теоремы 1, оператор M сильно монотонен, т.е. из того, что $\big(Mu - Mv, u - v\big) \leq 0$ следует $u = v$, тогда решение слабой задачи единственно.*

Доказательство. Предположим, что имеются два слабых решения u_1 и u_2, т.е. для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ имеет место

$$\big(L\Lambda v, v - u_1\big) + \big(Mu_1, v - u_1\big) \geq \big(f, v - u_1\big), \tag{3.8}$$

$$\big(L\Lambda v, v - u_2\big) + \big(Mu_2, v - u_2\big) \geq \big(f, v - u_2\big). \tag{3.9}$$

Пусть $w = (u_1+u_2)/2 \in K$, а w_j – регулирующая последовательность, т.е. $w_j \to w$ при $j \to \infty$. Тогда положив $v = w_j$ в неравенствах (3.8) и (3.9) и просуммировав их друг с другом, получим

$$\big(L\Lambda w_j, 2w_j - (u_1 + u_2)\big) + \big(Mu_1, w_j - u_1\big) + \big(Mu_2, w_j - u_2\big) \geq \big(f, 2w_j - (u_1 + u_2)\big).$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}&\overline{\lim}_{j\to\infty}\big[\big(Mu_1, u_1 - w_j\big) + \big(Mu_2, u_2 - w_j\big)\big]\\ &\leq 2\,\overline{\lim}_{j\to\infty}\big[\big(L\Lambda w_j, w_j - w\big) - \big(f, w_j - w\big)\big] \leq 0,\end{aligned}$$

и

$$\big(Mu_1, u_1 - w\big) + \big(Mu_2, u_2 - w\big) \leq 0.$$

Подставив значение $w = (u_1 + u_2)/2$, получим

$$\frac{1}{2}\big(Mu_1, u_1 - u_2\big) + \frac{1}{2}\big(Mu_2, u_2 - u_1\big) \leq 0.$$

Следовательно, $\big(Mu_1, u_1 - u_2\big) - \big(Mu_2, u_1 - u_2\big) \leq 0$, поэтому имеем $(Mu_1 - Mu_2, u_1 - u_2) \leq 0$, и, значит, $u_1 = u_2$ поскольку M строго монотонна. Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что если сильная задача имеет решение и условия теоремы 1 выполнены, то сильное решение тоже единственно.

4. РЕГУЛЯРНОСТЬ ЗАДАЧИ

В данной главе будут представлены условия, при которых слабое решение (2.14) является и сильным (2.11).

Лемма 1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1, множество внутренних точек K непусто* ($\operatorname{int} K \neq \emptyset$) *и решение u задачи* (2.14) *принадлежит $D(\Lambda)$. В таком случае слабое решение является сильным.*

Доказательство. Пусть $w \in K \cap D(\Lambda)$. Обозначим $v = (1-\theta)u + \theta w$ $(0 \leq \theta \leq 1)$. Из того, что множество K выпукло, а $D(\Lambda)$ есть линейное многообразие, следует, что $v \in K \cap D(\Lambda)$, и, следовательно, $\big(L\Lambda v, v-u\big) + \big(Mu, v-u\big) \geq \big(f, v-u\big)$. Итак,

$$\big(L\Lambda\big((1-\theta)u + \theta w\big), \theta(w-u)\big) + \big(Mu, \theta(w-u)\big) - \big(f, \theta(w-u)\big)$$

$$= \theta\left[\big(L\Lambda\big((1-\theta)u + \theta w\big), w-u\big) + \big(Mu, w-u\big) - \big(f, w-u\big)\right] \geq 0$$

и

$$\big(L\Lambda\big((1-\theta)u + \theta w\big), w-u\big) + \big(Mu, w-u\big) \geq \big(f, w-u\big), \quad \theta \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Переходя к пределу в (4.1) при $\theta \to 0$ и используя непрерывность L и линейность Λ, получим

$$\big(L\Lambda u, w-u\big) + \big(Mu, w-u\big) \geq \big(f, w-u\big), \quad w \in K \cap D(\Lambda). \tag{4.2}$$

$D(\Lambda)$ всюду плотно в V, следовательно,

$$\overline{K \cap D(\Lambda)} = \overline{\operatorname{int} K \cap D(\Lambda)} = \overline{\operatorname{int} K} = K.$$

Откуда получаем

$$\big(L\Lambda u, v-u\big) + \big(Mu, v-u\big) \geq \big(f, v-u\big), \quad v \in K,$$

т.е. u является сильным решением вариационной задачи. Доказательство завершено.

