

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2007

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Քանալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартіросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсесян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

SOME PROPERTIES OF THE ε_∞ -PRODUCT OF QUOTIENT BORNOLOGICAL SPACES

B. AQZZOUZ, F. BELMAHJOUR, H. SNOUSSI

*Université Mohammed V-Souissi, Sala Eljadida, Morocco
Université Ibn Tofail, Kénitra, Morocco
Université Mohammed V-Souissi, Rabat, Morocco
E-mail: baqzzouz@hotmail.com*

АННОТАЦИЯ. Some properties of the ε_∞ -product defined in [4] are obtained by a study of a kind of isomorphism between the computation of this ε_∞ -product and the ordinary ε -product of L. Schwartz [9]. The paper contains several corollaries.

1. INTRODUCTION

The ε -product in the category of locally convex spaces was defined by L. Schwartz [9]. Later, L. Waelbroeck [10] gave a simple definition of the ε -product in the category of Banach spaces, while in [1] we defined the ε_c -product in the category of quotient bornological spaces.

For a nuclear b-space N , we showed in [2] that if Ω is a finite or a σ -finite measure space and $1 \leq p \leq \infty$, then the functors $L_{loc}^p(\Omega, N_\varepsilon)$ and $N_\varepsilon L^p(\Omega, \cdot)$ are isomorphic on the category of b-spaces of L. Waelbroeck [1]. Next, we established in [3] that for a nuclear b-space N and a b-space E , if X is a compact space (resp. locally compact space that is countable at infinity) then the exact functors $C(X, N_\varepsilon E)$ and $N_\varepsilon C(X, \cdot)$ are isomorphic on the category of b-spaces.

In a recent paper [4], we defined the ε_∞ -product of a b-space by a quotient bornological space and we proved that if G is an ε b-space and $E \mid F$ is a quotient bornological space, then $(G_\varepsilon E) \mid (G_\varepsilon F)$ is isomorphic to $G_{\varepsilon_\infty}(E \mid F)$.

In the present paper, we are going to prove that if N is a nuclear b-space and G is a b-space, the quotient bornological spaces $G_{\varepsilon_\infty}(N_\varepsilon(E \mid F))$ and $N_\varepsilon(G_{\varepsilon_\infty}(E \mid F))$ are isomorphic for each quotient bornological space $E \mid F$ where ε_∞ is the ε_∞ -product defined in [4] and we will give some interesting consequences.

First we need to fix the notation and recall some definitions. Let **EV** be the category of vector spaces and linear mappings over the scalar field $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and **Ban** be the category of Banach spaces and bounded linear mappings. We denote by **Ban**(E_1, E_2) the Banach space of all bounded linear mappings $E_1 \longrightarrow E_2$, where E_1 and E_2 are Banach spaces.

1- Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a Banach space. A Banach subspace F of E is a vector subspace endowed with a Banach norm $\|\cdot\|_F$ such that the inclusion map $(F, \|\cdot\|_F) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$ is bounded. Observe that the norm $\|\cdot\|_F$ of F is not necessarily the same

as the norm induced by $\|\cdot\|_E$ on F , and the Banach subspace F is not necessarily closed in E . A quotient Banach space $E | F$ is a vector space E/F , where E is a Banach space and F a Banach subspace. It is clear that $E | F$ is not necessarily an object of the category **Ban**, but it is if F is closed in E . If $E | F$ and $E_1 | F_1$ are two quotient Banach spaces, a strict morphism $u : E | F \longrightarrow E_1 | F_1$ is a linear mapping $u : x + F \longmapsto u_1(x) + F_1$, where $u_1 : E \longrightarrow E_1$ is a bounded linear mapping such that $u_1(F) \subseteq F_1$. We say that u_1 induces u . Two bounded linear mappings $u_1, u_2 : E \longrightarrow E_1$ both inducing a strict morphism, induce the same strict morphism iff the linear mapping $u_1 - u_2 : E \longrightarrow E_1$ is bounded. Let $E | F$ be a quotient Banach space and E_0 a Banach subspace of E such that F is a Banach subspace of E_0 . Then the natural injection $E_0 \rightarrow E$ induces a strict morphism $E_0 | F \longrightarrow E | F$, and the identity mapping $Id_E : E \rightarrow E$ induces a strict morphism $E | F \longrightarrow E | F$.

The category of quotient Banach spaces and strict morphisms we called $\tilde{\mathbf{qBan}}$, it is a subcategory of vector spaces **EV** and contains the category **Ban** (any Banach space E will be identified with the quotient Banach space $E | \{0\}$, moreover if $u_1 : E \rightarrow E_1$ is a bounded linear mapping, then u_1 induces a strict morphism $E | \{0\} \rightarrow E_1 | \{0\}$ and every strict morphism $E | \{0\} \rightarrow E_1 | \{0\}$ is induced by a unique bounded linear mapping $u_1 : E \rightarrow E_1$).

The category $\tilde{\mathbf{qBan}}$ is not Abelian. If E is a Banach space and F a closed subspace of E , it would be very nice if the quotient Banach space $E | F$ were isomorphic to the quotient $(E/F) | \{0\}$. This is not the case in $\tilde{\mathbf{qBan}}$ unless F is complemented in E .

L. Waelbroeck [12] introduced an Abelian category $\mathbf{qBan}$ generated by $\tilde{\mathbf{qBan}}$ and inverses of pseudo-isomorphisms, i.e. has the same objects as $\tilde{\mathbf{qBan}}$ and every morphism u of $\mathbf{qBan}$ can be expressed as $u = v \circ s^{-1}$, where s is a pseudo-isomorphism and v is a strict morphism. For more information about quotient Banach spaces we refer the reader to [12].

2- Let E be a real or complex vector space, and B be an absolutely convex set in E . Let E_B be the vector space generated by B i.e. $E_B = \cup_{\lambda > 0} \lambda B$. The Minkowski functional of B is a semi-norm on E_B . It is a norm, if and only if B does not contain any nonzero subspace of E . The set B is completant if its Minkowski functional is a Banach norm.

A bounded structure β on a vector space E is defined by a set of “bounded” subsets of E with the following properties:

- (1) Every finite subset of E is bounded.
- (2) Every union of two bounded subsets is bounded.
- (3) Every subset of a bounded subset is bounded.
- (4) A set homothetic to a bounded subset is bounded.
- (5) Each bounded subset is contained in a completant bounded subset.

A b-space (E, β) is a vector space E with a boundedness β . A subspace F of a b-space E is bornologically closed if the subspace $F \cap E_B$ is closed in E_B for every completant bounded subset B of E .

Given two b-spaces (E, β_E) and (F, β_F) , a linear mapping $u : E \longrightarrow F$ is bounded, if it maps bounded sets of E into bounded sets of F . The mapping u is bornologically surjective if for every $B' \in \beta_F$, there exists $B \in \beta_E$ such that $u(B) = B'$. A Schwartz

b-space G is a b-space satisfying the following condition: for each completant bounded disk A of G there exists a completant bounded disk B of G such that the inclusion mapping $i_{B'|B} : G_A \rightarrow G_B$ is compact.

We denote by $\mathbf{b}$ the category of b-spaces and bounded linear mappings. For more information about b-spaces we refer the reader to [5, 6] and [11].

Let (E, β_E) be a b-space. A b-subspace of E is a subspace F with a boundedness β_F such that (F, β_F) is a b-space and $\beta_F \subseteq \beta_E$. We note that the boundedness β_F of F is not necessary the same as the boundedness induced by β_E on F , and then the b-subspace F is not necessary bornologically closed in E . A quotient bornological space $E | F$ is a vector space E/F , where E is a b-space and F a b-subspace of E . Observe that $E | F$ is not necessarily an object of the category of b-spaces $\mathbf{b}$, but it is if F is bornologically closed in E . If $E | F$ and $E_1 | F_1$ are quotient bornological spaces, a strict morphism $u : E | F \rightarrow E_1 | F_1$ is induced by a bounded linear mapping $u_1 : E \rightarrow E_1$ whose restriction to F is a bounded linear mapping $F \rightarrow F_1$. Two bounded linear mappings $u_1, v_1 : E \rightarrow E_1$, both inducing a strict morphism, induce the same strict morphism $E | F \rightarrow E_1 | F_1$ iff the linear mapping $u_1 - v_1 : E \rightarrow F_1$ is bounded.

We call $\tilde{\mathbf{q}}$ the category of quotient bornological spaces and strict morphisms. A pseudo-isomorphism $u : E | F \rightarrow E_1 | F_1$ is a strict morphism induced by a bounded linear mapping $u_1 : E \rightarrow E_1$ which is bornologically surjective and such that $u_1^{-1}(F_1) = F$ i.e. $B \in \beta_F$ if $B \in \beta_E$ and $u_1(B) \in \beta_{F_1}$.

The category $\tilde{\mathbf{q}}$ is not Abelian because it contains the category $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$. In [13], Waelbroeck introduced an Abelian category $\mathbf{q}$ generated by $\tilde{\mathbf{q}}$ and the inverses of pseudo-isomorphisms i.e. has the same objects as $\tilde{\mathbf{q}}$ and every morphism u of $\mathbf{q}$ can be expressed as $u = v \circ s^{-1}$, where s is a pseudo-isomorphism and v is a strict morphism.

2. MAIN RESULTS

To show our main results concerning the ε_∞ -product defined in [4], recall that the usual ε -product of two Banach spaces E and F is the Banach space $E\varepsilon F$ of linear mappings $E' \rightarrow F$ whose restrictions to the closed unit ball $B_{E'}$ of E' are $\sigma(E', E)$ -continuous where E' is the topological dual of E . The ε -product is symmetric i.e. the Banach spaces $E\varepsilon F$ and $F\varepsilon E$ are isometrically isomorphic (Proposition 2 of [10]). If E_i and F_i are Banach spaces and $u_i : E_i \rightarrow F_i$ are bounded linear mappings, $i = 1, 2$, the ε -product of u_1 and u_2 is the bounded linear mapping $u_1\varepsilon u_2 : E_1\varepsilon E_2 \rightarrow F_1\varepsilon F_2$, $f \mapsto u_2 \circ f \circ u_1'$, where u_1' is the dual mapping of u_1 . It is clear that $u_1\varepsilon u_2$ is injective whenever u_1 and u_2 are injective.

If G is a Banach space and F is a Banach subspace of a Banach space E , then $G\varepsilon F$ is a Banach subspace of $G\varepsilon E$. For more information about the ε -product see [10].

The ε -product of two b-spaces G and E is the b-space $G\varepsilon E = \cup_{B,C} (G_B\varepsilon E_C)$, where B and C respectively range over the bounded completant subsets of the b-spaces G and E respectively. It is clear that if F is a b-subspace of G , then the space $F\varepsilon E$ is a b-subspace of $G\varepsilon E$.

A Banach space E is an $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ -space, $\lambda \geq 1$, if and only if every finite-dimensional subspace F of E is contained in a finite-dimensional subspace F_1 of E such that

$d(F_1, l_n^\infty) \leq \lambda$, where $n = \dim F_1$, and l_n^∞ is $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) with the norm $\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, where $d(X, Y) = \inf\{\|T\| \|T^{-1}\|, T : X \rightarrow Y \text{ isomorphism}\}$ is the Banach-Mazur distance of the Banach spaces X and Y . A Banach space E is an $\mathcal{L}_\infty$ -space if it is an $\mathcal{L}_{\infty, \lambda}$ -space for some $\lambda \geq 1$. Any complemented subspace of an $\mathcal{L}_\infty$ -space is an $\mathcal{L}_\infty$ -space. For more information about $\mathcal{L}_\infty$ -spaces the reader is referred to [8].

Recall from [2], that a b-space G is an ε b-space if the bounded linear mapping

$$Id_{G\varepsilon}u : G\varepsilon E \rightarrow G\varepsilon F, \quad f \mapsto u \circ f$$

is bornologically surjective whenever $u : E \rightarrow F$ is a surjective bounded linear mapping between Banach spaces.

As in Proposition 6.2 of [1], it is easy to show that a b-space G is an ε b-space if and only if for every bounded linear mapping $u : X \rightarrow Y$ which is bornologically surjective, the bounded linear mapping $Id_{G\varepsilon}u : G\varepsilon X \rightarrow G\varepsilon Y$ is bornologically surjective, where X and Y are b-spaces. As a consequence, if $E | F$ is a quotient bornological space, then it defines the exact sequence

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E | F \rightarrow 0.$$

Its image by the exact functor $G\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$ is the exact sequence

$$0 \rightarrow G\varepsilon F \rightarrow G\varepsilon E \rightarrow G\varepsilon(E | F) \rightarrow 0$$

in the category $\mathbf{q}$. Finally, we obtain $G\varepsilon(E | F) = (G\varepsilon E) | (G\varepsilon F)$.

We start with the following elementary Lemma:

Lemma 1. *Let G be an ε b-space and $(E_i | F_i)_{i \in I}$ an inductive system in the category $\mathbf{q}$. Then $G\varepsilon(\cup_i (E_i | F_i)) \simeq \cup_i (G\varepsilon(E_i | F_i))$ where $\cup_i$ denotes the inductive limit in $\mathbf{q}$.*

Proof: Recall that in [6], Houzel proved that the inductive limit is an exact functor on the category $\mathbf{b}$. It follows from Theorem 4.1 of [13] that this functor admits an exact extension to the category of quotient bornological spaces.

If we apply the exact functor $\cup_i(\cdot)$ to the following exact complex in $\mathbf{q}$:

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow F_i \rightarrow E_i \rightarrow E_i | F_i \rightarrow 0$$

we obtain

$$0 \rightarrow \cup_i F_i \rightarrow \cup_i E_i \rightarrow \cup_i (E_i | F_i) \rightarrow 0$$

and hence

$$\cup_i (E_i | F_i) \simeq \text{coker}(\cup_i F_i \rightarrow \cup_i E_i) \simeq (\cup_i E_i) | (\cup_i F_i).$$

Now, if we apply successively the exact functors $\cup_i(\cdot)$ and $G\varepsilon$ to the exact complex (2.1), we obtain the following exact complex:

$$0 \rightarrow G\varepsilon(\cup_i F_i) \rightarrow G\varepsilon(\cup_i E_i) \rightarrow G\varepsilon(\cup_i (E_i | F_i)) \rightarrow 0$$

and then

$$G\varepsilon(\cup_i (E_i | F_i)) \simeq (G\varepsilon(\cup_i E_i)) | (G\varepsilon(\cup_i F_i)).$$

Now, from the definition of the ε -product of two b-spaces it follows that

$$(G\varepsilon(\cup_i E_i)) | (G\varepsilon(\cup_i F_i)) \simeq \cup_i (G\varepsilon E_i) | \cup_i (G\varepsilon F_i)$$

$$\simeq \cup_i (G\varepsilon E_i \mid G\varepsilon F_i) \simeq \cup_i (G\varepsilon (E_i \mid F_i)).$$

This proves the Lemma.

Recall that a b-space G is nuclear if each bounded completant subset B of G is included in a bounded completant A of G such that the inclusion $i_{AB} : G_B \longrightarrow G_A$ is a nuclear mapping. For more information about nuclear b-spaces we refer the reader to [5].

Theorem 1. *Let I be a set, G an $\mathcal{L}_\infty$ -space and $E \mid F$ a quotient bornological space. Then $l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon(E \mid F)) \simeq G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon (E \mid F))$.*

Proof: Since the Banach spaces $l^\infty(I)$ and G are $\mathcal{L}_\infty$ -spaces, their ε -product $l^\infty(I) \varepsilon G$ is an $\mathcal{L}_\infty$ -space. Hence a Theorem of Kabbalo [7] implies that the functor $(l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon \cdot$ is exact on the category **Ban**. It follows from Theorem 4.1 of [13] that this functor admits an unique and exact extension to the category of quotient Banach spaces **qBan**. Then, for each quotient Banach space $E \mid F$, we have

$$(l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon (E \mid F) = ((l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon E) \mid ((l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon F).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} ((l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon E) \mid ((l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon F) &= (l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon E)) \mid l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon F) \\ &= l^\infty(I) \varepsilon ((G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)) = l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon (E \mid F)) \end{aligned}$$

Now, given quotient bornological space $E \mid F$, let (B, C) be a couple of bounded completant subsets, B is bounded in E , C is bounded in F and $C \subset B$. This set of couples is ordered by the relation $(B, C) \prec (B_1, C_1)$ if and only if $B \subset B_1$ and $C \subset C_1$. For this order, the set of couples (B, C) is a net and the family $(E_B \mid F_C)_{(B, C)}$ is an inductive system in **q** and we can write $E \mid F \simeq \cup_{(B, C)} (E_B \mid F_C)$. This proves that each quotient bornological space $E \mid F$ is an inductive limit of an inductive system of quotient Banach spaces $E_B \mid F_C$. It follows from the equality

$$l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon(E_B \mid F_C)) \simeq G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon (E_B \mid F_C))$$

and the exactness of the inductive limit that

$$\cup_{(B, C)} (l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon(E_B \mid F_C))) \simeq \cup_{(B, C)} (G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon (E_B \mid F_C))).$$

Finally, a double application of Lemma 1, gives the following result:

$$\begin{aligned} \cup_{(B, C)} (l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon(E_B \mid F_C))) &= (l^\infty(I) \varepsilon \cup_{(B, C)} (G\varepsilon(E_B \mid F_C))) \\ &= (l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon \cup_{(B, C)} (E_B \mid F_C))) = l^\infty(I) \varepsilon (G\varepsilon(E \mid F)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \cup_{(B, C)} (G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon (E_B \mid F_C))) &= G\varepsilon \cup_{(B, C)} (l^\infty(I) \varepsilon (E_B \mid F_C)) \\ &= G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon \cup_{(B, C)} (E_B \mid F_C)) = G\varepsilon(l^\infty(I) \varepsilon (E \mid F)). \end{aligned}$$

Now, a b-space is a $b\mathcal{L}_\infty$ -space if it is a bornological inductive limit of $\mathcal{L}_\infty$ -spaces. Since the inductive limit functor is exact on the category of b-spaces [6], it is clear that any $b\mathcal{L}_\infty$ -space is an ε b-space. Another concrete example is given in ([2], Example 2.4). In fact, for $r \in \mathbb{N}^*$ and X a compact manifold, we defined the space $C^{r+0}(X) = \cup_\varepsilon C^{r+\varepsilon}(X)$, where $0 < \varepsilon < 1$ and $C^{r+\varepsilon}(X)$ is the Banach space of functions of class C^r on X such that: for all $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \leq r$, $D^k f$ is continuously ε -Hölderian of exponent ε , on which we placed the following boundedness of b-space: $B \subset C^{r+0}(X)$

is bounded if there is $\varepsilon > 0$ such that B is bounded in $C^{r+\varepsilon}(X)$. The space $C^{r+0}(X)$ is a bornological inductive limit of the inductive system $(C^{r+\varepsilon}(X))_{\varepsilon>0}$, where each $C^{r+\varepsilon}(X)$ is an $\mathcal{L}_\infty$ -space, and hence it is an $\mathcal{L}_\infty$ -space.

As a consequence of Theorem 1 and the exactness of the bornological inductive limit, we obtain

Corollary 1. *Let I be a set, G be a $b\mathcal{L}_\infty$ -space and $E | F$ be a quotient bornological space. Then $l^\infty(I) \varepsilon (G \varepsilon (E | F)) \simeq G \varepsilon (l^\infty(I) \varepsilon (E | F))$.*

Another example of $b\mathcal{L}_\infty$ -spaces: let N be a nuclear b-space, then there exists a net $(I, \leq)$ and a base $(B_{0,i})_{i \in I}$ of the bornology of N such that the Banach space $N_{B_{0,i}}$ is isometrically isomorphic to c_0 and $N = \cup_{i \in I} N_{B_{0,i}}$ as b-spaces [5]. Since c_0 is an $\mathcal{L}_\infty$ -space [9], it is clear that every nuclear b-space is a $b\mathcal{L}_\infty$ -space.

Corollary 2. *Let I be a set, N a nuclear b-space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $l^\infty(I) \varepsilon (N \varepsilon (E | F)) \simeq N \varepsilon (l^\infty(I) \varepsilon (E | F))$.*

Since the Banach space $l^\infty(I)$ is an ε b-space and its ε -product by the ε b-space N is an ε b-space. Hence the functor $(l^\infty(I) \varepsilon G) \varepsilon$ is exact on the category **Ban**. A version of the proof of Theorem 1, produces the following result:

Theorem 2. *Let I be a set, G an ε b-space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $l^\infty(I) \varepsilon (G \varepsilon (E | F)) \simeq G \varepsilon (l^\infty(I) \varepsilon (E | F))$.*

Now, we prove the same property for the ε_∞ -product of a b-space by a quotient bornological space defined in [4]. First, we recall the definition of the ε_∞ -product.

In the category **Ban**, a left exact l^∞ -resolution of a Banach space G is a strongly left exact complex

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} l^\infty(I) \xrightarrow{v} l^\infty(J)$$

i.e. a complex such that $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$ and the image of v is closed in $l^\infty(J)$.

Since $l^\infty(K)$ is an $\mathcal{L}_\infty$ -space, it follows from [1], that for each quotient bornological space $E | F$, we have

$$l^\infty(K) \varepsilon (E | F) = (l^\infty(K) \varepsilon E) | (l^\infty(K) \varepsilon F) \quad \text{for } K = I, J.$$

The bounded linear mapping $v \varepsilon \text{Id}_E : l^\infty(I) \varepsilon E \longrightarrow l^\infty(J) \varepsilon E$ induces a strict morphism

$$v \varepsilon \text{Id}_{E|F} : (l^\infty(I) \varepsilon E) | (l^\infty(I) \varepsilon F) \longrightarrow (l^\infty(J) \varepsilon E) | (l^\infty(J) \varepsilon F)$$

and as the category **q** is Abelian, the object $\text{Ker}(v \varepsilon \text{Id}_{E|F})$ exists, and we obtain the following left exact sequence in **q**:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ker}(v \varepsilon \text{Id}_{E|F}) &\xrightarrow{u \varepsilon \text{Id}_{E|F}} (l^\infty(I) \varepsilon E) | (l^\infty(I) \varepsilon F) \\ &\xrightarrow{v \varepsilon \text{Id}_{E|F}} (l^\infty(J) \varepsilon E) | (l^\infty(J) \varepsilon F), \end{aligned}$$

where

$$\text{Ker}(v \varepsilon \text{Id}_{E|F}) = (v \varepsilon \text{Id}_E)^{-1} (l^\infty(J) \varepsilon F) | (l^\infty(I) \varepsilon F).$$

and $(v \varepsilon \text{Id}_E)^{-1} (l^\infty(J) \varepsilon F)$ is a b-subspace of the b-space $l^\infty(I) \varepsilon E$ for the following boudedness: a subset B of $(v \varepsilon \text{Id}_E)^{-1} (l^\infty(J) \varepsilon F)$ is bounded if it is bounded in $l^\infty(I) \varepsilon E$ and its image $(v \varepsilon \text{Id}_E)(B)$ is bounded in $l^\infty(J) \varepsilon F$.

We let $G\varepsilon_{Res}(E | F) = Ker(v\varepsilon Id_{E|F})$. This defines a functor

$$G\varepsilon_{Res} : \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}, \quad E | F \longrightarrow G\varepsilon_{Res}(E | F).$$

The Banach space G has several left exact l^∞ -resolutions, and we proved in [4] that the object $G\varepsilon_{Res}(E | F)$ does not depend on the left exact l^∞ -resolutions of G (Theorem 2.4 of [4]). Then, we defined the ε_∞ -product of a b-space G by a quotient bornological space $E | F$ as the quotient bornological space $G\varepsilon_\infty(E | F) = G\varepsilon_{Res}(E | F)$.

Now we are in a position to prove the principal result which concerns the ε_∞ -product defined in [4].

