ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Сборник статей

Редактор серии :

Норайр Б. Енгибарян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящий и предыдущий выпуски журнала содержат оригинальные статьи представленные на конференции "Математическая физика и смежные вопросы" проведённой в Ереване, 24–30 сентября 2006 года.

Организаторами конференции были Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Математический Институт им. В. А. Стеклова, Российской Академии Наук.

Был создан совместный Организационный комитет в который вошли : академик РАН В. В. Козлов (председатель) ; член–корреспондент РАН И. В. Волович (заместитель председателя) ; профессор Н. Б. Енгибарян (заместитель председателя) ; академик РАН В. С. Владимиров ; академик НАН РА Н.У. Аракелян ; академик НАН РА Р. В. Амбарцумян ; академик НАН РА Э. М. Казарян ; профессор А. Г. Сергеев ; доктор физ.–мат. наук Б. Т. Батикян ; профессор А. Х. Хачатрян ; кандидат физ.–мат. наук С. В. Козырев (научный секретарь).

В работе конференции приняли участие многие известные математики из России и Армении. Результат конференции — широкий обмен информацией о недавно полученных результатах в братских странах. В этом важном мероприятии приняли участие почти все математические центры Армении. Научные темы конференции были сконцентрированы вокруг идей двух великих учёных В. А. Амбарцумяна и В. С. Владимирова. Их идеи сохранили свою важность при исследовании многих актуальных проблем современной математической физики.

Конференция была проведена при содействии фондов "Инкубатор предприятий" и "Исследовательская математика".

Норайр Б. Енгибарян — Ереван, октябрь 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 5–10

НУЛИ ЯНГА–ЛИ И ФИШЕРА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ МОДЕЛИ БЛЮМА–КАПЕЛА

Н. С. Ананикян, К. Г. Саргсян, Р. Г. Гулгазарян

Ереванский физический институт им. Алиханяна, Армения
E-mail : ghulr@yahoo.com

Резюме. Нули статистической суммы в термодинамическом пределе позволяют выявлять и описывать сингулярности термодинамических функций. В работе рассмотрены сингулярности статистической суммы в комплексной плоскости внешнего магнитного поля (нули Янга–Ли) или температуры (нули Фишера) для одномерной модели Блюме–Капела со спином 1. Получены аналитические выражения для всех трёх собственных значений трансфер-матрицы модели. Было получено распределение и плотность распределения нулей статистической суммы, исключением меньшего по модулю собственного значения. Приведены графики распределений Янга–Ли нулей для комплексной плоскости внешнего магнитного поля и фишеровских нулей для комплексной плоскости температуры. Вычислены критические индексы граничной сингулярности как для нулей Янга–Ли так и для фишеровских нулей.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1952 Янг и Ли [1] предложили теорию фазовых переходов, основанную на рассмотрении нулей статистической суммы. В работе [1] статистическая сумма модели Изинга была представлена в виде полинома от активности ($e^{H/kT}$, где H – внешнее магнитное поле, kT – температура) и изучены распределения нулей статистической суммы в комплексной плоскости активности (Янга–Ли нули). Была доказана теорема о нахождении нулей Янга–Ли ферромагнитной модели Изинга на единичной окружности (в комплексной плоскости $e^{H/kT}$). В работах [1] – [3] на основе данного подхода, было рассмотрено возникновение сингулярностей в термодинамическом пределе и получен ряд результатов о связи между распределением нулей статистической суммы в комплексной плоскости и поведением термодинамических функций.

Впоследствии были определены нули Фишера статистической суммы в комплексной плоскости температуры [4] и для ряда моделей статистической физики нули Поттса (хроматические нули) в комплексной плоскости хроматического числа Q [5]. Также были рассмотрены нули статистической суммы в калибровочных моделях [6].

В данной работе изучены распределения нулей статистической суммы и критические индексы одномерной модели Блюме–Капела.

§2. НУЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

Рассматриваемая в работе одномерная модель Блюме–Капела определяется гамильтонианом :

$$-\beta H = J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + \Delta\sum_{i=1}^{N} s_i^2 + h\sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{1}$$

где каждая переменная s_i принимает значения $0, \pm 1$ и удовлетворяет циклическому граничному условию $s_{N+1} = s_1$, причём $J, \Delta, h \in \mathbb{R}^1$. Статистическая сумма модели определяется как (см. [1]) :

$$Z_n = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H}, \tag{2}$$

где суммирование ведётся по всему множеству значений $\{s_1, s_2, \dots s_N\}$.

В рамках трансфер–матричного подхода статистическую сумму можно записать как (см. [7]) :

$$Z_N = Sp\, V^N, \tag{3}$$

где

$$V(s_i, s_{i+1}) = \exp\left\{ J s_i s_{i+1} + \Delta\frac{s_i^2 + s_{i+1}^2}{2} + h\frac{s_i + s_{i+1}}{2} \right\}$$

является трансфер–матрицей модели. Трансфер–матрица, являясь симметричной вещественной матрицей, легко диагонализируется с помощью ортогонального преобразования (см. [8], [9]). Отсюда следует, с учётом циклических свойств следа матрицы, что статистическую сумму данной системы мы можем представить в диагональном виде

$$Z_n = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \lambda_3^N, \tag{4}$$

где λ_i – собственные значения трансфер–матрицы. Характеристическое уравнение $\det(V - \lambda E) = 0$ для трансфер–матрицы сводится к кубическому уравнению

$$\begin{gathered} \lambda^3 - \left(1 + e^{J+\Delta}x\right)\lambda^2 - \left[xe^{\Delta}\left(1 - e^{J}\right) + e^{2\Delta}\left(e^{-2J} - e^{2J}\right)\right]\lambda - \\ - e^{2\Delta}\left(e^{2J} - 1\right)\left(1 - e^{-J}\right)^2 = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $x = e^{-h} + e^{h}$. Предполагая, что λ_1 максимальное по модулю собственное значение, получаем

$$Z_N = \lambda_1^N \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^N\right]. \tag{6}$$

При $N \to \infty$ (термодинамический предел), вклад в сумму (6) вносят лишь равные наибольшему по модулю собственные значения. При термодинамическом пределе остальными членами суммы отличными от единицы в скобках можно пренебречь. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть J, Δ, h – комплексные числа и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Тогда нули статистической суммы определяются из уравнения*

$$F(h, \Delta, J, \varphi) = 0,$$

$$F(h, \Delta, J, \varphi) \equiv -a_0^2\left(1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}\right)^3 - a_1^2 e^{2i\varphi}\left[-a_0^2 e^{i\varphi} + a_1\left(1 + e^{i\varphi}\right)^2\right] +$$

$$+a_0 a_2 e^{i\varphi}\left[-a_2^2 e^{i\varphi}\left(1 + e^{i\varphi}\right)^2 + a_1\left(1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}\right)\left(1 + 4e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}\right)\right], \tag{7}$$

где

$$\varphi \equiv \varphi_p = \frac{2p+1}{N}\pi, \quad p = 0, \ldots, N-1. \tag{8}$$

Доказательство. В случае $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$ мы можем пренебречь третьим членом суммы (6) и записать её в виде $Z_N = \lambda_1^N\left(1 + e^{i\varphi N}\right)$, где φ – разность фаз между λ_1 и λ_2. Так как нас интересуют нули статистической суммы ($Z_N = 0$), то отсюда легко получить условие на разность фаз между максимальными собственными значениями трансфер–матрицы в виде (8).

Так как характеристическая функция кубическая, то получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_2 \equiv 1 + e^{J+\Delta}x,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = a_1 \equiv xe^{\Delta}(e^J - 1) + e^{2\Delta}\left(e^{2J} - e^{-2J}\right),$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a_0 \equiv e^{2\Delta}\left(1 - e^{2J}\right)\left(1 - e^{-J}\right)^2. \tag{9}$$

Учитывая, что $\lambda_1 = \lambda_2 e^{i\varphi}$, после небольших преобразований получаем уравнение (7).

Решая алгебраическое уравнение четвёртой степени (7) относительно $\mu = e^h \in \mathbb{C}^1$, при заданных значениях параметров $J, \Delta \in \mathbb{R}^1$ и углах φ, определяемых из условия (8), получаем нули Янга–Ли в комплексной плоскости внешнего магнитного поля.

Для удобства рассмотрения фишеровских нулей, переопределим параметры системы как $h = J\overline{h}$ и $\Delta = J\overline{\Delta}$. Тогда решениями уравнения (7) по $c = e^{-J} \in \mathbb{C}^1$ при заданных значениях $\overline{h}, \overline{\Delta} \in \mathbb{R}^1$ и углах φ, определяемых из условия (8), будут фишеровскими нулями в комплексной плоскости температуры.

Если $\overline{h}, \overline{\Delta} \in \mathbb{Q}$, т.е. рациональные числа, то уравнение (7) сводится к алгебраическому уравнению степени выше четвёртой. В общем случае оно трансцендентно. Теорема доказана.

Примеры распределений нулей Янга–Ли в комплексной плоскости внешнего поля приведены на Рис. 1. Как видно из распределений, в рассматриваемых случаях не выполняется теорема Янга–Ли о расположении нулей на единичной окружности [1, 3]. На Рис. 2 даны примеры численных решений уравнения (7) для фишеровских нулей.

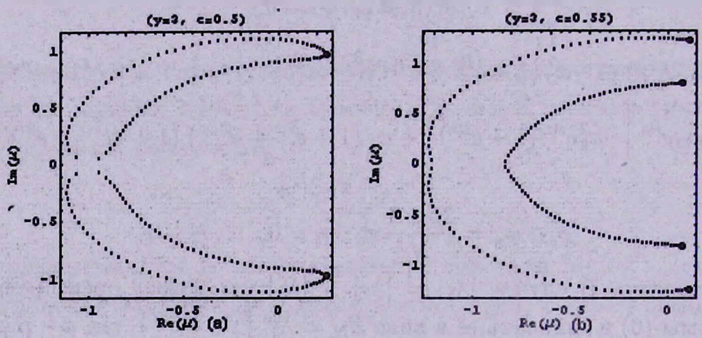

Рис. 1 Примеры распределений нулей Янга–Ли в комплексной плоскости внешнего магнитного поля для $N = 100$. Жирными точками обозначены граничные точки. Используются обозначения $c = e^{-J}$, $y = e^{\Delta}$, $\mu = e^{h}$.

§ 3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

Определение 1. Пусть $\mu(\varphi)$ – взаимно-однозначное, гладкое отображение множества значений параметра $\varphi \in \mathbb{R}^1$ во множество комплексных нулей статистической суммы (Янга–Ли, фишеровские, хроматические нули). Функцию

$$g(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \operatorname{Re} \mu}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Im} \mu}{\partial \varphi}\right)^2}} \tag{10}$$

мы назовём плотностью нулей заданной статистической суммы.

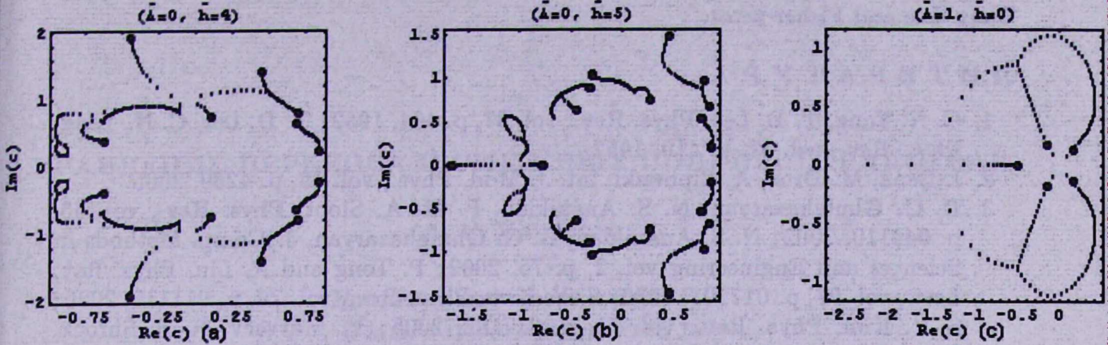

Рис. 2 Примеры распределений фишеровских нулей в комплексной плоскости внешнего магнитного поля для $N = 1000$. Жирными точками обозначены граничные точки.

Для заданного взаимно–однозначного отображения $\mu(\varphi)$, можно определить взаимно–однозначное гладкое отображение $\vartheta(\varphi)$ на интервале $\varphi \in \mathbb{R}^1$, где ϑ есть угол в полярных координатах точки $\mu(\varphi)$ на комплексной плоскости.

Определение 2. Если плотность распределения нулей статистической суммы имеет сингулярность вида $g(\varphi(\theta)) \propto |\theta - \theta_e|^\sigma$ в достаточно малой окрестности точки ϑ_e, то мы назовём такую сингулярность **граничной сингулярностью**, $\mu(\vartheta_e)$ – **граничной точкой**, а степень $\sigma \in \mathbb{R}^1$ – **критическим индексом** данной сингулярности.

Мы пока не получили общее аналитическое доказательство, тем не менее численные расчёты показывают, что граничные точки определяются из уравнения (7) при значении параметра $\varphi = 0$.

В граничных точках при различных значениях J, Δ и h, путём разложения уравнения (7) в ряд Тейлора в окрестности точки $\varphi = 0$, получены Янга–Ли и фишеровские граничные сингулярности с критическим индексом равным $\sigma = 1/2$.

Abstract. The zeros of a partition function permit to reveal the singularities of thermodynamical functions. The paper considers singularities of the partition function in the complex plane of the outer magnetic field (Yang–Lee zeros) or of the temperature (Fisher zeros) for the Blume–Capel one-dimensional model with spin 1 and obtains analytical expressions for all three eigenvalues of the transfer matrix. The distribution and the distribution density of the partition function are obtained by excluding the eigenvalue that is the least by modulus. The graphs of Yang–Lee zero distributions of the outer magnetic field and the graphs of the Fisher zeros of

temperatures are given together with the critical indices of the edge singularity for Yang–Lee and Fisher zeros.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. N. Yang, T. D. Lee, Phys. Rev., vol. 87, p. 404, 1952; T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev., vol. 87, p. 410, 1952.
2. I. Bena, M. Droz, A. Lipowski, Int. J. Mod. Phys., vol. 19, p. 4269, 2005.
3. R. G. Ghulghazaryan, N. S. Ananikian, P. M. A. Sloot, Phys. Rev., vol. 66, p. 046110, 2002; N. S. Ananikian, R. G. Ghulghazaryan, J. Comp. Methods in Sciences and Engineering vol. 2, p. 75, 2002; P. Tong and X. Liu, Phys. Rev. Lett., vol. 97, p. 017201, 2006; S.-Y. Kim, Phys. Rev., vol. 74, p. 011119, 2006; S.-Y. Kim, Phys. Rev., vol. 71, p. 017102, 2005; V. Matveev, R. S. Shrock, Phys. Rev., vol. 53, p. 254, 1996; К. Г. Саргсян, Л. Н. Ананикян, Изв. НАН РА, Физика, том 41, стр. 333, 2006.
4. Д. Рюэль, Статистическая механика. Строгие результаты, Мир, Москва, 1971.
5. M. E. Fisher, Lectures in Theoretical Physics. vol. 7C ed. W. E. Brittin (Boulder, CO : University of Colorado Press, 1965.
6. J. Salas, A. D. Sokal, J. Stat. Phys., 104, 314 (2001); N. Biggs, J. Comb. Theory, B 82, 19 (2001); R.G. Ghulghazaryan, N.S. Ananikian. J.Phys. A 36, 6297 (2003).
7. M. A. Stephanov, Phys. Rev. D 73, 094508 (2006); H. R. Christiansen, A. C. Petkou et al, Phys. Rev. D 62, 025018 (2000); В. С. Погосян, Изв. НАН РА, Физика, том 40, стр. 235, 2005.
8. Д. Рюэль, Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. РХД, 2002.
9. Р. Беллман, Введение в теорию матриц, Наука, Москва, 1976.

Поступила 2 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 11–22

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В СМЕЖНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН РА
E-mail : anibarseghyan@mail.ru

Резюме. Рассматривается следующее уравнение свёртки на всей прямой

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt$$

где $\lambda(t)$ – кусочно постоянная функция такая, что $\lambda(t) = \lambda_1$, $0 \leq \lambda_1 < 1$ при $t < 0$ и $\lambda(t) = \lambda_2$, $0 < \lambda_2 \leq 1$ при $t \geq 0$. Ядерная функция K предполагается чётной и представляется в виде суперпозиции экспонент. Такие уравнения играют важную роль в теории переноса нейтронов, астрофизике, атмосферной оптике и др. В статье развивается факторизационный метод решения уравнения, основанный на применении уравнения В. А. Амбарцумяна. Решение сводится к линейной алгебраической системе интегральных уравнений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Расчёт поля излучения в среде, состоящей из двух однородных полупространств, относится к классическим задачам теории переноса излучения. Наряду с приложениями в теории ядерных реакторов (см. [1]), эта задача играет важную роль в астрофизике, атмосферной оптике (система атмосфера-океан) (см. [2]) и др.). Наиболее простой и распространённой формой задачи является случай, когда полупространства отличаются друг от друга лишь значением альбедо рассеяния λ. В случае изотропного моноэнергетического рассеяния, некоторых задач анизотропного рассеяния и рассеяния в спектральной линии при полном перераспределении по частотам, задача сводится к следующему интегральному уравнению свёртки на всей прямой :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - t)\lambda(t)S(t)\, dt. \tag{1.1}$$

Здесь g – заданная функция первичных источников, S – искомая функция источника и $\lambda(t)$ – кусочно постоянная функция следующего вида

$$\lambda(t) = \lambda_1, \quad 0 \le \lambda_1 < 1 \quad \text{при} \quad t < 0 \quad \text{и} \quad \lambda(t) = \lambda_2, \quad 0 < \lambda_2 \le 1 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \tag{1.2}$$

Ядерная функция представлена в следующем виде суперпозиции экспонент :

$$K(\tau) = \int_a^b e^{-|\tau|s} d\sigma(s), \tag{1.3}$$

где σ – неубывающая функция на $(a, b) \subset (0, \infty)$ такая, что

$$0 \le K(\tau) \in L_1(-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, d\tau = 2\int_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma(s) = 1. \tag{1.4}$$

Не умаляя общности можно считать, что $\lambda_1 \le \lambda_2$, так как, в противном случае, можно добиться выполнения этого неравенства путём изменения ориентации вещественной оси.

Отметим, что при $\lambda_1 = 0$ уравнение (1.1) обращается в уравнение Винера–Хопфа, охватывающее основное интегральное уравнение переноса. Наиболее действенные методы его решения основаны на применении известного уравнения В. А. Амбарцумяна (см. [2] – [4]) :

$$\varphi(s) = 1 + \lambda\varphi(s) \int_a^b \frac{1}{s + p}\varphi(p)\, d\sigma(p). \tag{1.5}$$

Достаточно сложным в прикладном плане является случай, когда $\lambda_2 = 1$ или числа $\lambda_{1,2}$ близки к 1, т.е. в каждом из полупространств происходит почти консервативный процесс. Если $\lambda_2 = 1$, то в правом полупространстве $t \ge 0$ происходит чистое рассеяние. Тогда независимо от значения λ_1 уравнение (1.1) является уравнением с оператором, необратимым в пространствах $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \le p \le \infty$. Тем не менее, тогда это уравнение может обладать физическим (положительным) решением, которое либо ограничено, либо линейно растёт к ∞. Так обстоит дело в случае известной проблемы Милна в теории переноса (см. [3]).

Изложенный в [1] метод решения уравнения (1.1) основан на одном обобщении метода Винера–Хопфа. Этот метод не применяется из-за больших сложностей, связанных с его реализацией.

Одним из основных методов решения задач переноса в смежных полупространствах является метод сложения слоёв В. Амбарцумяна, основанный на построении так называемых операторов отражения для каждого из полупространств (полуосей), через соответствующие функции Амбарцумяна. Этот подход имеет достаточно общий характер и является особенно эффективным в случае, когда альбедо рассеяния хотя бы в одном из полупространств достаточно отделено от 1. Другой подход к решению задачи может быть основан на факторизационном методе работы [5], с привлечением уравнения В. Амбарцумяна.

В работе автора [6] развит метод решения уравнения переноса в слое конечной толщины, исходящий из факторизационных методов Н. Б. Енгибаряна. В работе автора [7] этот метод был обобщён на случай двухслойной среды, где задача описывается уравнением (1.1), в котором $\lambda(t)$ – кусочно постоянная функция вида :

$$\lambda(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0, \quad \lambda(t)=\lambda_1 \quad \text{при} \quad t\in[0,r] \quad \text{и} \quad \lambda(t)=\lambda_2 \quad \text{при} \quad t>r.$$

В настоящей работе метод [7] распространяется на уравнение (1.1) – (1.2). Предлагаемый подход выглядит достаточно эффективным, когда $|\lambda_1-\lambda_2|$ достаточно мало. Тогда, в отличие от других методов, процедура решения существенно упрощается.

Мы сосредоточим наше внимание на описание метода. Некоторые вопросы, относящиеся к единственности решения и численной реализации предлагаемой схемы, будут рассмотрены схематически.

§2. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

2.1. О разрешимости уравнения (1.1). Пусть E – одно из банаховых пространств $L_p(-\infty,\infty)$, $1\le p\le\infty$. Здесь $L_\infty=M$ – пространство ограниченных (в существенном) функций. Через E^+ обозначается одно из банаховых пространств $L_p(0,\infty)$, $1\le p\le\infty$, и $C_0[0,\infty)$, состоящее из функций, непрерывных на $[0,\infty)$ и стремящихся к 0 в ∞. Пусть $\widehat{K}$ – интегральный оператор на всей прямой

$$\left(\widehat{K}f\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)f(t)\,dt \tag{2.1}$$

действующий в E и в ряде других пространств, причём $\|\widehat{K}\|_E=1$. Обозначим через $\widehat{\lambda}$ оператор умножения на функцию $\lambda(t)$: $\left(\widehat{\lambda}f\right)(t)=\lambda(t)f(t)$. Ясно, что этот оператор действует в любом из пространств E, причём $\|\widehat{\lambda}\|_E\le\lambda_0$, где $\lambda_0=\max(\lambda_1,\lambda_2)$. Поэтому имеет место оценка

$$\|\widehat{K}\widehat{\lambda}\|\le\lambda_0\,. \tag{2.2}$$

Пусть $\lambda_2 < 1$, то есть в обеих полупространствах происходит диссипативный процесс. Тогда (1.1) является уравнением с сжимающим оператором, с коэффициентом сжатия $\lambda_0 < 1$, и обладает единственным решением $S \in E$ для любого $g \in E$. Если, $g \geq 0$, то $S \geq 0$.

