

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

2007

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Քանալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартіросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсесян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

A NOTE ON 4-DIMENSIONAL LOCALLY CONFORMALLY
FLAT WALKER MANIFOLDS

S. Azimpour, M. Chaichi, M. Toomanian

University of Tabriz, Iran, University of Payame Noor of Tabriz, Iran

University of Tabriz, Iran (Azad University, Karaj)

E-mails : sohrab_azimpour@yahoo.com, chaichi@tabrizu.ac.ir

E-mail : Toomanian@tabrizu.ac.ir

Abstract. A 4-dimensional Walker metric on a semi Riemannian manifold M , for the canonical metric with $c = 0$, have been investigated by M. Chaichi, E. García-Río and Y. Matsushita. The paper generalizes these notions to the case of constant $c \neq 0$. Specially the form of defining functions of this metric in locally conformally flat 4-dimensional Walker manifolds is found.

§1. INTRODUCTION

A Walker n -manifold, admits a field of parallel null r -planes, with $r \leq \frac{n}{2}$. The canonical forms of the metrics have been investigated by Walker [4]. The canonical form of this metric contain three functions $a(x, y, z, t)$, $b(x, y, z, t)$ and $c(x, y, z, t)$. Our interest is in 4-dimensional Walker manifolds with parallel null 2-planes. In [2], Einstein, Osserman and locally conformally flat Walker manifolds were investigated in the restricted form of metric when $c(x, y, z, t) = 0$. Following [2], in this paper we focus on the case $c(x, y, z, t) = c$ and investigate locally conformally flat 4-dimensional Walker manifolds admitting parallel null 2-plane.

Definition 1. A Walker manifold is a triple (M, g, D) consisting of an n -dimensional manifold M , an indefinite metric g and an r -dimensional parallel distribution D . If $\dim M = 4$ and $\dim D = 2$, g has signature $(- - ++)$ and in suitable coordinates, g can be given by

$$g(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x, y, z, t) & c(x, y, z, t) \\ 0 & 1 & c(x, y, z, t) & b(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

for some functions $a(x, y, z, t)$, $b(x, y, z, t)$, $c(x, y, z, t)$ and $D = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ (ref. [4], [5]). The special case where $c(x, y, z, t) \equiv 0$ was studied in [2], where the components of Levi-Civita connection, and the curvature tensor has been calculated and the conditions that creates locally conformally flat are given. We are interested in the case of the Walker metric g as in (0.1) with constant c .

§2. CURVATURE TENSOR OF 4-DIMENSIONAL NEUTRAL METRIC ADMITTING A PARALLEL NULL 2-PLANE

The canonical form of Walker metric has been obtained by A. G. Walker in [4], [5], showing existence of suitable coordinates where the metric expresses as (0.1).

Now the Levi-Civita connection of a Walker metric (0.1) is given by

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_x} \partial_z &= \frac{1}{2} a_x \partial_x + \frac{1}{2} c_x \partial_y, & \nabla_{\partial_x} \partial_z &= \frac{1}{2} a_x \partial_x + \frac{1}{2} c_x \partial_y, \\ \nabla_{\partial_x} \partial_t &= \frac{1}{2} c_x \partial_x + \frac{1}{2} b_x \partial_y, & \nabla_{\partial_y} \partial_z &= \frac{1}{2} a_y \partial_x + \frac{1}{2} c_y \partial_y, \\ \nabla_{\partial_y} \partial_t &= \frac{1}{2} c_y \partial_x + \frac{1}{2} b_y \partial_y, \\ \nabla_{\partial_z} \partial_z &= \frac{1}{2} (a_z + c a_y + a a_x) \partial_x + \frac{1}{2} (2c_z - a_t + b a_y + c a_x) \partial_y - \frac{1}{2} a_x \partial_z - \frac{1}{2} a_y \partial_t, \\ \nabla_{\partial_z} \partial_t &= \frac{1}{2} (a_t + c c_y + a c_x) \partial_x + \frac{1}{2} (b c_y + b_z + c c_x) \partial_y - \frac{1}{2} c_x \partial_z - \frac{1}{2} c_y \partial_t, \\ \nabla_{\partial_t} \partial_t &= \frac{1}{2} (2c_t - b_z + c b_y + a b_x) \partial_x + \frac{1}{2} (b_t - b b_y + c b_x) \partial_y - \frac{1}{2} b_x \partial_z - \frac{1}{2} b_y \partial_t,\end{aligned}$$

where $a_x = \frac{\partial}{\partial x} a(x, y, z, t)$ means partial derivative and ∂_k denotes the coordinate vector field $\frac{\partial}{\partial k}$, $k = x, y, z, t$. For the special case of $c(x, y, z, t) \equiv c$ in (1.1), we get

$$g(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x, y, z, t) & c \\ 0 & 1 & c & b(x, y, z, t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Let R denotes the curvature tensor taken with the convention $R(X, Y) = \nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$. Then, the nonzero components of the curvature tensor are computed as :

$$\begin{aligned}R_{\partial_z \partial_x} \partial_x &= \frac{1}{2} a_{xx} \partial_x, & R_{\partial_z \partial_x} \partial_y &= \frac{1}{2} a_{yx} \partial_x, \\ R_{\partial_z \partial_x} \partial_z &= \frac{1}{2} (c a_{yx} + a a_{xx}) + \frac{1}{4} (a_y b_x + 2b a_{yx} + 2c a_{tx} - 2a_{tx}) \partial_y - \frac{1}{2} a_{xx} \partial_z - \frac{1}{2} a_{yx} \partial_t, \\ R_{\partial_z \partial_x} \partial_t &= \frac{1}{4} (2a_{tx} - b_x a_y) \partial_x, & R_{\partial_t} \partial_x \partial_x &= \frac{1}{2} b_{xx} \partial_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\partial_t \partial_x} \partial_y &= \frac{1}{2} b_{yx} \partial_y, & R_{\partial_t \partial_x} \partial_z &= \frac{1}{4} (2b_{zx} - a_x b_x) \partial_y, \\
R_{\partial_t} \partial_x \partial_t &= \frac{1}{4} (-2b_{zx} + 2cb_{yx} + a_x b_x + 2ab_{xx}) \partial_x + \\
&\quad + \frac{1}{2} (bb_{yx} - cb_{xx}) \partial_y - \frac{1}{2} b_{xx} \partial_z - \frac{1}{2} b_{yx} \partial_t, \\
R_{\partial_z} \partial_y \partial_x &= \frac{1}{2} a_{xy} \partial_x, & R_{\partial_z \partial_y} \partial_y &= \frac{1}{2} a_{yy} \partial_x, \\
R_{\partial_z \partial_y} \partial_z &= \frac{1}{2} (ca_{yy} + aa_{yx} b_x) \partial_x + \frac{1}{4} (-2a_{ty} + \\
&\quad + a_y b_y + 2ba_{yy} + 2ca_{xy}) \partial_y - \frac{1}{2} a_{xy} \partial_z - \frac{1}{2} a_{yy} \partial_t, \\
R_{\partial_z} \partial_y \partial_t &= \frac{1}{4} (2a_{ty} - b_y a_y) \partial_x, & R_{\partial_t} \partial_y \partial_x &= \frac{1}{2} b_{xy} \partial_y, \\
R_{\partial_t \partial_y} \partial_y &= \frac{1}{2} b_{yy} \partial_y, & R_{\partial_t \partial_y} \partial_z &= \frac{1}{4} (2b_{zy} - a_y b_x) \partial_y, \\
R_{\partial_t} \partial_y \partial_t &= \frac{1}{4} (-2b_{zy} + 2cb_{yy} + a_y b_x + 2ab_{xy}) \partial_x \\
&\quad + \frac{1}{2} (bb_{yy} + cb_{xy}) \partial_y - \frac{1}{2} b_{xy} \partial_z - \frac{1}{2} b_{yy} \partial_t, \\
R_{\partial_t} \partial_z \partial_x &= \frac{1}{4} (2b_z a_y - 2a_{tx}) \partial_x + \frac{1}{4} (2b_{xz} - a_x b_x) \frac{1}{4} \partial_y, \\
R_{\partial_t \partial_z} \partial_y &= \frac{1}{4} (b_y a_y - 2a_{yt}) \partial_x + \frac{1}{4} (2b_{yz} - a_y b_x) \partial_y, \\
R_{\partial_t \partial_z} \partial_z &= \frac{1}{4} (-2ca_{yt} - 2aa_{xt} + ca_y b_y + aa_y b_x) \partial_x + \frac{1}{4} (2b_{zz} + 2a_{tt} - a_y b_t - \\
&\quad - 2a_{yt} b - 2ca_{xt} - ca_x b_y - aa_x b_x + a_t b_y + b_z a_x - a_z b_x) \partial_y + \\
&\quad + \frac{1}{4} (2a_{xt} - a_y b_x) \partial_z + \frac{1}{4} (2a_{yt} - a_y b_y) \partial_t, \\
R_{\partial_t \partial_z} \partial_t &= \frac{1}{4} (-2b_{zz} + a_z b_x + 2ab_{xz} - 2a_{tt} - b_z a_x + 2cb_{yz} + b_t a_y - b_y a_t + \\
&\quad + bb_y a_y + cb_y a_x) \partial_x + \frac{1}{4} (2bb_{yz} + 2cb_{xz} - b_x b a_y - cb_x a_x) \partial_y + \\
&\quad + \frac{1}{4} (b_x a_x - 2b_{xz}) \partial_z + \frac{1}{4} (b_x a_y - 2b_{yz}) \partial_t.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

§3. LOCALLY CONFORMALLY FLAT 4-DIMENSIONAL NEUTRAL METRICS ADMITTING A PARALLEL NULL 2-PLANE FIELDS

A semi-Riemannian manifold is locally conformally flat if and only if its Weyl tensor, given by

$$W(X, Y, Z, V) = R(X, Y, Z, V)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Sc}{(n-1)(n-2)}(g(X, Z)g(Y, V) - g(X, V)g(Y, Z)) \\
& -\frac{1}{(n-2)}(Ric(X, Z)g(Y, V) - Ric(Y, Z)g(X, V) \\
& \quad + Ric(Y, V)g(X, Z)g(X, V)g(Y, Z))
\end{aligned}$$

vanishes. The nonzero components of Weyl tensor of a special Walker metric (2.1) are given by

$$\begin{aligned}
W(\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{12}a_{xx} - \frac{1}{12}b_{yy}, \\
W(\partial_x, \partial_z, \partial_x, \partial_t) &= \frac{1}{4}b_{xy}, \\
W(\partial_x, \partial_z, \partial_x, \partial_z) &= -\frac{1}{6}a_{xx} - \frac{1}{6}b_{yy}, \\
W(\partial_x, \partial_z, \partial_y, \partial_z) &= -\frac{1}{4}a_{xy}, \\
W(\partial_x, \partial_z, \partial_z, \partial_t) &= \frac{1}{4}a_{xt} - \frac{1}{4}b_{zy} - \frac{1}{12}ca_{xx} + \frac{1}{4}ab_{xy} + \frac{1}{6}cb_{yy}, \\
W(\partial_x, \partial_t, \partial_x, \partial_t) &= -\frac{1}{2}b_{xx}, \\
W(\partial_x, \partial_t, \partial_y, \partial_z) &= \frac{1}{12}b_{yy} + \frac{1}{12}a_{xx}, \\
W(\partial_x, \partial_t, \partial_y, \partial_t) &= -\frac{1}{4}b_{xy}, \\
W(\partial_x, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{4}ab_{xx} - \frac{1}{4}cb_{xy} - \frac{1}{12}bb_{yy} - \frac{1}{12}ba_{xx}, \\
W(\partial_y, \partial_z, \partial_y, \partial_z) &= -\frac{1}{2}a_{yy}, \\
W(\partial_y, \partial_z, \partial_y, \partial_t) &= \frac{1}{4}a_{xy}, \\
W(\partial_y, \partial_z, \partial_z, \partial_t) &= \frac{1}{12}aa_{xx} + \frac{1}{4}ca_{xy} + \frac{1}{4}ba_{yy} + \frac{1}{12}ab_{yy}, \\
W(\partial_y, \partial_t, \partial_y, \partial_t) &= -\frac{1}{6}a_{xx} - \frac{1}{6}b_{yy}, \\
W(\partial_y, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{4}b_{zy} + \frac{1}{4}a_{xt} - \frac{1}{4}ba_{xy} + \frac{1}{12}cb_{yy} - \frac{1}{6}ca_{xx}, \\
W(\partial_z, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{2}a_{tt} - \frac{1}{2}b_{zz} - \frac{1}{4}a_xb_z + \frac{1}{4}a_yb_t + \frac{1}{4}b_xa_z - \frac{1}{4}b_ya_t \\
& + \frac{1}{4}cb_ya_x - \frac{1}{4}cb_xa_y + \frac{1}{2}ab_{zx} + \frac{1}{2}ca_{xt} + \frac{1}{2}cb_{zy} \\
& - \frac{1}{4}b^2a_{yy} + \frac{1}{2}ba_{yt} - \frac{1}{6}c^2a_{xx} - \frac{1}{6}c^2b_{yy} - \frac{1}{2}cab_{xy} \\
& - \frac{1}{12}abb_{yy} - \frac{1}{12}baa_{xx} - \frac{1}{2}cba_{xy} - \frac{1}{4}a^2b_{xx}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Now it is possible to obtain the form of a locally conformally flat Walker metric as follows :

Theorem 1. *A Walker metric (2.1) is locally conformally flat if and only if the functions $a(x, y, z, t)$ and $b(x, y, z, t)$ satisfy*

$$\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= \kappa x^2 + xR(z, t) + yS(z, t) + \xi(z, t), \\ b(x, y, z, t) &= -\kappa y^2 + yP(z, t) + xQ(z, t) + \eta(z, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

where the functions $R(z, t)$, $S(z, t)$, $P(z, t)$, $Q(z, t)$, $\xi(z, t)$, $\eta(z, t)$ and c satisfy the following relations

$$\begin{aligned} R_t - P_z &= 2c\kappa, \\ -2R_{tt} - 2Q_{zz} + RQ_z - 2\kappa\eta_z + SQ_t + R_zQ - R_tP + 2QS_t + 2\kappa cP &= 0, \\ -2S_{tt} - 2P_{zz} + 2SQ_z - RP_z + SP_t + QS_z + 2\kappa\xi_t + PS_t - 2\kappa cR &= 0, \\ -2\xi_{tt} - 2\eta_{zz} + 2\xi Q_z + 2cR_t + 2cP_z + 2S_t\eta - R\eta_z + S\eta_t + Q\xi_z - P\xi_t + cRP - cQS &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\kappa \in \mathbf{R}$ is any constant.

Since a four-dimensional manifold is locally conformally flat if and only if the Weyl tensor vanishes, we consider (2.1) to be a system of *PDE*'s. We shall prove the theorem in four steps.

First step :

$$\begin{aligned} W(\partial_x, \partial_z, \partial_x, \partial_t) &= \frac{1}{4}b_{xy} = 0, \\ W(\partial_x, \partial_z, \partial_y, \partial_z) &= -\frac{1}{4}a_{xy} = 0, \\ W(\partial_x, \partial_t, \partial_x, \partial_t) &= -\frac{1}{2}b_{xx} = 0, \\ W(\partial_x, \partial_t, \partial_y, \partial_t) &= -\frac{1}{4}b_{xy} = 0, \\ W(\partial_y, \partial_z, \partial_y, \partial_z) &= -\frac{1}{2}a_{yy} = 0, \\ W(\partial_y, \partial_z, \partial_y, \partial_t) &= \frac{1}{4}a_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

From the equation (2.2) in the Weyl condition (3.4), we see that a and b become

$$\begin{aligned} a &= a(x, y, z, t) = \bar{a}(x, z, t) + \hat{a}(y, z, t), \\ b &= b(x, y, z, t) = \bar{b}(x, z, t) + \hat{b}(y, z, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Then we have $a_{yy}(y, z, t) = 0$, so $\hat{a}_{yy}(y, z, t) = 0$, and $\hat{a}(y, z, t) = yS(z, t) + \xi(z, t)$. Similarly, $b_{xx}(x, z, t) = 0$, so $\bar{b}_{xx}(x, z, t) = 0$, and $\bar{b}(x, z, t) = xQ(z, t) + \eta(z, t)$.

Second step : Considering the result of step 1, the Weyl equations (3.1) reduce to

$$W(\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t) = -\frac{1}{12}a_{xx} - \frac{1}{12}b_{yy} = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} W(\partial_x, \partial_z, \partial_x, \partial_z) &= -\frac{1}{6}a_{xx} - \frac{1}{6}b_{yy} = 0 \\ W(\partial_x, \partial_z, \partial_z, \partial_t) &= \frac{1}{4}a_{xt} - \frac{1}{4}b_{zy} - \frac{1}{12}ca_{xx} + \frac{1}{4}ab_{xy} + \frac{1}{6}cb_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$W(\partial_x, \partial_t, \partial_y, \partial_z) = \frac{1}{12}b_{yy} + \frac{1}{12}a_{xx} = 0,$$

$$W(\partial_x, \partial_t, \partial_z, \partial_t) = -\frac{1}{4}ab_{xx} - \frac{1}{4}cb_{xy} - \frac{1}{12}bb_{yy} - \frac{1}{12}ba_{xx} = 0,$$

$$W(\partial_y, \partial_z, \partial_z, \partial_t) = \frac{1}{12}aa_{xx} + \frac{1}{4}ca_{xy} + \frac{1}{4}ba_{yy} + \frac{1}{12}ab_{yy} = 0,$$

$$W(\partial_y, \partial_t, \partial_y, \partial_t) = -\frac{1}{6}a_{xx} - \frac{1}{6}b_{yy} = 0,$$

$$W(\partial_y, \partial_t, \partial_z, \partial_t) = -\frac{1}{4}b_{zy} + \frac{1}{4}a_{xt} - \frac{1}{4}ba_{xy} + \frac{1}{12}cb_{yy} - \frac{1}{6}ca_{xx} = 0,$$

$$\begin{aligned} W(\partial_z, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{2}a_{tt} - \frac{1}{2}b_{zz} - \frac{1}{4}a_x b_z + \frac{1}{4}a_y b_t + \frac{1}{4}b_x a_z - \frac{1}{4}b_y a_t + \\ &\quad + \frac{1}{4}cb_y a_x - \frac{1}{4}cb_x a_y + \frac{1}{2}ab_{zx} + \frac{1}{2}ca_{xt} + \frac{1}{2}cb_{zy} - \\ &\quad - \frac{1}{4}b^2 a_{yy} + \frac{1}{2}ba_{yt} - \frac{1}{6}c^2 a_{xx} - \frac{1}{6}c^2 b_{yy} - \frac{1}{2}cab_{xy} - \\ &\quad - \frac{1}{12}abb_{yy} - \frac{1}{12}baa_{xx} - \frac{1}{2}cba_{xy} - \frac{1}{4}a^2 b_{xx} = 0. \end{aligned}$$

Equation (3.6) gives $a_{xx} = -b_{yy}$ and thus (3.5) shows that $\bar{a}_{xx}(x, z, t) = -\hat{b}_{yy}(y, z, t)$ and moreover we see that the both sides of equation are independent of x and y , and in fact they depend only on z and t . Thus, equation (3.6) reduces to the following.

$$\bar{a}_{xx}(x, z, t) = \kappa(z, t), \quad \hat{b}_{yy}(y, z, t) = -\kappa(z, t).$$

Then $\bar{a}$ (*resp*, $\hat{b}$) is a quadratic function of x (*resp*, y), with z and t parameters. Therefore we have

$$\begin{aligned} a &= a(x, y, z, t) = \bar{a}(x, z, t) + \hat{a}(y, z, t) = x^2 \kappa(z, t) + xR(z, t) + \xi(z, t) + \hat{a}(y, z, t), \\ b &= b(x, y, z, t) = \bar{b}(x, z, t) + \hat{b}(y, z, t) = \bar{b}(x, z, t) - y^2 \kappa(z, t) + yP(z, t) + \eta(z, t), \end{aligned}$$

for some function $\kappa(z, t)$, $P(z, t)$, $R(z, t)$, $\xi(z, t)$ and $\eta(z, t)$.