Theorem 3. *Let N be an $\mathcal{L}_\infty$ -space, G a Banach space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $G\varepsilon_\infty(N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G\varepsilon_\infty(E | F))$.*

Proof: Let

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\Phi} l^\infty(I) \xrightarrow{\Psi} l^\infty(J)$$

be a left exact l^∞ -resolution of G . As N is an $\mathcal{L}_\infty$ -space, we have

$$N\varepsilon(E | F) \simeq (N\varepsilon E) | (N\varepsilon F).$$

Then the bounded linear mapping

$$\Psi\varepsilon Id_{(N\varepsilon E)} : l^\infty(I)\varepsilon(N\varepsilon E) \longrightarrow l^\infty(J)\varepsilon(N\varepsilon E)$$

induces a strict morphism

$$\Psi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)} : l^\infty(I)\varepsilon(N\varepsilon(E | F)) \longrightarrow l^\infty(J)\varepsilon(N\varepsilon(E | F))$$

which has a kernel in the category $\mathbf{q}$. We obtain then the following left exact complex in $\mathbf{q}$:

$$0 \longrightarrow G\varepsilon_\infty N\varepsilon(E | F) \xrightarrow{\Phi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)}} l^\infty(I)\varepsilon(N\varepsilon(E | F)) \\ \xrightarrow{\Psi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)}} l^\infty(J)\varepsilon(N\varepsilon(E | F)).$$

On the other hand, the image of the left exact complex

$$0 \longrightarrow G\varepsilon_\infty(E | F) \xrightarrow{\Phi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)}} l^\infty(I)\varepsilon(E | F) \xrightarrow{\Psi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)}} l^\infty(J)\varepsilon(E | F)$$

by the exact functor $N\varepsilon : \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ is the following left exact complex:

$$0 \longrightarrow N\varepsilon(G\varepsilon_\infty(E | F)) \longrightarrow N\varepsilon(l^\infty(I)\varepsilon(E | F)) \longrightarrow N\varepsilon(l^\infty(J)\varepsilon(E | F)).$$

Now, by Theorem 1, we have

$$l^\infty(K)\varepsilon(N\varepsilon(E | F)) = N\varepsilon(l^\infty(K)\varepsilon(E | F)) \quad \text{for } K = I, J$$

therefore

$$Ker(\Psi\varepsilon Id_{N\varepsilon(E|F)}) = Ker(Id_{N\varepsilon}(\Psi\varepsilon Id_{E|F})),$$

implying

$$G\varepsilon_\infty(N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G\varepsilon_\infty(E | F)).$$

As a consequence of the Theorem 2 and Lemma 1, we obtain:

Corollary 3. *Let N be an $\mathcal{L}_\infty$ -space, G a b-space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $G\varepsilon_\infty(N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G\varepsilon_\infty(E | F))$.*

Proof: In fact, since $G = \cup_B G_B$ where B ranges over bounded completant subsets of G , and since

$$G_B \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G_B \varepsilon_\infty(E | F)),$$

we have

$$\cup_B (G_B \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F))) \simeq \cup_B (N\varepsilon(G_B \varepsilon_\infty(E | F))).$$

It follows from Lemma 1, that

$$\cup_B (N\varepsilon(G_B \varepsilon_\infty(E | F))) = N\varepsilon(\cup_B (G_B \varepsilon_\infty(E | F))) = N\varepsilon(G \varepsilon_\infty(E | F)),$$

therefore

$$G \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G \varepsilon_\infty(E | F)).$$

This ends the proof.

Other consequences of Theorem 1 and Corollary 1 (resp. Corollaries 2, 3 and Theorem 2) are as follows:

Corollary 4. *Let N be a $b\mathcal{L}_\infty$ -space, G a b -space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $G \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G \varepsilon_\infty(E | F))$.*

Corollary 5. *Let N be a nuclear b -space, G a b -space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $G \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G \varepsilon_\infty(E | F))$.*

Corollary 6. *Let N be an εb -space, G a b -space and $E | F$ a quotient bornological space. Then $G \varepsilon_\infty (N\varepsilon(E | F)) \simeq N\varepsilon(G \varepsilon_\infty(E | F))$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Aqzzouz, "The ε_∞ -Product of a Schwartz b -Space by a Quotient Banach Space and Applications", *Applied Categorical Structures* **10** (6), 603-616 (2002).
- [2] B. Aqzzouz, "On Some Isomorphism on the Category of b -Spaces", *Siberian Mathematical Journal* **44**, 749-756 (2003).
- [3] B. Aqzzouz, "Spaces of Continuous Functions Taking Their Values in the ε -Product", *R.A.C.S.A.M.* **99** (2), 143-148 (2005).
- [4] B. Aqzzouz, "The ε_∞ -Product of a b -space by a Quotient Banach Space", *Methods of Func. Analysis, Topology* **13** (3), 211-222 (2007).
- [5] H. Hogbe Nlend, *Théorie des Bornologies et Applications* (Lecture Notes in Math. **213**, 1971).
- [6] C. Houzel, *Séminaire Banach* (Lecture Notes in Math. **277**, 1972).
- [7] W. Kabbalo, "Lifting Theorems for Vector Valued Functions and the ε -Product", *Proc. of the 1-st Pederborn Conf. on Functional Analysis* **27**, 149-166 (1977).
- [8] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces* (Lecture Notes in Math. **338**, 1973).
- [9] L. Schwartz, "Théorie des Distributions à Valeurs Vectorielles", *Ann. Inst. Fourier* **I**, tomes VIII, 1-141 (1957).
- [10] L. Waelbroeck, "Duality and the Injective Tensor Product", *Math. Ann.* **163**, 122-126 (1966).
- [11] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras* (Lecture Notes in Math. **230**, 1971).
- [12] L. Waelbroeck, "Quotient Banach Spaces", in *Banach Center Publ.*, 553-562 and 563-571 (Warsaw, 1982).
- [13] L. Waelbroeck, "The Category of Quotient Bornological Spaces", in *J.A. Barosso (ed.), Aspects of Mathematics and its Applications*, 873-894 (Elsevier Sciences Publishers, B.V. 1986).

Поступила 20 июля 2007

В-ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: angen@arminco.com

Аннотация. В работе дается представление классических нулевых пространств Бесова посредством так называемых “В-произведений” с обобщенными нулевыми пространствами типа Бесова, порожденными вполне правильными многогранниками. Доказывается оценка для К-функционала Петре и интерполяционная формула “вещественного” метода для пар “В-произведений”. Приводятся некоторые применения полученных результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] Х. Трибель предложил задачу характеристики интерполяционных пространств “вещественного” метода для пары классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями. Как оказалось (см. [2, 3]), в случае несовпадения анизотропий пространств рассматриваемой пары, интерполяционные пространства “вещественного” метода характеризуются в терминах, так называемых, “В-произведений” пространств типа Бесова. Наиболее важным является случай “произведения” нулевых пространств (как видно из определения 6, общий случай получается применением оператора “поднятия”).

Возникает вопрос: *можно ли характеризовать “В-произведение” пары нулевых пространств типа Бесова (см. определение 5), как В-пространство из того же семейства пространств типа Бесова?*

В общем случае ответ отрицательный, поскольку, как доказано в [3], пространства “с доминирующей смешанной производной” (которые, вообще говоря, не входят в семейство В-пространств из определения 5), являются “В-произведениями” соответствующих пар пространств типа Бесова. Однако, как показывает теорема 2, “В-произведение” классических нулевых пространств Бесова и В-пространств, порожденных вполне правильными многогранниками, остается классическим нулевым пространством Бесова.

Теорема 2 позволяет явно описать интерполяционные пространства “вещественного” метода для пар классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями.

На протяжении всей работы будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{R}_n$ – n -мерное евклидово пространство,

F - оператор преобразования Фурье F^{-1} - оператор обратного преобразования Фурье,

$C^\infty(\mathbb{R}_n)$ - множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}_n$,

$S = S(\mathbb{R}_n)$ - Класс Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}_n$,

$S' = S'(\mathbb{R}_n)$ - пространство медленно растущих обобщенных функций,

M_p - пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) ,

$(A_0, A_1)_{\vartheta, q}$ - интерполяционное пространство, "вещественной" интерполяции,

$A_0 + A_1$ - сумма, а $A_0 \cap A_1$ - пересечение Банаховых пространств A_0 и A_1 в смысле теории интерполяции.

Знак $\sim$ означает двустороннюю оценку. Если $\mu(\xi) \sim \nu(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}_n$, то будем говорить, что функции μ и ν эквивалентны.

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Определение 1. *Непустой многогранник $\mathbf{R}$ с вершинами $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$ ($\alpha_i^j \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$) называется полным, если $\mathbf{R}$ имеет вершины на каждой координатной оси, отличные от начала координат.*

Полный многогранник $\mathbf{R}$ называется вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника $\mathbf{R}$ имеют положительные координаты.

Вполне правильному многограннику $\mathbf{R}$ сопоставим функцию

$$(1) \quad \mu(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^N |\xi|^{\alpha^j},$$

которую будем называть порожденной многогранником $\mathbf{R}$ или порождающей функцией многогранника $\mathbf{R}$.

Определение 2. *Если вершины вполне правильного многогранника $\mathbf{R}$ лежат в $\mathbb{R}_{n-1}$, за исключением единственной вершины, которая лежит на n -ой оси координат, то многогранник $\mathbf{R}$ будем называть n -мерной (прямоугольной) пирамидой относительно n -ой координатной оси. Вполне правильный многогранник, у которого нет вершин вне координатных осей будем называть n -мерной треугольной пирамидой.*

Ясно, что n -мерная треугольная пирамида является пирамидой относительно всех координатных осей.

Лемма 1. *Порождающая функция $\mu(\xi)$ произвольного вполне правильного многогранника $\mathbf{R}$ эквивалентна функции, которая представляется в виде конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных треугольными пирамидами.*

Доказательство: Шаг 1. Пусть $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_M$ - n -ые координаты вершин многогранника $\mathbf{R}$. Проведем гиперплоскости

$$P_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n : x_n = m_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Обозначим через $\mathbf{R}'_k$ проекции на $\mathbb{R}_{n-1}$ сечений многогранника $\mathbf{R}$ гиперплоскостями P_k , $k = 0, 1, \dots, M$.

Пусть $\{\beta^j\}_{j=0}^{N_k}$ – набор вершин многогранника $\mathbf{R}'_k$, $k = 0, 1, \dots, M$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$ многогранник с вершинами $\{(1+\varepsilon)\beta^j\}_{j=0}^{N_k}$. Поскольку многогранник $\mathbf{R}$ – вполне правильный, то имеют место включения $\mathbf{R}'_k \subset \mathbf{R}'_0$, $k = 0, 1, \dots, M$, где $\mathbf{R}'_0$ – основание многогранника $\mathbf{R}$, лежащее в $\mathbb{R}_{n-1}$. Причем некоординатные грани многогранников $\mathbf{R}'_k$ и $\mathbf{R}'_0$ не касаются друг друга. Тогда число $\varepsilon > 0$ можно подобрать таким образом, чтобы имели место включения $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon} \subset \mathbf{R}'_0$, $k = 0, 1, \dots, M$, без касания некоординатных граней.

Обозначим через $\mathbf{R}_k$, $k = 0, 1, \dots, M$ многогранник с вершинами

$$((1+\varepsilon)\beta^j, 0), (\beta^j, m_k), (0, m_M), \quad j = 0, \dots, N_k.$$

Основанием многогранника $\mathbf{R}_k$ является многогранник $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$, а вершины многогранника $\mathbf{R}_k$ лежат на трех параллельных плоскостях: P_0 , P_k , и P_M , т.е.

$$(2) \quad ((1+\varepsilon)\beta^j, 0) \in P_0, \quad (\beta^j, m_k) \in P_k, \quad j = 0, \dots, N_k, \quad (0, m_M) \in P_M.$$

Обозначим, далее, через $\mathbf{R}_0$ многогранник с основанием $\mathbf{R}'_0$ и единственной вершиной $(0, m_M)$ вне $\mathbb{R}_{n-1}$. Построенные многогранники $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$ обладают следующими свойствами:

- а) $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}$, $k = 0, \dots, M$,
- б) каждая вершина многогранника $\mathbf{R}$ принадлежит одному из многогранников $\mathbf{R}_k$, $k = 0, \dots, M$.

Пусть $\mathbf{J}$ – выпуклая оболочка вершин многогранников $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$. Поскольку выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, то

$$(3) \quad \mathbf{R} = \mathbf{J}.$$

Если через $\{\mu_k\}_{k=0}^M$ обозначить функции, порожденные многогранниками $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$, то формула (3) означает, что

$$(4) \quad \mu \sim \mu_0 + \sum_{k=1}^M \mu_k.$$

Таким образом, общий случай произвольного вполне правильного многогранника свелся к случаю конечного числа вполне правильных многогранников $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$ с вершинами, лежащими на трех гиперплоскостях, параллельных $\mathbb{R}_{n-1}$ (за исключением многогранника $\mathbf{R}_0$, у которого вершины лежат на двух гиперплоскостях). Причем, на третьей гиперплоскости P_M лежит всего одна вершина $(0, m_M)$.

Шаг 2. Рассмотрим многогранник $\mathbf{R}_k$ и порожденную им функцию μ_k ($k = 1, \dots, M$). Как было замечено на первом шаге, вершины многогранника $\mathbf{R}_k$ лежат на трех гиперплоскостях P_0 , P_k и P_M . Выразим порождающую функцию μ_k многогранника $\mathbf{R}_k$ через порождающие функции соответствующих многогранников с вершинами, лежащими на двух гиперплоскостях. Обозначим через μ'_k функцию, порожденную многогранником $\mathbf{R}'_k$. Тогда согласно (2) имеем

$$(5) \quad \mu_k(\xi', \xi_n) \sim (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + \mu'_k(\xi')|\xi_n|^{m_k} + |\xi_n|^{m_M}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Рассмотрим проекцию многогранника $\mathbf{R}_k$ на какую-либо из координатных плоскостей, для которой n -ая ось является координатной осью. Проекцией является вполне правильный четырехугольник с единственной вершиной вне координатных осей (которая лежит на гиперплоскости P_k) и двумя одномерными некоординатными гранями. Вершины получившегося четырехугольника согласно (2) имеют вид

$$O = (0, 0), \quad A = ((1 + \varepsilon)a, 0), \quad B = (a, m_k), \quad C = (0, m_M).$$

Продолжим отрезок $[A, B]$ до пересечения с n -ой осью координат. Получившуюся точку обозначим через $D = (0, d_k)$. Далее, из точки A проведем прямую, параллельную отрезку $[B, C]$, до пересечения с n -ой осью координат. Получившуюся точку обозначим через $E = (0, e_k)$. Тогда

$$(6) \quad d_k = \frac{m_k(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad e_k = (1 + \varepsilon)(m_M - m_k).$$

Положим $\vartheta_k = (m_M - e_k)/(d_k - e_k)$. Заметим, что величины (6) и ϑ_k не зависят от a , т.е. не зависят от выбора координатной плоскости. Далее, поскольку четырехугольник вполне правильный, то $0 < \vartheta_k < 1$. Поскольку $m_M = (1 + \vartheta_k)e_k + \vartheta_k d_k$ и $m_k = \vartheta_k d_k$, то, полагая

$$(7) \quad \mu_k^0(\xi', \xi_n) = (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + |\xi_n|^{e_k}, \quad \mu_k^1(\xi', \xi_n) = (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + |\xi_n|^{d_k},$$

из (5) получаем

$$(8) \quad \mu_k \sim (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k} (\mu_k^1)^{\vartheta_k}.$$

Заметим, что функции μ_k^0 и μ_k^1 из (7) порождены вполне правильными многогранниками, которые представляют собой n -мерные пирамиды относительно n -ой оси координат с общим основанием $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$ и с вершинами $E = (0, e_k)$ и $D = (0, d_k)$ соответственно. Функции $(\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}$ и $(\mu_k^1)^{\vartheta_k}$ тоже порождены n -мерными прямоугольными пирамидами с основаниями, лежащими в $\mathbb{R}_{n-1}$ и с вершинами $(0, e_k(1 - \vartheta_k))$ и $(0, d_k \vartheta_k)$ соответственно. Подставляя (8) в (4), получаем

$$(9) \quad \mu \sim \mu_0 + \sum_{k=1}^M (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k} (\mu_k^1)^{\vartheta_k}.$$

Таким образом, функция μ , порожденная произвольным вполне правильным многогранником, посредством операций сложения и умножения представляется в виде конечного числа функций (а именно, функций $\mu_0, (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}, (\mu_k^1)^{\vartheta_k}, k = 1, \dots, M$), порожденных n -мерными пирамидами относительно n -ой оси координат.

Шаг 4. В течение шагов 1 и 2 мы зафиксировали n -ую ось координат и свели общий случай вполне правильного многогранника к случаю n -мерных пирамид относительно n -ой оси координат. Рассмотрим теперь в качестве первоначального вполне правильного многогранника n -мерную пирамиду относительно n -ой оси координат. Зафиксируем $(n - 1)$ -ую ось координат и повторим рассуждения шагов 1 и 2 относительно этой оси. Тогда случай n -мерной пирамиды относительно n -ой оси координат сведется к случаю многогранников, которые являются пирамидами, как относительно n -ой, так и $(n - 1)$ -ой осей координат. Подставляя

полученные оценки для функций $\mu_0, (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}$ и $(\mu_k^1)^{\vartheta_k}$, $k = 1, \dots, M$ (порожденных n -мерными пирамидами относительно n -ой оси координат) в (9), получим оценку функции μ посредством конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных n -мерными пирамидами, как относительно n -ой, так и $(n-1)$ -ой оси координат. Продолжая описанный процесс относительно остальных координатных осей, получим требуемую оценку функции μ посредством конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных n -мерными пирамидами относительно всех осей координат.

3. ПРОСТРАНСТВА ТИПА БЕСОВА

Определение 3. Будем говорить, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+ , если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого мультииндекса α с компонентами из множества $\{0, 1\}$ и любого $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0$ имеет место неравенство

$$(10) \quad |\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi)$$

Замечание 1. Из теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [4]) и оценки (10) следует, что ограниченные в $\mathbb{R}_n$ функции из G^+ являются мультипликаторами Фурье типа (p, p) , $1 < p < \infty$.

Определение 4. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$. Положим

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \|F^{-1}\{\mu^s Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}_n)} < \infty \right\}.$$

Если положить (оператор “поднятия”)

$$(11) \quad I_{\mu^s} = F^{-1}\{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty,$$

то определение пространств Соболева-Лиувилля можно записать в виде

$$H_p^s(\mu) = I_{\mu^s} L_p.$$

Определение 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{\frac{1}{2}, q},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^0(\mu).$$

В [5] доказано, что рассматриваемые пространства типа Бесова могут быть представлены следующим образом

$$(12) \quad B_{p,q}^s(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)} = \left[\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Наиболее важным при рассмотрении пространств типа Бесова, как и В-произведений (см. следующий параграф), является случай “нулевых пространств”, т.е. пространств с нулевым верхним индексом. Как видно из определения 5, общий

случай получается с применением оператора “поднятия” (11). Следующие рассмотрения посвящены именно этому случаю.

Теорема 1. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, тогда

- а) $B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu + \nu) \cap B_{p,q}^0\left(\frac{\mu\nu}{\mu + \nu}\right)$,
 б) $B_{p,q}^0(\mu) + B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu + \nu) + B_{p,q}^0\left(\frac{\mu\nu}{\mu + \nu}\right)$.

Доказательство: Используя (12), замечание 1 и теорему 1 из [7], имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu+\nu) \cap B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu})}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}(\mu+\nu)}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{\mu\nu}{\mu+\nu}}{\left(\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{1}{\nu}}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{1}{\mu}}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c' \left(\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(\nu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(1/\mu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(1/\nu)}^q \right) \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu)}^q. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu)}^q &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu}{\mu^2+t} + \frac{\nu}{\nu^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &= c \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu\nu(\mu+\nu) + t(\mu+\nu)}{\mu^2\nu^2 + t(\mu^2+\nu^2) + t^2} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c' \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu\nu(\mu+\nu)}{\mu^2\nu^2 + t(\mu^2+\nu^2)} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + c' \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{t(\mu+\nu)}{t(\mu^2+\nu^2) + t^2} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}}{\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right)^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu+\nu}{(\mu+\nu)^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu})}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu+\nu)}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}) \cap B_{p,q}^0(\mu+\nu)}^q. \end{aligned}$$

Утверждение а) доказано. Утверждение б) вытекает из утверждения а) при использовании соображения двойственности (см. формулу (3) из [8]).

Замечание 2. Из теоремы 1 работы [7] имеем для $\mu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$

$$B_{p,q}^0(\mu) = B_{p,q}^0\left(\frac{1}{\mu}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{1+\mu^2}{\mu}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\mu}{1+\mu^2}\right).$$

Заметим, что $\mu + 1/\mu > 1$. Таким образом, рассматривая нулевые пространства типа Бесова, можно считать, что $\mu(\xi) > 1$. Если положить $\mu = \lambda/\rho$, $\lambda, \rho \in G^+$, то получим

$$B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda^2 + \rho^2}{\lambda\rho}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2}\right).$$

Замечание 3. Полагая в теореме 1 $\mu = \lambda/\rho$ и $\nu = 1$, получаем

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \cap L_p &= B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right) \cap B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda+\rho}\right), \\ B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) + L_p &= B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right) + B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda+\rho}\right) \end{aligned}$$

для $\lambda, \rho \in G^+$ and $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

4. “В-ПРОИЗВЕДЕНИЯ” ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

Впервые В-произведения пространств типа Бесова были рассмотрены в [2, 3].

Определение 6. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s, m < \infty$. Определим пространство

$$B_{p,q}^s(\mu) \cdot B_{p,q}^m(\nu) = I_{\mu^s \nu^m} (B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)),$$

где

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} \right. \\ &= \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{u^{1/2} \nu}{\nu^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}^q \frac{dt du}{t u} \right]^{1/q} < \infty \Big\}, \end{aligned}$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Будем рассматривать В-произведения пространств типа Бесова, порожденные вполне правильными многогранниками.

Пусть задан вполне правильный многогранник $\mathbf{R}$ с вершинами $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$ ($\alpha_i^j \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$). Порождающая функция $\mu(\xi)$ многогранника $\mathbf{R}$ из (1) является бесконечно дифференцируемой вне координатных осей функцией полиномиального роста, и для нее выполняется оценка (10). Чтобы обеспечить бесконечную дифференцируемость $\mu(\xi)$ и на координатных осях, рассмотрим функцию:

$$(13) \quad \nu(\xi) = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (1 + \xi_i^2)^{\alpha_i^j} \right\}^{1/2}.$$

Из полной правильности многогранника $\mathbf{R}$ следует, что $\mu \sim \nu$, кроме того $\nu \in G^+$. Таким образом, каждый вполне правильный многогранник $\mathbf{R}$ порождает шкалы

пространств $H_p^s(\nu)$ и $B_{p,q}^s(\nu)$, где $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и функция $\nu \in G^+$ определена в (13). Для порождающих функций $\mu(\xi)$ из (1) соответствующие пространства определяются как пополнение класса Шварца S в определенных выше нормах. Из соображений плотности следует (см. [6]), что при $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и $-\infty < s < \infty$

$$H_p^s(\mu) = H_p^s(\nu) \quad \text{и} \quad B_{p,q}^s(\mu) = B_{p,q}^s(\nu).$$

Если многогранник $\mathbf{R}$ является n -мерной треугольной пирамидой, то рассматриваемые H и B пространства совпадают с классическими анизотропными пространствами Соболева-Лиувилля и Бесова соответственно. Кроме того, если положить в (12) $\mu(\xi) = 1$ (многогранник $\mathbf{R}$ совпадает с началом координат), то для произвольных $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s < \infty$ получим $B_{p,q}^0(1) = L_p$, $1 < p < \infty$.

Следующая теорема посвящена наиболее важному случаю произведения нулевых пространств.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{R}$ – произвольный вполне правильный многогранник с функцией ν из (13), $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$(14) \quad B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0,$$

где $B_{p,q}^0$ – классическое изотропное пространство Бесова.

Доказательство. Как показано в [9], нулевые анизотропные пространства Бесова не зависят от анизотропии. В терминах определений 1 и 2, это означает, что нулевые пространства Бесова, порожденные n -мерными треугольными пирамидами совпадают. Если функция λ порождена произвольной n -мерной треугольной пирамидой (см. (1), (13)), а $B_{p,q}^0$ – классическое изотропное пространство Бесова с порождающей функцией $(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{1/2}$, то

$$(15) \quad B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0.$$

Тогда для произвольных двух n -мерных треугольных пирамид с функциями λ и ρ из следствия 1 (см. [2]) имеем

$$(16) \quad B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho) = B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0.$$

Пусть

$$(17) \quad \nu \sim \sum_{k=1}^T \nu_k, \quad \nu_k = \prod_{\ell=1}^L \lambda_{k,\ell},$$

оценка порождающей функции многогранника $\mathbf{R}$, которая следует из основной леммы 1, причем функции $\lambda_{k,\ell}$ ($k = 1, \dots, T$, $\ell = 1, \dots, L$) порождены n -мерными треугольными пирамидами. Из (17) и теоремы 1 имеем

$$(18) \quad B_{p,q}^0(\nu) \supset \bigcap_{k=1}^T B_{p,q}^0(\nu_k).$$

Тогда

$$B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0 \supset \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\nu_k) \cdot B_{p,q}^0] = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k1}\lambda_{k2}\cdots\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})]$$

$$(19) \quad = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = \cdots = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = B_{p,q}^0.$$

Первое вложение в (19) написано на основании (18), второе равенство – на основании (15) и (17), третье и последующие равенства – на основании теоремы 4 из [2], а последнее равенство написано на основании (16). Аналогично доказываем обратное вложение:

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0 &\subset \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\nu_k) \cdot B_{p,q}^0] = \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k1}\lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] \\ &= \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = \cdots = \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = B_{p,q}^0. \end{aligned}$$

5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В-ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В [10, 11] было доказано, что пары $\{H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\}$ и $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Соболева-Лиувилля и Бесова квазилинеаризуемы (см. определение 1.8.4 из [12]). Следующая теорема доказывает справедливость аналогичного утверждения для В-произведений.

