ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2008

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Բանալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасын

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Настоящий выпуск представляет собой номер 8 тематической серии, посвященной близким предметам ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (в смысле Бляшке–Сантало–Хадвигера) и СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Статьи в этой области, имеющие прикладную или статистическую природу, публикуются в ряде периодических изданий. Однако работы в той же области, посвященные математическому анализу, несмотря на большой интерес к ним, не имеют определенного признанного места публикации. Настоящая тематическая серия быть может изменит эту ситуацию.

Список публикаций по Интегральной и Стохастической Геометрии в “Известиях Академии Наук Армении”, серия Математика, довольно значителен. В частности, не считая тематической серии, имеются три специальных выпуска (4-ые номера за 1994, 1996 и 1998 годы) под общим названием “Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии”. Эти три выпуска заслужили самых высоких оценок (так, профессор Дитер Баум из Трирского Университета писал: “Букет блестящих, впечатляющих аналитических результатов ... очень важные, успешные и глубокие математические исследования”). Эти выпуски составляли хорошую начальную основу для тематической серии.

Выпуски тематической серии не имеют строгого графика. Их публикация зависит от наличия и готовности материала. Предусматривается строгая процедура рецензирования. Планируются несколько дополнительных сборников статей, представляющих лучшие исследования по Интегральной и Стохастической Геометрии, ранее опубликованных в нашем журнале.

Редакционная коллегия надеется на положительный резонанс международного математического сообщества, включая представление статей к публикации, участие в процессе рецензирования и т.д.. Журнал готов к любому сотрудничеству, направленному на улучшение качества тематической серии.

Рубен В. Амбарцумян
Главный редактор

Ереван, январь 2008

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ КОЛЛИНЕАРНОСТЕЙ

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Институт Математики, НАН Армении
E-mail: rhambart@ua.am

Аннотация. Ряд результатов Комбинаторной Интегральной Геометрии выводятся интегрированием комбинаторных разложений, связанных с конечным множеством точек $\{P_i\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Однако, в большинстве случаев эти интегрирования выполнялись для множеств точек $\{P_i\}$ не содержащих коллинеарных троек. В этих случаях можно было использовать хорошо известный алгоритм, иногда называемый “четыреиндикаторной формулой”. Целью настоящей статьи продемонстрировать, что *полный* комбинаторный алгоритм для множеств точек $\{P_i\}$ вне названного ограничения, открывает путь к новым результатам, в том числе в Стохастической Геометрии. В статье полный алгоритм вначале используется для интегрирования в контексте *выпуклых областей с перфорацией*, т.е. выпуклых областей, содержащих конечное множество непересекающихся выпуклых дыр. Вторым применением являются инвариантные относительно евклидовых движений *случайные раскраски* плоскости, опирающиеся на теорию случайных многоугольных окон из так называемого класса IA. Здесь используется метод прямого усреднения *полных* комбинаторных разложений записанных для раскрасок, наблюдаемых в многоугольных окнах из класса IA. Этот подход особенно эффективен для случайной раскраски, порожденной случайным процессом многоугольников, управляемым мерой Хаара на группе евклидовых движений плоскости, в предположении, что точка $P \in \mathbb{R}^2$ окрашена цветом J , если P накрыта в точности J многоугольниками пуассоновского процесса. Формулируется общая теорема открывающая путь для использования преобразования Лапласа при исследовании случайных раскрасок индуцированных на прямолинейных отрезках.

Интегральная геометрия; комбинаторные разложения; выпуклые области с перфорацией; случайные раскраски; случайные многоугольники; независимые углы; преобразование Лапласа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии [2], [5] получены интегрированием комбинаторных разложений, для конечных множеств точек $\{P_i\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, причем в большинстве случаев интегрирования выполнялись для множеств $\{P_i\}$ не содержащих коллинеарных троек. В этих случаях

использовался хорошо известный алгоритм, который иногда называется “четырёхиндикаторной формулой”. Цель настоящей статьи - продемонстрировать, что *полный* комбинаторный алгоритм [4], [5] для множеств точек $\{P_i\}$ вне названного ограничения, открывает путь к новым результатам, в том числе в Стохастической Геометрии.

Кратко очертим содержание статьи. После описания полного алгоритма в §2, мы используем его в интегральной геометрии *выпуклых областей с перфорацией*, т.е. выпуклых областей, содержащих конечное множество непересекающихся выпуклых дыр. Этот результат дает возможность, в частности, рассмотреть бесконечные совокупности непересекающихся выпуклых областей на плоскости.

В заключительных параграфах полный алгоритм применяется для изучения *случайных раскрасок* плоскости, инвариантных относительно евклидовых движений. Здесь используется теория случайных многоугольных окон из так называемого класса IA (Independent Angles), который впервые был рассмотрен в [6]. Здесь используется прямое усреднение *полных* комбинаторных разложений, записанных для раскрасок в многоугольных окнах из класса IA. Подход особенно эффективен для случайной раскраски, порожденной случайным процессом многоугольников, управляемым мерой Хаара на группе евклидовых движений плоскости, в предположении, что точка $P \in \mathbb{R}^2$ окрашена цветом J , если P накрыта в точности J многоугольниками пуассоновского процесса. Формулируется общая теорема открывающая путь для использования преобразования Лапласа при исследовании случайных раскрасок, индуцированных на прямолинейных отрезках.

2. ПОЛНЫЙ КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ

Основные пространства настоящей статьи:

$\mathbb{R}^2$ = евклидова плоскость и

$\mathbb{G}$ = пространство евклидовых прямых в $\mathbb{R}^2$. Обозначаем

$[P]$ = пучок прямых через точку $P \in \mathbb{R}^2$.

Пусть фиксировано конечное множество точек

$$\{P_i\} = \{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности: две прямые $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ не принадлежащие никакому пучку $[P_i]$ полагаются эквивалентными, если они индуцируют одно и тоже разбиение множества $\{P_i\}$ на два подмножества. Класс эквивалентности всегда является связным множеством в топологии $\mathbb{G}$, но его замыкание не будет компактным, если он соответствует разбиению множества

$\{P_i\}$ на $\emptyset, \{P_i\}$ (т.е. $\emptyset$ в одной из полуплоскостей и все множество $\{P_i\}$ в другой). Все остальные классы эквивалентности имеют компактные замыкания: их мы будем называть *атомами*. Класс эквивалентности с некомпактным замыканием называется *неатомом*. Обозначаем

$\mathbf{r}\{P_i\}$ = кольцо подмножеств в $\mathbb{G}$, состоящее из объединений атомов, и

$\mathbf{a}\{P_i\}$ = минимальную алгебру подмножеств $\mathbb{G}$, содержащую $\mathbf{r}\{P_i\}$,

Неатом содержится в алгебре $\mathbf{a}\{P_i\}$. Отметим, что множества из $\mathbf{r}\{P_i\}$ и $\mathbf{a}\{P_i\}$ определяются с точностью до пучков $[P_i]$.

Ниже используем следующие обозначения

g_{ij} = прямая, проходящая через точки P_i и P_j , $g_{ij} \in \mathbb{G}$,

ν = направленная прямая,

ν_{ij} = направленная прямая, проходящая через точки P_i и P_j , от P_i к P_j .

Направленная прямая ν отображается в $g \in \mathbb{G}$ операцией *стирания направления*.

И обратно, каждой прямой $g \in \mathbb{G}$ соответствуют две направленные прямые ν_1, ν_2 , которые отображаются в g (ν_1 и ν_2 имеют противоположные направления).

Будем говорить, что прямая $g \in \mathbb{G}$, не содержащая точек из $\{P_i\}$, получена из g_{ij} с помощью *малого смещения*, если в пространстве $\mathbb{G}$ существует непрерывная траектория $g(t)$, $t \in [0, 1]$, $g(0) = g$ и $g(1) = g_{ij}$ такая, что ни для какого значения t из открытого интервала $(0, 1)$ прямая $g(t)$ не содержит точек из $\{P_i\}$.

Класс (+).

Неупорядоченная пара P_i, P_j принадлежит классу (+), если внутренность прямолинейного отрезка P_i, P_j не содержит точек из $\{P_i\}$. Если пара P_i, P_j принадлежит классу (+), то для прямой g_{ij} определяются (с точностью до эквивалентности единственные) малые смещения $g(i^+ j^-)$ и $g(i^- j^+)$, которые оставляют точки P_i и P_j в разных полуплоскостях.

Класс (-). Неупорядоченная пара P_i, P_j принадлежит классу (-), если внутренность *дополнения* (относительно прямой g_{ij}) прямолинейного отрезка P_i, P_j не содержит точек из $\{P_i\}$. Если пара P_i, P_j принадлежит классу (-), то для прямой g_{ij} определяются (с точностью до эквивалентности единственные) малые смещения $g(i^+ j^+)$ и $g(i^- j^-)$, которые оставляют точки P_i и P_j в одной полуплоскости.

Несколько замечаний.

1. Понятие малого смещения распространяется и на направленные прямые. Ориентация прямых, получаемых из ν_{ij} с помощью малых смещений, определяется по непрерывности. Если над i или j помещать знаки + или -, то получаем направленные прямые четырех типов:

- $\nu(i^+ j^+)$ оставляет обе точки P_i и P_j в правой полуплоскости,
- $\nu(i^- j^-)$ оставляет обе точки P_i и P_j в левой полуплоскости,
- $\nu(i^+ j^-)$ оставляет точку P_i в правой, а точку P_j в левой полуплоскости,
- $\nu(i^- j^+)$ оставляет точку P_i в левой, а точку P_j в правой полуплоскости.

Очевидно, что $g(i^+ j^+)$, $g(i^- j^-)$, $g(i^+ j^-)$ и $g(i^- j^+)$ суть образы так определенных направленных прямых относительно стирания ориентации.

2. Пусть P_i, P_j неориентированная пара из $\{P_i\}$. Прямая $g \in \mathbb{G}$ является малым смещением прямой g_{ij} тогда и только тогда, когда g принадлежит атому алгебры $\mathfrak{a}\{P_i\}$ граница которого содержит прямую g_{ij} ;

3. Если g_{ij} не содержит точек из $\{P_i\}$ за исключением точек P_i и P_j , то пара P_i, P_j принадлежит как классу (+) так и классу (-). Если число точек в множестве $\{P_i\}$ больше трех, то с точностью до эквивалентности существуют в точности четыре различных прямых, получаемых из g_{ij} с помощью малых смещений, т.е. $g(i^+ j^+)$, $g(i^- j^-)$, $g(i^+ j^-)$ и $g(i^- j^+)$.

4. Для любого $A \in \mathfrak{a}\{P_i\}$ индикаторная функция

$$I_A(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g \in A, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

постоянна на прямых $g \in \mathbb{G}$ принадлежащих атому алгебры $\mathfrak{a}\{P_i\}$. Значения функции $I_A(g)$ на прямых $g(i^+ j^-)$, $g(i^- j^+)$ будем обозначать

$$I_A(i^+, j^-), \quad I_A(i^-, j^+)$$

в случае $P_i, P_j \in (+)$.

A на прямых $g(i^+ j^+)$, $g(i^- j^-)$ через

$$I_A(i^+, j^+) \text{ и } I_A(i^-, j^-)$$

в случае $P_i, P_j \in (-)$.

5. Если никакие три точки из множества $\{P_i\}$ не лежат на одной прямой, то классы (+) и (-) совпадают.

Определим величины не зависящие от выбора направления прямой g_{ij} :

$$(2.1) \quad u_{ij}^{(+)}(A) = I_{(+)}(P_i, P_j) [I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+)]$$

и

$$(2.2) \quad u_{ij}^{(-)}(A) = I_{(-)}(P_i, P_j) [I_A(i^+, j^+) + I_A(i^-, j^-)],$$

где

$I_{(+)}(P_i, P_j) = 1$, если неупорядоченная пара $\{P_i, P_j\}$ принадлежит классу (+), 0 в противном случае,

$I_{(-)}(P_i, P_j)$ определяется аналогично, для класса (-).

Пусть μ инвариантная относительно евклидовых движений мера в пространстве $\mathbb{G}$, нормированная условием

$$\mu([P_1, P_2]) = 2|P_1, P_2|, \text{ где}$$

$[P_1, P_2]$ = множество прямых, отделяющих точку P_1 от точки P_2 , $[P_1, P_2] \subset \mathbb{G}$,

$|P_1, P_2|$ = евклидово расстояние между точками P_1 и P_2 .

Положим

$$(2.3) \quad u_{ij}(A) = u_{ij}^{(+)}(A) - u_{ij}^{(-)}(A).$$

Отметим, что в случае когда прямая, проходящая через точки P_i и P_j не содержит других точек из множества $\{P_i\}$, то формула (2.3) сводится к *Четырехиндикаторной формуле*, известной из монографии [2]:

$$(2.4) \quad u_{ij}(A) = I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-).$$

Теорема 1. *Для любого множества точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^2$ с числом точек больше чем 2, и любого $A \in \mathbf{r}\{P_i\}$,*

$$(2.5) \quad \mu(A) = \sum_{i < j} u_{ij}(A) |P_i P_j|,$$

где сумма распространяется на все неупорядоченные пары P_i, P_j множества $\{P_i\}$.

Отметим свойство стабильности коэффициентов $u_{ij}(A)$. Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\}$ in $\mathbb{R}^2$. Положим

$$P_i^{(s)} = P_i + v_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где каждое $v_i^{(s)}$ является вектором сдвига, и для каждого i , длина $|v_i|$ стремится к 0 при $s \rightarrow 0$. Будем говорить, что атом $A^{(s)} \in \mathbf{r}\{P_i^{(s)}\}$ является *репликой* множества $A \in \mathbf{r}\{P_i\}$, если любые две прямые $g_1 \in A^{(s)}$ и $g_2 \in A$ могут быть ориентированы так, что правые полуплоскости, одна ограниченная прямой g_1 а другая прямой g_2 , содержат точки из $\{P_i^{(s)}\}$ и, соответственно, из $\{P_i\}$ с одинаковыми нижними индексами. Множество $A^{(s)} \in \mathbf{r}\{P_i^{(s)}\}$ является *репликой* множества $A \in \mathbf{r}\{P_i\}$, если эти два множества разбиваются на атомы, попарно образующие взаимные реплики.

Лемма о стабильности. Пусть $A \in \mathbf{r}\{P_i\}$ и $A^{(s)}$ есть некоторая последовательность реплик множества A , $s = 1, 2, 3, \dots$. Если подмножество $\{X_i\} \subset \{P_i\}$ принадлежит прямой не содержащей других точек из множества $\{P_i\}$, то для любого выбора бесконечно малых последовательностей $\{v_i^{(s)}\}$ имеем

$$(2.6) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\{X_i, X_j\}} u_{ij}(A^{(s)}) |X_i^{(s)}, X_j^{(s)}| = \sum_{\{X_i, X_j\}} u_{ij}(A) |X_i, X_j|,$$

где сумма распространена на 2-подмножества X_i, X_j множества $\{X_i\}$.

Почтительно отметить, что несмотря на (2.6), индивидуальные (т.е. для заданных i, j) коэффициенты $u_{ij}(A^{(s)})$ могут не иметь предела, при $s \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.

Пусть множество $\{P_i\}$ состоит из четырех точек, в некоторой декартовой системе координат x, y заданных как:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = (a, 0), \quad a > 0, \quad P_4 = (b, 0), \quad b > a.$$

Рис. 1

Положим

$\{X_i\} =$ множество $\{P_1, P_3, P_4\}$, прямая, содержащая $\{X_i\}$ есть ось- x ,

$A =$ все прямые, отделяющие P_1 и P_3 от P_2 и P_4 ,

$v_1^{(s)} = v_2^{(s)} = v_4^{(s)} = 0$ -векторы, $s = 1, 2, 3, \dots$

$v_3^{(s)} = (0, s^{-1})$ для нечетных значений параметра s ,

$v_3^{(s)} = -(0, s^{-1})$ для четных значений параметра s .

По Четырех индикаторной формуле

$u_{14}(A^{(s)}) = 0$ для нечетных значений параметра s ,

$u_{14}(A^{(s)}) = +1$ для четных значений параметра s ,

т.е. $u_{14}(A^{(s)})$ не имеет предела при $s \rightarrow \infty$. Тем не менее, для нечетных значений параметра s имеем

$$u_{13}(A^{(s)}) = 0 \text{ и } u_{34}(A^{(s)}) = +1,$$

поэтому для нечетных значений параметра s , получаем

$$(2.7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\{X_i, X_j\}} u_{ij}(A^{(s)}) = b - a.$$

С другой стороны, для четных значений параметра s имеем

$$u_{13}(A^{(s)}) = -1 \text{ и } u_{34}(A^{(s)}) = 0,$$

и из (2.7) для нечетных значений параметра s , вытекает существование предела (2.6) равного $b - a$. Само тождество (2.6) также проверяется, так как

$$u_{13}(A) = 0, u_{14}(A) = 0 \text{ и } u_{34}(A) = 1.$$

В статье автора [1], стабильность такого типа была использована в теореме о продолжении меры, и не была сформулирована как общий факт.

3. ЗАДАЧА БЮФОНА–СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ С ПЕРФОРАЦИЕЙ

Пусть $\mathbf{D}$ – ограниченная замкнутая выпуклая область с гладкой границей,

ν = *направленная* хорда области $\mathbf{D}$,

$|\nu|$ = длина хорды ν ,

$[\nu]$ = множество прямых, пересекающих ν , $[\nu] \subset \mathbb{G}$,

dg = инвариантная относительно евклидовых движений мера в $\mathbb{G}$ (т.е. μ , см. (2.5)),

$[\mathbf{D}]$ = пространство направленных хорд области $\mathbf{D}$,

$d\nu$ = мера на $[\mathbf{D}]$, локально совпадающая с dg .

Пусть $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k$ - непересекающиеся замкнутые выпуклые области, которые определяют перфорацию области $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{C}_i \cap \mathbf{C}_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \quad \mathbf{C}_i \subset \text{int}\mathbf{D}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Предполагаем, что граница каждой $\mathbf{C}_i$ является кусочно-гладкой.

Каждый направленный отрезок $\nu \in [\mathbf{D}]$ несет конечную последовательность точек

$$(3.1) \quad l_0, l_1, u_1, l_2, u_2, \dots, l_k, u_k, u_0,$$

где

l_0 = точка на $\partial\mathbf{D}$, где ν входит в $\mathbf{D}$,

l_i = точка на $\partial\mathbf{C}_i$, где ν входит в $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, k$,

u_i = точка на $\partial\mathbf{C}_i$, где ν выходит из $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, k$,

u_0 = точка на $\partial\mathbf{D}$, где ν выходит из $\mathbf{D}$,

Рис. 2

(формально, если ν не пересекает $\partial\mathbf{C}_i$, то $l_i = u_i = \emptyset$). Областью концов l_i является все $\partial\mathbf{C}_i$, а угол ψ между ν и касательной к $\partial\mathbf{C}_i$ в точке l_i меняется в интервале $(0, \pi)$. Аналогичные замечания имеют место для l_0 и $\mathbf{D}$. Обозначим через

dl = меру длины на $\partial\mathbf{D}$ (или $\partial\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, k$), а через

$d\psi$ = стандартную инвариантную относительно вращений меру на интервале $(0, \pi)$.

Для каждой $[\mathbf{C}_i]$ или $[\mathbf{D}]$ имеем

$$(3.2) \quad d\nu = \sin \psi \, dl \, d\psi.$$

Пусть для $n \geq 2$

$$\nu_1, \dots, \nu_n \in [\mathbf{D}]$$

суть направленные хорды области $\mathbf{D}$. Как в (3.1), на каждой хорде ν_m определены точки:

$$(3.3) \quad l_0^{(m)}, l_1^{(m)}, u_1^{(m)}, l_2^{(m)}, u_2^{(m)}, \dots, l_k^{(m)}, u_k^{(m)}, u_0^{(m)}.$$

Обозначим

$\tau(g) = g \cap D$ минус все хорды $g \cap \mathbf{C}_j$, принадлежащие $g \in \mathbb{G}$,

$\tau_i = \tau(g)$ для $g = \nu_i$ (направления не играют роли),

$[\tau_i] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap \tau_i \neq \emptyset\}$ (= прямые, пересекающие ν_i вне областей $\mathbf{C}_j$),
 $i = 1, \dots, n$.

$|\tau_i|$ = сумма длин интервалов, составляющие интервалы τ_i ,

Рассмотрим следующее подмножество A из $[\mathbf{D}]$:

$$(3.4) \quad A = [\tau_1] \cap \dots \cap [\tau_n].$$

Модифицированная *задача Бюффона–Сильвестра* (см. [2]) требует найти комбинаторное разложение (2.5) для $\mu(A)$. Эта задача имеет смысл, поскольку

$$A \in \mathbf{r}\{P_i\}, \text{ где } \{P_i\} = \text{объединение всех коллинеарных множеств (3.3).}$$

В следующем параграфе, используя общий алгоритм для множества $\{P_i\}$, мы представляем коэффициенты $u_{ij}(A)$ в (2.5) с A как в (3.4). Следующим шагом будет интегрирование разложения для $\mu(A)$ относительно произведения мер

$$(3.5) \quad d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n$$

определенной на декартовом произведении $[\mathbf{D}] \times [\mathbf{D}] \times \dots \times [\mathbf{D}]$. Следовательно, достаточно иметь формулы для коэффициентов $u_{ij}(A)$ для *почти каждой* последовательности $\nu_1, \dots, \nu_n$.

4. КОМБИНАТОРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ МНОЖЕСТВА (3.4)

Разделим неупорядоченные пары $\{P_i, P_j\}$ точек из множества $\{P_i\}$ на подклассы:

$$(l, u)_1 = \text{пары } \{l_i^{(m)}, u_j^{(m)}\}, i, j = 0, \dots, k,$$

$$(l, u)_2 = \text{пары } \{l_i^{(m_1)}, u_j^{(m_2)}\} \text{ с } m_1 \neq m_2, i, j = 0, \dots, k,$$

$$(u, u)_1 = \text{пары } \{u_i^{(m)}, u_j^{(m)}\}, i, j = 0, \dots, k,$$

$$(u, u)_2 = \text{пары } \{u_i^{(m_1)}, u_j^{(m_2)}\} \text{ с } m_1 \neq m_2, i, j = 0, \dots, k,$$

$$(l, l)_1 = \text{пары } \{l_i^{(m)}, l_j^{(m)}\}, i, j = 0, \dots, k,$$

$$(l, l)_2 = \text{пары } \{l_i^{(m_1)}, l_j^{(m_2)}\} \text{ с } m_1 \neq m_2, i, j = 0, \dots, k.$$

Прямым применением алгоритма (3.5)–(2.5) получаем следующие коэффициенты:

пары из $(l, u)_1$.

Для P_i, P_j из $(l, u)_1$, $I_{(-)}(P_i, P_j) = 1$ тогда и только тогда, когда обе точки P_i и P_j принадлежат границе $\partial\mathbf{D}$. Однако, в последнем случае

$$I_A(i^+, j^+) = I_A(i^-, j^-) = 0,$$

и (3.5) сводится к

$$u_{ij}(A) = 0.$$

Каждая пара P_i, P_j из $(l, u)_1$ (с точностью до нумерации дыр) имеет вид

$$P_i = l_i^{(m)}, P_j = u_j^{(m)} \text{ для некоторого } m.$$

В случае

$$I_{(+)}(P_i, P_j) = 1$$

имеем

$$I_A(i^+, j^-) = I_A(i^-, j^+) = I_{[m]}(\nu_m) I_*(P_i, P_j)$$

где множество $[m] \subset \mathbb{G}$ определяется следующим образом

$$(4.1) \quad [m] = \bigcap_{s \neq m} [\tau_s],$$

(число множеств под знаком пересечения равно $k - 1$) и

$$I_*(P_i, P_j) = 1, \text{ если } P_i \text{ и } P_j \text{ не на границе одной дыры } \mathbf{C}_s, \\ I_*(P_i, P_j) = 0, \text{ в противном случае.}$$

Итак, для каждой пары P_i, P_j из $(l, u)_1$ получаем

$$(4.2) \quad u_{ij}(A) = 2I_{(+)}(P_i, P_j)I_{[m]}(\nu_m)I_*(P_i, P_j).$$

пары из $(l, u)_2$.