Third step : Considering the result of step one, equations (3.7), we conclude that $a_{xt} - b_{zy} - ca_{xx} \equiv 0$. Now from the above we have $a_{xt} = b_{zy} + ca_{xx}$ and thus

$$2x\kappa_t(z, t) + R_t(z, t) = -2y\kappa_z(z, t) + P_z(z, t) + 2c\kappa(z, t).$$

Then $\kappa_t = 0$, $\kappa_z = 0$, so $\kappa(z, t) = \kappa$, $P_z = R_t - 2c\kappa$. This shows the first equation at (3.3) and the metric expression as in (3.2)

$$\begin{aligned} a &= a(x, y, z, t) = \kappa x^2 + xR(z, t) + yS(z, t) + \xi(z, t), \\ b &= b(x, y, z, t) = -\kappa y^2 + yP(z, t) + xQ(z, t) + \eta(z, t). \end{aligned}$$

Fourth step : It follows from the previous steps that the last of equation (3.1) reduces to the equation

$$\begin{aligned} W(\partial_z, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= -\frac{1}{2}a_{tt} - \frac{1}{2}b_{zz} - \frac{1}{4}a_x b_z + \frac{1}{4}a_y b_t + \frac{1}{4}a_z b_x - \frac{1}{4}a_t b_y + \\ &+ \frac{1}{4}ca_x b_y - \frac{1}{4}cb_x a_y + \frac{1}{2}b_{zx} a + \frac{1}{2}ca_{xt} + \frac{1}{2}cb_{zy} + \frac{1}{2}ba_{yt} = 0. \end{aligned}$$

Then the special Walker metric defined as (3.2) is locally conformally flat if and only if the component of the Weyl tensor $W(\partial_z, \partial_t, \partial_z, \partial_t)$ vanishes. Moreover, since

$$\begin{aligned} 2a_{tt} + 2b_{zz} + a_x b_z - a_y b_t - a_z b_x + a_t b_y - ca_x b_y + \\ + cb_x a_y - 2b_{zx} a - 2ca_{xt} - 2cb_{zy} - 2ba_{yt} = 0. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} W(\partial_z, \partial_t, \partial_z, \partial_t) &= \frac{1}{4}x(-2R_{tt} - 2Q_{zz} + RQ_z - 2\kappa\eta_z + SQ_t + R_z Q - R_t P + 2QS_t + 2\kappa cP) + \\ &+ \frac{1}{4}y(-2S_{tt} - 2P_{zz} + 2SQ_z - RP_z + SP_t + QS_z + 2\kappa\xi_t + PS_t - 2\kappa cR) + \\ &+ \frac{1}{2}xy(-\kappa P_z + 2\kappa R_t - \kappa^2 c) + \frac{1}{4}(-2\xi_{tt} - 2\eta_{zz} + 2\xi Q_z + 2cR_t + \\ &+ 2cP_z + 2S_t \eta - R\eta_z + S\eta_t + Q\xi_z - P\xi_t + cRP - cQS) = 0, \end{aligned}$$

and (3.3) follows.

Remark 1. Putting $c = 0$ we get Theorem 13 in [2].

Definition 2. Let Ric and Sc denote the Ricci tensor and the scalar curvature of (M, g) , defined by $Ric = trace \{Z \rightarrow R(X, Z)Y\}$ and $Sc = trace Ric$, respectively.

Lemma 1. *The scalar curvature of a Walker metric (2.1) is given by $Sc = b_{yy} + a_{xx}$. It follows from the equation expressing the components of the curvature tensor that the Ricci curvature is*

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xx} & \frac{1}{2}b_{xy} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xy} & \frac{1}{2}b_{yy} \\ \frac{1}{2}a_{xx} & \frac{1}{2}a_{xy} & \frac{1}{2}A_{33} & \frac{1}{2}(a_{tx} - a_y b_x + b_{yz}) \\ \frac{1}{2}b_{xy} & \frac{1}{2}b_{yy} & \frac{1}{2}(a_{tx} - a_y b_x + b_{yz}) & \frac{1}{2}A_{44} \end{pmatrix},$$

where $A_{33} = 2ca_{xy} + aa_{xx} + ba_{yy} + a_y b_y - 2a_{yt}$, $A_{44} = -2b_{zx} + a_x b_x + 2cb_{xy} + ab_{xx} + bb_{yy}$ and the Ricci operator $\langle \hat{Ric}(X), Y \rangle = Ric(X, Y)$ satisfies

$$\hat{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{xx} & \frac{1}{2}a_{xy} & \frac{1}{2}B_{13} & \frac{1}{2}(a_{tx} - a_y b_x + b_{yz} - cb_{yy} - ab_{xy}) \\ \frac{1}{2}b_{xy} & \frac{1}{2}b_{yy} & \frac{1}{2}B_{23} & \frac{1}{2}(ab_{xx} + cb_{yx} + a_x b_x - 2b_{zx}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xx} & \frac{1}{2}b_{xy} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xy} & \frac{1}{2}b_{yy} \end{pmatrix},$$

where $B_{13} = ca_{xy} + ba_{yy} + a_y b_y - 2a_{yt}$ and $B_{23} = a_{tx} - a_y b_x + b_{yz} - ca_{xx} - ba_{xy}$. Now, the result follows by a straightforward calculation.

Remark 2. Considering (2.14) in Lemma 1 and (2.3) we see that any locally conformally flat Walker metric (2.2) has vanishing scalar curvature, hence they necessarily are semi-Riemannian manifolds with harmonic curvature (ref. [7]).

Резюме. 4-мерная метрика Уолкера на полу-римановом многообразии M , для канонической метрики с $c = 0$, было исследовано М. Чаичи, Э. Гарсия-Рио и Й. Мацусита. В настоящей статье эти понятия обобщаются на случай постоянного $c \neq 0$. В частности, найден вид определяющих функций этой метрики в локально-конформно плоских 4-мерных многообразиях Уолкера.

REFERENCES

1. B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry, With Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
2. M. Chaichi, E. García-Río, Y. Matsushita, "Curvature properties of four-dimensional Walker metrics", *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22, pp. 559 – 577, 2005.
3. S. Kobayashi. K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, II, Interscience, New York, 1969.
4. A. G. Walker, "Canonical Form for a Riemannian Space With a Parallel Field of Null Planes", *Quart. J. Math., Oxford*, (2)1, pp. 69 – 79, 1950.
5. A. G. Walker, "Canonical Forms. II. Parallel Partially Null Planes", *Quart. J. Math., Oxford*, vol. (2)1, pp. 147 – 152, 1950.
6. M. Do Carmo, *Riemannian Geometry, Theory and Its Application*, Birkhauser, Boston-Berlin, 1992.
7. A. Derdzinski, "On Compact Riemannian Manifolds With Harmonic Curvature", *Math. Ann.*, vol. 259, pp. 145 – 152, 1982.

Поступила 10 мая 2007

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ТИПА ТЕОРЕМЫ Г. СЕГЁ

С. А. Вагаршакян

Ереванский государственный университет

E-mail : suren86@gmail.com

Резюме. В этой статье приводится новый результат типа хорошо известной теоремы Г. Сегё и А. Колмогорова о наилучшем приближении аналитическими полиномами в весовых пространствах L^p . Результаты такого типа играют существенную роль в теории предсказания стационарных процессов. Хорошо известно, что точность наилучшего предсказания на один шаг вперёд, не зависит от p . В данной статье мы докажем, что в случае предсказания на два шага вперёд получаются разные результаты для $p = 2$ и $p = \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье приводится аналог следующей, хорошо известной теоремы Г. Сегё, (см. [1], стр. 201).

Теорема 1.1. Пусть $h(z)$ – неотрицательная, непрерывная функция на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда для любого $1 \leq p \leq \infty$ имеет место равенство :

$$\inf_{c_{j,n}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| e^{-ix} - \sum_{j=0}^n c_j e^{ijx} \right| h(e^{ix}) \right)^p dx \right)^{1/p} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log h(e^{ix}) dx \right\}.$$

А. Колмогоров [3] обобщил приведённый выше результат. С целью сравнения с результатом данной статьи здесь мы приводим формулировку частного случая теоремы А. Колмогорова. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \log h(e^{ix}) dx \right\}, \quad |z| < 1,$$

которая имеет граничные значения почти всюду и $|F(z)| = h(z)$, $|z| = 1$.

Теорема 1.2. Пусть $h(z)$ – неотрицательная, интегрируемая функция на $|z| = 1$ и пусть $h(z) = h(\bar{z})$, $|z| = 1$. Тогда имеет место равенство :

$$\inf_{c_j, n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| Ae^{-2ix} - \sum_{j=0}^n c_j e^{ijx} \right| h(e^{ix}) \right)^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$= |A| |F(0)| \sqrt{1 + \left(\frac{|F'(0)|}{2|F(0)|} \right)^2}.$$

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 1.3. Пусть $h(z)$ – неотрицательная, непрерывная функция на $|z| = 1$. Тогда

$$\inf_{c_j} \left(\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| Ae^{-2ix} - \sum_{j=0}^n c_j e^{ijx} \right| h(e^{ix}) \right) =$$

$$= |A| |F(0)| \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left| \frac{F'(0)}{F(0)} \right|^2 + \left| \frac{F'(0)}{F(0)} \right| \sqrt{1 + \left| \frac{F'(0)}{2F(0)} \right|^2}}.$$

Заметим, что в Теореме 1.1 точность наилучшего приближения функции e^{-ix} , $x = [-\pi, \pi]$, аналитическими многочленами не зависит от параметра $1 \leq p \leq \infty$. Однако для функции e^{-2ix} мы получаем разные величины для наилучшего приближения, когда $p = 2$ и $p = \infty$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Приведём некоторые известные определения и вспомогательные результаты.

Определение 2.1. Обозначим через H^∞ пространство всех ограниченных аналитических функций $f(z)$ в $|z| < 1$, с нормой

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{|z| < 1} |f(z)|.$$

Хорошо известна следующая теорема (см., например, [2], стр. 142).

Теорема 2.1. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – точки в единичном круге (т.е. $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$) и пусть $w_1, w_2, \dots, w_n$ – произвольные комплексные числа. Тогда существует единственная функция $f(z) \in H^\infty$ с минимальной нормой, удовлетворяющая условиям $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots, n$. Более того, эта функция допускает представление

$$f(z) = CB(z)$$

где $B(z)$ – произведение Бляшке порядка не больше $n - 1$ (т.е. оно содержит по крайней мере $n - 1$ элементарных сомножителей Бляшке), а C – комплексное число.

Воспользуемся следующим, хорошо известным свойством дробно-линейных преобразований

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ac - bd \neq 0.$$

Известно, что если a_1, a_2, a_3, a_4 различные комплексные числа и w_1, w_2, w_3, w_4 их образы, т.е. $w(a_k) = w_k, k = 1, 2, 3, 4$, то

$$\frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2} \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} = \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (1)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть $h(z)$ – неотрицательная непрерывная функция на $|z| = 1$, a_1 и a_2 – комплексные числа такие, что $|a_1| < 1$ и $|a_2| < 1$ и пусть A_1 и A_2 – произвольные комплексные числа. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \inf_{c_j} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} - \sum_{j=0}^n c_j z^j \right| h(z) \right) = \\ & = \inf_{K \in H^\infty} \left\{ \sup_{|z|=1} |K(z)|; K(a_1) = b_1, K(a_2) = b_2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$b_1 = F(a_1) \frac{A_1}{1 - |a_1|^2} \frac{a_1 - a_2}{1 - \bar{a}_2 a_1} \quad \text{и} \quad b_2 = F(a_2) \frac{a_2 - a_1}{1 - \bar{a}_1 a_2} \frac{A_2}{1 - |a_2|^2}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} I &= \inf_{c_j} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} - \sum_{j=0}^n c_j z^j \right| h(z) \right) = \\ &= \inf_{c_j} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \right| \left| \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} - \sum_{j=0}^n c_j z^j \right| h(z) \right) = \\ &= \inf_{P(z) \in H^\infty} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{A_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} + \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{A_2}{1 - \bar{a}_2 z} - \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} P(z) \right| h(z) \right) \end{aligned}$$

Обозначим через

$$f(z) = \frac{A_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} + \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{A_2}{1 - \bar{a}_2 z} - \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} P(z),$$

аналитическую в единичном круге $|z| < 1$ функцию, где $P(z)$ – произвольная функция из H^∞ .

Заметим, что независимо от выбора $P(z) \in H^\infty$, функция $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$f(a_1) = \frac{A_1}{1 - |a_1|^2} \frac{a_1 - a_2}{1 - \bar{a}_2 a_1} \quad \text{и} \quad f(a_2) = \frac{a_2 - a_1}{1 - \bar{a}_1 a_2} \frac{A_2}{1 - |a_2|^2}.$$

Следовательно, имеем

$$I = \inf \left\{ \max_{|z|=1} |f(z)| h(z); \quad f(a_1) = c_1, \quad f(a_2) = c_2 \right\},$$

где

$$I = \inf_{K \in H^\infty} \left\{ \max_{|z|=1} |K(z)|; \quad K(a_1) = b_1, \quad K(a_2) = b_2 \right\}.$$

Доказательство основного результата. В предыдущей теореме подставим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a, \quad A_1 = -\frac{1}{a}, \quad A_2 = \frac{1}{a}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} I(a) &= \inf_{c_j} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{1}{z(z-a)} - \sum_{j=0}^n c_j z^j \right| h(z) \right) = \\ &= \inf_{K \in H(D)} \left\{ \max_{|z|=1} |K(z)|; \quad K(0) = F(0), \quad K(a) = F(a) \frac{1}{1 - |a|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что функция $K(z) \in H^\infty$, на которой достигается нижняя грань, должна быть произведением Бляшке не выше первого порядка. Если она имеет нулевой порядок, тогда $K(z) = D = \text{const}$ и, следовательно,

$$D = K(0) = F(0) = K(a) = \frac{F(a)}{1 - |a|^2}.$$

Это означает, что $I(a) = |F(0)|$ и

$$\frac{F(a) - F(0)}{a} = -\bar{a}F(0).$$

Если же порядок рассматриваемого произведения Бляшке равен 1, то $K(z)$ является дробно-линейным преобразованием, т.е.

$$K(z) = D \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1.$$

Поэтому обозначая

$$K(0) = F(0) = w_1 \quad \text{и} \quad K(a) = \frac{F(a)}{1 - |a|^2} = w_2$$

получаем

$$K(0) = w_1 \quad K(a) = w_2 \quad K(\infty) = \frac{D^2}{\bar{w}_1} \quad K\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{D^2}{\bar{w}_2}.$$

Из формулы (1), следует

$$\frac{1}{1 - |a|^2} = \frac{D^2 - w_1 \bar{w}_2}{D^2 - |w_2|^2} \frac{D^2 - w_2 \bar{w}_1}{D^2 - |w_1|^2}.$$

После элементарных преобразований приходим к равенству

$$|a|^2 = \frac{D^2 |w_2 - w_1|^2}{|D^2 - \bar{w}_1 w_2|^2}.$$

Далее, учитывая равенство $I(a) = |D|$, получаем

$$I^4 - (w + \bar{w} + R)I^2 + w\bar{w} = 0, \quad (2)$$

где

$$R = \frac{1}{(1 - |a|^2)^2} \left| \frac{F(a) - F(0)}{a} + \bar{a}F(0) \right|^2$$

и

$$w = \frac{\bar{F}(0)F(a)}{1 - |a|^2}.$$

Так как $I \geq \max\{|w_1|, |w_2|\}$, то I должен равняться наибольшему корню уравнения (2). Следовательно,

$$I(a) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(w + \bar{w} + R + \sqrt{(w + \bar{w} + R)^2 - 4w\bar{w}} \right)},$$

где

$$w + \bar{w} + R = \frac{\bar{F}(0)F(a) + F(0)\bar{F}(a)}{1 - |a|^2} + \frac{1}{(1 - |a|^2)^2} \left| \frac{F(a) - F(0)}{a} + \bar{a}F(0) \right|^2$$

и

$$4w\bar{w} = 4 \frac{|F(0)|^2 |F(a)|^2}{(1 - |a|^2)^2}.$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем требуемый результат.

Abstract. The paper proves a new result similar to the well known theorems of G. Szego and A. Kolmogorov on the best approximation by analytic polynomials in weighted L^p spaces. Such results are essential in prediction theory for stationary processes. It is well known, that for one step prediction, the size of the best approximation is the same for all p . The paper proves that for two step prediction the best approximation sizes are different for $p = 2$ and $p = \infty$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. Koosis, Introduction to H^p Spaces, Cambridge University Press, 1980.
2. John B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Los Angeles, California, 1981.
3. А. Н. Колмогоров, Интерполяция и Экстраполяция Стационарных Процес-сов, Izvestia AN USSR, том 5, стр. 3 – 14, 1941.

Поступила 18 мая 2007

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ
ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян

Ереванский Государственный университет

E-mail : rafayelyansg@mail.ru

Резюме. В настоящей работе изучена задача интерполяции и базисности в банаховых пространствах целых функций экспоненциального типа многих переменных. Получены достаточные условия для разрешимости этих задач, а также явный аналитический вид решений.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Направляющим фактором при изучении нами вопросов интерполяции является известная теорема Котельникова [1]. Пусть W_π – класс целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с типами $\leq \pi$, интегрируемых в квадрате на вещественной оси.

Теорема 1. Если последовательность $\{c_k\} \in \ell^2$, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \pi(z - k)}{\pi(z - k)} \quad (0.1)$$

равномерно сходится на любом компакте комплексной плоскости, сходится по норме $L^2(\mathbb{R})$ на вещественной оси и даёт линейное отображение ℓ^2 на класс W_π , причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2, \quad (0.2)$$

и $f(k) = c_k$ ($-\infty < k < +\infty$).

В дальнейшем, теорема Котельникова была обобщена в различных направлениях Б. Я. Левиным и его учениками [1, 2]. В формуле (0.1) функция $\sin \pi z$ изменена на так называемую функцию типа синуса, а в качестве интерполяционных узлов использованы нули данной функции. Ц.ф.э.т. $S(z)$ назовём функцией типа синуса (ф.т.с.), если

$$0 < c < |S(z)| e^{-\pi |\operatorname{Im} z|} < C < \infty, \quad |\operatorname{Im} z| > K, \quad (0.3)$$

где c, C, K – некоторые постоянные, зависящие только от $S(z)$. Нули $\{\lambda_k\}$ функции $S(z)$ отделены друг от друга, если $\inf_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j| > 0$.

Пусть W_σ^p ($p > 1$, $\sigma > 0$) означает пространство ц.ф.э.т., тип которой $\leq \sigma$, интегрируемых в p -ой степени на вещественной оси. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $S(z)$ – функция типа синуса и $\{\lambda_k\}$ – последовательность её нулей. Тогда для любой последовательности $\{c_k\} \in \ell^p$ ($1 < p < \infty$) ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{S(z)}{S'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \quad (0.4)$$

равномерно сходится на любом компакте, сходится по норме $L^p(\mathbf{R})$ на вещественной оси и осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства ℓ^p на пространство W_σ^p . При этом имеют место следующие оценки

$$\|f\|_p^p \asymp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^p, \quad \text{и} \quad f(\lambda_k) = c_k, \quad -\infty < k < +\infty. \quad (0.5)$$

Теорема Котельникова распространяется также на случай ц.ф.э.т. многих переменных. Этот факт был сформулирован Пойа-Планшерелем [3] и распространяется на класс ц.ф.э.т. n переменных, которые на $\mathbf{R}_x^n$ в p -й степени интегрируемы. Этот класс обозначается через $W_\pi^p(\mathbf{C}^n)$ ($p \geq 1$). В качестве последовательности $\{\lambda_{i_k}\}_0^\infty$, $k = \overline{1, n}$, рассматриваются, как и в теореме Котельникова, соответственно нули функций $\sin \pi z_k$, $k = \overline{1, n}$. При этих обозначениях теорема имеет следующий вид :

Теорема. Пусть $\{C_\alpha\} \in \ell^p$, где $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$. Тогда ряд

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} C_\alpha \frac{\sin \pi (z_1 - m_{i_1})}{\pi (z_1 - m_{i_1})} \dots \frac{\sin \pi (z_n - m_{i_n})}{\pi (z_n - m_{i_n})} \quad (0.6)$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathbf{C}^n$, сходится по норме $L^p(\mathbf{R}_x^n)$ и даёт линейное топологическое отображение всего пространства ℓ^p на $W_\pi^p(\mathbf{C}^n)$.