Пусть теперь $\lambda_2 = 1$. Тогда $\lambda_0 = 1$, а неравенство (2.2) обращается в равенство для любого $\lambda_1 \in [0, 1)$. В этом критическом случае, разрешимость уравнения (1.1) для $g \in L_1$ можно доказать различными способами. В частности, из результатов работы [8] следует, что если $0 \leq g \in L_1$, то уравнение (1.1) обладает минимальным положительным решением $S \geq 0$, интегрируемым на каждом конечном интервале $(-\infty, r)$, $r < +\infty$. Асимптотику $S(\tau)$ при $\tau \to \infty$ можно получить, используя результаты работы [5]. Таким путём можно показать, что

$$g \in L_1 \cap M \Rightarrow S \dot{\in} M \quad \text{и} \quad g \in L_1 \Rightarrow S \in M + L_1. \tag{2.3}$$

2.2. Вспомогательная факторизация на всей прямой и полупрямой. Нами будут использованы решения двух известных задач факторизации. Начнём с рассмотрения уравнения В. Амбарцумяна (1.5). При $0 \leq \lambda \leq 1$ уравнение (1.5) обладает так называемым главным (или основным) решением $\varphi = \varphi(s, \lambda)$ (функция Амбарцумяна), которое является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением. Функция φ обладает следующими свойствами :

$$\begin{gathered}\varphi \in C(0, \infty), \quad \varphi(s) \downarrow \text{ по } s, \quad \varphi(0+) = (1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}(\leq +\infty), \quad \varphi(+\infty) = 1, \\ \int_a^b \frac{1}{s}\varphi(s)d\sigma(s) = 1 - \sqrt{1-\lambda}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Обозначаем через $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ функции В. Амбарцумяна, соответствующие значениям $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, где $\lambda_{1,2}$ суть числа, фигурирующие в (1.2). Они определяются из уравнений

$$\varphi_k(s) = 1 + \lambda_k \varphi_k(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi_k(p)\, d\sigma(p), \quad k = 1, 2. \tag{2.5}$$

Введём функции

$$V_k(\tau) = \int_a^b e^{-\tau s} \varphi_k(s)\, d\sigma(s), \quad k = 1, 2. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что $V_k \in L_1^+$. Функции V_k вполне монотонны на $(0, \infty)$ и имеют место равенства

$$\int_0^\infty V_k(\tau)d\tau = 1 - \sqrt{1-\lambda_k}. \tag{2.7}$$

Нами будут использованы также функции Φ_k, $k = 1, 2$, определяемые из следующих уравнений восстановления

$$\Phi_k(\tau) = V_k(\tau) + \int_0^\tau V_k(\tau - t)\Phi_k(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) однозначно разрешимы в классе $L^{loc}(0, \infty)$ функций, локально интегрируемых на $[0, \infty)$, т.е. интегрируемых на $(0, r)$ для всех $r < +\infty$, причём $0 \leq \Phi_k \in L^{loc}(0, \infty)$. Из (2.7) следует, что

$$\Phi_1 \in L_1(0, \infty) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \Phi_1(t)\, dt = (1 - \lambda_1)^{-1/2} - 1. \tag{2.9}$$

Аналогичными свойствами обладает Φ_2 при $\lambda_2 < 1$. При $\lambda_2 \leq 1$ имеют место следующее равенство и асимптотика :

$$\int_0^\infty \Phi_2(t)dt = (1-\lambda_2)^{-1/2}-1, \ (\leq +\infty) \quad \text{и} \quad \int_0^\tau \Phi_2(t)\, dt = \mathcal{O}(\tau), \quad \tau \to \infty. \tag{2.10}$$

Преобразование Лапласа от функций Φ_k связаны с функциями φ_k соотношением

$$\varphi_k(s) = 1 + \int_0^\infty e^{-ts}\Phi_k(t)dt, \quad s > 0, \quad k = 1, 2. \tag{2.11}$$

Имеет место представление (см. [9])

$$\Phi_k(\tau) = \int_0^b e^{-\tau p}\, d\omega_k(p), \tag{2.12}$$

где ω_k – неубывающие функции такие, что

$$\int_0^b \frac{1}{p}\, d\omega_k(p) = (1 - \lambda_k)^{-1/2} - 1(\leq \infty).$$

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи факторизации :

а) **Факторизация Винера–Хопфа.** Пусть $\lambda_2 \in [0, 1]$ и $\widehat{K}_2$ – интегральный оператор Винера–Хопфа

$$\left(\widehat{K}_2 f\right)(\tau) = \int_0^\infty K(\tau - t)f(t)\, dt$$

с ядерной функцией (1.3), удовлетворяющей условию (1.4). Тогда имеет место факторизация (см. [4]) :

$$I - \lambda_2\widehat{K}_2 = \left(I - \widehat{V}_2^-\right)\left(I - \widehat{V}_2^+\right), \tag{2.13}$$

где $\widehat{V}_2^{\pm}$ – формально вольтерровые операторы вида

$$\left(\widehat{V}_2^{-} f\right)(\tau)=\int_{\tau}^{\infty} V_2(t-\tau) f(t)\, dt, \quad \left(\widehat{V}_2^{+} f\right)(\tau)=\int_0^{\tau} V_2(\tau-t) f(t)\, dt. \tag{2.14}$$

Функция $V_2 \in L_1(0,\infty)$ определяется согласно (2.6). При $\lambda_2 < 1$ операторы $\left(I-\widehat{V}_2^{\pm}\right)$ обратимы в пространствах E :

$$\left(I-\widehat{V}_2^{\pm}\right)^{-1}=I+\widehat{\Phi}_2^{\pm}, \tag{2.15}$$

где

$$\left(\widehat{\Phi}_2^{+} f\right)(\tau)=\int_0^{\tau} \Phi_2(\tau-t) f(t)\, dt \quad \text{и} \quad \left(\widehat{\Phi}_2^{-} f\right)(\tau)=\int_{\tau}^{\infty} \Phi_2(t-\tau) f(t)\, dt. \tag{2.16}$$

Резольвентная функция Φ_2 операторов $I-\widehat{V}_2^{\pm}$ определяется из (2.8) и обладает свойствами (2.10)–(2.12). В консервативном случае $\lambda_2 = 1$, формула (2.15) остаётся в силе как равенство операторов, переводящих L_1^{+} в $M^{+}+L_1^{+}$ и $M^{+}\cap L_1^{+}$ в M^{+}.

b) **Факторизация на всей прямой.** Пусть $\lambda_1 \in [0,1)$ и $\widehat{K}_1 = \widehat{K}$ – интегральный оператор (2.1) на всей прямой, с ядерной функцией (1.3). Имеет место факторизация (см. [4]) :

$$I-\lambda_1 \widehat{K}_1=\left(I-\widehat{V}_1^{-}\right)\left(I-\widehat{V}_1^{+}\right), \tag{2.17}$$

где $\widehat{V}_1^{\pm}$ суть вольтерровские операторы вида :

$$\left(\widehat{V}_1^{-} f\right)(\tau)=\int_{\tau}^{\infty} V_1(t-\tau) f(t)\, dt \quad \text{и} \quad \left(\widehat{V}_1^{+} f\right)(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau} V_1(\tau-t) f(t)\, dt, \tag{2.18}$$

причём функция V_1 определяется согласно (2.6). При $\lambda_1 \in [0,1)$ операторы $I-\widehat{V}_1^{\pm}$ обратимы в пространствах E :

$$\left(I-\widehat{V}_1^{\pm}\right)^{-1}=I+\widehat{\Phi}_1^{\pm}, \tag{2.19}$$

где

$$\left(\widehat{\Phi}_1^{+} f\right)(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau} \Phi_1(\tau-t) f(t)\, dt \quad \text{и} \quad \left(\widehat{\Phi}_1^{-} f\right)(\tau)=\int_{\tau}^{\infty} \Phi_1(t-\tau) f(t)\, dt.$$

Резольвентная функция $\Phi_1 \in L_1(0,\infty)$ определяется из (2.8).

2.3. Факторизация уравнения (1.1). Рассмотрим характеристические функции

$$h_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,\infty), \\ 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0), \end{cases} \qquad h_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0,\infty), \\ 1 & \text{при } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Обозначим через $\widehat{h}_+$ и $\widehat{h}_-$ операторы умножения на соответствующие характеристические функции $h_+(x)$ или $h_-(x)$. Имеем

$$\widehat{h}_+ + \widehat{h}_- = I.$$

Перепишем уравнение (1.1) в операторной форме

$$\left(I - \lambda_1 \widehat{K}\widehat{h}_- - \lambda_2 \widehat{K}\widehat{h}_+\right) S = g. \tag{2.20}$$

Ниже нами будет построена факторизация специального вида для оператора, фигурирующего в левой части (2.20). Мы воспользуемся разложением (2.17) для оператора $I - \lambda_1 \widehat{K}$ и следующей формулой

$$\lambda_1 \left(I - \widehat{V}_1^-\right)^{-1} \widehat{K}_1 = \widehat{V}_1^+ + \widehat{\Phi}_1^-, \tag{2.21}$$

вытекающей из (2.17). С учётом (2.17) и (2.21) имеем

$$I - \lambda_1 \widehat{K}\widehat{h}_- - \lambda_2 \widehat{K}\widehat{h}_+ = I - \lambda_1 \widehat{K} - (\lambda_2 - \lambda_1)\widehat{K}\widehat{h}_+ = \left(I - \widehat{V}_1^-\right)\left(I - \widehat{V}_1^+\right) -$$

$$-(\lambda_2 - \lambda_1)\widehat{K}\widehat{h}_+ = \left(I - \widehat{V}_1^-\right)\left(I - \widehat{V}_1^+ + \mu \widehat{V}_1^+ \widehat{h}_+ - \mu \widehat{\Phi}_1^- \widehat{h}_+\right),$$

где

$$\mu = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1. \tag{2.22}$$

Лемма 1. *Имеет место разложение :*

$$I - \lambda_1 \widehat{K}\widehat{h}_- - \lambda_2 \widehat{K}\widehat{h}_+ = \left(I - \widehat{V}_1^-\right)\left(I - \widehat{V}_1^+ + \mu \widehat{V}_1^+ \widehat{h}_+ - \mu \widehat{\Phi}_1^- \widehat{h}_+\right). \tag{2.23}$$

§3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Рассмотрим уравнение (1.1) при $g \in L_1(-\infty, +\infty)$. Применив разложение (2.23) к уравнению (2.20) и обратив оператор $I - \widehat{V}_1^-$ по формуле (2.19), приходим к следующему уравнению, эквивалентному исходному

$$\left(I - \widehat{V}_1^+ + \mu \widehat{V}_1^+ \widehat{h}_+ - \mu \widehat{\Phi}_1^- \widehat{h}_+\right) S = g_1, \tag{3.1}$$

где

$$g_1 = \left(I - \widehat{V}_1^-\right)^{-1} g = \left(I + \widehat{\Phi}_1^-\right) g,$$

то есть

$$g_1(\tau) = g(\tau) + \int_\tau^\infty \Phi_1(t-\tau) g(t)\, dt \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Перепишем уравнение (3.1) в раскрытом виде :

$$S(\tau) = g_1(\tau) + \int_{-\infty}^\tau V_1(\tau - t) S(t)\, dt - \mu \int_{-\infty}^\tau V_1(\tau - t) h_+(t) S(t)\, dt + \\ + \mu \int_\tau^\infty \Phi_1(t-\tau) h_+(t) S(t)\, dt. \tag{3.2}$$

Введём обозначения

$$S(\pm\tau) = S^\pm(\tau), \quad g_1(\pm\tau) = g_1^\pm(\tau) \quad \text{и} \quad g(\pm\tau) = g^\pm(\tau), \quad \tau > 0.$$

Полагая в (1.1), $\tau > 0$ с учётом чётности функции K будем иметь

$$S^+(\tau) = g^+(\tau) + \lambda_1 \int_0^\infty K(\tau + t) S^-(t)\, dt + \lambda_2 \int_0^\infty K(\tau - t) S^+(t)\, dt. \tag{3.3}$$

При $\tau < 0$ из (3.2) получаем

$$S^-(\tau) = g_1^-(\tau) + \int_\tau^\infty V_1(t-\tau) S^-(t)\, dt + \mu \int_0^\infty \Phi_1(t+\tau) S^+(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Доказано следующее утверждение :

Лемма 2. *Функции S^+ и S^- удовлетворяют системе интегральных уравнений (3.3), (3.4).*

Используя подход работы [6] можно показать, что система (3.3), (3.4) эквивалентна исходному уравнению (1.1).

Займёмся решением системы (3.3), (3.4). Подставляя в (3.4) вместо Φ_1 её выражение (2.12), получаем

$$S^-(\tau) = g_1^-(\tau) + \mu \int_0^b e^{-\tau p} \beta(p)\, d\omega_1(p) + \int_\tau^\infty V_1(t-\tau) S^-(t)\, dt, \quad \tau > 0, \tag{3.5}$$

где β – преобразование Лапласа от S^+ :

$$\beta(p) = \overline{S}^+(p) = \int_0^\infty e^{-tp} S^+(t)\, dt. \tag{3.6}$$

При $\lambda_2 < 1$ имеем $S^+ \in L_1(0, \infty)$. Тогда $\beta \in C_0[0, \infty)$. Если же $\lambda_2 = 1$, то $S^+ \in M^+ + L_1^+$ а функция $\beta \in C_0(0, \infty)$ и может иметь особенность в точке O.

Наряду с (3.5) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение (верхнее уравнение восстановление) в котором $s > 0$ играет роль параметра :

$$F(\tau, s) = e^{-\tau s} + \int_{\tau}^{\infty} V_1(t-\tau)F(t,s)\,dt, \quad \tau > 0. \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.7) имеет вид (см. [4])

$$F(\tau, p) = \varphi_1(p)e^{-\tau p}.$$

При известном β, (3.5) представляет собой верхнее уравнение восстановления относительно S^- (на положительной полуоси). Второе (интегральное) слагаемое свободного члена является суперпозицией экспонент, т.е. свободных членов уравнения (3.7). Сравнение свободных членов уравнений (3.5) и (3.7) приводит к равенству

$$S^-(\tau) = g_2(\tau) + \mu \int_0^b F(\tau,p)\beta(p)\,d\omega_1(p), \quad \tau > 0, \tag{3.8}$$

где

$$g_2(\tau) = g_1^-(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \Phi_1(t-\tau)g_1^-(t)dt.$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.3). Подставляя в (3.3) вместо K её выражение (1.3), получаем

$$S^+(\tau) = g^+(\tau) + \lambda_1 \int_a^b e^{-\tau s}\alpha(s)\,d\sigma(s) + \lambda_2 \int_0^{\infty} K(\tau-t)S^+(t)\,dt, \tag{3.9}$$

где α – преобразование Лапласа от S^- :

$$\alpha(s) = \overline{S}^{\,-}(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts}S^-(t)\,dt. \tag{3.10}$$

Поскольку $\lambda_1 < 1$, то $\alpha \in C_0[0,\infty)$. При известном α, (3.9) представляет собой уравнение Винера–Хопфа относительно S^+, второе слагаемое свободного члена которого представлено в виде суперпозиции экспонент. Поэтому его основное решение имеет вид (см. [4])

$$S^+(\tau) = g_0(\tau) + \lambda_1 \int_a^b P(\tau,s)\alpha(s)\,d\sigma(s), \quad \tau > 0, \tag{3.11}$$

где $g_0 = \left(I + \widehat{\Phi}_2^+\right)\left(I + \widehat{\Phi}_2^-\right)g^+$. Здесь $\widehat{\Phi}_2^{\pm}$ суть резольвентные операторы, определяемые согласно (2.16). Функция P является решением следующего уравнения Винера–Хопфа (основного интегрального уравнения переноса) :

$$P(\tau, s) = e^{-\tau s} + \lambda_2 \int_0^{\infty} K(\tau-t)P(t,s)\,dt. \tag{3.12}$$

Имеет место следующая формула и оценка (см. [3] и Лемму 6.2 в [4]) :

$$P(\tau,s)=\varphi_2(s)e^{-\tau s}\left(1+\int_0^\tau \Phi_2(y)e^{ys}\,dy\right), \tag{3.13}$$

$$\int_a^b P(\tau,s)\,d\sigma(s)\le\lambda_2. \tag{3.14}$$

Применив преобразование Лапласа к обеим частям в (3.11), получаем

$$\beta(p)=\beta_0(p)+\lambda_1\int_a^b R(p,s)\alpha(s)\,d\sigma(s), \tag{3.15}$$

где

$$\beta_0(p)=\int_0^\infty e^{-\tau p}g_0(\tau)\,d\tau,$$

$$R(p,s)=\int_0^\infty P(\tau,s)e^{-\tau p}\,d\tau=\frac{1}{p+s}\varphi_2(p)\varphi_2(s). \tag{3.16}$$

Нами получено известное выражение для ядра оператора отражения из полупространства $\tau>0$. Из (3.13) вытекает оценка

$$\int_a^b R(p,s)\,d\sigma(s)\le\lambda_2/p. \tag{3.17}$$

Пусть $\widehat{R}$ – интегральный оператор, фигурирующий в правой части (3.15) :

$$\left(\widehat{R}\alpha\right)(p)=\lambda_1\int_a^b R(p,s)\alpha(s)\,d\sigma(s). \tag{3.18}$$

Рассмотрим этот оператор в пространстве $C_0[0,\infty)$. Используя оценку (3.17), легко проверить, что оператор $\widehat{R}$ отображает пространство $C_0[0,\infty)$ в пространство $\widetilde{C}[0,\infty]$ функций вида $f_1(p)=\frac{1}{p}f(p)$, где $f\in C_0[0,\infty)$ с конечной нормой $\max_{p\in[0,\infty]}|f(p)|<\infty$. Имеет место оценка $\|\widehat{R}\|\le\lambda_1<1$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям (3.8), приходим ко второму соотношению между функциями α и β :

$$\alpha(s)=\alpha_0(s)+\mu\int_0^b U(s,p)\beta(p)\,d\omega_1(p), \tag{3.19}$$

где

$$\alpha_0(s)=\int_0^\infty e^{-\tau s}g_2(\tau)\,d\tau,$$

$$U(s,p)=\int_0^\infty e^{-\tau s}F(\tau,p)\,d\tau=\frac{1}{p+s}\varphi_1(p). \tag{3.20}$$

Пусть $\widehat{U}$ – интегральный оператор, фигурирующий в правой части (3.19) :

$$\left(\widehat{U}\beta\right)(s)=\mu\int_0^b U(s,p)\beta(p)\,d\omega_1(p).$$

Можно показать, что оператор $\widehat{U}$ переводит $\widetilde{C}[0,\infty]$ в $C_0[0,\infty)$.

На основании сказанного, решение (α,β) системы (3.15), (3.19) можно искать в $C_0[0,\infty)\times\widetilde{C}[0,\infty]$. В этом пространстве, разрешимость системы (3.15), (3.19) при $\lambda_2<1$ следует из (однозначной) разрешимости системы (3.3), (3.4) в $L_1^+\times L_1^+$. Случай $\lambda_2=1$ нуждается в дополнительном исследовании. Единственность решения системы (3.15), (3.19) можно доказать используя тот факт, что решение (S^+,S^-) системы (3.3), (3.4) и решение (α,β) системы (3.15), (3.19) взаимно однозначно определяют друг друга по формулам (3.6), (3.8), (3.10), (3.11).

§4. СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

На основании полученных результатов можно сформулировать следующую процедуру решения уравнения (1.1).

a) Решаются уравнения Амбарцумяна (2.5).

b) Строится решение уравнения (2.8) относительно Φ_1, Φ_2 в виде (2.12). Меры $\omega_{1,2}$ могут быть приближенно построены по методу работы [10].

c) Решается система (3.15), (3.19) относительно (α,β).

d) Определяются функции $S^{\pm}$ по формулам (3.8), (3.11).

Важной особенностью предлагаемой процедуры является её полная алгебраизация, которая заключается в следующем : при замене функции σ кусочно постоянной функцией, уравнения В. Амбарцумяна (2.5) сводятся к конечным нелинейным алгебраическим системам, которые легко решаются простыми итерациями, а система (3.15), (3.19) сводится к конечной линейной алгебраической системе.

Другой особенностью предлагаемой процедуры является то обстоятельство, что норма оператора $\widehat{U}$ стремится к нулю при $\mu\to 0$, что существенно упрощает решение системы (3.15), (3.19) в случае, когда $|\lambda_1-\lambda_2|$ достаточно мало.

Автор выражает благодарность Профессору Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

Abstract. The convolution equation on the entire line,

$$S(\tau)=g(\tau)+\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau-t)\lambda(t)S(t)dt$$

is considered, where $\lambda(t)$ is a piecewise constant function such that $\lambda(t) = \lambda_1$, $0 \leq \lambda_1 < 1$ for $t < 0$ and $\lambda(t) = \lambda_2$, $0 < \lambda_2 \leq 1$ for $t \geq 0$. The kernel function K is assumed to be even and representable as a superposition of exponents. Such equations play important role in neutron transport theory, astrophysics, atmosphere optics etc. The paper develops a factorization method based on application of V. A. Ambartsumian equation that reduces the solution to a linear algebraic system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Девисон, Теория переноса нейтронов, Москва, Атомиздат, 1960.
2. В. А. Амбарцумян, Научные труды, Издательство Академии Наук Арм.ССР, Ереван, том 1, 1960.
3. В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, Москва, 1967.
4. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники, Математический анализ, Москва, ВИНИТИ АН СССР, том 22, стр. 175 – 244, 1984.
5. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свёртки", Дифференциальные уравнения, РАН, том 26, № 8, стр. 1442 – 1452, 1990.
6. А. Г. Барсегян, "Интегральное уравнение с суммарно–разностным ядром на конечном промежутке", Известия НАН Армении, серия Математика, том 40, № 3, стр. 22 – 32, 2005.
7. А. Г. Барсегян, "Интегральное уравнение переноса в двухслойной среде", Математика в высшей школе, том 2, № 2, стр. 58 – 65, 2006.
8. Н. Б. Енгибарян, "О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае", Известия РАН, серия Математика, том 70, № 5, стр. 79 – 96, 2006.
9. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Мат. Заметки, РАН, том 47, № 6, стр. 23 – 30, 1990.
10. Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, "О методе дискретных ординат", Доклады АН СССР, том 292, № 2, стр. 322 – 326, 1987.