Для каждой пары P_i, P_j из $(l, u)_2$ и для почти всех последовательностей $\nu_1, \dots, \nu_n$ имеем

$$I_{(+)}(P_i, P_j) = I_{(-)}(P_i, P_j),$$

т.е. $u_{ij}(A)$ может быть найдена по четырехиндикаторной формуле.

Пусть $P_i = l_i^{(m_1)}, P_j = u_j^{(m_2)}$ для некоторого $m_1 \neq m_2$. Предположим, что $i \neq 0$ и $j \neq 0$. Из двух частей отрезка $\nu^{(m_1)}$, разделенного точкой P_i , пусть h_i будет тот, который не входит во внутренность $\mathbf{C}_i$. Аналогично, из двух частей отрезка $\nu^{(m_2)}$, разделенного точкой P_j , пусть h_j будет тот, который не входит во внутренность $\mathbf{C}_j$. Будем писать:

$I_{\mathbf{d}}(P_i, P_j) = 1$, если h_i и h_j лежат в *разных* полуплоскостях относительно g_{ij} , 0 в противном случае,

$I_{\mathbf{s}}(P_i, P_j) = 1$, если h_i и h_j лежат в *одной и той же* полуплоскости относительно g_{ij} , 0 в противном случае,

$I_{[m_1, m_2]}(g) = 1$, если g принадлежит $[m_1, m_2]$, 0, в противном случае, где

$$(4.3) \quad [m_1, m_2] = \bigcap_{s \neq m_1, m_2} [\tau_s],$$

Прямым применением формулы (2.5) приходим к выражению, верному для каждого $m_1 \neq m_2$:

$$(4.4) \quad u_{ij}(A) = I_{(+)}(P_i, P_j)I_{[m_1, m_2]}(g_{ij})[I_{\mathbf{d}}(P_i, P_j) - I_{\mathbf{s}}(P_i, P_j)].$$

В случае, $P_i = l_0^{(m_1)}$ (т.е. P_i является точкой входа ν_{m_1} в $\mathbf{D}$), а P_j как и выше, то (4.4) остается верным при следующем видоизменении определения индикаторов $I_{\mathbf{d}}$ и $I_{\mathbf{s}}$:

$I_{\mathbf{d}}(P_0, P_j) = 1$, если ν_{m_1} и h_j лежат в *разных* полуплоскостях относительно g_{0j} , 0 в противном случае,

$I_s(P_0, P_j) = 1$, если ν_{m_1} и h_j лежат в *одной и той же* полуплоскости относительно g_{0j} , 0 в противном случае.

Наконец, если $P_0 = l_0^{(m_1)}$ и $P_j = u_0^{(m_2)}$, то (4.4) остается верной если полагать:

$I_d(P_i, P_j) = 1$, если ν_{m_1} и ν_{m_2} лежат в *разных* полуплоскостях относительно g_{ij} , 0 в противном случае,

$I_s(P_i, P_j) = 1$, если ν_{m_1} и ν_{m_2} лежат в *одной и той же полуплоскости* относительно g_{ij} , 0 в противном случае.

пары из $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_1$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2$, $(\mathbf{l}, \mathbf{l})_1$ или $(\mathbf{l}, \mathbf{l})_2$.

Для пар P_i, P_j из $(u, u)_1$ и $(l, l)_1$ всегда имеем $I_{(+)}(P_i, P_j) = 0$ и $I_{(-)}(P_i, P_j) = 0$, откуда вытекает, что $u_{ij}(A) = 0$. Случаи пар из $(u, u)_2$, или $(l, l)_2$ сводятся к (4.4) изменением направлений ν , так как при изменении направлений вышеупомянутая формула не меняется.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Интегрирование формулы (2.5), записанной для A как и в (3.4), с коэффициентами, описанными в предыдущем параграфе относительно меры (3.5), напоминает процедуру использованную в [2] при выводе неравенства Плейеля (случай $k = 0$). Ниже мы будем использовать тождества типа

$$\begin{aligned} \int I_A(g) d\nu_1 \dots d\nu_n &= [4|\tau(g)|]^n, \\ \int I_{[1]}(g) d\nu_2 \dots d\nu_n &= [4|\tau(g)|]^{n-1}, \\ \int I_{[1,2]}(g) d\nu_3 \dots d\nu_n &= [4|\tau(g)|]^{n-2}, \end{aligned}$$

которые выполняются для любой прямой $g \in \mathbb{G}$, пересекающей внутренность $\mathbf{D}$, и для любого $[m]$ или $[m_1, m_2]$, а также обозначения

$$(PP)_1 = (ul)_1 \cup (ll)_1 \cup (uu)_1 \text{ и}$$

$$(PP)_2 = (ul)_2 \cup (ll)_2 \cup (uu)_2.$$

Интегрирование меры $\mu(A)$.

Применением теоремы Фубини получаем

$$\begin{aligned} \int \mu(A) d\nu_1 \dots d\nu_n &= \int d\nu_1 \dots d\nu_n \int I_A(g) dg \\ (5.1) \quad &= \int dg \int I_A(g) d\nu_1 \dots d\nu_n \int (4|\tau(g)|)^n dg. \end{aligned}$$

Интегрирование суммы $\sum_{(PP)_1} |\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j| \mathbf{u}_{ij}(\mathbf{A})$.

Имеем

$$\int d\nu_1 \dots d\nu_n \sum_{(PP)_1} |P_i, P_j| u_{ij}(A) = 2n \int (4|\tau_1|)^{n-1} d\nu_1 \sum_{i < j} |l_i^{(1)}, u_j^{(1)}| I_{(+)}(l_i^{(1)}, l_j^{(1)})$$

(I_* отсутствует, так как суммирование имеет место по различным областям $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_j$). Так как

$$\sum_{i < j} |l_i^{(1)}, u_j^{(1)}| I_{(+)}(l_i^{(1)}, l_j^{(1)}) I_*(l_i^{(1)}, l_j^{(1)}) = |\tau_1|,$$

получаем

$$(5.2) \quad \int d\nu_1 \dots d\nu_n \sum_{(PP)_1} |P_i, P_j| u_{ij}(A) = \frac{n}{2} \int (4|\tau_1|)^n d\nu_1 = n \int (4|\tau(g)|)^n dg,$$

Величины X_{ij} .

Интегрирование суммы $\sum_{(PP)_1} |P_i, P_j| u_{ij}(A)$ можно записать как сумму величин

$$X_{ij} = \int d\nu_1 \dots d\nu_n \sum_{m_1 \neq m_2} I_{(+)}(l_i^{(m_1)}, l_j^{(m_2)}) I_{[m_1, m_2]} [I_{\mathbf{d}}(l_i^{(m_1)}, l_j^{(m_2)}) - I_{\mathbf{s}}(l_i^{(m_1)}, l_j^{(m_2)})]$$

соответствующих парам $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_j$. Индикаторная функция $I_{[m_1, m_2]}$ под знаком интеграла зависит от прямой $l_i^{(m_1)}$ и $l_j^{(m_2)}$. По симметрии получаем

$$(5.3) \quad X_{ij} = n(n-1) \int I_{(+)}(l_i^{(1)}, l_j^{(2)}) (4|\tau_{12}|)^{n-2} [I_{\mathbf{d}}(l_i^{(1)}, l_j^{(2)}) - I_{\mathbf{s}}(l_i^{(1)}, l_j^{(2)})] d\nu_1 d\nu_2,$$

где

$$\tau_{12} = \tau(g), \text{ где } g \text{ — прямая, проходящая через точки } l_i^{(1)} \text{ и } l_j^{(2)}.$$

Для фиксированных точек $l_1 \in \partial\mathbf{C}_i$ и $l_2 \in \partial\mathbf{C}_j$ интегрируя по ψ_1, ψ_2 , и используя (3.2), приходим к следующему результату

$$\int_0^\pi \int_0^\pi [I_{\mathbf{d}}(l_1, l_2) - I_{\mathbf{s}}(l_i^{(1)}, l_j^{(1)})] \sin \psi_1 \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 = -4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

где

$$\alpha_i = \text{угол между } g_{12} \text{ и } \partial\mathbf{C}_i \text{ в точке } l_i, \quad i = 1, 2,$$

причем углы α_i берутся в одной и той же полуплоскости относительно прямой l_1, l_2 , вне областей $\mathbf{C}_i$, и $\mathbf{C}_j$, см. Рис. 2. Итак, получаем

$$(5.4) \quad X_{ij} = -4n(n-1) \iint_{\partial\mathbf{C}_i \times \partial\mathbf{C}_j} |l_1, l_2| (4|\tau_{12}|)^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2.$$

где

$$l_1 \in \partial\mathbf{C}_i, \quad l_2 \in \partial\mathbf{C}_j,$$

$$\tau_{12} = \tau(g_{12}), \text{ прямая } g_{12} \text{ содержит точки } l_1 \text{ и } l_2.$$

Ясно, что в случае $i = j > 0$, формула (5.4) принимает вид

$$(5.5) \quad X_{ii} = -2n(n-1) \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_i} |l_1, l_2| (4|\tau_{12}|)^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2,$$

где $l_1, l_2 \in \partial \mathbf{C}_i$, причем углы α_1, α_2 вновь лежат вне области $\mathbf{C}_i$.

В случае $i = 0$ и $j > 0$ аналогично получаем

$$(5.6) \quad X_{0j} = -4n(n-1) \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{C}_j} |l_1, l_2| (4|\tau_{12}|)^{n-2} \cos \beta \cos \alpha dl_1 dl_2.$$

где

$$l_1 \in \partial \mathbf{D}, l_2 \in \partial \mathbf{C}_j,$$

β – угол пересечения области $\partial \mathbf{D}$ с прямой l_1, l_2 в точке l_1 ,

α – угол пересечения области $\partial \mathbf{C}_j$ с прямой l_1, l_2 в точке l_2 ,

оба угла лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой, проходящей через точки l_1, l_2 , причем угол β берется внутри области $\mathbf{D}$, а угол α вне области $\mathbf{C}_i$. Наконец, имеем

$$(5.7) \quad X_{00} = -4n(n-1) \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}} |l_1, l_2| (4|\tau_{12}|)^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2.$$

где углы α_1, α_2 определяются как в (5.5), но для области $\mathbf{D}$.

6. ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ

Интеграл суммы $\sum_{(lu)_2} |P_i, P_j| u_{ij}(A)$ равен сумме величин X_{ij} , задаваемой формулами (5.4) – (5.6). Поскольку классы $(lu)_2$ и $(ul)_2$ дают аналогичные вклады, интеграл суммы $\sum_{(PP)_2} |P_i, P_j| u_{ij}(A)$ будет в четыре раза больше (следует из симметрии). Получаем

$$\int (4|\tau(g)|)^n dg = n \int (4|\tau(g)|)^n dg + 4 \sum_{0 < i < j} X_{ij} + 4 \sum_{i=0}^k X_{ii} + 4 \sum_{i=1}^k X_{0j}$$

или

$$(1-n) \int (4|\tau(g)|)^n dg = 4 \sum_{0 < i < j} X_{ij} + 4 \sum_{i=0}^k X_{ii} + 4 \sum_{i=1}^k X_{0j}$$

Сокращая на множитель $(1-n)4^n$ приходим к уравнению, верного для всех целых $n > 1$:

$$\begin{aligned} \int |\tau(g)|^n dg &= n \sum_{0 < i < j} \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_j} |l_1, l_2| |\tau_{12}|^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_i} |l_1, l_2| |\tau_{12}|^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n}{2} \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}} |l_1, l_2| |\tau_{12}|^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \\
(6.1) \quad & + n \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{C}_j} |l_1, l_2| |\tau_{12}|^{n-2} \cos \beta \cos \alpha dl_1 dl_2.
\end{aligned}$$

Из линейности выражения (6.1), заключаем

$$\begin{aligned}
\int f(|\tau(g)|) dg & = \sum_{0 < i < j} \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_j} \frac{|l_1, l_2|}{|\tau_{12}|} f'(|\tau_{12}|) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_i} \frac{|l_1, l_2|}{|\tau_{12}|} f'(|\tau_{12}|) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \\
& + \frac{1}{2} \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{D}} \frac{|l_1, l_2|}{|\tau_{12}|} f'(|\tau_{12}|) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 \\
(6.2) \quad & + \iint_{\partial \mathbf{D} \times \partial \mathbf{C}_j} \frac{|l_1, l_2|}{|\tau_{12}|} f'(|\tau_{12}|) \cos \beta \cos \alpha dl_1 dl_2,
\end{aligned}$$

вначале для многочленов вида $f(x) = a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$. Затем применяя теорему Вайерштрасса об аппроксимации, получаем, что (6.2) имеет место для любой функции f с непрерывной производной f' , и $f(0) = 0$. В случае $k = 0$ (без областей $\mathbf{C}_j$), формула (6.2) сводится к уравнению типа Плейеля для выпуклых областей из [2], так как в этом случае $|l_1, l_2| = |\tau_{12}|$.

Обсуждение

Рассмотрим частные случаи

$$1) f(x) = x \quad 2) f(x) = 0 \text{ для } x < a, \text{ и } 1 \text{ для } x > a \quad \text{и } 3) f(x) = x^2.$$

В случае 2) $f'(x) = \delta(x - a)$, δ -функция Дирака сосредоточенная в точке a

$$\int f(|\tau(g)|) dg = |\partial \mathbf{D}| \times \mathbf{P}[\tau(g) \geq a],$$

где вероятность $\mathbf{P}$ соответствует случайная (в обычном смысле геометрических вероятностей) прямой g , пересекающей область $\mathbf{D}$. Способом, аналогичным выводу тождества Плейеля в монографии [3], можно провести одно интегрирование (6.2). Это приводит к существенным преимуществам.

В случае 1) имеем $f'(x) = 1$ и

$$\int f(|\tau(g)|) dg = \pi S,$$

где S = площадь области $\mathbf{D}$ минус сумма площадей областей $\mathbf{C}_j$. Предположим, что имеется бесконечное множество областей $\{\mathbf{C}_j\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$,

$\mathbf{D}$ = круг радиуса R с центром в начале координат и

$\{\mathbf{C}_j\}_R$ = конечный набор из $\mathbf{C}_j$, попадающих в $\mathbf{D}$.

Запишем (6.2) для $\{\mathbf{C}_j\}_R$ и $f(x) = x$, разделим обе стороны на πR^2 , а R устремим к ∞ . В некоторых случаях не трудно доказать существование предела левой части, если задана плотность покрытия для бесконечного множества $\{\mathbf{C}_j\}$. Тогда следует существование предела правой части. Если число слагаемых в сумме

$$\sum_{0 < i < j} \iint_{\partial \mathbf{C}_i \times \partial \mathbf{C}_j} \frac{|l_1, l_2|}{|\tau_{12}|} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2,$$

записанной для областей $\{\mathbf{C}_j\}_R$ имеет порядок R^4 , то нет предела, если не налагать условие на специальное поведение интегралов. Это представляет интерес при изучении случайных процессов областей на плоскости, инвариантных относительно евклидовых движений, где с вероятностью единица области не пересекаются. (Конкретный случай такого процесса, когда все области $\mathbf{C}_j$ суть единичные круги, было рассмотрено в [3].)

Случай $f(x) = x^2$ представляет особый интерес поскольку интеграл $\int |\tau(g)|^2 dg$ оказывается пропорциональным Ньютоновскому потенциалу (Newtons Selbstpotential, [8]) однородной перфорированной пластинки $\mathbf{D} \setminus \mathbf{C}_i$. Потенциал выражается как сумма достаточно простых двойных интегралов.

7. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ КЛАССА IA, [5]

Ниже используем следующие обозначения

$\mathcal{D}$ = пространство ограниченных выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$,

$\mathbf{D}$ = ограниченный выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ (элемент пространства $\mathcal{D}$),

$\mathbf{P}$ = вероятностная мера в $\mathcal{D}$.

По определению, случайный многоугольник есть измеримое отображение Δ :

Δ = отображение некоторого вероятностного пространства в пространство $\mathcal{D}$.

Для любого случайного многоугольника Δ его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ определяется как *вероятностная мера индуцированная на $\mathcal{D}$* .

Дадим несколько примеров отображений Δ (т.е. случайных многоугольников).

Примеры основываются на понятии

$\{g_i\}_\lambda$ = случайный пуассоновский процесс прямых на $\mathbb{R}^2$, управляемый мерой λdg .

Понятие $\{g_i\}_\lambda$ широко известно в Стохастической геометрии (см. [3]). Пространство счетных множеств $\{g_i\}$ вместе с вероятностным распределением $\{g_i\}_\lambda$ дает необходимое вероятностное пространство. В Примерах 4,5 мы используем некоторые очевидные модификации этого вероятностного пространства.

Предположим, что $\mathbb{R}^2$ наделена декартовой системой координат и обозначим

$\{\mathbf{D}_i\}_\lambda$ = случайное множество многоугольников $\mathbf{D}_i$ на которые $\{g_i\}_\lambda$ разбивает плоскость.

Пример 2. Типичный многоугольник взвешенный по площади в $\{D_i\}_\lambda$.

Такой случайный многоугольник определяется (см. [3]) как

Δ_1 = многоугольник из $\{\mathbf{D}_i\}_\lambda$, накрывающий начало координат O .

С вероятностью 1 такой многоугольник в $\{\mathbf{D}_i\}_\lambda$ существует, причем единственный.

Пример 3. Типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$ взвешенный по длине периметра.

Такой случайный многоугольник можно построить (см. [3]) следующим образом

Δ_2 = один из многоугольников на которые Δ_1 разбивается осью x .

С вероятностью 1 существуют две такие компоненты. Берем ту, внутренность которой полностью лежит в полуплоскости $y > 0$.

Пример 4. Типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$ взвешенный по числу вершин.

Может быть построен (см. [3]) следующим образом

Δ_3 = одна из многоугольных компонент, на которые Δ_2 разбивает g_0 , где

g_0 = независимая случайная прямая, проходящая через начало координат O и образующая угол ψ с осью x ,

ψ = случайный угол с плотностью распределения $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$ на интервале $(0, \pi)$.

С вероятностью $\mathbf{P} = 1$, многоугольник Δ_2 разбивается прямой g_0 на две компоненты, причем в качестве Δ_3 мы берем ту из компонент, которая имеет сторону на полуплоскости $x > 0$.

Пример 5. Типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$.

Такой случайный многоугольник может быть построен следующим образом (см. [3]). Рассмотрим

$\mathbf{r}$ = равномерное случайное вращение плоскости вокруг точки O ,

$\mathbf{r}g_0$ = образ прямой g_0 (см. Пример 4) относительно вращения $\mathbf{r}$,

$\mathbf{r}x$ = образ оси x относительно вращения $\mathbf{r}$

Предполагая, что $\mathbf{r}$ и Δ_1 независимы, получаем

Δ_λ = часть многоугольника Δ_1 , разделенная прямой $\mathbf{r}g_0$ и осью $\mathbf{r}x$ в полуплоскости $x > 0$,

$\mathbf{P}_\lambda$ = вероятностное распределение для Δ_λ .

Свойство IA.

Определим несколько функций, определенных в пространстве $\mathcal{D}$:

H = длина периметра многоугольника $\mathbf{D}$,

$|\mathbf{D}|$ = площадь многоугольника $\mathbf{D}$,

$[\mathbf{D}]$ = множество прямых g , пересекающих многоугольник $\mathbf{D}$,

$\mathbf{a}_k$ = стороны многоугольника $\mathbf{D}$, $|\mathbf{a}_k|$ – длина стороны $\mathbf{a}_k$,

N = число сторон многоугольника $\mathbf{D}$,

$\sum_k F(|\mathbf{a}_k|)$ = сумма значений функции $F(x)$, определенной на $(0, \infty)$.

Если на $\mathcal{D}$ задана вероятностная мера $\mathbf{P}$, то эти функции становятся случайными величинами. Мы всегда будем предполагать, что

$$(7.1) \quad H_0 = \int H d\mathbf{P} < \infty.$$

С каждой вероятностной мерой $\mathbf{P}$ на $\mathcal{D}$, удовлетворяющей условию ((7.1)), ассоциируем другое "вероятностное пространство":

$\mathcal{D} \times \mathbb{G}$ = пространство пар $(\mathbf{D}, g)$, где $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ и $g \in \mathbb{G}$,
наделенное вероятностной мерой

$$(7.2) \quad \frac{1}{H_0} I_{[\mathbf{D}]}(g) d\mathbf{P} dg,$$

где

$I_{[\mathbf{D}]}(g) = 1$, если $g \in [\mathbf{D}]$, 0 в противном случае (индикаторная функция).

Отметим, что из (7.2) вытекает

$$\frac{1}{H_0} \int \int I_{[\mathbf{D}]}(g) d\mathbf{P} dg = 1.$$

Обозначим через $\mathbf{E}$ математическое ожидание. Отображение

$$(\mathbf{D}, g) \longmapsto (\chi, \psi_1, \psi_2)$$

определяет случайные величины

χ = длину хорды $D \cap g$,

ψ_1, ψ_2 = два угла пересечения прямой g со сторонами многоугольника D .

Определение 1. Случайный многоугольник $\mathbf{D}$ (или его вероятностное распределение $\mathbf{P}$) принадлежит классу IA (*independent angles*), если условие (7.1) выполняется и случайные величины χ, ψ_1, ψ_2 – независимы. Эквивалентно $\mathbf{P} \in IA$ тогда и только тогда, когда для любых трех функций $f_1(x)$ (определенной на $(0, \infty)$), $f_2(x)$ и $f_3(x)$ (обе определены на $(0, \pi)$) имеем

$$\mathbf{E} f_1(\chi) f_2(\psi_1) f_3(\psi_2) = \mathbf{E} f_1(\chi) \mathbf{E} f_2(\psi_1) \mathbf{E} f_3(\psi_2).$$

Определим случайный отрезок s_1 следующим образом: сначала строим реализацию многоугольника $\mathbf{D}$ с вероятностным распределением $\frac{H}{H_0} d\mathbf{P}_\lambda$, где

H = длина периметра многоугольника $\mathbf{D}$ и $H_0 = \mathbf{E} H$,

а затем выбираем

s_1 = случайная сторона многоугольника $\mathbf{D}$, выбирается с вероятностью $\frac{|a_k|}{H}$.

Определим случайный отрезок s_2 : сначала строим реализацию, $\mathbf{D}$ выбираем с вероятностным распределением $\frac{N}{N_0} d\mathbf{P}_\lambda$, где

N = число сторон многоугольника $\mathbf{D}$ и $N_0 = \mathbf{E} N$,

а затем выбираем

s_2 – одна из сторон многоугольника $\mathbf{D}$, выбирается с вероятностью $\frac{1}{N}$.

Следующая теорема была доказана в [5]:

Теорема 2. *Случайный многоугольник Δ_λ (см. [5]) принадлежит классу IA и имеет следующие свойства*

- 1) χ – экспоненциальная случайная величина с параметром 2λ ,
- 2) ψ_1, ψ_2 – взаимно независимые одинаково распределенные случайные углы с плотностью $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$,
- 3) Случайная величина $|s_1|$ распределена с плотностью $(2\lambda)^2 v \exp(-2\lambda v) dv$,
- 4) Случайная величина $|s_2|$ распределена экспоненциально с параметром 2λ .

8. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОУГОЛЬНЫЕ РАСКРАСКИ ПЛОСКОСТИ

Условимся говорить о цвете J , $J = 1, 2, \dots$. Тогда многоугольная раскраска $C(P)$, $P \in \mathbb{R}^2$ определяется как цело-значная функция, с постоянными значениями внутри многоугольников. Множество где $C(P)$ не определено, мы называем фреймом и будем обозначать

$\partial C(P)$ = (счетное множество) прямолинейных отрезков, разделяющих различные цвета раскраски C .

Узлом называется точка в которой пересекаются по крайней мере два фрейм-отрезка. Очевидно, что ∂C не содержит узлов из которого исходит только один фрейм-отрезок.

Случайная многоугольная раскраска C является случайной функцией, реализации которой с вероятностью 1 являются многоугольными раскрасками. Вероятностное распределение случайной раскраски C будем обозначать через $\mathbf{P}$ (не смешивать с $\mathbf{P}_\lambda$ из предыдущего параграфа). Дополнительно требуем, что с вероятностью единица, внутри любого диска фрейм ∂C должен состоять из конечного множества прямолинейных отрезков или эквивалентно, число узлов

в каждом диске должно быть конечно. Отсюда следует, что множество узлов многоугольной раскраски ∂C является точечным процессом на плоскости.