Теорема 3. Пусть $\mu, \nu, \lambda, \rho \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Если

$$(20) \quad B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)$$

то интерполяционная пара В-произведений

$$\{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)\}$$

квазилинеаризуема с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1} \left\{ \frac{t\lambda\rho}{\mu\nu + t\lambda\rho} F \right\}, \quad V_1(t) = F^{-1} \left\{ \frac{\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F \right\}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $V_0(t) + V_1(t) = E$, $t > 0$. Поскольку (см. замечание 1 и [4])

$$\frac{t\lambda\rho}{\mu\nu + t\lambda\rho} \in M_p, \quad \frac{\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} \in M_p, \quad t > 0,$$

с нормами, не зависящими от t , то

$$(21) \quad \|V_0(t)f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)},$$

$$(22) \quad \|V_1(t)f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)}.$$

Используя (20) и теорему Фурье из [4] имеем

$$\begin{aligned} \|V_0(t)f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} &= \left\| F^{-1} \frac{t\lambda\rho\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} \\ &\sim \left\| F^{-1} \frac{t\lambda\rho\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)} = \left\| F^{-1} \frac{t\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(23) \quad & \leq ct \|f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)}, \\
& \|V_1(t)f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} = \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho \mu \nu}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)} \\
& \sim \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho \mu \nu}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} = \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} \\
(24) \quad & \leq \frac{c}{t} \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)}.
\end{aligned}$$

Неравенства (21)-(24) показывают, что выполнены все условия квазилинеаризуемости (см. определение 1.8.4 из [12]) пары рассматриваемых В-произведений. Таким образом, теорема доказана.

Непосредственным следствием свойства квазилинеаризуемости является двусторонняя оценка K -функционала Петре (см. лемму 1.8.4 из [12]).

Следствие 1. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, тогда

$$(25) \quad K(t, f; B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)) \sim \left\| F^{-1} \frac{t \mu \nu \lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}$$

где $f \in B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu) + B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)$ и $t > 0$.

Теорема 4. Пусть $\mu, \nu, \lambda, \rho \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$. Если выполняется равенство (20), то

$$(26) \quad (B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)) = I_{(\mu\nu)^{1-\vartheta}(\lambda\rho)^\vartheta} [B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)].$$

Доказательство. С помощью (25) и определения метода вещественной интерполяции (см. [12]), оценим норму интерполяционного пространства слева в (26):

$$\begin{aligned}
(27) \quad & \|f\|^q \sim \int_0^\infty t^{-\vartheta q} \left\| F^{-1} \frac{t \mu \nu \lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t} \\
& = \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\vartheta} \left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho} \right)^\vartheta}{\frac{\mu \nu}{\lambda \rho} + t} (\mu \nu)^{1-\vartheta} (\lambda \rho)^\vartheta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Из теоремы 3 из [8] и (27)

$$(28) \quad \|f\|^q \sim \left\| F^{-1} (\mu \nu)^{1-\vartheta} (\lambda \rho)^\vartheta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q.$$

Для оценки нормы справа в (28) воспользуемся свойствами В-произведений (см. [2]). Из теоремы 4 из [2] и (20) имеем

$$\begin{aligned}
(29) \quad & B_{p,q}^0\left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}\right) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0\left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}\right) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho) \\
& = B_{p,q}^0(\mu \nu) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu).
\end{aligned}$$

Подставляя (29) в (28) приходим к (26). Теорема доказана.

Теорема 2 и результаты работы [2] показывают, что во многих интересных случаях условие (20) теорем 3 и 4 выполняется.

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В [2] доказано, что интерполяционное пространство, полученное методом вещественной интерполяции для пары пространств типа Бесова, описывается в терминах В-произведений, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ and $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$. Тогда

$$(30) \quad (B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)) = B_{p,q}^{1-\vartheta}(\mu) \cdot B_{p,q}^{\vartheta}(\nu).$$

Равенство (30) с помощью оператора поднятия (11) можно записать в виде

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta,q} = I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}} [B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)].$$

Теперь применение теоремы 2 приводит к следующей теореме

Теорема 6. Пусть функция μ порождена произвольным вполне правильным многогранником, а функция ν порождена n -мерной треугольной пирамидой. Тогда при p, q, ϑ , $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \vartheta < 1$

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta,q} = I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}} B_{p,q}^0,$$

где $B_{p,q}^0$ классическое изотропное пространство Бесова.

Возвращаясь к нулевым В-пространствам, на основании теоремы 2 можно доказать следующую теорему вложения для пространств, порожденных вполне правильными многогранниками.

Теорема 7. Пусть функция μ порождена произвольным вполне правильным многогранником, $1 < p < \infty$. Тогда

$$(31) \quad a) \quad B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^0(\mu) \subset L_p \quad \text{при} \quad 1 \leq q \leq \min\{p, 2\},$$

$$(32) \quad b) \quad L_p \subset B_{p,q}^0(\mu) \subset B_{p,q}^0 \quad \text{при} \quad \min\{p, 2\} \leq q \leq \infty.$$

Доказательство: Правое вложение в (31) и левое вложение в (32) следуют из теоремы 3.1 из [3]. Пусть $1 \leq q \leq \min\{p, 2\}$. Тогда, как известно (см. [12]), для классических пространств Бесова имеет место вложение $B_{p,q}^0 \subset L_p$. На основании теоремы 2 имеем

$$B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^0(\mu) \cdot L_p = B_{p,q}^0(\mu).$$

Аналогично, при $\min\{p, 2\} \leq q \leq \infty$ имеем

$$B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0 \supset B_{p,q}^0(\mu) \cdot L_p = B_{p,q}^0(\mu).$$

Теорема доказана.

Abstract. The paper derives a representation of classical Besov zero spaces by means of the so called B-products of the generalized Besov type zero spaces, generated by completely regular polyhedrons. Peetre's K-functional is estimated and an interpolation formula of "real method" is proved for pairs of B-products. Some applications of these results are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств* (Мир, Москва, 1986).
- [2] А. Г. Багдасарян, "О "В-произведениях" пространств типа Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **41** (1), 15-26 (2006).
- [3] A. G. Baghdasaryan, "On the Interpolation Properties of Certain Generalized Spaces of Besov Type", Jenaer Schriften zur Math. und Inform., Friedrich-Schiller Universitat, Jena, Math/Inf/12/03, 56 (3003).
- [4] П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР **152**, 808-811 (1963).
- [5] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщенных пространств типа Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 15-26 (2003).
- [6] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН **20** (1), 3-74 (1965).
- [7] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, Математика **36** (5), 14-22 (2001).
- [8] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщенных пространств типа Никольского-Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 49-62 (2003).
- [9] П. И. Лизоркин, "Изоморфизм пространств Бесова $B_{p,\theta}^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ с пространством $l_\theta/l(p)$. О нулевых пространствах $B_{p,\theta}^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ ", Analysis Mathematica **2**, 203-210 (1976).
- [10] А. Г. Багдасарян, "О промежуточных пространствах и о квазилинеаризуемости пары пространств типа Лиувилля-Соболева", Analysis Mathematica **24**, 3-14 (1998).
- [11] А. Г. Багдасарян, "Интерполяционные свойства обобщенных пространств типа Лизоркина-Трибеля и Никольского-Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **40** (3), 16-23 (2005).
- [12] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы* (Мир, Москва, 1980).

Поступила 8 июня 2007

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ В КРИТИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ

Р. Н. ЧИТЧЯН И А. Р. МАРТИРОСЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: becam@cln.am, artakm81@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрены риски страховой компании, занимающейся только операциями с рентой. В условиях критической загрузки и правильного изменения хвоста функции распределения страховых выплат найдены асимптотики функций распределения процессов неразорения страховой компании.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены риски страховой компании, занимающейся только операциями с рентой. Страховая компания предоставляет клиентам постоянные выплаты, что с постоянной скоростью $c < 0$ уменьшает резервный фонд. Без нарушения общности пусть $c = -1$. Это достигается выбором денежной единицы. С другой стороны, страховые случаи (смерть клиента или прерывание договора) в случайные моменты $t_1, t_2, \dots$ увеличивают резервы компании на величины невыплаченных рент $X_1, X_2, \dots$ – положительные, независимые и одинаково распределенные случайные величины (СВ). Моменты возникновения страховых случаев $t_1, t_2, \dots$ имеют распределение Пуассона с интенсивностью λ , а страховые выплаты – функцию распределения (ФР) F ($F(x) < 0, x < 0$). Страховая сумма $S(u) = \sum_{0 \leq t_i \leq u} X_i$, которую компания выплачивает за промежуток времени $(0, u]$, является обобщенным пуассоновским процессом с интенсивностью λ и ФР страховых сумм F . Тогда

$$P\{S(u) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^n}{n!} F^{n*}(x),$$

где F^{n*} есть n -кратная свертка ФР F , $F^{0*}(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $F^{0*}(x) = 0$ при $x < 0$, а P – вероятность. Резервный фонд $\gamma(u) = x - u + S(u)$ компании, где x – начальный капитал, в некоторый момент он может стать отрицательным и компания попадет в ситуацию разорения. Чтобы за $(0, t]$ не произошло разорение, необходимо, чтобы $u - S(u) \leq x$ при $u \in (0, t]$ (или $u \in (0, \infty]$).

ФР процессов разорения

$$r(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} [u - S(u)] \quad \text{и} \quad r = \sup_{0 \leq u < \infty} [u - S(u)]$$

обозначим через $W(t, x)$ и $W(x)$ соответственно. Известно, что (см. [1], стр. 164)

$$(1) \quad W(t, x) = 1 - \int_x^t \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, \quad 0 < x \leq t,$$

и

$$(2) \quad W(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = 1 - e^{\omega x}, \quad x > 0,$$

где ω – наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения

$$\nu(s) \stackrel{\text{def}}{=} s - \lambda(1 - \psi(s)) = 0.$$

при этом, (см. [1], стр. 52, теорема 4) $\omega = 0$, если $0 \leq \rho_1$ и $\omega = 0$, если $\rho_1 > 1$.

Целью статьи является анализ ФР $W(t, x)$ и $W(x)$ при следующих условиях.

1) Преобразование Лапласа-Стильеса (ПЛС)

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

допускает асимптотическое представление:

$$(3) \quad \psi(s) - 1 + as \sim As^\gamma L\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \downarrow 0, \quad A > 0 \quad (1 < \gamma \leq 2),$$

где a – математическое ожидание X_i , а измеримая $L(x) > 0$ – медленно меняющаяся функция (ММФ) на бесконечности (см. [2]). Если L – ММФ, то (см. [3]) $x^\delta L(x) \rightarrow 0$ и $x^{-\delta} L(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ при любом $\delta > 0$. Поэтому

$$(4) \quad \varepsilon(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{s}\right) \xrightarrow{s \downarrow 0} 0, \quad 1 < \gamma \leq 2,$$

что придает смысл (3). Более того, (4) выполнено равномерно по a .

2) Пусть $\rho_1 = \lambda a \rightarrow 1$. Обозначим

$$B = \lambda A, \quad \rho = |1 - \rho_1|, \quad F^*(x) = \frac{1}{a} \int_0^x [1 - F(y)] dy,$$

$$\psi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF^*(x), \quad \psi^*(s) = \frac{1 - \psi(s)}{s}, \quad s > 0.$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ

Теорема 1. Пусть $\{S(u) : 0 \leq u \leq \infty\}$ сепарабельный, случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого – неубывающие ступенчатые функции, обращающиеся в нуль при $u = 0$. Существует распределение $U_y(x) = U(x, y)$ такое, что

$$W(t, x) = \begin{cases} 1 - \int_x^t d_y U(x, y), & 0 < x \leq t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$

$$W(x) = 1 - \int_x^\infty d_y U(x, y) = 1 - e^{-x\omega}, \quad x > 0,$$

где

$$\int_0^\infty e^{-sy} d_y U(x, y) = e^{-x\omega(s)},$$

а $z = \omega(s)$ – единственный корень уравнения $\nu(z) = s$ в области $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Доказательство: С учетом $W(t, x) = 1$ при $x \geq t$, из формул (1) и (2) имеем

$$W(t, x) = \begin{cases} 1 - \int_0^t \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$

и

$$W(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, \quad x > 0.$$

Известно, что (см. [1], стр. 67)

$$(5) \quad \int_x^\infty e^{-sy} \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x\omega(s)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Заметим, что $P\{S(y) \leq y - x\} = 0$ при $y < x$. Следовательно, из (5) получаем

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x\omega(s)}.$$

Так как $e^{-x\omega(0)} = e^{-x\omega}$, то, обозначив

$$(6) \quad \varphi(x, s) = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{x e^{x\omega}}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x(\omega(s) - \omega)},$$

имеем $\varphi(x, 0) = 1$. Покажем, что функция $\varphi(x, s)$ вполне монотонна (ВМ), т.е. $(-1)^n \varphi_s^{(n)} \geq 0$ (см. [5]). Очевидно, что функция e^{-xs} – ВМ. Покажем, что функция $\omega(z) - \omega > 0$ имеет ВМ производную. Так как $\omega(s)$ – решение уравнения $\nu(s) = s$, то, обозначив

$$\beta(s) = 1 + \frac{s}{\lambda} - \frac{\omega(s)}{\lambda} = \psi(\omega(s)),$$

получаем

$$(7) \quad \omega(s) = s + \lambda - \lambda\beta(s),$$

$$(8) \quad \psi(s + \lambda - \lambda\beta(s)) = \beta(s).$$

Из (8) заключаем, что (см. [5], стр. 497) функция $\beta(s)$ – ПЛС для некоторой неубывающей функции. Не нарушая общности, предположим, что функция $\beta(s)$ является ПЛС собственной ФР (в противном случае, разделив $\beta(s)$ на $\beta(0) > 0$, получаем $\beta(0) = 1$). Следовательно, (см. [5], стр. 495, теорема 1), функция $\beta(s)$ ВМ, иначе,

$$(9) \quad (-1)^k \beta^{(k)}(s) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Из условия (7) следует, что $(\omega(s) - \omega)' = 1 - \lambda\beta'(s)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (-1)^n ((\omega(s) - \omega)')^{(n)} &= (-1)^n (1 - \lambda\beta'(s))^{(n)} \\ &= \lambda(-1)^{n+1} (\beta''(s))^{(n-1)} = \lambda(-1)^{n+1} (\beta^{(n+1)}(s)) \geq 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Из (9) (при $k = 1$) получаем $(\omega(s) - \omega)' = 1 - \lambda\beta'(s) \geq 0$ (для $n = 0$). Итак, функция $(\omega(s) - \omega)'$ является ВМ. Так как функция $\varphi(x, s)$ есть суперпозиция ВМ функции e^{-xs} и функции $\omega(s) - \omega > 0$ с ВМ производной, то функция $\varphi(x, s)$ ВМ (см. [5], стр. 497). Поэтому, согласно теореме 1 из [1] (стр. 495)

$$\varphi(s, x) = \int_0^\infty e^{-sy} d_y G(x, y).$$

Учитывая форму (6) функции $\varphi(x, s)$, по теореме единственности, получаем

$$\frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = d_y \{e^{-x\omega} G(x, y)\}.$$

Таким образом, функция $U(x, y) = e^{-x\omega} G(x, y)$ имеет ПЛС $e^{-x\omega(s)}$, что завершает доказательство.

Замечание 1. Если случайный процесс $\{S(u) : 0 \leq u \leq \infty\}$ имеет плотность, то (см. [1], стр. 51)

$$U(x, y) = \int_0^y \frac{x}{u} \frac{\partial P\{S(u) \leq u - x\}}{\partial x} du.$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть

$$L_2^{(\gamma-1)}(t) = \frac{1}{t^{\gamma-1}} \frac{1}{M^{(\gamma-1)}(t)},$$

где $M^{(\gamma-1)}(t)$ – обратная к $t^{\gamma-1}/L(t)$ функция. Тогда (см.[3])

$$\omega \sim \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right) \quad \text{при} \quad \rho_1 \downarrow 1.$$

При $\rho \uparrow 1$ для величин порядка

$$(\rho/B)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)$$

также используем обозначение $\omega \sim (\rho/B)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)$, предполагая, что $\rho/B \rightarrow 0$ при $\rho_1 \uparrow 1$.

Пусть функции $\nabla(s)$ и $\Delta(s)$ – единственные решения уравнений $z^\gamma - z = s$ и $z^\gamma + z = s$ ($s \geq 0$), с условиями $\nabla(0) = 1$ и $\Delta(0) = 0$ (см., например, [4]), тогда имеет место следующий результат из [4].

Лемма 1. Если $\alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ при условии (3), то

$$\omega(\alpha(\rho)s) \sim \beta(\rho)A(s)L_0, \quad \rho_1 \rightarrow 1,$$

где

$$\beta(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \frac{\alpha(\rho)}{\rho}, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho) \sim o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \\ \left(\frac{\alpha(\rho)}{B}\right)^{1/\gamma}, & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \end{cases}$$

$$A(s) = \begin{cases} 1, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ s, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \nabla(s), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \Delta(s), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ s^{1/\gamma}, & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \end{cases}$$

$$L_0 = \begin{cases} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right), & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ 1, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \\ L_2^{(\gamma)}\left(\frac{B}{\alpha(\rho)}\right), & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1. \end{cases}$$

Из формулы (2) и леммы 1 следует, что

Теорема 2. Пусть выполнено условие (3) и $\vartheta(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho_1 \rightarrow 1$, тогда предел

$$\lim_{\rho_1 \downarrow 1} P\{\vartheta(\rho)r \leq x\} = 1 - e^{-x}, \quad x > 0,$$

существует в том и только том случае, когда

$$\vartheta(\rho) \sim \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right) \sim \omega.$$

Пусть $\alpha(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\beta(\rho)$ определено как в лемме 1. При согласованной сходимости $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$, $0 < \tau \leq \infty$ верно следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (3). Если $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$ при $\rho \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ так что $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$, $0 < \tau \leq \infty$, то существует предел

$$\lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1 - \int_0^\tau d_\nu U_0(x, \nu), \quad x > 0,$$

где через (ρ, t) обозначена пара $\rho \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и

$$\int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U_0(x, \nu) = e^{-sA(s)}, \quad s \geq 0.$$

В остальных случаях

$$\lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1, \quad x > 0,$$

где $\vartheta(\rho) = o(\beta(\rho)L_0)$ и $\beta(\rho)L_0 = o(\vartheta(\rho))$.

Доказательство: Из теоремы 1 имеем
(10)

$$P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = P\left\{r(t) \leq \frac{x}{\vartheta(\rho)}\right\} = \begin{cases} 1 - \int_x^t d_y U_1\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, y\right), & 0 < x \leq t\vartheta(\rho), \\ 1, & x \geq t\vartheta(\rho), \end{cases}$$

где

$$(11) \quad \int_0^\infty e^{-sy} d_y U_1(x, y) = e^{-x\omega(s)}.$$

В формулах (10) и (11), произведя замену переменной интегрирования $y = \nu/\alpha(\rho)$, получаем

$$P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = \begin{cases} 1 - \int_{x\frac{\alpha(\rho)}{\vartheta(\rho)}}^{t\alpha(\rho)} d_\nu U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right), & 0 < x \leq t\vartheta(\rho), \\ 1, & x > t\vartheta(\rho), \end{cases}$$

и

$$(12) \quad \int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right) = e^{-x\frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\vartheta(\rho)}}.$$

По лемме 1, $\omega(\alpha(\rho)s) \sim \beta(\rho)A(s)L_0$ при $\rho_1 \rightarrow 1$. Следовательно, по обобщенной теореме непрерывности (см. [5], стр. 488), из (12) заключаем, что невырожденный предел

$$U_0(x, \nu) = \lim_{\rho \rightarrow 0} U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right)$$

существует тогда и только тогда, когда $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$. Остальные случаи $\vartheta(\rho) = o(\beta(\rho)L_0)$ и $\beta(\rho)L_0 = o(\vartheta(\rho))$ являются вырожденными, т.е. в этих случаях

$$\lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\}, \quad x > 0.$$

Переходя к пределу в формуле (12), получим

$$\int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U_0(x, \nu) = e^{-xA(s)}.$$

Так как $\omega(s) = s + \lambda(1 - \psi(\omega(s))) \geq s$, то при $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$ получаем, что для произвольного s , когда $\rho < \rho_0$, справедливо соотношение

$$\frac{\alpha(\rho)s}{\vartheta(\rho)} \sim \frac{\alpha(\rho)s}{\beta(\rho)L_0} \leq \frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\beta(\rho)L_0} \sim \frac{\beta(\rho)L_0 A(s)}{\beta(\rho)L_0} = A(s)$$

Таким образом,

$$(13) \quad \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_0} \leq \frac{A(s)}{s}, \quad \rho < \rho_0.$$

Так как (13) верно при любом фиксированном s , то

$$(14) \quad \frac{\alpha(\rho)}{\vartheta(\rho)} \sim \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_0} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0,$$

Поскольку $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$ ($0 < \tau \leq \infty$), то, учитывая (14), получаем

$$(15) \quad \lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1 - \int_0^\tau d_\nu U_0(x, \nu),$$

При этом, так как $x \leq t\vartheta(\rho) = t\alpha(\rho) \frac{\vartheta(\rho)}{\alpha(\rho)} \xrightarrow{(\rho, t)} \infty$, то это соотношение верно для любого $x > 0$.

Замечание 2. При фиксированном t и произвольном $\vartheta(\rho)$ таком, что $\vartheta(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ верно соотношение

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1, \quad x > 0.$$

Abstract. The paper considers the risks of the insurance companies that conduct purely rent operations. The asymptotic of certain distribution functions are found in the case of a heavy traffic and regular tail variation of the premium distribution function.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Такач, *Комбинаторные методы в теории случайных процессов* (Мир, Москва, 1971).
- [2] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции* (Наука, Москва, 1985).
- [3] А. М. Седлецкий, *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Современная математика. Фундаментальные направления **5** (Москва, 2003).
- [4] А. Р. Мартиросян, Р. Н. Читчян, “Анализ страховых моделей с положительными страховыми выплатами в критической ситуации”, *Информационные технологии и управление* **6** (Ереван, 2007).
- [5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* **2** (Мир, Москва, 1984).

Поступила 6 июня 2007

ФАКТОРИЗАЦИЯ МЕРОМОРФНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Р. А. АМИРДЖАНИЯН И А. Г. КАМАЛЯН

*Российско-Армянский Университет
E-mail: hrach2004@mail.ru
Ереванский Государственный Университет
E-mail: kamalyan-armen@yahoo.com*

Аннотация. Рассматривается класс матриц-функций определенных на некотором контуре комплексной плоскости и допускающих мероморфное продолжение во внутреннюю либо внешнюю области контура. Данный класс матриц-функций, вообще говоря, не обладает стандартной факторизацией Винера-Хопфа. В работе для указанных классов матриц-функций исследуется задача индексной факторизации, близкой по своим свойствам к факторизации Винера-Хопфа. Найдены критерии индексной факторизации и точные формулы для частных индексов. Предлагается конструктивный метод, сводящий задачу факторизации к решению конечного числа явно записываемых систем линейных алгебраических уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории краевых задач для аналитических функций и в теории операторов теплицева типа возникает необходимость представления матрицы-функции G порядка $n \times n$, определенной на некотором замкнутом контуре Γ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в виде

$$(1.1) \quad G(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\Lambda(t) = \text{diag} [t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$ ($\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$), а матрицы-функции $G_{\pm}^{\pm 1}$ являются граничными значениями матриц-функций, аналитических соответственно во внутренней Ω^+ ($\ni 0$) и во внешней Ω^- ($\ni \infty$) областях контура Γ . Числа κ_i ($i = 1, \dots, n$) называются частными индексами G . Предполагается, что $G_{\pm}$ обладают дополнительными граничными свойствами обеспечивающими, в частности, однозначность частных индексов.

Среди факторизаций типа (1.1), наиболее хорошо исследована факторизация, известная в литературе под названием Винера-Хопфа (точное определение см. ниже). В настоящее время критерии существования факторизации Винера-Хопфа известны для широких классов матриц-функций (см. например, [1]-[4]). Несмотря на это, конструктивная теория факторизации Винера-Хопфа (в случае $n > 1$) построена для весьма узких классов матриц-функций. Наиболее полное исследование в этом плане проведено для аналитических (и близких к ним по структуре мероморфных) матриц-функций.

Необходимые и достаточные условия факторизуемости матриц-функций, представляющихся в виде суммы матрицы-функции из класса Смирнова и рациональной матрицы-функции с полюсами вне контура, получены И.М. Спитковским (см. [5] и [4]). Им же предложена рекурсивная процедура построения факторизации. Общий подход построения факторизации аналитических оператор-функций предложен в [6] и основан на теории минимальной факторизации аналитических оператор-функций, развитой авторами этой работы. Явная факторизация для различных классов мероморфных матриц-функций построена в работах [7, 8, 9]. Несмотря на различие методов, результаты всех этих работ формулируются в терминах степенных моментов (относительно контура Γ) матрицы-функции, обратной к факторизуемой.

В работах [10, 11] рассматривается факторизация более общего характера, чем (1.1) и изучается ее связь с векторной задачей Римана.

В работе [13] (см. также [12]) вводится понятие индексной факторизации, позволяющей за счет ослабления требований на граничные значения $G_{\pm}^{-1}$, существенно расширить класс матриц-функций, допускающих представление (1.1). Заметим, что в случаях, когда м.-ф. G допускает факторизацию Винера-Хопфа, ее индексная факторизация существует и одновременно является факторизацией Винера-Хопфа.