Причём, имеют место следующие оценки :

$$f(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = C_\alpha, \quad (0.7)$$

$$\|f\|_p \asymp \|\{C_\alpha\}\|_p. \quad (0.8)$$

Обобщённая М. М. Джрбашьяном теория преобразований Фурье в комплексной плоскости позволила вышеприведённые интерполяционные задачи рассматривать и решать в более широких классах целых функций [4] – [6]. Настоящая статья посвящена исследованию аналогичных интерполяционных задач в весовых классах целых функций n переменных.

§1. КЛАССЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ $W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}$ И $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$

а) Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < w_i < p - 1$, $0 < \sigma_i < \infty$, $i = \overline{1, n}$. Будем писать $w = (w_1, \dots, w_n)$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Обозначим через $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ пространство целых функций $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ экспоненциального типа с нормой

$$\|f\|_{p, w} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x_1|^{w_1} \dots |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/p}. \quad (1.1)$$

При $n = 1$ эти классы рассматривались в работах [4, 5].

Лемма 1.1. *Пространство $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ является банаховым пространством с нормой (1.1).*

Доказательство. Пусть $\{f_k(z)\}$ – фундаментальная последовательность из класса $W_\sigma^{p, w}$, т.е.

$$\|f_i - f_j\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k, j \rightarrow \infty.$$

Фиксируя первые $(n - 1)$ переменные в функциях $f_k(z) = f_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$, получим фундаментальную последовательность функций одной переменной в банаховом пространстве $W_{\sigma_n}^{p, w_n}$. Следовательно, существует функция $f^n(\dots z_n) \in W_{\sigma_n}^{p, w_n}$ такая, что

$$\|f_i(\dots z_n) - f^n(\dots z_n)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

В двумерном случае $\{f_n(z_1, z_2)\}_n$, имеем $\|f_k - f_j\|_{p, w_1, w_2} \rightarrow 0$ при $k, j \rightarrow \infty$. С другой стороны, при фиксированном z_1 , потом соответственно z_2 , имеем

$$\|f_k - f_j\|_{p, w_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k, j \rightarrow \infty,$$

как функция от z_2 , и, соответственно, существует некоторая функция $f^2(z_2) \in W_{\sigma_2}^{p, w_2}$ такая, что

$$\|f_k - f^2\|_{p, w_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Как функция от z_1 ,

$$\|f_k - f_j\|_{p, w_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k, j \rightarrow \infty,$$

и существует некоторая функция $f^1(z_1) \in W_{\sigma_1}^{p, w_1}$ такая, что

$$\|f_k - f^1\|_{p, w_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Теперь фиксируя z_1 и z_2 , получим $f^2(\cdot, z_2) = f^1(z_1, \cdot)$, так как $f_k(z_1, z_2)$ та же числовая последовательность. Тогда обозначим соответствующую функцию через $f(z_1, z_2) = f^2(\cdot, z_2) = f^1(z_1, \cdot)$. Опираясь на двумерный случай, доказывается и n -мерный случай.

б) Введем специальный класс $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ функций, являющийся естественным обобщением класса функций типа синуса в многомерном случае. Следуя работе [4], через S_κ ($-\infty < \kappa < +\infty$) обозначим класс ц.ф.э.т. $S(z)$ типов $< \sigma$, нули которой $\{z_k\}_{k=0}^\infty$ отделены и

$$0 < c < |S(z) z^{-\kappa}| e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} < C < +\infty, \quad |\operatorname{Im} z| > K, \quad (1.2)$$

где c, C, K – некоторые положительные постоянные. Далее, обозначим

$$S_\lambda(z) = S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(z) = S_{\lambda_1}(z_1) \cdot S_{\lambda_2}(z_2) \cdots S_{\lambda_n}(z_n), \quad (-\infty < \lambda_i < +\infty),$$

где $S_{\lambda_i}(z_i) \in S_{\lambda_i}$.

Теорема 1.1. Пусть $S(z) \in S_\lambda$, где $-\infty < \lambda_i < +\infty$ и пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$ – последовательность корней соответствующих функций $S_i(z_i)$, расположенная в порядке неубывания модулей. Тогда

1. Для любого $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ ($\delta_i > 0$, $1 \leq i \leq n$) существуют некоторые постоянные $m(\delta) > 0$ и $M(\delta) > 0$ такие, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} m(\delta) (1 + |z_1|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n|)^{\lambda_n} e^{\sigma_1 |y_1|} \cdots e^{\sigma_n |y_n|} &\leq |S(z)| \leq \\ &\leq M(\delta) (1 + |z_1|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n|)^{\lambda_n} e^{\sigma_1 |y_1|} \cdots e^{\sigma_n |y_n|} \end{aligned} \quad (1.3)$$

вне δ -окрестности множества корней, т.е. на множестве

$$\prod_k \{z : |z - z^k| \geq \delta\}, \quad \text{где} \quad z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k).$$

2. Если p_i^k – кратность появления z_i^k во всей последовательности $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\left| \frac{\partial^{p_1^k + \dots + p_n^k} S(z^k)}{\partial^{p_1^k} z_1 \partial^{p_2^k} z_2 \cdots \partial^{p_n^k} z_n} \right| \geq C (1 + |z_1^k|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n^k|)^{\lambda_n}. \quad (1.4)$$

3. При некоторых положительных постоянных c_i , C_i , K_i , зависящих только от функции $S(z)$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \prod_i c_i < \left| S(z) z_1^{-\lambda_1} \dots z_n^{-\lambda_n} \right| e^{-\sigma_1 |\operatorname{Im} z_1|} \dots e^{-\sigma_n |\operatorname{Im} z_n|} < \\ < \prod_i C_i < +\infty, \quad |\operatorname{Im} z_i| > K_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

когда $\inf \left| z_i^k - z_i^j \right| > 0$.

Доказательство. Доказательства всех трех пунктов выводятся непосредственно из аналогичных свойств соответствующих составляющих функций $S(z)$, указанных в [4].

Ниже приведем несколько примеров функций данного класса.

- 1) Пусть $0 < \mu_1^i, \mu_2^i < 2$, $C_1^i, C_2^i \in (-\infty, +\infty)$. Обозначим

$$e(z_i, \mu_1^i, \mu_2^i, C_1^i, C_2^i) \equiv e(z_i) = C_1^i E_1(i\sigma_i z_i; \mu_1^i) + C_2^i E_1(-i\sigma_i z_i; \mu_2^i),$$

где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг–Лефлера порядка ρ и типа $\sigma = 1$. Известно [4], что при $\lambda_i = \max(1 - \mu_1^i; 1 - \mu_2^i)$ функции $e(z_i)$ принадлежат S_{λ_i} . Следовательно, $S(z) = e(z_1), \dots, e(z_n) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$. В частности, $S(z)$ выражается через произведение функций типа Миттаг–Лефлера

$$S(z) = C E_{1,2}^1(z_1, \mu^1) \dots E_{1,2}^n(z_n, \mu^n),$$

когда C_1^i или $C_2^i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

- 2) Пусть $\alpha_i(t)$ — функции ограниченной вариации со скачками в точках $x_i = -\sigma_i$ и $x_i = \sigma_i$. Положим

$$F(z_i) = \int_{-\sigma_i}^{\sigma_i} E_1(iz_i t; \mu^i) d\alpha_i(t).$$

Как показано в [4], $F(z_i) \in S_{1-\mu^i}$. Следовательно, $S(z) = F(z_1), \dots, F(z_n) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $\lambda_i = 1 - \mu^i$.

- 3) Подставляя $\mu^i = 1$, $\sigma_i = \pi$, в качестве частного случая из второго примера можно получить

$$S(z) = \sin \pi z_1 \in S_{\lambda_1},$$

$$S(z) = \sin \pi z_1, \dots, \sin \pi z_n \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}.$$

4) В специальном случае

$$-1 < \mu^i < 2, \quad \sigma_1 = 1, \quad \alpha_i(t) = \begin{cases} -1, & t = -1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

получим

$$S_i(z_i) = E_1(iz_i; \mu^i) - E_1(-iz_i; \mu^i), \quad \text{и следовательно} \quad S(z) = \prod_{i=1}^n S_i(z_i).$$

§2. ТЕОРЕМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

а) Пусть функция $S(z) \in S_\lambda$ и $z = \{z_k\}_0^\infty$ – последовательность её корней. Согласно [4] и [5], через $s_k \geq 1$ и p_k соответственно обозначим кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$ соответственно. Введём в рассмотрение полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)(z-z_k)^\nu \quad (k = \overline{0, \infty}), \quad (2.1)$$

где

$$a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)} \right)_{z=z_k}^{(\nu)},$$

а также функции

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)q_k(z)}{(s_k-1)!(z-z_k)^{p_k-s_k+1}} = \frac{S(z)}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(z_k)}{(z-z_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}. \quad (2.2)$$

Заметим, что $\Omega_k(z)$ – целая функция и в частном случае, когда все нули $S(z)$ простые, т.е. $s_k = p_k = 1$ и из (2.2) следует, что

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}.$$

Коэффициенты разложения (2.1) и функция $\Omega_k(z)$ обладают следующими свойствами (см. [4], [5]).

2.1. Функции системы $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным :

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(z_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (k, n \geq 0). \quad (2.3)$$

2.2. Если $S(z) \in S_\lambda$ и $p\lambda + w < p-1$, то

$$\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,w}.$$

2.3. Для коэффициентов разложения (2.1) справедливы оценки

$$|a_\nu(z_k)| \leq c(1 + |z_k|)^{-\lambda}, \quad (2.4)$$

где $c > 0$ не зависит от ν и k .

Далее рассматриваются ряды по функциям системы (2.2) :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Omega_k(z), \quad (2.5)$$

где $\{c_k\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Следующая теорема касается разложению функций из класса $W_{\sigma}^{p,w}$ по ряду вида (2.5).

Теорема 2.1. Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ – нули функции $S(z) \in S_\lambda$, где $w + p\lambda \in (-1, p - 1)$. Тогда ряд (2.5) осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $\ell_\lambda^{p,w}$ на пространство $W_{\sigma}^{p,w}$, причём справедливо

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = C_k,$$

$$\|f\|_{p,w} \asymp \|\{C_k\}\|.$$

В специальном случае, когда $w = 0$, $\lambda = 0$, из Теоремы 2.1 следует известная теорема Б. Я. Левина [1].

б) Пусть функции $S_i(z_i) \in S_{\lambda_i}$, $i = \overline{1, n}$, а $\{z_i^k\}_0^\infty$ – последовательность соответствующих корней. Через $s_i^k \geq 1$ (p_i^k соответственно) обозначим кратность появления числа z_i^k на отрезке $\{z_i^j\}_0^k$ (или во всей последовательности $\{z_i^j\}_0^\infty$), и запишем $S(z) = S_1(z_1)S_2(z_2) \cdots S_n(z_n)$. Это функция от n переменных, которая принадлежит классу $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и, в частности, целая экспоненциального типа по каждому переменному и соответствующий тип $\leq \sigma_i$, $i = \overline{1, n}$.

Используя одномерный случай (2.2), построим

$$\begin{aligned} \Omega_i^k(z_i) &= \frac{S_i(z_i) q_i(z_i)}{(s_i^k - 1)! (z_i - z_i^k)^{p_i^k - s_i^k + 1}} = \\ &= \frac{S_i(z_i)}{(s_i^k - 1)!} = \sum_{\nu=0}^{p_i^k - s_i^k} \frac{a_i^\nu(z_i^k)}{(z_i - z_i^k)^{p_i^k - s_i^k + 1}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как каждая функция $S_i(z_i)$ есть целая и имеет нуль кратности p_i^k в точке $z_i = z_i^k$, то $\Omega_i^k(z_i)$ также является целой функцией.

Через $\Omega^\kappa(z) = \Omega(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обозначим следующую функцию от n комплексных переменных :

$$\Omega^\kappa(z) = \Omega_1^{i_1}(z_1) \Omega_2^{i_2}(z_2) \cdots \Omega_n^{i_n}(z_n) = \prod_{i=1}^n \Omega_i^{\kappa_i}(z_i), \quad (2.7)$$

где $\kappa = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $i_j = \overline{0, \infty}$.

Лемма 2.1. Функции системы $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным

$$\left. \frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1}\Omega^\kappa}{\partial^{s_1^{i_1}-1}z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1}z_2 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1}z_n} \right|_{(z_1^{j_1}, z_2^{j_2}, \dots, z_n^{j_n})} = \delta_{\kappa, \kappa_j} = \begin{cases} 1, & \kappa = \kappa_j, \\ 0, & \kappa \neq \kappa_j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Если $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и $p\lambda_i + w_i < p-1$, то $\Omega^\kappa(z) \in W_\sigma^{p,w}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается на основе свойства (2.1) и определения (2.7) функции $\Omega^\kappa(z)$. Для доказательства второго утверждения заметим, что согласно (2.7), $\Omega^\kappa(z)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma_i$ по каждому из переменных. С другой стороны, для каждого множителя, составляющего $\Omega_j^{i_j}(z_j)$, имеем следующую оценку :

$$\left\| \Omega_j^{i_j}(z_j) \right\|^p = \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_j^{i_j}(x_j) \right|^p |x_j|^{w_j} dx_j < +\infty, \quad j = \overline{1, n},$$

вытекающую из того факта, что $\Omega^\kappa(z)$ принадлежит $W_{\sigma_j}^{p,w_j}$. Умножая n неравенств, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \left\| \Omega_j^{i_j}(z_j) \right\|^p &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_j^{i_j}(x_j) \right|^p |x_j|^{w_j} dx_j = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_1^{i_1}(x_1) \right|^p |x_1|^{w_1} \left| \Omega_2^{i_2}(x_2) \right|^p |x_2|^{w_2} \dots \left| \Omega_n^{i_n}(x_n) \right|^p |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |\Omega^\kappa(x)|^p |x_1|^{w_1} \dots |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n = \|\Omega^\kappa(z)\|_{p,w}^p < +\infty, \end{aligned}$$

если только $p\lambda_j + w_j < p-1$, $j = \overline{1, n}$. Итак, $\Omega^\kappa(z) \in W_\sigma^{p,w}$.

с) Рассмотрим теперь ряды по функциям системы $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$:

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n} c_\kappa \Omega^\kappa(z), \quad (2.9)$$

где $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Нас интересует вопрос : когда этот ряд определяет функцию из класса $W_\sigma^{p,w}$.

Через $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, обозначим последовательность нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, а через $\ell_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{p, w_1, \dots, w_n} \equiv \ell_\lambda^{p, w}$ ($1 < p < \infty$, $-1 < w < p-1$) – класс последовательностей комплексных чисел $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p, w}} = \left\{ \sum_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n} |c_\kappa|^p (1 + |z_1|)^{w_1} \dots (1 + |z_n|)^{w_n} \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.10)$$

Очевидно, что $\ell_\lambda^{p, w}$ является банаховым пространством с данной нормой.

Теорема 2.2. Если $\{c_\kappa\} \in \ell_\chi^{p,w}$ и $p\lambda_i + w_i > -1$, то ряд (2.7) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \mathbf{C}^n$, определяет целую функцию $f(z)$, причём

$$\frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1} f}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n} \Big|_{(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})} = c_\kappa = c_{(i_1, \dots, i_n)}. \quad (2.11)$$

Доказательство. Пусть $K_i \subset \mathbf{C}$ – некоторый компакт, не содержащий нулей z_i^k функции $S_i(z_i)$. Следовательно, на $K \subset \mathbf{C}^n$ ($K = (K_1 \times \dots \times K_n)$) для остаточного члена нашего ряда (2.9) имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_{N,m}(z)| &= \left| \sum_{\kappa=N=(i_{n_1}, \dots, i_{n_n})}^{m=(i_{m_1}, \dots, i_{m_n})} c_\kappa \Omega^\kappa(z) \right| = \\ &= \left| \sum_{\kappa=N=(i_{n_1}, \dots, i_{n_n})}^{m=(i_{m_1}, \dots, i_{m_n})} \Omega_1^{i_1}(z_1) \Omega_2^{i_2}(z_2) \dots \Omega_n^{i_n}(z_n) c_\kappa \right| \leq \\ &\leq B_1 \dots B_n \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa| \frac{|q_1^{i_1}(z_1) q_2^{i_2}(z_2) \dots q_n^{i_n}(z_n)|}{|z_1 - z_1^{i_1}|^{p_1^{i_1}-s_1^{i_1}+1} \dots |z_n - z_n^{i_n}|^{p_n^{i_n}-s_n^{i_n}+1}}. \end{aligned}$$

Из определения полиномов $q_j^{i_j}$ и свойства их коэффициентов следует

$$\begin{aligned} |q_j^{i_j}(z_j)| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}} |a_j^\nu(z_j^{i_j})| |z_j - z_j^{i_j}|^\nu \leq \\ &\leq C_j \left(1 + |z_j^{i_j}|\right)^{-\lambda_j} \sum_{\nu=0}^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}} |z_j - z_j^{i_j}|^\nu \\ &\leq D_j \left(1 + |z_j^{i_j}|\right)^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}-\chi_j}, \quad z_j \in K_j. \end{aligned}$$

В силу полученных неравенств, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_{N,m}(z)| &\leq S_1 \dots S_n \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa| \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{-(\lambda_1+1)} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{-(\lambda_n+1)} \leq \\ &\leq S_1 \dots S_n \left\{ \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa|^p \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{w_1} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{w_n} \right\}^{1/p} \times \\ &\times \left\{ \sum_{\kappa=N}^m \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{q(-1-\lambda_1-\frac{w_1}{p})} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{q(-1-\lambda_n-\frac{w_n}{p})} \right\}^{1/p}, \quad p, q > 1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$q \left(-1 - \lambda_i - \frac{w_i}{p} \right) < -1 \quad \text{при} \quad p\lambda_i + w_i > -1,$$

и следовательно, вторая сумма правой части является отрезком сходящегося ряда. Следовательно,

$$|\Phi_{N,m}(z)| \leq S \|\{c_\kappa\}_N^m\|_{\ell_\lambda^{p,w}},$$

а это означает, что наш ряд абсолютно и равномерно сходится на K . Применяя принцип максимума к отрезкам нашего ряда, мы получим, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится в каждой ограниченной n -мерной области и, следовательно, представляет собой целую функцию. Интерполяционные свойства непосредственно вытекают из Леммы 2.1.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2.3. Пусть $\{z_i^k\}_{k=0}^\infty$, $i = \overline{1, n}$, – последовательность всех нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда :

1. Для любого элемента $\{a_\kappa\} \in \ell_\lambda^{p,w}$, ряд

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} c_\kappa \Omega^\kappa(z)$$

сходится по норме пространства $W_\sigma^{p,w}$ и определяет функцию $f(z) \in W_\sigma^{p,w}$, удовлетворяющую интерполяционным условиям (2.11).