Обозначим

$\mathbf{M}$ = группу всех евклидовых движений плоскости,

MC = результат действия евклидова движения $M \in \mathbf{M}$ на раскраску C .

Случайная раскраска C $\mathbf{M}$ -инвариана, если вероятностное распределение раскраски MC не зависит от $M \in \mathbf{M}$.

Рис. 3

8.1. Пример $\mathbf{M}$ - инвариантной раскраски. Пусть

$\{\mathbf{D}_i\}$ = $\mathbf{M}$ - инвариантное случайное множество выпуклых многоугольников, т.е.

точечный процесс в пространстве $\mathcal{D}$ ограниченных выпуклых многоугольников на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что точка на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет цвет J , если она покрывается числом $J - 1$ разных (открытых) многоугольников из случайного множества $\{\mathbf{D}_i\}$. Соответствующую случайную раскраску C будем называть булевой. Частный случай

$$(8.1) \quad \{\mathbf{D}_i\} = \{M_i \Delta_i\},$$

где

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ = последовательность независимых и одинаково распределенных случайных выпуклых многоугольников,

$M_1, M_2, M_3, \dots$ = $\mathbf{M}$ -инвариантный пуассоновский точечный процесс на группе $\mathbf{M}$, управляемый мерой dM ,

dM = мера Хаара на группе $\mathbf{M}$,

называется пуассоновской моделью. Она $\mathbf{M}$ - инвариантна и с вероятностью единица ее узлы имеют типы X или V :

узел типа X = пересечение двух сторон двух различных многоугольников из (8.1),

узел типа V = вершина многоугольника из (8.1).

Обозначим через $\mathbf{J}$ множество последовательностей цветов

$$\mathbf{J} = \{(J_1, J_2, \dots, J_r)\}$$

(r не фиксировано), обладающих свойством, что для каждой последовательности $(J_1, J_2, \dots, J_r)$ множество $\mathbf{J}$ содержит обратную последовательность $(J_r, J_{r-1}, \dots, J_1)$. Для заданного направленного тестового отрезка s на плоскости, и заданного множества $\mathbf{J}$, рассмотрим событие (= множество реализаций булевой модели C)

$\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(s)$ = последовательность цветов, индуцированная пуассоновской булевой моделью C на отрезке s лежит в $\mathbf{J}$, это событие не зависит от выбора направления отрезка s .

Теорема 3 в §9 формулируется при предположении о существовании некоторых плотностей и пальмовских распределений.

Плотность ρ_1 и распределение Пальма Π_1 .

Для заданного выпуклого многоугольника $\mathbf{D}$, пусть

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ = две различные стороны многоугольника $\mathbf{D}$,

$dl_1 \subset \mathbf{a}_1$ и $dl_2 \subset \mathbf{a}_2$ = два линейных элемента точки l_1 или l_2 (или их длины), и события, $i = 1, 2$

$(dl_i) = \{\partial C : \text{в } \partial C \text{ существует один фрейм-отрезок, пересекающий } dl_i\}$.

Ниже мы рассмотрим M -инвариантные случайные раскраски C , распределения которых $\mathbf{P}$ удовлетворяют следующему условию:

$$(8.2) \quad \mathbf{P}[(dl_1) \cap (dl_2)] = \rho_1(\psi_1, \psi_2, \chi) dl_1 dl_2,$$

где ρ_1 – некоторая плотность распределения,

χ = хорда многоугольника $\mathbf{D}$, соединяющая точки l_1, l_2 ,

ψ_1, ψ_2 = углы на концах χ , которые определяются как в §7. Положим

Π_1 = распределение Пальма соответствующая событию $(dl_1) \cap (dl_2)$,

Напомним (см. [3]), что распределение Пальма Π_1 определяется уравнением

$$(8.3) \quad \mathbf{P}[(dl_1) \cap (dl_2) \cap \mathcal{A}] = \rho_1(\psi_1, \psi_2, |l_1, l_2|) \Pi_1(\mathcal{A}) dl_1 dl_2,$$

имеет место для достаточно широкого класса событий $\mathcal{A}$. Подчеркнем, что Π_1 определено по отношению к $\mathbf{D}$, так как dl_1, dl_2 принадлежат $\partial\mathbf{D}$. В следующем параграфе $\mathbf{D}$ будет одной из интегрируемых переменных.

Плотность ρ_2 и распределение Пальма Π_2 .

Для точки z , заданной во внутренней области многоугольника $\mathbf{D}$, обозначим

dz = элементарную площадь вблизи z (или плоскую меру Лебега)

$(dz) = \{C : C \text{ имеет в точности один узел, лежащий в } dz\}$,

Для стороны $\mathbf{a}$ многоугольника $\mathbf{D}$ и $l \in \mathbf{a}$, событие (dl) определено как выше.

Мы накладываем на $\mathbf{P}$ дополнительное условие,

$$(8.4) \quad \mathbf{P}[(dz) \cap (dl)] = \rho_2(z, l, \psi) dz dl,$$

где

$\rho_2(z, l, \psi)$ = некоторая функция плотности,

ψ = угол пересечения стороны $\mathbf{a}$ с прямой z, l

и требуем существования

Π_2 = распределение Пальма, соответствующая событию $(dz) \cap (dl)$ (зависит от $\mathbf{D}$).

Плотность ρ_3 и распределение Пальма Π_3 .

Мы налагаем на $\mathbf{P}$ дополнительное условие, которое имеет следующий вид:

$$(8.5) \quad \mathbf{P}[(dz_1) \cap (dz_2)] = \rho_3(z_1, z_2) dz_1 dz_2,$$

где $\rho_3(z_1, z_2)$ – некоторая функция плотности, и требуем существования

Π_3 = Распределение Пальма, соответствующее событию $(dz_1) \cap (dz_2)$.

9. УСРЕДНЕНИЕ

Пусть выпуклый многоугольник $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ фиксирован. Рассмотрим $\mathbf{M}$ -инвариантную случайную многоугольную раскраску C , удовлетворяющую предположениям предыдущего параграфа и обозначим

Z_i = узлы раскраски C , принадлежащие $\text{int}\mathbf{D}$,

Y_i = точки, где ∂C пересекает $\partial\mathbf{D}$,

X_i = вершины многоугольника $\partial\mathbf{D}$.

Для простоты предположим, что с вероятностью 1, Z_i не обладают коллинеарными тройками. Однако аналогичное условие на Y_i не выполнимо.

Для данной $\mathbf{J}$ и реализации раскраски C , определим

$$A = A(C, \mathbf{D}, \mathbf{J}) = \text{хорды } \chi \text{ многоугольника } \mathbf{D} \text{ с цветами в } \mathbf{J},$$

(зависимость от C означает, что A является случайным множеством хорд). Полагаем

$$B = A \cap [\mathbf{D}].$$

Можно показать, что для любой $\mathbf{J}$, с вероятностью $\mathbf{P} = 1$ соответствующая B удовлетворяет условию

$$B \in \mathbf{r}\{P_i\}, \text{ где } \{P_i\} = \{Z_i\} \cup \{Y_i\} \cup \{X_i\}.$$

Итак, для заданного $\mathbf{J}$, разложение (2.5) для соответствующего события B имеет место с вероятностью $\mathbf{P} = 1$. В понятных обозначениях,

$$\begin{aligned}
 \mu(B) &= \int_{[\mathbf{D}]} I_A(g) dg \\
 &= \sum_{\mathbf{a}_k} \sum_{P_i, P_j \in \mathbf{a}_k} u_{ij}(B) |P_i, P_j| + \sum_{(YY)^*} u_{ij}(A) |Y_i, Y_j| \\
 (9.1) \quad &+ \sum_{(ZZ)} u_{ij}(A) |Z_i, Z_j| + \sum_{(YZ)} u_{ij}(A) |Y_i, Z_j|,
 \end{aligned}$$

где

$(YY)^*$ = множество неупорядоченных пар Y_i, Y_j , не принадлежащих $\mathbf{a}_k$,

$\sum_{\mathbf{a}_k}$ = сумма по всем сторонам $\mathbf{a}_k$ многоугольника $\mathbf{D}$,

и предположим, что множество $\{P_i, P_j \in \mathbf{a}_k\}$ содержит неупорядоченные пары концов X_1, X_2 стороны $\mathbf{a}_k$ а также неупорядоченные пары типа X_1, Y_i и X_2, Y_j , причем $Y_i, Y_j \in \mathbf{a}_k$.

Начнем интегрировать (9.1) относительно вероятностного распределения $\mathbf{P}_\lambda \times \mathbf{P}$, где

$\mathbf{P}_\lambda$ = вероятностное распределение случайного многоугольника Δ_λ (см. §7),

$\mathbf{P}$ = вероятностное распределение некоторой $\mathbf{M}$ -инвариантной раскраски $\mathcal{C}$, причем $\mathbf{E}$ будет обозначать математическое ожидание.

Усредняя левую часть формулы (9.1), получаем преобразование Лапласа функции

$$P(\mathbf{J}, x) = \mathbf{P}(\mathcal{A}_\mathbf{J}(s)), \quad x - \text{длина отрезка } s.$$

Для любой прямой $g \in [\mathbf{D}]$ имеем

$$\int I_A(g) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{A}_\mathbf{J}(\chi)), \quad \chi = \mathbf{D} \cap g.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \int_{[\mathbf{D}]} I_A(g) dg &= \int \int I_{[\mathbf{D}]}(g) dg d\mathbf{P}_\lambda \int I_A(g) d\mathbf{P} \\
 (9.2) \quad &= \int \int I_{[\mathbf{D}]}(g) \mathbf{P}(\mathcal{A}_\mathbf{J}(\chi)) dg d\mathbf{P}_\lambda = 2\lambda H_0 \int P(\mathbf{J}, x) e^{-2\lambda x} dx,
 \end{aligned}$$

причем последнее равенство следует из Теоремы 2.

Также из Теоремы 2 следует, что интегрирование следующего слагаемого в (9.1) вновь приводит к преобразованию Лапласа. Из 4) Теоремы 2 получаем

$$\mathbf{E} \sum_{\mathbf{a}_k} \sum_{P_i, P_j \in \mathbf{a}_k} u_{ij}(B) |P_i, P_j| = \int H d\mathbf{P}_\lambda \sum_{\mathbf{a}_k} \frac{|\mathbf{a}_k|}{H} \int d\mathbf{P} \sum_{P_i, P_j \in \mathbf{a}_k} u_{ij}(B) |P_i, P_j|$$

$$(9.3) \quad = (2\lambda)^2 H_0 \int x e^{-2\lambda x} \mathbf{E} \xi_x dx,$$

где ξ_x обозначает случайную величину, определенную для тестового интервала $\mathbf{s}$ на плоскости, $|\mathbf{s}| = x$ и имеет вид (см.(2.3)):

$$\xi_x = -I_{\mathbf{J}}(\mathbf{s}) + \sum_{x_i, x_j \in (+)} [I_{\mathbf{J}}(\mathbf{s}_1) + I_{\mathbf{J}}(\mathbf{s}_2)] |x_i, x_j|,$$

где (см. Рис. 4)

$I_{\mathbf{J}}(\mathbf{s})$ = индикаторная функция события $\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\mathbf{s})$,

x_i, x_j суть неупорядоченные пары из множества

$\{x_i\}$ = концы y_1, y_2 отрезка $\mathbf{s}$ плюс конечное множество точек $\partial C \cap \mathbf{s}$,

причем для заданной пары $x_i, x_j \in (+)$ и $k = 1, 2$

$\mathbf{s}_k$ = отрезок c, y_k , $\mathbf{s}_k \subset \mathbf{s}$, где

c = центр отрезка x_i, x_j .

Рис. 4

Далее, согласно алгоритму (2.4), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \sum_{(YY)^*} |Y_i, Y_j| u_{ij}(A) \\ &= \int d\mathbf{P}_{\lambda} \sum_{i <_j \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j} \iint |l_1, l_2| \rho_1(\psi_1, \psi_2, |\chi|) \Psi_1 dl_1 dl_2, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_1 = \Pi_1(\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{+-})) + \Pi_1(\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{-+})) - \Pi_1(\mathcal{A}_{\mathbf{J}}^-(\chi^{--})) - \Pi_1(\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{++})),$$

χ = хорда l_1, l_2 многоугольника $\mathbf{D}$,

ψ_1, ψ_2 = углы, под которыми хорда χ пересекает $\partial \mathbf{D}$ в точках l_1, l_2 ,

χ^{+-} = хорда многоугольника $\mathbf{D}$, полученная малыми смещениями хорды χ ,

$\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{+-})$ = событие “хорда χ^{+-} имеет цвет в $\mathbf{J}$ ”,

события $\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{-+})$, $\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{++})$ и $\mathcal{A}_{\mathbf{J}}(\chi^{--})$ определяются аналогично. Комбинации знаков $+$ или $-$ относятся к точкам l_1, l_2 .

Используя Якобиан

$$dl_1 dl_2 = \frac{|\chi|}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} dg,$$

получаем

$$(9.4) \quad \mathbf{E} \sum_{(YY)^*} |Y_i, Y_j| u_{ij}(A) = \int_{[\mathbf{D}]} d\mathbf{P}_\lambda \int |\chi|^2 \rho_1(\psi_1, \psi_2, |\chi|) \frac{\Psi_1}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} dg,$$

Теорема 3. *Величина Ψ_1 зависит только от углов ψ_1, ψ_2 между хордой χ и $\partial\mathbf{D}$ в точках l_1, l_2 . Поэтому по Теореме 2, интегрирование по $d\mathbf{P}_\lambda dg$ в уравнении (9.4) можно заменить интегрированием с плотностью*

$$(9.5) \quad \frac{H_0 \lambda}{2} e^{-2\lambda \chi} \sin \psi_1 \sin \psi_2 d\chi d\psi_1 d\psi_2,$$

то есть

$$(9.6) \quad \mathbf{E} \sum_{(YY)^*} |Y_i, Y_j| u_{ij}(A) = \frac{H_0 \lambda}{2} \int \chi^2 e^{-2\lambda \chi} d\chi \int_0^\pi \int_0^\pi \rho_1(\psi_1, \psi_2, \chi) \Psi_1 d\psi_1 d\psi_2.$$

Представления преобразования Лапласа аналогичные Теореме 3 также имеют место относительно величин $\mathbf{E} \sum_{(ZZ)} u_{ij}(A) |Z_i, Z_j|$ и $\mathbf{E} \sum_{(YZ)} u_{ij}(A) |Y_i, Z_j|$. Это дает возможность обращения преобразования Лапласа функции $P(\mathbf{J}, |\chi|)$. В другой статье, автор намерен дать полное доказательство Теоремы 3 и ее аналог для $\mathbf{E} \sum_{(ZZ)} u_{ij}(A) |Z_i, Z_j|$ и $\mathbf{E} \sum_{(YZ)} u_{ij}(A) |Y_i, Z_j|$, а также продемонстрировать, что вычисление интегралов вида

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\chi|^2 \rho_1(\psi_1, \psi_2, |\chi|) \Psi_1 d\psi_1 d\psi_2$$

может быть достаточно эффективным.

Интересно выяснить, как далеко эти результаты позволяют продвинуть в задаче нахождения функции $P(\mathbf{J}, x)$, в случае пуассоновских случайных раскрасок.

Abstract. Many results in Combinatorial Integral Geometry are derived by integration of the combinatorial decompositions associated with finite point sets $\{P_i\}$ given in the plane $\mathbb{R}^2$. However, most previous cases of integration of the decompositions in question were carried out for the point sets $\{P_i\}$ containing no triads of collinear points, where the familiar algorithm sometimes called the "Four indicator formula" can be used. The present paper is to demonstrate that the *complete* combinatorial algorithm valid for sets $\{P_i\}$ not subject to the mentioned restriction opens the path to various results, including the field of Stochastic Geometry. In the paper the complete

algorithm is applied first in an integration procedure in a study of the *perforated convex domains*, i.e convex domains containing a finite array of non-overlapping convex holes. The second application is in the study of *random colorings* of the plane that are Euclidean motions invariant in distribution, basing on the theory of random polygonal windows from the so-called Independent Angles (IA) class. The method is a direct averaging of the *complete* combinatorial decompositions written for colorings observed in polygonal windows from the IA class. The approach seems to be quite general, but promises to be especially effective for the random coloring generated by random Poisson polygon process governed by the Haar measure on the group of Euclidean motions of the plane, assuming that a point $P \in \mathbb{R}^2$ is colored J if P is covered by exactly J polygons of the Poisson process. A general theorem clearing the way for Laplace transform treatment of the random colorings induced on line segments is formulated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. V. Ambartzumian, "On some topological invariants in integral geometry", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **44**, 57-69 (1978).
- [2] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).
- [3] R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [4] Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении меры в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," *Известия АН Армении, серия Математика* **27** (5), 1-21 (1992).
- [5] Р. В. Амбарцумян, "Аналитические следствия комбинаторной интегральной геометрии: Обзор," *Известия АН Армении, серия Математика* **34** (6), 2-46 (1999).
- [6] Р. В. Амбарцумян, "Исчисление хорд и стохастическая геометрия," *Известия АН Армении, серия Математика* **42** (1), 3-27 (2007).
- [7] В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии на плоскости: Обзор," *Известия АН Армении, серия Математика* **43** (1), 20-47 (2008).
- [8] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie* (New York, 1949).

Поступила 25 ноября 2007

КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИНЦИПЫ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ: ОБЗОР

В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: victo@aua.am

Аннотация. Настоящая статья является обзором основных результатов в стохастической геометрии на плоскости, полученных ереванской исследовательской группой. В частности, результатов, касающихся второго порядка случайных геометрических процессов, полученных методами интегрирования комбинаторных разложений и инвариантным вложением. Для настоящего обзора были выбраны результаты, касающиеся томографии (или стереологии) случайных процессов прямых, случайных мозаик и булевых моделей (не обязательно пуассоновских) на плоскости. Эти результаты получены при предположении инвариантности или относительно группы T параллельных переносов, или относительно группы M евклидовых движений плоскости. В каждом из случаев изучаются маркированные точечные процессы пересечений $\{P_i, \Psi_i\}$, индуцированные на тестовой прямой случайной структурой, где $\{P_i\}$ есть точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение в точке P_i с тестовой прямой направления α . В случае случайного процесса прямых, этот подход приводит к дифференциальным соотношениям между совместными распределениями числа точек пересечений, возникающих на непересекающихся интервалах тестовой прямой, имеющей направление α , и пальмовскими вероятностями первого и второго порядков тех же событий. Анализ этих соотношений дает условия пуассоновости n -мерных распределений для любого $n \geq 1$. В случае случайных мозаик получено распределение длины так-называемого типичного ребра направления α в терминах вероятностного распределения соответствующего маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}$. Что касается случайных M -инвариантных булевских моделей, настоящий обзор включает описание метода, основанного на суммировании тождеств типа Плейеля для реализации внутри конечного круга и дальнейшее вычисление предела, когда радиус круга стремится к бесконечности. Чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой называется рекуррентным, если черные маркированные интервалы независимы, а длины белых маркированных интервалов составляют независимую последовательность независимых случайных величин. Одним из ранних результатов в этой области утверждает, что из условия рекуррентности вытекает экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала на тестовой прямой.

Комбинаторные разложения; инвариантное вложение; случайные геометрические процессы; случайные мозаики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Д. Г. Кендал в [5] определил предмет стохастической геометрии как изучение случайных геометрических процессов инвариантных относительно групп преобразований основного пространства. Так, статьи Р. Давидсона [7] и [8] написанные под влиянием Д. Г. Кендала, были посвящены изучению случайных процессов прямых на плоскости, инвариантных относительно группы M всех евклидовых движений плоскости. Среди работ этого периода отметим работы К. Крикеберга [9], Й. Мекке [17] и О. Каленберга [14], а также [1], которые были посвящены той же теме. Некоторые результаты касающиеся M -инвариантных случайных множеств можно найти также в монографиях Р. В. Амбарцумяна [22] и [32]. Недавно опубликованная работа Й. Мекке, В. Нагеля и В. Вайс [48], о случайных мозаиках была озаглавлена “Распределения длин ребер в плоских стационарных и изотропных STIT мозаиках”. Отметим, что стационарность и изотропность обычно эквивалентна инвариантности относительно евклидовых движений (см. [31]). Тем не менее, в настоящее время стохастическая геометрия включает много работ вне структуры очерченной Д. Г. Кендалом.

В течении десятилетий прошедших со дня публикации сборника статей [5], активное исследование в области очерченной Д. В. Кендалом велось в Ереване, в основном методами предложенными Р. В. Амбарцумяном. На начальном этапе этим аппаратом была комбинаторная интегральная геометрия (см. [2, 15, 18, 4, 6] и [22]) вместе с методом “анализ реализаций” [32]. Позднее, к арсеналу был присоединен так называемый метод инвариантного вложения [41]. Другим важным аппаратом исследования, который также в основном использовался в Ереване, это метод формул Пальма (см. [10]), предложенный в [32]. Систематическое исследование распределений Пальма в стохастической геометрии было начато в [19] выпуске.

Самым последним приобретением является техника случайного многоугольника предложенная в первой статье настоящего выпуска [49] (см. также [47]). Настоящий обзор не касается родственных тематик, таких как общие процессы отрезков [1, 3, 16, 20, 21], и порождение мер в пространствах интегральной геометрии [35]-[40] и [43] исследованных ереванской группой.

Настоящая статья содержит обзор основных результатов стохастической геометрии на плоскости, полученных в Ереване. Мы выбрали для обзора результаты касающиеся томографии (или стереологии) случайных процессов прямых, случайных мозаик и булевых моделей (не обязательно пуассоновских) на плоскости.

Мы требуем инвариантность или относительно группы $\mathbf{T}$ параллельных переносов, или группы $\mathbf{M}$.

В каждом из случаев изучаются маркированные точечные процессы $\{P_i, \Psi_i\} = \{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ пересечений, индуцированные случайной реализацией на тестовых прямых: $\{P_i\}_\alpha$ – точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение тестовой прямой направления α в точке P_i . В случае случайных процессов прямых методы интегрирования комбинаторных разложений и инвариантного вложения приводят к дифференциальным соотношениям между совместными распределениями числа пересечений, возникающих на непересекающихся интервалах тестовой прямой, имеющей направление α , и пальмовскими вероятностями первого и второго порядков тех же событий. Анализируя эти соотношения, получаем условия пуассоновости n -мерных распределений для любого $n \geq 1$. В случае случайных мозаик получено распределение длины типичного ребра направления α в терминах вероятностного распределения соответствующего $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$.

В случае $\mathbf{M}$ -инвариантных непуассоновских булевых моделей, настоящий обзор включает описание процедуры суммирования тождеств типа Плейеля для части реализации внутри конечного круга и дальнейшее вычисление предела, когда радиус круга стремится к бесконечности. Один из ранних результатов [19] в этой области утверждает, что если чередующийся процесс маркированных интервалов на тестовой прямой (см. §11), марками которых являются углы пересечения в концах интервалов, является рекуррентным, то длина типичного белого интервала имеет экспоненциальное распределение.

Кратко опишем содержание обзора. Необходимые факты из комбинаторной интегральной геометрии представлены в §2, а §3 содержит необходимые сведения из теории трансляционно инвариантных случайных процессов прямых (в основном из работ [23, 32, 41, 42]). §4 посвящен обобщенным формулам Пальма. В §5 описан метод инвариантного вложения, который называется анализом первого порядка. Пример анализа второго порядка приводится в §6; он содержит интегрирование комбинаторного разложения из §2 и получение дифференциального тождества для вероятностного распределения числа пересечений на тестовом отрезке случайными прямыми (аналогичное разложение было использовано в $\mathbf{M}$ -инвариантном случае в работах [30, 34] и [42]). Аналогичный результат получен в §8 методом инвариантного вложения (см. [45]). В §8 получены условия, из которых следует пуассоновость точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$. Имеется существенное методологическое различие между статьями [42] и [45]: анализ второго порядка

в [42] основан на разложениях комбинаторной интегральной геометрии (основными ссылками являются [4, 13] и [32]), в то время как в работах [41] и [42] использовался метод инвариантного вложения. Метод интегрирования комбинаторного разложения описан в §9, где найдено распределение длины типичного ребра направления α для $\mathbf{T}$ -инвариантной случайной мозаики.

