

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան	Վ. Ա. Մարտիրոսյան
Մ. Մ. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)	Ս. Ն. Սերգեյան
Գ. Գ. Գևորգյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Վ. Ս. Չաքարյան	Ա. Բ. Ներսիսյան
Ա. Ա. Թալալյան	Ա. Ա. Սահակյան
Ն. Ե. Թովմասյան	Ա. Գ. Քամայան

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян	С. Н. Мергелян
Г. Г. Геворкян	Б. С. Нагапетян
М. С. Гиноян (зам. главного редактора)	А. Б. Нерсисян
В. С. Закарян	А. А. Саакян
А. Г. Камалян	А. А. Талалян
В. А. Мартиросян	Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ**

Сборник статей

Редактор серии :

Норайр Б. Енгибарян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящий и следующий выпуски журнала содержат оригинальные статьи представленные на конференции “Математическая физика и смежные вопросы” проведенной в Ереване, 24–30 сентября 2006 года.

Организаторами конференции были Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Математический Институт им. В. А. Стеклова, Российской Академии Наук.

Был создан совместный Организационный комитет в который вошли : академик РАН В. В. Козлов (председатель) ; член–корреспондент РАН И. В. Волович (заместитель председателя) ; профессор Н. Б. Енгибарян (заместитель председателя) ; академик РАН В. С. Владимиров ; академик НАН РА Н.У. Аракелян ; академик НАН РА Р. В. Амбарцумян ; академик НАН РА Э. М. Казарян ; профессор А. Г. Сергеев ; доктор физ.–мат. наук Б. Т. Батилян ; профессор А. Х. Хачатрян ; кандидат физ.–мат. наук С. В. Козырев (научный секретарь).

В работе конференции приняли участие многие известные математики из России и Армении. Результат конференции — широкий обмен информацией о недавно полученных результатах в братских странах. В этом важном мероприятии приняли участие почти все математические центры Армении. Научные темы конференции были сконцентрированы вокруг идей двух великих учёных В. А. Амбарцумяна и В. С. Владимирова. Их идеи сохранили свою важность при исследовании многих актуальных проблем современной математической физики. Конференция была проведена при содействии фондов “Инкубатор предприятий” и “Исследовательская математика”.

Норайр Б. Енгибарян

Ереван, октябрь 2006

ОБ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ ВОЗМОЖНОСТИ РАЗМНОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян

Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна
E-mail : anushavan@aport.ru

Резюме. Статья посвящена проблеме разрешимости интегрального уравнения, описывающего перенос излучения в неоднородной среде. Доказано, что при некоторых условиях на скорость убывания ядра на бесконечности соответствующее неоднородное уравнение с неотрицательным свободным членом из $L_1(\mathbb{R}^+)$ имеет ограниченное решение.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Ряд задач переноса излучения в неоднородном полупространстве описывается интегральным уравнением вида (см. [1], [2])

$$\rho(x) = \int_0^{\infty} \lambda(t)K(x-t)\rho(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, +\infty), \quad (1)$$

где ρ – искомая плотность частиц в сечении x , функция K удовлетворяет условиям

$$K \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1, \quad (2)$$

а неотрицательная функция $\lambda(t)$ в случаях, когда возможно размножение частиц, может принимать значения как меньше 1, так и больше 1.

Относительно функции $B(x) = \rho(x) \cdot \lambda(x)$ в случае $\lambda(x) \neq 0$ получаем уравнение

$$B(x) = \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t)B(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3)$$

В настоящей работе изучаются вопросы нетривиальной разрешимости уравнения (3) (и, следовательно, уравнения (1)), а также соответствующих неоднородных уравнений.

§1. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ (3) И (1).