Поступила 21 августа 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 23–32

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail : drozzin@mi.ras.ru

Резюме. Медленно растущие обобщённые функции, имеющие (квази)асимптотику на асимптотической шкале правильно меняющихся функций называются асимптотически однородными. В статье приводится сферическое представление распределений таких функций, которые описываются в терминах таких представлений. Результаты применяются для изучения особенностей функций, голоморфных в трубчатых областях над конусом.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна роль, которую играют однородные функции в различных областях математики. Напомним, что $f(t)$ есть однородная функция степени α, если

$$\frac{1}{k^{\alpha}} f(kt) = f(t), \quad k > 0. \tag{1}$$

Для обобщения можно было бы потребовать, например, выполнение соотношения

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) = g(t), \quad k > 0, \tag{2}$$

где $\rho(k) > 0$ – непрерывная функция такая, что $\rho(1) = 1$. Но тогда, обязательно $\rho(k) = k^{\alpha}$ с некоторым α и $g(t) = f(t)$. Ничего нового на этом пути не получим. Рассмотрим другое обобщение. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пространство Шварца быстро убывающих основных функций, а через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ – пространство медленно растущих обобщённых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты НШ-6705.2006.1 и 07-01-00144.

Определение 1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ положительная непрерывная функция при $k > 0$. Будем говорить, что $f(t)$ **асимптотически однородна** на бесконечности или в нуле относительно $\rho(k)$ и будем писать $f(t) \in AO_\rho$ или $f(t) \in AO^\rho$ если, соответственно,

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \longrightarrow g(t) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{t}{k}\right) \longrightarrow g(t) \tag{3}$$

при $k \to \infty$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, где $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Если $g(t) \equiv 0$, то $f(t)$ **тривиально асимптотически однородна** относительно $\rho(k)$. Если выполнено (3), причём $g(t) \not\equiv 0$, то $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. То есть, для любого $a > 0$ и некоторого α

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \to a^\alpha, \quad k \to \infty,$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$. Число α называется **порядком автомодельности** ρ. В качестве примеров мы можем упомянуть следующие функции

$$k^\alpha,\ k^\alpha \ln k,\ k^\alpha \ln\ln k,\ k^\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\sin\ln\ln k),\ k^\alpha e^{\sqrt{\ln k}},\ k^\alpha\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right)\sin\sqrt{\ln k}\right)$$

(эти функции служат наиболее общей асимптотической шкалой).

Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$ из (3) называется порядком AO_ρ. Отметим, что $g(t)$ в (3) является однородной обобщённой функцией степени α. При $\alpha \leq -n$, свойство функции быть асимптотически однородной не является чисто асимптотическим, а зависит от глобальных свойств обобщённой функции в целом. Например, обобщённые функции с финитными носителями асимптотически однородны относительно $\rho(k) = k^\alpha$, $\alpha = -n-p$, при некотором $p = 0, 1, \ldots$, при этом предельная функция представляется линейной комбинацией дельта функций и их производных.

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах математической физики. Например, известная тауберова теорема Н. Винера формулируется следующим образом :

Теорема Винера. *Для того, чтобы функция* $f(t) \in L_\infty(0, +\infty)$ *была асимптотически однородна на бесконечности относительно* $\rho(k) = 1$ *(в* $L_1'(0, +\infty)$*), то есть для любой* $\varphi(t) \in L_1(0, \infty)$ *выполнялось бы*

$$\int_0^\infty f(kt)\varphi(t)\,dt = (f(kt), \varphi(t)) \to c_\varphi \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $\varphi_0(t) \in L_1(0, +\infty)$ *преобразование Меллина которой*

$$\hat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^\infty t^{-ix}\varphi_0(t)\,dt \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

имело место

$$(f(kt), \varphi_0(t)) \to c \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Здесь в качестве пространства основных функций фигурирует пространство $L_1(\mathbb{R}^1_+)$, а обобщённые функции это функции из L_∞.

Описание и свойства асимптотически однородных функций хорошо изучены для функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_+$ – пространство обобщённых функций медленного роста с носителями на положительной полуоси. В частности, для того чтобы функция $f(r) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\alpha - 1$, что

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N\rho(r)} \to C \neq 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

где $f^{(-N)}(r)$ – первообразная порядка N функции $f(r)$.

Первообразная (производная) порядка β обобщённой функции $f(r) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r), \tag{5}$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \dfrac{\Theta(r)r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при} \quad \beta > 0, \\ \dfrac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r) & \text{при} \quad \beta \leq 0, \;\; \beta + N > 0, \quad \text{рекурентно по} \quad N, \end{cases} \tag{6}$$

где $\Gamma(\beta)$ – гамма функция. Как известно, $\frac{N!}{r^N} f^{(-N)}(r) = S^N_r(f)$ – чезаровское среднее порядка N, таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних.

Другой частный случай, где асимптотически однородные обобщенные функции также имеют простое описание, правда, в несколько других терминах, демонстрирует тесную связь асимптотически однородных функции с граничными свойствами функций, голоморфных в трубчатых конусах.

Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C. Это означает, что $F(z)$ – голоморфна в T^C и удовлетворяет там оценке

$$|F(z)| \le A\frac{(1+|z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy, \quad y \in C.$$

Здесь A, b и d суть постоянные, а $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C. Отметим, что при $y \to +0$ существует граничное значение функции $F(z)$ в $\mathcal{S}'$, так что $f(x) = \lim_{y\to+0} F(x+iy)$, причём носитель его преобразования Фурье $\widetilde{f}(t)$ лежит в конусе, сопряжённым конусу C, то есть $\operatorname{supp} \widetilde{f}(t) \subset \Gamma = C^*$.

Определение 2. Будем говорить, что голоморфная функция $F(z) \in H\left(T^C\right)$ ведёт себя как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ в T^C, где $\rho(k)$ – автомодельная функция, если

1. существует $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{\rho(k)} F\left(\dfrac{z}{k}\right)$ для любого $z \in T^C$,
2. существуют числа b, c, ε такие, что

$$|F(z)| \le \rho\left(\frac{1}{|z|}\right)\frac{c}{\varphi^b}, \quad |z| < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varphi = \min\left\{\Delta_C\left(\frac{y}{|y|}\right), \frac{|y|}{|z|}\right\}.$$

Имеет место :

Теорема 1. *Пусть C – острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C. Тогда голоморфная функция $F(z) \in H\left(T^C\right)$ ведёт себя в T^C как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ при $z \to 0$, тогда и только тогда, когда ее граничное значение $f(x)$ асимптотически однородно в нуле относительно $\rho(k)$.*

Хорошо бы иметь "подобные" описания асимптотически однородных обобщённых функций и в общем случае.

§1. СФЕРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим в $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ подпространство

$$V = \left\{\psi(r,e) \in \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1}) : \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^p \psi(r,e)\bigg|_{r=0} = P_p(e),\ p = 0,1,\ldots, e \in S^{n-1}\right\},$$

где $P_p(t)$ – однородный многочлен степени p. Топология в V индуцируется топологией в пространстве $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Нетрудно видеть, что V замкнутое подпространство пространства $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Если $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то отображение

$$\tau : \varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \psi(r,e) = \varphi(re_1, \ldots, re_n)$$

осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и V, при этом обратное отображение τ^{-1} задаётся формулой

$$\tau^{-1}:\psi(r,e)\longmapsto\varphi(t)=\psi\left(|t|,\frac{t}{|t|}\right),\quad\forall\psi(r,e)\in V.$$

Определение 3. Пусть $f(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, тогда обобщённая функция

$$\big(f_s(r,e),\psi(r,e)\big)=\left(f(t),\psi\left(|t|,\frac{t}{|t|}\right)\right),\quad\forall\psi\in V,$$

принадлежит V'. Так как V замкнутое подпространство в $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+\times S^{n-1})$, то по теореме Хана–Банаха, функцию f_s можно продолжить на всё пространство $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+\times S^{n-1})$. Обозначим это продолжение $F(r,e)$ и назовём его **сферическим представлением** обобщённой функции $f(t)\in\mathcal{S}'$. Отметим, что справедлива формула

$$(f(t),\varphi(t))=(F(r,e),\varphi(re)),\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Сферическое представление $F(r,e)$ обобщённой функции $f\in\mathcal{S}'$ определяется неоднозначно. Общий вид сферического представления для любой $f(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'(\mathbb{R}^n)$, выглядит так :

$$F_0(r,e)+\sum_{p=0}^{N}\delta^{(p)}(r)\Phi_p(e),\quad p=0,1,\ldots,$$

где $F_0(r,e)$ какое-то (конкретное) сферическое представление, а обобщённые функции $\Phi_p(e)$ удовлетворяют условиям

$$(\Phi_p(e),P_p(e))=0,\quad |j|=p,\quad p=0,1,\ldots,\tag{7}$$

где $P_p(t)$ – любой однородный многочлен степени p.

§2. СФЕРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f_0(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и однородна степени α. Если $\alpha\neq-n,-n-1,\ldots$, то

$$(f_0(t),\varphi(t))=(f_{\alpha+n}(r)\Phi(e),\varphi(re)),\quad\forall\varphi(t)\in\mathcal{S},$$

где $\Phi(e)\in\mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Обобщённая функция $f_0(t)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени $\alpha=-n-p$, где p – целое неотрицательное число, тогда и только тогда, когда существует обобщённая функция

$$\Phi(e)\in\mathcal{S}'(S^{n-1})\quad\text{такая что}\quad\big(\Phi(e),P_p(e)\big)=0$$

для всех однородных многочленов $P_p(t)$ степени p, и для некоторых c_j, $j = (j_1, \ldots, j_n)$, имеем

$$(f_0(t), \varphi(t)) = \int_0^{+\infty} \left(\Phi(e), \varphi(re) - T^p_{\varphi(re)}(r, e)\right) \frac{dr}{r^{p+1}} + \sum_{|j|=p} c_j \varphi^{(j)}(0),$$

где $T^p_{\varphi(re)}(r, e)$ тейлоровский многочлен функции $\varphi(re)$:

$$T^p_{\varphi(re)}(r, e) = \sum_{|j|\leq p} \frac{r^{|j|}}{j!} E_j(e)\varphi^{(j)}(0), \quad j = (j_1, \ldots, j_n), \ |j| = j_1 + \ldots + j_n,$$

причём $E_j(e) = e_1^{j_1} e_2^{j_2} \ldots e_n^{j_n}$, $e = (e_1, \ldots, e_n) \in S^{n-1}$.

§3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Для некритических порядков однородности справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \neq -n - p$, $p = 0, 1, \ldots$. Тогда обобщённая функция $f(t)$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \to f_0(t) \quad \text{при} \quad k \to +\infty \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

тогда и только тогда, когда существуют её сферическое представление $F(r, e)$ и число N $(N + \alpha > -n)$ такие, что

$$\frac{1}{r^{N+n-1}\rho(r)} F^{(-N)}(r, e) \to \Phi(e) \quad \text{при} \quad r \to +\infty \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(S^{n-1}),$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Эта теорема является обобщением результата для случая $f \in \mathcal{S}'_+$. В случае критических порядков $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \ldots$, дело обстоит несколько сложнее.

Теорема 3. *Обобщённая функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p, p = 0, 1$ тогда и только тогда, когда существует её сферическое представление $F(r, e)$ и число N $(N + p > 0)$ такое, что*

$$F(r, e) = F_1(r, e) + F_2(r, e),$$

где

$$\frac{1}{r^{N+n-1}\rho(r)} F_1^{(-N)}(r, e) \to \Phi_1(e) \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(S^{n-1})$$

и

$$F_2^{(-N)}(r,e) = r^{N-p-1}\eta^{[-p-1]}(r,e),$$

причём $\eta(r,e)$ непрерывна по $r>0$, со значениями в $S'(S^{n-1})$ и

$$\frac{1}{r^{n-1}\rho(r)}\eta(r,e) \to \Phi_2(e) \text{ при } r\to\infty \quad \text{и } (\eta(r,e), E_j(e)) \equiv 0 \text{ для всех } |j| = p.$$

Здесь специальная первообразная $\eta^{[-p-1]}(r,e)$ порядка $p+1$ по r для $r>0$ даётся формулой

$$\eta^{[-p-1]}(r,e) = \begin{cases} \int_1^r dr_{p+1}\int_{+\infty}^{r_{p+1}} dr_p \ldots \int_{+\infty}^{r_1} dr_1 \eta(r_1,e), & \text{если } \int_1^\infty r^p\rho_1(r)dr = \infty \\ \int_{+\infty}^r dr_{p+1}\int_{+\infty}^{r_{p+1}} dr_p \ldots \int_{+\infty}^{r_2} \eta(r_1,e)dr_1, & \text{если } \int_1^\infty r^p\rho_1(r)dr < \infty \end{cases}$$

Можно дать другое описание асимптотически однородных обобщённых функций в духе теоремы 1. Мы приведём это описание в случае асимптотически однородных функций на бесконечности.

Определение 4. Пусть $h(x,y)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$ непрерывна и $\rho(k)$ автомодельная функция. Будем говорить, что $h(x,y)$ ведет себя на бесконечности как $\rho(|z|)$, где $|z| = \sqrt{|x|^2+y^2}$, если

1. существует

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\rho(k)}|h(kx,ky)| = C(x,y) \quad \text{при} \quad |x|^2+y^2=1, \quad y>0,$$

2. существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k>1}\frac{1}{\rho(k)}|h(kx,ky)| \le \frac{A}{y^b} \quad \text{при} \quad |x|^2+y^2=1, \quad y>0.$$

Напомним, что стандартным усреднением обобщённой функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ с ядром $\omega(t)\in S(\mathbb{R}^n)$ называется функция

$$L_f^\omega(x,y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y^n}\omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right)\right), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

Теорема 4. *Пусть $\omega(t)\in S(\mathbb{R}^n)$ причём $\int\omega(t)dt\ne 0$. Обобщённая функция $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда $L_f^\omega(x,y)$ ведёт себя на бесконечности как $\rho(|z|)$.*

Отметим, что если в качестве ядра усреднения взять функцию $\omega(t) = ce^{-a^2t^2}$ и полагать, что $y = \sqrt{t}$, то

$$u(x,t) = \left(f(\xi), \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right) \equiv L_f^{\omega}(x,y)$$

есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = a^2\Delta u(x,t), \quad \lim_{t\to+0} u(x,t) = f(x) \quad (\text{в } \mathcal{S}'), \quad f \in \mathcal{S}', \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \ (8)$$

в классе не более, чем полиномиально растущих функций,то есть таких, что

$$|u(x,t)| < C\frac{1}{t^b}\left(|x|^N + |t|^N + 1\right)$$

для некоторых b, C и N, зависящих от u.

Определение 5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α. Если для некоторой функции $u(x,t)$ выполнены условия :

(1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t) \to u_0(x,t) \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

(2) существуют A и b такие, что

$$\left|\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t)\right| \le \frac{A}{t^b} \quad \text{при} \quad |x|^2 + t^2 = 1,$$

то будем говорить, что функция $u(x,t)$ **стабилизируется** (в бесконечности)**по параболам относительно автомодельной функции** $\rho(k)$.

Теперь теорема 4 может быть перефразирована в следующем виде :

Теорема 4*. *Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы решение задачи Коши (8) стабилизировалось по параболам относительно $\rho(k)$ необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $f(x) \in \mathcal{S}'$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$.*

§4. О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ГОЛОМОРФНЫХ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим функцию $F(z) \in H(T^C)$. Напомним, что поведение $F(z)$ в T^C при $z \to 0$ как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ по теореме 1 эквивалентно асимптотической однородности её граничного значения $f(x)$ в нуле относительно $\rho(k)$.

Пусть C_q, $q = 1, 2, \ldots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma_q = C_q^*$ – их сопряжённые конусы. Положим

$$H^p = \left\{ f_{i_1 \ldots i_p}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad i_\ell = 1, \ldots, m : \operatorname{supp} \widetilde{f}_{i_1 \ldots i_p}(t) \subset \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}, \right\},$$

где $p = 1, \ldots, m$ и $f_{i_1 \ldots i_p}(x)$ полностью антисимметричны по совокупности индексов. Положим ещё

$$H^0 = \left\{ f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \quad \operatorname{supp} \widetilde{f}(t) \subset \bigcap_{q=1}^{m} \Gamma_q \right\}.$$

Если $\bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}$ регулярное множество, то условие $\left(\operatorname{supp} \widetilde{f}(t) \subset \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{i_\ell}\right)$ эквивалентно условию $f_{i_1 \ldots i_p}(x) = \sum_{\ell=1}^{p} h_{i_\ell}(x)$, где $h_{i_\ell}(x)$ – граничное значение функции $h_{i_\ell}(z) \in H(T^{C_{i_\ell}})$. Введём (кограничные) операторы δ_p по следующему правилу : если $f \in H^p$, то $\delta_p f \in H^{p+1}$, где

$$[\delta_p f]_{i_0 i_1 \ldots i_p}(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k f_{i_0 \ldots \check{i}_k \ldots i_p}(x).$$

Здесь символ "ˇ" сверху означает, что соответствующий индекс опущен. Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α, положим

$$A^p = \{ f \in H^p : \text{все компоненты} \quad f \quad \text{асимптотически}$$

$$\text{однородны в нуле относительно} \quad \rho(k) \}.$$

Отметим, что кограничный оператор $\delta_p : G^p \mapsto G^{p+1}$ корректно определён для фактор–пространств $G^p = H^p / A^p$, так как $\delta_p A^p \subset A^{p+1}$.

Теорема 5. *Пусть* $\bigcup_{q=1}^{m} C_q = \mathbb{R}^n$ *и* $\alpha \neq 0, -1, \ldots$. *Тогда последовательность*

$$0 \longrightarrow G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} G^2 \xrightarrow{\delta_2} \ldots \xrightarrow{\delta_{m-2}} G^{m-1} \xrightarrow{\delta_{m-1}} G^m \longrightarrow 0 \tag{9}$$

точна.

Следствие 1. Пусть C_1 и C_2 – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{ch} C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n$. Если $F_i(z) \in H(T^{C_i})$, $i = 1, 2$, и

$$F_1(z) - F_2(z) \quad \text{ведёт себя} \quad T^{C_1 \cap C_2} \quad \text{как} \quad \rho\left(\frac{1}{|z|}\right), \tag{10}$$

где $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$, то существует многочлен $Q(z)$ такой, что

$$F_1(z) - Q(z) \quad \text{ведёт себя в} \quad T^{C_i} \quad \text{как} \quad \rho\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad i = 1, 2,$$

где $Q(z) \equiv 0$ при $\alpha > 0$.

Теорема 6. *Пусть C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_i = C_i^*$ – сопряжённые конусы, причём $pr\left(\bigcup_{i=1}^m \Gamma_i\right) = \mathcal{F}$ регулярное множество на единичной сфере S^{n-1}. Пусть $F_i(z) \in H\left(T^{C_i}\right)$ причём сумма их граничных значений $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$.*
Тогда существуют $\widehat{F}_i(z) \in H\left(T^{C_i}\right)$ ведущие себя в T^{C_i} как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$, и $\sum_{i=1}^m \widehat{f}_i(x) = f(x)$.
Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, то Теорема 6 останется справедливым при дополнительном предположении $ch\ C_q \bigcup C_{q+1} \neq \mathbb{R}^n$, $q = 1, \ldots, m-1$.

Abstract. Generalized functions of slow growth that have (quasi)asymptotics on the asymptotic scale of regularly varying functions are said to be asymptotically homogeneous. The paper suggests a spherical representation of the distributions and describe such functions in terms of that representation. The results are applied to the study of the singularities of the functions holomorphic in the tube domains over the cones.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщённые функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах” Известия РАН, серия математическая, том 70, № 6, 2006.
2. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций, Москва, Наука, 1986.
3. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщённые функции в сферическом представлении и некоторые применения”, Доклады РАН, том 405, № 1, стр. 18–21, 2005.

Поступила 21 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 33–38

ОДНО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЁРТКИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Б. Н. Енгибарян

Институт математики НАН Армении
E-mail : b.yengibaryan@eif.am

Резюме. Рассматривается интегральное уравнение

$$S(\tau) = g(\tau) + \int\limits_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int\limits_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt,$$

где $K, K_0 \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1$, $\lambda(t) > 1$, а g – неотрицательная суммируемая функция. Такое уравнение возникает, в частности, в теории переноса нейтронов в неоднородном полупространстве, при возможности их размножения. При некоторых дополнительных ограничениях на функции λ и K_0 доказывается существование положительного локально интегрируемого решения.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа свёртки на полупрямой :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{1}$$

где

$$0 \leq g(\tau) \in L_1(0, \infty). \tag{2}$$

Ядерные функции K и K_0 удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 0 \leq K \in L_1(-\infty, \infty), \quad 0 \leq K_0 \in L_1(0, \infty), \\ \int_\tau^\infty K(t)dt > 0, \quad \forall \tau > 0, \quad \int_{-\infty}^\infty K(\tau)d\tau = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

а $\lambda = \lambda(\tau)$ – неотрицательная, ограниченная функция, т.е.

$$0 \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_1 < \infty. \tag{4}$$

К рассматриваемому уравнению сводятся ряд линейных и нелинейных задач переноса излучения в неоднородном полупространстве (см. [1]). Аргумент τ имеет смысл расстояния переменной точки от плоской границы среды. Альбедо рассеяния λ представляет собой среднее число частиц, возникающих в результате элементарного акта взаимодействия частицы с веществом. Неоднородность среды проявляется в зависимости λ от τ, а вид ядра K_0 обусловлен законом отражения частицы из границы $\tau = 0$ среды.

Известный интерес представляют задачи, в которых величина λ, может оказаться больше 1 вследствие размножения частиц в результате их взаимодействия с радиоактивными ядрами (см. [2]).

При $\lambda(t) \geq 1$, уравнение (1) возникает также в результате линеаризации некоторых нелинейных задач переноса излучения.

В случае $K_0 = 0$, уравнение (1) обращается в основное интегральное уравнение переноса в неоднородном плоском слое :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt. \tag{5}$$

Н. Б. Енгибаряном была поставлена задача описания классов функций $\lambda(t) \geq 1$ таких, при которых уравнение (5) обладает положительным, "физическим" решением. Первые результаты в данном направлении были получены в работе Л. Г. Арабаджяна и А. С. Хачатряна [3]. В [3] уравнение (5) рассмотрено в случае, когда ядерная функция K несимметрична и обладает отрицательным моментом первого порядка $\int_{-\infty}^{\infty} x\,K(x)\,dx < 0$. Также в [3] получены результаты по существованию положительного решения однородного ($g = 0$) уравнения и неоднородного уравнения, при выполнении условия

$$1 \leq \lambda(\tau) \leq \left(\int_{-\infty}^{\tau} K(t)dt\right)^{-1}. \tag{6}$$

В случае неоднородного уравнения, получен следующий интересный результат (см. [3]) : если функция $\lambda g \in L_1(0, \infty)$ невозрастающая и ограниченная, то существует положительное, ограниченное решение уравнения (5).