В последнем параграфе был использован метод суммирования тождеств типа Плейеля для изучения $\mathbf{M}$ -инвариантных булевых моделей. Если чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой рекуррентный, то длина типичного белого интервала на тестовой прямой имеет экспоненциальное распределение.

2. ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbb{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам суть [24] и [31]). Прямую $g \in \mathbb{G}$ можно задавать полярными координатами (φ, p) основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g (φ – точка на единичной окружности $\mathbf{S}_1$, $p \in [0, +\infty)$). Естественная топология в $\mathbb{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Дадим определение процесса прямых. Обозначим через $\mathbf{M}$ пространство **реализаций** процесса прямых

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{m} \subset \mathbb{G} : \mathbf{m} \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } \mathbb{G}\}.$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ минимальную σ -алгебру подмножеств пространства $\mathbf{M}$ относительно которой функции

$$N(\mathbf{m}, B) = \text{card}(\mathbf{m} \cap B)$$

измеримы для всех борелевских $B \subset \mathbb{G}$. Пусть $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $\mathbf{m}(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbf{M}$ называется случайным точечным процессом в $\mathbb{G}$. Вместо $\mathbf{m}$ мы часто будем использовать символ $\{g_i\}$, подчеркивая факт, что процесс есть счетное случайное множество прямых. Через $\mathbf{P}$ обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathbf{M}, \mathbf{A})$). Группа $\mathbf{T}$ параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индуцирует группу преобразований множества реализаций $\mathbf{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathbf{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно этой группы ($\mathbf{T}$ -инвариантно).

Примером $\mathbf{T}$ -инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi) \cdot dg$. Здесь и ниже dg обозначает единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых $\mathbb{G}$, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$ (см. [12, 31] и [32]).

Моментные меры.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ обладает первой моментной мерой $m_1(\cdot)$, если

$$m_1(B) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} N(\mathbf{m}, B) < \infty, \quad \text{для } B \in \mathbf{B}_0(\mathbb{G}),$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ – математическое ожидание относительно $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}_0(\mathbb{G})$ – кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств. Тогда $\{g_i\}$ называется случайным процессом прямых первого порядка.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ обладает второй моментной мерой $m_2(\cdot)$, если

$$m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [N(\mathbf{m}, B_1) \cdot N(\mathbf{m}, B_2)] < \infty, \quad \text{для } B_1, B_2 \in \mathbf{B}_0(\mathbb{G}).$$

Тогда $\{g_i\}$ называется случайным процессом прямых второго порядка.

Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ , если $\gamma \cap g$ есть точка из **внутренности** отрезка γ .

Задавая "тестовый отрезок" γ , рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных n тестовых отрезков $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$ и n неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$, будем обозначать $\binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n} = \prod_{i=1}^n \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\bar{\gamma}}{k}$. Для вероятностей этих событий используем обозначения

$$\mathbf{P} \binom{\gamma}{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n} = \mathbf{P} \binom{\bar{\gamma}}{k}.$$

Определение 1. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу TI-2 , если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ – $\mathbf{T}$ -инвариантно и первая и вторая моментные меры процесса $\{g_i\}$ имеют вид $f dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2 dg_1 dg_2$ соответственно, с непрерывными плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

2.1. Некоторые свойства процессов класса TI-2 . Свойства, которые мы приводим, могут быть доказаны методом трансляционного анализа реализаций (см. [32]).

1. Для случайного процесса прямых из класса TI-2 , с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ – вертикальными. Горизонтальные отрезки будем обозначать через h , а вертикальные – через v . Если $|h| = l \rightarrow 0$, то имеем

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha)l + o(l), \quad \mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix} = O(l^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = o(l^2), \quad \text{если} \quad k > 2,$$

где $\lambda(\alpha)$ – интенсивность точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$.

Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков v , при $|v| \rightarrow 0$.

3. Рассмотрим последовательность событий $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, предполагая, что отрезки h_i и v_i при $l \rightarrow 0$ стягиваются к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$. Для пары вертикальных отрезков v_1, v_2 имеем $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \cup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда **одна и та же прямая** из $\{g_i\}$ пересекает отрезки v_1 и v_2 , а B – дополнение события A в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ т.е. B обозначает событие, когда отрезки v_1 и v_2 пересекаются **двумя разными прямыми** из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы:

$$(2.1) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \left[l^{-2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = c_{y_1, y_2, hh}, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} \mathbf{P}(A)] = c_A, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} \mathbf{P}(B)] = c_{y_1, y_2, vv}.$$

Распределения Пальма $\mathbf{N}_y$, $\mathbf{N}_{y_1, y_2}$, $\mathbf{V}_y$, $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$, и Π_g . Грубо говоря, каждое из этих распределений есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B и A соответственно. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиции предельных точек. Мы можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений.

Оба вероятностных распределения $\mathbf{N}_y$ и $\mathbf{V}_y$ определены на $\mathbf{M} \times (0, \pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Будем рассматривать события типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0, \pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$, где Ψ – направление случайной прямой, пересекающей окно. Значения $\mathbf{N}_y$ и $\mathbf{V}_y$ на одних и тех же событиях, как правило, не совпадают (см. Лемму 1).

Как $\mathbf{N}_{y_1, y_2}$ так и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризуем последние две прямые углами Ψ_1 и Ψ_2 . Таким образом, $\mathbf{N}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathbf{M} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. В частности, $\mathbf{N}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$

определены на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0, \pi)$. Вновь, $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ могут принимать различные значения на одних и тех же событиях (см. Лемму 2).

Распределение Пальма Π_g имеет особый статус. В [25] и [32] существование распределения Пальма Π_g доказывается только для $\mathbf{M}$ -инвариантных процессов прямых. Можно дать нестрогое определение распределения Π_g , как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна из прямых процесса $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой g . Одно из точных определений распределения Пальма Π_g для $\{g_i\} \in \text{TI-2}$ состоит в следующем:

$$\Pi_g \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} [\mathbf{P}(A)]^{-1} \mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \cap A \right) = c_A^{-1} \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} \mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \cap A \right).$$

Математические ожидания относительно пальмовских распределений будем записывать в виде интегралов.

Лемма 1. (см. [42]). Пусть $F(\mathbf{m}, \Psi_1)$ – ограниченная функция, определенная на $\mathbf{M} \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{TI-2}$, то для каждого направления α и точки $y \in g(\alpha)$ имеем

$$\lambda(\alpha) \int F(\mathbf{m}, \Psi_1) d\mathbf{H}_y \cdot |\cot \Psi_1| = \lambda(\alpha + \pi/2) \int F(\mathbf{m}, \Psi_1) d\mathbf{V}_y,$$

где Ψ_1 – угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой, проходящей через точку y .

Лемма 2. (см. [42]). Пусть $F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2)$ – ограниченная функция, определенная на $\mathbf{M} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{TI-2}$, то для каждого направления α и точек $y_1, y_2 \in g(\alpha)$ имеем

$$c_{y_1, y_2, hh} \int F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) d\mathbf{H}_{y_1, y_2} \cdot |\cot \Psi_1 \cot \Psi_2| = c_{y_1, y_2, vv} \int F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) d\mathbf{V}_{y_1, y_2},$$

где Ψ_1, Ψ_2 суть углы между $g(\alpha)$ и случайными прямыми, проходящими через точки y_1 и y_2 .

3. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ класса TI-2 , то соответствующий процесс пересечений $\{P_i\}_\alpha = \{g_i\} \cap g(\alpha)$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Пусть

$$p_k(t, \alpha) = \text{вероятность иметь } k \text{ точек из } \{P_i\}_\alpha \text{ на интервале длины } t$$

и

$$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = \text{совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{P_i\}_\alpha \text{ в } \gamma_j, j = 1, \dots, n,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – система непересекающихся интервалов из $g(\alpha)$,

$\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$ – последовательность неотрицательных целых чисел.

Заметим, что вероятность $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ на самом деле есть функция $2n$ переменных

$$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = p_{k_1, \dots, k_n}(t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_{n-1}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

где $t_1, \dots, t_n$ – длины отрезков γ_i , а u_i – длина пробела между γ_i и γ_{i+1} .

Формулы Пальма первого порядка.

Для отрезка $\gamma \subset g(\alpha)$ длины t имеем классическую формулу Пальма (см. [32])

$$(3.1) \quad \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha) \left[\mathbf{H}_y \left(\begin{array}{c} \gamma \\ k-1 \end{array} \right) - \mathbf{H}_y \left(\begin{array}{c} \gamma \\ k \end{array} \right) \right], \quad \text{где } p_k(t, \alpha) = P \left(\begin{array}{c} \gamma \\ k \end{array} \right).$$

Эта формула справедлива для обоих концов y отрезка γ . Здесь и ниже

$$\mathbf{H}_y \left(\begin{array}{c} \gamma \\ -1 \end{array} \right) = 0.$$

В монографии [32] содержится обобщение формулы Пальма (3.1) для вероятностей $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ с несколькими интервалами $\gamma_i \subset g(\alpha)$.

Возьмем один из отрезков γ_i и в его правом конце дадим приращение ε_i длины $|\varepsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и γ_{i+1} становится $u_i - |\varepsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$(3.2) \quad \lim_{|\varepsilon_i| \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + |\varepsilon_i|, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - |\varepsilon_i|, \dots, u_n, \alpha) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{|\varepsilon_i|} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i}.$$

С другой стороны, по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P} \left(\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right)_i \cap \left(\begin{array}{c} \gamma_i \cup \varepsilon_i \\ k_i \end{array} \right) \right) = \mathbf{P} \left(\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} \varepsilon_i \\ 0 \end{array} \right) \right) + P \left(\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right)_i \cap \left(\begin{array}{cc} \gamma_i & \varepsilon_i \\ k_i - 1 & 1 \end{array} \right) \right) + o(|\varepsilon_i|),$$

$$P \left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) = P \left(\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} \varepsilon_i \\ 0 \end{array} \right) \right) + P \left(\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} \varepsilon_i \\ 1 \end{array} \right) \right) + o(|\varepsilon_i|).$$

где

$$\left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right)_i = \left(\begin{array}{cccccc} \gamma_1 & \dots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_{i-1} & k_{i+1} & \dots & k_n \end{array} \right).$$

Подставляя эти формулы в (3.2), получим

$$(3.3) \quad \lambda(\alpha) \Delta_i \mathbf{H}_{r_i} \left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i},$$

где r_i обозначает правый конец отрезка γ_i . Здесь и ниже

$$(3.4) \quad \Delta_i Y_{\bar{k}} = Y_{(k_1, \dots, k_{i-1}, \dots, k_n)} - Y_{(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)}.$$

Если дадим приращение отрезка γ_i слева, то получим следующую версию формулы (3.3):

$$(3.5) \quad \lambda(\alpha) \Delta_i \mathbf{H}_{l_i} \left(\begin{array}{c} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{array} \right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}},$$

где l_i левый конец отрезка γ_i .

Формулы Пальма второго порядка. Возьмем два отрезка γ_i, γ_j и дадим приращения слева и справа соответственно, отрезками ε_i и ε_j . Длины отрезков ε_i и ε_j совпадают и равны l . Пробел между приращенными отрезками γ_i и γ_{i+1} будет $u_i - l$, а между γ_j и γ_{j-1} станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) \\ & - p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1}, \dots, u_n, \alpha) \\ & - p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) + p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) \end{aligned}$$

умноженный на l^{-2} имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (3.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение $\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} = \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_i\right)_j$, получаем

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cc} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{array}\right)\right) = \\ & = \sum_{0 \leq s_1 + s_2 \leq 2} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cccc} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - s_1 & k_j - s_2 & s_1 & s_2 \end{array}\right)\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cc} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \\ k_i & k_j \end{array}\right)\right) = \sum_{s=0,1,2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{array}{ccc} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ 0 & s \end{array}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cccc} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 1 & k_j & 1 & s \end{array}\right)\right) \\ & + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cccc} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 2 & k_j & 2 & 0 \end{array}\right)\right) + o(l^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cc} \gamma_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{array}\right)\right) = \sum_{s=0,1,2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{array}{ccc} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s & 0 \end{array}\right) \\ & + \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cccc} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 1 & s & 1 \end{array}\right)\right) \\ & + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \left(\begin{array}{cccc} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 2 & 0 & 2 \end{array}\right)\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Наконец,

$$P\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \sum_{s_1+s_2 \leq 2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \begin{array}{cc} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s_1 & s_2 \end{array}\right) + o(l^2).$$

Подставляя в (3.6), получаем

$$(3.7) \quad c_{r_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}},$$

где

$$(3.8) \quad \Delta_{ij}^2 Y_{\bar{k}} = Y_{\bar{k}_{ij}} - Y_{\bar{k}_i} - Y_{\bar{k}_j} + Y_{\bar{k}},$$

$$\bar{k}_i = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_n), \quad \bar{k}_{ij} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n).$$

В частности, для $j = i + 1$, в (3.7) имеем $\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}} = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$(3.9) \quad c_{l_i, r_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1} \partial u_j}.$$

В случае $i = 1$ или $j = n$, мы должны подставить $\frac{\partial}{\partial u_0} \equiv 0$ и $\frac{\partial}{\partial u_n} \equiv 0$. В частности, для $i = 1$ и $j = n$ имеем

$$(3.10) \quad c_{l_1, r_n, hh} \Delta_{1n}^2 \mathbf{H}_{r_n, l_1} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_1 \partial t_n}.$$

Ниже мы будем использовать формулы для распределений Пальма $\mathbf{H}_y^{(2)}$ второго порядка, определенных условием, что две прямые из реализации процесса $\{g_i\}$ содержат точку $y \in g(\alpha)$. Например, используя формулу Тейлора, получаем

$$(3.11) \quad c_{r_i, h}^{(2)} \Delta_{ii}^2 \mathbf{H}_{r_i}^{(2)} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2},$$

где $c_{r_i, h}^{(2)}$ – постоянная, Δ_{ii}^2 – обычная вторая разность по i . Аналогичная формула существует для $\pi_{i, h}^{(2)}$.

4. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА АМБАРЦУМЯНА

Этот параграф содержит описание конкретного комбинаторного разложения, версии которого были использованы в [2, 4, 13, 32] и [33], а также используются ниже в §§6 и 10. Для полноты, начнем с общего комбинаторного алгоритма, впервые представленного (без доказательства) в [33].

Предположим, что на плоскости задано конечное множество точек $\{P_i\}$ (некоторые тройки точек могут быть коллинеарными). Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j , а через $|\rho_{ij}|$ его длину. Положим $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbb{G} \mid g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $Br\{P_i\}$ минимальное (конечное) кольцо (кольцо Бюффона) подмножеств $\mathbb{G}$, содержащее все множества $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются соседними,

если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре соседей P_i, P_j соответствует прямая

$$g_{ij} = \text{прямая проходящая через } P_i \text{ и } P_j$$

и четыре **локально непересекающихся** подмножества из $\mathbb{G}$:

$$1 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$2 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$3 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка } P_i \text{ лежит в правой, а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

$$4 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

Так как прямая $g \in \mathbb{G}$ ненаправленная, то говоря о левой или правой полуплоскостях, ограниченных прямой $g \in \mathbb{G}$, мы подразумеваем следующее: каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j , если $i < j$. По непрерывности, оно однозначно определяет направление прямых g из окрестности прямой g_{ij} .

Как обычно $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0, в противном случае. Через μ обозначим $\mathbb{M}$ -инвариантную меру в $\mathbb{G}$.

Теорема 1. (Р.В. Амбарцумян [4, 33, 44]). Значение меры $\mu(C)$ для каждого подмножества $C \in Br\{P_i\}$ представимо в виде линейной комбинации расстояний ρ_{ij} между соседними точками P_i и P_j , с целочисленными коэффициентами:

$$(4.1) \quad \mu(C) = \sum_{i < j} c_{ij}(C) |\rho_{ij}|,$$

где сумма $\sum_{i < j}$ берется по всем парам соседних точек из множества $\{P_i\}$. Целые числа c_{ij} вычисляются по формуле:

$$(4.2) \quad c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) + I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) - I_C(\bar{i}, \bar{j}) - I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}).$$

В (4.2)

$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = I_{C \cap 1}(g), I_C(\bar{i}, \bar{j}) = I_{C \cap 2}(g), I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) = I_{C \cap 3}(g), I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) = I_{C \cap 4}(g).$$

Замечание 1. Отметим, что в случае наличия коллинеарных троек в $\{P_i\}$ разложение (4.1) не единственно. Пример различных представлений (4.1) - (4.2) можно найти в статье [49] настоящего выпуска.

Разложение (4.1) - (4.2) было использовано в работе [44] в следующей постановке. Пусть задана система непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$ ($g(\alpha)$ – тестовая прямая направления α). Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, основание которого есть γ_i , а вертикальные стороны прямоугольников $D_1, \dots, D_n$ обозначим через $v_1, \dots, v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$.

Через τ_{ir} , $r = 1, 2, \dots$ обозначим случайные хорды прямоугольника D_i , образованные прямыми из $\{g_i\}$. Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{2n} [v_i] = [v_1] \cap [v_{2n}]$, где $[v] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap v \neq \emptyset\}$. Положим $\chi_j(g) = g \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$. Определим

$$B_{k_1, \dots, k_m} = B_{\bar{k}} = \{g \in \mathbb{G} : \text{точно } k_j \text{ хорды } \tau_{jr} \text{ пересекают } \chi_j(g), j = 1, \dots, n\}$$

и рассмотрим множества

$$\{P_j\} = \text{множество концов хорд } \tau_{ir} \quad \text{и} \quad \{Q_m\} = \text{вершины прямоугольника } R.$$

Нетрудно доказать, что

$$A \cap B_{\bar{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_m\}\}.$$

Следовательно, разложение (4.1) можно записать для инвариантной меры $\mu(C)$ множества $C = A \cap B_{\bar{k}}$. Для каждой реализации $\mathbf{m} = \{g_i\}$, для которой

$$\{P_i\} \cap \{Q_m\} = \emptyset$$

и коллинеарными тройками в $\{P_i\} \cup \{Q_m\}$ могут быть или $\{P_i, P_j, P_k\} \subset g_s \in \mathbf{m}$ или $\{Q_m, Q_j, P_k\}$. Тогда разложение (4.1) - (4.2) имеет вид:

$$(4.3) \quad \mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(\mathbf{m}),$$

где

$$(4.4) \quad \xi_1(\mathbf{m}) = \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_4) + \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_4),$$

$$(4.5) \quad \xi_2(\mathbf{m}) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r \in A} |\tau_{ir}| \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(\tau_{ir}),$$

$$(4.6) \quad \xi_3(\mathbf{m}) = \sum^* |P_i, P_j| \cdot [I_d(P_i, P_j) - I_s(P_i, P_j)] I_A(P_i, P_j) \Delta_{rq}^2 I_{\bar{k}}(P_i, P_j),$$

$$(4.7) \quad \xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{Q_m} \sum_{P_j} |Q_m, P_j| \cdot I_A(Q_m, P_j) [I_d(Q_m, P_j) - I_s(Q_m, P_j)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_m, P_j).$$

Выше мы использовали следующие обозначения:

T - длина горизонтального основания прямоугольника R ; $I_{\bar{k}}(g) = I_{B_{\bar{k}}}(g)$ - индикатор множества $B_{\bar{k}}$; операторы Δ_i и Δ_{ij}^2 были определены в (3.4) и (3.8).

В двойной сумме, определяющей $\xi_2(\mathbf{m})$, $\sum_{r \in A}$ распространяется по всем хордам τ_{ir} , продолжения которых пересекают отрезки v_1 и v_{2n} , вторая сумма распространяется по всем D_i , $i = 1, \dots, n$. Сумма $\sum^*$, определяющая ξ_3 , распространяется

по всем 2-элементным подмножествам $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$, для которых P_i и P_j принадлежат разным прямым из $\{g_i\}$ и лежат на разных вертикальных окнах. Для определения индикаторов I_d и I_s в (4.6), рассмотрим хорды τ_{rl} и τ_{qm} , для которых точки P_i и P_j являются концами. По определению, $I_d(P_i, P_j) = 1$, если хорды τ_{rl} и τ_{qm} лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой, проходящей через точки P_i и P_j ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$. Символ Δ_{rq}^2 относится к прямоугольникам D_r и D_q , на вертикальных сторонах которых лежат точки P_i и P_j .

В (4.7) индикаторы I_d и I_s имеют аналогичный смысл, отрезок, концом которого является точка Q_m , суть v_1 и v_{2n} . Символ Δ_i относится к прямоугольнику D_i , на вертикальной стороне которого лежит точка P_j . Пары точек или отрезков в аргументе индикаторов $I_{\bar{k}}$, I_A , I_d или I_s обозначают соответствующие прямые из $\mathbb{G}$.

5. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В статье [41] изучаются $\mathbf{T}$ -инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$, где случайное множество $\{P_i\}_\alpha$ есть точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым прямая из реализации пересекает тестовую прямую $g(\alpha)$ в точке P_i .

Для заданной системы непересекающих замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$, рассмотрим треугольник, показанный на Рис.1.

Рис. 1

На прямой $g(\alpha + \phi)$ рассмотрим n отрезков $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Длины γ'_i пусть будут t'_i , а пробелы между γ'_i и γ'_{i+1} обозначим через u'_i . Так как при $\phi \rightarrow 0$, $t'_i - t_i = o(\phi)$ и $u'_j - u_j = o(\phi)$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, \dots, n - 1$), имеем

$$(5.1) \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(\bar{t}', \bar{u}', \alpha + \phi) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha}.$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$(5.2) \quad \left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right),$$

$$(5.3) \quad \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right).$$

Лемма 3. (см. [45]).

$$(5.4) \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) - P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right].$$

Имеем разложение

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap R \cup \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap L,$$

где R – событие $\{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ and $L = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$.

Замечание 2. Обозначения R и L имеют смысл возможной кинематической интерпретации углов как скоростей точек, движущихся вдоль прямой $g(\alpha)$. Таким образом, R соответствует движению **вправо**, L – **влево**.

Используя (5.4), (5.5) и

$$(5.6) \quad P \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha + \pi/2) y_i \phi + o(\phi), \quad i = 1, \dots, 2n-1,$$

где y_i – координата основания v_i на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получаем

$$(5.7) \quad [\lambda(\alpha + \pi/2)]^{-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n y_{l_i} \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) + \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) \right] \\ + \sum_{i=1}^n y_{r_i} \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap R \right) + \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap L \right) \right].$$

В (5.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, как и выше l_i – левый, а r_i – правый концы отрезка γ_i . Наконец, $\bar{k}_i = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_n)$.

Заменим вертикальные окна горизонтальными. Очевидно,

$$\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap R \right) = \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \right) d\mathbf{V}_{l_i},$$

где I – индикаторная функция соответствующего события или множества. Применяя Лемму 1 для

$$F(\mathbf{m}, \Psi) = I\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)]$$

и соотношение $[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \cdot |\cot \Psi| = \cot \Psi$, получаем (сравни с [42])

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \cap R \right) \right] = -\lambda(\alpha) \int \left[I\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cdot \cot \Psi \right] d\mathbf{H}_{l_i}.$$

При условии (см. §8 ниже)

а) для каждого направления α , последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{P_i\}_\alpha$.