2. Справедливы следующие неравенства

$$\|f\|_{p,w} \asymp \|\{a_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p,w}}.$$

Доказательство. Теорему докажем только для $n = 2$ (случай для произвольного $n \geq 2$ рассматривается аналогично). Имеем

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i,j} c_{ij} \Omega_1^i(z_1) \Omega_2^j(z_2) = \sum_i \left\{ \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right\} \Omega_1^i(z_1).$$

Ряд, как мы уже знаем, абсолютно и равномерно сходится на $\mathbf{C}^2$. Зафиксируем одну из переменных, например z_2 , получим функцию от одной переменной $f(z_{i_1}, \cdot)$. Применим к ней результаты, известные для одномерного случая (т.е. Теорему 2.1). Для этого необходимо доказать, что коэффициент при Ω_1^i принадлежит классу $\ell_{\lambda_1}^{p,w_1}$, т.е.

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_{2,\Phi}) \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} < +\infty.$$

Для этого, оценим внутреннюю сумму для произвольного фиксированного z_2, Φ . Зафиксируем произвольное $z_2 \in K_2$, где K_2 – компакт, не содержащий нули функции $S_2(z_2)$, т.е. $\{z_2^j\}_0^\infty$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right| &\leq B_1 \sum_j |a_{ij}| \frac{|q_j(z_2)|}{|z_2 - z_2^j|^{p_2^j - s_2^j + 1}}, \\ |q_j(z_2)| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_2^j - s_2^j} |a_\nu(z_2^j)| |z_2 - z_2^j|^\nu \leq \\ &\leq B_2 \left(1 + |z_2^j|\right)^{-\lambda_2} \sum_{\nu=0}^{p_2^j - s_2^j} |z_2 - z_2^j|^\nu \leq B_3 \left(1 + |z_2^j|\right)^{p_2^j - s_2^j - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right| &\leq B_4 \sum_j |a_{ij}| \left(1 + |z_2^j|\right)^{-(\lambda_2 + 1)} \leq \\ &\leq B_4 \left\{ \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \right\}^{1/p} \left\{ \sum_j \left(1 + |z_2^j|\right)^{q(-1 - \lambda_2 - \frac{w_2}{p})} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Но из $p\lambda_2 + w_2 > -1$ следует, что

$$q \left(-1 - \lambda_2 - \frac{w_2}{p} \right) < -1,$$

а из сходимости ряда

$$\sum_j \left(1 + |z_2^j|\right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

следует, что второй множитель есть сходящийся ряд, т.е.

$$\left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right|^p \leq B_5 \left\{ \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \right\}.$$

После подстановки результата во внешнюю сумму получаем

$$\begin{aligned} \sum_i \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right|^p \left(1 + |z_1^j|\right)^{w_1} &\leq B_5 \sum_i \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \left(1 + |z_1^i|\right)^{w_1} = \\ &= \left\| \{a_{ij}\}_{i,j} \right\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}} < +\infty, \end{aligned}$$

что следует из условия теоремы. С помощью принципа максимума полученный факт распространяем на всю плоскость. Наша задача – показать, что $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{p, w_1, w_2}$, т.е. интеграл

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} |x_2|^{w_2} = \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2$$

конечен. Применим этот факт для функции $f(z_1, \cdot)$ как функции от одной переменной и воспользуемся оценкой

$$\|f(z_1, \cdot)\|_{p, w_1}^p \asymp \|\{c_j\}\|_{\ell_{\lambda_1}^{p, w_1}}^p$$

для соответствующих коэффициентов $\{c_i\}_i$, определяющихся формулой

$$\frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} = c_i.$$

Следовательно, получим

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x_1, \cdot)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \leq \sum_i B \left| \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, \cdot)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2 \leq \\ & \leq B \int_{\mathbf{R}} \sum_i \left| \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} |x_2|^{w_2} dx_2. \end{aligned}$$

Отметим, что подынтегральная функция в правой части зависит только от переменной z_2 . Для дальнейших выкладок рассмотрим функцию

$$\frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1},$$

которая зависит только от z_2 . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} &= \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^{(s_1^i-1)} \Omega_1^i(z_1^i)}{\partial z_1} \Omega_2^j(z_2) = \\ &= \sum_j \left\{ \sum_i a_{ij} \frac{\partial^{(s_1^i-1)} \Omega_1^i(z_1^i)}{\partial z_1} \right\} \Omega_2^j(z_2) = \sum_j \left\{ \sum_i a_{ij} \right\} \Omega_2^j(z_2). \end{aligned}$$

Наша задача – показать сходимость следующего ряда :

$$\sum_j \left| \sum_i a_{ij} \right|^p \left(1 + |z_2^j| \right)^{w_2} < +\infty.$$

Для произвольного $z_1 \in K_1$ (где K_1 не содержит точки из $\{z_1^i\}_i$), запишем общий вид $\Omega_1^i(z_1)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1^i(z_1) &= \frac{s_1(z_1) q_i(z_1)}{(s_1^i - 1)! (z_1 - z_1^i)^{p_1^i - s_1^i + 1}} = \frac{s_1(z_1)}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} \frac{a_\nu(z_1^i)}{(z_1 - z_1^i)^{p_1^i - s_1^i - \nu + 1}} = \\ &= \frac{1}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) s_1(z_1) (z_1 - z_1^i)^{-p_1^i - 1 + s_1^i + \nu}, \end{aligned}$$

и вычислим производную $(s_1^i - 1)$ порядка от данной функции :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s_1^i - 1} \Omega_1^i(z_1)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1} &= \frac{1}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} C_{s_1^i - 1}^\ell S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) \times \\ &\times (s_1^i + \nu - p_1^i - 1) \cdots (s_1^i + \nu - p_1^i - \ell) (z_1 - z_1^i)^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} C_{s_1^i - 1}^\ell S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) A_\nu(z_1 - z_1^i)^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{s_1^i - 1} \Omega_1^i(z_1)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1} \right| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} |a_\nu(z_1^i)| |C_{s_1^i - 1}^\ell| \left| S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) \right| |A_\nu| \times \\ &\times |z_1 - z_1^i|^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell} \leq \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} |a_\nu(z_1^i)| |B_\nu| |z_1 - z_1^i|^{s_1^i - p_1^i + \nu - 1} \leq \\ &\leq B (1 + |z_1^i|)^{-\lambda_1 - 1}. \end{aligned}$$

Последующие шаги в точности совпадают с предыдущим доказательством сходимости ряда. Следовательно, можно ещё раз применить одномерный результат.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2 \leq \\ &\leq A_1 \int_{\mathbf{R}} \sum_i \left| \frac{\partial^{(s_1^i - 1)} f(z_1^i, \cdot)}{\partial^{(s_1^i - 1)} z_1} \right|^p |x_2|^{w_2} (1 + |z_1^i|)^{w_1} dx_2 \leq \\ &\leq A_2 \sum_i \sum_j \left| \left\{ \frac{\partial^{s_1^i - 1 + s_2^j - 1} f(z_1^i, z_2^j)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1 \partial^{s_2^j - 1} z_2} \right\} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} (1 + |z_2^j|)^{w_2} = \\ &= A_2 \sum_i \sum_j |a_{ij}|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} (1 + |z_2^j|)^{w_2} = \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p < \infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Принадлежность к соответствующему классу доказана. Аналогично можно получить неравенство в другую сторону :

$$\|f\|_{w_1, w_2}^p \geq A \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p. \quad (2.13)$$

Из неравенств (2.12) и (2.13) вытекает, что

$$\|f\|_{w_1, w_2}^p \asymp \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p.$$

Кроме того, из Теоремы 2.2 вытекает, что функция $f(z_1, z_2)$ удовлетворяет интерполяционным условиям (2.11).

Теорема 2.4. Каждая целая функция $f(z) \in W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} c_{\kappa} \Omega^{\kappa}(z),$$

где

$$c_{\kappa} = \frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, z_2^{i_2}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n},$$

а $\{z_i^k\}_0^{\infty}$, $i = \overline{1, n}$ — нули целой функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$.

Доказательство. Итак, имеем функцию $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ от n переменных, принадлежащую $W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^n)$. Зафиксируем первые $(n-1)$ переменных, в результате получим функцию одной переменной, которая принадлежит классу $W_{\sigma_n}^{p, w_n}$. Можем применить аналогичную теорему для одномерного случая, т.е. Теорему 2.1

$$f(\dots, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} f(z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n} \Omega_n^{i_1}(z_n).$$

Функция

$$\frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} f(z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n}$$

зависит от $(n-1)$ переменных и, как уже отмечалось в Теореме 2.3, она принадлежит классу $W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^{n-1})$. На втором шаге, зафиксируем первые $(n-2)$ переменные и воспользуемся Теоремой 2.1 для $(n-1)$ -ой переменной, получаем

$$f(\dots, z_{n-1}, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1+s_{n-1}^{i_2}-1)} f(\dots, z_{n-1}^{i_2}, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n \partial^{(s_{n-1}^{i_2}-1)} z_{n-1}} \Omega_n^{i_1}(z_n) \Omega_{n-1}^{i_2}(z_{n-1}).$$

И, наконец, на последнем шаге получим необходимое разложение

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{\kappa=(i_1, \dots, i_n), \kappa \in \mathbb{R}_n^+} \frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_n \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_1} \Omega_1^{i_1}(z_1) \dots \Omega_n^{i_n}(z_n).$$

Обозначив

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_n \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_1} = a_{i_1, \dots, i_n},$$

из (2.13) получим

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} a_\kappa \Omega^\kappa(z), \quad \{a_\kappa\} \in \ell_\lambda^{p,w}.$$

Следствие 2.1. Если $f(z) \in W_\sigma^{p,w}(\mathbf{C}^n)$ ($1 < p < \infty$, $-1 < w < p-1$) и $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, — нули функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \lambda_n}$, $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$ и

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_1 \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_n} = 0,$$

то $f(z) \equiv 0$ ($\kappa = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}_n^+$).

Объединив результаты Теорем 2.3 и 2.4, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2.5. Пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, — нули функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда ряд (2.9) осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $\ell_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{p, w_1, \dots, w_n} \equiv \ell_\lambda^{p, w}$ на пространство $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$, причём справедливы соотношения

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_1 \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_n} = c_{i_1, \dots, i_n} = c_\kappa,$$

$$\|f\|_{p, w} \asymp \|\{c_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p, w}}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда $w = 0$, $\lambda = 0$, из Теоремы 2.5 следует известная теорема Пойа-Планшереля [3].

Abstract. The paper investigates the interpolation and basicity problem in Banach spaces of entire functions of exponential type in several variable. Some sufficient conditions for solvability of these problem and the explicit analytic form of the solutions are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, “Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент”, Изв. АН СССР, серия Математика, том 39, № 3, стр. 657 – 702, 1975.
2. Б. Я. Левин, “Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа”, Сб. “Математическая физика и функциональный анализ”, ФНИИТ АН УССР, Вып. 1, стр. 136 – 146, 1969.
3. N. Plancherel, G. Polya, Fonctions Entieres et Integrales de Fourier Multiples, Seconde Partie, 1937.
4. С. Г. Рафаелян, “Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа”, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 3, 1983.
5. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, “О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p ”, ДАН Арм.ССР, 1981.
6. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва, 1966.

Поступила 10 апреля 2007

ОБ ИНДЕКСЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В $\mathbb{R}^n$

Г. А. Карапетян, А. А. Дарбинян

Русско-Армянский университет, Ереванский государственный университет
E-mail : garnik_karapetyan@yahoo.com, d_arman@freenet.am

Резюме. Настоящая работа посвящена исследованию индекса линейного дифференциального полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами специального вида в $\mathbb{R}^n$. В частности, доказывается, что при выполнении некоторых дополнительных условий на символ оператора, в формулировке которого участвуют младшие члены, индекс оператора конечен. Оператор рассматривается в пространствах Соболева с весом.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Общая теория об индексах эллиптических дифференциальных операторов достаточно хорошо изучена (см. [1]–[6]), а теория об индексах гипозэллиптических операторов изучена не полностью. В настоящей работе делается попытка изучения теории об индексе для одного множества полуэллиптических операторов, являющегося подклассом гипозэллиптических операторов.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями : $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_j ($j = 1, \dots, n$) – целые неотрицательные числа. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, где ν_j ($j = 1, \dots, n$) суть натуральные числа, и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $C_\beta^\alpha = C_{\beta_1}^{\alpha_1} C_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots C_{\beta_n}^{\alpha_n}$, где

$$C_{\beta_j}^{\alpha_j} = \frac{\beta_j!}{\alpha_j! (\beta_j - \alpha_j)!} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (i^2 = -1),$$

$$(\alpha : \nu) = \left(\frac{\alpha_1}{\nu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\nu_n} \right), \quad \nu_{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \nu_j \quad \text{и} \quad |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Пусть U_j ($j = 1, \dots, m$) – система открытых областей, покрывающая единичную сферу в $\mathbb{R}^n$ и пусть

$$V_i = \left\{ r : |r - (i+1)| < \frac{2}{3} \right\}, \quad i = -1, 0, 1, \dots,$$

есть система, покрывающая полуось $0 \leq r < \infty$. С помощью множеств U_j ($j = 1, \dots, m$) и интервалов V_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), построим следующую систему открытых областей :

$$W_1 = \left\{ x : |x| < \frac{2}{3} \right\}, \quad W_{k+1} = V_{\left[\frac{k-1}{m}\right]} \times U_{k - \left[\frac{k-1}{m}\right]m}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где $[a]$ – целая часть числа a .

Легко доказывается, что множество $\{W_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) покрывает пространство $\mathbb{R}^n$ и $\inf_{x \in W_k} |x| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Класс Q_ν . Для вектора ν с натуральными компонентами через Q_ν обозначим множество вещественных положительных функций $q(x)$, для которых

1. $\frac{|D^\alpha q(x)|}{q(x)^{1+(\alpha:\nu)\nu_{\max}}} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($0 < (\alpha : \nu) \leq 1$),
2. для любого $\varepsilon > 0$, существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ такие, что при $k > k_0$ и $\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } U_j < \delta$ имеют место следующие соотношения :

$$\max_{x \in \overline{W}_k} \frac{1}{q(x)} < \varepsilon, \quad \max_{x, y \in \overline{W}_k} \frac{|q(x) - q(y)|}{q(y)} < \varepsilon,$$

где $\overline{W}_k$ – замыкание множества W_k .

Пусть $q \in Q_\nu$ и пусть $A(x, D)$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$A(x, D) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha, \quad (1.1)$$

удовлетворяющий следующим условиям :

Условие I. Оператор $A(x, D)$ полуэллиптический, т.е. для всех $x \in \mathbb{R}^n$ многочлен (от ξ)

$$A_0(x, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu)=1} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \xi^\alpha$$

не имеет вещественных нулей при $\xi \neq 0$.

Условие II.

1. $\max_{x,y \in \overline{W}_k} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$,
2. $|a_\alpha(x)| \leq C$, $x \in \mathbb{R}^n$, где C – положительная постоянная,
3. $\frac{|D^\beta a_\alpha(x)|}{q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}}} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ($0 < (\beta:\nu) \leq 1$).

Условие III. Существует положительное число $N = N(A) > 0$ такое, что при $|x| \geq N$ имеем

$$\overline{A}(x, \lambda, \xi) \equiv \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} a_\alpha(x) \lambda^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \xi^\alpha \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0.$$

Класс $H_q^{k,\nu}(\Omega)$. Для вектора ν с натуральными компонентами, области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и натурального числа k , через $H_q^{k,\nu}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \iint_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 q(x)^{2(k-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \right\}^{1/2}.$$

В частности, через $H_{q(x_0)}^{k,\nu}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $\{u\}$ с конечной мерой

$$\|u\|_{k,\nu,q(x_0)}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \iint_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 q(x_0)^{2(k-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \right\}^{1/2},$$

которая, в силу того, что $q(x_0) \neq 0$, эквивалентна норме пространства Соболева $H^{k,\nu}(\Omega)$, где

$$H^{k,\nu}(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_{k,\nu}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \iint_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty \right\}.$$

Положим $H_q^\nu(\Omega) \equiv H_q^{1,\nu}(\Omega)$, $H_{q(x_0)}^\nu(\Omega) \equiv H_{q(x_0)}^{1,\nu}(\Omega)$ и $H^\nu(\Omega) \equiv H^{1,\nu}(\Omega)$.

§2. ОПЕРАТОР СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть имеем линейный дифференциальный оператор

$$P(x, D) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} p_\alpha(x) D^\alpha \quad (2.1)$$

удовлетворяющий следующим условиям :

1. В некоторой фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($|x_0| > N(A)$) коэффициенты оператора $P(x, D)$ совпадают с коэффициентами оператора $A(x_0, D)$, т.е.

$$p_\alpha(x_0) = a_\alpha(x_0) q(x_0)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}, \quad (2.2)$$

2. В силу условия III из §1,

$$P(x_0, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} p_\alpha(x_0) \xi^\alpha \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

3. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n : (\alpha:\nu) \leq 1$

$$|p_\alpha(x) - p_\alpha(x_0)| \leq \varepsilon q(x_0)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

$$|D^\beta p_\alpha(x)| \leq K_\beta q(x_0)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

где $\varepsilon > 0$ и $K_\beta > 0$ суть некоторые положительные постоянные.

В силу условия (2.5), используя формулу Лейбница, легко получить оценку

$$\|P(\cdot, D)u\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq C' \|u\|_{2, \nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in H_{q(x_0)}^{2, \nu}(\mathbb{R}^n),$$

где C' – постоянная, не зависящая от функции u и точки x_0 . Таким образом, (2.1) является ограниченным оператором из $H_{q(x_0)}^{2, \nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Для любого мультииндекса $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ и области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обозначим

$$C^\nu(\Omega) = \{u; D^\alpha u \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : (\alpha:\nu) \leq 1\}.$$

Лемма 2.1. Пусть $a \in C^\nu(\Omega)$, $q \in Q_\nu$ и для некоторого $r > 0$ при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\beta:\nu) \leq 1$ имеем

$$|D^\beta a(x)| \leq K q(x)^{(r+(\beta:\nu))\nu_{\max}} \quad \forall x \in \Omega,$$

где K – некоторая постоянная. Тогда для некоторой постоянной M , не зависящей от q и a

$$\|a u\|_{\nu, q}^2(\Omega) \leq M K^2 \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} \iint_{\Omega} |D^\alpha u|^2 q(x)^{2(r+1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \quad (2.6)$$

для любого $u \in H_q^\nu(\Omega)$, как только правая часть оценки ограничена.

Доказательство оценки (2.6) непосредственно следует из формулы Лейбница.

Лемма 2.2. Пусть $a \in C^\nu(\Omega)$, $q \in Q_\nu$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и для некоторого $r > 0$ при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\beta : \nu) \leq 1$

$$|D^\beta a(x)| \leq K q(x_0)^{(r+(\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \Omega,$$

где K – некоторая постоянная. Тогда существует постоянная M , независящая от q , a и точки x_0 такая, что

$$\|a u\|_{\nu, q(x_0)}^2(\Omega) \leq M K^2 \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} \iint_{\Omega} |D^\alpha u|^2 q(x_0)^{2(r+1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \quad (2.7)$$

при всех $u \in H_{q(x_0)}^\nu(\Omega)$.

Заметим, что оператор $A(x_0, D)$ в (1.1) можно рассматривать как полуэллиптический оператор с параметром $q(x_0)$. Известна следующая теорема (см. [7]).