Настоящая работа посвящена исследованию индексной факторизации мероморфных матриц-функций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть Ω_j ($j = 0, 1, \dots, m$) односвязные ограниченные области комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такие, что $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0$, $\overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_i = \emptyset$ ($i, j = 1, \dots, m$), а границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$ ($j = 0, \dots, m$) являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Предполагается, что контур $\Gamma = \bigcup_{j=0}^m \Gamma_j$ ориентирован таким образом, что при его обходе, внутренняя область $\Omega^+ = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j$ остается слева, а внешняя область $\Omega^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}^+$ — справа.

Пусть $E_p^{\pm}$ ($0 < p \leq \infty$) — классы Смирнова областей $\Omega^{\pm}$ (по поводу определений, см. [14]–[16], а также [4]), $\overset{\circ}{E}_p^-$ — класс функций из E_p^- , исчезающих на бесконечности, а $L_p^{\pm}(\overset{\circ}{L}_p^-)$ — множество функций из L_p ($= L_p(\Gamma)$), совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^{\pm}(\overset{\circ}{E}_p^-)$. Ниже через R будем обозначать множество рациональных функций, а через R_0 — множество рациональных функций с полюсами вне контура Γ . Множество мероморфных в Ω^+ (Ω^-) функций φ , для каждой из которых существует ненулевой многочлен q_+ (существуют ненулевой многочлен q_- и целое число k ($k \geq 0$)) такой (такие), что $q_+\varphi \in (L_p^+)$ ($t^{-k}(q_-\varphi)(t) \in \overset{\circ}{L}_p^-$) будем обозначать через $\widetilde{M}_p^+$ ($\widetilde{M}_p^-$). Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathcal{L}_p := L_p^+ + \overset{\circ}{L}_p^-, \quad M_p^{\pm} := L_p^{\pm} + R_0, \quad L^{\pm} = \bigcup_{p>0} L_p^{\pm}, \quad M^{\pm} = \bigcup_{p>0} M_p^{\pm}.$$

Скажем, что $\Gamma \in \mathcal{S}$, если все области $\Omega_j, C \setminus \overline{\Omega}_j$ ($j = 0, \dots, m$) являются смирновскими (относительно определения смирновской области и достаточных условий для $\Gamma \in \mathcal{S}$ см. [14]-[18], а также [4]).

Ниже пространство вектор-столбцов порядка n (матриц порядка $n \times n$) с элементами из линейного пространства X обозначается через X^n и $(X^{n \times n})$. Вместо часто встречающихся слов матриц-функция и вектор-функция используются сокращения м.-ф. и в.-ф. соответственно.

Под правой факторизацией Винера-Хопфа в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) относительно контура Γ (далее $WH(r, p)$ -факторизация) м.-ф. G мы понимаем (см. [4]) представление (1.1), где

$$G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^n, \quad G_{\pm}^{-1} \in (L_q^{\pm})^n, \quad q = p/(p-1),$$

$$\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}], \quad t \in \Gamma, \quad \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n, \quad \kappa_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Числа $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ называются правыми частными индексами матриц-функции G (далее $WH(r, p)$ – частные индексы м.-ф. G).

2.2. В работе [13] введены понятия (r_+, p) – частных индексов и (r_+, p) – индексной факторизации м.-ф. G (далее $I(r_+, p)$ -факторизация ($1 \leq p \leq \infty$)). Приведем определения этих понятий и некоторые факты, необходимые в дальнейшем.

Пусть м.-ф. G порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Γ принимают конечные комплексные значения. Через $\mathcal{D}_p^+(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначим пространство всех в.-ф. $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, а через $\mathcal{D}_p^-(G)$ – пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (L_p^-)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$.

Оператор, проектирующий $\mathcal{L}_p$ на L_p^+ или на $\overset{\circ}{L}_p^-$ ($1 \leq p \leq \infty$) параллельно $\overset{\circ}{L}_p^-$ или L_p^+ соответственно обозначим через P_+ или P_- . Действие проекторов $P_{\pm}$ на в.-ф. и м.-ф. понимается покомпонентно.

Пусть $T_p(G)$ – оператор Теплица ($1 \leq p \leq \infty$) с областью определения $\mathcal{D}_p^+(G)$, действующий по формуле

$$T_p(G)\varphi_+ = P_+(G\varphi_+), \quad \tau_{\alpha} \quad (\alpha \in C),$$

и τ_{α}^- ($\alpha \in \overline{C} \setminus \{0\}$) – операторы сдвига, действующие на функцию $f \in$ (соответственно в.-ф. и м.-ф.) по формулам

$$(\tau_{\alpha}f)(t) = (t - \alpha)f(t), \quad \tau_{\alpha}^- = -(\alpha)^{-1}\tau_{\alpha}\tau_0^{-1} \quad (\tau_{\infty}^- = (\tau_0)^{-1}).$$

Обозначим через $N_{p,j}(G)$ ($j \in \mathbb{Z}$) ядра оператора $T_p(\tau_0^{-j}G)$. Следуя [12], подпространство

$$\hat{N}_{p,j}(G) = N_{p,j}(G) + \tau_0 N_{p,j}(G)$$

будем называть $(p, j)_+$ -наследственным подпространством, а его произвольное прямое дополнение $M_{p,j}(G)$ в $N_{p,j+1}^-$ $(p, j)_+$ -индексным подпространством м.-ф. G . Определим числа

$$\mu_p(G, j) = \dim M_{p,j}(G).$$

В [12] доказывается, что

$$\hat{n}(G) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_p(G, j) \leq n.$$

В случае $\hat{n}(G) = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию.

Пусть

$$\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j; \mu_p(G, j) > 0\}, \quad \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_s \quad (s \in N)$$

и $n_j = \mu_p(G, \eta_j)$. Числа $\kappa_1 = \dots = \kappa_{n_1} = \eta_1$ и

$$\kappa_{n_1+1} = \dots = \kappa_{n_1+n_2} = \eta_2, \dots, \kappa_{n_1+n_2+\dots+n_{s-1}+1} = \dots = \kappa_{\hat{n}(G)} = \eta_s$$

будем называть (r_+, p) -частными индексами м.-ф. G . Для каждой точки $z \in \Omega^+$ рассмотрим также подпространства

$$N_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z) : \varphi \in N_{p,j}(G)\} \quad \text{и} \quad M_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z) : \varphi \in M_{p,j}(G)\}.$$

В работе [12] доказано, что число $\dim N_{p,j}(G; z)$ одновременно для всех $j \leq \eta_1$ и почти для всех $z \in \Omega^+$ является постоянной, которую обозначим через $\mu_p(G; -\infty)$. Там же (см. также [13]) доказывается, что число $\dim N_{p,j}(G; z)$ равно $\mu_p(G; -\infty) + \hat{n}(G)$ одновременно для всех $j > \eta_s$ и почти для всех $z \in \Omega^+$ и, что $\dim N_{p,j}(G; z)$ не превышает $\mu_p(G; -\infty) + \hat{n}(G)$ для остальных z . Определим

$$\mu_p(G; +\infty) := n - \hat{n}(G) - \mu_p(G; -\infty).$$

Отсюда в частности следуют следующие утверждения, необходимые нам в дальнейшем (см. также [12], [13]).

- I. $\mu_p(G; -\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $j \in Z$ такое, что $\dim N_{p,j}(G) = 0$.
- II. $\mu_p(G; +\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $j \in Z$ и $z \in \Omega^+$ такие, что $\dim N_{p,j}(G, z) = n$.

В работе [13] доказано, что если $\mu_p(G, -\infty) = 0$, то

$$\dim N_{p,k}(G) = \sum_{j < k} (k - j) \mu_p(j, G), \quad k \in Z.$$

Отсюда, пользуясь стандартными рассуждениями (см., например, [9]), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

- III. Пусть $\mu_p(G, -\infty) = 0$, а η_0 и η_{s+1} — произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям $\eta_0 \leq \eta_1$, $\eta_{s+1} \geq \eta_s$, $\eta_0 < \eta_{s+1}$. Тогда для любых $i = 1, 2, \dots, \hat{n}(G)$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф G удовлетворяют равенствам

$$(2.1) \quad \kappa_i = \eta_0 + \text{card}\{j : \dim N_{p,j}(G) - \dim N_{p,j-1}(G) < i, j = \eta_0 + 1, \dots, \eta_{s+1}\}.$$

Скажем, что м.-ф. G допускает (r_+, p) -индексную факторизацию (см. [13]), если G допускает представление (1.1), а факторы $G_{\pm}$ и Λ удовлетворяют условиям:

- а) $G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^{n \times n}$,
- б) для любых $z \in \bar{\Omega}^+$ и $V \in C^n$, $V \neq 0$, в.-ф. $\tau_z^{-1} G_+ V$ не принадлежит $\mathcal{D}_p^+(G)$,
- в) для любых $z \in \Omega^-$ и $V \in C^n$, $V \neq 0$, в.-ф. $(\tau_z^-)^{-1} G_- V$ не принадлежит $\mathcal{D}_p^-(G)$,
- г) $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$, где $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$ — целые числа.

Справедливы следующие утверждения (см. [12] и [13]).

IV. Пусть м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию, $\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j, \mu_p(G, j) > 0\}$ ($s \in N$), а $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n - (r_+, p)$ -частные индексы G . Тогда м.-ф. G допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию. Кроме того, если $M_{p, \eta_k}(G)$ ($k = 1, \dots, s$) некоторые $(p, \eta_k)_+$ -индексные подпространства м.-ф. G , а столбцы м.-ф. G'_+ являются базисом пространства $M_{p, \eta_1}(G) + \dots + M_{p, \eta_s}(G)$, то представление

$$G = G'_- \Lambda (G'_+)^{-1}, \text{ где } \Lambda = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}] \text{ и } G'_- = GG_+ \Lambda^{-1},$$

является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. G .

V. Пусть $\mu_p(G, -\infty) = 0$ и представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. G с $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$. Тогда м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию с (r_+, p) -частными индексами равными $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Если

$$\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j, \mu_p(G, j) > 0\} \quad (s \in N), \quad n_j = \mu_p(G, \eta_j) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$G_{11}^+, \dots, G_{1n_1}^+, G_{21}^+, \dots, G_{2n_2}^+, \dots, G_{s1}^+, \dots, G_{sn_s}^+$ столбцы матриц-функций G_+ , то $\text{span}\{G_{k1}^+, \dots, G_{kn_k}^+\}$ ($k = 1, \dots, s$) является $(p, \eta_k)_+$ -индексным подпространством м.-ф. G .

VI. Если м.-ф. G обладает тем свойством, что из условий $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ и $G\varphi = 0$ следует, что $\varphi = 0$, то условие в) $I(r_+, p)$ -факторизации выполняется и для $z \in \Gamma$.

2.3. М.-ф. B , мероморфную в области Ω^+ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем p -допустимой в Ω^+ ($1 \leq p \leq \infty$), если существует ненулевой многочлен g такой, что из условия $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ следует $gB\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Обозначим множество p -допустимых в Ω^+ м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$. Обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^+)$ подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, состоящее из аналитических в Ω^+ м.-ф.. Нетрудно заметить, что если $B \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, то из условия $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ следует, что $B\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Заметим также, что для того, чтобы м.-ф. $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 из [4]):

- 1) $B \in (\widetilde{M}_q^+)^{n \times n}$, $q = p/(p-1)$,
- 2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $B \in (M^+)^{n \times n}$.

Для м.-ф. G , определенной на контуре Γ , через $\overset{\circ}{D}_p^-(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначим пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_p^-)^n$ таких, что $G\varphi_- \in \mathcal{L}_1^n$. Тогда м.-ф. G , мероморфную в области Ω^- и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем p -допустимой в Ω^- , если существуют ненулевой многочлен g и число $k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 0$), такие, что из условия $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(G)$ следует, что $\tau_0^{-k} g G \varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_1^-)^n$. Обозначим множество p -допустимых в Ω^- м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, состоящее из аналитических м.-ф. в Ω^- обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^-)$. Если $G \in \mathcal{F}_p(\Omega^-)$ и $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(G)$, то $G\varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_1^-)^n$. Заметим также, что для того,

чтобы $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 из [4]).

- 1) $G \in \left(\widetilde{M}_q^-\right)^{n \times n}$, $q = p/(p-1)$,
- 2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $G \in (M^-)^{n \times n}$.

Нетрудно видеть, что из условий $g \in R$ и $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^\pm)$ следует, что $gG \in \mathcal{MF}_p(\Omega^\pm)$. М.-ф. G , мероморфную в области $\Omega^\pm$ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем регулярной в $\Omega^\pm$, если $\det G$ тождественно не равен нулю в $\Omega^\pm$.

Пусть $\mathcal{B}(A)$ регулярная м.-ф. в Ω^+ (Ω^-). Ганкелевы операторы $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ и $H_p^-(A^{-1})$ с областью определения $\mathcal{D}_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p^-(A^{-1})$ соответственно определим по формулам:

$$H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi = P_-(\mathcal{B}^{-1}\varphi), \quad H_p^-(A^{-1})\varphi = P_+(A^{-1}\varphi).$$

Пусть

$$J_s = \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k; y_k \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C} \right\}, \quad s \in N,$$

$$J_s = \left\{ \sum_{k=s}^{-1} y_k z^k; y_k \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C} \right\}, \quad -s \in N,$$

а изоморфизмы $\Psi_s : \mathbb{C}^{n|s|} \rightarrow J_s$ определены по формулам:

$$\Psi_s \bar{y} = \sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k,$$

где $\bar{y} = [y_0^T, \dots, y_{s-1}^T]^T$, $y_k \in C^n$ ($k = 0, \dots, s-1$), $s \in N$, и

$$\Psi_s \bar{y} = \sum_{k=s}^{-1} y_k z^k,$$

где $\bar{y} = [y_{-1}^T, \dots, y_s^T]^T$, $y_k \in C^n$ ($k = s, \dots, -1$), $-s \in N$.

В данной работе исследуется задача $I(r_+, p)$ -факторизации м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и м.-ф., обратные к которым принадлежат $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ регулярная м.-ф. в Ω^+ . Тогда $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \{0\}$ при $s \leq 0$ и $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ при $s > 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in N_{p,s}(\mathcal{B})$. С помощью стандартных рассуждений нетрудно убедиться, что $\varphi_+ = 0$ при $s \leq 0$ и $\mathcal{B}\varphi_+ \in J_s$ при $s > 0$. Поскольку $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B}\varphi_+ = 0$, то $N_{p,s}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^{-1} \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ ($s > 0$).

Пусть $\varphi_+ \in \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ ($s > 0$), т.е. $\varphi_+ \in J_s$ и $\psi_+ = \mathcal{B}^{-1}\varphi_+ \in (L_p^+)^n$. Очевидно, что $\psi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ и $T_p(\tau_0^{-s}\mathcal{B})\psi_+ = P_+(\tau_0^{-s}\varphi_+) = 0$.

Предложение 2. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$. Тогда

$$N_{p,j}(A) = \tau_0^{j-} \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \Big|_{Im H_p^- \tau_0^{j+} A^{-1}} \right),$$

где $j^- = \frac{1}{2}(j - |j|)$, $j^+ = \frac{1}{2}(j + |j|)$ ($j \in \mathbb{Z}$) и I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in N_{p,j}(A)$. Тогда существует $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^- \right)^n$ такой, что $\tau_0^{-j} A \varphi_+ = \varphi_-$, т.е. $\tau_0^{j+} A^{-1} \varphi_- = \tau_0^{-j-} \varphi_+ \in (L_p^+)^n$. Отсюда

$$\tau_0^{-j-} \varphi_+ = P_+ \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \varphi_- \right) = H_p^- \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \right) \varphi_-.$$

С другой стороны,

$$H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \left(\tau_0^{-j-} \varphi_+ \right) = 0.$$

Докажем обратное. Пусть

$$\varphi_+ \in \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \Big|_{Im H_p^- \tau_0^{j+} A^{-1}} \right).$$

Тогда существуют $\psi_- \in \overset{\circ}{D}_p^- \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \right)$ и $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_1^- \right)^n$ такие, что $\tau_0^{j+} A^{-1} \psi_- = \varphi_+ + \varphi_-$. Поскольку $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$, то существует многочлен g такой, что $g\varphi_+ = g\tau_0^{j+} A^{-1} \psi_- - g\varphi_- \in (L_1^+)^n \cap (M_1^-)^n$, где полюсы в.-ф. $g\varphi_+$ находятся в бесконечности, т.е. $g\varphi_+$ является векторным многочленом и, следовательно, $\varphi_+ \in R_0^n$. Поскольку $\varphi_+ \in R_0^n$, $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, а правая часть равенства $\tau_0^{-j+} A \varphi_+ = \psi_- - \tau_0^{-j+} A \varphi_-$ аналитична в Ω^- и равна нулю в бесконечно удаленной точке, то $\tau_0^{-j+} A \varphi_+ \in \left(\overset{\circ}{L}_p^- \right)^n$. С другой стороны, $\tau_0^{j-} \varphi_+ \in (L_p^+)^n$ и $A \tau_0^{j-} \varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, т.е. $\tau_0^{j-} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(A)$. Отсюда

$$T_p \left(\tau_0^{-j} A \right) \tau_0^{j-} \varphi_+ = P_+ \left(\tau_0^{-j+} A \varphi_+ \right) = 0.$$

2.4. Для любых в.-ф. и м.-ф. из класса L_1 , введем следующее обозначение:

$$\langle f \rangle_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-k-1} f(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$ и $P_-(B^{-1}) \neq 0$. М.-ф. $P_-(B^{-1})$ допускает представление в виде

$$P_-(B^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1} = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell,$$

где $\mathcal{Q}_r$ и $\mathcal{Q}_\ell$ – матричные полиномы с старшими коэффициентами равными единичной матрице I_n , а $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}_\ell$ – матричные полиномы удовлетворяющие условиям $\deg \mathcal{P}_r < \deg \mathcal{Q}_r = \nu_r$ и $\deg \mathcal{P}_\ell < \deg \mathcal{Q}_\ell = \nu_\ell$. Очевидно что такого типа представления неоднозначны. Наименьшие числа ν_r и ν_ℓ , при которых возможны такие представления, будем обозначать соответственно через $\nu_r(B^{-1})$ и $\nu_\ell(B^{-1})$. Заметим также, что возможность представлений $P_-(B^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1}$ и $P_-(B^{-1}) = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell$ соответственно эквивалентна существованию матриц

$Q_0^{(r)}, \dots, Q_{\nu_r-1}^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $Q_0^{(\ell)}, \dots, Q_{\nu_\ell-1}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(2.2) \quad \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(\nu_r+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_r-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(m+k)} Q_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(2.3) \quad \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(\nu_\ell+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_\ell-1} Q_k^{(\ell)} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(m+k)} = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, будем считать, что $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) = \nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Для $\mathcal{B}^{-1} \in (M_1^+)^{n \times n}$ через $\mathcal{H}_s^+$ ($s \in \mathbb{N}$) будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^+ = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-1} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-2} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-s} \\ \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-2} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-3} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})-1} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})-s+1} \end{bmatrix}$$

Пусть $h_s^+ = \text{rang } \mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$ и $h_0^+ = 0$. Учитывая (2.2), нетрудно заметить, что $h_s^+ = h_{\nu_r(\mathcal{B}^{-1})}$ при $s > \nu_r(\mathcal{B}^{-1})$.

Пусть $A^{-1} \in (M_1^+)^{n \times n}$ и $P_+(A^{-1}) \neq 0$. М.-ф. $P_+(A^{-1})$ допускает представление в виде $P_+(A^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1} = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell$, где $\mathcal{Q}_r$, $\mathcal{Q}_\ell$, $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}_\ell$ – матричные полиномы удовлетворяющие условиям $\mathcal{Q}_r(0) = \mathcal{Q}_\ell(0) = I_n$, $\deg \mathcal{P}_r \leq \deg \mathcal{Q}_r \leq \nu_r$ и $\deg \mathcal{P}_\ell \leq \deg \mathcal{Q}_\ell \leq \nu_\ell$. Наименьшие числа ν_r , ν_ℓ , для которых возможны соответствующие представления, будем обозначать соответственно через $\nu_r(A^{-1})$, $\nu_\ell(A^{-1})$. Аналогичным образом, возможность таких представлений для $P_+(A^{-1})$ эквивалентна существованию матриц $Q_1^{(r)}, \dots, Q_{\nu_r}^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $Q_1^{(\ell)}, \dots, Q_{\nu_\ell}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(2.4) \quad \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r+m} + \sum_{k=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r+m-k} Q_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(2.5) \quad \langle A^{-1} \rangle_{\nu_\ell+m} + \sum_{k=1}^{\nu_\ell} Q_k^{(\ell)} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_\ell+m-k} = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда $P_+(A^{-1}) = 0$, считаем, что $\nu_r(A^{-1}) = \nu_\ell(A^{-1}) = 0$.

В [19] доказано, что если $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$, то

$$\text{Im } H_1^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) = \text{Im} \left(H_1^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) \Big|_{J_{-(\nu_r(A^{-1})+j)}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0.$$

Отсюда, очевидным образом, следует что

$$\text{Im } H_p^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) = \text{Im} \left(H_p^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) \Big|_{J_{-(\nu_r(A^{-1})+j)}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0.$$

Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n}$. Тогда через $\mathcal{H}_s^-$ ($-s \in N$) будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^- = \begin{bmatrix} \langle A^{-1} \rangle_1 & \langle A^{-1} \rangle_2 & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r(A^{-1})} \\ \langle A^{-1} \rangle_2 & \langle A^{-1} \rangle_3 & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r(A^{-1})+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle A^{-1} \rangle_{-s} & \langle A^{-1} \rangle_{-s+1} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{-s+\nu_r(A^{-1})-1} \end{bmatrix}$$

Числа h_s^- ($s \in Z$, $s \leq 0$) и пространство F_j ($j \leq 0$) определим следующим образом: $h_s^- = \text{rang } \mathcal{H}_s^-$ при $s < 0$ и $h_0^- = 0$, $F_j = \ker \mathcal{H}_j^-$ при $j < 0$ и $F_0 = C^{\nu_r(A^{-1})}$. Из (2.5) следует, что $h_s^- = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^-$, когда $s < -\nu_\ell(A^{-1})$. Очевидно, что числа h_s^+ , h_s^- зависят от матриц B^{-1} , A^{-1} и контура интегрирования. Эти числа будем обозначать через $h_s^+(\Gamma, B^{-1})$ и $h_s^-(\Gamma, A^{-1})$ соответственно.

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА

3.1. Вначале приведем критерий $I(r_+, p)$ -факторизуемости для м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

Предложение 3. Если $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию, то $\det B^{\pm 1}$ имеет конечное число нулей в Ω^+ .

Доказательство. Пусть представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B . Поскольку $\det B_\pm \neq 0$ в $\Omega^\pm$, то из теоремы единственности следует, что $\det B$ отличен от нуля почти всюду на Γ . Из $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B_+ e_k \in \mathcal{D}_p^+(B)$ ($k = 1, \dots, n$), где $e_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ ($k = 1, \dots, n$) – базисные векторы в $\mathbb{C}^n$, следует, что существует ненулевой полином g такой, что $gBB_+ \in (L_1^+)^{n \times n}$. В.-ф. $gB_- \Lambda$ принадлежит $(M_p^-)^{n \times n}$ и может иметь полюс лишь в бесконечности. Поэтому из равенства $gBB_+ = gB_- \Lambda$ следует, что $gBB_+ \in (L_1^+)^{n \times n} \cap (M_p^-)^{n \times n}$. Последнее означает, что gBB_+ является ненулевой полиномиальной матрицей.

Предложение 4. Пусть B – регулярная м.-ф. в Ω^+ . Тогда

- 1) Если $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ ($1 \leq p \leq \infty$), то $\mu_p(B, -\infty) = 0$,
- 2) Если $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$, то $\mu_p(B, +\infty) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(B)$. Поскольку м.-ф. B из $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, то существует ненулевой многочлен g такой, что $gB\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Пусть $\text{If } j \leq -\deg g$. Если $\varphi_+ \in N_{p,j}(B)$, то существует $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такое, что $gB\varphi_+ = \tau_0^j g\varphi_-$. Отсюда следует, что $gB\varphi_+ = 0$, и получим $\varphi_+ = 0$ в силу регулярности м.-ф. B . Таким образом, $N_{p,j}(B) = \{0\}$, и 1) следует из утверждения I.

Пусть $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$, тогда существует ненулевой полином q такой, что $qB^{-1} \in (L_p^+)^{n \times n}$. Заметим, что $qB^{-1}e_k \in \mathcal{D}_p^+(B)$ ($k = 1, \dots, n$). Если $j > \deg q$, то из равенства $\tau_0^{-j} B B^{-1} q e_k = \tau_0^{-j} q e_k$ ($k = 1, \dots, n$) следует, что $B^{-1} q e_k \in N_{p,j}(B)$.

В свою очередь из регулярности $\mathcal{B}$ следует существование точки $z \in \Omega^+$ такой, что $\dim N_{p,j}(\mathcal{B}, z) = n$. Таким образом, утверждение 2) следует из II.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $1 \leq p \leq \infty$. Для того, чтобы $\mathcal{B}$ допускала $I(r_+, p)$ -факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\widetilde{M}_p^+\right)^{n \times n}$.