В настоящей заметке рассматривается аналогичная задача построения положительного решения неоднородного уравнения (1) при $\lambda(\tau) \geq 1$. В работе приводится одно достаточное условие на функцию λ, при котором существует положительное, локально интегрируемое решение уравнения (1). Это условие имеет простой физический смысл и примыкает к условию (6). Никаких дополнительных условий на функции K и $g \in L_1(0,\infty)$ не накладываются. Излагаемый подход основан на одном способе оценки итераций для уравнений (5), который исходит из работы [4].

§ 2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть L_1^{loc} – линейное топологическое пространство измеримых по Лебегу функций на $[0,\infty)$, снабженное топологией сходимости по $L_1(0,r)$, $\forall r < +\infty$, которую мы назовем топологией T. Через W обозначим ядро уравнения (1) и через $\widehat{W}$ – интегральный оператор с этим ядром :

$$W(\tau,t) = [K(\tau - t) + K_0(\tau + t)]\lambda(t), \qquad \left(\widehat{W}S\right)(\tau) = \int_0^\infty W(\tau,t)S(t)dt.$$

Из отмеченных выше свойств функций K, K_0 и λ легко следует, что оператор $\widehat{W}$ действует в пространстве $L_1^+ = L_1(0,\infty)$, причём

$$||\widehat{W}|| \le \lambda_1 \left(1 + \int_0^\infty K_0(t)dt\right). \tag{7}$$

При $\lambda(\tau) \equiv \lambda_1$, уравнение (5) обращается в уравнение Винера–Хопфа. В консервативном случае $\lambda_1 = 1$ символ этого уравнения вырождается. Это уравнение не может иметь решение в L_1^+ при нетривиальном $g \in L_1^+$, $g \ge 0$ (см. [5]). Отсюда непосредственно следует, что аналогичным свойством обладает уравнение (1) при $\lambda(\tau) \ge 1$, $K_0 \ge 0$. Сказанное означает, что при $\lambda(\tau) \ge 1$ уравнение (1) относится к критическому или суперкритическому случаю. Его решение мы будем искать в некотором расширении пространства L_1^+.

Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1) :

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\tau) =& g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S_n(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S_n(t)dt, \\ S_0 =& 0, \quad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

В силу (2) и (7), итерации (8) определяют последовательность S_n в L_1^+ со свойствами

$$S_n \in L_1(0,\infty), \quad 0 \le S_n \uparrow \quad \text{по} \quad n. \tag{9}$$

Можно показать, что если S_n сходится по топологии T, то её предел S удовлетворяет уравнению (1). Функцию S мы назовём основным решением уравнения (1). Аналогичный факт для некоторых других интегральных уравнений с положительными ядрами установлен в [5].

Обозначим $\gamma_n = \int_0^\infty S_n(\tau)d\tau < +\infty$. Тогда $0 \le \gamma_n \uparrow$ по n. Интегрируя равенство (8) по τ от 0 до ∞, с учётом (3) получаем

$$\gamma_{n+1} = \mu + \gamma_n - \int_0^\infty \rho(t) S_n(t)dt, \tag{10}$$

где $\mu = \int_0^\infty g(\tau)d\tau < +\infty$ и

$$\rho(t) = 1 - \lambda(t)\left(\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz\right). \tag{11}$$

Наложим на функцию K_0 следующее ограничение

$$\int_t^\infty K_0(z)dz < \int_{-\infty}^{-t} K(z)dz, \forall t < +\infty. \tag{12}$$

Условие (12) выполняется в важном случае, когда $K_0(\tau) = \varepsilon K(\tau), \tau > 0, 0 \le \varepsilon < 1$ и функция K чётная. Случай чётной функции K представляет основной интерес в теории переноса, а данный вид функции $K_0(\tau)$ соответствует зеркальному отражению из границы с вероятностью $\varepsilon < 1$.
С учётом равенства $\int_{-\infty}^\infty K(\tau)d\tau = 1$ (см. [3]) и неравенства (12) получаем

$$\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz = 1 - \int_{-\infty}^{-t} K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz < 1. \tag{13}$$

Наложим на функцию λ условие

$$\lambda(t) < \lambda_0(t) := \left(\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz\right)^{-1}. \tag{14}$$

Из (12) следует, что $\lambda_0(t) > 1$ поэтому условие (14) допускает возможность неравенства $\lambda(t) > 1$ на всей полуоси $[0, \infty)$.
Из (11) и (14) следует выполнение неравенства $0 < \rho(z) \le 1$, то есть ρ является весовой функцией в пространстве L_1^+. Через $L(\rho) \supset L_1^+$ обозначим банахово пространство $L(\rho)$ функций, интегрируемых с весом ρ на $(0, \infty)$ с конечной нормой $\|f\| = \int_0^\infty |f(t)|\rho(t)dt < \infty$.
Вернёмся к рассмотрению итераций (8). Используя равенство (10) и монотонность последовательности γ_n мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Итерационная последовательность S_n обладает свойствами (9), и имеет место оценка*

$$\|S_n\|_{L(\rho)} = \int_0^\infty S_n(t)\rho(t)dt \le \mu. \tag{15}$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [6]), из (9) и (15) следует сходимость последовательности S_n в $L(\rho)$:

$$S_n \to S \in L(\rho), \quad 0 \leq S_n \leq S, \quad \int_0^\infty S(t)\rho(t)dt \leq \mu. \tag{16}$$

Итак, нам остаётся совершить предельный переход в (8). Из (8) и (16) имеем

$$g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau, t)S_n(t)dt \leq S(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

откуда, согласно теореме Б. Леви следует сходимость интеграла

$$\int_0^\infty W(\tau, t)\lambda(t)S(t)dt, \qquad \tau > 0,$$

и неравенство

$$g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau, t)S(t)dt \leq S(\tau). \tag{17}$$

С другой стороны, из (7) и (15) имеем

$$S_{n+1}(\tau) \leq g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau, t)S(t)dt \leq S(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

откуда следует неравенство, противоположное к (17). Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (14). Тогда для произвольного $g \in L_1(0, \infty)$, $g \geq 0$, уравнение (1) обладает основным решением $S \in L(\rho)$, которое обладает свойствами (16).*

Заметим, что функция S является минимальным положительным решением уравнения (1), т.е. если $\tilde{\tilde{S}}$ – произвольное положительное решение уравнения (1), то $S \leq \tilde{\tilde{S}}$.

Перечислим некоторые возможные обобщения Теоремы 1.

a) Теорема 1 допускает распространение на более реальные задачи переноса нейтронов, описываемых векторными интегральными (или интегро-дифференциальными) уравнениями, в которых участвуют индикатриса рассеяния (из $L_1(-1, 1)$) и закон перераспределения нейтронов по скоростям при элементарном акте рассеяния.

b) Широкий круг скалярных интегральных уравнений переноса при достаточно общих законах отражения из границы $\tau = 0$ среды имеет вид :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_1(\tau, t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{18}$$

где $K_1 \geq 0$. Помимо зеркального отражения, так обстоит дело в случае изотропного рассеяния, ламбертова рассеяния и др. При соответствующих ограничениях на функции K_1 и $\lambda(\tau) > 1$, можно доказать существование положительного решения уравнения (18).

c) Аналогичным образом, может быть изучено следующее уравнение на всей прямой :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt,$$

где $\lambda(\tau) < 1$, $\tau < 0$ или $\lambda(\tau) > 1$, $\tau > 0$.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

Abstract. In a nonhomogeneous half-space in the presence of neutron multiplication the following integral equation arises :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt,$$

where $K, K_0 \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1$, $\lambda(t) > 1$ and g is a nonnegative integrable function. Existence of a positive, locally integrable solution $S(\tau)$ is proved under some additional conditions on the functions λ and K_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, Москва, 1972.
2. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, Москва, 1960.
3. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об уравнении переноса в случае возможности размножения частиц", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 41, № 3, 2004.
4. Н. Б. Енгибарян, "О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае", Изв. РАН, серия Математическая, том 70, № 5, стр.79–96, 2006.
5. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. анализ, Москва, ВИНИТИ АН СССР, том 22, стр. 175 – 244, 1984.
6. А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.

Поступила 10 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 39–56

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет

Резюме. Линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ с постоянными коэффициентами называется почти гипоэллиптическим, если все производные $D^\alpha P$ характеристического многочлена, т.е. полного символа $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ оцениваются через $P(\xi)$. В работе доказывается, что все решения дифференциального уравнения $P(D)u = 0$, которые интегрируемы с квадратом с определённым экспоненциальным весом, являются бесконечно дифференцируемыми функциями тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ почти гипоэллиптичен.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В настоящей статье будем пользоваться следующими стандартными обозначениями : $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ – соответственно n-мерные вещественные пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{E}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}\partial/\partial x_j$ $(j = 1, \ldots n)$. Наконец обозначим $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$.

Предполагая, что суммы распространяются по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, допустим, что $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – отвечающий ему символ, т.е. характеристический многочлен. Пусть $m = ordP =$

$\max\{|\alpha|, \alpha \in (P)\}$.
Заметим, что оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются гипоэллиптическими (см. [1]), если все решения $u \in D'$ (где $D' = D'(\mathbb{E}^n)$ – множество распределений) уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, т.е. принадлежат $C^\infty = C^\infty(\mathbb{E}^n)$.

Л. Хермандером доказано (см. [1], Теоремы 11.1.1 и 11.1.3), что если выполняется одно из следующих эквивалентных условий, то оператор $P(D)$ является гипоэллиптическим :

1) $Sing Supp\, u = Sing Supp\, P(D)$ для всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ и $u \in D'$,
2) если $\Omega \subset E^n$, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$,
3) если $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$, то $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,
4) $d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$; где $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до многообразия $D(P) = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}^n,\ P(\zeta) = 0\}$.

Возникает естественный вопрос : пусть символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет более слабому условию, чем 3) :

$$|D^{(\nu)} P(\xi)| \Big/ [1 + |P(\xi)|] \leq C < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0^n, \tag{1.1}$$

или пусть 4) будет заменено требованием

$$d_P(\xi) \geq \varepsilon > 0 \tag{1.2}$$

для достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$. Каким условиям должны удовлетворять решения $u \in D'(\mathbb{E}^n)$ уравнения $P(D)u = 0$, чтобы они являлись бесконечно дифференцируемыми решениями в $\mathbb{E}^n$?

В настоящей работе мы даём ответ на этот вопрос для одного класса операторов, удовлетворяющих условию (1.1) или эквивалентному условию (1.2).

Нам понадобятся следующие классы операторов и функций. Через I_n обозначим множество дифференциальных операторов $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ с постоянными коэффициентами, символы $P(\xi)$ которых удовлетворяют условию

$$|P(\xi)| \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty. \tag{1.3}$$

Для любых $\delta > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, через $L_{2,\delta} \equiv L_{2,e^{-\delta|x|}}$ обозначим множество локально суммируемых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_{2,\delta}} = \left[\int_{\mathbb{E}^n} |u(x)|^2 e^{-2\delta|x|} dx\right]^{1/2}, \tag{1.4}$$

а через $W^m_{2,\delta}$ – множество функций $u \in L_{2,\delta}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}}. \tag{1.5}$$

Наконец, положим

$$W^\infty_{2,\delta} = \bigcap_{m=1}^{\infty} W^m_{2,\delta} \quad \text{и} \quad N(P,\delta) = \{u \in L_{2,\delta} : \langle u, P(-D)\varphi\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty\}$$

и заметим, что $L_{2,\delta}$ и $W^m_{2,\delta}$, очевидно, являются банаховыми пространствами, а $W^\infty_{2,\delta}$ – пространство Фреше, при этом $W^\infty_{2,\delta} \subset C^\infty$ при любом $\delta > 0$.

Определение 1.1. Оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ назовём **почти гипоэллиптическими**, если многочлен P удовлетворяет одному из эквивалентных условий (1.1), (1.2).

По Лемме 11.1.4 работы [1] для любого многочлена $Q(\xi)$ существует постоянная $C = C(Q) > 0$ такая, что справедливы неравенства

$$C^{-1} \le d_Q(\xi) \sum_{|\alpha|>0} \left|\frac{Q^\alpha(\xi)}{Q(\xi)}\right|^{1/|\alpha|} \le C \tag{1.6}$$

для всех тех точек $\xi \in \mathbb{R}^n$, для которых $Q(\xi) \ne 0$. С другой стороны, если $P \in I_n$, то, за счёт добавления константы, можно считать, что для многочленов $P \in I_n$ существуют некоторые числа $\varepsilon = \varepsilon(P) > 0$ и $M \ge 0$ такие, что $|P(\xi)| \ge \varepsilon$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \ge M$.

Согласно приведённым определениям, почти гипоэллиптичность многочлена $P \in I_n$ можно дать также следующим образом : **многочлен $P \in I_n$ почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда**

$$\rho(P) = \lim_{t\to\infty} \inf_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0. \tag{1.7}$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема. *Если $P \in I_n$, то оператор $P(D)$ является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда существует число $\delta > 0$ такое, что $N(P,\delta) \subset W^\infty_{2,\delta}$.*

Для удобства, вместо весовой функции $e^{-\delta|x|}$ рассмотрим эквивалентную ей гладкую весовую функцию $g_\delta \in C^\infty$, которая будет определена ниже.

Пусть $g \in C^\infty$ – произвольная фиксированная положительная функция такая, что

$$\kappa^{-1} e^{-|x|} \le g(x) \le \kappa e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n,$$

для некоторого $\kappa > 0$. При этом, допустим, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_n^0$ существует число $\kappa_\alpha > 0$ такое, что

$$|D^\alpha g(x)| \leq \kappa_\alpha g(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n.$$

Заметим, что в качестве такой функции g можно брать регуляризацию (усреднение) функции $H(x) = e^{-|x|}$ при $|x| > 1$ и $H(x) = e^{-1}$ при $|x| \leq 1$, с помощью произвольной фиксированной весовой функции $\varphi \in C_0^\infty$ такой, что $\int \varphi(x)dx = 1$.

Для $\delta > 0$ положим $g_\delta(x) = g(\delta x)$. Тогда из определения функции g следует, что с теми же постоянными (κ, κ_α) справедливы неравенства

$$\kappa^{-1}e^{-\delta|x|} \leq g_\delta(x) \leq \kappa e^{-\delta|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.8}$$

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \leq \kappa_\alpha \delta^{|\alpha|} g_\delta(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n. \tag{1.9}$$

Рассмотренной в настоящей заметке тематике посвящены работы многих авторов. Прежде всего отметим работы [2]–[3] Гординга, Мальгранжа и Эренпрайса, где доказана бесконечная дифференцируемость решений так называемых частично-гипоэллиптических уравнений $P(D)u = 0$, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определённым переменным.

В работах [3]–[4] доказано, что для определённого класса частично-гипоэллиптических операторов $\{P\}$ из условий $u \in C^\infty$ и $P(D)u \in C^\infty$ вне некоторой выпуклой поверхности Γ следует, что $u \in C^\infty$ в окрестности Γ. Общие результаты о распространении гладкости решений частично-гипоэллиптических уравнений вдоль более общих поверхностей принадлежат Л. Хермандеру (см. [5] или [1]).

Я. С. Бугровым в работе [6] построен пример негипоэллиптического уравнения, решения которого в полупространстве являются бесконечно гладкими, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми производными.

В. И. Буренков в работе [7] нашёл необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения $\{u\}$ так называемого глобально гипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$, которые определённым образом стремятся к нулю в бесконечности, являлись бесконечно гладкими. Эти условия носят алгебраический характер и для гипоэллиптического оператора P они совпадают с условиями 3) или 4) Л. Хермандера.

Общая закономерность, наблюдающаяся в алгебраических условиях гладкости решений дифференциальных уравнений, побудила нас в работе [8] ввести понятия носителя и числа гипоэллиптичности. Оказалось, что эта числовая характеристика делит дифференциальные операторы на разные классы. При такой классификации гипоэллиптические по Л. Хермандеру и гиперболические по Л. Гордингу (и тем самым гиперболические по И. Г. Петровскому, см. [9]) операторы занимают крайние позиции.

В работе [10], опираясь на результаты работы [8], нами получены "внутренние" оценки решений уравнения $P(D)u = 0$ с данным носителем гипоэллиптичности.

В работах [11], [12], введено понятие почти гипоэллиптического многочлена и найдены некоторые достаточные условия почти гипоэллиптичности в терминах порядков однородности и кратностей нулей подмногочленов.

В работе [13] О. Р. Габриеляна приведены некоторые необходимые и достаточные условия почти гипоэллиптичности двумерных многочленов в терминах кратностей нулей соответствующих однородных подмногочленов. В тех же терминах в работе [14] найдены необходимые и достаточные условия для $P \in I_2$.

В алгебраической трактовке класс почти гипоэллиптических многочленов является "минимальным" расширением класса гипоэллиптических многочленов. В настоящей работе показано, что это расширение является минимальным в некотором смысле.

Приведём теперь ряд вспомогательных предложений, необходимых в следующих параграфах.

Лемма 1.1. *Если множество $G \subset \mathbb{E}^n$ лежит в шаре $S_T = \{x \in \mathbb{E}^n : |x| \leq T\}$, то для любого $\delta > 0$ справедливы неравенства*

$$\sup_{y\in G} g_\delta(x+y) \leq \sigma_1 g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.10}$$

$$\sup_{y\in G} |g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \leq \sigma_2 g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.11}$$

где функция g_δ определена выше, $\sigma_1 = \kappa^2 e^{\delta T}$ и $\sigma_2 = \kappa^2 \delta T e^{\delta T} (\max_{|\alpha|=1} \kappa_\alpha)\sqrt{n}$.

Доказательство. Из неравенства $|x+y| \geq |x| - |y|$ и в силу (1.8) имеем

$$\sup_{y\in G} |g_\delta(x+y)| \leq \kappa \sup_{y\in G} e^{-\delta|x+y|} \leq \kappa e^{-\delta|x|} \sup_{y\in G} e^{\delta|y|} \leq \kappa^2 e^{\delta T} g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n,$$

откуда вытекает (1.10). Для доказательства (1.11) предположим, что точки $x \in \mathbb{E}^n$ и $y \in G$ фиксированы и положим $f(t) = g_\delta(x+ty)$. Так как f дифференцируема, то для некоторого числа $\theta = \theta(x,y) \in (0,1)$ получаем

$$|g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| = |f(1) - f(0)| = |f'(\theta)| \leq$$

$$\le |(\text{grad}\; g_\delta(x+\theta y), y)| \le |\text{grad}\; g_\delta(x+\theta y)||y|.$$

Следовательно, в силу (1.9) и (1.10) получаем

$$|g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \le \sigma_2 g_\delta(x)$$

поскольку $\theta y \in S_T$. Это доказывает (1.11), так как пара (x, y) произвольна. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \ge 0$ $(i = 0, 1, \dots, m)$, $d > 0$ и $t > 1$. Тогда*

a) Если $a_0 = b_0$ и

$$a_k \le b_k + d\sum_{j=0}^{k-1} t^j a_j, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{1.12}$$

то при $\sigma_3 = 2[2dt^{m-1} + 1]^m$ имеет место неравенство :

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \le \sigma_3 \sum_{k=0}^{m} b_k. \tag{1.13}$$

b) Если $a_m = b_m$ и

$$t^k a_k \le t^k b_k + d\sum_{j=k-1}^{m} t^j a_j, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \tag{1.14}$$

то

$$\sum_{k=0}^{m} t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m} (1+d)^k t^k b_k. \tag{1.15}$$

Доказательство. Пусть $h = (\sigma_3/2)^{-1/m}$. Умножая неравенства (1.12) на h^k и суммируя их по $k = 1, 2, \dots, m$, получим

$$\sum_{k=1}^{m} h^k a_k \le \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{k-1} t^j a_j\right) h^k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d\sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k \left(\sum_{j=k+1}^{m} h^j\right) \le \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d\sum_{k=0}^{m-1} t^k a_k \frac{h^{k+1}}{1-h}.$$

Следовательно, в силу того, что $a_0 = b_0$, имеем

$$h^m a_m + \sum_{k=1}^{m-1}\left(h^k - d\frac{t^k h^{k+1}}{1-h}\right) a_k \le \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + \frac{dh}{1-h} b_0.$$

Так как $t > 1$, то из определения числа h имеем

$$h^m a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^k a_k \le \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + \frac{dh}{1-h} b_0.$$

Следовательно, для $h < 1$ получаем

$$\frac{h^m}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{h^m}{2} a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^m a_k$$
$$\le h^m a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^k a_k \le \sum_{k=1}^{m} b_k + \frac{d.h}{1-h} b_0,$$

С учётом $\frac{h^m}{2} a_0 = \frac{h^m}{2} b_0$, получаем

$$\frac{h^m}{2}\sum_{k=0}^{m} a_k \le \sum_{k=1}^{m-1} b_k + \left(\frac{dh}{1-h} + \frac{h^m}{2}\right) b_0.$$

Так как $h^m/2 = 1/\sigma_3 < 1/2$ и $t > 1$, то легко показать, что коэффициент при b_0 меньше единицы. Тогда, умножая обе части полученного неравенства на σ_3, получим (1.13).

Для доказательства (1.15) умножим (1.14) на $h_1^k \equiv (1+d)^k$ и просуммируем полученные неравенства по $k = 0, 1, \ldots, m-1$. После некоторых простых выкладок получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + d\sum_{j=1}^{m} \frac{h_1^j - 1}{h_1 - 1} t^j a_j.$$

Поэтому, в силу $a_m = b_m$, получаем

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(h_1^k - d\frac{h_1^k - 1}{h_1 - 1}\right) t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + d\frac{h_1^m - 1}{h_1 - 1} t^m b_m.$$

Так как

$$h_1^k - d\frac{h_1^k - 1}{h_1 - 1} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

то это влечёт неравенство

$$\sum_{k=0}^{m} t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + \left[d\frac{h_1^m - 1}{h_1 - 1} + 1\right] t^m b_m = \sum_{k=0}^{m} (1+d)^k t^k b_k.$$

Лемма 1.2 доказана.