Теорема 2.1. Оператор

$$A(x_0, D) : H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$$

обладает ограниченным обратным оператором

$$R_0 : H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Используя этот результат, докажем существование обратного оператора для отображения $P(\cdot, D) : H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.2. Если для оператора $P(x, D)$ выполнены условия (2.2)-(2.5), то существует число $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ отображение

$$P(\cdot, D) : H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный оператор

$$R(\cdot, D) : H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство : Сначала покажем существование правого обратного для оператора $P(x, D)$. Представим оператор $P(x, D)$ в виде

$$P(x, D) = P(x_0, D) + [P(x, D) - P(x_0, D)].$$

Пусть R_0 – обратный оператор оператора $A(x_0, D) = P(x_0, D)$ (см. Теорему 2.1). Положим $u_f(x) = R_0 f(x)$, где $f \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$. Так как $u_f \in H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$, то

$$P(x, D) R_0 f(x) = f(x) + [P(x, D) - P(x_0, D)] R_0 f(x) \equiv f(x) + T f(x).$$

Если при условиях нашей теоремы число $\varepsilon > 0$ в (2.4) достаточно мало, то для отображения $T : H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|Tv\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2} \|v\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n), \quad v \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n).$$

Действительно,

$$\|Tf\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} \|(p_\alpha(\cdot) - p_\alpha(x_0)) D^\alpha R_0 f\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n). \quad (2.8)$$

Далее, используя условия (2.4), (2.5) и неравенство Колмогорова

$$\sup_{t \in R} |f'(t)| \leq \left(2 \sup_{t \in R} |f(t)| \sup_{t \in R} |f''(t)| \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

(для функций f с $\sup_{t \in R} |f^{(j)}(t)| < \infty$, $j = 0, 1, 2$) заключаем, что существует постоянная $\omega_\varepsilon > 0$ ($\omega_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), не зависящая от точки x_0 и для которой при всех $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$, $(\alpha : \nu) \leq 1$, $(\beta : \nu) \leq 1$,

$$|D^\beta (p_\alpha(x) - p_\alpha(x_0))| \leq \omega_\varepsilon q(x_0)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}. \quad (2.10)$$

Оценка (2.10) следует из (2.4), (2.5) несколько раз применяя неравенство (2.9).

Из Леммы 2.2 и неравенства (2.7) следует, что для всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $(\alpha : \nu) \leq 1$

$$\begin{aligned} & \|(p_\alpha(\cdot) - p_\alpha(x_0)) D^\alpha R_0 f\|_{\nu, q(x_0)}^2(\mathbb{R}^n) \leq \\ & \leq M_\alpha \omega_\varepsilon^2 \sum_{(\beta:\nu) \leq 1} \iint_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+\beta} R_0 f(x)|^2 q(x_0)^{2(2-(\alpha+\beta:\nu))\nu_{\max}} dx, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где M_α – некоторые постоянные, не зависящие от точки x_0 и ε . Так как $\omega_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то существует число $\bar{\varepsilon} > 0$, для которого

$$\sqrt{M_\alpha} \omega_\varepsilon \leq \frac{1}{2K \|R_0\|}, \quad \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}),$$

где R_0 – обратный оператор оператора $A(x_0, D) = P(x_0, D)$. Таким образом, $\|R_0\|$ – норма оператора из $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$, причём

$$K \geq \text{card} \{ \alpha : \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, (\alpha : \nu) \leq 1 \}.$$

Из неравенств (2.8) и (2.11) следует, что

$$\|Tf\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2 \|R_0\|} \|R_0 f\|_{2,\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2} \|f\|_{\nu, q(x_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда непосредственно следует, что оператор $I + T$ имеет ограниченный обратный в $H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$. Положим $v_f(x) = R_0(I + T)^{-1}f(x)$, где $f \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $v_f \in H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ (см. Теорему 2.1), то имеем

$$\begin{aligned} P(x, D)v_f(x) &= P(x, D)R_0(I + T)^{-1}f(x) = (P(x_0, D) + \\ &+ [P(x, D) - P(x_0, D)]) R_0(I + T)^{-1}f(x) \equiv (I + T)(I + T)^{-1}f(x) \equiv f(x), \end{aligned}$$

т.е. оператор $R \equiv R_0(I + T)^{-1}$ является правым обратным оператором оператора $P(x, D)$.

В силу Теоремы 2.1, для любой функции $u \in H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ существует единственная функция $f_0 \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$R_0 f_0(x) \equiv u(x).$$

Но, так как оператор $I + T$ имеет обратный, то существует единственная функция $f \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$(I + T)^{-1}f(x) \equiv f_0(x).$$

Следовательно, для любой функции $u \in H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ существует единственная функция $f \in H_{q(x_0)}^\nu(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$Rf(x) \equiv u(x)$$

и

$$P(x, D)u(x) \equiv f(x).$$

В силу этого имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) &= \|Rf\|_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) = \\ &= \|R_0(I + T)^{-1}f\|_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq C\|f\|_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \\ &\leq C\|P(\cdot, D)u\|_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n), \quad u \in H_{q(x_0)}^{2,\nu}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где C не зависит от u , q и точки x_0 .

Для завершения доказательства осталось убедиться, что из существования правого обратного оператора и оценки (2.12) следует, что оператор R является ограниченным обратным для оператора $P(x, D)$. Теорема 2.2 доказана.

§3. СПЕЦИАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ В $\mathbb{R}^n$

Пусть $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ – бесконечно гладкие неотрицательные функции такие, что $\theta_1(t) = \text{const} \neq 0$ при $|t| \leq 1/3$, $\theta_1(t) = 0$ при $|t| \geq 2/3$, $\theta_2(t) = 1$ при $|t| \leq 8/11$, и $\theta_2(t) = 0$ при $|t| \geq 4/5$. Очевидно, что $\theta_1(t)\theta_2(t) = \theta_1(t)$. Введем следующие функции

$$\chi_i^{(1)}(t) = \frac{\theta_1(t-i)}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_1(t-j)}, \quad \chi_i^{(2)}(t) = \theta_2(t-i) \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Эти функции обладают следующими свойствами :

1. В каждой точке $t \in (0, \infty)$ отличны от нуля одна или две функции из системы $\{\chi_i^{(j)}\} \ (j = 1, 2)$.
2. Для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ $\text{supp } \chi_i^{(1)} \subset \{t : |t-i| \leq 2/3\}$ и $\text{supp } \chi_i^{(2)} \subset \{t : |t-i| \leq 4/5\}$.
3. Для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ существуют постоянные $\Lambda_k^{(1)}$ и $\Lambda_k^{(2)}$ такие, что

$$\left| D^k \chi_i^{(1)}(t) \right| \leq \Lambda_k^{(1)} \quad \text{и} \quad \left| D^k \chi_i^{(2)}(t) \right| \leq \Lambda_k^{(2)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

4. $\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i^{(1)}(t) \equiv 1$.
5. $\chi_i^{(1)}(t)\chi_i^{(2)}(t) = \chi_i^{(1)}(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Допустим, что система открытых областей $\{U_i\}_{i=1}^m$ является покрытием единичной сферы из $\mathbb{R}^n$, а система функций $\{v_i^{(1)}\}_{i=1}^m$ такова, что

$$\sum_{i=0}^m v_i^{(1)}(\omega) \equiv 1, \quad \text{supp } v_i^{(1)} \subset U_i, \quad 0 \leq i \leq m$$

является гладкое разбиение единицы соответствующее этому разбиению. Кроме того, рассмотрим систему функций $\{v_i^{(2)}\}_{i=1}^m$, удовлетворяющую условиям

1. $\text{supp } v_i^{(2)} \subset U_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$,
2. $v_i^{(1)}(\omega)v_i^{(2)}(\omega) = v_i^{(1)}(\omega), \quad i = 1, 2, \dots, m$.

Дополнительно рассмотрим следующие системы гладких функций φ_k и ψ_k :

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \chi_{\left[\frac{k-1}{m}\right]}^{(1)}(|x|) v_{k-\left[\frac{k-1}{m}\right]m}^{(1)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad k = 2, 3, \dots, \\ \varphi_1(x) &= 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \chi_{\left[\frac{k-1}{m}\right]}^{(2)}(|x|) v_{k-\left[\frac{k-1}{m}\right]m}^{(2)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad k = 2, 3, \dots, \\ \psi_1(x) &= 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эти системы функций обладают следующими свойствами :

1. $\text{supp } \varphi_k(x) \subset W_k$, $k \geq 2$,
2. $\varphi_k(x)\psi_k(x) = \varphi_k(x)$, $k \geq 2$,
3. $|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \kappa_\alpha$, $|D^\alpha \psi_k(x)| \leq \kappa_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \geq 2$, где κ_α – некоторые постоянные,
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \equiv 1$,

т.е. система функции $\{\varphi_k\}$ является разбиением единицы в $\mathbb{R}^n$, соответствующее покрытию $\{W_k\}$.

§4. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Лемма 4.1. Пусть $q \in Q_\nu$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для $k \geq k_0$ и $\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } U_j < \delta$ выполняются следующие неравенства с некоторой постоянной η_ε ($\eta_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned} & \|(\varphi_k A(\cdot, D) - A(\cdot, D) \varphi_k) u\|_{\nu, q}^2(W_k) \leq \\ & \leq \eta_\varepsilon \sum_{(\alpha: \nu) < 2} \iint_{W_k} |D^\alpha u(x)|^2 q(x)^{2(2-(\alpha: \nu))\nu_{\max}} dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Доказательство. В силу условия на коэффициенты оператора A имеем

$$\begin{aligned} & \|(\varphi_k A(\cdot, D) - A(\cdot, D) \varphi_k) u\|_{\nu, q}^2(W_k) = \\ & = \left\| \sum_{(\beta: \nu) \leq 1} a_\beta q^{(1-(\beta: \nu))\nu_{\max}} (\varphi_k D^\beta u - D^\beta (\varphi_k u)) \right\|_{\nu, q}^2(W_k) \leq C \sum_{(\beta: \nu) \leq 1} T_\beta, \end{aligned}$$

где

$$T_\beta = \left\| \varphi_k q^{(1-(\beta: \nu))\nu_{\max}} D^\beta u - q^{(1-(\beta: \nu))\nu_{\max}} D^\beta (\varphi_k u) \right\|_{\nu, q}^2(W_k). \quad (4.2)$$

Применяя формулу Лейбница

$$D^\beta (\varphi_k(x) u(x)) = \sum_{0 \leq \alpha \leq \beta} C_\beta^\alpha D^\alpha \varphi_k(x) D^{\beta-\alpha} u(x),$$

из (4.2) имеем

$$T_\beta \leq \sum_{0 \neq \alpha \leq \beta} \left\| C_\beta^\alpha q^{(1-(\beta: \nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k D^{\beta-\alpha} u \right\|_{\nu, q}^2(W_k).$$

Так как $q \in Q_\nu$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ для которых

$$\max_{x \in \overline{W_k}} q(x)^{-1} \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq k_0 \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } U_j < \delta.$$

Поэтому, в силу свойства 3 из §3, имеем

$$\left| q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k(x) \right| \leq \kappa_\alpha \varepsilon^{(\alpha:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(1+(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in W_k.$$

Используя свойства функций из класса Q_ν , для любого $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$ и $(\gamma : \nu) \leq 1$ с некоторой постоянной $\tau_\gamma(\varepsilon)$ ($\tau_\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), имеем

$$\left| D^\gamma \left(q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k(x) \right) \right| \leq \tau_\gamma(\varepsilon) q(x)^{(1+(\alpha-\beta+\gamma:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in W_k,$$

т.е. выполняются все условия Леммы 2.1. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \left\| q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k D^{\beta-\alpha} u \right\|_{\nu,q}^2 (W_k) \leq \\ & \leq M \max_{(\gamma:\nu) \leq 1} \tau_\gamma^2(\varepsilon) \sum_{(\gamma:\nu) \leq 1} \iint_{W_k} |D^{\beta-\alpha+\gamma} u|^2 q(x)^{2(2-(\beta-\alpha+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Просуммировав неравенства (4.3) по α ($0 \neq \alpha \leq \beta$), получим

$$\begin{aligned} T_\beta & \leq M' \max_{(\gamma:\nu) \leq 1} \tau_\gamma^2(\varepsilon) \sum_{0 \neq \alpha \leq \beta} \sum_{(\gamma:\nu) \leq 1} \iint_{W_k} |D^{\beta-\alpha+\gamma} u|^2 q(x)^{2(2-(\beta-\alpha+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx \leq \\ & \leq M' \max_{(\gamma:\nu) \leq 1} \tau_\gamma^2(\varepsilon) \sum_{0 \leq \alpha' < \beta} \sum_{(\gamma:\nu) \leq 1} \iint_{W_k} |D^{\alpha'+\gamma} u|^2 q(x)^{2(2-(\alpha'+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx \leq \\ & \leq M' K \max_{(\gamma:\nu) \leq 1} \tau_\gamma^2(\varepsilon) \sum_{(\alpha:\nu) < 2} \iint_{W_k} |D^\alpha u|^2 q(x)^{2(2-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $K \geq \text{card} \{ \alpha, \alpha \in \mathbf{Z}_+^n; (\alpha : \nu) \leq 1 \}$.

Из оценок (4.2) и (4.4) непосредственно следует оценка (4.1), где

$$\eta_\varepsilon = CM'K^2 \max_{(\gamma,\nu) \leq 1} \tau_\gamma^2(\varepsilon).$$

Лемма 4.2. Пусть $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ – системы функций (3.1) и (3.2). Тогда существуют постоянные Λ_1 и Λ_2 , для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k u\|_{\nu,q}^2 (W_k) \leq \Lambda_1^2 \|u\|_{\nu,q}^2 (\mathbf{R}^n), \quad u \in H_q^\nu(\mathbf{R}^n), \quad (4.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\psi_k u\|_{\nu,q}^2 (W_k) \leq \Lambda_2^2 \|u\|_{\nu,q}^2 (\mathbf{R}^n), \quad u \in H_q^\nu(\mathbf{R}^n). \quad (4.6)$$

Доказательство. Так как $q \in Q_\nu$, то существует положительная постоянная Δ , для которой $\max_{x \in \mathbf{R}^n} q(x)^{-1} \leq \Delta$. Следовательно, в силу свойства 3 из §3, имеем

$$|D^\beta \varphi_k(x)| \leq \kappa_\beta \leq \kappa_\beta \Delta^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому, выполнены условия Леммы 2.1 при $r = 0$. Отсюда получаем

$$\|\varphi_k u\|_{\nu,q}^2(W_k) \leq \max_{(\beta:\nu) \leq 1} \kappa_\beta^2 \Delta^{2(\beta:\nu)\nu_{\max}} \|u\|_{\nu,q}^2(W_k). \quad (4.7)$$

Для любой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$, существует число p (зависящее лишь от размерности пространства) областей W_k , содержащих точку x . Следовательно, просуммировав неравенства (4.7) по всем k , получаем оценку (4.5), где $\Lambda_1 = \max_{(\beta:\nu) \leq 1} \kappa_\beta \Delta^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} p$. Доказательство оценки (4.6) аналогично.

Для областей “малого” размера пространства $H_{q(x_0)}^\nu$ эквивалентны пространствам H_q^ν , т.е. верна следующая лемма.

Лемма 4.3. Пусть $q \in Q_\nu$. Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ с некоторыми числами $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$

$$\lambda_0 \|u\|_{\nu,q}(W_k) \leq \|u\|_{\nu,q(x_k)}(W_k) \leq \lambda_1 \|u\|_{\nu,q}(W_k), \quad (4.8)$$

как только $k \geq k_0$, $\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } U_j < \delta$ и $x_k \in W_k$, где λ_0 и λ_1 – некоторые постоянные, не зависящие от ε .

Доказательство. Так как $q \in Q_\nu$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{|q(x) - q(x_k)|}{q(x_k)} \leq \max_{x,y \in W_k} \frac{|q(x) - q(y)|}{q(y)} \leq \varepsilon,$$

как только k – достаточно большое и $\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } U_j$ – достаточно малое. Очевидно, $|q(x) - q(x_k)| \leq \varepsilon q(x_k)$ для таких k и $\text{diam } U_j$, и поэтому непосредственно получаем левую часть неравенства (4.8), так как $|q(x)^p - q(x_k)^p| \leq \tau_p(\varepsilon) q(x_k)^p$, где p – положительное число, а $\tau_p(\varepsilon) \equiv \max\{|(1 - \varepsilon)^p - 1|, |(1 + \varepsilon)^p - 1|\} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Правая часть неравенства (4.8) доказывается аналогичным образом.

Теорема 4.1. Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I – III, то существуют положительные числа N и C_1 такие, что

$$\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq C_1 \{ \|A(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2(K_N)} \}, \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n), \quad (4.9)$$

где $K_N = \{x : |x| \leq N\}$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ – система функции (3.1). Тогда для любого натурального n_1

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\nu,q}^2(\mathbb{R}^n) &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u \right\|_{2,\nu,q}^2(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Как показано в [8], существует постоянная $C_2 > 0$, для которой

$$\|v\|_{2,\nu}(\Omega) \leq C_2 \{ \|A(\cdot, D)v\|_{\nu}(\Omega) + \|v\|_{L_2}(\Omega) \}, \quad v \in C_0^\nu(\Omega), \quad (4.11)$$

где $C_0^\nu(\Omega)$ – множество функций из $C^\nu(\Omega)$, финитных в Ω .

Очевидно, что $H_q^{k,\nu}(\Omega) = H_{q(x_0)}^{k,\nu}(\Omega) = H^{k,\nu}(\Omega)$ для ограниченной области Ω .

Следовательно, из оценки (4.11) и Леммы 4.1 имеем

$$\sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) \leq C_3^2 \sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k A(\cdot, D) u\|_{\nu,q}^2(W_k) + C_4 \|u\|_{L_2}^2(K_N), \quad (4.12)$$

где C_3 и C_4 – некоторые положительные постоянные, а N выбран так, чтобы K_N содержал все области W_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$).