оно равно

$$-\lambda(\alpha) \cdot \int \left[I\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cdot \cot \Psi \right] d\mathbf{H}_{l_i} = -\lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{l_i} \left[\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \right] \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Стационарность дает нам возможность использования упрощенной записи

$$\int \cot \Psi \mathbf{H}_{l_i} = \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Аналогично, при условии а)

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cap L \right) \right] = \lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \cap L \right) \right] = \lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cap R \right) \right] = -\lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Подставляя эти формулы в (5.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} &= \lambda(\alpha) \sum_{i=2}^n \left\{ y_{l_i} \left[\mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) - \mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + y_{r_i} \left[\mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) - \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i} \right) \right] \right\} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi. \end{aligned}$$

Из (5.1), (5.3) и (5.5) следует

$$(5.8) \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \left\{ \sum_{i=2}^n y_{l_i} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}} \right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{r_i} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} \right] - y_{r_n} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_n} \right\} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Лемма 4. (впервые доказано в [41], см. также [42] and [45]).

$$(5.9) \quad \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}.$$

Доказательство: Существует соотношение [42] между $\lambda(\alpha)$ и плотностью первой моментной меры $f(\varphi)$:

$$\lambda(\alpha) = \int_0^\pi |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi.$$

Дифференцируя, получим

$$\lambda'(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi.$$

Используя $\Psi = \varphi - \alpha - \pi/2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi &= \mathbf{E}_\alpha \cot(\varphi - \alpha + \pi/2) = -\mathbf{E}_\alpha \tan(\varphi - \alpha) \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \tan(\varphi - \alpha) |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \sin(\varphi - \alpha) \operatorname{sign}[\cos(\varphi - \alpha)] f(\varphi) d\varphi \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \left[\int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi \right] = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как $y_{r_i} - y_{l_i} = t_i$ and $y_{r_{i+1}} - y_{r_i} = u_i$, то (5.8) можно переписать в виде

$$(5.10) \quad \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = 0.$$

Первые интегралы этого однородного в частных производных дифференциального уравнения первого порядка суть

$$\lambda(\alpha) t_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda(\alpha) u_j = b_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, мы приходим к заключению:

$$(5.11) \quad p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}),$$

где $q_{\bar{k}}$ суть некоторые функции от $2n - 1$ переменных.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ.
АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для $\mathbf{P} \in \text{TI-2}$, комбинаторное разложение (4.3) выполняется с вероятностью $\mathbf{P} = 1$. Таким образом, мы можем усреднить (4.3) относительно распределения $\mathbf{P}$. Для математического ожидания относительно $\mathbf{P}$ будем использовать обозначение $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$. Величины $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_i$ ($i = 1, \dots, 4$) зависят от параметра l и при $l \rightarrow 0$ их главные члены имеют порядок l^2 (доказывается методом анализа реализаций). Аналогичное утверждение справедливо для $\mu(A \cap B_{\bar{k}})$ из (4.3). Основываясь на этих фактах, в этом параграфе мы выводим дифференциальное тождество для $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$, приравнивая члены, пропорциональные l^2 в правой и левой частях усредненного уравнения (4.3).

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}})$. По теореме Фубини имеем

$$(6.1) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \int_A \mathbf{E}_{\mathbf{P}} I_{\bar{k}}(g) dg = \int_A p_{\bar{k}}(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) dg.$$

Здесь $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(g)$ – направление прямой g (так что при $l \rightarrow 0$ множество значений $\tilde{\alpha}$ стягивается к точке α) и

$$(6.2) \quad p_{\bar{k}}(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} I_{\bar{k}}(g) = \mathbf{P}(g \in B_{\bar{k}}) = p_{\bar{k}}(\bar{\chi}(g), \bar{u}(g), \tilde{\alpha}).$$

Используя (2.1), выделим главный член в (6.1)

$$(6.3) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{1}{T} \cdot l^2 + o(l^2).$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m})$. Имеем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m}) = \sqrt{T^2 + l^2} \left[p_{\bar{k}}\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha + \phi\right) + p_{\bar{k}}\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha - \phi\right) \right] - 2T p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

где $\cos \phi = (1 + l^2/T^2)^{-1/2}$, откуда следует

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m}) &= p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{l^2}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} \frac{t_i}{T} \cdot l^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} \frac{u_i}{T} \cdot l^2 + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{l^2}{T} + o(l^2). \end{aligned}$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_2(\mathbf{m})$. Значение меры m_1 на множестве $[v_1] \cap [v_{2n}]$ равно $f(\alpha) \frac{l^2}{T} + o(l^2)$, следовательно

$$(6.5) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_2(\mathbf{m}) = \frac{2f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2),$$

где $\pi_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right)$.

Анализ $\mathbf{E}_P \xi_3(\mathbf{m})$. Нам понадобится следующая простая лемма интегральной геометрии.

Лемма 5. (см. [45]). Пусть x_q, x_r – одномерные координаты точек P_i и P_j на v_q и v_r соответственно, g – прямая, содержащая x_q и x_r . Тогда

$$\int_{v_q} \int_{v_r} |P_i, P_j| I_A(g) dx_q dx_r = \frac{(y_q - y_r)^2}{T} l^2 + o(l^2).$$

Для $P_1 \in v_q$ и $P_2 \in v_r$ имеем

$$I_d(P_1, P_2) - I_s(P_1, P_2) = S(q, r) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

где $S(q, r) = +1$, если y_q – левый конец, а y_r – правый конец γ_r , и $S(q, r) = -1$ в противном случае; $R = (0, \pi/2)$, $L = (\pi/2, \pi)$. По Лемме 5 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P \xi_3(\mathbf{m}) &= \frac{1}{T} \sum_{q < r} (y_q - y_r)^2 c_{q,r,vv} S(q, r) \left[\Delta_{ij}^2 \mathbf{V}_{q,r} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (R \times R \cup L \times L) \right) \right. \\ (6.6) \quad &\quad \left. - \Delta_{rq}^2 \mathbf{V}_{i,j} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (L \times R \cup R \times L) \right) \right], \end{aligned}$$

где суммирование распространяется по упорядоченным парам концов $\{y_q\}$ интервалов из системы $\bar{\gamma}$. Мы используем краткие обозначения

$$c_{y_q, y_r, vv} = c_{q,r,vv}, \quad \mathbf{V}_{y_q, y_r} = \mathbf{V}_{q,r}.$$

Анализ $\mathbf{E}_P \xi_4(\mathbf{m})$. Пусть

$$\xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{q=1}^{2n} \eta_q(\mathbf{m}),$$

где

$$\eta_q(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^4 \sum_{P_j \in v_q} K(Q_m, P_j),$$

$$K(Q, P) = |Q, P| \cdot I_A(Q, P) [I_d(Q, P) - I_s(Q, P)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q, P),$$

а Δ_i соответствует отрезку γ_i с концами y_q . Рассмотрим события:

$\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ k & \bar{0} \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все остальные вертикальные окна (т.е. окна из $\bar{v}_q$) не имеют пересечений;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\bar{v}_q$ и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\bigcup_{b \neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v_b \neq v_q$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Лемма 6. (см. [23] и [42]). Для $\mathbf{P} \in TI-2$

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 1 & \bar{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 2 & \bar{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup_{b \neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) = 1 - o(l^2).$$

С точностью до случайного слагаемого, математическое ожидание которого есть $o(l^2)$, имеем следующее представление:

$$(6.7) \quad \eta_q(\mathbf{m}) = \eta_{q1}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^4 \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq q} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}),$$

где использованы индикаторные функции I следующих событий:

$$\begin{aligned} \eta_{q1}(\mathbf{m}) &= \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 1 & \bar{0} \end{pmatrix}; \\ \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) &= \sum_{P_1, P_2 \in v_q} K(Q_m, P_j) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 2 & \bar{0} \end{pmatrix}; \\ \eta_{qA}(\mathbf{m}) &= \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A; \quad \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}) = K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\eta_{q1}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m})]$ (see [42]). Используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2f(\alpha)$ (см. [32]), получаем

$$(6.8) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \sum_{q=1}^{2n} (\eta_{q1}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m})) = -4 \frac{f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2).$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m})$ (см. [42]).

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq q} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}) &= -2 \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi_3(\mathbf{m}) - \\ &- \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2), \end{aligned}$$

где

$$\Omega(q, b) = \mathbf{V}_{q,b} \left(\begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \times (R \times R \cup L \times L) \right) - \mathbf{V}_{q,b} \left(\begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \times (L \times R \cup R \times L) \right).$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta_{q2}(\mathbf{m})$ (см. [42]).

$$(6.10) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \sum_{q=1}^{2n} \eta_{q2}(\mathbf{m}) = \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q) l^2 + o(l^2).$$

Приравнивая коэффициенты при l^2 , из (6.3) - (6.6) и (6.9), (6.10) получим

$$(6.11) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{rq}^2 \Omega(i, j) + \Xi,$$

где

$$(6.12) \quad \Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q).$$

7. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ. АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Пусть T - длина горизонтального основания прямоугольника R , $T = \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^{n-1} u_i$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть γ_i , вертикальные стороны прямоугольников $D_1, \dots, D_n$ обозначим через $v_1, \dots, v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$ а сторону прямоугольника D_i параллельную γ_i , будем обозначать через γ'_i . Прямую, содержащую отрезки $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ обозначим через $g'(\alpha)$ (см. Рис. 2). Обозначим через d_i , $i = 1, 2$ диагонали прямоугольника R . Пусть $\bar{d}_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$, где $d_{ij} = d_i \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$. Пробелы на диагонали d_i будем обозначать через $\bar{\delta}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i(n-1)})$.

Рис. 2.

Используя $\mathbf{T}$ -инвариантность, получаем

$$\mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) = \mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}} \right) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha), \quad \bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n).$$

Используя формулу Тейлора, получаем, что предел

$$(7.1) \quad \mathbf{L}_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(\bar{d}_1, \bar{\delta}_1, \alpha + \phi) + p_{\bar{k}}(\bar{d}_2, \bar{\delta}_2, \alpha - \phi) - 2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\phi^2}$$

равен

$$(7.2) \quad \mathbf{L}_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2},$$

где ϕ – угол между $g(\alpha)$ и диагональю d_1 .

Тот же предел можно вычислить используя разложения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{k} \end{pmatrix} &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \bar{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \\ \begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{pmatrix} &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \bar{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' \\ \bar{k} \end{pmatrix} &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ \bar{k} & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ \bar{k} & \bar{0} \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все другие вертикальные окна (т.е. окна из $\bar{v}_q$) не имеют пересечений;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\bar{v}_q$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v \neq v_q$ из множества окон $v_1, \dots, v_{2n}$, которая пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Лемма 7. [45]. Для любого $\mathbf{P} \in \mathcal{PI}\text{-}2$ имеем

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 1 & \bar{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 2 & \bar{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup \begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) = 1 - o(l^2).$$

Так как $\mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_1 & \dots & v_{2n} \\ \bar{k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_1 & \dots & v_{2n} \\ \bar{k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, то из Леммы 7 получаем

$$(7.3) \quad \mathbf{L}_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\phi^2} \left\{ \sum_{q=1}^{2n} \left(\kappa_{q,1} + \kappa_{q,A} + \kappa_{q,2} + \sum_{b \neq q} \kappa_{q,b} \right) \right\},$$

где использованы следующие обозначения

$$\kappa_{q,m} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_q & \bar{v}_q \\ \bar{k} & m & \bar{0} \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_q & \bar{v}_q \\ \bar{k} & m & \bar{0} \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & v_q & \bar{v}_q \\ \bar{k} & m & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2,$$

$$\kappa_{q,A} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{k} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' \\ \bar{k} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A,$$

$$\begin{aligned} \kappa_{q,b} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{d}_i & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right) - \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{\gamma} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right) - \\ - \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{\gamma}' & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right). \end{aligned}$$

По отдельности проанализируем слагаемые $\kappa_{q,1}$, $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$.

Анализ $\kappa_{q,1}$ и $\kappa_{q,A}$.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA})$ имеет порядок l^2 . А именно

$$(7.4) \quad \sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA}) = -2f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2),$$

где $\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right)$.

Анализ $\kappa_{q,b}$. Анализ разбивается на случаи, зависящие от положений точек пересечения $x_q \in v_q$ и $x_b \in v_b$ относительно подразбиений v_q и v_b диагоналями прямоугольника R .

Ниже используем $S(q, b) = +1$, если $y_q = l_i$ (левый конец отрезка γ_i) и $y_b = r_j$ (правый конец отрезка γ_j), и наоборот. В противном случае $S(q, b) = -1$. Также мы будем использовать обозначения для углов $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы), $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы).

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb}$ имеет порядок l^2 . А именно

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb} = \sum_{q < b} (y_q - y_b)^2 c_{q,b,vv} S(q, b) \left[\Delta_{ij}^2 \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \cup \Theta_o \times \Theta_o) \right) \right. \\ \left. - \Delta_{bq}^2 \mathbf{V}_{i,j} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \cup \Theta_a \times \Theta_o) \right) \right] \\ (7.5) \quad - \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(q, b) = \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \cup \Theta_o \times \Theta_o) \right) - \\ - \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \cup \Theta_a \times \Theta_o) \right). \end{aligned}$$

Анализ $\kappa_{q,2}$.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2}$ имеет порядок l^2 . А именно

$$(7.6) \quad \sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2} = \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,uv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q) l^2 + o(l^2).$$

Приравнивая коэффициенты при слагаемых порядка l^2 , из (7.2), (7.4)-(7.6), получаем

$$(7.7) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -2f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,uv} S(i, j) \Delta_{rq}^2 \Omega(i, j) + \Xi,$$

где

$$(7.8) \quad \Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,uv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,uv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q).$$

8. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ

Рассмотрим уравнения (5.7), (7.7) при наличии следующих условий на вероятностное распределение $\mathbf{T}$ -инвариантного $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$:

а) Для каждого направления α , последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{P_i\}_\alpha$ (см. §5).

б) Последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин.

в) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию “достаточного перемешивания”, а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления α и на “типичной” прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Как показано в [41], решая эти два уравнения, при выполнении условий а), б) и в) следует пуассоновость одномерных распределений $p_k(t, \alpha)$.

В работах [42] и [45] исследовались многомерные вероятности $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$. Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [24]), изучение величин $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{P_i\}_\alpha$ или даже $\{g_i\}$.

Используя Лемму 2 для

$$F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) = I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

произведения $c_{i,j,vv} \Omega(i, j)$ в (6.10), (6.11) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получаем

$$(8.1) \quad c_{i,j,vv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \times \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] \right) d\mathbf{H}_{i,j} |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2|.$$

Вместе с элементарным тождеством

$$[I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2| = \cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2,$$

из (8.1) и из факторизационных условий а) и б) вытекает

$$(8.2) \quad c_{i,j,vv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \left[\int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) d\mathbf{H}_{i,j} \right], \\ = \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) d\mathbf{H}_{i,j} =$$

$$(8.3) \quad \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \mathbf{E}_{i,j,hh} (\cot \Psi_1 \cot \Psi_2) = \frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2} \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right),$$

Докажем, что при выполнении условий а) и б) выражение $\Xi = 0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_u} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_\nu} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_u \partial u_\nu} \right] \\ + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_i} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{i-1}} \right],$$

где в двойных суммах, $u = i$, если $q = r_i$ и $u = i - 1$, если $q = l_i$. Аналогично, $v = j$, если $q = r_j$ и $v = j - 1$, если $q = l_j$.

Для любого $i \neq j$, наличие множителя $S(q, b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b = l_j$ и $b = r_j$. Также в двойной сумме, если $i = j$, то y_q и y_b суть концы одного и того же интервала γ_i , поэтому $S(q, b) = S(b, q) = +1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения Ξ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi = 0$.

Остается преобразовать слагаемое

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{r_q}^2 \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \\ = \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{l_i} - y_{r_j})^2 c_{l_i, r_j, hh} \Delta_{l_j}^2 \mathbf{H}_{l_i, r_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (y_{r_i} - y_{l_j})^2 c_{r_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \Big] \\
& - \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{r_i} - y_{r_j})^2 c_{r_i, r_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, r_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (y_{l_i} - y_{l_j})^2 c_{l_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{l_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \right] \\
& + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i=1}^n t_i^2 c_{l_i, r_i, hh} \Delta_{ii}^2 \mathbf{H}_{l_i, r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right).
\end{aligned}$$

Используя (6.7), (6.9)-(6.11) и

$$\begin{aligned}
& -(y_{l_i} - y_{l_j})^2 - (y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{r_i} - y_{l_j})^2 + (y_{l_i} - y_{r_j})^2 = 2 t_i t_j, \\
& -(y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{l_i} - y_{r_j})^2 - (y_{l_i} - y_{l_{j+1}})^2 + (y_{r_i} - y_{l_{j+1}})^2 = -2 t_i u_j, \\
& -(y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{r_i} - y_{l_{j+1}})^2 + (y_{l_{i+1}} - y_{r_j})^2 - (y_{l_{i+1}} - y_{l_{j+1}})^2 = 2 u_i u_j
\end{aligned}$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j \right. \\
(8.4) \quad & \left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условий а), б) формула (7.7) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \\
& + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 \right. \\
(8.5) \quad & \left. + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right].
\end{aligned}$$

УСЛОВИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Теперь дополнительно предположим, что выполняется условие с). Аналитически оно имеет вид

$$\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

и выражение (8.5) сводится к дифференциальному уравнению. Решая это уравнение вместе с начальными условиями

$$p_{\bar{0}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 1 \quad \text{и} \quad p_{\bar{k}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \bar{k} \neq \bar{0},$$

приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса $PI-2$, маркированный точечный процесс $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет условию а). Если для некоторого направления α выполнены условия б) и с), то для того же значения α точечный процесс $\{P_i\}_\alpha$ пуассоновский, т.е.

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(\alpha) t_i]^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(\alpha) t_i}.$$

Доказательство: Используя $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u})$, см. (5.11), находим

$$(8.6) \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i},$$

и

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} &= \lambda''(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] \\ &+ [\lambda'(\alpha)]^2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (8.6) и (8.7) в (8.5) и используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2f(\alpha)$ (см. [32]), получим уравнение для функций $q_{\bar{k}}$:

$$(8.8) \quad [\lambda(\alpha)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] = - \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i q_{\bar{k}}.$$

Это уравнение не содержит производных по α . В терминах производящих функций

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$$

(8.8) запишется в виде

$$(8.9) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \Phi \right].$$

Решим (8.9) для начальных условий

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Для пуассоновского $\{P_i\}_\alpha$ имеем

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \exp \left[\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right],$$

и легко проверить, что это выражение удовлетворяет (8.9). Следовательно, функция

$$\begin{aligned} \exp \left[-\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right] \Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \\ = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

удовлетворяет

$$(8.10) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0$$

и начальным условиям

$$F(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0. Каждое решение уравнения (8.10) при $k > 0$ имеет свойство

$$F(z_1, \dots, z_n; k t_1, \dots, k t_n; k u_1, \dots, k u_{n-1}) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Среди них только $F(\bar{t}, \bar{z}) \equiv 1$ удовлетворяет (8.10). Теорема доказана.

9. ОДНОРОДНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МОЗАИКИ

Метод интегрирования комбинаторных разложений может быть использован для нахождения распределения длины типичного ребра направления α для T -инвариантных случайных мозаик.

Мозаика определяется как разбиение плоскости на непересекающиеся выпуклые ограниченные многоугольники с непустыми внутренностями. Мы будем рассматривать только мозаики, не имеющие узлов типа T . Тогда мозаика полностью определяется множеством его ребер $\{S_i\}$. Случайную мозаику можно определить как случайный процесс ребер, т.е., как процесс отрезков на плоскости с вероятностью 1 являющийся мозаикой (см. [1, 3, 19] и [29]). Мы предполагаем, что математическое ожидание квадрата числа ребер мозаики, пересекающих ограниченное борелевское множество конечно. Следовательно, для случайной мозаики определены такие понятия как вероятность $\mathbf{P}$ и инвариантность относительно группы. Стандартные понятия (см. [21, 23]) первой и второй моментных мер хорошо известные для случайных полей отрезков также применимы к случайным мозаикам ([21, 25] и [32]). Тем не менее мы кратко напомним их.

Отрезок на плоскости определяется тройкой

$$\delta = (g, t, \tau),$$

где g – прямая, на которой лежит отрезок, t – одномерная координата центра отрезка на прямой g , а τ – длина отрезка δ .

Первая моментная мера $\Lambda_1(\cdot)$ процесса ребер $\mathbf{T}$ -инвариантной случайной мозаики есть мера в соответствующем пространстве. Если предположим, что $\Lambda_1(\cdot)$ имеет плотность относительно $d\delta = dg dt d\tau$, то она necessarily имеет следующий вид

$$\lambda f(\tau, \varphi) dg dt d\tau = \lambda f(\tau, \varphi) d\delta,$$

где φ – направление прямой g . Полагаем, что плотность f непрерывна.

Для $\Lambda_2(\cdot)$ полагаем, что

$$\int_{\Delta_1} \Lambda_2(d\delta_1 d\delta_2) = f_1(g_1, g_2) dg_1 dg_2$$

где

$$\Delta_1 = \{(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) : \nu_i \cap \delta_i \neq \emptyset, \text{ с несущими прямыми } g_i \in [\nu_i], i = 1, 2\},$$

ν_1, ν_2 суть два параллельных отрезка длины l и расстоянием t .

Обозначим

$$B_0 = \{g \in \mathbb{G} : R \cap g \text{ не пересекается ни одним ребром мозаики}\} \text{ и } A = [\nu_1] \cap [\nu_2].$$

Для $\mu(B_0 \cap A)$ запишем комбинаторное разложение (4.3) (для $n = 1$), причем все слагаемые остаются неизменными за исключением слагаемого $\xi_2(\mathbf{m})$, который надо заменить на

$$\xi_2(\mathbf{m}) = -2 \sum_i |\chi_i| I_A(\chi_i),$$

где χ_i – хорды прямоугольника R , порожденные ребрами, а множество $\{P_i\}$ состоит из точек пересечения ребер с ∂R .

Вычисления аналогичные тем, что были проделаны в §§6-8, приводят к следующему выражению для

$$P(|\tau| > t, \alpha) = \int_t^\infty f(\tau, \alpha) d\tau$$

т.е. вероятности, что длина типичного ребра случайной мозаики имеющей направление α будет больше, чем t (см. [30]):

$$P(|\tau| > t, \alpha) = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial t^2} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right]$$

$$(9.1) \quad -t \int_0^\pi \int_0^\pi \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} [I_d - I_s] f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2) \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 d\Psi_1 d\Psi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2) \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 d\Psi_1 d\Psi_2 = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Delta_1} \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda_2(d\delta_1 d\delta_2), \end{aligned}$$

$f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2)$ – плотность второй моментной меры маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ на тестовой прямой направления α , $\Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

– условная вероятность события $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ при условии, что $|P_1, P_2| = t$, а марки в точках P_1 и P_2 равны Ψ_1 и Ψ_2 , соответственно, причем $p_0(t, \alpha) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если случайная мозаика и изотропна, то

$$\frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0,$$

и из (9.1) вытекает соотношение найденное в работе [29] (см. также [3] и [21]). В общем случае не проводился анализ уравнения (9.1). Можно только заметить, что распределение длины типичного ребра мозаики в направлении α_0 можно вычислить, используя значения $p_0(t, \alpha)$ только в некоторой окрестности направления α_0 и распределение маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ на тестовой прямой направления α_0 .

10. СТЕРЕОЛОГИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Булевы модели определяются как объединение областей, принадлежащих процессу случайных выпуклых областей, инвариантному относительно группы евклидовых движений плоскости. Процесс выпуклых областей на $\mathbb{R}^2$ можно определить как точечный процесс в пространстве плоских выпуклых областей. Если в этом пространстве задана некоторая мера, то мы можем говорить о пуассоновском процессе выпуклых областей и соответствующей “булевой модели” (см. [33]). Пуассоновские булевы модели принадлежат классу более общих “эргодических булевых” моделей, определенных как объединения выпуклых областей из случайного процесса областей, обладающих определенными свойствами эргодичности (см. [19] и [21]).

Для удобства, объединение выпуклых областей назовем черным множеством, а его дополнение – белым. Результат, полученный в [19, 21], касается случайных чередующихся последовательностей черно-белых маркированных интервалов, индуцированных на тестовых прямых. Марками вновь являются углы пересечения между тестовой прямой и границей двумерной раскраски. Чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой называется рекуррентным, если черные маркированные интервалы независимы, а длины белых интервалов образуют независимую последовательность независимых случайных величин. Подчеркнем асимметричность этого определения. Рекуррентность процесса означает, что белые интервалы независимы от их длин, причем существует возможность, чтобы углы и длины каждого черного маркированного интервала были бы зависимы. Внутри этой структуры получаем и другой случай “принципа независимых углов”: из рекуррентности черных интервалов следует экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала на тестовой прямой. Отметим, что в книге Матерона ([11], стр. 140) также приводятся некоторые условия экспоненциальности белого интервала, однако условия из [21] носят совершенно иной характер.

Раскраски четырехугольников. Получим интегро-геометрический результат, касающийся неслучайных раскрасок ограниченных выпуклых четырехугольников.

Пусть $\mathbf{m}$ – открытое черное множество на плоскости, граница которого есть объединение прямолинейных отрезков. Дополнение к $\mathbf{m}$ – белое. Положим

$$\mathbf{m}_R = \mathbf{m} \cap K_R,$$

где K_R – круг радиуса R с центром в начале координат.