Замечание 1.1. Очевидно, утверждение Леммы 1.2 остаётся в силе при $t \in (0,1)$. В этом случае, достаточно заменить число σ_3 на $\sigma_3' = 2\left[2d(1+t)^{m-1}+1\right]^m$.

Следствие 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\{a_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$ и $\{d_\alpha\}$ ($|\alpha| = 0,1,\dots,m$) – неотрицательные числа, $t > 0$, и $\sigma_4 = 1 + 2\max\{d_\alpha : |\alpha| \le m\}$, $\sigma_5 = 1 + (0,5)(1+2\sigma_4)^m$, $\sigma_6 = (1+\sigma_5)^m$. Тогда

a) Если $a_0 = b_0$ и для всех $k = 1,2,\dots,m$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \le \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=j} d_\alpha t^{|\alpha|} a_\alpha,$$

поэтому

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \sigma_4^{m-k} b_\alpha + \sigma_5 b_0 \le \sigma_5 \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha. \tag{1.16}$$

b) Если $a_\alpha = b_\alpha$ при $|\alpha| = m$ и для всех $k = 0,1,\dots,m-1$ имеем

$$t^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \le t^k \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha + \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} d_\alpha t^{|\alpha|} a_\alpha,$$

тогда

$$\sum_{|\alpha|\le m} t^{|\alpha|} a_\alpha \le \sum_{|\alpha|\le m} (1+\sigma_4)^{|\alpha|} t^{|\alpha|} b_\alpha \le \sigma_6 \sum_{|\alpha|\le m} t^{|\alpha|} b_\alpha. \tag{1.17}$$

Доказательство. Неравенство (1.16) следует из (1.13), а (1.17) из (1.15) при помощи замен

$$a_k = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha, \quad b_k = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha, \quad d = \max\{d_\alpha : |\alpha| \le m\}, \quad k = 1,2,\dots,m.$$

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ И ПЛОТНОСТЬ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В этом параграфе мы рассматриваем почти гипоэллиптические операторы в весовых функциональных пространствах типа С. Л. Соболева.

Сначала отметим, что из соотношения (1.8) для функции g следует, что в $L_{2,\delta}$ можно ввести следующую норму, эквивалентную норме (1.4) :

$$\|u\|'_{L_{2,\delta}} = \|u g_\delta\|_{L_2}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Нормы*

$$\|u\|'_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2}, \quad (2.2)$$

$$\|u\|''_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2} \quad (2.3)$$

эквивалентны норме (1.5) в $W^m_{2,\delta}$.

Доказательство. Эквивалентность норм (2.2) и (1.5) следует из свойства (1.8) функции g_δ. Для доказательства эквивалентности норм (2.3) и (1.5) заметим, что

$$\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)\, g_\delta = \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (u g_\delta) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|=j} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} u D^\beta g_\delta.$$

Применяя свойство (1.9) функции g_δ, получаем

$$\sum_{|\alpha|=m} \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2} \le \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \delta^j \kappa'_\alpha \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2},$$

где $\kappa'_\alpha = \max\{C_{\alpha,\beta}\kappa_\alpha : \beta \le \alpha\}$.

Отсюда и из Следствия 1.1, при $t = \delta$ имеем

$$a_\alpha = \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2}, \quad b_\alpha = \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2}, \quad d_0 = 1, d_\alpha = \kappa_\alpha \quad (|\alpha| = 1, \dots, m),$$

откуда вытекает эквивалентность норм (2.3) и (1.5).

Лемма 2.2. *Множество* $W^\infty_{2,\delta}$ *плотно в* $L_{2,\delta}$.

Доказательство. Пусть $u \in L_{2,\delta}$, $S_1 = \{x \in \mathbb{E}^n : |x| < 1\}$, $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\varphi(x) \ge 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ и положим

$$u_\varepsilon(x) = u * \varphi_\varepsilon = \int u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy = \varepsilon^{-n} \int u(x-y)\varphi(y/\varepsilon)dy.$$

Чтобы доказать $u_\varepsilon \in W^\infty_{2,\delta}$, отметим, что из Леммы 2.1, (1.10) и неравенства Юнга имеем

$$\|u_\varepsilon\|_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|[D^\alpha (u * \varphi_\varepsilon)]\, g_\delta\|_{L_2} = \sum_{|\alpha|\le m} \|(u * D^\alpha \varphi_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int \left| \int u(x-y) D^\alpha \varphi_\varepsilon(y) g_\delta(x) dy \right|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\le \kappa^2 e^\delta \sum_{|\alpha|\le m} \|u g_\delta\|_{L_2} \|D^\alpha \varphi_\varepsilon\|_{L_1} = \kappa^2 e^\delta \|u g_\delta\|_{L_2} \sum_{|\alpha|\le m} \varepsilon^{-|\alpha|} \|(D^\alpha \varphi)_\varepsilon\|_{L_1} \quad (2.4)$$

для любого $m \in \mathbb{N}_0$.

Так как норма (2.1) эквивалентна исходной норме (1.4) пространства $L_{2,\delta}$ и $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, то $u_\varepsilon \in W_{2,\delta}^m$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$, т.е. $u_\varepsilon \in W_{2,\delta}^\infty$. Для завершения доказательства осталось показать, что

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что $\int \varphi_\varepsilon(y)dy = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Из эквивалентности норм (2.1), (1.4) и $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ имеем

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} &= \int \left| \int \left[u(x-y)g_\delta(x) - u(x)g_\delta(x)\right] \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx = \\
= \int \Bigg| \int &\left[\left[u(x-y)g_\delta(x-y) - u(x)g_\delta(x)\right] + \right. \\
&\left. + \left[u(x-y)g_\delta(x) - u(x-y)g_\delta(x-y)\right]\right] \varphi_\varepsilon(y)dy \Bigg|^2 dx \\
&\leq 2\int \left| \int \left[u(x-y)g_\delta(x-y) - u(x)g_\delta(x)\right] \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx + \\
&+ 2\int \left| \int u(x-y)\left[g_\delta(x) - g_\delta(x-y)\right] \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь отметим, что

$$\int u(x-y)g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy = [ug_\delta] * \varphi_\varepsilon = (ug_\delta)_\varepsilon,$$

и по определению φ, для любого $\varepsilon > 0$

$$\int u(x)g_\delta(x)\varphi_\varepsilon(y)dy = u(x)g_\delta(x).$$

Итак, первое слагаемое в правой части (2.6) стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ согласно Лемме 5.2 работы [15].

Для оценки второго слагаемого применим (1.11) при $T = \varepsilon$ и неравенство Юнга :

$$\begin{aligned}
&\int \left| \int u(x-y)\left[g_\delta(x) - g_\delta(x-y)\right] \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx \\
&\leq (\delta\varepsilon)^2 \kappa^4 \max_{|\alpha|=1} \left\{\kappa_\alpha^2\right\} e^{\delta\varepsilon} \int \left| \int |u(x-y)| g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx \\
&\leq C\varepsilon^2 \|ug_\delta\|_{L_2}^2 \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1}^2 = C\varepsilon^2 \|ug_\delta\|_{L_2}^2.
\end{aligned}$$

Так как $u \in L_{2,\delta}$, то правая часть полученного соотношения стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, что доказывает (2.5). Лемма доказана.

Следующее следствие является непосредственным следствием Леммы 2.2 и вложения $W^{\infty}_{2,\delta} \subset C^{\infty}$.

Следствие 2.1. Множество C_0^{∞} плотно в $L_{2,\delta}$.

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $\delta > 0$. Обозначим

$$W(P,\delta) = \left\{u \in L_{2,\delta} : \|u\|_{W(P,\delta)} = \|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} < \infty\right\}.$$

Из Леммы 2.2 следует :

Следствие 2.2. Множество $W^{\infty}_{2,\delta}$ плотно в $W(P,\delta)$.

Доказательство. Как показано в [15], $P(D)u_\varepsilon(x) = (P(D)u)_\varepsilon(x)$. Следовательно, утверждение следует из Леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Если $P \in I_n$ – почти гипоэллиптический оператор, то существуют числа $\Delta = \Delta(P) > 0$ и $C = C(\Delta, P) = C(P) > 0$ такие, что для всех $\delta \in (0,\Delta)$ и $u \in W(P,\delta)$*

$$\sum_{\alpha} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} \le C\|u\|_{W(P,\delta)}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Согласно Следствию 2.2, достаточно доказать (2.7) для $u \in W^{\infty}_{2,\delta}$. Для этого отметим, что определения почти гипоэллиптичности и класса I_n влекут $\rho(P) > 0$ (см. (1.7)). Пусть $\rho = \rho(P)$, если $\rho(P) < \infty$ и возьмем ρ произвольным, если $\rho(P) = \infty$, т.е., если оператор P гипоэллиптичен.

Теперь, обозначим через $F(v)$ преобразование Фурье функции $v \in L_2$. В силу равенства Парсеваля, неравенства (1.6) и почти гипоэллиптичности оператора P имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} = \sum_{\alpha} \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi) \right\|_{L_2} \\
&= \sum_{\alpha} \left\| \rho^{|\alpha|} P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi) \right\|_{L_2} \le C_1 \sum_{\alpha} \left\| \left[d_P^{|\alpha|}(\xi) + 1\right] |P^{(\alpha)}(\xi)||F(ug_\delta)(\xi)| \right\|_{L_2} \\
&\le C_2 \||P(\xi)||F(ug_\delta)(\xi)|\|_{L_2} + C_2 \|[|P(\xi)| + 1]|F(ug_\delta)(\xi)|\|_{L_2} \\
&\le C_3 \left[\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}\right]
\end{aligned}$$

для некоторых положительных постоянных C_1, C_2, C_3 и для произвольной функции $u \in W^{\infty}_{2,\delta}$. Отсюда, в силу формулы Лейбница и свойства (1.9) функции

g_δ получаем

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} \le$$

$$\le C_4 \left[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] D^\alpha g_\delta \right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right]$$

$$\le C_4 \left[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \sum_{\alpha>0} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] g_\delta \right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right], \qquad (2.8)$$

где $C_4 > 0$ и $\kappa' = \max\left\{[\kappa_\alpha/(\alpha!)]^{1/|\alpha|} : |\alpha| \le m\right\}$. Еще раз применяя формулу Лейбница и оценку (1.9), для всех $k = 1, 2, \ldots, m$ получим

$$\sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] g_\delta \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} + (\kappa'\delta)^k \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|>0} \left\| \left[P^{(\alpha+\beta)}(D)u\right] \frac{D^\beta g_\delta}{\beta!} \right\|_{L_2}$$

$$\le \sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} + C_5 \sum_{j=k+1}^{m} (\kappa'\delta)^j \sum_{|\alpha|=j} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] g_\delta \right\|_{L_2},$$

где $C_5 = \max\{card(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = \gamma,\ |\gamma| \le m\}$. Применив здесь неравенство (1.16) при $t = \kappa'\delta$, $a_\alpha = \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] g_\delta \right\|$, $d_\alpha = C_5$, $b_\alpha = \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|$ ($|\alpha| = 1, \ldots, m$) получим с некоторой постоянной $C_6 > 0$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{m} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u\right] g_\delta \right\|_{L_2} \le C_6 \sum_{|\alpha|=1}^{m} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2}.$$

Отсюда и из (2.8) получим, что для некоторого постоянного $C_7 > 0$

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} \le C_7 \|[P(D)u]\, g_\delta\|_{L_2}$$

$$+ C_7 \left[\sum_{|\alpha|>0} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right]. \qquad (2.9)$$

Пусть

$$\Delta = \Delta(P) = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\kappa'} \min\left\{C_7^{-1}, C_7^{-1/m}\right\}. \qquad (2.10)$$

Тогда из (2.9) следует, что

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} \le 2C_7 \left[\|[P(D)u]\, g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}\right]$$

для всех $\delta \in (0, \Delta)$. Отсюда следует, что (2.7) выполняется для всех $\delta \in (0, \Delta)$, поскольку $\rho > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$, $m_0 > m_1$ и $0 < \delta_0 < \delta_1$, то $W_{2,\delta_0}^{m_0}$ компактно вложено в $W_{2,\delta_1}^{m_1}$.*

Доказательство. $g_{\delta_1}(x)/g_{\delta_0}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\delta_1 > \delta_0$, следовательно лемма верна в силу Теоремы 1.16 работы [15], о компактном вложении $W_2^{m_0}$ в $W_2^{m_1}$ при $m_0 > m_1$. Лемма доказана.

§ 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Приведённые ниже теоремы 3.1 и 3.2 лежат в основе доказательства основного результата настоящей статьи, формулированной в §1.

Теорема 3.1. *Пусть $P(D)$ – линейный, дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а множество $N(P, \delta)$ определено как в §1.*
Если $N(P, \delta) \subset W_{2,\delta}^{\infty}$ для некоторого числа $\delta > 0$, то оператор P почти гипоэллиптичен.

Доказательство. Достаточно показать, что $\rho(P) > 0$ для функции, определенной по формуле (1.7). Мы докажем, что $\rho = \rho(P) \geq \delta$.
В силу замкнутости дифференциального оператора, множество $N(P, \delta)$ является замкнутым подпространством банахого пространства $L_{2,\rho}$. Таким образом, $N(P, \delta)$ является банаховым пространства (см., например, [16]). Обозначим через $N_W(P, \delta)$ множество $N(P, \delta)$ с индуцированной из $W_{2,\delta}^{\infty}$ топологией, а через J – тождественный оператор $J : N_W(P, \delta) \to N(P, \delta)$. Так как оператор вложения $W_{2,\delta}^{\infty}$ в $L_{2,\delta}$ непрерывен, то в силу теоремы Банаха (см., например, [16]) оператор J^{-1} также непрерывен. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C = C_m > 0$ такая, что для всех $u \in N(P, \delta)$

$$\|u\|_{W_{2,\delta}^m} \leq C\|u\|_{L_{2,\delta}}. \tag{3.1}$$

Так как $m \in \mathbb{N}$, то отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int |(D_j u) g_\delta|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq C\|u g_\delta\|_{L_2}, \quad \forall u \in N(P, \delta). \tag{3.2}$$

Допустим, что верно обратное утверждение, т.е. при условиях теоремы $\delta > \rho$. Тогда из определения числа $\rho = \rho(P)$ следует существование некоторых последовательностей $\{t_s\}$ и $\{\xi^s\}$ чисел и точек из R^n таких, что $|\xi^s| = t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$d(\xi^s) = d_P(\xi^s) = \inf_{|\xi|=t_s} d(\xi) < \rho + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(\rho + \delta), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon = \delta - \rho > 0$. Пусть точки $\zeta^s \in D(P)$ выбраны так, что

$$d(\xi^s) = |\xi^s - \zeta^s|, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

Положим $u_s(x) = e^{i(x,\zeta^s)}$ $(s \in \mathbb{N})$. Тогда $u_s \in N(P, \delta)$ $(s \in \mathbb{N})$. Так как $\delta > \rho$, то в силу (3.3)-(3.4) имеем

$$|\mathrm{Im}\, \zeta^s| \le d(\xi^s) < \frac{1}{2}(\rho + \delta) < \delta, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Из (3.2), (1.8) и (3.5) получаем, что для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int |(D_j u_s) g_\delta|^2 \, dx\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int \left|\zeta_j^s e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta(x)\right|^2 dx\right]^{1/2}$$
$$\le C \left\| e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta \right\|_{L_2} \le C\kappa \left\| e^{\frac{1}{2}(\rho+\delta)|x|} e^{-\delta|x|} \right\|_{L_2} < \infty. \tag{3.6}$$

С другой стороны, по неравенству (1.8)

$$\int \left| e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta(x) \right|^2 dx \ge \kappa^{-1} \int \left[e^{-\frac{1}{2}(\rho+\delta)|x|} e^{-\delta|x|} \right]^2 dx = const > 0.$$

Следовательно, из (3.6) следует, что последовательность $\{|\zeta^s|\}$ ограничена, что в силу (3.3)–(3.4) противоречит тому, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.2. *Если $P \in I_n$ является почти гипоэллиптическим оператором, то существует число $\Delta > 0$ такое, что $N(P, \delta) \subset W_{2,\delta}^{\infty}$ при всех $\delta \in (0, \Delta)$.*

Доказательство : Из условия $P \in I_n$ и теоремы Зайденберга–Тарского (см. [1], Теоремы А.2.2 и А.2.5) следует существование некоторых чисел $C > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \le C\left[|P^k(\xi)| + 1\right], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Отметим, что многочлен $Q(\xi) = P^k(\xi)$ почти гипоэллиптичен и $d_Q(\xi) \equiv d_P(\xi)$, следовательно $\rho(Q) = \rho(P)$. Пусть для многочлена Q число $\Delta = \Delta(Q)$ выбрано по формуле (2.10). Тогда для всех $\delta \in (0, \Delta)$ выполняется утверждение Леммы 2.3 для оператора $Q(D)$.

Пусть $\delta \in (0, \Delta)$ и $u \in N(P, \delta)$. Покажем теперь, что $u \in W^{\infty}_{2,\delta}$. Для этого зафиксируем функцию $\varphi \in C_0^{\infty}$ такую, что $\varphi(x) \geq 0$ и $\int \varphi(x)dx = 1$, и обозначим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ для некоторого любого $\varepsilon > 0$. Тогда, ввиду доказательства Леммы 2.2, $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \in W^{\infty}_{2,\delta}$ и $\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, $u_\varepsilon \in N(Q, \delta)$ для любого $\varepsilon > 0$, поскольку $Q(D)u_\varepsilon = P^{k-1}(D)(P(D)u_\varepsilon) = 0$.

Докажем, что при фиксированной функции $u \in N(P, \delta)$ и $r \in \mathbb{N}_0$ множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ равномерно ограничено в $W^r_{2,\delta}$. Для этого докажем существование числа $C = C(r, P) > 0$ такого, что для всех $\varepsilon \in (0,1)$

$$\sum_{|\alpha|\leq r} \|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C\|u g_\delta\|_{L_2}. \tag{3.8}$$

Доказательство проведём по индукции по r. При $r = 0$ неравенство (3.8) следует из неравенства (2.4) при $m = 0$. Пусть (3.8) доказано для $k = 0, 1, \ldots, r-1$; докажем его для $k = r$. Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $|\alpha| = r$. Тогда $\beta \equiv \alpha - e^j \in \mathbb{N}_0^n$ для некоторого $j : 1 \leq j \leq n$, где $e^j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, с единицей на j-том месте. Используя формулу Лейбница, равенство Парсеваля и оценку (3.7) получим, что с некоторой постоянной $C > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon) g_\delta\|_{L_2} = \left\| \left[D^{e^j}\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\right] g_\delta \right\|_{L_2} \leq \left\| D^{e^j}\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} +$$
$$+ \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2} = \|\xi_j F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2}$$
$$\leq C\left\|Q(\xi) F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + C\left[\left\|F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2}\right].$$

Применяя равенство Парсеваля и свойство (1.9) функции g_δ заключаем, что для некоторой постоянной $C_1 = C_1(P^k) > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_1\left[\left\|Q(D)\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2}\right].$$

Следовательно, в силу Леммы 2.3, для некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_2\left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2}$$

поскольку $D^\beta u_\varepsilon \in N(Q, \delta)$ при $u \in N(P, \delta) \subset N(Q, \delta)$. В силу того, что мультииндекс α ($|\alpha| = r$) – произвольный, по индукции получаем, что для некоторых постоянных $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_3 \sum_{|\beta|=r-1}\left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2} \leq C_4\|u g_\delta\|_{L_2},$$

т.е. неравенство (3.8) доказано.

Теперь отметим, что в силу Леммы 2.4, множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ предкомпактно в W^{r-1}_{2,δ_1} при $\delta_1 > \delta$. Так как W^l_{2,δ_1} $(l = 0,1,\ldots)$ является полным пространством (пространством Банаха) и оператор обобщенного дифференцирования является замкнутым, то существует функция $v \in W^{r-1}_{2,\delta_1}$, являющаяся предельной точкой множества $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ по норме W^{r-1}_{2,δ_1}. С другой стороны, $\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. функция u также является предельной точкой множества $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ в $L_{2,\delta}$, и следовательно, предельной точкой в L_{2,δ_1} для любого $\delta_1 > \delta$. В силу единственности предела в D' и в силу вложения $u, v \in D'$ следует, что $u = v$, т.е. $u \in W^{r-1}_{2,\delta_1}$. Так как $r \in \mathbb{N}_0$ произвольно, то $u \in W^\infty_{2,\delta_1}$.

Итак, $u, u_\varepsilon \in W^\infty_{2,\delta} \subset C^\infty$ для произвольных $\delta > 0$ и $\delta_1 > \delta$, а для любого $r_1 \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{r_1}_{2,\delta_1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|(u_\varepsilon - u)g_{\delta_1}\|_{W^{r_1}_2} = 0.$$

Отсюда и из теоремы вложения пространства Соболева $W^{r_1}_2$ в $C^{(m)}$ (см. [15], теорема 10.4) и из того, что число $r_1 \in \mathbb{N}_0$ – произвольно, заключаем, что для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(u_\varepsilon - u)g_{\delta_1}\|_{C^{(r)}} = 0,$$

что вместе со свойством (1.8) функции g_δ влечет

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{C^{(r)}(K)} = 0 \tag{3.9}$$

для любого $r \in \mathbb{N}$ и для произвольного компакта K.

Наконец докажем, что $u \in W^\infty_{2,\delta}$. По теореме о переходе к пределу под знаком интеграла из (3.9) имеем

$$\sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u(x)|^2 g^2_\delta(x)dx = \sum_{|\alpha|\le r} \int_K \left(\lim_{\varepsilon\to 0} |D^\alpha u_\varepsilon(x)|\right)^2 g^2_\delta(x)dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx. \tag{3.10}$$

С другой стороны, по уже доказанной части теоремы, множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ равномерно ограничено в $W^r_{2,\delta}(\mathbb{E}^n)$, и поэтому для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ и произвольного компакта $K \in \mathbb{E}^n$ имеем

$$\sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx \le \sum_{|\alpha|\le r} \int_{\mathbb{E}^n} |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx = \|u_\varepsilon\|_{W^r_{2,\delta}} \le C_5,$$

где $C_5 > 0$ – постоянная. Отсюда и из (3.10) следует, что $u \in W^r_{2,\delta}$. Теорема доказана.

Объединяя утверждения теорем 3.1 и 3.2, приходим к основному результату, теореме 1 сформулированной в параграфе 1.