Оценим слагаемые второй суммы правой части оценки (4.10). Пусть $k > n_1$, $x_k \in W_k$ – фиксированная точка и

$$P_k(x, D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} p_\alpha^{(k)}(x) D^\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} p_\alpha^{(k)}(x) &= \psi_k(x) a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} + \\ &+ (1 - \psi_k(x)) a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}, \end{aligned}$$

а $\{\psi_k\}$ – система функции (3.2). Заметим, что функции $p_\alpha^{(k)}(x)$ обладают следующими свойствами:

1. $p_\alpha^{(k)}(x) - p_\alpha^{(k)}(x_k) = \psi_k(x) (a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} - a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}),$
2. $p_\alpha^{(k)}(x_k) = a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}},$
3. для любого $\beta \in \mathbf{Z}_+^n$, $(\beta:\nu) \leq 1$, существует постоянная E_β , для которой

$$\left| D^\beta p_\alpha^{(k)}(x) \right| \leq E_\beta q(x)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}.$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Докажем свойство 3. В силу формулы Лейбница имеем, что для любого $\beta \in \mathbf{Z}_+^n$

$$\begin{aligned} D^\beta p_\alpha^{(k)}(x) &= \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma D^\gamma \psi_k(x) D^{\beta-\gamma} (a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}) + \\ &+ a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\beta (1 - \psi_k(x)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Так как $q \in Q_\nu$, то из условия II следует, что

$$\left| D^{\beta-\gamma} (a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}) \right| \leq K' q(x)^{(1-(\alpha-(\beta-\gamma):\nu))\nu_{\max}}, \quad (4.14)$$

где $K' > 0$ – некоторая постоянная. В силу свойства 3 из §3, для достаточно больших k имеем

$$q(x)^{-(\gamma:\nu)\nu_{\max}} |D^\gamma \psi_k(x)| \leq \kappa_\gamma \max_{x \in \overline{W}_k} q(x)^{-(\gamma:\nu)\nu_{\max}} \leq \kappa_\gamma \Delta^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}}, \quad (4.15)$$

где $\max_{x \in \overline{W}_k} q(x)^{-1} \leq \Delta$ не зависит от k . Из соотношения (4.13), в силу оценок (4.14) и (4.15) с некоторой постоянной E_β имеем

$$\begin{aligned} \left| D^\beta p_\alpha^{(k)}(x) \right| &\leq \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma |D^\gamma \psi_k(x)| \left| D^{\beta-\gamma} \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) \right| + \\ &+ \left| a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\beta (1 - \psi_k(x)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma \kappa_\gamma \Delta^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}} K' q(x)^{1-(\alpha-(\beta-\gamma):\nu)\nu_{\max}} + \\ &+ \left| a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \kappa_\gamma \Delta^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} \right| \leq E_\beta q(x)^{1-(\alpha-\beta:\nu)\nu_{\max}}. \end{aligned}$$

Так как $q \in Q_\nu$, то из свойства 1 и условия II следует, что

$$\left| p_\alpha^{(k)}(x) - p_\alpha^{(k)}(x_k) \right| \leq \tau(\varepsilon) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}},$$

где $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, выполнены все условия Теоремы 2.2, и поэтому, в силу оценки (2.12) имеем

$$\|\varphi_k u\|_{2,\nu,q(x_k)}^2(W_k) \leq C^2 \|P_k(\cdot, D)(\varphi_k u)\|_{\nu,q(x_k)}^2(W_k), \quad (4.16)$$

где постоянная C не зависит от $k \geq n_1$, если n_1 выбрано достаточно большой. Так как $\psi_k(x) D^\beta \varphi_k(x) = D^\beta \varphi_k(x)$, то

$$P_k(x, D)(\varphi_k(x)u(x)) = A(x, D)(\varphi_k(x)u(x)). \quad (4.17)$$

Из оценки (4.16), равенства (4.17) и Леммы 4.3 следует, что

$$\|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) \leq C_5^2 \|A(\cdot, D)(\varphi_k u)\|_{\nu,q}^2(W_k), \quad (4.18)$$

где $C_5 = \lambda_0^{-1} C \lambda_1$. Из оценки (4.18) и Леммы 4.1, имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_k u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) &\leq C_5^2 \|\varphi_k A(\cdot, D)u\|_{\nu,q}^2(W_k) + \\ &+ C_5^2 \eta_\varepsilon \sum_{(\alpha:\nu) < 2} \iint_{W_k} |D^\alpha u(x)|^2 q(x)^{2(2-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечное число p (зависящее лишь от размерности пространства) областей W_k , содержащих точку x , то просуммировав неравенства (4.19) по всем $k > n_1$ и учитывая неравенства (4.10) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\nu,q}^2(\mathbb{R}^n) &\leq C_3^2 \sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k A(\cdot, D) u\|_{\nu,q}^2(W_k) + \\
&+ C_5^2 \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \|\varphi_k A(\cdot, D) u\|_{\nu,q}^2(W_k) + \\
&+ \left(C_5 p \sqrt{\eta_\varepsilon} \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \right)^2 + C_4 \|u\|_{L_2}^2(K_N) \\
&\leq C_6^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k A(\cdot, D) u\|_{\nu,q}^2(W_k) + \\
&+ \left(C_5 p \sqrt{\eta_\varepsilon} \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \right)^2 + C_4 \|u\|_{L_2}^2(K_N).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Так как $\eta_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$C_5 p \sqrt{\eta_\varepsilon} \leq 1/\sqrt{2}.$$

Из оценки (4.20), в силу (4.5) имеем

$$\|u\|_{2,\nu,q}^2(\mathbb{R}^n) \leq 2C_6^2 \Lambda_1^2 \|A(\cdot, D) u\|_{\nu,q}^2(\mathbb{R}^n) + 2C_4 \|u\|_{L_2}^2(K_N).$$

Доказательство завершено.

Следствие 4.1. Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I - III, то ядро оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно.

Доказательство. Из оценки (4.9), имеем

$$\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq C_1 \|u\|_{L_2}(K_N) \quad \text{и} \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap \text{Ker } A(\cdot, D). \tag{4.21}$$

Пусть $\{u_k\}$ – последовательность функций из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap \text{Ker } A(\cdot, D)$ таких, что $\|u_k\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq 1$. Так как $q \in Q_\nu$, то $C \|u_k\|_{2,\nu}(K_N) \leq \|u_k\|_{2,\nu,q}(K_N)$ ($k = 1, 2, \dots$), где C – некоторая постоянная, независимая от $\{u_k\}$. Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $H^{2,\nu}(K_N)$, и следовательно компактна в $L_2(K_N)$ (см. [9], [10]). Далее, из оценки (4.21) следует, что последовательность $\{u_k\}$ компактна в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, единичный шар в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap \text{Ker } A(\cdot, D)$ компактен. Следовательно, пространство $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap \text{Ker } A(\cdot, D)$ конечномерно, т.е. ядро оператора $A(x, D)$ в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно.

Следствие 4.2. Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I - III, то область значений оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ замкнута.

Доказательство. Обозначим через S топологическое дополнение к пространству $\text{Ker } A(\cdot, D)$ пространства $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, область значений оператора $A(x, D)$ совпадает с областью значений его сужения в S . Покажем, что существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq K \|A(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n), \quad u \in S. \quad (4.22)$$

Чтобы доказать это неравенство, допустим, что оно неверно. Тогда можно найти такую последовательность $u_n \in S$, что $\|u_n\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \infty$ и $\|A(\cdot, D)u_n\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq C$. Положим $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\|v_n\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \text{и} \quad \|A(\cdot, D)v_n\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как оператор вложения $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(K_N)$ вполне непрерывен (см. [9], [10]), то из v_n можно извлечь подпоследовательность v_{n_k} , сходящуюся в $L_2(K_N)$. Оценка (4.9) показывает, что v_{n_k} сходится в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Пусть v_0 – предельный элемент этой последовательности в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\|v_0\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1$ (так как $\|v_n\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1$), $v_0 \in S$ (так как S замкнуто) и $v_0 \in \text{Ker } A(\cdot, D)$ (так как $\|A(\cdot, D)v_n\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0$), что приводит к противоречию. Таким образом, неравенство (4.22) верно.

Из неравенства (4.22) следует замкнутость области значений оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$, поскольку $A(x, D)$ отображает S на область значений оператора $A(x, D)$ изоморфным образом.

§5. КОЯДРО ОПЕРАТОРА

Известна следующая теорема (см. [5]).

Теорема 5.1. Пусть T – ограниченный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$, обладающий следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$

$$\|Tu\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq \varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) + M_\varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(K_N), \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

где M_ε – постоянная, не зависящая от функции u , а $K_N = \{x : |x| \leq N\}$. Тогда T – вполне непрерывный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5.2. Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I - III, то коядро оператора $A(x, D)$ конечномерно в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $A^*(x, D)$ формально сопряженный к $A(x, D)$ оператор. Тогда, в силу формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
A^*(x, D)u(x) &= \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} u(x) \right) \\
&= \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta (u(x)) \\
&= \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha (u(x)) \\
&+ \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta (u(x)).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$T(x, D)u(x) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta (u(x)).$$

В силу того, что

$$A(x, -D)u(x) \equiv \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha (u(x)),$$

имеем

$$A^*(x, D)u(x) = A(x, -D)u(x) + T(x, D)u(x).$$

Докажем, что $T(x, D)$ – компактный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что из условия II и вложения $q \in Q_\nu$ следует, что при $0 < (\alpha - \beta : \nu) \leq 1$ имеем

$$\frac{|D^{\alpha-\beta} (a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}})|}{q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

$$\left| D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) \right| \leq B_{\alpha,\beta} q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Из оценки (5.1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{|D^{\alpha-\beta} (a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}})|}{q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}} < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus K_N, \quad (5.3)$$

где $N = N(\varepsilon)$ – некоторая постоянная.

Для функции $u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} & \|T(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) = \\ & = \left\| \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta u \right\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) = \\ & = \left\| \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta u \right\|_{\nu,q}(K_N) + \\ & + \left\| \sum_{(\alpha:\nu) \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} \left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \right) D^\beta u \right\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n \setminus K_N). \end{aligned}$$

Отсюда, используя компактность K_N и оценки (5.2), (5.3), имеем

$$\|T(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq \tau_\varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) + M_\varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(K_N), \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

где $\tau_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, M_ε – постоянная, не зависящая от функции u . Следовательно, в силу Теоремы 5.1, $T(x, D)$ есть компактный оператор, действующий из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$.

Так как для оператора $A(x, -D)$ выполнены условия I – III, то в силу Теоремы 4.1 имеем, что для всех $u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \leq C_1 \{ \|A(\cdot, -D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N) \}, \quad (5.4)$$

где $K_N = \{x : |x| \leq N\}$. Из оценки (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) & \leq C_1 \{ \|A(\cdot, -D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N) \} \leq \\ & \leq C_1 \{ \|A^*(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|T(\cdot, D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N) \}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В силу Следствия 4.1 и оценки (5.5), ядро сопряженного оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также конечномерно. Следовательно, коядро оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно. Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I – III, то индекс отображения

$$A(\cdot, D) : H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$$

конечен.

Abstract. The paper investigates the index of some linear, differential, semielliptic operators with variable coefficients of a special form in $\mathbb{R}^n$. In particular, additional conditions on the symbol are found that render the index finite. The operators are considered in the weighted Sobolev spaces.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, “Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов”, Успехи Мат. Наук, том 12, вып. 2(74), стр. 43 – 118, 1957.
2. А. И. Вольперт, “Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости”, Труды Моск. Мат. Общ., том 10, стр. 41 – 87, 1961.
3. R. T. Seeley, “The Index of Elliptic Systems of Singular Integral Operators”, Journal of Math. Analysis And Appl., vol. 7, pp. 289 – 309, 1963.
4. M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds”, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, № 3, pp. 422 – 433, 1963.
5. М. С. Агранович, “Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы”, Успехи Мат. Наук, том 20, вып. 5(125), стр. 3 – 120, 1965.
6. Л. А. Багиров, “Эллиптические уравнения в неограниченной области”, Мат. сборник, том 86(128), № 1(9), стр. 121 – 139, 1971.
7. Г. А. Карапетян, “Регулярные уравнения, зависящие от параметра”, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 25, № 2, стр. 192 – 202, 1990.
8. E. Pehkonen, “Ein Hypoelliptisches Dirichlet Problem”, Com. Mat. Phys., vol. 48, № 3, pp. 131 – 143, 1978.
9. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1977.
10. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.

Поступила 17 мая 2007

О РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ УОЛША С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. А. Навасардян

Ереванский государственный университет
E-mail : knavasard@ysu.am

Резюме. В статье рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$, для которых $|a_n|$ монотонно стремятся к нулю и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Доказываются теоремы исправления в L^1 и представления функций из L^p , $p \in (0, 1)$, подрядами этого ряда.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются ряды по системе Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x), \quad (1.1)$$

для которых выполняются условия

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (1.2)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty. \quad (1.3)$$

Известно (см. [1], стр. 149), что ряд вида (1.1)-(1.2) равномерно сходится на любом интервале вида $(\delta, 1)$, $\delta > 0$. В работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Тогда для любой почти всюду (п.в.) конечной, измеримой функции $f(x)$,

определённой на $[0, 1]$ существует последовательность $\delta_n = 0, \pm 1$ такая, что ряд по системе Уолша $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0, 1]$.

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1.4)$$

называется универсальным относительно подрядов в некотором классе измеримых функций S , если для любой функции $F \in S$ существует последовательность $\delta_n = 0$ или 1 , для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n f_n(x)$ сходится к $F(x)$.

Теорема 2. (см. [2]) Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Тогда существует последовательность $\gamma_n = \pm 1$ такая, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных, измеримых функций в смысле сходимости почти всюду.

В [3] рассматривались универсальные ряды по кратной системе Уолша. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать в работах [5] и [6]. В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть для последовательности $\{a_n\}$ выполняются (1.2) и (1.3). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существуют функция $g \in L^1(0, 1)$ и числа $\delta_n = 0$ или ± 1 такие, что $g(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к функции g в метрике $L^1(0, 1)$.

Теорема 4. Пусть для последовательности $\{a_n\}$ выполняются (1.2) и (1.3). Тогда существуют числа $\gamma_n = \pm 1$ такие, что для любого $p \in (0, 1)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0, 1)$ в смысле сходимости пространства $L^p(0, 1)$.

Аналогичные теоремы для системы Хаара были получены в [7]. Фактически, Теорема 3 является усилением следующего результата, вытекающего из более общей теоремы М. Г. Григоряна (см. [12], [13]) : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует функция $g \in L^1(0, 1)$, совпадающая с f на множестве E , а ряд Фурье–Уолша которой сходится к g в метрике $L^1(0, 1)$.

Нам понадобится понятие сходимости гриди алгоритма. Пусть $\{\psi_n\}$ – нормированный базис в банаховом пространстве B , и пусть $\{\psi_n^*\}$ – биортогональная к

$\{\psi_n\}$ система. Тогда для любого $\psi \in B$ и натурального числа m сумма

$$G_m(\psi) = \sum_{n \in \Lambda} \psi_n^*(\psi) \psi_n,$$

определяется по правилу : Λ – подмножество m натуральных чисел со свойством $|\psi_n^*(\psi)| \geq |\psi_k^*(\psi)|$, если $n \in \Lambda$ и $k \notin \Lambda$. Если такое множество Λ не единственно, то берётся любое из них. Если $G_m(\psi)$ сходится к ψ в норме пространства B , то говорят, что гриди алгоритм для ψ сходится. Подробнее о гриди алгоритме и гриди базисах можно узнать из работ [8], [9], [10].

Теорема 5 является следствием Теоремы 3.

Теорема 5. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует функция $g \in L^1(0, 1)$, которая совпадает с f на E и гриди алгоритм которой по системе Уолша сходится.

Легко видеть, что Теорема 5 имеет место, если в Теореме 3 положить $a_n = 1/\sqrt{n}$. Если $f \in L^1(0, 1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходиться (см. [11]). Следовательно, в Теореме 5 “исправление” функции f вне множества E существенно.

Ниже через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, через $C, C_1, \dots$ – различные абсолютные постоянные, через $\chi_I(x)$ – характеристическую функцию множества I , и

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx, \quad p \in (0, 1],$$

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним, что функции системы Радемахера определяются по формулам

$$R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции системы Уолша выражаются через функции Радемахера следующим образом (см., например, [4]) : $W_0(x) \equiv 1$, и

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^p R_{k_i+1}(x)$$

для $n \geq 1$ с двоичным представлением $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p}$ ($k_1 > k_2 > \dots > k_p$). Напомним также, что двоичным интервалом называется интервал вида $\left(\frac{i-1}{2^k}; \frac{i}{2^k}\right)$, где $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$

Следующая лемма была доказана в [2].

Лемма 1. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда для любого двоичного интервала $I \subset [0, 1]$ и для любых положительных чисел $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$, d и $M \in \mathbb{N}$ существуют множество $E \subset I$ и полиномы по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{n=M}^N \delta_n a_n W_n(x), \quad P'(x) = \sum_{n=M}^N b_n W_n(x)$$

такие, что

- 1) $\delta_n = 0, \pm 1$,
- 2) $P'(x) = 0$, если $x \notin I$,
- 3) $|P'(x) - d| < \delta$, если $x \in E$, $\mu E > (1 - \varepsilon)\mu I$,
- 4) $\sup_m \left| \sum_{n=M}^m b_n W_n(x) \right| < \delta$, если $x \notin I$,
- 5) $\sup_m \left| \sum_{n=M}^m b_n W_n(x) \right| < C \frac{d}{\varepsilon} + \delta$,
- 6) $\|P - P'\|_2^2 < \varepsilon \delta^2 \mu I$.

Для доказательства теорем этой статьи, нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), а

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$$

– ступенчатая функция, определённая на $[0, 1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^j$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ существуют функция $g \in L^1(0, 1)$, измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и полином

$$P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n W_n(x), \quad \text{где } \delta_n = 0, \pm 1,$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

- 1) $\mu E > (1 - \varepsilon)$,
- 2) $g(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in E$,
- 3) $\|g - P\|_1 < \delta$,
- 4) $\|g\|_1 \leq C \|\varphi\|_1$,
- 5) $\sup_{m \leq M} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C \|\varphi\|_1$.

Лемма 3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3),

а $\varphi(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, определённая на $[0, 1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^j$

– непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$ и $\alpha > 0$ существует полином

$$P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n W_n(x), \quad \text{где} \quad \delta_n = 0 \text{ или } \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям :

- 1) $\|\varphi - P\|_p < \alpha$,
- 2) $\sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \leq C \|\varphi\|_p^p$.

Доказательство Леммы 2. Пусть $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$ – некоторые числа. Без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{1}{\varepsilon} C |l_k| \mu I_k < \|\varphi\|_1, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad (2.1)$$

где C – постоянная из Леммы 1 (в противном случае интервалы I_k представим в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются условия (2.1)). Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы

$$\max \left\{ \delta_1, \delta_1 \sum_{k=1}^j \sqrt{\varepsilon \mu I_k} \right\} < \min \left\{ \|\varphi\|_1, \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (2.2)$$

Согласно Лемме 1, для любого $k = 1, 2, \dots, j$ существуют множества $E_k \subset I_k$ и полиномы

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \quad P'_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_n W_n(x),$$

(где $\delta_n = 0, \pm 1$, $N_1 = N$) такие, что :

$$\mu E_k > (1 - \varepsilon) \mu I_k, \quad (2.3)$$

$$P'_k(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \quad (2.4)$$

$$|P'_k(x) - l_k| < \delta_1, \quad \text{если} \quad x \in E_k, \quad (2.5)$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^m b_n W_n(x) \right| < \delta_1, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \quad (2.6)$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^m b_n W_n(x) \right| < \frac{C |l_k|}{\varepsilon} + \delta_1, \quad \text{если} \quad x \in I_k, \quad (2.7)$$

$$\|P_k - P'_k\|_2 < \delta_1 \sqrt{\varepsilon \mu I_k}. \quad (2.8)$$

Положим

$$P(x) = \sum_{k=1}^j P_k(x), \quad E = \bigcup_{k=1}^j E_k, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^j P'_k(x), \quad (2.9)$$

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in E \\ P(x), & \text{если } x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда условия 1) и 2) немедленно следуют из (2.3), (2.9) и (2.10). Из (2.2) и (2.8) получаем, что

$$\sum_{k=1}^j \|P_k - P'_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^j \|P_k - P'_k\|_2 \leq \min \left\{ \|\varphi\|_1, \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (2.11)$$

Следовательно, из (2.9) получаем

$$\|P - P'\|_1 \leq \min \left\{ \|\varphi\|_1, \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (2.12)$$

Из (2.3), (2.5), (2.7) и (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \|P'_k\|_1 &\leq \sum_{k=1}^j \left((|l_k| + \delta_1) \mu I_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta_1 \right) \varepsilon \mu I_k \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^j (|l_k| + 2\delta_1 + C|l_k|) \mu I_k \leq 2\delta_1 + (C+1) \|\varphi\|_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Отсюда, с учётом (2.2) получаем

$$\|P'\|_1 \leq C_1 \|\varphi\|_1. \quad (2.14)$$

Из (2.9), (2.5), (2.10) и (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} \|g - P\|_1 &= \int_E |P(x) - \varphi(x)| dx \leq \|P - P'\|_1 + \int_E |P'(x) - \varphi(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \delta_1 \sum_{k=1}^j \mu I_k \leq \frac{\delta}{2} + \delta_1. \end{aligned}$$

Поэтому, с учётом (2.2), получаем

$$\|g - P\|_1 \leq \delta. \quad (2.15)$$

Ясно, что (см. (2.10), (2.12) и (2.14))

$$\|g\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|P\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|P'\|_1 + \|P - P'\|_1 \leq C_2 \|\varphi\|_1.$$

Пусть

$$\sup_{m \leq N_{j+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right| dx = \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx$$

и пусть $N_k < m_0 \leq N_{k+1}$. Тогда, учитывая (2.11), (2.13), (2.6)-(2.8), (2.2) и (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{m \leq N_{j+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right| dx &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \|P_i(x)\|_1 + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \|P_i - P'_i\|_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \|P'_i\|_1 + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} (\delta_n a_n - b_n) W_n(x) \right| dx + \\ &+ \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} b_n W_n(x) \right| dx \leq \|\varphi\|_1 + C_1 \|\varphi\|_1 + \|P_k - P'_k\|_2 + \\ &+ \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta_1 \right) \mu I_k + \delta_1 \leq C_3 \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство Леммы 3. Пусть $\varphi(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$ и $\alpha > 0$ – некоторые числа. Выберем положительное число $\varepsilon \in (0, 1)$ так, чтобы

$$((C+2)|l_k|)^p \varepsilon^{1-p} < \frac{\alpha}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad (2.16)$$