Множество $\mathbf{m}_R$ может состоять из нескольких связных (не обязательно выпуклых) компонент; каждая компонента может иметь белые многоугольные дырки, которые могут быть окружены черными многоугольными островками. Единственное требование на $\mathbf{m}$ состоит в том, что число сторон, составляющих границу множества $\mathbf{m}_R$ конечно для любого R .

Ниже предположим, что на любой тестовой прямой $g \subset \mathbb{R}^2$ одномерная раскраска, индуцированная множеством $\mathbf{m}$ обладает определенными свойствами эргодичности. Так мы предполагаем, что математическое ожидание $f(T)$ типичного белого интервала T на тестовой прямой для любой функции f можно вычислить как предел суммы

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T_n),$$

где T_n – белые интервалы на ограниченном отрезке из g , длина которого стремится к бесконечности.

Очевидно

$$(10.1) \quad \int_{[K_R]} \sum_{n=1}^N f(T_n) dg = \sum_{r < s} \int_{[a_r] \cap [a_s]} I_{A_{rs}}(g) f(T^{(r,s)}) dg.$$

Здесь a_r и a_s суть стороны области $\mathbf{m}_R$, а $T^{(r,s)}$ – длина интервала на g , ограниченного точками из a_r и a_s . Полагаем $I_{A_{rs}}(g) = 1$, если этот интервал полностью белый и нулю в противном случае. Рассмотрим интеграл

$$(10.2) \quad \int_{[a_1] \cap [a_2]} I_A(g) f(T) dg,$$

где $A = A_{12}$, $T = T^{(1,2)}$. Интеграл (10.2) зависит от раскраски минимальной выпуклой оболочки D натянутой на отрезки a_1 и a_2 , т.е. множества $\mathbf{m}_{12} = D \cap \mathbf{m}$. Положим $B = [a_1] \cap [a_2] \cap A$, так что

$$\int_{[a_1] \cap [a_2]} I_{A_{12}}(g) f(T) dg = \int_{[D]} I_B(g) f(T) dg.$$

Результат для четырехугольника имеет следующий вид:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \int_B [f(T) - f'(T)T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = & - \sum_{a \in \partial \mathbf{m}_{12}} |a| f(T) I_{\partial B}(a) - \sum_{Q_i, Q_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) \\ & + \sum_{Q_i, Q_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) - \frac{1}{2} \sum_k \int_{\Phi_k} f'(T) (x_1 - x_2) (x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) I_{\partial B}(T) d\phi \\ & + \sum_{P_i, Q_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) - \sum_{P_i, Q_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) - \sum_{P_i, P_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) \\ & + \sum_{P_i, P_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{[P_i]} f'(T) T^2 \cot \beta I_{\partial B}(T) d\phi, \end{aligned}$$

где $\{P_i\}$ – множество концов отрезков a_1 и a_2 , $\{Q_i\}$ – множество вершин границы $\partial(\mathbf{m})_{12}$, углы α_1 и α_2 лежат в одной полуплоскости относительно T . Область интегрирования Φ_k – множество тех значений ϕ , для которых хорда T из пучка $[Q_k]$ не пересекается с черным множеством. Пара P_i, P_j – типа d (типа s), если a_1 и a_2 лежат в разных (одной и той же) полуплоскостях (полуплоскости) относительно прямой g_{ij} (g_{ij} – прямая, проходящая через точки P_i и P_j). Правило знаков в случае слагаемых $P_i P_j$ такое же как и для слагаемых $Q_i Q_j$. Отметим изменение правила знаков для слагаемых соответствующих парам $P_i Q_j$. Обозначения, использованные в последних слагаемых показаны на Рис. 3.

Рис. 3.**Суммирование по четырехугольникам.**

При вычислении суммы (10.3) мы не выписывали в явной форме слагаемые, вклад которых имеет порядок $o(R^2)$ при $R \rightarrow \infty$. Этим путем мы освобождаемся от "краевых эффектов".

Суммируя по четырехугольникам из многоугольной раскраски в K_R , получаем (при $R \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
 & \int_{[K_R]} \sum_i [f(T_i) - f'(T_i)T_i \cot \alpha_1^{(i)} \cot \alpha_2^{(i)}] dg \\
 &= \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} [f(x_1) + f(x_2) - f(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} x_1 f'(x_1) + \frac{1}{2} x_2 f'(x_2)] dl \\
 &+ \sum_{\text{strings in } K_R} [f(x_1 + \rho) + f(x_2 + \rho) - f(\rho) - f(x_1 + x_2 + \rho)] [I_s - I_d] \rho \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} [f'(x_1 + x_2) (x_1 - x_2) (x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) - \\
 (10.4) \quad &\quad - \sum_{i=1,2} f'(x_i) x_i^2 \cot \beta_i] \kappa dl + o(R^2),
 \end{aligned}$$

где $\partial^0 \mathbf{m}_R = \partial \mathbf{m} \cap K_R$ есть граница с исключением ∂K_R . Заметим, что для справедливости (10.4), нужно предположить, что $\partial \mathbf{m}_R$ не имеет прямолинейных отрезков. Обозначения показаны на Рис. 3.

Эргодические случайные процессы областей.

На этой стадии требуется, чтобы реализации с вероятностью 1 обладали бы необходимыми свойствами на бесконечности (при $R \rightarrow \infty$). В частности, математическое ожидание случайных величин, определенных на случайных касательных прямых или шкивах, можно представить в виде пределов математических

ожиданий, вычисленных относительно распределения маркированной случайной раскраски, индуцированной на прямой. Справедливость такой “интегральной геометрии в малом” можно вывести из принципа ограниченной сходимости (см. [19] и [21]).

При выводе уравнения (10.4) предположили, что можно пренебречь граничными эффектами, т.е. что множество $\mathbf{m}$ обладает следующим свойством (см. [21]):

Свойство 1. Тотальный вклад “лежащих близко” к границе ∂K_R есть $o(R^2)$ при $R \rightarrow \infty$.

Важным вопросом является существуют ли случайные множества $\mathbf{m}$, удовлетворяющие с вероятностью 1 Свойству 1. Возможно простейшим примером таких случайных множеств являются булевы модели, порожденные некоторым случайным процессом выпуклых областей инвариантных относительно группы $\mathbf{M}$.

Анализ показывает, что с вероятностью 1, реализации пуассоновской булевой модели $\mathbf{m}$ обладают также и другими свойствами эргодического типа, из которых мы отметим следующие:

Свойство 2. Главные значения (в обычном смысле анализа) трех функций (скажем, F_1, F_2, F_3) при интегрировании и суммировании знаков в правой части (10.4) при $R \rightarrow \infty$ сходятся к пределу, который не зависит от реализации. Обозначим эти пределы через

$$\mathbf{E}_{dl}F_1, \quad \mathbf{E}_{\kappa dl}F_2, \quad \mathbf{E}_{\rho}F_3$$

подчеркивая, что они могут быть интерпретированы как математические ожидания некоторой случайной величины F_i . Индексы в знаке математического ожидания $\mathbf{E}$ указывают на меры возникающие при определении соответствующей случайной касательной или шкива.

Свойство 3. Пределы

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} |\partial^0 \mathbf{m}_R|, \\ \lambda_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} \sum_{\text{strings in } K_R} \rho_i, \\ \lambda_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} \kappa dl \end{aligned}$$

существуют и независят от реализации. Эти величины, очевидно, могут быть интерпретированы как некоторые конкретные плотности.

Свойство 4. Для последовательности белых маркированных отрезков

$\{(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})\}$ на прямой, пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N F(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}) = \mathbf{E}F(T, \alpha_1, \alpha_2)$$

существуют и не зависят от реализации. Тройка (T, α_1, α_2) определенная этим уравнением называется **типичным белым маркированным отрезком** на тестовой прямой.

Наконец формально, Свойство 4 эквивалентно

$$\int_{[K_R]} \sum_{n=1}^{N(g)} F(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}) = \mathbf{E}F(T, \alpha_1, \alpha_2) |\partial^0 \mathbf{m}_R| + o(R^2)$$

при $R \rightarrow \infty$, где $N(g)$ – число белых отрезков на хорде $g \cap K_R$.

Случайную область, удовлетворяющую Свойствам 1 – 4 будем называть **эргодической**. Для булевой модели $\mathbf{m}$ порожденной эргодическим процессом областей, рассмотрим главный член в (10.4), порядка R^2 . Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[f(T) - f'(T)T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] \\ &= \mathbf{E}_{dl}[f(x_1) + f(x_2) - f(x_1 + x_2) + 1/2f'(x_1) + 1/2f'(x_2)] \\ & - \frac{\lambda_1}{\lambda} \mathbf{E}_{\kappa dl}[f'(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) - \sum_{i=1,2} f'(x_i)x_i^2 \cot \beta_i] \\ (10.5) \quad & - \frac{\lambda_2}{\lambda} \mathbf{E}_{\rho}[f(\rho + x_1 + x_2) + f(\rho) - f(\rho + x_1) - f(\rho + x_2)][I_s - I_d]. \end{aligned}$$

Рекуррентность черных интервалов и экспоненциальность.

Некоторые внутренние свойства процессов черно-белых маркированных интервалов, индуцированных на прямых однородными и изотропными булевыми моделями (и удовлетворяющими всем другим общим условиям приведенным выше) могут быть продемонстрированы преобразуя (10.5).

Определение 2. *Чередующаяся последовательность маркированных черно-белых интервалов $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ и $\{(T_i, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)})\}$, индуцированных на тестовой прямой булевой моделью, называется рекуррентной, если*

- (a) случайные последовательности $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ и $\{T_i\}$ независимы;
- (b) члены последовательности $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ для различных i независимы;
- (c) последовательность $\{T_i\}$ длин белых интервалов есть последовательность независимых случайных величин.

Отметим асимметричность: из свойств (a) и (b) вытекает, что компоненты T , α_1 , α_2 типичного белого маркированного интервала независимы, хотя вполне возможна зависимость в тройке (J, Ψ_1, Ψ_2) , составляющей типичный черный маркированный интервал.

Уравнение (10.5) упрощается в случае рекуррентности маркированного черного интервала. Во-первых,

$$\mathbf{E}[f'(T) T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] = \mathbf{E}[f'(T) T] \mathbf{E} \cot \alpha_1 \mathbf{E} \cot \alpha_2 = 0,$$

так как α_i имеет плотность $h(\alpha) = 1/2 \sin \alpha$. Во-вторых, второе и третье слагаемые равны нулю. Оставшееся слагаемое в правой части (10.5), при условии рекуррентности маркированных черных интервалов принимает вид

$$\mathbf{E}_{dl} f(x_i) = \mathbf{E} f(T), \quad i = 1, 2;$$

$$\mathbf{E}_{dl} f(x_1 + x_2) = \mathbf{E} f(T_1 + T_2),$$

где T_1 и T_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением совпадающим с распределением типичного белого интервала длины T .

Эти упрощения позволяют получить следующий результат. Для функции f , получаем

$$f(x) = \exp(-\lambda x), \quad \text{для некоторого } \lambda > 0.$$

Пусть $y(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа распределения случайной величины T :

$$y(\lambda) = \mathbf{E} \exp(-\lambda T).$$

Тогда уравнение (10.4) сводится к дифференциальному уравнению

$$y(\lambda) = [y(\lambda)]^2 - \lambda \frac{dy(\lambda)}{d\lambda},$$

общим решением которого является

$$y(\lambda) = \frac{1}{1 + C \lambda}.$$

Очевидно, только $C > 0$ имеет смысл. Отсюда следует, что длина типичного белого интервала необходимо экспоненциально распределена.

Теорема 3. (см. [19] и [22].) Пусть черное множество $\mathbf{m}$ является булевой моделью, порожденной с помощью эргодического, однородного и изотропного случайного процесса областей, имеющих ограниченные кривизны, для которых вышеупомянутые математические ожидания существуют. Если индуцированная одномерная черно-белая раскраска на тестовой прямой рекуррентна, то распределение длины типичного белого интервала на тестовой прямой экспоненциальное.

В заключении этого параграфа приведем два примера не пуассоновских многоугольных случайных раскрасок, для которых маркированные черные интервалы на тестовых прямых рекуррентны.

Пример 1. Пусть $\{\pi_i\}$ – случайная мозаика плоскости, порожденная однородным и изотропным пуассоновским процессом прямых. Многоугольники π_i независимо раскрашены или черным (с вероятностью p) или белым цветом (с вероятностью $1 - p$). Здесь очевидно имеем экспоненциальное распределение как для белых так и для черных типичных интервалов на тестовой прямой.

Пример 2. Пусть D – типичный многоугольник в мозаике определенной выше, и пусть $D_1, D_2, \dots$ – последовательность независимых случайных многоугольников с тем же распределением как D . Для заданного пуассоновского процесса $\{M_i\}$ в $\mathbf{M}$ управляемого мерой Хаара, положим

$$X = (\cup M_i D_i)^c.$$

Для этого случайного черного множества $\mathbf{m}$, длина типичного белого интервала не имеет экспоненциального распределения, хотя $\mathbf{m}$ индуцирует рекуррентную черную раскраску на тестовых прямых.

Abstract. The paper contains a review of the main results of Yerevan research group in planar stochastic geometry, in particular the second order random geometrical processes using the methods of integration of combinatorial decompositions and invariant imbedding. For the present review we have chosen the results concerning tomography (or stereology) of random processes of lines, random tessellations (mosaics) and Boolean models (not necessarily Poisson) in the plane. The results are obtained either under the assumption of invariance with respect to the group $\mathbf{T}$ of translations, or the group $\mathbf{M}$ of the Euclidean motions of $\mathbb{R}^2$. In each case the marked point processes $\{P_i, \Psi_i\}$ of intersections induced by the random pattern in question on the test lines are studied, where $\{P_i\}$ is the point process of intersections induced on a test line of direction α , the mark Ψ_i is the angle at which the intersection with the

test line of direction α occurs at point P_i . In the case of random line processes, these approaches lead to differential relations between the joint probabilities for the numbers of intersections that occur in disjoint intervals on a test line having direction α , and the first and the second order Palm probabilities of the similar events. By an analysis of these relations, conditions of Poissonity of n -dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived. In the case of random tessellations the distribution of the length of so-called typical edge of direction α is obtained in terms of the probability distribution of the corresponding $\{P_i, \Psi_i\}$. As regards random $\mathbf{M}$ -invariant Boolean models, the present review includes a description of the method based on summation of Pleijel-type identities for the part of the realization within a finite disc and subsequent calculation of the limit when the radius of the disc tends to infinity. An alternating process of marked intervals on a line is called black-recurrent if the black marked intervals are independent and the lengths of the white intervals constitute an independent sequence of independent random variables. One of the earliest results in the field states that black-recurrence implies an exponential distribution for the length of the typical white interval on a test line.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. V. Ambartzumian, "Random fields of segments and random mosaics on a plane", Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob, III, 369–381 (1972).
- [2] R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. **29**, 25-31 (1973).
- [3] Р. В. Амбарцумян, "О случайных процессах отрезков и случайных мозаиках на плоскости," Теория Вероятностей и Прим. **18** (3), 515-534 (1973).
- [4] R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon-Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb. **27**, 53-74 (1973).
- [5] E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), *Stochastic Geometry* (J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974).
- [6] R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations," in [5], 176-191 (1974).
- [7] R. Davidson, "Construction of line processes: second order properties," in [5], 55-75 (1974).
- [8] R. Davidson, "Line processes, roads and fibers," in [5], 248-251 (1974).
- [9] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line processes," in [5], 76-88 (1974).
- [10] F. Parangelou, "On the Palm probabilities of points and processes of lines," in [5], 114-147 (1974).
- [11] Ж. Матгерон, *Случайные Множества и Интегральная Геометрия*, Москва, Мир, (1976).
- [12] Л. А. Сантало, *Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности*, Москва, Наука, (1983).
- [13] R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob. **9**, 792-823 (1977).
- [14] O. Kallenberg, "A counterexample to R. Davidson's conjecture on line processes," Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **82**, 301-307 (1977).
- [15] R. V. Ambartzumian, "On some topological invariants in integral geometry," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebite **44**, 57-69 (1978).
- [16] В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков," Доклады АН Арм.ССР **68**, 150-154 (1979).
- [17] J. Mecke, "An explicit description of Kallenberg's lattice type point process," Math. Nachr. **89**, 185-195 (1979).
- [18] R. V. Ambartzumian, "A synopsis of combinatorial integral geometry," Adv. in Math. **37** (1), 1-15 (1980).
- [19] Р. В. Амбарцумян (Редактор), *Комбинаторные Принципы в Стохастической Геометрии (Сборник статей)*, Издательство АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
- [20] В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков," в [19], 81-106 (1980).
- [21] R. V. Ambartzumian, "Stereology of random planar segment processes," Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino **39** (2), 147-159 (1981).
- [22] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).
- [23] R. V. Ambartzumian, "Probability distributions in stereology of random geometrical processes," in Recent Trends in Mathematics, Reinhardbrunn (Collection of papers), BSB, V. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig **50**, 5-12 (1982).
- [24] К. Матгес, Дж. Керстан и Й. Мекке, *Бесконечно Делимые Точечные Процессы* Москва, Наука, (1982).
- [25] O. Kallenberg, *Random Measures* (Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983).
- [26] R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), *Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology* (Teubner Texte zur Mathematik) **65** (1984).
- [27] R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, in [26], 14-33 (1984).
- [28] В. К. Оганян, "On Palm distributions of processes of lines in the plane," in [26], 124-132 (1984).
- [29] В. К. Оганян, "О распределении длины типичного ребра случайной мозаики," Известия НАН Армении, серия Математика, **19**, 248-256 (1984).

- [30] V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes," *Acta Appl. Math.*, Holland **9** (1 - 2), 71-81 (1987).
- [31] D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications* (John Wiley, Chichester, 1987).
- [32] R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [33] Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **27** (5), 1-21 (1992).
- [34] В. К. Оганян и А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **28** (5), 67-77 (1993).
- [35] Г. С. Сукиасян, "О порождении мер случайными функциями флагов," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **28** (2), 61-70 (1993).
- [36] Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **29** (4), 3-51 (1994).
- [37] Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **29** (4), 58-74 (1994).
- [38] R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals," *Adv. Appl. Prob. (SGSA)* **27**, 606-626 (1995).
- [39] В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **31** (4), 44-73 (1996).
- [40] R. V. Ambartzumian and V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem," *Israel Math. Journal*. **103** (1), 41-65 (1998).
- [41] Р. В. Амбарцумян, "Инвариантное вложение в стохастической геометрии," *Доклады НАН Армении* **98** (3), 185-196 (1998).
- [42] Р. В. Амбарцумян and V. K. Oganian, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **33** (4), 31-58 (1998).
- [43] А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **33** (4), 59-78 (1998).
- [44] Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии: Обзор," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **34** (6), 2-46 (1999).
- [45] В. К. Оганян, "Анализ однородных случайных процессов прямых на плоскости методом инвариантного вложения," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **34** (6), 59-78 (1999).
- [46] Р. В. Амбарцумян, "Валюации в пространствах интегральной геометрии," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **38** (3), 2-15 (2003).
- [47] Р. В. Амбарцумян, "Исчисление хорд и стохастическая геометрия," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42** (1), 3-27 (2007).
- [48] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "Length distributions of edges in planar stationary and isotropic STIT tessellations," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42** (1), 39-60 (2007).
- [49] Р. В. Амбарцумян, "Интегрирование комбинаторных разложений при наличии коллинеарностей," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **43** (1), 3-28 (2008).

Поступила 18 ноября 2007

Dedicated to Reinhard Lang on the occasion of his 60 th birthday.

A THEOREM OF MICHAEL MÜRMANN REVISITED

H. ZESSIN

*Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany
E-mail: zessin@math.uni-bielefeld.de*

АННОТАЦИЯ. A fundamental theorem of Mürmann [2] characterizing equilibrium distributions of physical clusters is reconsidered. We recover this result by means of the integration by parts formula approach to Gibbs processes due to Nguyen Xuan Xanh and Hans Zessin [4].

Gibbs processes; equilibrium distributions; physical clusters.

1. THE PROBLEM

Let E denote the d - dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$ and $\rho = z\lambda^d$ ($z > 0$) the Lebesgue measure on it. We consider simple point processes P on the space $\mathcal{M}(E)$ of locally finite subsets η of E , for which we write $P \in \mathcal{PM}(E)$ for short. Often we do not write the underlying space E , and as usual η is often considered as a simple point measure on E . We'll write $\mathcal{M}_f$ for finite configurations in $\mathcal{M}$.

We are given a parameter $R > 0$, which enables us to define the notions of an R -cluster or an R -cluster property as follows.

$x \in \mathcal{M}$ is called an R -cluster (Rcl) iff x is void, or a singleton, or if the graph obtained by joining interacting points ('particles') in x is connected. We then write $x \in \mathcal{R}$. Observe that $\mathcal{R}$ is a measurable subset of $\mathcal{M}$ containing 0 and all singletons. We write $\mathcal{R}_f$ for the finite elements in $\mathcal{R}$. The cluster property defined by the parameter R is given by the following measurable subset of $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$:

$$(1.1) \quad ((x, \eta) \in D := D_R \text{ iff } x \in \mathcal{R} \text{ with } \eta(\dot{B}_R(x)) = 0).$$

Here $\dot{B}_R(x) = B_R(x) \setminus x$, where $B_R(x) := \cup_{a \in x} B_R(a)$ with $B_R(a)$ denoting the open ball in E centered in a with radius R . $\dot{B}_R(0) = \emptyset$. We define also the subset D^* in $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ by $((x, \eta) \in D^* \text{ iff } \eta(\dot{B}_R(x)) = 0)$. Thus $\mathbf{1}_D(x, \eta) = \mathbf{1}_{D^*}(x, \eta) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}}$.

Observe that 0 is an Rcl for any $\eta \in \mathcal{M}$. Furthermore, D is translation invariant. We remark that D induces in each configuration $\eta \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ an equivalence relation

by means of

$$(1.2) \quad (a \sim b \text{ iff there exists } x \subseteq \eta \text{ with } a, b \in x \text{ and } (x, \eta) \in D)$$

Thus two elements a, b of η are equivalent iff there exists an ' R -path' in η from a to b . The equivalence classes are the r -clusters in η .

Consider then the random element on $(\mathcal{M}, P)$ defined by

$$(1.3) \quad \gamma : \eta \longrightarrow \sum_{x \subseteq \eta} \mathbf{1}_D(x, \eta) \cdot \delta_x =: \mu.$$

(If $\eta = \emptyset$ then $\mu = \delta_0$.) It is obvious that γ is a point process on $\mathcal{R}$ with distribution Q concentrated on

$$(1.4) \quad \mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{R}) = \{\mu \mid x, y \in \mu, x \neq y \Rightarrow B_{R/2}(x) \cap B_{R/2}(y) = \emptyset\}.$$

γ resp. Q , the image of P under γ , is called the *cluster process belonging to P* . Note that γ is a Borel isomorphism between $\mathcal{M}(E)$ and $\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{R})$ with inverse

$$(1.5) \quad \chi_{(0)} : \mu \longrightarrow \mu_{(0)} := \sum_{x \in \mu} x,$$

and the relation $Q = \gamma P$, the image of P under γ , establishes a 1-1 correspondence between the simple point processes P in E and the cluster processes Q in $\mathcal{R}$, i.e. the point processes $Q \in \mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{R})$.

The *aim of this paper* is the description of cluster processes belonging to Gibbs processes in E interacting by finite range pair potentials. Such processes will be introduced now.

2. THE GIBBSIAN FRAMEWORK

We are given an even and stable pairpotential ϕ on E with finite range $R > 0$. The associated Boltzmann factor is

$$(2.1) \quad f(a, \eta) = \exp(-E(a, \eta)), a \in E, \eta \in \mathcal{M}(E).$$

Here

$$(2.2) \quad E(a, \eta) = \sum_{a \neq b \in \eta} \phi(b - a), a \in E, \eta \in \mathcal{M}(E),$$

is the *energy of a in η* .

Recall that a simple point process P in E is called a *Gibbs process for (ϕ, ρ)* iff P solves the following *integration by parts formula*

$$(\Sigma_{\varrho}^{\phi}) \quad C_P(h) = \int_{\mathcal{M}(E)} \int_E h(a, \eta + \delta_a) \cdot f(a, \eta) \varrho(da) P(d\eta), h \in F_+(E \times \mathcal{M}(E)).$$

Here C_P denotes the Campbell measure of P and $F_+(X)$ the collection of non-negative, measurable functions on the measurable space X . We then write $P \in \mathcal{G}(\phi, \varrho)$. In the sequel we'll write always F_+ instead of $F_+(X)$.