Abstract. A linear, differential operator $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ with constant coefficients is called almost hypoelliptic if all derivatives $D^\alpha P$ of the characteristic polynomial, i.e. of the complete symbol $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ can be estimated by $P(\xi)$. The paper proves that all solutions of the differential equation $P(D)u = 0$ that are square summable with a definite exponential weight are infinitely differentiable functions if and only if the operator $P(D)$ is almost hypoelliptic.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, vol. 2, Springer - Verlag, 1983.
2. L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partiellement hypoelliptiques", Math. Scand. vol. 9, pp. 5-21, 1961.
3. L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division", Amer. J. Math., vol. 82, pp. 522-588, 1960.
4. f. John, "Continuous dependence on data for solutions of PDE with a prescribed bound", Comm. Pure Appl. Math., vol. 13, pp. 551-585, 1960.
5. L. Hörmander, "On the singularities of solutions of PDE with constant coefficients", Israel Math. J., vol. 13, pp. 82-105, 1972.
6. Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", Труды МИАН СССР, том 77, стр. 45-64, 1965.
7. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, стр. 63-67, Ереван, 1982.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 5, стр. 453 - 470, 1986.
9. L. Gording, "Linear hyperbolic PDE with constant coefficients", Acta Math., vol. 85, pp. 1 - 62, 1951.
10. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Оценки решений негипоэллиптических уравнений с данным носителем гипоэллиптичности", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 4, стр. 315-336, 1987.
11. Г. Г. Казарян, "Некоторые оценки производных многочленов с постоянными коэффициентами", Известия НАН Армении, серия Математика, том 34, № 3, стр. 44-63, 1999.
12. G. G. Kazaryan, "On almost-hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk., vol. 398, no. 6, pp. 701-703, 2004.
13. O. R. Gabrielyan, "Comparison of power and strength of polynomials in R^2", in : Complex Analysis, Diff. Equations and Related Topics, Proc. of ISAAC Conf. on Analysis, pp. 41 - 51, Yerevan, 2002.

14. H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan , "Behavior at infinity of polynomials of two variables", in : Topics in Analysis and its Appl., NATO Sci. Series, pp. 163-190, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, vol. 147, 2004.
15. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, Москва, 1996.
16. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.

Поступила 9 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № *6, 2006, 57–64*

О ЗАДАЧЕ КОШИ В КЛАССАХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Н. Маргарян, В. М. Харатян

Институт математики НАН Армении
Армянский государственный педагогический университет

Резюме. Найдено необходимое и достаточное условие на эллиптический оператор второго порядка от двух переменных, при котором задача Коши разрешима в классах многочленов.

Как известно (см. [1]) задача Коши для эллиптических операторов (в частности для уравнения Лапласа) при произвольных непрерывных данных неразрешима. Несмотря на это в работе С. Н. Мергеляна [1] доказано, что каковы бы ни были произвольные непрерывные функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, заданные на окружности σ, и число $\varepsilon > 0$, значения функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ можно изменить не более чем на ε так, чтобы для новых данных, задача Коши для уравнения Лапласа была разрешима, причём решение представляется гармоническим полиномом. Более того, при $\varepsilon \to 0$ степень соответствующего полинома возрастает. В работе [1] также получены оценки для степеней полинома в зависимости от числа ε и функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$.

В работе [2] указаны условия на коэффициенты дифференциального уравнения, при которых рассмотренная там задача Коши в полупространстве всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений. Там же приведён метод решения этой задачи.

В работе [3] рассмотрена задача Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ переменных x, y, z, с начальными условиями вида

$$U|_{z=0} = g(x,y), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = f(x,y),$$

где f и g функции голоморфные в некоторой бицилиндрической области $D \subset \mathbb{C}^2$. Для решения этой задачи получено новое интегральное представление, исследовано распределение особенностей ядра этого интегрального представления.

В [4] рассмотрена следующая задача : **Требуется найти регулярное решение эллиптической системы**

$$\sum_{i+j\le 2} A_{ij}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j} = h \tag{1}$$

принадлежащее классу Гёльдера $C_{\alpha'}(\overline{D})$, удовлетворяющее граничному условию

$$B_{10}u_x + B_{01}u_y + B_{00}u = f \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – искомый вектор, а $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ суть заданные действительные векторы соответственно в $\overline{D}$ и на Γ, A_{ij} и B_{ij} – действительные квадратные матрицы n-го порядка, заданные соответственно в D и на Γ. Предполагается, что матрицы A_{ij} и B_{ij} принадлежат классам $C^{i+j}_\alpha(\overline{D})$ и $C^{i+j}_\alpha(\Gamma)$ соответственно, а f и h принадлежат классам $C_\alpha(\Gamma)$ и $C_\alpha(\overline{D})$ соответственно.

В [4] показано, что при выполнении некоторых условий на коэффициенты A_{ij} и B_{ij}, однородная задача (1)–(2) имеет конечное число линейно независимых решений. Получено также необходимое и достаточное условие для разрешимости неоднородной задачи (1)–(2).

В настоящей работе исследуется задача Коши для эллиптических операторов второго порядка от двух переменных в классах многочленов. Найдены необходимые и достаточные условия на оператор, при которых соответствующая задача Коши разрешима при любых начальных данных из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$.

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{E}^n$ обозначим евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n_+ = \{x \in \mathbb{E}^n \mid x_n > 0\}$, Ω – область из $\mathbb{E}^n$ или $\mathbb{E}^n_+$, а $L_k(\Omega)$ $(k \in N_0)$ – множество многочленов от n переменных, порядок которых не превосходит k.

Следующие леммы используются при доказательстве основных результатов статьи.

Лемма 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ и $f \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Если хотя бы одно из следующих двух уравнений*

$$LU \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU = f(x) \tag{3}$$

$$LU \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU = tf(x) \tag{3'}$$

имеет нетривиальное решение вида $U = t^2 h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$, $k \in N_0$, то $b = 0 = c$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (3) имеет решение вида

$$U(x,t) = t^2 h(x,t), \qquad \text{где} \quad h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+).$$

Далее, пусть $U(x,t) = t^2 h(x,t) = \sum_{j=0}^r t^{2+j} q_j(x)$, где $r \in \mathbb{N}_0$, $q_r(x) \not\equiv 0$ и $q_j(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда

$$LU = \sum_{j=0}^{r} \big[t^j (j+2)(j+1) q_j(x) + t^{j+2} q_j''(x) + a t^{j+2} q_j'(x) +$$
$$+ b(j+2) t^{j+1} q_j(x) + c t^{j+2} q_j(x)\big] \equiv f(x),$$

или, что тоже самое,

$$\begin{cases} q_r''(x) + a q_r'(x) + c q_r(x) \equiv 0 \\ q_{r-1}''(x) + a q_{r-1}'(x) + c q_{r-1}(x) + b(r+2) q_r(x) \equiv 0 \\ q_{j-2}''(x) + a q_{j-2}'(x) + c q_{j-2}(x) + b(j+1) q_{j-1}(x) + (j+2)(j+1) q_j(x) \equiv 0, \\ \qquad\qquad\qquad j = 2, \dots, r \\ 2b q_0(x) + 6 q_1(x) \equiv 0 \\ 2 q_0(x) \equiv f(x) \end{cases} \tag{4}$$

Так как $q_r \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ и $q_r(x) \not\equiv 0$, то из первого равенства системы (4) следует, что $c = 0$. Кроме того, очевидно, $ord\, q_r \le 1$. Докажем, что $b = 0$. Предположим обратное, что $b \neq 0$. Тогда из второго тождества системы (4) при $c = 0$ непосредственно следует, что $q_{r-1}(x) \not\equiv 0$ и $ord\, q_{r-1} \ge 1 + ord\, q_r$. В силу третьих тождеств системы (4) по индукции (при $c = 0$) получаем, что $ord\, q_{j-2} \ge 1 + ord\, q_{j-1}$, $j = 2, \dots, r$. Это противоречит предпоследнему тождеству, так как $b \neq 0$ по предположению. Полученное противоречие доказывает, что $b = 0$.

Теперь докажем утверждение леммы для уравнения (3′). Действуя как и в первом случае, получаем

$$\begin{cases} q_r''(x) + aq_r'(x) + cq_r(x) \equiv 0 \\ q_{r-1}''(x) + aq_{r-1}'(x) + cq_{r-1}(x) + b(r+2)q_r(x) \equiv 0 \\ q_{j-2}''(x) + aq_{j-2}'(x) + cq_{j-2}(x) + b(j+1)q_{j-1}(x) + (j+2)(j+1)q_j(x) \equiv 0, \\ \qquad\qquad j = 2, \ldots, r \\ 2bq_0(x) + 6q_1(x) \equiv f(x) \\ 2q_0(x) \equiv 0 \end{cases} \tag{4'}$$

Так как $q_r(x) \not\equiv 0$ и $q_r \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$, то из первого тождества системы (4′) следует, что $c = 0$ и $ord\, q_r \leq 1$. Покажем, что $b = 0$. Предполагая обратное ($b \neq 0$) и действуя аналогично, получаем, что $ord\, q_{j-2} \geq 1 + ord q_{j-1}$, $j = 2, \ldots, r$. Это противоречит последнему тождеству системы (4′). Следовательно, утверждение леммы верно и для уравнения (3′). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда оба уравнения*

$$LU = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} = f(x) \tag{5}$$

и

$$LU = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} = tf(x) \tag{5'}$$

имеют решение вида $t^2 h(x,t)$, где $h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5). Пусть $ord\, f = r$, Обозначим через $P \equiv P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$, $P^j f \equiv P(P^{j-1}f)$, $j = 1, 2, \ldots$, $P^0 = I$ (тождественный оператор), $q_{2j}(x) \equiv (-1)^j \frac{P^j f}{(2(j+1))!}$, $j = 0, 1, \ldots$ Очевидно,

$$P^j f = 0 \quad \text{when} \quad j \geq r+1. \tag{6}$$

Далее, положим

$$h(x,t) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j t^{2j} \frac{P^j f}{(2(j+1))!} \quad \text{и} \quad U(x,t) = t^2 h(x,t).$$

Покажем, что многочлен U является решением уравнения (5). В силу (6) имеем

$$LU \equiv \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \left[(2j+2)(2j+1)t^{2j}\frac{P^j f}{(2(j+1))!} + t^{2+2j}\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P^j f)}{(2(j+1))!}+\right.$$

$$\left.+at^{2+2j}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(P^j f)}{(2(j+1))!}\right] == 2\frac{P^0 f}{2!} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2+2j}\frac{P^{j+1} f}{(2(j+1))!}+$$

$$+(-1)^r t^{2+2r}\frac{P^{r+1} f}{(2(r+1))!} = f + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2+2j}\frac{P^{j+1} f}{(2(j+1))!} =$$

$$= f + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2j}\frac{P^{j+1} f}{(2j)!} \equiv f.$$

Теперь рассмотрим уравнение (5′T). Пусть $ord\, f = r$, $P = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$. Положим

$$h(x,t) = \sum_{j=0}^{r} t^{2j+1}(-1)^j\frac{P^j f}{(2j+3)!} \quad \text{и} \quad U(x,t) = t^2 h(x,t).$$

Покажем, что многочлен $U(x,t)$ является решением уравнения (5′). Так как $P^j f(x) \equiv 0$ при $j \geq r+1$, то имеем

$$LU = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{1}{(2j+3)!}\left[(2j+3)(2j+2)t^{2j+1}P^j f(x) + t^{2j+3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P^j f(x))+\right.$$

$$\left.+at^{2j+3}\frac{\partial}{\partial x}(P^j f(x))\right] = tf(x) + \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}t^{2j+1}P^j f(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{t^{2j+3}}{(2j+3)!}P^{j+1}f(x) + (-1)^r\frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1}f(x) =$$

$$= tf(x) + \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}t^{2j+1}P^j f(x) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}P^j f(x)+$$

$$+(-1)^r\frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1}f(x) = tf + (-1)^r\frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1}f(x) = tf(x).$$

Лемма 2 доказана.

Основными результатами настоящей работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$. Если для любых $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ следующая задача Коши*

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial t} + cU = 0 \\ U(x,0) = f_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x) \end{cases} \tag{7}$$

имеет решение из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$, то $b = c = 0$.

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ такие многочлены, что

$$g_0(x) + tg_1(x) \equiv -(f_0'' + af_0' + cf_0 + bf_1) - t(f_1'' + af_1' + cf_1) \not\equiv 0.$$

Обозначим $V(x,t) = U(x,t) - f_0(x) - tf_1(x)$, где $U(x,t)$ является решением задачи Коши (7). Тогда многочлен $V(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$ является решением следующей задачи Коши :

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}V + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial t} + cV = \\ \qquad = -(f_0'' + af_0' + cf_0 + f_1) - t(f_1'' + af_1' + cf_1) \equiv g_0(x) + tg_1(x) \\ V(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}V(x,0) = 0 \end{cases} \tag{7'}$$

Из условия $g_0(x) + tg_1(x) \not\equiv 0$ следует, что $V(x,t) \not\equiv 0$ в $\mathbb{E}^2_+$. Тогда в силу леммы 1 имеем $b = c = 0$, ибо из начальных условий задачи (7′) следует, что многочлен $V(x,t)$ можно представить в виде $t^2h(x,t)$, где $h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ и $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда следующая задача Коши*

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = f_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x) \end{cases} \tag{8}$$

имеет решение из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$.

Доказательство. Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial t^2}V + a\frac{\partial V}{\partial x} = -(f_0'' + af_0') - t(f_1'' + af_1'). \tag{9}$$

Если $(f_0'' + af_0') + t(f_1'' + af_1') \equiv 0$, то $ord\, f_0 \leq 1$, $ord\, f_1 \leq 1$ и, следовательно, многочлен $U = f_0(x) + tf_1(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$ является решением задачи Коши (8).
Если $f_1'' + af_1'' \not\equiv 0$ и $f_0'' + af_0'' \equiv 0$, то $ord\, f_0 \leq 1$. Поэтому в силу Леммы 2 (см. (5)) уравнение (9) имеет решение V вида $t^2h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Тогда многочлен

$$U(x,t) = t^2h(x,t) + f_0(x) + tf_1(x), \quad t > 0,$$

будет решением задачи Коши (8).
Если $f_0''+af_0'' \not\equiv 0$ и $f_1''+af_1'' \equiv 0$, то $ord\, f_1 \leq 1$. Поэтому в силу леммы 2 (см. (5′)) уравнение (9) имеет решение V вида $t^2h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Тогда многочлен

$$U(x,t) = t^2h(x,t) + tf_1(x) + f_0(x), \quad t > 0,$$

будет решением задачи Коши (8).
Наконец, если $f_0'' + af_0'' \not\equiv 0$ и $f_1'' + af_1'' \not\equiv 0$, то в силу леммы 2 уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H + \frac{\partial^2}{\partial t^2}H + a\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_0'' + af_0') \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}H + \frac{\partial^2}{\partial t^2}H + a\frac{\partial H}{\partial x} = -t(f_1'' + af_1')$$

имеют решения H_1, H_2 вида $t^2h_1(x,t)$, $t^2h_2(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Следовательно,

$$U(x,t) = t^2h_1(x,t) + f_0(x) + t^2h_2(x,t) + tf_1(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$$

будет решением задачи Коши (8). Теорема доказана.

Определение. (см. [5], стр. 178) Функция $U(x,t) \in C^2(\mathbb{E}^2)$ называется решением обобщённой задачи Коши (7), если

$$\begin{cases} LU(x,t) \equiv 0, & \forall (x,t) \in \mathbb{E}^2 \\ U(x,0) = f_0(x), & x \in \mathbb{E}^1 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x), & x \in \mathbb{E}^1 \end{cases} \tag{10}$$

Замечание. Из доказательства теоремы 2 непосредственно следует, что аналитическое продолжение построенного решения задачи Коши (7) является решением обобщённой задачи Коши (10).

Авторы благодарят профессора Н. Е. Товмасяна за постановку задачи и полезные обсуждения.

Abstract. The paper gives some necessary and sufficient conditions under which the Cauchy problem for second order elliptic operator of two variables is solvable in the class of polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Мергелян, “Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа”, УМН, том XI, вып. 5(71), 1956.
2. Н. Е. Товмасян, “Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщённых функций”, Дифференциальные уравнения, том 18, № 1, стр. 132 – 138, 1982.
3. С. Д. Шалагинов, “Задача Коши для уравнения Лапласа в комплексном пространстве”, Дифференциальные уравнения, том 16, № 5, стр. 947 – 949, 1980.
4. Н. Е. Товмасян, “Некоторые граничные задачи для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости”, Доклады АН СССР, том 160, стр. 1275 – 1278, 1965.
5. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Наука, Москва, 1988.

Поступила 18 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 65–74

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении
E-mails : aghavard@hotbox.ru, Khach_82@rambler.ru

Резюме. В работе рассмотрена краевая задача, имеющая применение в физической кинетике. Доказано существование решения задачи в пространстве Соболева $W_1^1(0,+\infty)$. Получена структура решения в зависимости от физического параметра λ. Указаны три диапазона параметра : $\lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$, в зависимости от которого решение качественно меняется.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующая система интегро-дифференциальных уравнений :

$$\mu\frac{\partial\varphi(x,\mu)}{\partial x} + \varphi(x,\mu) = |\mu| E(x), \tag{0.1}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\lambda\int_{-1}^{1}\varphi(x,\mu')d\mu', \quad -1 \le \mu \le 1, \quad \lambda > 0. \tag{0.2}$$

К уравнениям присоединяются следующие граничные условия :

$$\varphi^{+}(0,\mu) = a\int_{0}^{1}\varphi^{-}(0,-\mu)\,d\mu, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

$$\varphi^{-}(x,\mu) \to 0, \quad x \to +\infty, \quad \text{при} \quad -1 < \mu < 0, \tag{0.4}$$

$$E(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} E(x) = 0, \tag{0.5}$$

где

$$\varphi(x,\mu) = \begin{cases} \varphi^{+}(x,\mu) & \text{если} \quad 0 \le \mu \le 1, \\ \varphi^{-}(x,\mu) & \text{если} \quad -1 \le \mu \le 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Системой уравнений (0.1) – (0.2) описывается стационарное распределение $\varphi(x,\mu)$ электронов в полубесконечной плазме, ограниченной плоскостью $x=0$, при наличии чисто потенциального внешнего электрического поля. Здесь μ – косинус угла между вектором скорости электрона и нормалью к границе $x=0$, $\lambda = 3\left(\frac{\Omega_p}{\nu}\right)^2$, где Ω_p – плазменная частота, ν – частота столкновений электронов, $x=\frac{\tau}{l}$ – безразмерная переменная, τ – геометрическая глубина среды, l – средняя длина свободного пробега электрона. Граничное условие (0.3) выражает условие непротекания.

Уравнения (0.1)–(0.2) выводятся из стационарного модельного уравнения Больцмана в линейном приближении, без учёта в интеграле столкновений члена, учитывающего энергетические взаимодействия. Эти уравнения составляют связанную систему уравнений, определяющих одновременно как функцию распределения $\varphi(x,\mu)$, так и поле $\vec{E}(x)$ (см. [1, 2]). Предполагается также, что электрическое поле $\vec{E}(x)$ направлено перпендикулярно границе раздела $x=0$, по положительному направлению оси OX. Поэтому вектор электрического поля $\vec{E}$ имеет вид $\vec{E}=(E(x),0,0)$, где $E(x)$ подлежит определению.

В настоящей работе доказывается существование решения задачи (0.1)-(0.5) и изучается его зависимость от физического параметра λ. Оказывается, решение задачи, в зависимости от λ, качественно меняется.

§1. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Начнем со следующей леммы.

Лемма 1. *Граничная задача (0.1)–(0.5) эквивалентна следующему интегро-дифференциальному уравнению относительно функции $E(x)$:*

$$\frac{dE}{dx} + C\tilde{g}(x) + \lambda\int_0^\infty K(x-t)E(t)\,dt = 0, \tag{1.1}$$

и

$$\varphi(x,\mu) = \begin{cases} Ce^{-\frac{x}{\mu}} + \int_0^x e^{-\frac{(x-t)}{\mu}}E(t)dt, & \mu>0,\\ \int_x^\infty e^{\frac{(t-x)}{\mu}}E(t)dt, & \mu<0,\end{cases}$$

где $K(x)=\int_1^\infty e^{-|x|s}\frac{ds}{s^2}$,

$$\tilde{g}(x) = \lambda\int_1^\infty e^{-xs}\frac{ds}{s^2}, \tag{1.2}$$

$$C=\int_0^\infty \gamma(x)E(x)dx, \quad \gamma(x) = a\int_1^\infty e^{-sx}\frac{ds}{s^2}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если $\mu > 0$, то учитывая граничное условие (0.3), из (0.1) получаем

$$\varphi^{+}(x,\mu) = Ce^{-\frac{x}{\mu}} + \int_0^x e^{-\frac{(x-t)}{\mu}} E(t)dt, \tag{1.4}$$
$$C = a\int_0^\infty dx \int_1^\infty e^{-xs} E(x)\frac{ds}{s^2}.$$

Если $\mu < 0$, то имеем

$$\varphi^{-}(x,\mu) = \int_x^\infty e^{\frac{(t-x)}{\mu}} E(t)dt. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) и (1.5) в (0.2) и используя теорему Фубини (см., например, [3]), мы приходим к (1.1). Обратное утверждение доказывается аналогично.

Заметим, что "свободный член" $C\widetilde{g}$ уравнения (1.1) зависит от самого решения. В силу линейности уравнения (1.1) его решение ищем в виде

$$E(x) = f(x) + Ch(x), \tag{1.6}$$

где $f(x)$ удовлетворяет следующему однородному уравнению :

$$\frac{df}{dx} + \lambda\int_0^\infty K(x-t)f(t)dt = 0, \quad f(+\infty) = 0, \tag{1.7}$$

а $h(x)$ – решение соответствующего неоднородного уравнения :

$$\frac{dh}{dx} + \widetilde{g}(x) + \lambda\int_0^\infty K(x-t)h(t)dt = 0, \quad h(+\infty) = 0. \tag{1.8}$$

Умножая обе части (1.6) на $\gamma(x)$ и интегрируя по x от 0 до $+\infty$, будем иметь

$$C = \left(\int_0^\infty \gamma(t)f(t)dt\right)\left(1 - \int_0^\infty \gamma(t)h(t)\,dt\right)^{-1}. \tag{1.9}$$

Итак, сперва решаются уравнения (1.7) и (1.8), а потом определяется C по формуле (1.9). За счёт выбора свободного параметра a обеспечивается выполнение условия $\int_0^\infty \gamma(t)h(t)dt \neq 1$. Окончательное решение уравнения (1.1) задаётся по формуле (1.6).