где C – постоянная из Леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что для всех $k = 1, 2, \dots, j$

$$\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + 1 \right)^p \mu I_k < \|\varphi\|_p. \quad (2.17)$$

В противном случае, представим интервалы I_k в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются (2.17). Выберем $\delta \in (0, 1)$ так, чтобы

$$\delta < \min \{ |l_k| : |l_k| \neq 0, k = 1, 2, \dots, j \}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=1}^j (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2} < \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \|\varphi\|_p \right\}, \quad (2.19)$$

$$\delta^p < \min \{ \alpha/4, \|\varphi\|_p \}. \quad (2.20)$$

Согласно Лемме 1, для любого $k = 1, 2, \dots, j$ существуют множества E_k и полиномы по системе Уолша

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \quad P'_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_n W_n(x)$$

(где $\delta_n = 0, \pm 1$) такие, что

$$P'_k(x) = 0, \quad \text{если } x \notin I_k, \quad (2.21)$$

$$|P'_k(x) - l_k| < \delta, \quad \text{если } x \in E_k \text{ и } \mu E_k > (1 - \varepsilon)\mu I_k, \quad (2.22)$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^m b_n W_n(x) \right| < \delta, \quad \text{если } x \notin I_k, \quad (2.23)$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^m b_n W_n(x) \right| < \frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta, \quad \text{если } x \in I_k, \quad (2.24)$$

$$\|P_k - P'_k\|_2^2 < \varepsilon \delta^2 \mu I_k. \quad (2.25)$$

Из (2.21), (2.22), (2.16) и (2.20) получаем

$$\begin{aligned} \|P'_k - l_k \chi_{I_k}\|_p &= \int_{I_k} |P'_k - l_k|^p dx \leq \delta^p \mu E_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta \right)^p \mu(I_k \setminus E_k) + \\ &+ |l_k|^p \mu(I_k \setminus E_k) \leq \delta^p \mu I_k + \left(\left(\frac{(C+1)|l_k|}{\varepsilon} \right)^p + |l_k|^p \right) \varepsilon \mu I_k \leq \\ &\leq (\delta^p + ((C+2)|l_k|)^p \varepsilon^{1-p}) \mu I_k < \frac{\alpha}{2} \mu I_k. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Так как (см. (2.25))

$$\|P_k - P'_k\|_p \leq \|P_k - P'_k\|_2^p \leq (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2}, \quad (2.27)$$

то, с учётом (2.26), получаем

$$\|P_k - l_k \chi_{I_k}\|_p \leq \frac{\alpha}{2} \mu I_k + (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2}. \quad (2.28)$$

Положим

$$P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^j P_k(x). \quad (2.29)$$

Тогда, из (2.29), (2.28) и (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} \|P - \varphi\|_p &\leq \sum_{k=1}^j \int_0^1 |P_k - l_k \chi_{I_k}|^p dx \leq \sum_{k=1}^j \left(\frac{\alpha}{2} \mu I_k + (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2} \right) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^j (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2} < \alpha. \end{aligned}$$

Из (2.21), (2.22), (2.24) и (2.18) имеем

$$\begin{aligned} \|P'_k\|_p &\leq (|l_k| + \delta)^p \mu I_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta \right)^p \varepsilon \mu I_k \leq \\ &\leq ((|l_k| + \delta)^p + ((C + 1)|l_k|)^p) \mu I_k \leq C_1 |l_k|^p \mu I_k. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Следовательно, учитывая также (2.27), получаем

$$\|P_k\|_p \leq \|P'_k\|_p + \|P_k - P'_k\|_p \leq C_1 |l_k|^p \mu I_k + (\varepsilon \delta^2 \mu I_k)^{p/2}. \quad (2.31)$$

Пусть

$$\sup_{m \leq N_j} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx = \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx$$

и пусть $N_k < m_0 \leq N_{k+1}$. Тогда, учитывая также (2.31), (2.24), (2.23), (2.19), (2.27), (2.17), (2.20), получаем

$$\begin{aligned} \sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx &\leq \\ &\leq \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \|P_i\|_p + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} (\delta_n a_n - b_n) W_n(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k}^{m_0} b_n W_n(x) \right|^p dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(C_1 |l_i|^p \mu I_i + (\varepsilon \delta^2 \mu I_i)^{p/2} \right) + \|P_k - P'_k\|_2^p + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta \right)^p \mu I_k + \\ &+ \delta^p \mu([0, 1] \setminus I_k) \leq C_3 \|\varphi\|_p. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 3. Пусть η_k — монотонная последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \quad (3.1)$$

Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_k^{(n)} \chi_{I_k^{(n)}}(x), \quad (3.2)$$

с рациональными значениями $\alpha_k^{(n)}$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ – произвольное число. Тогда, в силу Леммы 2, для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (3.2) существуют функция $g_k \in L^1(0, 1)$, измеримое множество $E_k \subset [0, 1]$ и полином

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x),$$

где $\delta_n = 0$ или ± 1 , удовлетворяющие следующим условиям :

$$\mu E_k > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad (3.3)$$

$$g_k(x) = f_k(x) \quad \text{если} \quad x \in E_k, \quad (3.4)$$

$$\|g_k - P_k\|_1 < \eta_k, \quad (3.5)$$

$$\|g_k\|_1 \leq C \|f_k\|_1, \quad (3.6)$$

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^m \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C \|f_k\|_1. \quad (3.7)$$

Обозначим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k. \quad (3.8)$$

Тогда из (3.3) и (3.8) следует, что $\mu E > 1 - \varepsilon$.

Пусть $f \in L^1(0, 1)$. Из последовательности (3.2) выберем такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, чтобы выполнялись

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=1}^k f_{n_m} \right\|_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$\|f_{n_k}\|_1 \leq \eta_k, \quad k \geq 2. \quad (3.10)$$

Тогда положим $\varphi_1(x) = g_{n_1}(x)$ и

$$Q_1(x) = P_{n_1}(x) = \sum_{n=N_{n_1}+1}^{N_{n_1+1}} \delta_n a_n W_n(x).$$

Допустим, что уже определены функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$ и полиномы $Q_1(x), \dots, Q_{k-1}(x)$, удовлетворяющие условиям :

$$\varphi_i(x) = f_{n_i}(x), \quad x \in E, \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{k-1} |Q_i(x) - \varphi_i(x)| dx < 2\eta_k. \quad (3.11)$$

Выберем ступенчатую функцию f_{m_k} ($m_k > m_{k-1}$, $m_1 = n_1$) из (3.2) такую, что

$$\left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 < \eta_k. \quad (3.12)$$

Согласно (3.10) и (3.11) имеем, что

$$\left\| f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq 3\eta_k. \quad (3.13)$$

Из (3.12) и (3.13) получим

$$\|f_{m_k}\|_1 \leq 4\eta_k. \quad (3.14)$$

Положим

$$\varphi_k(x) = f_{n_k}(x) + (g_{m_k}(x) - f_{m_k}(x)), \quad (3.15)$$

$$Q_k(x) = P_{m_k}(x) = \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N_{m_k}+1} \delta_n a_n W_n(x). \quad (3.16)$$

Ясно, что (см. (3.15) и (3.4))

$$\varphi_k(x) = f_{n_k}(x), \quad \text{если } x \in E \subset E_{m_k}. \quad (3.17)$$

Из (3.15), (3.12), (3.6), (3.14) и (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_1 &\leq \|f_{n_k} - f_{m_k}\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 \leq \\ &\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq \\ &\leq \eta_k + 4C\eta_k + 2\eta_k = (3 + 4C)\eta_k = C_1\eta_k. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С учетом (3.15), (3.12) и (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 &= \left\| P_{m_k} + f_{m_k} - g_{m_k} - f_{n_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|P_{m_k} - g_{m_k}\|_1 \leq 2\eta_k. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.7) и (3.14) следует, что

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{m_k}+1}^m \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C\|f_{m_k}\|_1 \leq 4C\eta_k. \quad (3.20)$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\varphi_k(x)\}$ и полиномов $\{Q_k(x)\}$, удовлетворяющие условиям (3.17)-(3.20).

Определим теперь функцию $g(x)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ следующим образом :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

$$\delta'_n = \begin{cases} \delta_n, & \text{если } N_{m_k} + 1 \leq n \leq N_{m_k+1} \quad \text{для некоторого } k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x).$$

Из (3.18), (3.1), (3.17) и (3.9) следует, что $g \in L^1(0, 1)$ и $g(x) = f(x)$ когда $x \in E$. Пусть N – любое натуральное число. Тогда $N_{m_k} + 1 \leq N < N_{m_{k+1}}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, с учетом (3.18)-(3.21), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \delta'_n a_n W_n(x) - g \right\|_1 &\leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 + \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i \right\|_1 + \left\| \sum_{n=N_{m_k}+1}^N \delta'_n a_n W_n(x) \right\|_1 \leq \\ &\leq 2\eta_{k-1} + C_1 \sum_{i=k}^{\infty} \eta_i + 4C\eta_k \leq C_2 \sum_{i=k-1}^{\infty} \eta_i. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3.1), заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ сходится к $g(x)$ в метрике L^1 . Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Пусть $p \in (0, 1)$ – произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ – последовательность положительных чисел, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Тогда, в силу Леммы 3, для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (3.2) существует полином

$$P_k(x) = \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \quad \delta_n = 0 \text{ или } \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям

$$\|f_k - P_k\|_p < \alpha_k, \quad (3.22)$$

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^m \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C \|f_k\|_p. \quad (3.23)$$

Пусть $f \in L^p(0, 1)$ и пусть $\{\eta_k\}$ – последовательность такая, что

$$\eta_1 > \eta_2 > \dots, \quad \eta_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Выберем n_1 настолько большим, чтобы выполнялись $\alpha_{n_1} < \eta_1$ и $\|f - f_{n_1}\|_p < \eta_1$. Ясно, что $\|f - P_{n_1}\|_p \leq \|f - f_{n_1}\|_p + \|f_{n_1} - P_{n_1}\|_p < 2\eta_1$. Допустим, что уже определены числа $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$, для которых

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p < 2\eta_{k-1}. \quad (3.25)$$

Выберем число n_k так, чтобы выполнялись

$$\alpha_{n_k} < \eta_k \quad (3.26)$$

и

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} - f_{n_k} \right\|_p < \eta_k. \quad (3.27)$$

Тогда, из (3.22), (3.26) и (3.27) непосредственно следует

$$\left\| f - \sum_{i=1}^k P_{n_i} \right\|_p \leq \eta_k + \alpha_{n_k} < 2\eta_k. \quad (3.28)$$

Далее, из (3.27), с учётом (3.24) и (3.25), получаем

$$\|f_{n_k}\|_p \leq \eta_k + 2\eta_{k-1} < 3\eta_{k-1}. \quad (3.29)$$

Следовательно, с учётом (3.23), имеем

$$\sup_{N_{n_k} < m \leq N_{n_k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{n_k}+1}^m \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C\eta_{k-1}. \quad (3.30)$$

Таким образом по индукции определим полиномы P_{n_k} , удовлетворяющие условиям (3.28) и (3.30). Теперь рассмотрим подряд ряда (1.1) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{n_k}+1}^{N_{n_k+1}} \delta_n a_n W_n(x). \quad (3.31)$$

Пусть M – некоторое натуральное число и пусть для некоторого k имеет место $N_{n_k} < M \leq N_{n_k+1}$. Тогда из (3.28) и (3.30) получаем

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^M b_n W_n(x) \right\|_p &\leq \left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p + \left\| \sum_{n=N_{n_k}+1}^M \delta_n a_n W_n(x) \right\|_p \\ &\leq 2\eta_{k-1} + C\eta_{k-1} = C_1\eta_{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3.24), получаем, что ряд (3.31) сходится к f в метрике $L^p(0, 1)$. Теорема 4 доказана.

Abstract. The paper studies the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ by Walsh system, where $|a_n|$ monotone tends to zero and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Some theorems on correction in L^1 and representability of functions from L^p , $p \in (0, 1)$ by subseries of the Walsh series are proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Наука, Москва, 1987.
2. Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах с монотонными коэффициентами”, Изв. АН России, Серия Математика, том 63, № 1, стр. 41 – 60, 1999.
3. К. А. Навасардян, “Универсальные ряды по кратной системе Уолша”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 22 – 40, 1995.
4. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.
5. А. А. Талалян, “Представление измеримых функций рядами”, УМН, том 15, № 5 (95), стр. 77 – 141, 1960.
6. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, “Теоремы представления Д. Е. Меньшова и их влияние на развитие метрической теории функций”, УМН, том 47, № 5(287), стр. 15 – 44, 1992.
7. К. А. Навасардян, А. А. Степанян, “О рядах по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 42, № 4, стр. 219 – 231, 2007.
8. V. N. Temlyakov, “Nonlinear Methods of Approximation”, Found. Comput. Math., vol. 3, pp. 33 – 107, 2003.
9. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
10. P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithm for general systems”, J. Approx. Theory, vol. 107, pp. 293 – 314, 2000.
11. S. A. Episkoposian, “On the divergense of greedy algorithms with respect to Walsh subsystems in L ”, Nonlinear Analysis, vol. 66, pp. 1782 – 1787, 2007.
12. М. Г. Григорян, “Сходимость рядов Фурье-Уолша в метрике L^1 и почти всюду”, Изв. ВУЗ-ов, Мат., № 11, стр. 9 – 18, 1990.
13. М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, Мат. сб., том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.

Поступила 2 июля 2007

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ С ВЕСОМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГЮЙГЕНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. Оганесян, С. Г. Рафаелян

Ереванский Государственный университет
E-mail: ahovhannisyan@ysu.am, rafayelyansg@mail.ru

Резюме. В работе изучается начальная задача для одного класса уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Так как рассматриваемые уравнения имеют особенность при $t = 0$, то сначала определяется вид начальных условий, а затем строится решение полученной задачи. Доказывается, что решение строится за конечное число шагов. При этом показывается каким естественным начальным условиям могут удовлетворять решения уравнений.

Известно [1], что уравнения вида

$$Pu = D_t^2 u - \sum_{k=1}^{n-1} D_k^2 u + \frac{l(l+1)}{t^2} u = 0, \quad (1)$$

где $0 \leq l \leq \frac{n-4}{2}$ – целое и $n \geq 4$ – чётное, удовлетворяют принципу Гюйгенса, т.е. значение решения $u(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, в произвольной точке $P = (t_0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ зависит от начальных данных только на пересечении начального многообразия с характеристическим конусом с вершиной в точке P . Здесь для удобства используются обозначения $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$, $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$.

С другой стороны, уравнения с неограниченными при $t \rightarrow 0$ коэффициентами были изучены в [2] и [3], где строился параметрикс (решение с точностью до гладких функций) с весовыми данными на гиперплоскости $t = 0$. Уравнения, кратко описанные в [3], являются особыми случаями уравнений, изученных в [2]. В настоящей работе указывается, что уравнения вида (1) являются частными случаями уравнений, рассмотренных в [3] и строится решение начальной задачи. Решение строится за конечное число шагов, откуда следует, что для уравнения

(1), параметрикс, построенный в [3], совпадает с точным решением. При этом показывается каким естественным начальным условиям могут удовлетворять решения уравнений.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суммы интегральных операторов Фурье

$$u(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{r=1}^2 \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} P_{r\sigma}(t, \xi) f_r(y) dy d\xi. \quad (2)$$

Здесь $\phi_\sigma = \langle x, \xi \rangle + \sigma|\xi|t$ – фазовые функции ($\sigma = \pm 1$), а амплитудные функции $P_{r\sigma}(t, \xi)$ ($r = 1, 2$) не зависят от x так как коэффициенты уравнения (1) не зависят от x . Подстановка функции $u(t, x)$ в уравнение (1) даёт

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{r=1}^2 \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \left(D_t^2 P_{r\sigma} + 2\sigma|\xi| D_t P_{r\sigma} + \frac{l(l+1)}{t^2} P_{r\sigma} \right) f_r(y) dy d\xi = 0.$$

Отсюда получаем, что для определения функций $P_{r\sigma}$ надо решить уравнение

$$\left(D_t^2 + 2\sigma|\xi| D_t + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) P_{r\sigma} = 0. \quad (3)$$

Заметим, что поведение функций $P_{r\sigma}$ при $t \rightarrow 0$ диктует постановку начальных условий. Решение уравнения (3) будем искать в виде $P_{r\sigma} = t^s z_{r\sigma}$, где s равно либо $l+1$ либо $-l$. Сделав замену переменных $\tau = -2\sigma|\xi|t$, получим для $z_{r\sigma}$ вырожденное гипергеометрическое уравнение [4]:

$$\tau z_{r\sigma}'' + (2s - \tau) z_{r\sigma}' - s z_{r\sigma} = 0. \quad (4)$$

Одним из решений этого уравнения является функция, которая в обозначениях, используемых для гипергеометрических рядов записывается как ${}_1F_1(s; 2s, \tau)$. Так как $2s$ – целое число, то уравнение (1) является частным случаем уравнений, рассмотренных в [3]. При этом, одно из двух линейно независимых решений уравнения (4) может содержать логарифмический член. Покажем, что в данном случае, ввиду того, что выполняется условие ”согласования”, логарифмический член отсутствует. В самом деле, если решение (4) искать в виде

$$z_{r\sigma} = \tau^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k,$$

то для p и a_k ($k = 0, 1, \dots$) получаем

$$a_0[p(p-1) + 2sp] = 0, \quad (5)$$

$$a_k[(p+k)(p+k-1) + 2s(p+k)] = a_{k-1}[k+p-1+s], \quad k = 1, 2, \dots$$

Из первого уравнения имеем

$$p_1 = 0 \quad \text{и} \quad p_2 = -2s + 1.$$

Поэтому, одно из двух линейно независимых решений имеет вид [4]

$$z_{r\sigma}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \tau^k = {}_1F_1(s, 2s, \tau).$$

Второй корень может принимать два значения : $p_{21} = 2l + 1$, ($s = -l$) и $p_{22} = -(2l + 1)$, ($s = l + 1$). В первом случае решение имеет вид

$$z_{r\sigma}^{21} = \tau_1^{2l+1} {}_1F_1(2l + 1, 2l + 2, \tau).$$

Это решение, как и $z_{l\sigma}^{(1)}$, быстро осцилируют при $\tau \rightarrow \infty$ [4], и поэтому не могут служить для построения амплитудной функции $P_{r\sigma}$. Поэтому рассмотрим случай p_{22} . В этом случае k -ое уравнение системы (5) принимает вид

$$a_k[(k - (2l + 1))k] = (k - l - 1)a_{k-1}.$$

Отсюда получаем, что $a_k = 0$, $k = l + 1, \dots, 2l + 1$. При $k = 2l + 1$ это равенство выполняется для произвольного значения a_{2l+1} , поэтому взяв $a_{2l+1} = 0$, получаем $a_k = 0$, $k = 2l + 1, \dots$. Таким образом, второе линейно независимое решение уравнения (4) принимает вид

$$z_{r\sigma}^{(2)} \tau^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} \tau^k,$$

где $a_k^{(2)} = \frac{(k-l-1)\dots(-l)}{k!(k-2l-1)\dots(-2l)}$, $a_0^{(2)} = 1$. Таким образом, для амплитудных функций $P_{r\sigma}$ получаем

$$P_{r\sigma} = c_{r\sigma}(\xi) t^{-l} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k, \quad r = 1, 2. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим функции

$$w_r(t) = \sum_{\sigma=\pm 1} c_{r\sigma}(\xi) t^{-l} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k, \quad r = 1, 2,$$