Доказательство: Пусть $\mathcal{B}$ допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию, тогда $\mathcal{B} = \mathcal{B}_- \Lambda \mathcal{B}_+^{-1}$, где $\mathcal{B}_- \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $\mathcal{B}_+ \in (L_p^+)^{n \times n}$, $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$ ($\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$). Тогда очевидно, что $\mathcal{B}$ регулярная м.-ф. в Ω^+ . Поскольку существует ненулевой многочлен g такой, что $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+ = g\mathcal{B}_-\Lambda \in (L_1^+)^{n \times n}$, то отсюда следует, что $\mathcal{B}_- \in R_0^{n \times n}$. Из представления $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}_+ (\mathcal{B}_- \Lambda)^{-1}$ следует, что $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\widetilde{M}_p^+\right)^{n \times n}$. Обратное утверждение следует из предложения 4 и утверждения IV.

Следствие 1. Если $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$ и представление $\mathcal{B}_- \Lambda \mathcal{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$, то $\det \mathcal{B}_-(z) \neq 0$ для $z \in \Gamma$.

Доказательство: Пусть существует $z_0 \in \Gamma$ такое, что $\det \mathcal{B}_-(z_0) = 0$. Поскольку м.-ф. $\mathcal{B}_-(z)$ – рациональная м.-ф., то существуют ненулевой вектор $V \in \mathbb{C}^n$ и рациональная в.-ф. $\psi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такие, что в достаточно малой окрестности точки z_0 имеет место представление $\mathcal{B}_-(z)V = (z - z_0)\psi_-(z)$. Отсюда $(\tau_{z_0}^-)^{-1} \mathcal{B}^{-1} \mathcal{B}_- V = \mathcal{B}^{-1}(-z_0)\tau_0 \psi_- \in (\mathcal{L}_p)^n$, т.е. $(\tau_{z_0}^-)^{-1} \mathcal{B}_- V \in \mathcal{D}_p^-(\mathcal{B})$, что в силу VI противоречит условию в) $I(r_+, p)$ -факторизации.

3.2. Приведем теперь явные формулы для (r_+, p) -частных индексов м.-ф. $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ в случае, когда $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$.

Предложение 5. Пусть $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $s \in \mathbb{N}$ и $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) > 0$. Тогда в.-ф. φ принадлежит $\ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right)$ тогда и только тогда, когда вектор $\Psi_s^{-1}\varphi$ принадлежит $\text{Ker} \mathcal{H}_s^+$. В частности, справедливы равенства

$$(3.1) \quad \dim \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right) = ns - h_s^+.$$

Доказательство: Пусть $\varphi \in J_s$. Поскольку $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi = H_p^+(P_- \mathcal{B}^{-1})\varphi$, то для достаточно больших $|z|$ имеет место разложение

$$(3.2) \quad (H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi)(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m \sum_{k=0}^{s-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{m-k} \langle \varphi \rangle_k.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi \in J_s$, то $\mathcal{B}^{-1}\varphi \in (M_p^+)^{n \times n}$. Учитывая (3.2), получим, что $\varphi \in \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right)$ тогда и только тогда, когда вектор $\Psi_s^{-1}\varphi = [\langle \varphi \rangle_0^T, \dots, \langle \varphi \rangle_{s-1}^T]^T$ удовлетворяет бесконечной системе уравнений:

$$(3.3) \quad \sum_{k=0}^{s-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{m-k} \langle \varphi \rangle_k = 0, \quad m = -1, -2, \dots$$

Поскольку существуют матрицы $Q_i^{(\ell)} \in C^{n \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, \nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) - 1$), удовлетворяющие (2.3), то для выполнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы вектор $\Psi_s^{-1}\varphi$ принадлежал $\text{Ker } \mathcal{H}_s^+$. Формула (3.1) следует из очевидного равенства:

$$\dim \text{Ker} \left(H_p^+ (\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right) = \dim \text{Ker } \mathcal{H}_s^+.$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Тогда (r_+, p) -частные индексы м.-ф. $\mathcal{B}$ могут быть определены по формулам

$$\kappa_i = \text{card} \{j \mid n + h_{j-1}^+ - h_j^+ < i; j = 1, 2, \dots, \nu_r(\mathcal{B}^{-1})\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) \neq 0$ и $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$, если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Доказательство: Если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, то доказательство очевидно. Если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) \neq 0$, то доказательство следует из предложений 1, 4, 5 и из равенства (2.1).

3.3. Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. $\mathcal{B}$ в случае, когда $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$.

Обозначим через $\omega_s^1, \omega_s^2 : C^{ns} \rightarrow C^{n(s+1)}$ ($s \in N$) следующие матричные операторы:

$$\omega_s^1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\omega_s^i \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ \subset \text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+$ ($i = 1, 2, s \in N$).

Предложение 6. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) > 0$, $\theta_0 = \text{Ker } \mathcal{H}_1^+$ и θ_s , $s \in N$ – некоторое прямое дополнение

$$\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$$

в $\text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+$. Тогда

$$(3.4) \quad \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} (\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+)$$

а $M_{s-1} := \mathcal{B}^{-1} \Psi_s \theta_{s-1}$ является $(p, s-1)_+$ -индексным подпространством м.-ф. $\mathcal{B}$, причем $\dim M_{s-1} = \dim \theta_{s-1}$ ($s \in N$).

Доказательство: В силу предложения 1 и 5, $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \{0\}$ при $s \leq 0$ и $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$. Равенство (3.4) следует из легко проверяемых равенств

$$\Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1} \omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ \quad \text{и} \quad \tau_0 \Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1} \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+.$$

Поскольку $\widehat{N}_{p,0}(\mathcal{B}) = 0$, то очевидно, что M_0 является $(p, 0)_+$ -индексным подпространством.

Пусть $f \in \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) \cap M_s$. Тогда существуют векторы $y_1, y_2 \in \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$ и $y \in \theta_s$ такие, что

$$f = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} \omega_s^1 y_1 + \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} \omega_s^2 y_2 = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} y.$$

Отсюда $\mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}(\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 - y) = 0$, следовательно, $\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 = y$, т.е. $y = 0$, поэтому $f = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} N_{p,s+1}(\mathcal{B}) &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1} \text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+ \\ &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1} \left[(\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+) + \theta_s \right] \\ &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\theta_s \\ &= \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) + M_s. \end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, $\dim M_{s-1} = \dim \theta_{s-1}$, и доказательство завершено. Из утверждения IV и предложения 6 следует теорема.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) > 0$ и $\eta_1 < \dots < \eta_s$ пробегает все возможные значения $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n(r_+, p)$ частных индексов м.-ф. $\mathcal{B}$. Пусть $\{X_{\eta_i,1}, \dots, X_{\eta_i,n_i}\}$ – базисы пространств θ_{η_i} ($i = 1, \dots, s$) и

$$U_{\eta_i,j} = \mathcal{B}^{-1}\psi_{\eta_i+1}X_{\eta_i,j}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_j.$$

Тогда, если

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+ &= [U_{\eta_1,1}, \dots, U_{\eta_1,n_1}, U_{\eta_2,1}, \dots, U_{\eta_s,n_s}], \\ \Lambda &= \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}] \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_- = \mathcal{B}\mathcal{B}_+\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

то представление $\mathcal{B} = \mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$. Если $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, то представление $\mathcal{B} = I_n I_n (\mathcal{B}^{-1})^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$.

Замечание 1. Пусть $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Нетрудно заметить, что существует полином q с нулями в Ω^+ , такой, что $qB \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $(qB)^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Теоремы 2 и 3 позволяют строить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. qB . Если представление $qB = \tilde{B}_- \tilde{\Lambda} \tilde{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. qB , то легко видеть, что представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$, где $B_- = \tau_0^k q^{-1} \tilde{B}_-$ ($k = \deg q$), $\Lambda = \tau_0^{-k} \tilde{\Lambda}$ и $B_+ = \tilde{B}_+$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B . В частности, (r_+, p) -частные индексы м.-ф. B в случае, когда $\nu_r(q^{-1}B^{-1}) > 0$, могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \kappa_i &= -\deg q + \text{card} \left\{ j \mid n + h_{j-1}^+(\Gamma, q^{-1}B^{-1}) - h_j^+(\Gamma, q^{-1}B^{-1}) < i, \right. \\ &\quad \left. j = 1, 2, \dots, \nu_r(q^{-1}B^{-1}) \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В случае $\nu_r(q^{-1}B^{-1}) = 0$ имеем $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = -\deg q$.

Пусть теперь $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$. Тогда существует полином q_0 , нули которого расположены на контуре Γ и такой, что $q_0 B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Поскольку $q_0^{-1}B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, то $I(r_+, p)$ -факторизация м.-ф. $q_0^{-1}B$ может быть построена вышеуказанным способом. Факторизация м.-ф. B может быть восстановлена по схеме, предложенной в [20].

3.4. Приведем простую формулу для нахождения (r_+, p) -суммарного индекса $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ м.-ф. B .

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Тогда (r_+, p) -суммарный индекс м.-ф. B равен разности количества нулей и полюсов функции $\det B$ в области Ω^+ с учетом их кратностей.

Доказательство: Обозначим

$$\varepsilon = 2^{-1} \min_{\substack{i, j = 0, \dots, m \\ j \neq i}} d(\Gamma_i, \Gamma_j) \quad \text{и} \quad U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}.$$

Пусть $\Omega_{i,\varepsilon}$ ($i = 0, \dots, m$) — односвязные области комплексной плоскости с границей $\Gamma_{i,\varepsilon} = \partial\Omega_{i,\varepsilon}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\Omega_{0,\varepsilon} \subset \Omega_0, \quad \bar{\Omega}_0 \subset \Omega_{0,\varepsilon} + U_\varepsilon, \quad \Omega_i \subset \Omega_{\varepsilon,i}, \quad \bar{\Omega}_{\varepsilon,i} \subset \Omega_i + U_\varepsilon, \quad i = 1, \dots, m.$$

Будем предполагать, что $\Gamma_{i,\varepsilon}$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^m \Gamma_{j,\varepsilon}$ ориентирован таким образом, что при его обходе в положительном направлении внутренняя область $\Omega_\varepsilon^+ = \Omega_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^m \bar{\Omega}_{j,\varepsilon}$ остается слева.

Примеры таких областей могут быть построены с помощью функций, осуществляющих конформное отображение областей Ω_0 и $C \setminus \bar{\Omega}_i$ ($i = 1, \dots, m$) на единичный круг. Заметим, что при этом $\Gamma_{\varepsilon,i}$ ($i = 1, \dots, m$) могут быть выбраны аналитическими. Очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ м.-ф. B аналитична и обратима в некоторой области, содержащей множество $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$. Поскольку $B^{\pm 1} \in M_\infty^+(\Gamma_\varepsilon)$, то в силу теоремы 2.6 [4] м.-ф. B допускает $WH(r, p)$ -факторизацию на Γ_ε . Пусть представление $B = B_- \Lambda \tilde{B}_+^{-1}$ является этой факторизацией и $\Lambda = \text{diag}[\tau_0^{\kappa_1}, \dots, \tau_0^{\kappa_n}]$. В силу той же теоремы число $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ равно разности между количеством нулей и полюсов $\det B$ в Ω_ε^+ . М.-ф. $B_-^{\pm 1} \in R^{n \times n}$ аналитичны в $\Omega_\varepsilon^- = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon^+$ и непрерывны на Γ_ε . Следовательно, $B_-^{\pm 1}$ аналитичны в Ω^- и непрерывны на Γ . М.-ф. B_+ определим равенством: $B_+ = B^{-1} B_- \Lambda$. Поскольку B_+ совпадает на Ω_ε^+ с $\tilde{B}_+$, то в силу своего определения $B_+ \in (L_p^+(\Gamma))^{n \times n}$ и удовлетворяет условию б) определения $I(r_+, p)$ -факторизации для $z \in \Omega^+$. Пусть $z \in \Gamma$ и существует $V \in C^n$, $V \neq 0$ такой, что $\tau_z^{-1} B_+ V \in (L_p^+(\Gamma))^n$. Поскольку $B \tau_z^{-1} B_+ V = \tau_z^{-1} B_- \Lambda V$ и $\det(B_- \Lambda)(z) \neq 0$, то $\tau_z^{-1} B_- \Lambda V \in \mathcal{L}_p^n$, и потому $\tau_z^{-1} B_+ V \notin \mathcal{D}_p^+(B)$. Таким образом, м.-ф. B_+ удовлетворяет условию б) определения и для $z \in \Gamma$. Отсюда следует, что представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B на контуре Γ . Доказательство теоремы следует из того, что $\det B$ не имеет полюсов и нулей на множестве $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА

4.1. По аналогии с предложением 3 нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 7. Если м.-ф. A допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то $\det A^{\pm 1}$ имеет конечное число нулей в Ω^- .

Справедливы также утверждения

Предложение 8. 1) Если $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\mu_p(A, +\infty) = 0$.
 2) Если A регулярная матриц-функция в Ω^- такая, что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то $\mu_p(A, -\infty) = 0$.

Доказательство: Пусть $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$. Тогда существуют ненулевой многочлен q и число $i \in Z$ ($i \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-i} q A \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^{n \times n}$. Нетрудно заметить, что $q e_k \in \mathcal{D}_p^+(A)$ ($k = 1, \dots, n$). Если $j \geq i$, то из представления $\tau_0^{-j} A q e_k$ ($k = 1, \dots, n$) следует, что $q e_k \in N_{p,j}(A)$ ($k = 1, \dots, n$). Очевидно, что существует $z \in \Omega^+$ такое, что $\dim N_{p,j}(A, z) = n$. Таким образом утверждение 1) следует из II.

Пусть $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Если $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(A^{-1})$, то существуют многочлен g и число $k \in Z$ ($k \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-k} g A^{-1} \varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$. Пусть $j \leq -k$ и $\varphi_+ \in N_{p,j}(A)$. Тогда существует $f_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такая, что $\tau_0^{-j} A \varphi_+ = f_-$. Очевидно, что $f_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(A^{-1})$. Поскольку $g \varphi_+ = g \tau_0^j A^{-1} f_-$ и $j \leq -k$ то $g \varphi_+ \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n \cap (L_p^+)^n$, т.е. $\varphi_+ = 0$. Таким образом, $N_{p,j}(A) = \{0\}$ ($j \leq -k$), и 2) следует из утверждения I.

Теорема 5. Пусть $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $1 \leq p \leq \infty$. Для того, чтобы м.-ф. A допускала $I(r_+, p)$ -факторизацию необходимо и достаточно чтобы $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$.

Доказательство: Пусть представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A . Так как $A^{-1} A_- = A_+ \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_1^{n \times n}$, то в силу p -допустимости м.-ф. A^{-1} в Ω^- существуют многочлен g и число $m \in Z$ ($m \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-m} g A^{-1} A_- \in \left(\overset{\circ}{L}_1^-\right)^{n \times n}$. Из равенства $g A^{-1} A_- \Lambda = g A_+$ следует, что $g A_+ \in (L_p^+)^{n \times n} \cap (M_p^-)^{n \times n}$, где м.-ф. $g A_+$ может иметь полюс лишь в бесконечности. Таким образом м.-ф. $g A_+$ является полиномиальной матрицей. Отсюда следует $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$. Обратное утверждение следует из предложения 8 и IV.

Следствие 2. Если $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $A \in (M_p^-)^{n \times n}$, представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A , то $\det A_+(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$.

Доказательство: проводится аналогично доказательству следствия 1.

4.2. Приведем теперь явные формулы для (r_+, p) -частных индексов м.-ф. A , в случае, когда $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$.

Предложение 9. Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$ и $\nu_\ell(A^{-1}) > 0$. Тогда

$$\dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^- - h_j^-, \quad j \leq 0, \quad j \in Z.$$

Доказательство: Пусть $j < 0$ и $f \in J_{-\nu_r(A^{-1})}$. Следуя [19] нетрудно убедиться, что при достаточно малых $|z|$ справедливо равенство:

$$(H_p^-(A^{-1})f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle f \rangle_k.$$

Следовательно,

$$\left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) H_p^-(A^{-1})f \right)(z) = \sum_{m=0}^{-j-1} z^{m+j} \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle f \rangle_k.$$

Учитывая предложение 3, получим, что

$$\ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = \left\{ H_p^-(A^{-1})f; \Psi_{-\nu_r(A^{-1})}^{-1} f \in F_j \right\}.$$

Пусть $S_j = \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j$ ($j < 0$). Поскольку

$$\begin{aligned} Im \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{S_j} \right) &= \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right), \\ \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{S_j} \right) &= \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right), \end{aligned}$$

то

$$(4.1) \quad \dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = \dim S_j - \dim \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right).$$

Учитывая (см. [19])

$$(4.2) \quad \dim \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right) = \dim F_{-\nu_\ell(A^{-1})}$$

а также $\dim S_j = \dim F_j = n\nu_r(A^{-1}) - h_j^-$, получим

$$\begin{aligned} &\dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) \\ &= n\nu_r(A^{-1}) - h_j^- - \dim F_{-\nu_\ell(A^{-1})} = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^- - h_j^-. \end{aligned}$$

В случае $j = 0$ доказательство предложения следует из (4.2).

Теорема 6. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $1 \leq p \leq \infty$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$. Тогда для $\nu_\ell(A^{-1}) > 0$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф. A могут быть определены по формулам:

$$\kappa_i = -\nu_\ell(A^{-1}) + \text{card} \{j \mid h_{j-1}^- - h_j^- < i, j = -\nu_\ell(A^{-1}) + 1, \dots, 0\}$$

($i = 1, \dots, n$). Если $\nu_\ell(A^{-1}) = 0$, то $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы в случае $\nu_r(A^{-1}) = \nu_\ell(A^{-1}) = 0$, очевидно. Очевидно также, что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Отсюда и из предложения 8 следует, что м.-ф. A допускает конечную (r_+, p) -индексацию. Доказательство остальных утверждений теоремы следует из предложений 2, 9 и формулы (2.1).

4.3. Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. A при условиях $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$.

Пусть $\nu_r(A^{-1}) > 0$. Тогда, в силу предложений 2 и 9 $N_{p,j}(A) = \text{Im } H_p^-(\tau_0^j A^{-1})$ при $j \geq 0$ и $N_{p,j}(A) = \tau_0^j H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j$ при $j < 0$.

Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\nu_r(A^{-1})} \in C^{n \times n}$ – матрицы, которые удовлетворяют соотношениям (2.4). Рассмотрим оператор $\mathcal{K}_Q : C^{n\nu_r(A^{-1})} \rightarrow C^{n\nu_r(A^{-1})}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{K}_Q \bar{y} = \left[(-Q_{\nu_r(A^{-1})} y_{\nu_r(A^{-1})})^T (-Q_{\nu_r(A^{-1})-1} y_{\nu_r(A^{-1})-1} + y_1)^T \right. \\ \left. \dots (-Q_1 y_{\nu_r(A^{-1})} + y_{\nu_r(A^{-1})-1})^T \right]^T,$$

где $\bar{y} = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_{\nu_r(A^{-1})}^T]^T$ и $y_i \in C^n$ ($i = 1, \dots, \nu_r(A^{-1})$). Оператор $\mathcal{K}_Q$ допускает матричное представление:

$$\mathcal{K}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -Q_{\nu_r(A^{-1})} \\ I_n & 0 & \dots & 0 & -Q_{\nu_r(A^{-1})-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -Q_1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\mathcal{K}_Q F_j \subset F_{j+1}$ ($j \leq -1$). Нетрудно убедиться (см. также [19]), что при достаточно малых $|z|$ имеет место

$$H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} \rangle_k.$$

Используя соотношения (2.4), получим

$$H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=1}^{\nu_r(A^{-1})} \langle A^{-1} \rangle_{m+k+1} y_k.$$

Отсюда

$$(4.3) \quad \tau_0 H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \bar{y} - \mathcal{H}_{-1} \bar{y}.$$

Поскольку $F_j \subset F_{-1}$ ($j \leq -2$), то при $j \leq -1$ имеет место равенство

$$(4.4) \quad H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j = \tau_0 H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q F_j,$$

Пусть θ_j ($j \leq -1$) – некоторое прямое дополнение $F_j + \mathcal{K}_Q F_j$ in F_{j+1} , а θ_0 – некоторое прямое дополнение $\text{Im } \mathcal{H}_{-1} C^n$.

Предложение 10. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\nu_r(A^{-1}) \neq 0$. Если $j < 0$, то пространства $M_{p,j} = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \theta_j$ являются $(p, j)_+$ -индексными подпространствами м.-ф. A , а если $j = 0$, то θ_0 является $(p; 0)_+$ -индексным подпространством м.-ф. A и $\dim M_{p,j} = \dim \theta_j$ ($j < 0$).

Доказательство. Пусть

$$f \in H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(F_j + \mathcal{K}_Q F_j) \cap H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\theta_j,$$

где $j < 0$. Тогда существуют $y_1, y_2 \in F_j$ и $\bar{y} \in \theta_j$, такие, что

$$f = H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\bar{y} = H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(y_1 + \mathcal{K}_Q y_2),$$

т.е. $H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(\bar{y} - (y_1 + \mathcal{K}_Q y_2)) = 0$. Тогда, учитывая (2.5) нетрудно заметить, что $\bar{y} - y_1 - \mathcal{K}_Q y_2 \in F_{-\nu_\ell(A^{-1})}$ и потому $\bar{y} - y_1 - \mathcal{K}_Q y_2 \in F_j$. Отсюда получаем, что $\bar{y} \in (F_j + \mathcal{K}_Q F_j) \cap \theta_j$, т.е. $\bar{y} = 0$ и, следовательно, $f = 0$. С другой стороны, в силу предложений 2 и 9 имеем

$$\begin{aligned} N_{p,j+1}(A) &= \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_{j+1} \\ &= \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(F_j + \mathcal{K}_Q F_j) + \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\theta_j \\ &= \left(\tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\mathcal{K}_Q F_j + \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_j \right) + M_{p,j}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.4),

$$N_{p,j}(A) = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\mathcal{K}_Q F_j,$$

$$\tau_0 N_{p,j}(A) = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_j,$$

то $M_{p,j}$ ($j < 0$) являются (p, j) -индексным подпространством м.-ф. A .

Пусть $j = 0$. Нетрудно видеть, что $C^n \subset N_{p,1}(A)$ и $\tau_0 N_{p,0}(A) \subset N_{p,1}(A)$. С другой стороны, $C^n \cap \tau_0 N_{p,0}(A) = \{0\}$. Из равенства

$$\dim N_{p,k}(A) = \sum_{j < k} (k - j) \mu_p(G, j), \quad k, j \in Z,$$

(см. [13]) имеем

$$\dim N_{p,1}(A) = n + \kappa \quad (\kappa = |\kappa_1 + \dots + \kappa_n|) \quad \text{и} \quad \dim N_{p,0}(A) = \kappa.$$

Отсюда

$$N_{p,1}(A) = C^n + \tau_0 N_{p,0}(A) = C^n + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}).$$

В силу (4.3), пространства

$$\operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}), \quad \tau_0 H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(\mathcal{K}_Q y + x) + \mathcal{H}_{-1}^- y,$$

где y и x — произвольные векторы из $C^{n\nu_r(A^{-1})}$, совпадают. Взяв $x = -\mathcal{K}_Q y$, получим $\operatorname{Im} \mathcal{H}_{-1}^- \subset \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1})$, i.e.

$$N_{p,0}(A) + \tau_0 N_{p,0}(A) = \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) = \operatorname{Im} \mathcal{H}_{-1}^- + \tau_0 N_{p,0}(A).$$

Из равенства $N_{p,1}(A) = C^n + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1})$ следует, что $N_{p,1}(A) = \widehat{N}_{p,0}(A) + \theta_0$. Пусть $\bar{y} \in \theta_j$ ($j < 0$) и $H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\bar{y} = 0$. Тогда $\bar{y} = 0$, т.е. $\dim M_{p,j} = \dim \theta_j$.

Из предложения 10 и утверждения IV следует

Теорема 7. Пусть м.ф. $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1$, $(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$, $\nu_r(A^{-1}) \neq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\eta_1 < \dots < \eta_s$ – все возможные значения $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$. Пусть $\{y_{\eta_i,1}, \dots, y_{\eta_i,n_i}\}$ ($i = 1, \dots, s$) – базисы пространств θ_{η_i} ($i = 1, \dots, s$), а в.-ф. $U_{\eta_i,j}$ ($i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n_i$) определены следующим образом.

$$U_{\eta_i,j} = \tau_0^{\eta_i+1} H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} y_{\eta_i,j} \quad \text{если} \quad \eta_i < 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_i,$$

$$U_{0,j} = y_{0,j} \quad \text{если} \quad \eta_s = 0, \quad j = 1, \dots, n_s.$$

Тогда, если

$$A_+ = [U_{\eta_1,1}, \dots, U_{\eta_1,n_1}, U_{\eta_2,1}, \dots, U_{\eta_s,n_s}],$$

$$\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}], \quad A_- = AA_+\Lambda^{-1},$$

то представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A . Если $\nu_r(A^{-1}) = 0$, то представление $A = A I_n I_n$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A .