Нижеследующие параграфы настоящей статьи посвящены решениям уравнений (1.7) и (1.8).

§2. ОДНОРОДНОЕ И НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА С ВПОЛНЕ МОНОТОННЫМ ЯДРОМ

Для изучения и решения задачи (1.7), (1.8) будем пользоваться некоторыми утверждениями из теории уравнений Винера–Хопфа :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} T(x-t)S(t)\,dt, \quad S(0) = 1, \quad S(x) > 0, \tag{2.1}$$

$$H(x) = g(x) + \int_0^{\infty} T(x-t)H(t)\,dt, \quad g \in L^+, \tag{2.2}$$

где ядро $T(x)$ – вполне монотонная функция, принадлежащая пространству $L_1(-\infty, +\infty)$.

Важную роль в вопросе разрешимости уравнения (2.1) играет первый момент ядра T :

$$\nu \equiv \nu(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} xT(x)dx. \tag{2.3}$$

Будем считать, что интеграл (2.3) сходится абсолютно. Обозначим через $\widehat{T}(s)$ преобразование Фурье функции $T(x)$:

$$\widehat{T}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}T(x)dx \quad \text{и} \quad \widehat{T}(0) \equiv \gamma_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx \tag{2.4}$$

Сперва рассмотрим однородное уравнение (2.1).

a) Если $\gamma_0 < 1$, то уравнение (2.1) имеет только тривиальное решение во всех естественных функциональных пространствах (см. [4], [5]).

b) Если $\gamma_0 = 1$ и $\nu < 0$, то уравнение (2.1) имеет ограниченное, абсолютно непрерывное, монотонно возрастающее решение (см. [4], [5]) :

$$S(x) = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ux}}{u} d\rho(u), \tag{2.5}$$

где ρ – неотрицательная мера на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\rho(u)}{u} < +\infty. \tag{2.6}$$

c) Если $\gamma_0 = 1$ и $\nu = 0$, то уравнение (2.1) имеет абсолютно непрерывное, монотонное, неограниченное решение такое, что

$$S(x) = 1 + mx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ux}}{u} d\rho(u), \quad \text{где} \quad 0 \leq m. \tag{2.7}$$

d) Если $\gamma_0 = 1$ и $\nu > 0$, то уравнение (2.1) имеет решение в классе локально интегрируемых функций медленного (степенного) роста (см. [5]).

e) Если $\gamma_0 > 1$ и функция $w(z) = 1 - \widehat{T}(-iz)$ имеет обычный нуль z_0, для которого $\Re z_0 \geq 0$ и $\Im z_0 > 0$, то уравнение (2.1) имеет нетривиальное решение, определяемое единственным образом с точностью до постоянного множителя в классе ограниченных функций. Решение уравнения (2.1) задаётся формулой (см. [5]) :

$$S(x) = 2Ae^{-\beta_1 x}\cos(\omega x - \theta) - \int_0^{+\infty} e^{-xu}d\sigma(u), \tag{2.8}$$

где $\beta_1 = \Re z_0$, $\omega = \Im z_0$, $Ae^{i\theta} = (\omega'_\sigma(z_0))^{-1}$, а σ – конечная мера на $\mathbb{R}^+$, непрерывная в нуле.

Перейдём к уравнению (2.2). Аналитическому решению уравнения (2.2) для вполне монотонных ядер с помощью обобщённого уравнения В. Амбарцумяна и построению мер ρ и σ посвящены многочисленные работы (см. например [4, 6] и ссылки в них), и на нём мы останавливаться не будем. Основными фактами являются :

1) i) Если $\gamma_0 = 1$ и $\nu < 0$, то уравнение (2.2) обладает решением $H \in L_1(0, +\infty)$.
ii) Если $\gamma_0 = 1$ и $\nu \geq 0$, то уравнение (2.2) имеет решение в $L_1^{loc}(0, +\infty)$ с асимптотикой $\int_0^x H(t)dt = o(x^2)$ при $x \to +\infty$ (см. [4]).

2) Если $\gamma_0 > 1$ и характеристическое уравнение $1 - \widehat{T}(s) = 0$ имеет действительный корень, то уравнение (2.2) имеет решение вида $H(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) \in L_1(0, +\infty)$, а $f_2(x) \in C_M(0, +\infty)$ (см. [7]). Пространство $C_M(0, +\infty)$ состоит из функций, непрерывных и ограниченных в $(0, +\infty)$.

§3. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (1.7)

Решение задачи (1.7) с ядром (1.2) будем искать в пространстве Соболева $W_1^1(0, +\infty)$, состоящее из функций f, таких, что $f^{(k)} \in L_p(0, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Интегрируя обе части уравнения (1.7) и (1.8) от $\tau > 0$ до $+\infty$, с учётом условий $f(+\infty) = 0$, $h(+\infty) = 0$ и теоремы Фубини (см. [3]), приходим к уравнениям :

$$f(\tau) = \lambda \int_0^\infty T_0(\tau - t)f(t)\,dt, \tag{3.1}$$

$$h(\tau) = g_0(\tau) + \lambda \int_0^\infty T_0(\tau - t)h(t)\,dt, \tag{3.2}$$

где

$$T_0(x) = \int_x^\infty K(t)dt, \qquad g_0(x) \equiv \int_x^\infty \widetilde{g}(t)dt.$$

Из представления функции $K(t)$ следует, что

$$T_0(x) = \begin{cases} \int_1^\infty e^{-xs} \frac{ds}{s^3} & \text{если} \quad x \geq 0, \\ 1 - \int_1^\infty e^{xs} \frac{ds}{s^3} & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Нетрудно убедиться, что $T_0(x) \notin L(-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим функцию

$$T(x) = T_\alpha(x) = e^{\alpha x} \lambda T_0(x), \quad \alpha > 0. \tag{3.4}$$

Для всякого $\alpha > 0$ функция T_α интегрируема на $(-\infty, 0]$. Из (3.3) следует, что T_α интегрируема на $[0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. Следовательно, $T_\alpha(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ при $0 < \alpha < 1$.

Отметим, что если $0 < \alpha < 1$, то умножив обе части (3.1) и (3.2) на $e^{\alpha x}$, приходим к уравнениям (2.1) и (2.2) относительно функции $S(x) = e^{\alpha x} f(x)$ и $H(x) = e^{\alpha x} h(x)$, $(g(x) = g_0(x) e^{\alpha x})$.

Рассмотрим следующие три случая a) $\gamma_0 < 1$, b) $\gamma_0 = 1$, c) $\gamma_0 > 1$.

a) $\gamma_0 < 1$. Как мы уже отметили, в этом случае однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Из (1.6) и (1.9) следует, что только тривиальным решением обладает исходное уравнение (1.1) в определённых функциональных пространствах.

b) Если $\gamma_0 = 1$, то после простых выкладок, с учетом (3.3) и (3.4), приходим к следующему уравнению относительно α :

$$\alpha^3 \left[\ln \frac{1}{1 - \alpha^2} \right]^{-1} = \lambda. \tag{3.5}$$

Далее, рассмотрим функцию

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \alpha^3 \left[\ln \frac{1}{1 - \alpha^2} \right]^{-1}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Нетрудно убедиться, что эта функция непрерывна на $(0, 1)$, причём $\lambda(\alpha) > 0$ и $\lambda(+0) = \lambda(1-) = 0$. Функция $\lambda(\alpha)$ строго возрастает на $(0, \alpha_0]$ и строго убывает на $[\alpha_0, 1)$. Точка максимума определяется из следующего уравнения :

$$\frac{2\alpha^2}{3(1 - \alpha^2)} = \ln \frac{1}{1 - \alpha^2}. \tag{3.6}$$

Тогда существуют обратные к функции $\lambda(\alpha)$ на $(0, \alpha_0]$ и $[\alpha_0, 1)$, которые обозначим, соответственно, через $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$.

Вычисляя значение первого момента ядра $T(x) = T_\alpha(x) = e^{\alpha x}\lambda T_0(x)$, получим

$$\nu = \nu(T_\alpha) = \frac{3\lambda}{\alpha^4}\left(\frac{2\alpha^2}{3(1-\alpha^2)} - \ln\frac{1}{1-\alpha^2}\right). \tag{3.7}$$

Используя представления (3.5), (3.6), (3.7) легко можно доказать следующую лемму.

Лемма 2.

a) $\nu(T_\alpha) < 0$ *при* $\alpha = \alpha_1(\lambda)$ *и* $\lambda < \lambda(\alpha_0) = \lambda_0$,

b) $\nu(T_\alpha) = 0$ *при* $\alpha = \alpha_0$ *и* $\lambda = \lambda(\alpha_0) = \lambda_0$,

c) $\nu(T_\alpha) > 0$ *при* $\alpha = \alpha_2(\lambda)$ *и* $\lambda < \lambda(\alpha_0) = \lambda_0$.

Отсюда видно, что число $\alpha = \alpha_1(\lambda)$ является единственным значением α, для которого одновременно

$$\gamma_0 = 1 \quad \text{и} \quad \nu \le 0. \tag{3.8}$$

Отсюда и из некоторых фактов предыдущего параграфа вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $0 < \lambda \le \lambda_0 = \lambda(\alpha_0)$, *то в пространстве* $W_1^1(0,+\infty)$ *задача (1.7) имеет решение вида*

$$f(x) = e^{-\alpha_1(\lambda)x}S(x),$$

где

i) если $0 < \lambda < \lambda_0$, *то* $S(x)$ *является монотонно возрастающей, абсолютно непрерывной, ограниченной функцией вида (2.5), а* $\alpha = \alpha_1(\lambda)$ *– обратная к функции* $\lambda(\alpha)$ *на* $(0, \alpha_0]$,

ii) если $\lambda = \lambda_0$, *то* $S(x)$ *является монотонно возрастающей, абсолютно непрерывной, неограниченной функцией вида (2.7), а* $\alpha = \alpha_0$ *является решением характеристического уравнения (3.6).*

Теорема 2. *Если* $0 < \lambda \le \lambda_0 = \lambda(\alpha_0)$, *то в пространстве* $W_1^1(0,+\infty)$ *задача (1.8) имеет решение вида*

$$h(x) = e^{-\alpha_1(\lambda)x}H(x),$$

где

i) если $0 < \lambda < \lambda_0$, *то* $H(x) \in L_1(0,+\infty)$,

ii) если $\lambda = \lambda_0$, *то* $\int_0^x H(t)dt = o(x^2)$ *при* $x \to +\infty$.

В случае c) $\gamma_0 > 1$ сразу видно, что $\lambda > \lambda(\alpha_0) \equiv \lambda_0$.

Рассмотрим теперь функцию $w(z) = 1 - \widehat{T}(-iz)$, приведённую в предыдущем параграфе. Очевидно, имеем

$$\widehat{T}(-iz) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}T_\alpha(t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^{zt}T_\alpha(t)dt + \int_{0}^{+\infty} e^{zt}T_\alpha(t)dt. \tag{3.9}$$

Из представления ядра $T_\alpha(x)$ сразу следует, что если $0 < \Re z < 1 - \alpha$, то интегралы в (3.9) сходятся, и поэтому

$$\widehat{T}(-iz) = \frac{\lambda}{(z+\alpha)^3} \ln \frac{1}{|1-(z+\alpha)^2|}. \tag{3.10}$$

В нашем случае уравнение $w(z) = 0$ принимает вид

$$2\beta^3 + \lambda \ln|1-\beta^2| - i\lambda \arctan \frac{2\beta_1\omega}{1+\omega^2-\beta_1^2} = 0, \tag{3.11}$$

где $\beta = z + \alpha$, $\beta_1 = \Re\beta$ и $\omega = \Im\beta$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 3. *1) Если $\lambda > \lambda_0$ и существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что уравнение (3.11) имеет комплексный корень z_0 $(0 < \Re z_0 < 1-\alpha,\ \Im z_0 > 0)$, то в пространстве $W_1^1(0,+\infty)$ задача (1.7) имеет решение вида $f(x) = e^{-\alpha x}S(x)$, где $S(x)$ задаётся формулой (2.8).*

2) Если $\lambda > \lambda_0$ и существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что характеристическое уравнение $1 - \widehat{T}(s) = 0$ имеет действительный корень, то уравнение (1.8) имеет решение вида $h(x) = e^{-\alpha x}H(x)$, где

$$H(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) \in L_1(0,+\infty), \quad f_2(x) \in C_M(0,+\infty). \tag{3.12}$$

Замечание 1. Из (3.11) следует, что комплексный корень $\beta = \beta_1 + i\omega$ определяется из следующей системы трансцендентных уравнений :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} \ln\left[(1+\omega^2-\beta_1^2)^2 + 4\beta_1^2\omega^2\right] + 2\beta_1^3 - 6\beta_1\omega^2 = 0 \\ \lambda \arctan \dfrac{2\beta_1\omega}{1+\omega^2-\beta_1^2} + 2\omega^3 - 6\beta_1^2\omega = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda = \dfrac{6}{\pi}$, имеем $\beta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\omega = \dfrac{1}{2}$. В результате численного решения уравнения (3.5), (3.6) получается $\lambda_0 \approx 1,176$. Условия Теоремы 3 выполняются при $\lambda = \dfrac{6}{\pi} > \lambda_0$ $(0 < \Re z_0 < 1-\alpha,\ \Im z_0 > 0)$.

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краевая задача (0.1) – (0.5) в пространстве $W_1^1(0,+\infty)$ имеет нетривиальное решение, причём

1) если $0 < \lambda < \lambda_0$ $(\gamma_0 = 1)$, то

$$E(x) = [S(x) + CH(x)]\, e^{-\alpha_1(\lambda)x}, \tag{4.1}$$

где $H(x) \in L_1(0,+\infty)$, $S(x)$ задается формулой (2.5) и $S(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$,

2) если $\lambda = \lambda_0$, $(\gamma_0 = 1)$, то

$$E(x) = [S(x) + CH(x)]\, e^{-\alpha_0 x}, \tag{4.2}$$

где $\alpha = \alpha_0$, $H \in L_1^{loc}$, $\int_0^x H(t)dt = o(x^2)$ при $x \to +\infty$, $S(x)$ задаётся формулой (2.7) и $S(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$,

3) если $\lambda > \lambda_0$ $(\gamma_0 > 1)$ и выполняются условия Теоремы 3, то

$$E(x) = 2Ae^{-\beta_1 x}e^{-\alpha x}\cos(\omega x - \theta) - \int_0^\infty e^{-(u+\alpha)x}d\sigma(u) + CH(x)e^{-\alpha x}, \tag{4.3}$$

где $2Ae^{i\theta} = [w'(z_0)]^{-1}$, а $H(x)$ задаётся формулой (3.12).

Замечание 2. Значения физического параметра λ можно разделить на три диапазона : $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$.

Число λ_0 назовем **критическим значением физического параметра** λ. При $0 < \lambda \le \lambda_0$, решение положительно и экспоненциально убывает (см. (4.1) и (4.2)). При $\lambda > \lambda_0$ возникает затухающее знакопеременное решение (см. (4.3)).

В зависимости от параметра $\lambda = 3\left[\dfrac{\Omega_e}{\nu}\right]^2$, качественный характер решения тесно связан с физическими явлениями.

Авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну и рецензенту за полезные обсуждения и ценные замечания.

Abstract. For a boundary value problem that has applications in physical kinetics the existence of a solution in the Sobolev space $W_1^1(0,+\infty)$ is proved. The solution depends on a physical parameter λ and its structure changes in three ranges of the parameter values : $\lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая кинетика, том X, Наука, Москва, 1979.
2. А. А. Абрикосов, Основы теории металла, Наука, Москва, 1977.
3. А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.
4. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. анализ, том 22, стр. 175 – 244, 1984.
5. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмулян, "Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 17, № 4, стр. 307 – 327, № 5, стр. 335 – 375, 1982.
6. А. Н. Афян, А. Х. Хачатрян, "Об аналитическом и численном решении задачи переноса излучения при наличии отражающей поверхности", Жур. выч. мат. и мат. физики, том 41, № 8, стр. 1158 – 1168, 2001.
7. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральное уравнение свёртки на полупрямой с вполне монотонным ядром", Мат. сборник, том 187, № 10, стр. 53 – 72, 1996.

Поступила 1 сентября 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 75–84

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА СВЁРТКИ НА ПОЛУОСИ

Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении
E-mail : Khach_82@rambler.ru

Резюме. Работа посвящена изучению одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки на положительной полупрямой. Эти уравнения возникают в кинетической теории металлов, в частности в задаче о распределении электрического поля в полубесконечном металле. Основным ключом исследования является задача о построении факторизации соответствующего интегро-дифференциального оператора в виде произведения дифференциальных и интегральных операторов типа Винера–Хопфа. Сочетание специальных факторизационных методов с методами теории интегральных уравнений Винера–Хопфа дают возможность получить не только достаточные условия для разрешимости вышеуказанных уравнений, но и описать структуру построенных решений.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу на положительной полупрямой :

$$\frac{df}{dx} + bf(x) = g(x) + c_1 \int_0^{+\infty} k_1(x-t)\frac{df}{dt}dt + c_2 \int_0^{+\infty} k_2(x-t)f(t)dt \tag{1}$$

$$f(0) = r_0 \geq 0, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2}$$

где f – искомая функция, b, c_j $(j = 1, 2)$ – действительные параметры, свободный член g удовлетворяет условию

$$0 \leq g \in L_1(0, \infty), \tag{3}$$

а ядра $k_j(x)$ $(j = 1, 2)$ удовлетворяют следующим условиям консервативности :

$$0 \leq k_j \in L_1(-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x)dx = 1 \quad (j = 1, 2). \tag{4}$$

Задача (1)–(4) возникает в кинетической теории металлов, где описывается задача распределения электрического поля в полубесконечном металле (см. [1]). Уравнение (1)-(4) выводится из стационарного модельного уравнения Больцмана в линейном приближении, с учётом члена в интеграле столкновении, учитывающего энергетические взаимодействия (см. [1-2]). Первые результаты по изучению задачи (1)–(4) в некоторых частных случаях были опубликованы в 1943 году (см. [1] и ссылки в нём). В дальнейшем, в более общих случаях, когда $c_1 = 0$, уравнение рассматривалось в работах [2-4].

В настоящей работе, с применением методов теории интегральных уравнений Винера–Хопфа и специальных факторизационных методов, получаются достаточные условия для разрешимости уравнения (1)–(4) в классе $P(0,+\infty)$ абсолютно непрерывных функций медленного (степенного) роста.

§ 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть E^+ – одно из следующих банаховых пространств $L_p(0,+\infty)$, $1 \le p < +\infty$, $L_\infty(0,+\infty)$, $L_1(-\infty,+\infty)$, а Ω – класс интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [5]) : $\widehat{T} \in \Omega$, если

$$(\widehat{T}f)(x) = \int_0^{+\infty} T(x-t)f(t)dt, \quad T \in L_1. \tag{5}$$

Эти операторы действуют в пространстве E^+, причём (см. [6]) :

$$\left\|\widehat{T}\right\|_{E^+} \le \int_{-\infty}^{+\infty} |T(x)|\, dx. \tag{6}$$

Ядро T оператора $\widehat{T}$ называется **консервативным**, если

$$0 \le T \in L_1, \quad \gamma \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx = 1. \tag{7}$$

Введём алгебры $\Omega^\pm \subset \Omega$ верхних и нижних вольтерровых операторов : $V_\pm \in \Omega^\pm$, если

$$(V_+f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad (V_-f)(x) = \int_x^{+\infty} v_-(t-x)f(t)dt, \tag{8}$$

где

$$v_\pm \in L_1(0,+\infty).$$

Очевидно,

$$\Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^-, \tag{9}$$

и если $\hat{T} \in \Omega$ и $V_\pm \in \Omega^\pm$, то (см. [6], [7])

$$V_-\hat{T} \in \Omega \quad \text{и} \quad \hat{T}V_+ \in \Omega. \tag{10}$$

В дальнейшем изложении настоящей работы мы воспользуемся факторизацией оператора $I - \hat{T}$, где I – единичный оператор, а $\hat{T} \in \Omega$:

$$I - \hat{T} = (I - V_-)(I - V_+), \quad V_\pm \in \Omega^\pm. \tag{11}$$

Факторизация (11) понимается как равенство операторов, действующих в банаховом пространстве E^+, причём она эквивалентна следующей нелинейной системе уравнений факторизации (НУФ) Н. Б. Енгибаряна (см. [6]) :

$$\begin{aligned} v_+(x) &= T(x) + \int_0^{+\infty} v_-(t)v_+(x+t)dt, \\ v_-(x) &= T(-x) + \int_0^{+\infty} v_-(x+t)v_+(t)dt, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{12}$$

В особом (консервативном) случае (7) существует каноническое решение НУФ (12), представляющее предел в $L_1(0,+\infty) \times L_1(0,+\infty)$ следующего итерационного процесса (см. [6])

$$v_{n+1}^\pm(x) = T(\pm x) + \int_0^{+\infty} v_n^\mp(t)v_n^\pm(x+t)dt, \quad v_0^\pm = 0, \tag{13}$$

где

$$v_\pm(x) \geq 0, \quad \gamma_\pm \stackrel{def}{=} \int_0^\infty v_\pm(t)dt \leq 1 \quad \text{и} \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 0. \tag{14}$$

Заметим, что свойства решения консервативной системы (12) зависят от первого момента ядра T :

$$\nu = \nu(T) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} xT(x)dx. \tag{15}$$

Если интеграл (15) сходится абсолютно, то для консервативного уравнения (12) справедливы следующие утверждения (см. [6]) :

$$\begin{array}{lllll} i) & \nu(T) > 0 & \Longleftrightarrow & \gamma_+ = 1, & \gamma_- < 1, \\ ii) & \nu(T) < 0 & \Longleftrightarrow & \gamma_+ < 1, & \gamma_- = 1, \\ iii) & \nu(T) = 0 & \Longleftrightarrow & \gamma_\pm = 1. & \end{array} \tag{16}$$

В дальнейшем мы воспользуемся утверждениями следующих фактов A), B) из работ [6] и [8], которые относятся к интегральным уравнениям восстановления :

$$\varphi(x) = g_1(x) + \int_x^{+\infty} v_-(t-x)\varphi(t)dt, \tag{17}$$

$$\psi(x) = g_2(x) + \int_0^x v_+(x-t)\psi(t)dt. \tag{18}$$

Теорема А. *Если* $g_1 \in L_1(0,+\infty)$, $0 \le \nu_- \in L_1(0,+\infty)$ *и* $\gamma_- = 1$, *то уравнение (17) имеет решение в* $L_1^{loc}(0,+\infty)$. *Если для некоторого* $p \ge 1$ *имеем*

$$m_p(g_1) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty x^p g_1(x)dx < +\infty,$$

то $m_{p-1}(f) < +\infty$.