The above definition of a Gibbs process is justified by a theorem of Nguyen X.X., H. Zessin [4], saying that Gibbs processes in the DLR (=Dobrushin/Lanford/Ruelle) sense are equivalently defined by (Σ_ϱ^ϕ) . Iterating the integration by parts formula implies immediately the important

Lemma 1. *If $P \in \mathcal{G}(\phi, \varrho)$, then P satisfies*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} \int_E \Sigma_{x \subset \eta, x \in \mathcal{M}_f} h(x, \eta) P(d\eta) \\ = & \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}_f} h(x, \eta + x) \cdot \exp(-E(x, \eta)) W_\varrho(dx) P(d\eta), h \in F_+. \end{aligned}$$

Here $E(x, \eta)$ is the energy of x given η , defined by

$$E(\delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_n}, \eta) = E(a_1, \eta) + E(a_2, \eta + \delta_{a_1}) + \dots + E(a_n, \eta + \delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_{n-1}}).$$

Moreover

$$W_\varrho(\varphi) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{E^n} \varphi(\delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_n}) \varrho(da_1) \dots \varrho(da_n), \varphi \in F_+.$$

We'll not use the DLR-approach in the sequel. This has been done by Mürmann in [2]. Instead we use systematically the integration by parts approach accompanied by the following equation due to Ruelle which is equivalent to (Σ_ϱ^ϕ) if the underlying point process P is of first order. The simplicity and beauty of this approach to Gibbs processes will be visible in the sequel. Ruelle's equation is

$$(\mathcal{R}) \quad P(\varphi) = \int_{\mathcal{M}_{\Lambda^c}} \int_{\mathcal{M}_\Lambda} \varphi(\xi + \eta) \cdot \exp(-E_\Lambda(\xi + \eta)) W_\varrho(d\xi) P(d\eta), \varphi \in F_+, \Lambda \in \mathcal{B}_0(E).$$

Here $\mathcal{B}_0(E)$ denotes the collection of all bounded Borel sets in E , and $\exp(-E_\Lambda(\xi + \eta)) = E(\xi, \eta)$ if $\xi \subseteq \Lambda, \eta \subseteq \Lambda^c$. (For a proof of the equivalence of $(\mathcal{R})$ and (Σ_ϱ^ϕ) see [4].)

3. MUERMANN'S FIRST THEOREM

If $(x, \eta) \in D$ we say that x is a cluster for η ; if in addition $x \subseteq \eta$ then x is called a cluster in η . We consider the random variable

$$(3.1) \quad cd_D : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \eta \longmapsto \sum_{x \subseteq \eta} \mathbf{1}_D(x, \eta),$$

which counts the R -clusters in η . We use also the notations $D_\infty = \{(x, \eta) \in D \mid |x| = +\infty\}$, $D_f = \{(x, \eta) \in D \mid |x| < +\infty\}$; cd_{D_f} as well as cd_{D_∞} are defined similarly.

Given (ϕ, ρ) as above, let P be from now on a Gibbs process for (ϕ, ρ) , being concentrated on $\mathcal{M}_\infty$, the set of infinite configurations, which satisfies also the condition

$$(3.2) \quad P\{cd_{D_\infty} = 0\} = 1.$$

As a consequence P is concentrated on

$$(3.3) \quad \mathcal{M}_D = \{cd_{D_f} = +\infty, cd_{D_\infty} = 0\}.$$

In this situation γ resp. Q is called the *Mürmann cluster process for P* . The Mürmann cluster process is a point process in $\mathcal{R}_f$ which is concentrated on $\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$.

If one defines *percolation* in this model as the occurrence of an infinite cluster with positive probability, we are working in a situation where percolation does not occur.

We now calculate the Campbell measure of γ resp. Q : Let h be non negative and measurable. By definition

$$C_Q(h) = \int \sum_{x \subseteq \eta, x \in \mathcal{R}_f} \mathbf{1}_{D^*}(x, \eta) \cdot h(x, \gamma(\eta)) P(d\eta).$$

Since P is a Gibbs process for (ϕ, ρ) and a.s. all clusters are finite, this equals

$$\int \int \mathbf{1}_{D^*}(x, \eta + x) \cdot h(x, \gamma(\eta + x)) \cdot w(x, \eta) \cdot u(x) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x) W_\varrho(dx) P(d\eta).$$

Here $u(x)$ denotes the part of the Boltzmann factor which depends only on x and $w(x, \eta)$ the one taking into account only the interaction between x and η . Now observe that $(x, \eta + x) \in D^*$ iff $(x, \eta) \in D^*$. Obviously one then has $\gamma(\eta + x) = \gamma(\eta) + \delta_x$ and $w \equiv 1$. As a consequence we obtain

$$C_Q(h) = \int \int h(x, \gamma(\eta) + \delta_x) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, \gamma(\eta)_{(0)}) \cdot u(x) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x) W_\varrho(dx) P(d\eta).$$

We call the measure

$$M_\varrho = u \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f} W_\varrho$$

appearing here the *Mürmann measure* on $\mathcal{R}_f$. Now all ingredients are developed for the following first basic result of Mürmann ([2]).

Theorem 1. *If ρ and ϕ are given as above and $P \in \mathcal{G}(\phi, \varrho)$ is concentrated on $\mathcal{M}_\infty$ and satisfies condition (3.2), then Q , the associated Mürmann cluster process, is a **Poisson exclusion process** for (D^*, M_ρ) . I.e. Q is a simple point process in $\mathcal{R}_f$, solution of the following integration by parts formula*

$$(\Sigma_\varrho^{D^*}) \quad C_Q(h) = \int_{\mathcal{M}(\mathcal{R}_f)} \int_{\mathcal{R}_f} h(x, \mu + \delta_x) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, \mu_{(0)}) M_\varrho(dx) Q(d\mu), h \in F_+.$$

We see that Q , the Mürmann cluster process, is again a Gibbs process, but now in $\mathcal{R}_f$. On the other hand its interaction structure is much simpler: the clusters are hard cores but do not interact otherwise.

The theorem implies immediately that the intensity of Q is given by

$$\nu_Q(h) = \int_{\mathcal{R}_f} h(x) \cdot P(D_x^*) M_\varrho(dx), h \in F_+.$$

The intensity measure $\nu_Q(h)$ is *Radon* (i.e. locally finite) if this is the case for the Mürmann measure, i.e. if M_ρ satisfies Mürmann's condition

$$(\mathcal{M}) \quad M_\rho \text{ is finite on } \mathcal{B}_0(\mathcal{R}_f).$$

The meaning of this condition is the following: The collection $\mathcal{B}_0(\mathcal{R}_f)$ of bounded Borel sets in $\mathcal{R}_f$ is generated by the collection $\mathcal{F}_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{B}_0(E)$, of events meeting Λ . (For a formal definition see (5.1).) Moreover, γ then is diffuse $P - a.s.$ since ρ and thereby M_ρ is diffuse. The main significance of condition Mürmann's condition $(\mathcal{M})$ is however that it implies also condition (3.2) if the underlying P is of first order. A sufficient condition for Mürmann's condition is that z is small enough. This aspect will be developed below.

4. THE CONVERSE OF MUERMANN'S FIRST THEOREM

Let Q be a Poisson exclusion process for (D_R^*, M_ρ^ϕ) on $\mathcal{R}_f$. Then Q is concentrated on $\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$. Consider the image P of Q under the measurable transformation $\chi_{(0)}$. This mapping dissolves the clusters of μ into its particles.

We calculate the Campbell measure of P . Using that Q is a Poisson exclusion process one has for any given $h \in F_+$,

$$\begin{aligned} C_P(h) &= \int \int h(a, \mu_{(0)}) \mu_{(0)}(da) Q(d\mu) \\ &= \int \int \int h(a, \mu_{(0)}) x(da) \mu(dx) Q(d\mu) \\ &= \int \int \int h(a, (\mu + \delta_x)_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, \mu_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x) \cdot u(x) x(da) W_\varrho(dx) Q(d\mu). \end{aligned}$$

We then study the inner double integral of the last triple integral, which we denote by I_μ , using partial integration with respect to $W_\varrho(dx)$. As a result we obtain

$$I_\mu = \int \int h(a, \mu_{(0)} + x + \delta_a) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x + \delta_a, \mu_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x + \delta_a) \cdot u(x + \delta_a) W_\varrho(dx) \varrho(da).$$

The next step is the analysis of the double integral

$$I_a = \int \int h(a, \mu_{(0)} + x + \delta_a) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x + \delta_a, \mu_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x + \delta_a) \cdot u(x + \delta_a) W_\varrho(dx) Q(d\mu).$$

Here we subdivide the variable x into R -clusters in such a way that they form, together with a , an R -cluster. To be more precise, the following representation is true:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{D^*}(x + \delta_a, \mu_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x + \delta_a) \cdot u(x + \delta_a) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{z_1 \subseteq x} \sum_{z_2 \subseteq x - z_1} \cdots \sum_{z_{k-1} \subseteq x - (z_1 + \cdots + z_{k-2})} \mathbf{1}_{D^*}(a, \mu_{(0)}) \\ & \quad \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{D^*}(z_j, z_1 + \cdots + z_{j-1} + \mu_{(0)}) \cdot \\ & \quad \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x - (z_1 + \cdots + z_{k-1}), z_1 + \cdots + z_{k-1} + \mu_{(0)}) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(z_j) \cdot \mathbf{1}_{\dot{B}(z_j)}(a) \cdot u(z_j) \cdot \exp(-E(a, z_j)) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x - (z_1 + \cdots + z_{k-1})) \\ & \quad \times \mathbf{1}_{\dot{B}(x - (z_1 + \cdots + z_{k-1}))}(a) \cdot u(x - (z_1 + \cdots + z_{k-1})) \cdot \\ & \quad \cdot \exp(-E(a, x - (z_1 + \cdots + z_{k-1}))). \end{aligned}$$

Using again partial integration with respect to W_ϱ , the inner integral of I_a equals

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int \cdots \int h(a, \mu_{(0)} + x + (z_1 + \cdots + z_{k-1}) + \delta_a) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(a, \mu_{(0)}) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{D^*}(z_j, z_1 + \cdots + z_{j-1} + \mu_{(0)}) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, z_1 + \cdots + z_{k-1} + \mu_{(0)}) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(z_j) \cdot \mathbf{1}_{\dot{B}(z_j)}(a) \cdot u(z_j) \cdot \exp(-E(a, z_j)) \\ & \times \mathbf{1}_{\mathcal{R}_f}(x) \cdot \mathbf{1}_{\dot{B}(x)}(a) \cdot u(x) \cdot \exp(-E(a, x)) \\ & \times W_\varrho(dz_1) \cdots W_\varrho(dz_{k-1}) W_\varrho(dx). \end{aligned}$$

Then integrating this with respect to $Q(d\mu)$ and using again that Q is a Poisson exclusion process yields

$$\begin{aligned} I_a &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int \int \cdots \int h(a, \mu_{(0)} + \delta_a) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(a, \mu_{(0)} - (x + z_1 + \cdots + z_{k-1})) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{D^*}(z_j, \mu_{(0)} - (x + z_j + \cdots + z_{k-1})) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, \mu_{(0)} - x) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\dot{B}(z_j)}(a) \cdot \mathbf{1}_{\dot{B}(x)}(a) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \exp(-E(a, z_j)) \cdot \exp(-E(a, x)) \\ & \times \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_{k-1}) \mu(dx) Q(d\mu). \end{aligned}$$

Observe finally that in I_a the sum

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int \cdots \int \mathbf{1}_{D^*}(a, \mu_{(0)} - (x + z_1 + \cdots + z_{k-1})) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{D^*}(z_j, \mu_{(0)} - (x + z_j + \cdots + z_{k-1})) \cdot \mathbf{1}_{D^*}(x, \mu_{(0)} - x) \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\dot{B}(z_j)}(a) \cdot \mathbf{1}_{\dot{B}(x)}(a) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \exp(-E(a, z_j)) \cdot \exp(-E(a, x)) \\ & \times \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_{k-1}) \mu(dx) \end{aligned}$$

equals $\exp(-E(a, \mu_{(0)}))$.

To summarize, we have shown Mürmann's second theorem.

Theorem 2. *Let Q be a Poisson exclusion process for (D_R^*, M_ρ^ϕ) on $\mathcal{R}_f$. Then the image P of Q under the measurable transformation $\chi_{(0)}$ is a Gibbs process in E for (ϕ, ϱ) .*

Summarizing both theorems, we see that the relation $Q = \gamma P$ establishes a 1-1 correspondence between Gibbs processes P in E for (ϕ, ϱ) concentrated on $\mathcal{M}_\infty$ and satisfying condition (3.2), and Poisson exclusion processes for (D_R^*, M_ρ^ϕ) in $\mathcal{R}_f$. Here ϕ is the given even, stable, pair potential of finite range R .

This result is very valuable. It reduces the study of Gibbs processes to the one of Poisson exclusion processes. Moreover, since there is a one-to-one correspondence between these processes, existence, extremality or uniqueness resp. phase transition occurs in one class if and only if this phenomenon occurs in the other one.

5. ABSENCE OF PERCOLATION AND MUERMANN'S CONDITION

Given (ϕ, ϱ) as above, we fix some Gibbs process P in E for ϕ (of finite range R) and ϱ . We assume in addition that P is of first order. In this situation P is then equivalently described by Ruelle's equation. To pose *the problem* we introduce some notations first: For an open $\Lambda \in \mathcal{B}_0(E)$ let $\Lambda(r)$ denote the r -dilatation $r \cdot \Lambda$, $r \geq 1$. Moreover

$$(5.1) \quad \mathcal{F}_\Lambda = \{x \in \mathcal{R} \mid x \cap \Lambda \neq \emptyset\},$$

$$(5.2) \quad \mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c} = \{x \in \mathcal{F}_\Lambda \mid x \cap \Lambda(r)^c \neq \emptyset\},$$

$$(5.3) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}} = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) \mid \mu(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}) \geq 1\}.$$

If Λ' is a bounded Borel set containing $\Lambda(r)$ such that $d(\Lambda(r), (\Lambda')^c) > R$, then it is evident that

$$\begin{aligned}
& P\{ \text{there is a particle in } \Lambda \text{ clustering with infinitely many others} \} \\
& \leq P\{ \text{there is a p. in } \Lambda \text{ which clusters with some p. in } \Lambda' \setminus \Lambda(r), \\
& \quad \text{regardless eventual clustering with some p. outside } \Lambda' \}
\end{aligned}$$

More formally: If $\pi_{\Lambda'} : \eta \longrightarrow \mathbf{1}_{\Lambda'} \cdot \eta$ and $\gamma_{\Lambda'} = \gamma \circ \pi_{\Lambda'}$, then

$$(5.4) \quad P\{\exists x \in \gamma : |x| = +\infty, x \in \mathcal{F}_{\Lambda}\} \leq P\{\gamma_{\Lambda'} \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}}\}.$$

The problem now is to estimate from above the probability on the right hand side (and thereby on the left).

Write $\mathcal{E}$ for the event $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}}$. We first use Ruelle's equation to get

$$P\{\gamma_{\Lambda'} \in \mathcal{E}\} = \int_{\mathcal{M}_{(\Lambda')^c}^{(\cdot)}} \int_{\mathcal{M}_{\Lambda'}^{(\cdot)}} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\gamma(\xi)) \cdot \exp(-E_{\Lambda'}(\xi + \eta)) W_{\varrho}(d\xi) P(d\eta).$$

We then analyze the inner integral $I_{\eta}(\mathcal{E})$ for *any* measurable event $\mathcal{E}$ in $\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$ by means of the following cluster representation:

Lemma 2. For any measurable $\mathcal{E}$ in $\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$ and any $\eta \in \mathcal{M}_{(\Lambda')^c}$

$$(5.5) \quad I_{\eta}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\mu) \cdot \exp(-\mathcal{W}(\mu | \eta)) W_{M_{\varrho_{\Lambda'}}}(d\mu).$$

Here for $\mu = \delta_{z_1} + \dots + \delta_{z_k}$

$$\mathcal{W}(\mu | \eta) = \sum_{j=1}^k \mathcal{W}(z_j | \eta), \text{ where}$$

$$\mathcal{W}(z_j | \eta) = \sum_{a \in z_j} E(a, \eta).$$

Proof. Expressing as above the integrand of $I_{\eta}(\mathcal{E})$ by means of the cluster decomposition of ξ yields

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\gamma(\xi)) \cdot \exp(-E_{\Lambda'}(\xi + \eta)) = \\
& = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{z_1 \subseteq \xi} \sum_{z_2 \subseteq \xi - z_1} \dots \sum_{z_{k-1} \subseteq \xi - (z_1 + \dots + z_{k-2})} \mathbf{1}_{\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)}(\delta_{\xi - (z_1 + \dots + z_{k-1})} + \\
& \quad + \delta_{z_1} + \dots + \delta_{z_{k-1}}) \times \prod_{j=1}^{k-1} u(z_j) \cdot \exp(-\mathcal{W}(z_j | \eta)) \\
& \quad \times u(\xi - (z_1 + \dots + z_{k-1})) \cdot \exp(-\mathcal{W}(\delta_{\xi - (z_1 + \dots + z_{k-1})} | \eta)).
\end{aligned}$$

Applying again partial integration with respect to $W_{\varrho_{\Lambda'}}$ yields the assertion of the lemma.

Before starting the estimation we separate a cluster inside $\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}$ in $I_\eta(\mathcal{E})$, where $\mathcal{E}$ is from now on given by $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}}$, and obtain

$$I_\eta(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)} \frac{1}{\mu(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c})} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\mu) \cdot \exp(-\mathcal{W}(\mu | \eta)) \mu(dx) W_{M_{\varrho_{\Lambda'}}}(d\mu).$$

Again partially integrating yields

$$I_\eta(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)} \frac{1}{\mu(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c})+1} \times \int_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\mu + \delta_x) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)}(\mu + \delta_x) \cdot \exp(-\mathcal{W}(\mu + \delta_x | \eta)) M_{\varrho_{\Lambda'}}(dx) W_{M_{\varrho_{\Lambda'}}}(d\mu).$$

We now *start estimating from above* and use that $(\mu + \delta_x) \in \mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$ implies $\mu \in \mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)$. Moreover

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mu + \delta_x | \eta) &= \mathcal{W}(\mu | \eta) + \mathcal{W}(x | \eta), \\ \text{where } \mathcal{W}(x | \eta) &\geq -B \cdot |x| \text{ by stability of } \phi. \end{aligned}$$

As a consequence one obtains

$$I_\eta(\mathcal{E}) \leq M_{e^{B \cdot \varrho_{\Lambda'}}}(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}) \cdot \int_{\mathcal{M}_f^{(\cdot)}(\mathcal{R}_f)} \exp(-\mathcal{W}(\mu | \eta)) W_{M_{\varrho_{\Lambda'}}}(d\mu).$$

Then dissolving the clusters of μ into its particles, by the lemma above the integral on the right hand side equals

$$\int_{\mathcal{M}_{\Lambda'}} \exp(-E_{\Lambda'}(\xi + \eta)) W_{\varrho}(d\xi).$$

Now integrating the last inequality with respect to $\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{\Lambda'}^{(\cdot) c}} \cdot P$, and using Ruelle's equation implies

$$P\{\gamma_{\Lambda'} \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}}\} \leq M_{e^{B \cdot \varrho_{\Lambda'}}}(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}),$$

so that finally we obtain for any $P \in \mathcal{G}(\phi, \varrho)$ of first order Mürmann's

Main estimate. If Λ' is a bounded Borel set containing $\Lambda(r)$ such that $d(\Lambda(r), (\Lambda')^c) > R$, then

$$P\{ \text{a } p \text{ in } \Lambda \text{ clusters with infinitely many other } p. \} \leq M_{e^{B \cdot \varrho_{\Lambda'}}}(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(r)^c}).$$

This estimate implies then Mürmann's

Main Lemma. If $M_{e^{B \cdot \varrho}}$ is a Radon measure then

$$P\{cd_{D_\infty} \geq 1\} = 0.$$

The proof immediately follows from the following decomposition of $\mathcal{F}_\Lambda$:

$$\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{F}_\Lambda^{\Lambda^c} \cup \mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda^c}^{\Lambda(2)^c} \cup \mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(2)^c}^{\Lambda(3)^c} \cup \dots$$

Here $\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda'}^{\Lambda''}$ is the event meeting Λ and Λ' , but not Λ'' . If $\mathcal{F}_\Lambda$ has finite measure with respect to $M_{e^B, \varrho}$ then for any positive ϵ there exists N such that $M_{e^B, \varrho}(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(N)^c}) < \epsilon$, and thus for any Λ' containing $\Lambda(N)$, which itself contains Λ , one has

$$M_{e^B, \varrho_{\Lambda'}}(\mathcal{F}_{\Lambda, \Lambda(N)^c}) < \epsilon.$$

Combining this with Mürmann's estimate proves the main lemma.

6. CONCLUDING REMARKS

The question remains, under which conditions on (ϕ, ϱ) the Mürmann measure is Radon. The well known answer is that this is the case if z is small enough. To be more complete we give some indications to this question. We use the following simple observation by separating a particle inside Λ : For any bounded Borel set Λ of positive ϱ -measure

$$(6.1) \quad \int_{\mathcal{M}_j^+(E)} \frac{1}{|\eta| + 1} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_j}(\eta + \delta_0) \cdot u(\eta + \delta_0) W_\varrho(d\eta)$$

$$(6.2) \quad \leq \frac{1}{\varrho(\Lambda)} \cdot M_\varrho(\mathcal{F}_\Lambda)$$

$$(6.3) \quad \leq \int_{\mathcal{M}_j^+(E)} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_j}(\eta + \delta_0) \cdot u(\eta + \delta_0) W_\varrho(d\eta).$$

The upper and lower bound in (6.3) and (6.1) are power series in z with the same radius of convergence. As a consequence the radius of convergence of $M_\varrho(\mathcal{F}_\Lambda)$, if considered as a power series, does not depend on Λ and coincides with the one of $W_\varrho \star \delta_0(u \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_j})$. Here $\star$ denotes convolution.

Thus it remains to investigate the power series $W_\varrho \star \delta_0(u \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_j})$. Here we use the observation in [2] that $\mathbf{1}_{\mathcal{R}_j}(\eta + \delta_0) \leq |g|(\eta + \delta_0)$, where g denotes the *Ursell* function belonging to the hard-core potential defined by R . If combined with the stability of the potential one obtains

$$W_\varrho \star \delta_0(u \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_j}) \leq e^B \cdot W_{e^B \varrho} \star \delta_0(|g|).$$

On the other hand one can find in Ruelle's book [5] that the integral on the right hand side of this inequality is finite if z is small enough. This is one of Ruelle's important contributions and follows by means of the method of strong cluster estimates.

7. APPENDIX: THE POISSON CASE

We consider now the case when the underlying process is a Poisson process with an intensity of the following form: $\sigma = \rho \otimes \tau$, where ρ is given as above by the Lebesgue measure $z\lambda^d(z > 0)$ and τ is a probability on $]0, +\infty[$. The corresponding Poisson process in $X = E \times]0, +\infty[$ is then concentrated on the following collection of configurations:

$$(7.1) \quad \mathcal{M}_{\zeta} := \{\nu = \sum_{a \in \eta} \delta_{(a, r_a)} \mid \eta \in \mathcal{M}(E), r_a > 0\}.$$

The definition of the corresponding *clusters* and *cluster property* is as follows: We call the elements $x = (a, r)$ particles and represent them geometrically as open balls $b(x) = B_r(a)$. Two particles x, x' are said to interact if $b(x) \cap b(x') \neq \emptyset$. Then $z \in \mathcal{M}_{\zeta}$ is called a *cluster* iff the graph obtained by joining interacting particles is connected. Denote by $\mathcal{C}$ the collection of all such clusters and $\mathcal{C}_f$ the one of finite clusters. $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}_f$ are measurable subsets of $\mathcal{M}_{\zeta}$.