4.4. Рассмотрим теперь случай, когда $1 < p < \infty$, $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

Пусть $\Omega'_{\varepsilon,i}$ ($i = 0, \dots, m$) односвязные области с границей $\Gamma'_{\varepsilon,i} = \partial\Omega'_{\varepsilon,i}$, удовлетворяющие включениям: $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega'_{\varepsilon,0}$, $\Omega'_{\varepsilon,0} \subset \Omega_0 + U_\varepsilon$, $\overline{\Omega}'_{i,\varepsilon} \subset \Omega_i$, $\overline{\Omega}_i \subset \Omega'_{i,\varepsilon} + U_\varepsilon$ ($i = 1, \dots, m$). Будем предполагать, что $\Gamma'_{i,\varepsilon}$ ($i = 0, \dots, m$) являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma'_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^m \Gamma'_{\varepsilon,j}$ ориентирован таким образом, что при обходе в положительном направлении его внутренняя область $\Omega'^+_\varepsilon = \Omega'_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}'_{\varepsilon,j}$ остается слева.

Следующая теорема позволяет восстановить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. A на контуре Γ по ее факторизации на контуре Γ'_ε .

Теорема 8. Пусть $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $1 < p < \infty$, а целое число $k \geq 0$ и многочлен q , нули которого лежат в Ω^- , таковы, $\tau_0^{-k} q A \in (L_p^-(\Gamma))^{n \times n}$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ м.-ф. $\tau_0^{-k} q A$ допускает $WH(r, p)$ -факторизацию относительно контура Γ'_ε . Если представление $\tau_0^{-k} q A = \tilde{A}_- \tilde{\Lambda} \tilde{A}_+^{-1}$ является $WH(r, p)$ -факторизацией м.-ф. $\tau_0^{-k} q A$ относительно контура Γ'_ε , то $\tilde{A}_+ \in R^{n \times n}$. Если $A_+ = \tilde{A}_+ q$, $\Lambda = \tilde{\Lambda} \tau_0^k$ и $A_- = \tau_0^{-k} q A \tilde{A}_+ \tilde{\Lambda}^{-1}$, то представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A на контуре Γ . В частности, в случае $\nu_\ell(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) > 0$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф. A могут быть вычислены по формулам

$$\kappa_i = -\nu_\ell(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) + k$$

$$+ \text{card} \{j \mid h_{j-1}^-(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) - h_j^-(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) < i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $\nu_\ell(\tau_0^{-k} q A^{-1}) = 0$, то $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = k$.

Доказательство: Из условий $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ следует, что число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано таким образом, что м.-ф. A аналитична и $\det A \neq 0$ в некоторой области, содержащее множество $\overline{\Omega}'_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}^+$. Поскольку

$(\tau_0^{-k} qA)^{\pm 1} \in M_\infty^-(\Gamma'_\varepsilon)$, то из теоремы 2.7 из [4], следует, что м.-ф. $\tau_0^{-k} qA$ допускает $WH(r, p)$ -факторизацию относительно контура Γ'_ε . В частности, эта факторизация одновременно является и $I(r_+, p)$ -факторизацией относительно контура Γ'_ε . Утверждение относительно $\tilde{A}_+ \in R^{n \times n}$, по существу, содержится в доказательстве теоремы 4. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что факторы $A_\pm$ и Λ удовлетворяют условиям определения $I(r_+, p)$ -факторизации м.-ф. относительно контура Γ . Формулы для частных индексов следуют из теоремы 6 и равенства $\Lambda = \tau_0^k \tilde{A}$.

Пользуясь доказательством теоремы 8 и повторяя рассуждения доказательства теоремы 4 нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 9. Пусть $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$, $1 < p < \infty$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Тогда сумма (r_+, p) -частных индексов м.-ф. A совпадает с разницей количества полюсов и нулей функции $\det A$ в области Ω^- с учетом их кратности.

Замечание 2. Пусть $A \in (\widetilde{M}_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. В силу определения класса $\widetilde{M}_p^-$ существует полином q_0 , нули которого расположены на контуре Γ такой, что $q_0 A \in (M_p^-)^{n \times n}$. Тогда $(q_0 A)^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Теоремы 7 и 8 позволяют строить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. $q_0 A$. Факторизация м.-ф. A может быть восстановлена с помощью схемы, предложенной в работе [20].

Abstract. The paper considers a class of matrix-functions defined on some contour in the complex plane that have meromorphic continuations in the interior or exterior domain of that contour. These matrix-functions generally do not admit Wiener-Hopf standard factorization. The paper studies the problem of index factorization, which is a version of Wiener-Hopf factorization. Some criterions for index factorization and exact formulas for particular indices are found along with a constructive method which applies the factorization to solution of an explicit, finite system of linear algebraic equations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, (Наука, Москва, 1968).
- [2] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, (Наука, Москва, 1970).
- [3] K. Clancey, I. Gohberg, *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators* (Birkhauser Verlag, Basel, 1981).
- [4] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, *Factorization of Measurable Matrix Functions* (Akademie-Verlag, Berlin, 1987).
- [5] И. М. Спитковский, "Факторизация измеримых матриц-функций, связанные с ней теории систем сингулярных интегральных уравнений и векторной краевой задачи", I, Дифференц. уравнения, (4) 697-709 (1981).
- [6] H. Bart, I. Gohberg and M. A. Kaashoek, "Explicit Wiener-Hopf Factorization and Realization", in *Operator Theory: Advances and Applications, Constructive Methods of Winer-Hopf Factorization* **21**, 235-316 (1997).
- [7] I. Gohberg, L. Lerer and L. Rodman, "Factorization Indices for Matrix Polynomials", Bull. AMS **84**, 275-277 (1978).
- [8] В. М. Адуков, "Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, **4** (1), 54-74 (1992).
- [9] А. Г. Камалян, "Обобщенная факторизация ограниченных голоморфных матриц-функций", Изв. НАН Армении, Математика, **32** (2), 19-38 (1997).

- [10] И. М. Спитковский , “Обобщенная факторизация матриц-функций и краевая задача Римана с бесконечными частными индексами”, ДАН СССР, **286** (13), 559-562 (1986).
- [11] И. М. Спитковский, “О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций”, Мат. сборник, **135** (4), 553-550 (1988).
- [12] А. Г. Камалян, “Некоторые свойства ядер теплицевых операторов”, Доклады НАН Армении, **107** (4), 316-322, 2007.
- [13] А. Г. Камалян, “Индексная факторизация матриц-функций”, Доклады НАН Армении **108** (1), 2007.
- [14] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, (ГИТЛ, Москва, 1950).
- [15] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, (Наука, Москва, 1966).
- [16] Г. Ц. Тумаркин , С. Я. Хавинсон, “К определению аналитических функций класса E в многосвязных областях,” Успехи матем. наук **13** (1), 201-206 (1958).
- [17] Б. В. Хведелидзе, “Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной,” *Современные проблемы математики, (Итоги науки и техники)*,] **7**, ВИНТИ, Москва, 1975, 5-162 .
- [18] Е. М. Дынкин , Б. П. Осиленкер , “Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения”, *Математический анализ, (Итоги науки и техники)*, **21**, ВИНТИ, Москва, 1983, 42-129.
- [19] Р. А. Амирджанян, “О некоторых свойствах Ганкелева оператора с мероморфным символом”, “Матиматика в высшей школе”, Т. 3, No 2, 25-29, (2007).
- [20] Р. А. Амирджанян, “О влиянии простейших сомножителей на факторизацию матрицы-функции”, Вестник РАУ, сер. физ-мат. и естеств. науки, **1**, 12-21 (2007).

Поступила 3 сентября 2007

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Т. В. МАРКАРЯН

*Российско-Армянский Университет
E-mail: mar_tiko@yahoo.com*

Аннотация. В работе исследуются обобщенные пространства Соболева и дифференциальные операторы в этих пространствах. Найдены необходимые и достаточные условия на многогранник $\mathfrak{R}$ при которых функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s удовлетворяет условию Берлинга. Эти условия совпадают для многогранников из $\mathbb{R}_+^2$. Также исследуется регулярность решений одного класса дифференциальных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$\mathbb{N}_0^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{E}^n$ n -мерные евклидовы пространства точек

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n,$$

$$\mathbb{R}_+^n \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{R}_0^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}.$$

Для точек $\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{E}^n, \nu \in \mathbb{R}_+^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, множеств $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ и числа $t > 0$ положим

$$\|\xi\| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}, \quad (\xi, x) = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n},$$

$$t\nu = (t\nu_1, \dots, t\nu_n), \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \quad tB_1 = \{t\nu, \nu \in B_1\}$$

$$B_1 \oplus B_2 = \{\nu, \nu = \nu^{(1)} + \nu^{(2)}, \quad \nu^{(j)} \in B_j, j = 1, 2\} \quad \text{and} \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

$$\text{где либо } D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (i^2 = -1).$$

Далее, через $\Pi(\nu)$ обозначим множество точек такое, что

$$\Pi(\nu) = \{\mu \in \mathbb{R}_+^n : \mu \neq \nu, \mu \neq 0, \text{ для каждого } j (1 \leq j \leq n) \mu_j = \nu_j \text{ либо } \mu_j = 0\}.$$

Определение 1. Говорят, что положительная функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$:

1. является медленно растущей весовой функцией (МРВФ) (см. определение (0.1.1) из [1]), если существуют положительные числа A и a , для которых

$$(1) \quad h(\xi) \leq Ah(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^a, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

2. является медленно меняющейся весовой функцией (ММВФ) (см. [2]), если с некоторыми положительными постоянными b, χ и r

$$(2) \quad \chi^{-1}h(\eta) \leq h(\xi) \leq \chi h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq bh^r(\eta).$$

3. удовлетворяет условию Δ (см., например, [3, 8]) если существуют постоянная $c > 0$ и число $\delta \in [0, 1)$ такие, что

$$(3) \quad h(\xi + \eta) \leq c[h(\xi)h^\delta(\eta) + h^\delta(\xi)h(\eta)], \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

4. удовлетворяет условию Берлинга (Б) (см. [4]), если

$$(4) \quad B_h \equiv \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi < \infty.$$

Определение 2. (см [2] или [5]) Пусть D – конечный набор точек из $\mathbb{R}_+^n$. Характеристическим многогранником (ХМ) набора D называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(D)$, содержащий множество $D \cup \{0\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ через Λ^n обозначим множество всех n -мерных выпуклых многогранников $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$. Для любого $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ через $h_{\mathfrak{R}}(\xi)$ обозначим функцию

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu,$$

где $\mathfrak{R}^0$ – множество вершин многогранника $\mathfrak{R}$. Нетрудно заметить, что для любых $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ и $\mu \in \mathfrak{R}$ (см., например, [5])

$$(5) \quad |\xi|^\mu \leq h_{\mathfrak{R}^0}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ называется полным (см., например, [2] или [5]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат, и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ называется правильным (вполне правильным), если $\mathfrak{R}$ – полный многогранник и координаты внешних относительно $\mathfrak{R}$ нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней неотрицательны (положительны) (см., например, [2, 6]).

Пусть $0 \in \mathfrak{R} \in \Lambda^n$, λ^j $j = 1, \dots, k$ – внешние относительно $\mathfrak{R}$ нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника. Тогда

$$\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, k\},$$

где $d_j = \max_{\nu \in \mathfrak{R}} (\nu, \lambda^j) \geq 0$, $j = 1, \dots, k$.

Известно (см. [7]), что многогранник $\mathfrak{R}$ – правильный (вполне правильный) тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$

$$(6) \quad \Pi(\nu) \subset \mathfrak{R}, \quad (\Pi(\nu) \subset \mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}),$$

где

$$\partial \mathfrak{R} = \left\{ \nu \in \mathfrak{R} : \max_{1 \leq j \leq k} \{(\nu, \lambda^j) - d_j\} = 0 \right\}.$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ – многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона многочлена P называется ХМ $\mathfrak{R}(P)$ набора (P) .

Определение 3. (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3) Многочлен P называется гипозеллитическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1. Если $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta : \zeta \in C^n \equiv \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \}$, то $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.
2. Существуют положительные постоянные c и C такие, что при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\|\xi\|^c \leq C d_P(\xi)$.
3. Для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \neq 0$,

$$\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \equiv \frac{D^{\alpha} P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\xi\| \rightarrow \infty.$$

4. Существуют положительные постоянные c и C такие, что при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq C \|\xi\|^{-c|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

Определение 4. Скажем, что непрерывная функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет слабому условию Δ , если существуют постоянная $c > 0$, число $k \in \mathbb{N}$, множества $e^j \subset \{1, \dots, n\}$ и функции $h_j(\xi^{e^j})$ ($\xi^{e^j} = (\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_r})$ при $e^j = \{j_1, \dots, j_r\}$ $j = 1, \dots, k$), удовлетворяющие условию Δ в соответствующем подпространстве $\mathbb{R}^r$ такие, что

$$\bigcup_{j=1}^k e^j = \{1, \dots, n\}, \quad \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} h_j(\xi^{e^j}) > 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

и

$$(7) \quad c^{-1} \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^j}) \leq h(\xi) \leq c \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^j}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. (см. [11], лемму 1) Пусть $\mathfrak{R}$ – полный многогранник. Тогда неравенство

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c h_{\mathfrak{R}}(\xi) h_{\mathfrak{R}}(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная, имеет место тогда и только тогда, когда многогранник $\mathfrak{R}$ правильный.

Предложение 1. Если функция $h = h_{\mathfrak{R}}$, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$, удовлетворяет слабому условию Δ , то $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что с некоторой постоянной $c_1 = c_1(h_{\mathfrak{R}}) > 0$ выполняется неравенство

$$h(\xi + \eta) \leq c_1 h(\xi) h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

Пусть (см. определение 4) $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j=1}^k e^{(j)} = \{1, \dots, n\}$ и $h_j(\xi^{e^{(j)}})$ – функции, удовлетворяющие условию Δ с числами $\delta_j \in [0, 1]$ ($j = 1, \dots, k$), для которых с некоторой постоянной $c_2 > 0$ выполняется оценка (7). Тогда в силу оценки (3) с некоторыми постоянными $c_3, c_4, c_5 > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &\leq c_2 \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^{(j)}} + \eta^{e^{(j)}}) \\ &\leq c_2 c_3 \prod_{j=1}^k \left[h_j(\xi^{e^{(j)}}) h_j^{\delta_j}(\eta^{e^{(j)}}) + h_j^{\delta_j}(\xi^{e^{(j)}}) h_j(\eta^{e^{(j)}}) \right] \\ &\leq c_4 \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^{(j)}}) h_j(\eta^{e^{(j)}}) \leq c_5 h(\xi) h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Примером функции, удовлетворяющей слабому условию Δ , но не удовлетворяющей условию Δ , может служить функция

$$h(\xi_1, \xi_2) = 1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 = (1 + \xi_1^2)(1 + \xi_2^2).$$

Для весовой функции $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$ и числа $s \in \mathbb{R}^1$, через W_{h^s} , $W_{h^s, loc}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ – область, обозначим следующие обобщенные пространства Соболева:

$$\begin{aligned} W_{h^s} &\equiv W_{h^s}(\mathbb{E}^n) = \{f \in S'(\mathbb{E}^n) : h^s F(f) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}, \\ W_{h^s, loc} &= \{f \in S'(\Omega) : h^s F(\varphi f) \in L_2(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\} \end{aligned}$$

при этом $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства W_{h^s} . Здесь S' – пространство Шварца обобщенных функций, а F – преобразование Фурье.

В работах [3, 4] и [7]–[9] исследованы некоторые алгебраические свойства обобщенных пространств Соболева W_{h^s} , $W_{h^s, loc}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$, когда h – функция, порожденная вполне правильным многогранником, и получены результаты регулярности решений эллиптических относительно h дифференциальных уравнений. В работе [10] в терминах многогранника, а также в терминах свойств функции из пространства $W_{h_{\mathfrak{R}}^s}$ найдены необходимые и достаточные условия, при которых функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Δ .

Целью настоящей работы является нахождение условия на многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$, при которых функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s будет удовлетворять условию B , а также исследование регулярности решений одного класса дифференциальных уравнений.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 2. *Функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ является МРВФ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник. Так как $0 \in \mathfrak{R}$, то для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ в силу неравенства треугольника и оценки (5) имеем

$$\begin{aligned} h(\xi) &= h(\eta + \xi - \eta) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\eta + \xi - \eta|^\nu \\ &\leq \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \left(|\eta|^\nu + |\xi - \eta|^\nu + \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\eta|^\mu |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \right) \\ &= h(\eta) + h(\xi - \eta) + \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\eta|^\mu |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \\ &\leq h(\eta) + h(\xi - \eta) + h(\eta) \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \end{aligned}$$

$\leq h(\eta) + c_1(1 + \|\xi - \eta\|)^d + c_2 h(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^d \leq c_3 h(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^d$, где c_1, c_2 ($c_1 \geq \text{card } \mathfrak{R}^0$, $c_2 \geq 2^{n-1} \text{card } \mathfrak{R}^0$) – некоторые постоянные, $c_3 = 1 + c_1 + c_2$, а $d = \max_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\nu|$, т.е. h является МРВФ.

Пусть теперь h – МРВФ. Покажем, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник. Так как $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$, то, очевидно, $0 \in \mathfrak{R}^0$. Покажем (см. (6)), что для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$ имеет место $\Pi(\nu) \subset \mathfrak{R}$. Предположим обратное, что существует $\alpha \in \mathfrak{R}^0$, для которого $\Pi(\alpha) \not\subset \mathfrak{R}$, т.е. существует точка $\nu \in \Pi(\alpha) \setminus \mathfrak{R}$. Пусть, ради определенности, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$, $\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$, $1 \leq r < k \leq n$. Так как $\mathfrak{R}_r \equiv \{\mu \in \mathfrak{R} : \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0\}$ выпукло и $\nu \notin \mathfrak{R}_r$, то существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, для которого

$$\rho \equiv \sum_{j=1}^r \nu_j \lambda_j > \max_{\beta \in \mathfrak{R}_r} (\beta, \lambda) \geq 0 \quad (0 \in \mathfrak{R}_r),$$

Пусть $\xi^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_r}, 1, \dots, 1)$, $\eta^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_r}, 0, \dots, 0)$, $s = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$(8) \quad \|\xi^s - \eta^s\| = (n - r)^{1/2}, \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) \geq |\xi^s|^\alpha = s^{\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r} \equiv s^\rho,$$

и

$$h(\eta^s) = \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^0} |\eta^s|^\beta = \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^0 \cap \mathfrak{R}_r} |\eta^s|^\beta \leq (\text{card } \mathfrak{R}^0) \max_{\beta \in \mathfrak{R}_r} s^{(\beta, \lambda)}.$$

Откуда, для любого числа a , учитывая (8), получаем

$$\frac{h(\xi^s)}{h(\eta^s)} (1 + \|\xi^s - \eta^s\|)^a \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Это противоречит тому, что h – МРВФ. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник, что завершает доказательство.

Лемма 3. Пусть P – положительный многочлен, $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда P является ММВФ тогда и только тогда, когда P гипоеллиптичен.

Доказательство. Пусть многочлен P – ММВФ, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда существуют положительные числа c, r и χ такие, что

$$(9) \quad \chi^{-1} \leq \frac{P(\xi)}{P(\eta)} \leq \chi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq cP^r(\eta).$$

Покажем, что из оценки (9) следует гипоеллиптичность многочлена P . В силу оценки (10.4.1) работы [1] с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(10) \quad \sup_{\|\eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\xi + \eta) \geq c_1 \tilde{P}(\xi, cP^r(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где для данного многочлена Q функция $\tilde{Q}$ определяется формулой

$$\tilde{Q}(\xi, t) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \right\}^{1/2}.$$

Из оценки (9) в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \chi &\geq \frac{1}{P(\eta)} \sup_{\|\xi - \eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\xi) = \frac{1}{P(\eta)} \sup_{\|\xi - \eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\eta + \xi - \eta) \\ &\geq c_1 \frac{\tilde{P}(\eta, cP^r(\eta))}{P(\eta)} \geq c_1 \sum_{\alpha} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{P(\eta)} \right| (cP^r(\eta))^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Так как по условию леммы $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, то отсюда получаем, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha \neq 0$

$$\left| \frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{P(\eta)} \right| \leq \frac{\chi}{c_1} [cP^r(\eta)]^{-|\alpha|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\eta\| \rightarrow \infty,$$

т.е. многочлен P гипоеллиптичен.

Пусть теперь многочлен P , удовлетворяющий условиям леммы, гипоеллиптичен. Покажем, что P является ММВФ. Из определения гипоеллиптичности и условия $P(\xi) > 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ следует, что существуют положительные числа c_2 и r такие, что

$$(11) \quad P^r(\xi) \leq c_2 d_P(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq P^r(\xi)$, используя оценки (10.4.1) и (11.1.2) работы [1], в силу оценки (11) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(\eta) = P(\xi + \eta - \xi) &\leq \sup_{\|\zeta\| \leq P^r(\xi)} P(\xi + \zeta) \leq \sup_{\|\zeta\| \leq c_2 d_P(\xi)} P(\xi + \zeta) \\ &\leq c_3 \tilde{P}(\xi, c_2 d_P(\xi)) \leq c_4 P(\xi), \end{aligned}$$

т.е. при любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq P^r(\xi)$ справедливо неравенство

$$\frac{P(\eta)}{P(\xi)} \leq c_4$$

Из оценки (11.1.2) работы [1] непосредственно следует, что с некоторой постоянной $\chi > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$d_P^{|\alpha|}(\xi) \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq \chi |P(\xi)|.$$

Пусть для числа $t_0 > 0$

$$\sum_{\alpha \neq 0} \frac{(t_0 c_1)^{(\alpha)}}{\alpha!} < 1/2\chi.$$

Тогда в силу формулы Тейлора отсюда для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq t_0 P^r(\xi) \leq t_0 c_1 d_P(\xi)$ имеем

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(\xi + \eta - \xi) = P(\xi) - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)(\xi - \eta)^\alpha}{\alpha!} \geq P(\xi) \\ &- \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)| \|\xi - \eta\|^{|\alpha|}}{\alpha!} \geq P(\xi) - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)| (c_1 t_0)^{|\alpha|} d_P^{|\alpha|}(\xi)}{\alpha!} \\ &\geq P(\xi) - \chi P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \frac{(c_1 t_0)^{|\alpha|}}{\alpha!} \geq \frac{1}{2} P(\xi). \end{aligned}$$

Откуда

$$(12) \quad P(\eta) \geq \frac{1}{2} P(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq t_0 P^r(\xi).$$

Из оценок (11)-(12) следует, что многочлен P является ММВФ. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть многочлен P такой, что $\tilde{P}(\xi) \equiv \tilde{P}(\xi, 1) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Тогда функция $\tilde{P}$ является ММВФ тогда и только тогда, когда многочлен P гипоеллиптичен.

Доказательство. Так как, очевидно, что функция $|h|$ является ММВФ тогда и только тогда, когда h^2 является МРВФ, то утверждение следствия непосредственно следует из леммы 3, если его применить к многочлену $\tilde{P}^2$.

Замечание 1. Легко заметить, что для любого многочлена P функция $\tilde{P}$ является МРВФ.

Предложение 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^{(j)} = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j), \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{(j)} = 1, \quad d_j > 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, k$$

и $\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^{(j)}) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, k\}$. Тогда существует число $\delta \in (0, 1)$, для которого

$$(13) \quad \bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) \subset \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^n : (\alpha, \lambda^{(j)}) \leq d_j(1 - \delta), \quad j = 1, \dots, k \right\} \equiv \mathfrak{R}^*,$$

и с некоторой константой $c > 0$

$$(14) \quad \sum_{\mu \in \Pi(\nu), \nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\mu \leq c h_{\mathfrak{R}}^{1-\delta}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Утверждение предложения очевидно, если $\bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) = \emptyset$. Поэтому пусть $\bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) \neq \emptyset$. Обозначим

$$\rho_j = \min_{\nu \in \mathfrak{R}^0, \Pi(\nu) \neq \emptyset} \min_{\mu \in \Pi(\nu)} (\mu, \lambda^{(j)}), \quad j = 1, \dots, k \quad \text{и} \quad \delta = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\rho_j}{d_j} \right\}.$$

Так как для любых $\nu \in \mathfrak{R}^0$ и $\mu \in \Pi(\nu)$

$$0 < (\mu, \lambda^{(j)}) < (\nu, \lambda^{(j)}), \quad j = 1, \dots, k,$$

и множества $\mathfrak{R}^0, \Pi(\nu)$ ($\nu \in \mathfrak{R}^0$) конечны, то $\delta \in (0, 1)$. Кроме того, так как $\beta = \nu - \mu \in \Pi(\nu)$, то для любых $\nu \in \mathfrak{R}^0$, $\mu \in \Pi(\nu)$ и $j(1 \leq j \leq k)$ имеем

$$\left(\mu, \lambda^{(j)}\right) = \left(\nu, \lambda^{(j)}\right) - \left(\nu - \mu, \lambda^{(j)}\right) \leq d_j - \rho_j \leq d_j(1 - \delta)$$

Это доказывает вложение (13).