Мы докажем, что уравнения (3) и (1) нетривиально разрешимы при условиях (2) и

$$1 \leq \lambda(x) \leq \left(\int_{-\infty}^x K(t) dt \right)^{-1}, \quad x \in R^+, \quad (4)$$

при дополнительных ограничениях на функцию K :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|K(x) dx < +\infty, \quad \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx < 0. \quad (5)$$

Заметим, что из (2) вытекает, что в правой части (4) находится монотонно убывающая функция на R^+ , которая стремится к 1 при $x \rightarrow +\infty$.

Наряду с (3) рассмотрим интегральное уравнение Винера-Хопфа с тем же, что и в (3) (или (1)) ядром K :

$$S(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)S(t)dt, \quad x \in R^+ \quad S(0) = 1. \quad (6)$$

В [3] доказано существование монотонно возрастающего и ограниченного на R^+ , ненулевого решения уравнения (6) при выполнении условий (2) и $\nu < 0$.

Теорема 1. При $\nu < 0$ и выполнении условий (2) и (4) уравнение (3) обладает положительным и ограниченным на R^+ решением B , являющимся пределом (на R^+) итераций

$$B_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_0^{+\infty} K(x-t)B_n(t) dt, \quad B_0(x) \equiv C, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $C = \sup_{x \in R^+} S(x) < +\infty$, а S - решение уравнения (6).

Доказательство. Итерации (7) монотонно убывают по n на R^+ . Действительно, при условии (4) для $n = 1$ имеем

$$B_1(x) = \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t)B_0(t) dt = \lambda(x)C \int_{-\infty}^x K(t) dt \leq C \equiv B_0(x),$$

т.е. $B_1(x) - B_0(x) \leq 0$, $x \in R^+$. Из (7) следует также соотношение

$$B_{n+1}(x) - B_n(x) = \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t) (B_n(x) - B_{n-1}(x)) dt. \quad (8)$$

Используя последнее равенство, индукцией по n доказывается справедливость неравенств $B_{n+1}(x) - B_n(x) \leq 0$ для $x \in R^+$ и любого $n = 1, 2, 3, \dots$

Итерации (7) снизу ограничены решением S уравнения (6). Действительно, для $n = 0$ имеем

$$B_0(x) \equiv C = \sup_{x \in R^+} S(x) \geq S(x).$$

Если $B_n(x) \geq S(x)$, $x \in R^+$, то из (7) следует

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \lambda(x) \int_0^{+\infty} K(x-t) B_n(t) dt \geq \\ &\geq \lambda(x) \int_0^{+\infty} K(x-t) S(t) dt = \lambda(x) S(x) \geq S(x), \end{aligned}$$

что доказывает справедливость на R^+ оценок $B_n(x) \geq S(x)$ при $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, для итераций (7) имеем

$$B_n \downarrow \text{ по } n \text{ на } R^+, \text{ и } B_n \geq S(x), \quad x \in R^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(x) = B(x)$, $x \in R^+$. Устремив в (7) $n \rightarrow +\infty$, получим равенство (3) для предельной функции B . Следовательно, предел B итераций (7) является решением уравнения (3), причём

$$B(x) \geq S(x), \quad x \in R^+. \quad (9)$$

Заметим, что в работах [3] - [5] рассматриваются вопросы разрешимости уравнения

$$H(x) = \lambda^*(x) \int_0^\infty K(x-t) H(t) dt, \quad x \in R^+, \quad (10)$$

при условиях (2) и

$$0 \leq \lambda^*(x) \leq 1, \quad x \in R^+, \quad 1 - \lambda^*(x) \in L_1(R^+). \quad (11)$$

При этих условиях доказано существование неотрицательного, ненулевого решения уравнения (10). Согласно результатам работы [4], решение H уравнения (10), являющееся пределом в R^+ итераций

$$H_{n+1}(x) = \lambda^*(x) \int_0^\infty K(x-t) H_n(t) dt, \quad H_0(x) \equiv S(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

обладает свойствами :

$$0 \leq H(x) \leq S(x), \quad x \in R^+, \quad H \neq 0, \quad S(x) - H(x) = o(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty; \quad (13)$$

если $\lambda^*(x) \uparrow$ на R^+ , то $H(x) \uparrow$ на R^+ . (14)

Теперь можно сказать, что утверждение Теоремы 1 сохраняет свою силу в более общем, чем (4) условии, а именно, при

$$\lambda^*(x) \leq \lambda(x) \leq \left(\int_{-\infty}^x K(t) dt \right)^{-1}, \quad x \in R^+, \quad (15)$$

где λ^* — произвольная функция, обладающая свойствами (11).