The *cluster property* defined by R is the measurable subset $D = D_R$ in $\mathcal{M}_{\zeta} \times \mathcal{M}_{\zeta}$ defined by

$$(z, \nu) \in D \text{ iff} \\ z \in \mathcal{C} \text{ such that the particles in } \nu \text{ with centers outside the support of } z \\ \text{do not interact with particles from } z.$$

Thus one cannot add a particle to z from η to enlarge the cluster z . Consider now the point process on $(\mathcal{M}(E), P_{\sigma})$, defined by

$$\gamma : \nu \longmapsto \kappa := \sum_{z \subseteq \nu} \mathbf{1}_D(z, \nu) \cdot \delta_z.$$

It has its values in

$$\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{C}) := \{\kappa \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid z, z' \in \kappa, z \neq z' \Rightarrow B(z) \cap B(z') = \emptyset\}.$$

Here $B(z) = \cup_{x \in z} b(x)$. We denote its distribution by Q_{σ} . As above γ is a Borel isomorphism between $\mathcal{M}_{\zeta}$ and $\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{C})$ with inverse

$$\chi_{(0)} : \kappa \longmapsto \kappa_{(0)} := \sum_{z \in \kappa} z;$$

and the relation $Q = \gamma P$ establishes a 1-1 correspondence between $\mathcal{P}\mathcal{M}_{\zeta}$ and $\mathcal{P}\mathcal{M}^{(\cdot)}(\mathcal{C})$.

The problem is to describe Q_{σ} . The following result is also due to Mürmann [3]. Exactly the same reasoning as in the Gibbsian case yields the

Theorem 3. *Given (σ, R) as above, the relation $Q = \gamma P$ establishes a 1-1 correspondence between P_σ and the uniquely determined Poisson exclusion process Q_σ on C_f for (D^*, M_σ) if P_σ has only finite clusters a.s. . Here M_σ is the measure $\mathbf{1}_{C_f} \cdot W_\sigma$.*

This result is also important for the following reasons: It implies the existence and uniqueness of Poisson cluster exclusion processes in the situation considered here if there is no percolation.

The question of absence of percolation has been studied in a recent paper of Gouéré [1]. The author proves that finiteness of $\int_0^\infty r^d \nu(dr)$ is equivalent to the existence of some strictly positive z_0 such that for all z strictly smaller than z_0 percolation does not take place.

Acknowledgement. I am grateful to Reinhard Lang for being a constant source of inspiration over the years.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-B. Gouéré, Existence of subcritical regimes in the Poisson Boolean model of continuum percolation. Preprint (2006).
- [2] M. G. Mürmann, "Equilibrium distributions of physical clusters," *Comm. Math. Phys.* **45**, 233-246 (1975).
- [3] M. G. Mürmann, "Poisson point processes with exclusion," *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **43**, 23-37 (1978).
- [4] X. X. Nguyen and H. Zessin, "Integral and differential characterizations of the Gibbs process," *Math. Nachr.* **88**, 105-115 (1979).
- [5] D. Ruelle, *Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1969).

Поступила 18 октября 2007

Dedicated to Reinhard Lang on the occasion of his 60 th birthday.

POINT PROCESSES IN GENERAL POSITION

H. ZESSIN

*Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany
E-mail: zessin@math.uni-bielefeld.de*

АННОТАЦИЯ. The aim of this note is to introduce for point processes in $\mathbb{R}^d$ the notions *general position* and *reinforced general position*, and to characterize these processes. As a consequence we show that Poisson processes P_ρ with an infinite intensity measures ρ are in general position iff ρ is diffuse in the sense that any affine subspace of dimension $d - 1$ is a ρ -nullset. Moreover, P_ρ is in reinforced general position iff in addition any $(d - 1)$ -sphere is a ρ -nullset.

Point processes; general positions; physical clusters.

1. INTRODUCTION

The starting point of this note is Krickeberg's characterization of simple point processes within the class of point processes in terms of their moment measures. (See [1], theorem 3, corollary 2): If P is a point process in a basic phase space X of second order, then P is simple iff

$$(1_{D_2} \cdot \nu_P^2) \circ \pi^{-1} = \nu_P^1.$$

Here $\nu_P^k, k = 1, 2$, denote the first and second moment measures of P, D_2 the diagonal of X^2 and $\pi : D_2 \rightarrow X, (x, x) \mapsto x$, the projection. If P is a Poisson point process P_ρ with intensity measure ρ then P_ρ is simple iff ρ is diffuse.

The aim here is to strengthen this result. We are looking for characterizations of point processes which are in general or even reinforced general position. These notions will be made precise below.

We analyse this problem in full generality as Krickeberg did it in the special case. But instead using moment measures we shall work with reduced moment measures.

The motivation and point of departure is given by the observation that in the case of Poisson processes these results are always used implicitly in the domain of stochastic geometry, in particular for the construction of random tessellations, without mathematical justification. Exceptions are Krickeberg's work [1] as well as Møller's

lectures [3] where already valuable indications with respect to this problem can be found.

Acknowledgement : I am grateful to all students of my lecture „Stochastic Geometry“ for several useful remarks.

2. BASIC CONCEPTS

The starting point is a measurable space $(X, \mathcal{B})$ in which configurations of points will be realized, which are locally finite in the sense that only a finite number of points hit each member of a class $\mathcal{B}_0$ of "bounded" sets. Following Ripley [5] we assume that $\mathcal{B}$ contains all singleton subsets and that $\mathcal{B}_0$ is a nonempty subset of $\mathcal{B}$ which is hereditary, i.e.

$$(B \in \mathcal{B}_0, C \in B \cap \mathcal{B} \Rightarrow C \in \mathcal{B}_0),$$

closed under finite unions and σ -bounded. The latter means that there exists an increasing sequence $X_1, X_2, \dots$ in $\mathcal{B}_0$ covering X . We assume also that $(X, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$ is countably separated, i. e. there exists a countable π -system $\tilde{\mathcal{B}}_0$ in $\mathcal{B}_0$ separating the points of X . Such spaces $(X, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$ are called phase spaces here. Examples of phase spaces are all separable metric spaces where $\mathcal{B}$ is the Borel σ -field and $\mathcal{B}_0$ the collection of all metrically bounded Borel sets.

Given a phase space $(X, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$, we then consider random locally finite measures μ on X , which are defined as follows: Let $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X)$ denote the set of all measures μ on $(X, \mathcal{B})$ which are locally finite, i. e. finite on $\mathcal{B}_0$. Note that such measures are σ -finite because X is σ -bounded. $\mathcal{M}$ is endowed with the σ -field $\mathcal{F}$, generated by all variables

$$\zeta_B : \mu \mapsto \mu(B), B \in \mathcal{B}_0.$$

Important measurable subsets are

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\circ &= \{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu \text{ diffuse}\}, \\ \mathcal{M}^\bullet &= \{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu(B) \in \mathbb{N}_0 \forall B \in \mathcal{B}_0\} \text{ (point measures)}, \\ \mathcal{M}^\cdot &= \{\mu \in \mathcal{M}^\bullet \mid \mu(\{x\}) \leq 1 \forall x \in X\} \text{ (simple point measures)}. \end{aligned}$$

The traces of $\mathcal{F}$ in these spaces are denoted by $\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{F}^\cdot$. Elements $\mu \in \mathcal{M}^\cdot$ are often identified with locally finite subsets of X .

A random measure in X is a probability measure P on $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, write $P \in \mathcal{PM}$ for short. Probabilities P on $(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$ resp. $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{F}^\cdot)$ are called point processes resp. simple point processes in X , and we write $P \in \mathcal{PM}^\bullet$ resp. $P \in \mathcal{PM}^\cdot$.

Given $\mu \in \mathcal{M}$, $k \geq 1$, μ^k denotes the k -th power of μ . If $\mu \in \mathcal{M}^\circ$, the reduced k -th power of μ is the measure on X^k defined by

$$\dot{\mu}^k(f) = \int_{X^k} \mu(dx_1)(\mu - \delta_{x_1})(dx_2) \dots (\mu - \delta_{x_1} - \dots - \delta_{x_{k-1}})(dx_k) f(x_1, \dots, x_k)$$

Here $f \in \mathcal{H}_+(X^k)$, the space of all non negative measurable functions on X^k .

Note that $\mu \mapsto \mu^k(f)$ and $\mu \mapsto \dot{\mu}^k(f)$ are measurable. If $\mu \in \mathcal{M}$ then $k! \dot{\mu}^k$ counts the subsets of μ of cardinality k . Given $P \in \mathcal{PM}^\circ$ the following versions of the Campbell measure of order k are well defined:

$$C_P^k(h) = \int_{\mathcal{M}^\circ} \int_{X^k} h(x_1, \dots, x_k; \mu) \mu^k(dx_1, \dots, dx_k) P(d\mu),$$

$$\dot{C}_P^k(h) = \int_{\mathcal{M}^\circ} \int_{X^k} h(x_1, \dots, x_k; \mu) \dot{\mu}^k(dx_1, \dots, dx_k) P(d\mu).$$

Here $h \in \mathcal{H}_+(X^k \times \mathcal{M}^\circ)$. If $f \in \mathcal{H}_+(X^k)$ we write

$$\nu_P^k(f) = C_P^k(f \otimes 1) \quad \text{and} \quad \dot{\nu}_P^k(f) = \dot{C}_P^k(f \otimes 1).$$

ν_P^k is called the k -th moment measure and $\dot{\nu}_P^k$ the reduced k -th moment measure.

3. KRICKEBERG'S CRITERIUM

To prepare later refinements we first derive Krickeberg's characterization of simple point processes in X by an argument which we shall use later.

Observe first that simple point measures are characterized within the class of point measures as follows: $\mu \in \mathcal{M}^\circ$ is simple, i. e. $\mu \in \mathcal{M}^\circ$ iff $\dot{\mu}^2(D_2) = 0$. Here $D_2 = \{(x, x) \in X^2 | x \in X\}$ denotes the diagonal in X^2 . Since $D_2 \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$ and $\mu \mapsto \dot{\mu}^2(D_2)$ is measurable, so is $\mathcal{M}^\circ$. One immediately obtains

Theorem 1. *Let $P \in \mathcal{PM}^\circ$. Then the following assertions are equivalent:*

$$(3.1) \quad P \in \mathcal{PM}^\circ, \text{ i. e. } P \text{ is simple};$$

$$(3.2) \quad \dot{\nu}_P^2(D_2) = 0.$$

This result contains Krickeberg's criterium in [1] stated at the beginning.

Corollary 1. *Let $\rho \in \mathcal{M}$. Then the following assertions are equivalent:*

$$(3.3) \quad P_\rho \in \mathcal{PM}^\circ;$$

$$(3.4) \quad \rho^2(D_2) = 0;$$

$$(3.5) \quad \rho \in \mathcal{M}^\circ.$$

Here the equivalence (3.3) $\iff$ (3.4) is due to the fact that $\nu_{P_\rho}^2 = \rho^2$, which in turn follows immediately from Mecke's characterization of the Poisson process by means of its Campbell measure. (See [2].) The equivalence (3.4) $\iff$ (3.5) follows directly from

$$\rho^2(D_2) = \int \rho(dx) \rho(\{x\}).$$

If $X = \mathbb{R}^d$ and ρ the Lebesgue measure on X then $P_\rho \in \mathcal{PM}$. Recall that in general $P_\rho \in \mathcal{PM}$.

4. POINT PROCESSES IN GENERAL POSITION

We now assume that $(X, \mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$ is a linear phase space. This means that X has the structure of a vector space of dimension d such that its scalar multiplication and addition are measurable operations. Our main example is $X = \mathbb{R}^d$.

The aim is to characterize (within $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{M} \cap \{\zeta_X = +\infty\}$) those configurations which are in general position. Here $\mu \in \mathcal{M}$ is **in general position**, we then write $\mu \in \mathcal{M}_{gp}$, iff

$$(4.1) \quad (\nu \leq \mu, 2 \leq |\nu| \leq d+1 \Rightarrow \nu \text{ affinely independent})$$

Here $|\nu| = \nu(X)$; $\nu \leq \mu$ means that ν is a non-void subconfiguration of μ . Finally, $\nu \in \mathcal{M}_f$ is called **affinely independent**, write ν **ai**, iff $\nu \in \mathcal{M}$, and if any element $x \in \nu$ is not contained in $\text{aff}(\nu - \delta_x)$, the linear variety in X generated by $\nu - \delta_x$. By definition $\mathcal{M}_{gp}$ is a subset of $\mathcal{M}$.

ν is called **affinely dependent** (**ad**) otherwise. Any singleton is affinely independent; and $\delta_x + \delta_y$ is affinely dependent iff $x = y$. If ν is **ad** then so is $\nu + \delta_x$ for any $x \in X$; thus any non-void subconfiguration of an **ai** ν is **ai**.

We now give an equivalent description of configurations in general position: Let

$$D_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k} \text{ ad}\} \quad 2 \leq k \leq d+1.$$

D_k is a measurable subset of X^k . The following result is the main lemma of this note.

Lemma 1. *If $\mu \in \mathcal{M}_\infty$, the following assertions are equivalent:*

$$(4.1) \quad \mu \in \mathcal{M}_{gp}, \text{ i.e. } \mu \text{ is in general position};$$

$$(4.2) \quad \mu^k(D_k) = 0 \text{ for } 2 \leq k \leq d+1;$$

$$(4.3) \quad \mu^{d+1}(D_{d+1}) = 0.$$

Proof The implications (4.1) $\Rightarrow$ (4.2) $\Rightarrow$ (4.3) are obvious.

ad (4.3) $\Rightarrow$ (4.2): Observe first that

$$(\alpha) \dot{\mu}^{d+1}(D_{d+1}) = \int_{X^d} \dot{\mu}^d(dx_1, \dots, dx_d) \int_X (\mu - \delta_{x_1} - \dots - \delta_{x_d})(dx) \mathbf{1}_{D_{d+1}(x_1, \dots, x_d)}(x),$$

where $D_{d+1}(x_1, \dots, x_d) = \{x \in X \mid \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_d} + \delta_x \mathbf{ad}\}$.

But

$$D_{d+1}(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} \text{aff}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_d}) & , \text{ if } (x_1, \dots, x_d) \notin D_d \\ X & , \text{ else.} \end{cases}$$

Therefore under assumption (4.3) one obtains

$$(\beta) \int_{D_d} \dot{\mu}^d(dx_1, \dots, dx_d) (\mu - \delta_{x_1} - \dots - \delta_{x_d})(X) = 0.$$

Since the integrand is $\equiv +\infty$, one has $\dot{\mu}^d(D_d) = 0$. Iterating this argument yields (4.2).

ad (4.2) $\Rightarrow$ (4.1): Under (4.2) we have $\dot{\mu}^2(D_2) = 0$, which is equivalent to μ being simple. Then it is obvious that (4.2) implies (4.1).

A direct consequence is the measurability of $\mathcal{M}_{gp}$ because all D_k are measurable and also $\mu \mapsto \dot{\mu}^k(D_k)$. Moreover one immediately has the

Theorem 2. *If $P \in \mathcal{PM}_\infty^\cdot$ then the following assertions are equivalent:*

$$(4.4) \quad P \in \mathcal{PM}_{gp}, \text{ i.e. } P \text{ is in general position};$$

$$(4.5) \quad \dot{\nu}_P^k(D_k) = 0 \text{ for } 2 \leq k \leq d+1;$$

$$(4.6) \quad \dot{\nu}_P^{d+1}(D_{d+1}) = 0.$$

We remark here that a necessary condition for a point process to be concentrated on $\mathcal{M}_\infty^\cdot$ is that ν_P^1 is an infinite measure. If $\rho \in \mathcal{M}$ then $P_\rho \in \mathcal{PM}_\infty^\cdot$ iff ρ is infinite.

Corollary 2. *Let $\rho \in \mathcal{M}$ be infinite. Then the following assertions are equivalent:*

$$(4.7) \quad P_\rho \in \mathcal{PM}_{gp}, \text{ i.e. } P_\rho \text{ is in general position};$$

$$(4.8) \quad \rho^k(D_k) = 0 \text{ for all } 2 \leq k \leq d+1;$$

$$(4.9) \quad \rho^{d+1}(D_{d+1}) = 0;$$

$$(4.10) \quad \text{any affine subspace of } X \text{ of dimension } d-1 \text{ is a } \rho\text{-null set.}$$

Here (4.7) $\Leftrightarrow$ (4.8) $\Leftrightarrow$ (4.9) follows from the theorem because $\dot{\nu}_P^k = \rho^k$ by Mecke's theorem.

ad (4.10) $\Rightarrow$ (4.8): Observe first that for $2 \leq k \leq d+1$

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \rho^{k+1}(D_{k+1}) &= \int_{D_k} \rho^k(dx_1, \dots, dx_k) \rho(X) + \\ &+ \int_{D_k^c} \rho^k(dx_1, \dots, dx_k) \rho(\text{aff}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k})) \end{aligned}$$

where $D_1 = \emptyset$.

Under assumption (4.10) the second integral on the right hand side always vanishes. On the other hand $\rho(X) = +\infty$, and an induction starting with $k = 1$ yields (4.8).

ad (4.8) $\Rightarrow$ (4.10): Assumption (4.10) combined with (α) yields for $k = d$

$$(\beta) \quad \rho^{d+1}(D_{d+1}) = \int_{D_d^c} \rho^d(dx_1, \dots, dx_d) \rho(\text{aff}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_d})),$$

because D_d is a ρ^d -null set.

This implies (4.10) by the following argument: Suppose that A is an affine subspace of X of dimension $d - 1$. Then (β) yields

$$0 = \rho^{d+1}(D_{d+1}) \geq \int_{A^d \cap D_d^c} \rho^d(dx_1, \dots, dx_d) \rho(\text{aff}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_d})).$$

But $((x_1, \dots, x_d) \in A^d \cap D_d^c \Rightarrow \text{aff}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_d}) = A)$, so that

$$0 = \rho^{d+1}(D_{d+1}) \geq \rho(A)^{d+1}.$$

This implies $0 = \rho(A)$.

Condition (4.10) is a strong version of ρ being diffuse. As a consequence, the Poisson process P_ρ in $\mathbb{R}^d$ with intensity measure $\rho = z \cdot \lambda^d, z > 0$, is in general position.

5. POINT PROCESSES IN REINFORCED GENERAL POSITION

The aim now is to describe within the class of point processes in general position those whose configurations are non circular in the sense that subconfigurations of cardinality $n + 1$ between 1 and $d + 2$ are not situated on an $(n - 1)$ -sphere.

We therefore assume now that X is equipped with an inner product. However there is no essential loss of generality in working only with $X = \mathbb{R}^d$, which we shall do now. A configuration $\mu \in \mathcal{M}_{gp}$ is called **in reinforced general position**, write then $\mu \in \mathcal{M}_{rgp}$, iff

$$(5.1.) \quad (\nu \subseteq \mu, 3 \leq |\nu| \leq d + 2 \Rightarrow \nu \text{ non circular}).$$

Here $\nu \in \mathcal{M}_f$ is called **non circular (nc)** iff $\nu \in \mathcal{M}_{gp}$, and if any element $x \in \nu$ is not contained in $sph(\nu - \delta_x)$, the circum sphere generated by the **ai** subconfiguration $\nu - \delta_x$ in $\text{aff}(\nu - \delta_x)$. ν is called **circular (c)** otherwise.

Any singleton is **nc**; any $\delta_x + \delta_y, x \neq y$, also, and any $\delta_x + \delta_y + \delta_z$ **ai** is **nc**. All $\nu \in \mathcal{M}_f$ which are not in general position are **c**. If ν is in general position, then ν is circular if there exists $x \in \nu$ such that $x \in sph(\nu - x)$.

We now proceed in complete analogy to the case of processes in general position. Let

$$S_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k} \text{ is } \mathbf{c}\}, \quad 3 \leq k \leq d+2.$$

This is a measurable subset of X^k .

Lemma 2. *Let $\mu \in \mathcal{PM}_{gp} \cap \mathcal{M}_\infty$. Then the following assertions are equivalent:*

$$(5.1) \quad \mu \text{ is in reinforced general position, i.e. } \mu \in \mathcal{M}_{rgp};$$

$$(5.2) \quad \dot{\mu}^k(S_k) = 0 \text{ for any } 3 \leq k \leq d+2;$$

$$(5.3) \quad \dot{\mu}^{d+2}(S_{d+2}) = 0.$$

The proof uses the same ideas as the one of lemma 1 (the main lemma) and will not be repeated here. Again lemma 2 immediately implies measurability of $\mathcal{M}_{rgp}$, and one has

Theorem 3. *If $P \in \mathcal{PM}_{gp} \cap \mathcal{M}_\infty$, then the following assertions are equivalent:*

$$(5.4) \quad P \text{ is in reinforced general position, i.e. } P \in \mathcal{PM}_{rgp};$$

$$(5.5) \quad \dot{\nu}_P^k(S_k) = 0 \text{ for all } 3 \leq k \leq d+2;$$

$$(5.6) \quad \dot{\nu}_P^{d+2}(S_{d+2}) = 0.$$

If specialized to Poisson processes we get in the same way as above

Corollary 3. *Let $\rho \in \mathcal{M}$ be infinite such that any affine subspace of dimension $d-1$ is a ρ -null set. Then P_ρ is in reinforced general position iff any $(d-1)$ -sphere in X is a ρ -null set.*

If ρ is the Lebesgue measure on X , then P_ρ is in reinforced general position.

6. APPLICATIONS TO GIBBSIAN POINT PROCESSES

Given $\rho \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, P_ρ is the unique solution of the equation

$$\text{(Mecke)} \quad C'_P = \rho \otimes P, \quad P \in \mathcal{M}^+(X).$$

Here C'_P denotes the reduced Campbell measure.

We call a point process P Gibbs for ρ if and only if

$$(\Sigma_\rho) \quad C'_P \ll \rho \otimes P$$

If in (Σ_ρ) the density V is given in addition to ρ then P is called a Gibbs process for ρ and V , and we write $P \in \mathcal{G}(\rho, V)$. V is called the Boltzmannfactor. If V has the form $\exp(-\beta \cdot E^\phi)$ for some β strictly positive and some potential ϕ then P satisfies

(Σ_ρ) iff P is a Gibbs state for (ϕ, ρ) in the sense of Dobrushin/Lanford/Ruelle. Here $E^\phi(x, \mu)$ denotes the so-called energy of x in μ . It is then easy to see that

$$\nu_P^k(f) = \int_{X^k} f(x) \int_{\mathcal{M}^k} \exp(-\beta \cdot E^\phi(x, \mu)) P(d\mu) \rho^k(dx),$$

$f \geq 0$ and measurable. For the details we refer to [4]. Thus we get the following

Corollary 4. If ρ is infinite such that any affine subspace of dimension $d - 1$ is a ρ -nullset and any $(d - 1)$ -sphere is a ρ -nullset then any $P \in \mathcal{G}(\rho, V)$ is in reinforced general position.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Krickeberg, "Moments of point processes," E. F. Harding and D. G. Kendall, *Stochastic Geometry* (Wiley, 1974).
- [2] J. Mecke, "Stationäre Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen," *Z. W-Theorie verw. Geb.* **9**, 36-58 (1967).
- [3] J. Møller, "Lectures on random Voronoi tessellations," *Lecture notes in statistics* **87**, (Springer, 1994).
- [4] X. X. Nguyen and H. Zessin, "Integral and differential characterizations of the Gibbs process," *Math. Nachr.* **88**, 105-115 (1979).
- [5] B. D. Ripley, "Locally finite random sets: foundations for point process theory," *The Annals of Probability* **4**, 983-994 (1976).

Поступила 18 октября 2007

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 43, номер 1, 2008

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ НОМЕР 8

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие Редактора Серии	4
Р. В. АМБАРЦУМЯН, Интегрирование комбинаторных разложений при наличии коллинеарностей	5
В. К. ОГАНЯН, Комбинаторные принципы в стохастической геометрии на плоскости: Обзор	30
Г. ЦЕССИН, О теореме Микаела Мурмана	69
Г. ЦЕССИН, Точечные процессы в общей позиции	81

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 43, No. 1, 2008

NUMBER 8 OF THE SERIES
INTEGRAL AND STOCHASTIC GEOMETRY

CONTENTS

Editor's Message	4
R. V. AMBARTZUMIAN, Integration of Combinatorial Decompositions in the Presence of Collinearities	5
V. K. OHANIAN, Combinatorial Principles in Stochastic Geometry in the Plane: A Review	30
H. ZESSIN, A Theorem of Michael Mürmann Revisited	69
H. ZESSIN, Point Processes in General Position	81