В силу выпуклости многогранника $\mathfrak{R}^*$ имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$ (см. (5))

$$\sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi|^\mu \leq c_1 h_{\mathfrak{R}^*}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Так как $\mathfrak{R}^* = (1 - \delta)\mathfrak{R}$, то отсюда получаем оценку (14). Предложение доказано.

Лемма 4. *Функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ является ММВФ тогда и только тогда, когда многогранник $\mathfrak{R}$ – вполне правильный.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Так как для любого многогранника $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ с некоторыми положительными числами c и ρ

$$(15) \quad h(\xi) \leq c(1 + \|\xi\|^\rho), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то в силу предложения 2, используя неравенство и неравенства (14) и (15), имеем, с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и числом $\delta \in (0, 1)$ при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &= \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi + \eta|^\nu \leq \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \left(|\xi|^\nu + |\eta|^\nu + \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi|^\mu |\eta|^{\nu-\mu} \right) \\ &\leq h(\xi) + h(\eta) + c_1 h^{1-\delta}(\xi) h^{1-\delta}(\eta) \leq h(\xi) + c(1 + \|\eta\|^\rho) \\ &\quad + c_2 h^{1-\delta}(\xi) \left(1 + \|\eta\|^{\rho(1-\delta)} \right), \end{aligned}$$

Пусть $t > 0$, $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$ и $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, где $r = \min \left\{ \frac{1}{\rho}, \frac{\delta}{(1-\delta)\rho} \right\}$. Отсюда с некоторой постоянной $c_3 = c_3(t) > 0$ имеем

$$h(\xi + \eta) \leq h(\xi) + c_3(1 + h(\xi)) + c_3 h^{1-\delta}(\xi) (1 + h^\delta(\xi)).$$

Так как $0 \in \mathfrak{R}^0$ (следовательно, $h(\xi) \geq 1$), то отсюда следует, что с некоторой постоянной $c_4 > 0$

$$(16) \quad h(\xi + \eta) \leq c_4 h(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

как только $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$. С другой стороны, в силу (15) и неравенства треугольника имеем при $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &\geq h(\xi) - h(\eta) - c_1 h^{1-\delta}(\xi) h^{1-\delta}(\eta) \\ &\geq h(\xi) - c(1 + t^\rho h(\xi)) - cc_1 h^{1-\delta}(\xi) \left(1 + t^{(1-\delta)\rho} h^\delta \right) \\ (17) \quad &\geq \left(1 - ct^\rho - cc_1 t^{(1-\delta)\rho} \right) h_{\mathfrak{R}}(\xi) - c - cc_1 h_{\mathfrak{R}}^{1-\delta}(\xi). \end{aligned}$$

Взяв число $t_0 > 0$ такое, чтобы $1 - ct_0^\rho - cc_1 t_0^{(1-\delta)\rho} \geq 1/2$, из (17) получаем при $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\|\eta\| \leq t_0 h^r(\xi)$

$$(18) \quad h(\xi + \eta) \geq \frac{1}{2} h(\xi) - c - c_1 h^{1-\delta}(\xi).$$

Так как $h(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, то из (18) следует, что существует постоянная $c_5 > 0$ такая, что

$$h(\xi + \eta) \geq \frac{1}{4}h(\xi) - c_5, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\eta\| \leq t_0 h^r(\xi).$$

Это неравенство вместе с оценкой (16) доказывает, что $h = h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВФ}$, так как $h(\tau) \geq 1$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^n$ ($0 \in \mathfrak{R}^0$).

Пусть $h = h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВФ}$. Покажем, что $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Предположим обратное, что $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным многогранником. Так как $h - \text{ММВФ}$, то для некоторых положительных чисел χ, c_6, r выполняется оценка (2), т.е.

$$(19) \quad \chi^{-1} \leq \frac{h(\xi)}{h(\eta)} \leq \chi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq c_6 h^r(\eta).$$

Отсюда, в силу предложения 2.1 работы [9] и леммы 1 работы [10] следует, что многогранник $\mathfrak{R}$ – правильный. Следовательно, существуют положительные числа ρ и c_7 , для которых

$$(20) \quad \|\eta\|^\rho \leq c_7 h(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Так как по предположению $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным, то в силу вышесказанного существуют $\nu \in \mathfrak{R}^0$ и $\mu \in \Pi(\nu)$ такие, что $\mu \in \partial\mathfrak{R}$. Пусть ради определенности

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k, 0, \dots, 0), \quad \mu = (\nu_1, \dots, \nu_l, 0, \dots, 0), \\ \nu_1 \dots \nu_k \neq 0 \quad (1 \leq l < k \leq n).$$

Так как $\mathfrak{R}$ выпукло и $\mu \in \partial\mathfrak{R}$, то существует вектор $0 \neq \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, для которого

$$(21) \quad (\mu, \lambda) \geq \max_{\alpha \in \mathfrak{R}} (\alpha, \lambda).$$

Пусть $\xi^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_l}, s^\varepsilon, \dots, s^\varepsilon)$ и $\eta^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_l}, 0, \dots, 0)$, для любого $s = 1, 2, \dots$, где $0 < \varepsilon < \max_{1 \leq j \leq l} \{\lambda_j \rho r\} \equiv \varepsilon_0$. Тогда в силу (20) и (21) получаем

$$\|\xi^s - \eta^s\|/h^r(\eta^s) \leq c_7^r \frac{s^\varepsilon (n-1)^{1/2}}{\|\eta^s\|^{\rho r}} \leq c_7^r \frac{s^\varepsilon (n-1)^{1/2}}{s^{\varepsilon_0}} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

и отсюда

$$\frac{h(\xi^s)}{h(\eta^s)} \geq \frac{|\xi^s|^\nu}{(\text{card } \mathfrak{R}^0) s^{(\mu, \lambda)}} = \frac{s^{(\mu, \lambda) + \varepsilon(\nu_{l+1} + \dots + \nu_k)}}{(\text{card } \mathfrak{R}^0) s^{(\mu, \lambda)}} \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

что противоречит оценке (19). Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Лемма доказана.

Предложение 3. Если МРВФ $h(\xi) = h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет условию Берлинга, то

а) существуют постоянная $c > 0$, для которой

$$(22) \quad h(\xi + \eta) \leq ch(\xi)h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

б) для любого $s \geq 1$ функция h^s также удовлетворяет условию Берлинга.

с) для любого $k(1 \leq k < n)$

$$\sup_{\eta, \tau''} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' < \infty,$$

где $\eta' \equiv (\eta_1, \dots, \eta_k)$, $\eta'' \equiv (\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ and $\eta = (\eta', \eta'')$.

d) при дополнительном условии

$$h(-\xi) \leq c_1 h(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$h(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|\xi\| \rightarrow \infty.$$

Отметим, что аналогичные пунктам а) и б) результаты для ММВФ доказаны в [9].

Доказательство. В силу условия предложения (см. (1)) для любых $\tau, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} B_h &\geq \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi = \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi - \tau)h(\xi + \tau)} d\xi \\ &\geq \frac{1}{A^2} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \tau)h(\tau)(1 + \|\xi\|)^{2a}} d\xi. \end{aligned}$$

Откуда

$$0 < \int \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{2a}} d\xi < \infty$$

и

$$(23) \quad \frac{h(\eta)}{h(\eta - \tau)h(\tau)} \leq A^2 B_h \left(\int (1 + \|\xi\|)^{-2a} d\xi \right)^{-1}$$

что доказывает (22).

Пусть $s \geq 1$. Тогда в силу (23)

$$\begin{aligned} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h^s(\xi)} d\xi &\leq \sup_{\eta, \tau} \frac{h^{s-1}(\eta)}{h^{s-1}(\eta - \tau)h(\tau)} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \\ &\leq B_h \sup_{\eta, \tau} \frac{h^{s-1}(\eta)}{h^{s-1}(\eta - \tau)h(\tau)} < \infty, \end{aligned}$$

т.е. утверждение пункта б) также доказано.

Покажем справедливость пункта с). В силу оценки (1) и теоремы Фубини имеем для любого $\tau'' \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\begin{aligned} B_h &\geq \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \geq \frac{1}{A^2} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')(1 + \|\xi'' - \tau''\|)^{2a}} d\xi \\ &= \frac{1}{A^2} \int \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' \frac{1}{(1 + \|\xi'' - \tau''\|)^{2a}} d\xi'' \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{\eta, \tau''} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' \leq B_h A^2 \left(\int (1 + \|\xi''\|)^{-2a} d\xi'' \right)^{-1} < \infty,$$

т.е. утверждение пункта с) также доказано.

Докажем утверждение пункта d). Пусть, наоборот, при условиях предложения существуют постоянная $c_2 > 0$ и последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, для которых $h(\xi^s) \leq c_2$, $s = 1, 2, \dots$. Не умаляя общности, будем считать, что $\|\xi^s - \xi^l\| \geq 2$ при $s \neq l$, $l = 1, 2, \dots$. В силу условия предложения и оценки (1) имеем для любого натурального r

$$\begin{aligned} \int \frac{h(0)}{h(-\xi)h(\xi)} d\xi &\geq \frac{h(0)}{c_1} \int \frac{1}{h^2(\xi)} d\xi \geq \frac{h(0)}{c_1} \sum_{k=1}^r \int_{\|\xi - \xi^s\| < 1} \frac{1}{h^2(\xi)} d\xi \\ &\geq \frac{h(0)}{c_1 A^2} \sum_{k=1}^r \frac{1}{h^2(\xi^s)} \int_{\|\eta\| < 1} d\eta = r \frac{h(0)}{2^{2a} c_1 c_2^2 A^2} |V_1|, \end{aligned}$$

где $|V_1|$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В силу произвольности r это противоречит тому, что функция h удовлетворяет условию Берлинга. Следовательно, утверждение пункта d) справедливо. Предложение доказано.

Следствие 2. При условиях предложения 3, для любого фиксированного τ'' функция $g(\xi') \equiv h(\xi', \tau'')$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство непосредственно следует из утверждения пункта с) предложения 3.

Следствие 3. Если для многогранника $\mathfrak{R}$ и некоторого числа $s > 0$ функция $h = h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга, то $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.

Доказательство непосредственно следует из предложения 3 (см. (22)), леммы 2 и предложения 2.1 работы [10], так как с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$

$$c^{-1} h_{s\mathfrak{R}}(\xi) \leq h_{\mathfrak{R}}^s(\xi) \leq c h_{s\mathfrak{R}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 4. Пусть h – МРВФ и для некоторого $s_0 > 0$ $h^{-s_0} \in L_1$. Тогда $h(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях предложения существуют число $c > 0$ и последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, для которых $h(\xi^s) \leq c$, $s = 1, 2, \dots$. Не умаляя общности будем считать, что $\|\xi^s - \xi^l\| \geq 2$ ($s \neq l$, $l = 1, 2, \dots$). Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ в силу оценки (18)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{h^{s_0}(\xi)} d\xi &\geq \sum_{i=1}^r \int_{\|\xi - \xi^i\| < 1} \frac{1}{h^{s_0}(\xi)} d\xi \\ &\geq \frac{1}{A^{s_0}} \sum_{i=1}^r \frac{1}{h^{s_0}(\xi^i)} \int_{\|\xi - \xi^i\| < 1} \frac{1}{(1 + \|\xi - \xi^i\|)^{as_0}} d\xi \geq \frac{1}{(2^a A)^{s_0}} |V_1| r \frac{1}{c^{s_0}}, \end{aligned}$$

где $|V_1|$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В силу произвольности числа r полученное неравенство противоречит условию $h^{-s_0} \in L_1$.

Следствие 4. При условиях предложения 4 существует число $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ такое, что $h(\xi) \geq \varepsilon$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство непосредственно следует из предложения 4, так как функция h непрерывна и положительна.

Предложение 5. Пусть $\varepsilon > 0$ и $s_0 > 0$ – произвольные числа, функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [\varepsilon, +\infty)$ удовлетворяет оценке (3) (т.е. условию Δ) и $h^{-s_0} \in L_1$. Тогда при $s > \frac{s_0}{1-\delta}$, где δ – число из оценки (3), функция h^s удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. Пусть $s > s_0/(1-\delta)$. В силу оценки (3) и условия предложения, имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$ и для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi &\leq c \int \frac{h^s(\eta-\xi)h^{s\delta}(\xi) + h^{s\delta}(\eta-\xi)h^s(\eta-\xi)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\eta)} d\xi \\ (24) \quad &\leq c \int [h^{-s(1-\delta)}(\eta-\xi) + h^{-s(1-\delta)}(\xi)] d\xi \leq 2c\varepsilon^{s_0-s(1-\delta)} \|h^{-s_0}\|_{L_1} \end{aligned}$$

т.е. функция h^s удовлетворяет условию Берлинга.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $s_1, s_2 > 0$ и $h_1(\xi_1, \dots, \xi_k) \geq \varepsilon$, $h_2(\xi_l, \dots, \xi_n) \geq \varepsilon$ ($l \leq k+1$, $l, k \leq n$) обе являются МРВФ, причем $h_1^{-s_1}, h_2^{-s_2} \in L_1$.

Если функции h_1 и h_2 удовлетворяют условию Δ , то при достаточно больших $s > 0$ функция

$$h^s(\xi_1, \dots, \xi_n) = h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k) h_2^s(\xi_l, \dots, \xi_n)$$

удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. В силу предложения 5 функции h_1^s и h_2^s удовлетворяют условию Берлинга соответственно при $s \geq s_1/(1-\delta_1)$ и $s \geq s_2/(1-\delta_2)$, где $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1)$ – числа, при которых для h_1 и h_2 выполняется оценка (3). Если $l = k+1$ ($1 < l \leq n$), то в силу теоремы Фубини и оценки (24), при $s \geq \max\{s_1/(1-\delta_1), s_2/(1-\delta_2)\}$ имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$ и при любых $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi &= \\ \int \frac{h_1^s(\eta_1, \dots, \eta_k) h_2^s(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)}{h_1^s(\eta_1 - \xi_1, \dots, \eta_k - \xi_k) h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k) h_2^s(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}, \dots, \eta_n - \xi_n) h_2^s(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)} d\xi \\ &\leq 4c^2 \varepsilon^{s_1+s_2-s(2-\delta_1-\delta_2)} \|h_1^{-s_1}\|_{L_1} \|h_2^{-s_2}\|_{L_1}, \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга при $l = k+1$.

Пусть $l = 1$ и $s > s_2/(1-\delta_2)$. Тогда в силу пункта а) предложения 3 и предложения 5 с некоторой постоянной $c_1 = c_1(s) > 0$ и при всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi &= \\ &\leq \sup_{\eta_1, \dots, \eta_k, \xi_1, \dots, \xi_k} \frac{h_1^s(\eta_1, \dots, \eta_k)}{h_1^s(\eta_1 - \xi_1, \dots, \eta_k - \xi_k) h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k)} \int \frac{h_2^s(\eta)}{h_2^s(\eta-\xi)h_2^s(\xi)} d\xi \leq c_1 \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга при $l = 1$.

Если же $k = n$, то доказательство получается аналогично случаю $l = 1$, с заменой h_1 на h_2 и h_2 на h_1 при $s > s_1/(1-\delta_1)$. Пусть поэтому $1 \leq l < k+1 \leq n$. Положим $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{l-1})$, $\xi'' = (\xi_l, \dots, \xi_k)$ и $\xi''' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Тогда в

силу пункта с) предложения 3, теоремы Фубини и предложения 5 с некоторой постоянной $c_2 = c_2(s) > 0$ ($s > \max\{\frac{s_1}{(1-\delta_1)}, \frac{s_2}{(1-\delta_2)}\}$) при всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \\ &= \int \frac{h_1^s(\eta', \eta'')h_2^s(\eta'', \eta''')}{h_1^s((\eta', \eta'') - (\xi' - \xi''))h_1^s(\xi', \xi'')h_2^s((\eta'', \eta''') - (\xi'' - \xi'''))h_2^s(\xi'', \xi''')} d\xi \\ &\leq \int \int \frac{h_1^s(\eta', \eta'')}{h_1^s((\eta', \eta'') - (\xi', \xi''))h_1^s(\xi', \xi'')} d\xi' d\xi'' \\ &\quad \times \sup_{\Theta'', \Theta''', \tau''} \int \frac{h_2^s(\Theta'', \Theta''')}{h_2^s((\Theta'', \Theta''') - (\tau'', \xi'''))h_2^s(\tau'', \xi''')} d\xi''' \leq c_2, \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга и в случае $1 \leq l < k + 1 \leq n$. Этим теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение теоремы остается верным и в случае $h(\xi) = h_1(\xi^{e^1}), \dots, h_k(\xi^{e^k})$, где $\bigcup_{j=1}^k e^j = \{1, \dots, n\}$, функции $h_i \geq \varepsilon > 0$ удовлетворяют условию Δ и с некоторым $s_i > 0$, $h_i^{-s_i} \in L_1$, $i = 1, \dots, k$.

Замечание 3. Пусть функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет слабому условию Δ . Тогда существует число $s_0 = s_0(\mathfrak{R}) > 0$ такое, что $h_{\mathfrak{R}}^s$ при $s > s_0$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство непосредственно следует из замечания 2 и предложения 1.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ ($n = 2$). Для того, чтобы функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s удовлетворяла условию Берлинга необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{R}$ был правильным многогранником.

Доказательство. Пусть $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Берлинга. Тогда в силу пункта а) предложения 3, леммы 1 работы [10] и леммы 2 для любого $s > 0$ $s\mathfrak{R}$ (а, следовательно, и $\mathfrak{R}$) – правильный многогранник.

Пусть теперь $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ – правильный многогранник и $\{\nu^{(j)}\}_{j=0}^k = \mathfrak{R}^0$. Будем предполагать, что вершины пронумерованы в следующем порядке

$$\nu^{(0)} = (0, 0), \quad \nu_1^{(1)} \geq \nu_1^{(2)} > \dots > \nu_1^{(k)} = 0, \quad \nu_2^{(k)} \geq \nu_2^{(k-1)} > \dots > \nu_2^{(1)} = 0.$$

Пусть M_i – многогранник с вершинами

$$(0, 0), \quad (\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}, 0), \quad (0, \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Тогда $\mathfrak{R} = \bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i$ и, следовательно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & c_1^{-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \right) \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi) \\ & \leq c_1 \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_1|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \right). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и} \\
&\text{является МРВФ при } \nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)} \neq 0, \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)} \neq 0, 1 \leq i \leq n, \\
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и является МРВФ} \\
&\text{при } \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)} = 0, 1 \leq i \leq n, \\
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и является МРВФ} \\
&\text{при } \nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)} = 0, 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы 1 и замечания 2 функция при достаточно больших $s > 0$ $h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, для которого при любом $i (1 \leq i \leq n)$ функции

$$h_i(\xi^i) \equiv h_{\mathfrak{R}}(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

удовлетворяют условию Δ . Тогда при достаточно больших s функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. Очевидно, для любого $s > 0$ существует постоянная $c = c(s) > 0$ такая, что $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(25) \quad c^{-1} \left[\sum_{i=1}^n h_i^s(\xi^i) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R}_0^n} |\xi|^{s\nu} \right] \leq h^s(\xi) \leq c \left[\sum_{i=1}^n h_i^s(\xi^i) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R}_0^n} |\xi|^{s\nu} \right].$$

Покажем, что для достаточно больших $s > 0$

$$(26) \quad \sup_{\eta} \int \frac{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta)}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty.$$

Очевидно, для доказательства оценки (26) достаточно показать, что при достаточно больших s

$$(27) \quad \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(28) \quad \sup_{\eta} \int \frac{|\eta|^{s\nu}}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty, \quad \nu \in \mathbb{R}^0 \cap \mathbb{R}_0^n.$$

Докажем оценки (27). В силу (25) и условия теоремы имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$

$$\begin{aligned}
G_i &\equiv \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi \\
&\leq c \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta_i - \xi_i|^{sl_i})(h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{sl_i})} d\xi, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

где $0 \neq (0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0)$ – вершина многогранника $\mathfrak{R}$, лежащая на оси ξ_i (напомним, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник). Так как функция h_i ($1 \leq i \leq n$) по

условию теоремы удовлетворяет условию Δ , то в силу теоремы Фубини (см. (2)) с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и $\delta_i \in [0, 1)$ и для произвольных η^i

$$\begin{aligned}
 G_i &\leq c_1 \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{\left(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta^{(i)} - \xi^{(i)}|^{s l_i}\right) (h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{s l_i})} d\xi \\
 &\leq c_2 \int \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) h_i^{s \delta_i}(\xi^{(i)}) + h_i^{s \delta_i}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) h_i^s(\xi^{(i)})}{\left(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta^{(i)} - \xi^{(i)}|^{s l_i}\right) (h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{s l_i})} d\xi \\
 &\leq c_2 \left[\int \int \frac{h_i^{s(\delta_i-1)}(\xi^{(i)})}{1 + \left(|\xi_i|/h_i^{1/l_i}(\xi^{(i)})\right)^{s l_i}} d\xi^{(i)} d\xi_i \right. \\
 &\quad \left. + \int \int \frac{h_i^{s(\delta_i-1)}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)})}{1 + \left(|\eta_i - \xi_i|/h_i^{1/l_i}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)})\right)^{s l_i}} d\xi^{(i)} d\xi_i \right] \\
 (29) \quad &\leq 2c_2 \int h_i^{s(\delta_i-1)+1/l_i}(\xi^i) d\xi^i \int \frac{1}{1+t^{s l_i}} dt, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Так как $\delta_i \in [0, 1)$ и

$$h_i(\xi^{(i)}) \geq 1 + \sum_{j \neq i} |\xi_j|^{l_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то отсюда непосредственно получаем, что при достаточно больших s интегралы, стоящие в правой части (29) сходятся, т.е. верна оценка (27).

Докажем оценки (28). Так как с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$|\eta|^\nu \leq \prod_{i=1}^n (1 + |\eta_i|)^{\nu_i} \quad \text{и} \quad h_{\mathfrak{R}}(\eta) \geq c_1 \prod_{i=1}^n (1 + |\eta_i|)^{\nu_i},$$

и функция

$$g(\xi) \equiv \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|)^{\nu_i} \quad (\nu \in \mathbb{R}_0^n)$$

удовлетворяет слабому условию Δ , то в силу теоремы 1 (см. замечание 2) с некоторой постоянной $c_4 = c_4(s) > 0$

$$\sup_{\eta} \int \frac{|\eta|^{s\nu}}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}(\xi)} d\xi \leq c_4 \sup_{\eta} \int g^s(\eta) (g^s(\eta - \xi) g^s(\xi)) d\xi < \infty$$

Этим оценка (28) доказана.

Из оценок (27) и (28) непосредственно следует, что $h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга. Теорема доказана.

Замечание 4. Из лемм 2, 4, предложений 3, 5 и леммы 2 работы [10] следует, что

$$\Lambda_{S.V.}^n \subset \Lambda_{\Delta}^n \subset \Lambda_B^n \subset \Lambda_T^n,$$

где $\Lambda_T^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} - \text{МРВ}\Phi\}$,

$$\Lambda_{S.V.}^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВ}\Phi\},$$

$$\Lambda_{\Delta}^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} \text{ удовлетворяет оценке (3)}\},$$

$\Lambda_B^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}}^s \text{ удовлетворяет оценке (4) для некоторого } s > 0\}$.
Из теоремы 2 следует, что $\Lambda_T^2 = \Lambda_B^2$.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Предложение 6. Пусть функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет слабому условию Δ $\Omega \subset \mathbb{E}^n$. Тогда для любого числа $s > s_0(h)$ (см. замечание 3) существует постоянная $c = c(s) > 0$ такая, что

$$(30) \quad \|uv\|_{W_{h^s}} \leq c \|u\|_{W_{h^s}} \|v\|_{W_{h^s}}, \quad u, v \in W_{h^s},$$

$$(31) \quad \|uv\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)} \|v\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)}, \quad u, v \in \dot{W}_{h^s}(\Omega),$$

$$(32) \quad uv \in W_{h^s,loc}(\Omega), \quad u, v \in W_{h^s,loc}(\Omega).$$

Доказательство. Мы докажем только оценку (30), доказательства (31) и (32) проводятся аналогичным образом. Так как при $s > s_0$ (см. теорему 1 и замечания 2, 3) функция h^s удовлетворяет условию Берлинга, т.е.

$$B_h \equiv \sum_{\eta} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h^s(\xi)} d\xi < \infty,$$

то в силу равенства Парсеваля для любых $u, v \in W_{h^s}$

$$\begin{aligned} \|uv\|_{h^s}^2 &= \left\| h^s(\xi) \int (Fu)(\xi - \eta)(Fv)(\eta) d\eta \right\|_{L_2}^2 \\ &= \int \left| \int \frac{h^s(\xi)}{h^s(\xi - \eta)h^s(\eta)} (h^s(\xi - \eta)(Fu)(\xi - \eta))(h^s(\eta)(Fv)(\eta)) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \left(\sup_{\xi} \int \frac{h^s(\xi)}{h^s(\xi - \eta)h^s(\eta)} d\eta \right)^2 \|h^s Fu\|_{L_2}^2 \|h^s Fv\|_{L_2}^2 = B_h^2 \|u\|_{W_{h^s}}^2 \|v\|_{W_{h^s}}^2 \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 7. Пусть $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ – правильный многогранник, $M \in \Lambda^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ и $\alpha^1, \alpha^2 \in (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 = c_0(s) > 0$ такие, что для любого $s > s_0$ (где число s_0 то же, что и в предложении 6) и при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства:

$$(33) \quad \left\| (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \right\|_{W_{h_M^{s+\varepsilon}}} \leq c_0^{j_1+j_2} \|u\|_{W_{h_M^s}}, \quad u \in W_{h_M^s},$$

$$(34) \quad \left\| (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \right\|_{\dot{W}_{h_M^{s+\varepsilon}}} \leq c_0^{j_1+j_2} \|u\|_{\dot{W}_{h_M^s}}, \quad u \in \dot{W}_{h_M^s}(\Omega),$$

$$(35) \quad (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \in W_{h_M^{s+\varepsilon},loc}, \quad u \in W_{h_M^s,loc}(\Omega),$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$, функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Докажем только утверждение пункта (33), так как доказательства пунктов (34) и (35) проводятся аналогично.