и начальные условия, которые позволяют однозначно определить коэффициенты $c_{r\sigma}$. Эти условия однозначно определяют начальные условия на функцию $u(t, x)$ (2), а значит и постановку начальной задачи для уравнения (1). Непосредственные вычисления показывают, что для однозначного определения коэффициентов можно взять следующие условия :

$$\begin{aligned} t^l w_1(t) |_{t=0} &= -c_{11}(2i|\xi|)^{-2l-1} + c_{1-1}(2i|\xi|)^{-2l-1} = 1, \\ t^l w_2(t) |_{t=0} &= -c_{21}(2i|\xi|)^{-2l-1} + c_{2-1}(2i|\xi|)^{-2l-1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_t \left(t^l w_1 - \sum_{\sigma=\pm 1} c_{1\sigma} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \right) \Big|_{t=0} &= 0, \\ D_t \left(t^l w_2 - \sum_{\sigma=\pm 1} c_{2\sigma} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \right) \Big|_{t=0} &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Из последних двух условий следует

$$\begin{aligned} \frac{c_{11}}{2}(2i|\xi|)^{-2iN} + \frac{c_{1-1}}{2}(2i|\xi|)^{-2iN} &= 0, \\ -\frac{i}{2} (c_{21}(2i|\xi|)^{-2l} + c_{2-1}(2i|\xi|)^{-2l}) &= 1, \end{aligned}$$

а для коэффициентов $c_{r\sigma}$ получаем

$$\begin{aligned} c_{1\sigma} &= \frac{1}{2}(-2i\sigma|\xi|)^{2l+1}, \\ c_{2\sigma} &= i(-2i\sigma|\xi|)^{2l}. \end{aligned}$$

Из формулы (2) и начальных условий (7), (8) легко получить начальные условия на решение уравнения (1)

$$t^l u |_{t=0} = f_1(x), \quad (9)$$

$$D_t (t^l u - G_1(f_1)(t, x) - G_2(f_2)(t, x)) |_{t=0} = f_2(x), \quad (10)$$

где

$$G_1(f_1)(t, x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i[\sigma t|\xi| + \langle x-y, \xi \rangle]} f_1(y) dy d\xi, \quad (11)$$

$$G_2(f_2)(t, x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i[\sigma t|\xi| + \langle x-y, \xi \rangle]} \frac{1}{-2\sigma|\xi|} f_2(y) dy d\xi. \quad (12)$$

Подставив полученные значения $c_{r\sigma}$ в (6), получаем

$$P_{1\sigma}(t, \xi) = \frac{1}{2} t^{-l} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k,$$

$$P_{2\sigma}(t, \xi) = it^{-l} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^{k-1} t^k.$$

Поэтому решение уравнения (1) с начальными условиями (9), (10) принимает вид

$$\begin{aligned} u(t, x) = & (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^{k-l} f_1(y) dy d\xi + \\ & + (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} i \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^{k-1} t^{k-l} f_2(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Упростим выражения (11), (12) и (13) поменяв порядок интегрирования и воспользовавшись формулой из [5]:

$$(2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x, \xi \rangle} \left[\frac{\sin |\xi|t}{|\xi|} \right] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \frac{\delta(|x| - t)}{t},$$

где $m = \frac{n-4}{2}$, Ω_{n-2} – площадь поверхности единичной сферы в $n-1$ -мерном пространстве и

$$(\delta(|x| - t), \varphi) = \int_{|x|=t} \varphi(x) dx.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} G_1(f_1)(t, x) &= (2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} f_1(y) \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{1}{2} (e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}) d\xi dy = \\ &= (2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} f_1(y) \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} d\xi dy = \\ &= \int_{R^{n-1}} f_1(y) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \frac{\delta(|x-y| - t)}{t} dy = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_1(y)}{t} dy. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$G_2(f_2)(t, x) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_2(y)}{t} dy.$$

Для решения $u(t, x)$ имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=0}^l (-2)^k a_k^{(2)} t^{k-l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial^{k+1}}{t\partial t^{k+1}} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_1(y)}{t} dy + \\ &+ \sum_{k=0}^l i(-2)^{k-1} a_k^{(2)} t^{k-l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_2(y)}{t} dy. \end{aligned}$$

Из последней формулы явно видна выполнимость принципа Гюйгенса для уравнения (1).

Abstract. The paper studies the initial value problem for a class of equations satisfying Huygens' principle. Since this equations have singularities at $t = 0$, it is necessary first to determine the form of the initial conditions and then the solution of the corresponding problem is constructed in a finite number of steps. Examples of natural initial data are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. E. Lagnese, K. L. Stellmacher, "A Method of Generating Classes of Huygens' Operators", J. Math. Mech., vol. 17, № 5, pp. 461 – 472, 1967.
2. А. О. Оганесян, "Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 6, стр. 33 – 50, 1986.
3. А. О. Оганесян, "Построение параметрикса начальной задачи для одного класса гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами", Докл. АН Арм.ССР, том 84, № 1, стр. 13 – 16, 1987.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие Трансцендентные Функции, I, Наука, Москва, 1973.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщённые Функции и Действия над Ними, I, Москва, Наука, 1975.

Поступила 23 апреля 2007

**УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА, ЯДРО КОТОРОГО ДОПУСКАЕТ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ
КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ЭКСПОНЕНТ**

А. Х. Хачатрян, Ц. Э. Терджян

*Институт математики НАН Армении
Армянский государственный аграрный университет
E-mail : aghavard@hotmail.ru*

Резюме. В работе рассматривается уравнение Винера–Хопфа с ядром, представляющим собой суперпозицию комплекснозначных экспонент. Это уравнение возникает в кинетической теории газов, в теории переноса излучения и др. Применением специального трехфакторного разложения исходного необратимого оператора удаётся свести уравнение к решению двух простых вольтерровых уравнений и одного интегрального уравнения Винера–Хопфа со сжимающим оператором. Доказывается также структуральная теорема существования.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt \quad (0.1)$$

с комплекснозначной ядерной функцией

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p} d\sigma(p), \quad \alpha = \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad [a, b] \subset [0, +\infty). \quad (0.2)$$

Здесь $g(x) \in L_1(0, +\infty)$ и $\sigma(p)$ – неубывающая функция на $[a, b]$. Граничными условиями являются

$$\int_a^b \frac{d\sigma(p)}{\alpha p} = \int_{-\infty}^\infty |K(x)| dx = 1. \quad (0.3)$$

Заметим, что уравнением (0.1)-(0.3) описывается ряд нестационарных задач физической кинетики : в частности, нестационарная задача переноса излучения

монохроматического рассеяния (см. [1]), нестационарное модельное кинетическое уравнение, т.е. классическая задача Рэлея (см. [2]) и др.

В настоящей работе доказывается структуральная теорема существования решения задачи (0.1)–(0.3). Подход основан на применении специального факторизационного метода.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E^+ – одно из следующих банаховых пространств $L_p(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ (обозначим $L_\infty = M^+$). Кроме того, пусть $L_1 \equiv L_1(-\infty, +\infty)$, а $C_u(0, +\infty)$ – пространство непрерывных функций, имеющих конечный предел в $+\infty$. Через Ω обозначим класс интегральных операторов Винера–Хопфа : если $\hat{K} \in \Omega$, то

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad K \in L_1. \quad (1.1)$$

Оператор $\hat{K} \in \Omega$ действует в E^+ , причём справедлива следующая оценка для нормы :

$$\|\hat{K}\|_{E^+} \leq \mu = \int_{-\infty}^\infty |K(x)|dx. \quad (1.2)$$

Через $1 - \bar{K}(s)$ обозначим символ оператора $J - \bar{K}(s)$ для $\hat{K} \in \Omega$, где

$$\bar{K}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{isx}K(x)dx$$

есть преобразование Фурье от $K(x)$. Если s_1 – нуль символа $1 - \bar{K}(s)$, то $s_2 = -s_1$ также будет нулём этого символа, т.е.

$$\bar{K}(\pm s_1) = 1 = \int_a^b \left[\frac{1}{\lambda p + is_1} + \frac{1}{\lambda p - is_1} \right] d\sigma(p). \quad (1.3)$$

Через $\Omega^\pm \subset \Omega$ обозначим подклассы следующих простых вольтеровых операторов $\hat{U}_\pm \in \Omega^\pm$:

$$(\hat{U}_+f)(x) = (\beta - is_1) \int_0^x e^{-\beta(x-t)}f(t)dt, \quad (1.4)$$

$$(\hat{U}_-f)(x) = (\beta + is_2) \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)}f(t)dt, \quad (1.5)$$

где $\beta > 0$ – произвольное число. Через $J \pm \hat{\Phi}_\pm$ обозначим обобщённые резольвенты операторов $J - \hat{U}_\pm$. Легко убедиться, что

$$(\hat{\Phi}_+f)(x) = (\beta - is_1) \int_0^x e^{-is_1(x-t)}f(t)dt, \quad (1.6)$$

$$(\hat{\Phi}_-f)(x) = (\beta - is_1) \int_x^\infty e^{-is_1(t-x)}f(t)dt, \quad f \in L_1(0, +\infty). \quad (1.7)$$

Заметим, что операторы $\hat{\Phi}_\pm$ переводят пространство $L_1(0, +\infty)$ в пространство $M(0, +\infty) \equiv L_\infty(0, +\infty)$.

§2. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде

$$(J - \widehat{K})f = g,$$

где J – единичный оператор.

Рассмотрим следующую задачу факторизации : для операторов $\widehat{K} \in \Omega$, $\widehat{U}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, найти такой оператор $\widehat{T} \in \Omega$, чтобы имело место следующее равенство в E^+

$$J - \widehat{K} = (J - \widehat{U}_-) (J - \widehat{T}) (J - \widehat{U}_+). \quad (2.1)$$

Разложение (2.1) исходит из факторизационной интерпретации “Albedo shifting” (см. [3], [4]).

Далее, введём интегральные операторы

$$\begin{aligned} (\widehat{K}_+ f)(x) &= \int_0^x K_+(x-t)f(t) dt, \\ (\widehat{K}_- f)(x) &= \int_x^\infty K_-(x-t)f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$K_+(x-t) = \begin{cases} \int_a^b e^{-\lambda(x-t)p} d\sigma(p) & \text{если } x \geq t, \\ 0 & \text{если } x < t, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$K_-(x-t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq t, \\ \int_a^b e^{-\lambda(t-x)p} d\sigma(p), & \text{если } x < t. \end{cases} \quad (2.4)$$

Очевидно, что

$$\widehat{K} = \widehat{K}_+ \oplus \widehat{K}_-. \quad (2.5)$$

Займёмся определением ядра T оператора $\widehat{T}$. Из (2.1), с учётом (2.3), (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= \widehat{K}_+ + \widehat{K}_- + \widehat{K}_+ \widehat{\Phi}_+ + \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_+ + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_+ \widehat{\Phi}_+ \\ &+ \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ - \widehat{\Phi}_- \widehat{\Phi}_+ - \widehat{\Phi}_- - \widehat{\Phi}_+. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя правило умножения интегральных операторов, после некоторых простых, но трудоёмких выкладок получаем :

$$\text{а) } [K_+ \Phi_+](x, t) = \begin{cases} (\beta - i s_1) \int_a^b \frac{[e^{-i s_1(x-t)} - e^{-\lambda p(x-t)}] d\sigma(p)}{\lambda p - i s_1}, & x \geq t \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad [K_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{c)} \quad [\Phi_- K_+] (x, t) &= \begin{cases} (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-\lambda p(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{d)} \quad [\Phi_- K_-] (x, t) &= \begin{cases} 0, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{[e^{-is_1(t-x)} - e^{\lambda p(t-x)}] d\sigma(p)}{\lambda p - is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{e)} \quad [\Phi_- K_+ \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p - is_1} \\ -(\beta - is_1)^2 \int_a^b \frac{e^{-\lambda p(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1} \\ -(\beta - is_1)^2 \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x < t. \end{cases} \\
\text{f)} \quad [\Phi_- K_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1} + (\beta - is_1)^2 \\ \times \int_a^b \frac{[e^{-is_1(t-x)} - e^{-\lambda p(t-x)}] d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x < t \end{cases} \\
\text{g)} \quad [\Phi_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} e^{-is_1(x-t)}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} e^{-is_1(t-x)}, & x < t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Докажем, например, пункт f). Заметим, что для произвольного $f \in E^+$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ f \right) (x) \\
&= (\beta - is_1)^2 \int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) \int_0^t e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \\
&= (\beta - is_1)^2 \int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) \left[\int_0^y e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \right].
\end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования в обоих интегралах будем иметь :

$$\left(\widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ f \right) (x)$$

$$\begin{aligned}
&= (\beta - is_1)^2 \int_0^x f(z) \left(\int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right) dz \\
&+ (\beta - is_1)^2 \left[\int_x^\infty f(z) \left(\int_z^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_x^z e^{-is_1(y-x)} \int_z^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right) dz \right].
\end{aligned}$$

Следовательно, подставляя выражение $K_-(y, t)$ из (2.4) и производя интегрирование с учётом (1.3), приходим к пункту f). Справедливость остальных пунктов доказывается аналогично.

Переходя от равенств операторов к равенству ядер, после соответствующих выкладок получаем, что оператор $\hat{T} \in \Omega$, а его ядро имеет вид :

$$T(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p} G_\lambda(p) d\sigma(p), \quad (2.7)$$

где

$$G_\lambda(p) = G_\lambda(p, \beta) = \frac{\lambda^2 p^2 - \beta^2}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}. \quad (2.8)$$

Требуем, чтобы

$$\rho = \int_a^b \frac{|G_\lambda(p)| d\sigma(p)}{\alpha p} < 1. \quad (2.9)$$

Тогда, в отличие от оператора $\hat{K}$ (см. (0.3)), в любом пространстве E^+ оператор $\hat{T}$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия ρ . Итак, нами доказан следующий результат :

Теорема 1. Пусть ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям (0.2) и (0.3). Тогда имеет место факторизация (2.1). Ядро $T(x)$ оператора $\hat{T} \in \Omega$ задаётся формулой (2.7). Если условия (2.9) выполняются для некоторых $\beta > 0$ и $\lambda \in C$ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$), то оператор $\hat{T}$ будет сжимающим в E^+ с коэффициентом сжатия $\rho < 1$.

§3. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ (1.7) К РЕШЕНИЮ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ (0.1)–(0.3)

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде

$$(J - \hat{K})f = g. \quad (3.1)$$

С учётом факторизации (2.1) и формулы (3.1), имеем

$$(J - \hat{U}_-)(J - \hat{T})(J - \hat{U}_+)f = g. \quad (3.2)$$

Далее, обозначаем

$$(J - \widehat{U}_-) F = g, \quad (3.3)$$

$$(J - \widehat{T}) h = F, \quad (3.4)$$

$$(J - \widehat{U}_+) f = h. \quad (3.5)$$

Заметим, что из (3.3) имеем

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty (\beta - is_1) e^{-is_1(t-x)} g(t) dt. \quad (3.6)$$

Предполагая, что

$$\nu_1(g) = \int_0^\infty x g(x) dx < +\infty,$$

имеем $F(x) \in L_1^+$. Действительно, пусть $r > 0$ – произвольное число. Тогда

$$\begin{aligned} I_r &= \int_0^r |F(x)| dx \leq \int_0^r |g(x)| dx + (\beta^2 + s_1^2) \int_0^r \int_x^\infty |g(t)| dt dx \\ &\leq |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \left[\int_0^r \int_x^r |g(t)| dt dx + \int_0^r \int_r^\infty |g(t)| dt dx \right]. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем слагаемом, получаем

$$\begin{aligned} I_r &= |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \left[\int_0^r |g(t)| t dt + \int_r^\infty |g(t)| r dt \right] \\ &\leq |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \cdot \nu_1(g) < +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $F \in L_1^+$, поскольку $r > 0$ – произвольное.

Перейдем к рассмотрению уравнения (3.4). Заметим, что оператор $\widehat{T}$ сжимающий в L_1^+ . Следовательно, из принципа сжимающих отображений следует, что существует решение $h \in L_1^+$ уравнения (3.4). Из (3.5) следует, что окончательное решение уравнения (0.1) имеет вид

$$f(x) = h(x) + (\beta - is_1) \int_0^x e^{-is_1(x-t)} h(t) dt = h(x) + H(x), \quad (3.7)$$

где $h(x) \in L_1$, $H(x) \in C_u(0, +\infty)$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть K удовлетворяет условиям (0.2), (0.3), (2.9) и $\nu_1(g) < +\infty$. Тогда существует решение задачи (0.1)-(0.3), которое имеет следующую структуру

$$f(x) = h(x) + H(x),$$

где $h(x) \in L_1^+$ и $H(x) \in C_u(0, +\infty)$.

Замечание. В качестве примера рассмотрим функцию $K(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\lambda|x|}$. Нули символа определяются из уравнения

$$1 - \overline{K}(s) = \frac{s^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda}{\lambda^2 + s^2} = 0,$$

$$T(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\lambda|x|} \left(\frac{\lambda^2 - \beta^2}{\lambda^2} \right).$$

Условие (2.9) принимает вид

$$\rho = \left| \frac{\lambda^2 - \beta^2}{\alpha\lambda} \right| < 1, \quad \lambda = \alpha + i\omega. \quad (3.8)$$

Если $\beta \in (0, \sqrt{2}\alpha)$, то условие (3.8) выполняется при $\omega \in (0, \frac{\alpha}{\sqrt{3}})$.

Авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну и Х. А. Хачатрянцу за полезные обсуждения.

Abstract. The paper studies the Wiener–Hopf equations with kernels representable as superposition of complex-valued exponents. Such kernels arise in the kinetic gas theory, in the radiation transfer, etc. By application of a special, three-factor expansion of the initial uninvertible operator, the solution of the considered equation is reduced to those of two simple Volterra equations and a Wiener–Hopf integral equation with a contractive operator. A structural existence theorem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва, 1985.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
3. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “Интегральное уравнение свёртки на полупрямой с вполне монотонным ядром”, Математический Сборник, том 187, № 10, стр. 53 – 72, 1996.
4. V. V. Ivanov, G. B. Rybicki, A. M. Kasaurov, “Albedo Shifting”, Harward Smithsonian Center for Astrophysics, Preprint Series, № 3478, 1992.

Поступила 15 апреля 2007

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 42, Номер 5, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

С. АЗИМПУР, М. ЧАНЧИ, М. ТУМАНЯН, Замечание о 4-х мерном локально конформно плоском многообразии Уолкера	3
С. А. ВАГАРШАКЯН, Об одном результате типа теоремы Г. Сегё	11
М. А. ГАЛДУНЦ, С. Г. РАФАЕЛЯН, Интерполяция и базисность в некоторых классах целых функций экспоненциального типа	17
Г. А. КАРАПЕТЯН, А. А. ДАРБИНЯН, Об индексе полуэллиптического оператора в $\mathbb{R}^n$	33
К. А. НАВАСАРДЯН, О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами	51
А. О. ОГАНЕСЯН, С. Г. РАФАЕЛЯН, Решение задачи Коши с весом для одного класса гюйгенсовых уравнений	65
А. Х. ХАЧАТРЯН, Ц. Э. ТЕРДЖЯН, Уравнение Винера-Хопфа, ядро которого допускает представление в виде суперпозиции комплекснозначных экспонент	71

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 42, No. 5, 2007

CONTENTS

S. AZIMPOUR, M. CHAICHI AND M. TOOMANIAN, A note on 4-dimensional locally conformally flat Walker manifold	3
S. A. VAGHARSHAKYAN, A result analogous to G. Szego's theorem	11
M. A. GALDUNTS AND S. G. RAFAYELYAN, Interpolation and Basicity: Several Variables Entire Functions of Exponential Type	17
G. A. KARAPETYAN AND A. A. DARBINYAN, The Index of Semielliptic Operators in $\mathbb{R}^n$	33
K. A. NAVASARDYAN, Series with Monotone Coefficients by Walsh System	51
A. H. HOVHANNISYAN AND S. G. RAFAYELYAN, Solution of Weighted Cauchy Problem for a Class of Huygens Equations	65
A. KH. KHACHATRYAN AND TS. E. TERJIYAN, Wiener-Hopf Equation: Kernels Representable as a Superposition of Complex-Valued Exponents	71