§2. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt, \quad x \in R^+, \quad (16)$$

где ядро K удовлетворяет условиям (2), а функции λ и g — условиям

$$0 \leq \lambda(x) \leq \left(\int_{-\infty}^x K(t) dt \right)^{-1}, \quad x \in R^+; \quad (17)$$

$$0 \leq g \in L_1(R^+), \quad g(x) \downarrow \text{ на } R^+, \quad 0 < \alpha < +\infty, \quad \text{где } \alpha = g(0). \quad (18)$$

Доказательству разрешимости уравнения (16) при выполнении условий (2), (17), (18), мы предпошлём следующую лемму.

Рассмотрим уравнение

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x) + \bar{\lambda}(x) \int_0^{+\infty} K(x-t)\bar{f}(t)dt, \quad x \in R^+, \quad (19)$$

с тем же ядром K и функциями $\bar{\lambda}(x)$ и $\bar{g}(x)$, удовлетворяющими условиям

$$0 \leq \bar{\lambda}(x) \leq \lambda(x), \quad 0 \leq \bar{g}(x) \leq g(x), \quad x \in R^+. \quad (20)$$

Лемма 1. Если уравнение (16) обладает неотрицательным решением f , то существует также неотрицательное решение \bar{f} уравнения (19), причём $0 \leq \bar{f} \leq f$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть итерации

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t)f_n(t) dt, \quad f_0(x) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$\bar{f}_{n+1}(x) = \bar{g}(x) + \bar{\lambda}(x) \int_0^{\infty} K(x-t)\bar{f}_n(t) dt, \quad \bar{f}_0(x) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

к решениям соответствующих уравнений. Очевидно, что при $g, \bar{g} \geq 0$ эти итерации монотонно возрастают по n на R^+ . Если существует неотрицательное

решение f уравнения (16), то, используя соотношения (21), можно доказать справедливость оценок $f_n(x) \leq f(x)$, $x \in R^+$, $n = 0, 1, 2, \dots$. С другой стороны, из соотношений (21) и (22) следуют оценки $\bar{f}_n(x) \leq f_n(x)$, $x \in R^+$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$. Итак, получаем

$$\bar{f}_n(x) \uparrow \text{ по } n \text{ и } \bar{f}(x) \leq f(x) \text{ на } R^+,$$

поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}_n(x) = \bar{f}(x)$, для $x \in R^+$. Нетрудно убедиться, что предельная функция удовлетворяет (19), причём $\bar{f}(x) \leq f(x)$, $x \in R^+$.

Пусть $\lambda^*(x)$ и $\lambda(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям (11) и (15) соответственно. Тогда имеет место неравенство $\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} B(x) - H(x) \geq 0$, где B и H — решения соответствующих уравнений (3) и (10), причём эта разность удовлетворяет равенству

$$\sigma(x) = \frac{\lambda(x) - \lambda^*(x)}{\lambda^*(x)} H(x) + \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t) \sigma(t) dt, \quad x \in R^+. \quad (23)$$

Теорема 2. Пусть в уравнении (16) ядро K удовлетворяет условиям (2) и (5), функция λ — условию (17), а свободный член g — условиям (18). Тогда существует положительное, ограниченное решение f этого уравнения.