Теорема В. *Если* $g_2 \in L_1(0,+\infty)$, $0 \le v_+ \in L_1(0,+\infty)$ *и* $\gamma_+ = 1$, *то в* $L_1^{loc}(0,+\infty)$ *уравнение (18) имеет решение*

$$\psi(x) = \mu + \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{19}$$

где

$$\mu = \nu_+^{-1} \int_0^\infty g_2(x)dx, \quad \nu_+ = \int_0^\infty x v_+(x)dx \le +\infty \ (\mu = 0 \ \text{ при } \nu_+ = \infty)$$

и $\psi_1 \in C_0(0,+\infty)$, $\psi_2 \in L_1(0,+\infty)$, *где* $C_0(0,+\infty)$ *– банахово пространство непрерывных функций* f, *для которых* $f(+\infty) = 0$.

§ 3. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$(D + bI - c_1K_1D - c_2K_2)f = g, \tag{20}$$

где $(Df)(x) = \frac{df}{dx}$ и $K_j \in \Omega$ $(j = 1,2)$. Рассмотрим следующую задачу факторизации : для заданных D и $K_j \in \Omega$ $(j = 1,2)$ и для каждого $\alpha > 0$ найти такой оператор $\widehat{T}_\alpha \in \Omega$, чтобы имела место факторизация

$$D + bI - c_1K_1D - c_2K_2 = (I - \widehat{T}_\alpha)(D + \alpha I). \tag{21}$$

Факторизацию (21) мы будем понимать как равенство операторов, действующих в пространстве Соболева $W_1^1(0,+\infty)$ ($W_p^n(0,+\infty)$ – пространство функций f, для которых $f^{(k)} \in L_p(0,+\infty)$ $(k = 0,1,2,\ldots,n)$).

Теорема 1. *Пусть* k_j $(j = 1,2)$ *– консервативные ядра операторов* $K_j \in \Omega$. *Тогда для каждого* $\alpha > 0$ *справедлива факторизация*

$$D + bI - c_1K_1D - c_2K_2 = (I - \widehat{T}_\alpha)(D + \alpha I).$$

Ядерная функция оператора $\widehat{T}_\alpha \in \Omega$ *имеет вид*

$$T_\alpha(x) = c_1k_1(x) + \int_{-\infty}^x \{c_2k_2(t) - \alpha c_1k_1(t)\}\, e^{-\alpha(x-t)}dt + (\alpha - b)e^{-\alpha x}\theta(x), \tag{22}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \textit{если} \quad x \geq 0 \\ 0 & \textit{если} \quad x < 0 \end{cases},$$

и $T_\alpha \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ если $k_1 \in W_1^1(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Если Γ_α – обратный оператор дифференциального оператора $D + \alpha I$ в $W_1^1(0, +\infty)$, то $\Gamma_\alpha \in \Omega^+$ и

$$(\Gamma_\alpha f)(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t)dt, \quad \alpha > 0. \tag{23}$$

В силу (10), получаем $R_j \overset{def}{=} K_j \Gamma_\alpha \in \Omega$ $(j = 1, 2)$, причём ядра операторов R_j соответственно имеют вид

$$r_j(x) = \int_{-\infty}^x k_j(t) e^{-\alpha(x-t)} dt \in W_1^1(-\infty, +\infty), \quad (j = 1, 2). \tag{24}$$

Кроме того,

$$D + bI - c_1 K_1 D - c_2 K_2 = D + \alpha I - \alpha I + bI - c_1 K_1 D - c_2 K_2 = (I - \hat{T}_\alpha)(D + \alpha I),$$

где

$$\hat{T}_\alpha = c_1 K_1 D \Gamma_\alpha + c_2 K_2 \Gamma_\alpha + (\alpha - b)\Gamma_\alpha. \tag{25}$$

Используя формулы (24), (25) и равенство

$$D\Gamma_\alpha = I - \alpha\Gamma_\alpha \tag{26}$$

получим факторизацию (21). Оператор $\hat{T}_\alpha \in \Omega$ действует в пространстве $W_1^1(0, \infty)$, и, при дополнительном предположении $k_1 \in W_1^1(-\infty, +\infty)$, из (22) вытекает, что $T_\alpha \in W_1^1(-\infty, +\infty)$. Теорема 1 доказана.

Лемма. *Если существуют $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1, 2)$, то существует $\nu(T_\alpha)$, причём*

$$\nu(T_\alpha) = c_2 \frac{\nu(k_2)}{\alpha} + \frac{1 - c_1}{\alpha} + \frac{c_2 - b}{\alpha^2}. \tag{27}$$

Доказательство. В силу существования $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1, 2)$ и теоремы Фубини (см. [9]) будем иметь

$$\begin{aligned}
\nu(T_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x T_\alpha(x) dx &= c_1 \nu(k_1) - \alpha c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^x k_1(t) e^{-\alpha(x-t)} dt dx \\
&+ c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^x k_2(t) e^{-\alpha(x-t)} dt dx + (\alpha - b) \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx \\
&= c_1 \nu(k_1) - \alpha c_1 \left(\frac{\nu(k_1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + c_2 \left(\frac{\nu(k_2)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{\alpha - b}{\alpha^2} \\
&= c_2 \frac{\nu(k_2)}{\alpha} + \frac{1 - c_1}{\alpha} + \frac{c_2 - b}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(4)

Теорема 2. *Если существует $\alpha > 0$ такое, что $T_\alpha(x) \geq 0$, то при $b > c_2$ задача (1)–(4) имеет положительное решение $f(x)$ в пространстве $W_1^1(0,+\infty)$ вида :*

$$f(x) = r_0 e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} F(t)dt, \quad 0 \leq F \in L_1(0,+\infty). \tag{28}$$

Доказательство. Используя разложение (21), уравнение (1) можно переписать в виде :

$$(I - \hat{T}_\alpha)(D + \alpha I)f = g. \tag{29}$$

Решение уравнения (29) сводится к последовательному решению следующих уравнений

$$(I - \hat{T}_\alpha)F = g, \tag{30}$$

$$(D + \alpha I)f = F. \tag{31}$$

Уравнение (30) перепишем в раскрытом виде :

$$F(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} T_\alpha(x-t)F(t)dt. \tag{32}$$

Рассмотрим следующие итерации :

$$F^{(n+1)}(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} T_\alpha(x-t)F^{(n)}(t)dt, \quad F^{(0)} = 0, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{33}$$

Поскольку $0 \leq T_\alpha \in L_1(-\infty,+\infty)$, то с учётом формулы (3) и по индукции легко можно проверить, что имеют место следующие факты :

$$\text{i) } g(x) \leq F^{(n)}(x) \in L_1(0,+\infty) \quad (n = 0,1,2,\ldots) \text{ и } \quad \text{ii) } F^{(n)}(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{34}$$

Кроме того, имеем

$$\int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} T_\alpha(x-t)F^{(n)}(t)dtdx$$
$$\leq \int_0^{+\infty} g(x)dx + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} T_\alpha(x-t)F^{(n+1)}(t)dtdx.$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем слагаемом, получаем

$$\int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(x)dx + \gamma \int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(x)dx,$$

и поскольку $b > c_2$ имеем

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\alpha(x)dx = 1 - \frac{b - c_2}{\alpha} < 1.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(x)dx \leq \frac{\int_0^{+\infty} g(x)dx}{1-\gamma}. \tag{35}$$

Таким образом, из теоремы Б. Леви следует (см. [9]), что последовательность функций $\left\{F^{(n)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ сходится почти всюду в $(0, +\infty)$ к суммируемой функции $F(x)$, которое является решением уравнения (28). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах i) и (35), получим

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx \leq \int_0^{+\infty} F(x)dx \leq \frac{\int_0^{+\infty} g(x)dx}{1-\gamma}. \tag{36}$$

Из дифференциального уравнения (31) получим

$$\frac{df}{dx} + \alpha f(x) = F(x). \tag{37}$$

Наконец, используя начальное значение $f(0) = r_0$, получим единственное решение (28). Теорема 2 доказана.

Возвращаясь к случаю $b = c_2$ предположим, что $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1, 2)$. Очевидно, $\gamma_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\alpha(x)dx = 1$, если $b = c_2$. Итак, если $b = c_2$ и $T_\alpha(x) \geq 0$, то получаем консервативное решение уравнения Винера–Хопфа. Далее, используя факторизацию (10) для оператора $I - \hat{T}_\alpha$, решение уравнения (1) сводится к последовательному решению следующих трёх уравнений :

$$(I - V_-^\alpha)\varphi = g, \tag{38}$$

$$(I - V_+^\alpha)\psi = \varphi, \tag{39}$$

$$(D + \alpha I)f = \psi, \tag{40}$$

Для $b = c_2$ имеем $\nu(T_\alpha) = b\dfrac{\nu(k_2)}{\alpha} + \dfrac{1 - c_1}{\alpha}$.

a) Пусть теперь $b\nu(k_2) > c_1 - 1$. Тогда $\nu(T_\alpha) > 0 \iff \gamma_+^\alpha = 1$, $\gamma_-^\alpha < 1$ и уравнение (35) имеет положительное решение $0 \leq \varphi \in L_1(0, +\infty)$, поскольку $0 \leq g \in L_1(0, +\infty)$. Уравнение (39) перепишем в виде

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x v_+^\alpha(x - t)\psi(t)dt. \tag{41}$$

Из теоремы B вытекает, что уравнение (41) имеет положительное решение в $L_1^{loc}(0,+\infty)$ вида :

$$\psi(x) = \mu_\alpha + \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{42}$$

где

$$\mu_\alpha = \left[\nu_+^\alpha\right]^{-1} \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx, \quad \nu_+^\alpha = \int_0^{+\infty} x v_+^\alpha(x)dx \leq +\infty$$

и $\psi_1 \in C_0(0,+\infty)$, $\psi_2 \in L_1(0,+\infty)$. Используя начальное значение $f(0) = r_0$, с учетом (42) получим решение уравнения (40) :

$$f(x) = \frac{\mu_\alpha}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) + r_0 e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}\left[\psi_1(t) + \psi_2(t)\right]dt. \tag{43}$$

b) В случае $b\nu(k_2) = c_1 - 1$, имеем $\nu(T_\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \gamma_\pm^\alpha = 1$, и при дополнительном предположении, что $m_1(g) < +\infty$, в силу A) получим, что (38) имеет решение $0 \leq \varphi \in L_1(0,+\infty)$. Кроме того, $\gamma_+^\alpha = 1$ и поэтому с учетом теоремы B, уравнение (39) имеет решение в $L_1^{loc}(0,+\infty)$ вида (42). Таким образом, если $m_1(g) < +\infty$, то в классе $P(0,+\infty)$ задача (1)–(4) имеет положительное решение вида (43).

c) Пусть $b\nu(k_2) < c_1 - 1$. Тогда $\nu(T_\alpha) < 0 \Longleftrightarrow \gamma_+^\alpha < 1$ и $\gamma_-^\alpha = 1$. Если $m_1(g) < +\infty$, то в силу теоремы A, уравнение (38) обладает решением $0 \leq \varphi \in L_1(0,+\infty)$. С другой стороны, $\gamma_+^\alpha < 1$, и следовательно, уравнение (39) имеет решение $0 \leq \psi \in L_1(0,+\infty)$. Решая уравнение (40) с начальным условием $f(0) = r_0$, получим

$$f(x) = r_0 e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}\psi(t)dt \in W_1^1(0,+\infty), \quad 0 \leq \psi \in L_1(0,+\infty). \tag{44}$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что $b = c_2$ и существует $\alpha > 0$ такое, что $T_\alpha(x) \geq 0$. Тогда :*

i) если $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1,2)$ и $b\nu(k_2) > c_1 - 1$, то задача (1)–(4) в классе $P(0,+\infty)$ имеет положительное решение вида :

$$f(x) = \rho_\alpha\left(1 - e^{-\alpha x}\right) + r_0 e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}\left[\psi_1(t) + \psi_2(t)\right]dt, \tag{45}$$

где $\psi_1 \in C_0(0,+\infty)$ и $\psi_2 \in L_1(0,+\infty)$,

ii) если $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1,2)$, $b\nu(k_2) = c_1 - 1$ и $m_1(g) < +\infty$, то в классе $P(0,+\infty)$ задача (1)–(4) имеет положительное решение вида (45), *iii) если $\nu(k_j) < +\infty$ $(j = 1,2)$, $b\nu(k_2) < c_1 - 1$ и $m_1(g) < +\infty$, то задача (1)–(4) имеет следующее положительное решение в пространстве Соболева $W_1^1(0,+\infty)$:*

$$f(x) = r_0 e^{-\alpha x} + \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}\psi(t)dt \in W_1^1(0,+\infty), \quad 0 \le \psi \in L_1(0,+\infty).$$

В случае $b < c_2$, задачу (1)–(4) для общих ядер $k_j \in L_1(-\infty,+\infty)$, $(j = 1,2)$ пока не удаётся изучать. Здесь мы ограничимся случаем вполне монотонных ядер. Обозначим

$$k_j(x) = \int_{a_j}^{b_j} e^{-|x|s} d\sigma_j(s) \quad (j = 1,2), \tag{46}$$

$$2\int_{a_j}^{b_j} \frac{d\sigma_j(s)}{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x)dx = 1, \tag{47}$$

Теорема 4. *Пусть существуют параметры b, c_1, c_2 $(b < c_2)$ и $\alpha > 0$ такие, что*

1) $T_\alpha(x) \ge 0$,

2) *уравнение $1 - \bar{T}_\alpha(s) = 0$ имеет действительный корень s, где $\bar{T}_\alpha(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}T_\alpha(x)dx$.*

Тогда задача (1)–(4) в классе $P(0,+\infty)$ обладает решением следующей структуры :

$$f(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)}\{f_1(t) + f_2(t)\}dt + r_0 e^{-\alpha x}, \tag{48}$$

где $f_1 \in L_1(0,+\infty)$ и $f_2 \in C_M(0,+\infty)$.

Доказательство. Условие $c_2 > b$ влечет $\gamma > 1$, и следовательно уравнение (32) называется неоднородным уравнением Винера–Хопфа с суперкритическим ядром $T_\alpha(x)$. В работе [10] доказано, что если $\gamma > 1$, $g \in L_1(0,+\infty)$, то уравнение $1 - \widehat{T}_\alpha(s) = 0$ имеет действительный корень s, то (32) имеет решение следующей структуры

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad \text{где} \quad f_1 \in L_1(0,+\infty) \quad \text{и} \quad f_2 \in C_M(0,+\infty).$$

Следовательно, если существуют b, c_1, c_2 $(b < c_2)$ такие, что $1 - \hat{T}_\alpha(s) = 0$ имеет действительное решение s, то решая уравнение (34), приходим к результату (44). Теорема 4 доказана.

В заключение я выражаю искреннюю признательность профессору Н. Б. Енгибаряну за полезные обсуждения.

Abstract. The paper is devoted to the study of a class of convolution type integro-differential equations on the positive semiaxis. These equations arise in the metal kinetic theory, in particular in the problem of electric field distribution in a semi-infinite piece of metal. The approach is based on representation of the corresponding integro-differential operator as a product of Wiener–Hopf differential and integral operators. A combination of some special factorization methods and the standard Wiener–Hopf methods leads to sufficient conditions of solvability as well as to a description of the structure of the solutions of the equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая Кинетика, том X, Наука, Москва, 1979.
2. А. В. Латышев, А. А. Юшканов, "Электронная плазма в полубесконечном металле при наличии переменного электрического поля", Жур. выч. мат. и мат. физики, том 41, № 8, стр. 1229–1241, 2001.
3. Х. А. Хачатрян, "Интегро–дифференциальные уравнения физической кинетики", Изв. АН Армении, серия Математика, том 39, № 3, стр. 72–80, 2004.
4. Х. А. Хачатрян, "О факторизационных методах решения некоторого класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси", Кандидадтская диссертация, Ереван, 2005.
5. N. Wiener and N. Hopf, "Uber eine klasse singularer integral eichungen sitzing". Berlin, s. 696–706, 1931.
6. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. анализ, том 22, стр. 175 – 244, 1984.
7. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифференциальные уравнения, РАН, том 26, № 8, стр. 1442–1452, 1990.
8. Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, "Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления", Изв. АН Армении, серия Математика, том 32, № 1, стр. 5-20, 1997.
9. А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, Москва, 1981.
10. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром", Мат. сборник, том 187, № 10, стр. 53 – 72, 1996.

Поступила 5 сентября 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 41 НОМЕРА 1 — 6 2006

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

НОМЕР

Полные гиперповерхности в S^{n+1} с неотрицательным тензором Вейля: несимметричные корни на единичном диске
Е. Абеди 4

О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами
А. В. Абрамян 3

Алгоритм нахождения максимального q-хроматического подграфа
Р. О. Адамян и С. Е. Маркосян 3

Характеризация некоторых прекомпактных подмножеств на локально выпуклых и телесных векторных решётках
Б. Акзуз и Р. Нуира 4

Канторовские множества, минимальные для квазисимметричных отображений
Г. А. Акопян 2

Нули Янга–Ли и Фишера на комплексной плоскости модели Блюма–Капела
Н. С. Ананикян, К. Г. Саргсян, Р. Г. Гулгазарян 6

Об уравнении переноса в случае возможности размножения частиц
Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян 5

Об операторе Бицадзе
Г. Арутюнян 4

Конормальные символы смешанных эллиптических задач с сингулярным интерфейсом
Г. Арутюнян и Б.-В. Шульце 4

К обратной задаче для канонической системы Дирака
Т. Н. Арутюнян 1

Блочный метод Буля для интегральных уравнений Вольтерра второго рода
Г. М. Аттиа 3

Траектории полёта летательных аппаратов с реактивной тягой
А. О. Бабаян 5

О "В-произведениях" пространств типа Бесова
А. Г. Багдасарян 1

Уравнение переноса в смежных полупространствах
А. Г. Барсегян 6

Лакунарные не непрерывные ограничено-регулярные голоморфные функции с универсальными свойствами
Л. Бернал–Гонзалез, М. С. Калдерон–Морено 1

Свойства нормализированного числового образа
Л. З. Геворгян 1

Точечные дифференцирования на полугрупповых алгебрах
С. А. Григорян, Т. А. Хорькова 4

Тауберова теорема типа Винера для обобщённых функций медленного роста на полуоси
Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов 5

Асимптотически однородные обобщённые функции
Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов 6

Одно интегральное уравнение типа свёртки в критическом случае
Б. Н. Енгибарян 6

Коллективные марковские процессы с источниками
Н. Б. Енгибарян 5

О расходимости Гриди алгоритма относительно обобщённой системы Уолша по норме L^1
С. А. Епископосян 2

Критерий гипоэллиптичности многочленов в терминах числа Зайденберга–Тарского
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян 3

Об одном классе почти гипоэллиптических операторов
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян 6

Весовые $\bar{\partial}$-интегральные представления гладких функций в области Зигеля
А. О. Карапетян 3

Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики
С. В. Козырев 5

Стабильность для семейств нелинейных уравнений
Петер Космол, Дитер Мюллер-Вичардс 1

Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой
В. Г. Кротов 2

О задаче Коши в классах многочленов для эллиптических операторов
В. Н. Маргарян, В. М. Харатян 6

Ускоренная сходимость рядов Фурье
А. Нерсесян, А. Погосян, Р. Бархударян 2

Всплесковые представления пространств Корбита инвариантных относительно группы симметрий
С. С. Панди 1

О множествах пика гладких функций на полидиске
А. И. Петросян 4

О квазигриди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера
А. А. Саргсян 2

Гармонические отображения в пространства петель компактных групп Ли
А. Г. Сергеев 5

Задача Дирихле для n-гармонического уравнения вне круга
Н. Е. Товмасян 5

Дифференциальные уравнения в классе аналитических функций и их применения
Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян 2

О разрешимости дифференциальных уравнений в классах многочленов
В. М. Харатян и В. Н. Маргарян 4

Об одном классе бесконечных систем алгебраических уравнений с "почти-теплицевыми" матрицами
А. С. Хачатрян 1

Уравнение Амбарцумяна в физической кинетике
А. Х. Хачатрян 5

О разрешимости одной краевой задачи физической кинетики
А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян 6

Об одном интегро–дифференциальном уравнении типа свёртки на полуоси
Х. А. Хачатрян 6

Случайные колебания на шкале длин Планка: источник квантовой случайности
А. Хренников 5

О действии оператора Теплица и Ганкеля в классах Джрбашяна и Теплица в полидиске
Р. Ф. Шамоян и А. В. Арутюнян 3

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 6, 2006

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Сборник статей

Содержание

Предисловие редактора серии 4
Н. С. Ананикян, К. Г. Саргсян, Р. Г. Гулгазарян, Нули Янга–Ли и Фишера на комплексной плоскости модели Блюма–Капела 5
А. Г. Барсегян, Уравнение переноса в смежных полупространствах 11
Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Асимптотически однородные обобщённые функции 23
Б. Н. Енгибарян, Одно интегральное уравнение типа свёртки в критическом случае 33
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, Об одном классе почти гипоэллиптических операторов 39
В. Н. Маргарян, В. М. Харатян, О задаче Коши в классах многочленов для эллиптических операторов второго порядка 57
А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, О разрешимости одной краевой задачи физической кинетики 65
Х. А. Хачатрян, Об одном интегро–дифференциальном уравнении типа свёртки на полуоси 75
Содержание тома 41 85

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 6, 2006

MATHEMATICAL PHYSICS AND RELATED QUESTIONS

Collection of Papers

Contents

Editors' Preface 4
N. S. Ananikyan, K. G. Sargsyan and R. G. Ghulghazaryan, The Yang–Lee and Fisher zeros of the Blume–Capel model on the complex plane 5
Ani G. Barseghyan, Transfer equation in adjacent half–spaces 11
Ju. N. Drozzinov and B. I. Zavyalov, Asymptotically homogeneous generalized functions 23
B. N. Yengibaryan, Convolution type integral equation in critical case 33
H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, On a class of almost hypoelliptic operators 39
V. N. Margaryan and V. M. Kharatyan, Cauchy problem in the class of polynomials for elliptic operators of the second order 57
A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, On the solvability of a boundary value problem of physical kinetics 65
Kh. A. Khachatryan, Convolution type integro–differential equation on the semiaxis 75
Contents of Volume 41 85