Из правильности многогранника $\mathfrak{R}$ и условий $\alpha^1, \alpha^2 \in (\mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$, следует, что можно выбрать число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$(36) \quad \{\{\nu : \nu \in \mathbb{R}_+^n, \nu \leq \alpha^1\} \cup \{\nu : \nu \in \mathbb{R}_+^n, \nu \leq \alpha^2\}\} \oplus \varepsilon_0 M \subset \mathfrak{R}.$$

Так как при $s > s_0$, $W_{h_M^s}$ является кольцом (см. предложение 6), и в силу (36) с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\left(\prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^{\alpha_i^1}) + \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^{\alpha_i^2}) \right) h_M^{s+\varepsilon}(\xi) \leq c_1 h(\xi) h_M^s(\xi)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Так как $D^{\alpha^j} u \in W_{h_M^{s+\varepsilon}}$ ($j = 1, 2$), то в силу предложения 6 имеем

$$\begin{aligned} \left\| (D^{\alpha^1} u)^{j_1} (D^{\alpha^2} u)^{j_2} \right\|_{W_{h_M^{s+\varepsilon}}} &\leq B_{h_M}^{j_1+j_2} \left\| (D^{\alpha^1} u) \right\|_{h_M^{s+\varepsilon}}^{j_1} \left\| D^{\alpha^2} u \right\|_{h_M^{s+\varepsilon}}^{j_2} \\ &\leq (B_{h_M} c_1^2)^{j_1+j_2} \|u\|_{h_M^s}^{j_1+j_2}, \quad u \in W_{h_M^s}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Следствие 5. Пусть $f(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ($f(0) = 0$) – целая функция, $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, а $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ , и $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in (\mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ что для любого $s > s_0$

$$\begin{aligned} f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in W_{h_M^{s+\varepsilon_0}}, \quad u \in W_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s}, \\ f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in \mathring{W}_{h_M^{s+\varepsilon_0}}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s}(\Omega), \\ f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in W_{h_M^{s+\varepsilon_0}, loc}(\Omega), \quad u \in W_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s, loc}(\Omega). \end{aligned}$$

Доказательство непосредственно следует из предложения 7.

Определение 5. (см. [5, 6]). Линейный дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}(P)} \gamma_\alpha D^\alpha$$

с характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$ называется невырожденным (регулярным), если его характеристический многочлен является невырожденным (регулярным), т.е. с некоторой постоянной $c > 0$ для любого $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$|\xi|^\alpha \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 8. Пусть $P(D)$ – линейный регулярный дифференциальный оператор с правильным характеристическим многогранником $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$, $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^1$ и $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$. Тогда

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{\theta_1}} : P(D)u \in W_{hh_M^{\theta_2}} \right\} = \left\{ u \in W_{hh_M^{\theta}} \right\},$$

$$\left\{ u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta_1}}(\Omega) : P(D)u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta_2}}(\Omega) \right\} \subset \left\{ u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta}}(\Omega) \right\},$$

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{\theta_1}, loc}(\Omega) : P(D)u \in W_{hh_M^{\theta_2}, loc}(\Omega) \right\} \subset \left\{ u \in W_{hh_M^{\theta}, loc}(\Omega) \right\},$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$ – функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство непосредственно получается с помощью равенства Парсеваля, если заметить, что с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и для любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^1$

$$c_1 \left(h(\xi)h_M^{\theta_1}(\xi) + |P(\xi)|h_M^{\theta_2}(\xi) \right) \leq h(\xi)h_M^{\theta}(\xi)$$

$$\leq c_2 \left(h(\xi)h_M^{\theta_1}(\xi) + |P(\xi)|h_M^{\theta_2}(\xi) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 4. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ и $Q(D) = P(D) + f(D^{\alpha_1}, \dots, D^{\alpha_k})$, где $P(D)$ – линейный регулярный дифференциальный оператор с правильным характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$, $f(z_1, \dots, z_k)$, $f(0) = 0$ – целая функция, $\alpha^1, \dots, \alpha^k \subset (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$, $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ и $s_1 > s_0$, где s_0 – число из предложения 6, $s_2 \in \mathbb{R}^1$ и $s = \max\{s_1, s_2\}$. Тогда

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{hh_M^{s_2}} \right\} \subset W_{hh_M^s},$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$ – функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Так как при $s_1 > s_0$, в силу следствия 5 $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{hh_M^{s_1+\varepsilon}}$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и при всех $u \in W_{hh_M^{s_1}}$, то утверждение теоремы очевидно, если $s_1 \geq s_2$.

Пусть $s_1 < s_2$. Так как в силу следствия 5 для любого $u \in W_{hh_M^{s_2}}$ ($s_2 > s_1 > s_0$) $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2+\varepsilon}}$ и $P(D)u \in W_{h_M^{s_2}}$ (i.e. $Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}}$), то

$$W_{hh_M^{s_2}} \subset \left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}} \right\}.$$

Покажем теперь, что при $s_1 < s_2$

$$(37) \quad \left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}} \right\} \subset W_{hh_M^{s_2}}.$$

Пусть $u \in W_{hh_M^{s_1}}$ и $Q(D)u \equiv g \in W_{h_M^{s_2}}$. Тогда в силу следствия 5 для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_1+\varepsilon_0}}$, следовательно,

$$P(D)u = g + f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2}} \cup W_{h_M^{s_1+\varepsilon_0}}.$$

Если $\varepsilon_0 + s_1 \geq s_2$, то $g + f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2}}$, следовательно, в силу предложения 8 $u \in W_{hh_M^{s_2}}$. Если же $s_1 + \varepsilon_0 < s_2$, то снова в силу предложения 8 $u \in W_{hh_M^{s_1+\varepsilon_0}}$. Так как число ε_0 зависит лишь от M , $\mathfrak{R}$ и $\alpha^1, \dots, \alpha^k$, то, повторяя эти рассуждения r раз (где число $r \in \mathbb{N}$ определяется из условия $(s_2 - s_1)/\varepsilon_0 \leq r < 1 + (s_2 - s_1)/\varepsilon_0$) мы получим вложение (37).

Следствие 6. При условиях теоремы 4 и предположениях $f \in C^\infty$ и $s > s_0$, все решения и уравнения $Q(D)u = f$ из класса $W_{hh_M^s}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, т.е. при $s > s_0$

$$\{u \in W_{hh_M^s} : Q(D)u \in C^\infty\} \subset C^\infty.$$

Доказательство следует из теоремы 4.

Замечание 5. Утверждение теоремы 4 остается верным, если пространство W_h заменить соответственно пространствами $\mathring{W}_h(\Omega)$ или $W_{h,loc}(\Omega)$.

Abstract. The paper considers differential operators in the generalized Sobolev spaces. Differing necessary and sufficient conditions on the polyhedron $\mathfrak{R}$ are found, under which the function $h_{\mathfrak{R}}^s$ satisfies the Beurling condition for s great enough. They coincide (become necessary and sufficient) for polyhedrons in $\mathbb{R}_+^2$. The regularity of a class of differential equations is investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными* 2 (Мир, Москва, 1986).
- [2] S. Gindikin and L. Volevich, *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations* (Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1992).
- [3] N. Kumano-Go, *Pseudo Differential Operators* (Math. Press, Cambridge, MA, 1981).
- [4] A. Beurling, "Construction and Analysis of Some Convolutions Algebras", Ann. Inst. Fourier **14**, 1-32 (1964).
- [5] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР **91**, 59-81 (1967).
- [6] Г. Г. Казарян, "Операторы постоянной силы с оценкой снизу через производные и формально гипоеллиптические операторы", Analysis Matematica **3**, 263-289 (1977).
- [7] V. N. Margaryan and G. O. Hakobyan, "On Gevrey Class Solutions of Hypoelliptic Equations", Izv. Akad. Nauk Armenii, Matematika [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)] **33** (1), 1-13 (1998).

- [8] G. Garelo and L. Rodino, "Nonlinear Microlocal Analysis", 67-82 (World Scientific, Singapore, New-Jersey, London, Hong-Kong, 1999).
- [9] G. Garelo, "Generalized Sobolev Algebras and Regularity for Solutions", Com. Appl. Analysis **3** (4), 563-574 (1999).
- [10] G. Garelo, "Pseudo Differential Operators With Symbols in Weighted Sobolev Spaces and Regularity for Non Linear Partial Differential Equations", Math. Nach., 239-240, 62-79 (2002).
- [11] Т. В. Маргарян, В. Н. Маргарян, "О некоторых алгебраических свойствах обобщенных пространств Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, Математика **40** (2), 61-70 (2005).

Поступила 8 июня 2007

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: albp@xter.net

Аннотация. В банаховом пространстве $H^\infty(U)$ функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге U , рассматривается выпуклое подмножество функций $H^\infty(U; K)$, значения которых принадлежат компакту K . При довольно общих условиях на K дается описание крайних точек $H^\infty(U; K)$.

1. Пусть B – банахово пространство, $X \subset B$ – его выпуклое подмножество. Точка x называется крайней для множества X , если она не является собственной выпуклой комбинацией никаких двух различных точек из X . То, что x крайняя точка может быть сформулировано следующим образом: если элемент $t \in B$ таков, что $x + t \in X$ и $x - t \in X$, то $t = 0$.

Задаче описания крайних точек выпуклого множества посвящено немало работ. Интерес к этой задаче вызван, в частности, и тем, что во многих случаях крайние точки несут в себе достаточную информацию о геометрии этого множества. Например, в конечномерном пространстве всякое замкнутое ограниченное выпуклое множество является выпуклой оболочкой множества своих крайних точек. В случае произвольного банахова пространства это уже не всегда так: например, единичный шар в пространстве l_1 вообще не имеет ни одной крайней точки. Но если B является сопряженным к некоторому банахову пространству, то, как следует из теоремы Крейна-Мильмана (см., например, [1]), единичный шар в B не только имеет крайние точки, но и этих точек достаточно много в том смысле, что шар является слабым замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.

В данной работе рассматривается случай, когда B является пространством ограниченных голоморфных функций.

2. Пусть U – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. $U = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, K – выпуклый компакт на плоскости w , $H^\infty(U)$ – пространство голоморфных и ограниченных в U функций, $H^\infty(U; K)$ – множество функций $f(z) \in H^\infty(U)$, для которых $f(U) \subset K$. Очевидно, что $H^\infty(U; K)$ является выпуклым множеством в $H^\infty(U)$.

Если K – круг $|w| \leq 1$, то $H^\infty(U; K)$ является единичным шаром в $H^\infty(U)$, а его крайними точками (см. [2], стр. 197) являются те и только те функции f ,

которые удовлетворяют условию

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \log(1 - |f(e^{i\theta})|) d\theta = -\infty.$$

Целью данной работы является описание крайних точек множества $H^\infty(U; K)$ для довольно широкого класса выпуклых компактов K , а именно, для компактов, удовлетворяющих условию

(Р) *Существует натуральное число n такое, что в каждой точке $\zeta \in \partial K$ существует опорная к K прямая l_ζ и парабола порядка $2n$ с вершиной в ζ , касающаяся l_ζ и такая, что в некоторой окрестности D_ζ точки ζ ветви этой параболы охватывают множество $K \cap D_\zeta$.*

Условие (Р) означает, что граница ∂K компакта K в каждой своей точке имеет с опорной прямой соприкосновение порядка не выше $2n - 1$. Напомним, что опорной к данному множеству K в данной точке $\zeta \in \partial K$ называется прямая, проходящая через ζ и оставляющая K по одну сторону от себя.

В работе [3] описаны крайние точки множества $H^\infty(U; K)$ для компактов, удовлетворяющих некоторому условию, которое, как легко показать, эквивалентно условию (Р) при $n = 1$.

На множестве K определим неотрицательную функцию:

$$(2) \quad G(w) = \sup \{|\zeta| : w \pm \zeta \in K\}, \quad w \in K.$$

Обозначим через $\rho(w, \partial K)$ расстояние между w и ∂K , т.е.

$$\rho(w, \partial K) = \inf_{t \in \partial K} |w - t|.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для выпуклых компактов K , удовлетворяющих условию (Р), имеет место неравенство*

$$(3) \quad G(w) \leq C \{\rho(w, \partial K)\}^{\frac{1}{n}}, \quad w \in K,$$

где C не зависит от w .

Доказательство: Окрестности D_ζ , участвующие в условии (Р), покрывают всю границу компакта K . Множество

$$K' = K \setminus \left(\bigcup_{\zeta \in \partial K} D_\zeta \right)$$

компактно внутри K , т.е. $\rho(K', \partial K) > 0$. Ввиду того, что K — компакт, из (2) следует, что функция $G(w)$ ограничена некоторой константой: $G(w) \leq M$.

Пусть

$$C = \max \left\{ 1; M [\rho(K', \partial K)]^{-1/n} \right\}.$$

Для $w \in K'$ имеем

$$(4) \quad G(w) \leq M \leq C [\rho(K', \partial K)]^{1/n} \leq C [\rho(w, \partial K)]^{1/n}.$$

В случае $w \in K \setminus K'$ выберем $\zeta_0 \in \partial K$ так, чтобы

$$(5) \quad \rho(w, \partial K) = \rho(w, \zeta_0).$$

Опорная прямая к компакт K через точку ζ_0 , очевидно, перпендикулярна к прямой d , соединяющей точки w и ζ_0 , иначе на ∂K существовали бы точки, расположенные к w ближе, чем ζ_0 , что противоречило бы (5). Проведя соответствующую параболу порядка n с осью d и вершиной ζ_0 , убеждаемся, что

$$(6) \quad G(w) \leq |w - \zeta|^{1/n} = [\rho(w, \partial K)]^{1/n}.$$

Объединяя (4) и (6), получаем утверждение (3) леммы для всех точек $w \in K$.

Теорема 1. Пусть K – выпуклый компакт. Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $H^\infty(U, K)$, необходимо, чтобы K удовлетворяло условию

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta = -\infty,$$

и обратно, если K удовлетворяет условиям (P) и (7), то $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(U, K)$.

Доказательство: Необходимость будем доказывать от противного. Пусть интеграл в левой части (7) сходится. Функция

$$(8) \quad h(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta \right\}$$

голоморфна и ограничена в круге U и для почти всех θ имеет место равенство $|h(e^{i\theta})| = \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta}) \pm h(e^{i\theta}) \in K$ почти всюду, поэтому $f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in U$. Поскольку $h(z) \not\equiv 0$, то, значит, $f(z)$ не является крайней точкой.

Отметим, что в [4] рассмотрен случай, когда K является произвольным выпуклым множеством, отличным от полуплоскости и всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получено необходимое условие

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} \log \frac{\rho(f(e^{i\theta}), \partial K)}{\rho(f(e^{i\theta}), \partial K) + 1} d\theta = -\infty.$$

В случае, если K ограничено, условия (7) и (9) эквивалентны.

Докажем достаточность. Пусть $g(z)$ голоморфна в U и $f(z) \pm g(z) \in K$. В силу определения (2) функции $G(w)$ имеем $|g(z)| \leq G(f(z))$. Учитывая (3), получим

$$|g(e^{i\theta})| \leq G(f(e^{i\theta})) \leq C [\rho(f(e^{i\theta}), \partial K)]^{1/n}.$$

Логарифмируя и интегрируя полученное неравенство, с учетом (7) будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| d\theta \leq \log C + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta = -\infty.$$

Отсюда следует, что $g(z) \equiv 0$, т.е. $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(U; K)$. Доказательство завершено.

Заметим, что в случае, когда K – круг, $\rho(f(e^{i\theta}), \partial K) = 1 - |f(e^{i\theta})|$ и условие (7) сводится к условию (1).

В работе [4] доказана достаточность условия (7) в случае, когда граница выпуклого компакта K является дважды гладкой кривой и имеет положительную кривизну во всех точках. Отсюда следует, что во всех точках эта кривая имеет со своей касательной соприкосновение порядка не выше первого, поэтому в этом случае K удовлетворяет условию (P). Таким образом, указанный результат в [4], как частный случай, следует из теоремы 1.

3. Теорема 1 имеет место и в случае банахова пространства $A(U)$ непрерывных функций в замкнутом круге, аналитических внутри него. Обозначим через $A(U; K)$ множество всех функций из $A(U)$, значения которых лежат в K .

Теорема 2. Пусть K – выпуклый компакт. Условие (7) является необходимым, а для компактов, удовлетворяющих условию (P), также и достаточным для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $A(U; K)$.

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как в теореме 1. Чтобы доказать необходимость, нужно обеспечить непрерывность граничных значений функции $h(z)$ в формуле (8). Если $f \in A(U; K)$ и $\log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$ интегрируем, то можно выбрать непрерывную функцию u на единичной окружности так, что $0 \leq u \leq \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$, $\log u$ интегрируем и u непрерывно дифференцируема на каждой открытой дуге множества, где $f \notin \partial K$. Если положить

$$h(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log u \, d\theta \right\},$$

то функция h имеет непрерывные граничные значения и удовлетворяет условию $|h(e^{i\theta})| \leq \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta}) \pm h(e^{i\theta}) \in K$ для всех θ , поэтому $f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in U$. Поскольку $h(z) \not\equiv 0$, это значит, что $f(z)$ не является крайней точкой множества $A(U; K)$.

Отметим, что в [3] рассмотрен также случай, когда K является выпуклым многоугольником. В этом случае крайних точек у $A(U; K)$ оказывается гораздо меньше: крайними являются те и только те функции $f \in A(U; K)$ ($f \neq \text{const}$), для которых $f(e^{i\theta}) \subset \partial K$, иначе говоря, $\rho(f(e^{i\theta}), \partial K) \equiv 0$.

Abstract. In the Banach space $H^\infty(U)$ of bounded, holomorphic functions in the unit disc U of the complex plane, the paper considers the subset $H^\infty(U; K)$ of functions that take values in a compact K . A description of the extreme points of $H^\infty(U; K)$ is given under rather general conditions on K .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке* (Мир, Москва, 1968).
- [2] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций* (ИЛ, Москва, 1963).
- [3] Н. М. Hilden, "A Characterization of the Extreme Points of Some Convex Sets of Analytic Functions", *Duke Math. J.* **37**, 715–723 (1970).
- [4] Yu. Abu-Muhanna, Th. H. MacGregor, "Extreme Points of Families of Analytic Functions Subordinate to Convex Mappings", *Math. Zeit.* **176**, 511–519 (1981).

Поступила 7 июня 2007

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 42

Известия НАН Армении: Математика, том 42

	номер
К. Л. Аветисян, Лакунарные ряды и строгие оценки в весовых пространствах голоморфных функций.....	2
К. Л. Аветисян и Р. Ф. Шамоян, Тожества Харди-Стейна и неравенства Литтлвуда-Пэли в поликруге.....	3
Р. В. Амбарцумян, Исчисление хорд в стохастической геометрии.....	1
Р. А. Амирджанян и А. Г. Камальян, Факторизация мероморфных матриц-функций.....	6
К. В. Арутюнян и А. Г. Камальян, Частные индексы треугольных матриц-функций.....	2
А. О. Бабаян, Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге.....	4
А. Г. Багдасарян, В-произведения пространств типа Бесова и некоторые их применения.....	6
Г. А. Барсегян, Некоторые новые нервенства в геометрии и анализе.....	2
Б. Т. Батикян, Об индексе спектральных точек алгебраического расширения.....	2
С. А. Вагаршакян, Аналог теоремы Сегё.....	5
М. А. Галдунц и С. Г. Рафаелян, Интерполяция и базисность: целые функции экспоненциального типа от нескольких переменных....	5
Г. А. Григорян, О некоторых свойствах решений уравнения Риккати.....	4
М. Г. Григорян, Ряды по системе Хаара с монотонными коэффициентами.....	4
М. Г. Григорян и С. Л. Гогян, Переставленные ряды по системе Хаара.....	2
А. Г. Камальян и А. В. Саргсян, О частных индексах одного класса матриц-функций второго порядка.....	3
Г. А. Карапетян и А. А. Дарбинян, Индекс полуэллиптических операторов в R^n	5
М. И. Караханян, Некоторые замечания к общим теоремам о коммутаторах.....	3
И. М. Караханян и М. И. Караханян, О спектральной теореме банахова представления компактного пространства, порожденного операторами обобщенного сдвига.....	4
Т. В. Маркарян, Об одном классе почти гипозэллиптических операторов в обобщенных пространствах Соболева.....	6
В. Х. Мусоян и С. В. Самарчян, Диаметры Колмогорова целых функций данного порядка роста.....	2

К. А. НАВАРСАДЯН, О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами	5
К. А. НАВАРСАДЯН и А. А. СТЕПАНЯН, О рядах по системе Хаара.....	4
А. Г. ОГАНЕСЯН и С. Г. РАФАЕЛЯН, Решение задачи Коши с весами для одного класса уравнений Гюйтенса.....	5
В. К. ОГАНЯН, Трансляционно инвариантные валюации в пространстве плоскостей	1
А. И. ПЕТРОСЯН, О крайних точках некоторых множеств голоморфных функций	6
А. А. САРКИСЯН, Сходимость гриди-алгоритма по системе Фабера-Шаудера на континуальном множестве.....	2
А. А. СТЕПАНЯН, О представлении измеримых функций рядами по общей системе Франклина.....	3
Н. Е. ТОВМАСЯН и О. А. БАБАЯН, Задача Коши в классе монотонно возрастающих функций	4
А. Х. ХАЧАТРЯН и Ц. Е. ТЕРДЖИЯН, Уравнение Винера-Хопфа: ядра представимы в виде суперпозиции комплексно-значных экспонент.....	5
Х. А. ХАЧАТРЯН и Э. А. ХАЧАТРЯН, К вопросу о разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа свертки на всей прямой	3
Р. Н. ЧИТЧЯН и А. Р. МАРТИРОСЯН, Асимптотический анализ отрицательных страховых выплат в критической ситуации	6
B. AQZZOUZ, F. BELMANJOUB AND H. SNOUSSI, Some Properties of the ε_∞ -Product of Quotient Bornological Spaces.....	6
S. AZIMPOUR, M. CHAICHI AND M. TOOMANIAN, A note on 4-dimensional locally conformally flat Walker manifolds.....	5
S. FRIGIO AND S. K. POGHOSYAN, Asymptotics of Brownian Integrals and Pressure. Bose-Einstein Statistics	3
J. MECKE, W. NAGEL AND V. WEISS, Length distributions of edges in planar stationary and isotropic STIT tessellations.....	1

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 42, номер 6, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

B. AQZZOUZ, F. BELMANJOUR, H. SNOUSSI, Some Properties of the ε_∞ -Product of Quotient Bornological Spaces	3
А. Г. БАГДАСАРЯН, В-произведения пространств типа Бесова и некоторые их применения	11
Р. Н. ЧИТЧЯН И А. Р. МАРТИРОСЯН, Асимптотический анализ отрицательных страховых выплат в критической ситуации	23
Р. А. АМИРДЖАНЫАН И А. Г. КАМАЛЯН, Факторизация мероморфных матриц-функций	31
Т. В. МАРКАРЯН Об одном классе почти гипоеллиптических операторов в обобщенных пространствах Соболева	51
А. И. ПЕТРОСЯН, О крайних точках некоторых множеств голоморфных функций	71
Содержание тома 42	75

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 42, No. 6, 2007

CONTENTS

B. AQZZOUZ, F. BELMANJOUR, H. SNOUSSI, Some Properties of the ε_∞ -Product of Quotient Bornological Spaces	3
A. G. BAGHDASARYAN, B-Products of Besov Type Spaces and Some Applications	11
R. N. CHITCHYAN AND A. R. MARTIROSYAN, Asymptotical Analysis of Negative Insurance Premiums in Critical Situation	23
H. A. AMIRJANYAN AND A. G. KAMALYAN, Factorization of Meromorphic Matrix Functions	31
T. V. MARKARYAN, On a Class of Almost Hypoelliptic Operators in Generalized Sobolev Spaces	51
A. I. PETROSYAN, On Extreme Points of Some Sets of Holomorphic Functions	71
Index of volume 42	75