Доказательство. Выберем произвольное β так, чтобы $\beta > \alpha$ и определим функцию λ^* посредством функции g следующим образом :

$$\lambda^*(x) = 1 - \frac{1}{\beta} g(x), \quad x \in R^+. \quad (24)$$

Покажем, что так определяемая функция будет монотонно возрастать на R^+ и удовлетворять условиям (11). Действительно, поскольку $g(x) \geq 0$ на R^+ и $\beta > 0$, то из определения (24) следует $\lambda^*(x) \leq 1$ для $x \in R^+$. С другой стороны, в силу монотонности функции $g(x)$ и выбора β , функция (24) будет монотонно возрастать на R^+ , причём

$$\lambda^*(x) \geq \lambda^*(0) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} > 0.$$

Далее, из равенства (24) следует, что

$$1 - \lambda^*(x) = \frac{1}{\beta} g(x) \in L_1(R^+). \quad (25)$$

Для построенной функции λ^* соответствующее решение H будет возрастающей на R^+ (см (4)). Так как $\lambda(x) \geq 1$ и $\lambda^*(x) \leq 1$ на R^+ , то будем иметь

$$0 \leq \frac{H(0)}{\beta} g(x) = (1 - \lambda^*(x)) H(0) \leq \frac{\lambda(x) - \lambda^*(x)}{\lambda^*(x)} H(x). \quad (26)$$

Поскольку уравнение (23) обладает положительным решением $\sigma(x) = B(x) - H(x)$, то в силу Леммы 1 уравнение

$$\varphi(x) = \frac{H(0)}{\beta} g(x) + \lambda(x) \int_0^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad x \in R^+$$

также будет обладать положительным ограниченным решением $\varphi(x)$. Если докажем, что $H(0) > 0$, то из существования решения последнего уравнения будет следовать существование положительного и ограниченного решения f уравнения (16). Для $H(0)$ из уравнения (11) имеем

$$H(0) = \lambda(0) \int_0^{\infty} K(-t)H(t) dt.$$

Ввиду $\lambda(0) > 0$, монотонности функции H и условия (5), из последнего равенства следует $H(0) \neq 0$, а, следовательно, $H(0) > 0$. Таким образом, существует неотрицательное решение f уравнения (16), для которого справедлива оценка

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\beta}{H(0)} (B(x) - H(x)), \quad x \in R^+,$$

где функции B и H – решения соответствующих уравнений (3) и (11).

Abstract. The paper is devoted to the solvability problem of the integral equation which describes the radiative transfer in non-homogeneous medium. It is proved that under some conditions on the kernel growth at infinity the corresponding nonhomogeneous equation with a nonnegative free term from $L_1(R^+)$ has a bounded solution.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, "Рассеяние света в неоднородной атмосфере", Астрон. журнал, том. 51, № 1, стр. 50 – 56, 1974.
2. В. В. Соболев, "Проблема Милна для неоднородной атмосферы", Докл. АН СССР, том 239, № 3, стр. 1117–1120, 1978.
3. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Матем. анализ, том 20, Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР, Москва, стр. 175 – 244, 1984.
4. Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде", Дифференциальные уравнения, том 23, № 9, стр. 1618 – 1622, 1987.
5. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса нейтронов и его обобщении", Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, 5-ая международная конференция. Горис, 2005.

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ТИПА ВИНЕРА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА ПОЛУОСИ

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

E-mail : drozzin@mi.ras.ru

Резюме. Работа посвящена распространению тауберовых теорем типа Винера на класс обобщённых функций медленного роста. Показано, что функционал имеет некоторую асимптотику (в слабом смысле) тогда и только тогда, когда он имеет ту же асимптотику на тестовой функции, преобразование Меллина которой в некоторой полосе комплексной плоскости не может приближаться к нулю быстрее некоторой отрицательной степени полинома. В качестве применения этого результата приводятся некоторые абелевы и тауберовы теоремы для некоторых преобразований Стилтеса.