Докажем следующее утверждение о гладкости решений.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, $V \subset V'$, множество внутренних точек K не пусто и имеют место следующие условия (a) – (e):*

(a) $f \in D(\Lambda)$,

(b) $\big(Mu - Mv, u - v\big) \geq c\|u - v\|^2$, $u, v \in V$ *(условие строгой монотонности M),*

(c) полугруппу $G(s)$ можно продолжить на пространство V', сохраняя ее свойства,

(d) $G(s)\big(Mv\big) = M\big(G(s)v\big)$ *и* $G(s)\big(Lv\big) = L\big(G(s)v\big)$ *для всех $v \in V$ и $s \geq 0$,*

(e) существует некоторое $\rho > 0$ такое, что $G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v + (\rho - 1)v$ принадлежит ρK для всех $v \in K$ и $s \geq 0$.

В таком случае слабое решение вариационной задачи является и сильным решением.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что существует последовательность $u_h \in K$ такая, что $u_h \to u$ слабо, где u решение слабой задачи. Далее, было доказано, что

$$\big(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, v - u_h\big) \geq 0, \quad v \in K. \tag{4.3}$$

Умножив обе стороны (4.3) на $\rho > 0$, получим

$$\big(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, \rho v - \rho u_h\big) \geq 0, \quad v \in K. \tag{4.4}$$

Из условия (e) теоремы следует, что существует $v \in K$, для которого справедливо

$$G(s)u_h + G^*(s)u_h - G^*(s)G(s)u_h + (\rho - 1)u_h = \rho v,$$

следовательно,

$$\rho v = \rho u_h - \big(G^*(s) - I\big)\big(G(s) - I\big)u_h. \tag{4.5}$$

Подставляя значение v из (4.4) в вариационное неравенство (4.5), получим

$$\big(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, -\big(G^*(s) - I\big)\big(G(s) - I\big)u_h\big) \geq 0.$$

Откуда имеем

$$\big(\big(G(s) - I\big)\big(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f\big), \big(G(s) - I\big)u_h\big) \leq 0, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &\big((G(s) - I)(L\Lambda_h u_h), (G(s) - I)u_h\big) \\ &= \big(L\Lambda_h (G(s) - I)u_h, (G(s) - I)u_h\big) \geq 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\big((G(s)-I)(Mu_h),(G(s)-I)u_h\big) &= \big(M(G(s)-I)u_h,(G(s)-I)u_h\big)\\ &\geq c\,\|G(s)u_h-u_h\|^2\,. \end{aligned}\tag{4.8}$$

Используя оценки (4.7) и (4.8) в неравенстве (4.6), получим

$$c\,\|G(s)u_h-u_h\|_V^2 \leq \big(G(s)f-f,G(s)u_h-u_h\big)$$

$$\leq \|G(s)f-f\|_{V'}\,\|G(s)u_h-u_h\|_V$$

и

$$\left\|\frac{G(s)u_h-u_h}{s}\right\|_V \leq \frac{1}{c}\left\|\frac{G(s)f-f}{s}\right\|_{V'} \leq \text{const},\quad s\geq 0,\quad h>0,$$

так как $f\in D(\Lambda)$. Следовательно,

$$\left\|\frac{G(s)u-u}{s}\right\|_V \leq \text{const},\quad s\geq 0.$$

Отсюда и из определения $D(\Lambda)$ видно, что слабое решение u также принадлежит $D(\Lambda)$, а из леммы (4.1) следует, что u является также и сильным решением задачи. Доказательство завершено.

Заметим, что при исполнении условия (b) теоремы 3, решение задачи будет также и единственным, так как из строгой монотонности вытекает сильная монотонность операторам M.

Abstract. The paper studies a generalization of the pseudoparabolic variational inequalities. The existence and uniqueness of the solution of the corresponding weak problem and the regularity of the obtained solution are proved.

Список литературы

[1] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, Москва, 1972).

[2] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, **49** (1997).

[3] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, (Наука, Москва, 1988).

[4] Д. Киндерлер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и приложения*, (Мир, Москва, 1983).

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, **19** (1998).

[6] F. E. Browder, H. Brezis, "Strongly Nonlinear Parabolic Variational Inequalities," Proc. Acad. Sci. USA, **77** (2), 713-715 (1980).

[7] R. E. Showalter, T. W. Ting, "Pseudoparabolic Partial Differential Equations," SIAM Journal on Mathematical Analysis, **1** (1), 1-16, (1970).

[8] M. Ptashnyk, *Nonlinear Pseudoparabolic Equations and Variational Inequalities* (University of Heidelberg, Department of Mathematics and Informatics, 2004).

[9] Х. Гаевский, К. Гредер, К. Захарис, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, Москва, 1978).
[10] Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная задача для нелинейных вырождающихся систем типа Соболева," Изв. НАН Армении, Математика **30** (1), 17-32 (1995).
[11] М. Пташник, "Некоторые псевдопараболические вариационные неравенства с производными высшего порядка," Укр. мат. журнал, **54** (1), 112-125 (2002).

Поступила 7 ноября 2007

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 43, номер 2, 2008

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 43, No. 2, 2008

Contents