В тридцатых годах прошлого века Н. Винер [3] доказал следующую тауберову теорему: Пусть $f(\xi) \in L_\infty(-\infty, +\infty)$ и функция $\varphi_0(\xi) \in L_1(-\infty, +\infty)$ такова, что её преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \varphi_0(\xi) d\xi \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда из существования

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + \xi) \varphi_0(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi) d\xi$$

следует существование

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + \xi) \varphi(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \quad \text{для всех } \varphi \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Заменой переменных $\xi = \ln t$, $\ln a = k$, она приводится к виду : пусть $f(t) \in L_\infty(0, +\infty)$, а функция $\varphi_0(t) \in L_1(0, +\infty)$ имеет преобразование Меллина

$$\widehat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^\infty t^{-ix} \varphi_0(t) dt \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда из существования

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(kt) \varphi_0(t) dt = c$$

следует существование

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(kt) \varphi(t) dt = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi(t) \in L_1(0, \infty).$$

Прямое доказательство этой теоремы сводится к доказательству того факта, что линейная оболочка множества мультипликативных сдвигов $\{\varphi_0(kt), 0 < k < \infty\}$ плотна в $L_1(0, +\infty)$. А так как множество $\{f(kt), 0 < k < \infty\}$ ограничено, то, по теореме Банаха-Штейнхауса, и следует утверждение теоремы.

Теорема Винера занимает одно из центральных мест в гармоническом анализе и нашла многочисленные применения в различных областях математики. Поэтому, весьма важно, распространить эту теорему на другие классы функций.

Пусть M, N ($M \leq N$) целые неотрицательные числа, a, b — вещественные нецелые числа и $\delta > 0$. Через \mathcal{S}_+ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ и быстро убывающих вместе со всеми своими производными функций.

А через $\mathcal{S}_{b, N, \delta}^{a, M}$ — пополнение \mathcal{S}_+ по норме

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b, N, \delta}^{a, M}[\varphi] = & \max_{j \leq N} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{\varphi(t) - T_\varphi^{(b)}(t)\} \right| dt \\ & + \max_{j \leq M} \int_\delta^{+\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt + \sum_{j=0}^{(b)} |\varphi^{(j)}(0)|, \end{aligned} \quad (1)$$

где $(b) = [b - 1]$ при $b < -1$, а $[x]$ — целая часть числа x . Если $b > -1$, то тейлоровский многочлен $T_\varphi^{(b)}(t) = \sum_{j=0}^{(b)} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j$, и последняя сумма производных в (1) отсутствуют.

Функции $\varphi \in \mathcal{S}_{b, N, \delta}^{a, M}$ можно описать следующим образом : если $t \in (0, \delta)$, то

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \dots + \frac{c^{(b)}}{(b)!} t^{(b)} + \psi(t), \quad (2)$$

где $t^{b+j} \psi^{(j)}(t) \in L_1(0, \delta)$ для $0 \leq j \leq N$. А при $t \in (\delta - \varepsilon, +\infty)$, то $t^{a+j} \varphi^{(j)}(t) \in L_1(\delta - \varepsilon, +\infty)$ для $0 \leq j \leq M$, где $0 < \varepsilon < \delta$ (отметим, что в случае $b > -1$

полином в (2) отсутствует). Числа $c_j, j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$, определяются однозначно и являются естественным расширением понятия производных в нуле для функций из $S_{b,N,\delta}^{a,M}$. Всюду далее мы их обозначаем через $c_j = \varphi^{(j)}(0), j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$.

Через S_b^a обозначаем проективный предел пространства $S_{b,N,\delta}^{a,M}$ по M и N . Проективный предел этих пространств по a и b образует пространство S_+ . Пространства линейных непрерывных функционалов обозначаются штрихом сверху, так что $f \in (S_{b,N,\delta}^{a,M})'$ означает, что f -линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $S_{b,N,\delta}^{a,M}$. Отметим, что по теореме о конечном порядке любая обобщённая функция из S_+^i принадлежит какому либо $(S_{b,N,\delta}^{a,M})'$. Преобразование Меллина основных функций $\varphi(t) \in S_{b,N,\delta}^{a,M}$ определяется формулой

$$\mathcal{M}[\varphi] \equiv \widehat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} t^{-iz} [\varphi(t) - T_{\varphi}^{(y)}(t)] dt, \quad z = x + iy \in \overline{\prod}_b^a, \quad (3)$$

где $\overline{\prod}_b^a = \{z \in \mathbb{C} : b \leq y \leq a\}$ и $\langle y \rangle = [-y - 1]$. Так что при $y > -1$ тейлоровский многочлен

$$T_{\varphi}^{(y)}(t) = \sum_{j=0}^{[-y-1]} \frac{t^j}{j!} \varphi^{(j)}(0)$$

функции φ отсутствует. Интеграл в (3) сходится абсолютно при $b \leq y \leq a$, кроме, возможно, целых отрицательных значений y , находящихся между a и b , и определяет в полосе $\overline{\prod}_b^a$ аналитическую функцию, имеющую, быть может, простые полюсы в целочисленных отрицательных чисто мнимых точках. Вне полюсов, скажем в $\overline{\prod}_b^a \cap \{|x| > 1\}$, функция $\widehat{\varphi}(z)$ ограничена.

Пусть $\{\varphi_0^{\beta}(t) \in S_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\}$ - семейство основных функций, где I - счётное множество индексов и пусть $\{\widehat{\varphi}_0^{\beta}(z), \beta \in I\}$ - преобразование Меллина этого семейства. Напомним, что точка $z \in \overline{\prod}_b^a$ называется нулем кратности r семейства $\{\widehat{\varphi}_0^{\beta}(z)\}$, если для любого $\beta \in I$ имеем

$$\widehat{\varphi}_0^{\beta}(z) = 0, \frac{d}{dz} \widehat{\varphi}_0^{\beta}(z) = 0, \dots, \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \widehat{\varphi}_0^{\beta}(z) = 0$$

но $\frac{d^r}{dz^r} \widehat{\varphi}_0^{\beta}(z) \neq 0$ для некоторого $\beta \in I$.

В качестве асимптотической шкалы мы используем шкалу автомодельных (правильно меняющихся) функций. Положительная и непрерывная при достаточно больших k функция $\rho(k)$ называется автомодельной, если существует $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \xi(t)$, причём сходимось равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\xi(t) = t^{\alpha}$ при некотором α . В этом случае функцию $\rho(k)$ называют автомодельной функцией порядка α . Заметим, что функции $k^{\alpha}, k^{\alpha} \ln k, k^{\alpha} \ln \ln k, \dots$ - примеры автомодельных функций порядка α .

Теорема 1. Пусть $f \in (S_{b,N,\delta}^{a,M})'$, $a > b$, $N \geq M$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , для которой $b < \alpha < a$ и $\{\varphi_0^\beta(t) \in S_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}, \beta \in I\}$ – заданное семейство функций со свойствами

$$\sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M} [\varphi_0^\beta(t)] < \infty, \quad (3)$$

$$\sup_{\beta \in I} |\hat{\varphi}_0^\beta(z)| \geq \frac{A}{1+|z|^m}, \quad z \in \prod_{\alpha-\varepsilon_0}^{a+\varepsilon_0}, \quad (4)$$

для некоторых A, m и $\varepsilon_0 > 0$, где $\alpha - \varepsilon_0 \geq b$. Кроме того, пусть для любого $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$ существуют некоторые $\beta_j \in I$ такие, что

$$\frac{d^j}{dt^j} \varphi_0^{\beta_j}(0) \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle. \quad (5)$$

Если для любого $\beta \in I$ и некоторой постоянной C

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_0^\beta(t)) = c^\beta \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho(k)} |(f(kt), \varphi_0^\beta(t))| < C, \quad (6)$$

то $f(t)$ – асимптотически однородная обобщённая функция относительно $\rho(k)$, то есть для любого $\varphi(t) \in S_+$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi. \quad (7)$$

Заметим, что если $a > -1$, то условие (5) отсутствует. В приложениях часто встречаются ситуации, когда некоторые из условий теоремы нарушаются. Например, если в теореме нарушены условия (4) (скажем, семейство $\{\hat{\varphi}_0^\beta(z), \beta \in I\}$ имеет конечное число нулей $n_\tau \neq \alpha$ кратности n_τ в полосе $\prod_{\alpha-\varepsilon_0}^{a+\varepsilon_0}$) или (5), то из обобщенной функции $f(t)$ следует вычесть некоторые контрчлены вида

$$f_0(t) = \sum_{\tau=1}^w \sum_{\xi=1}^{\tau-1} c_{\xi\tau} t_+^{-n_\tau} \ln^{\xi-1} t_+ - \sum_{\tau=1}^w c_{0\tau} \delta^{(n_\tau)}(t), \quad (8)$$

где $c_{\xi\tau}$ ($\tau = 1, \dots, w$, $\xi = 0, 1, \dots$) и n_τ – постоянные. Тогда разность $f(t) - f_0(t)$ будет асимптотически однородна относительно $\rho(k)$. Функции фигурирующие в (8) введены и изучены в книге [1].

В качестве применения теоремы мы рассмотрим тауберовы и абелевы теоремы для интегрального преобразования Стильтьеса и его различных обобщений. Преобразование Стильтьеса в различных его модификациях и тауберовы теоремы для

него изучались многими авторами. Мы приведём здесь абелевы и тауберовы теоремы для преобразований типа Стильтеса, в которых подчас трудно проверяемые классические тауберовы условия типа положительности или ограниченности отсутствуют.

Пусть фиксированы числа $n = 0, 1, \dots, c > 0$ и s ($-\infty < s < +\infty$). Пусть $f(t) \in (S_b^a)'$, где $a < s - 1$ и $b < a$. Тогда обобщённое преобразование Стильтеса определяется формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad (9)$$

где логарифм задается своей главной ветвью: $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $|\arg z| < \pi$. Ядра этих интегральных преобразований суть

$$\frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \in S_b^a, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad (10)$$

а формула (9) корректно определяет функцию $F(z)$, аналитическую во всей комплексной плоскости \mathbb{C} с разрезом по положительной части вещественной оси.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in (S_b^a)'$ ($a < s - 1, b < a$) асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , ($b < \alpha < a$), то есть для любого $\varphi \in S_+$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi. \quad (11)$$

Тогда

1) для любого $\beta \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) = c^\beta, \quad (12)$$

2) существуют A, m и r_0 такие, что

$$\frac{1}{r\rho(r)} |F(re^{i\beta})| \leq \frac{A}{\sin^m \frac{\beta}{2}}, \quad r > r_0, \quad \beta \in (0, 2\pi). \quad (13)$$

Обратную (тауберovu) теорему мы приведем для случая $n = 1$ и $s > 0$.

Теорема 3. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, определяемая формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad (14)$$

где $f(t) \in (S_b^a)'$, $b < a < s - 1$, $s > 0$, $c > 0$, а $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α ($b < \alpha < a$). Пусть, кроме того, выполнены условия (12) и (13).

Обозначим через y_0 единственный корень уравнения

$$\ln c + \psi(s) = \psi(s - 1 + iz), \quad \text{на интервале } (-ico, i(s - 1)), \quad (15)$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, а $\Gamma(z)$ — гамма функция Эйлера. Тогда :

1) если $y_0 < \alpha$, то $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,

2) если $\alpha < y_0$, то возможны следующие случаи :

а) если дополнительно $y_0 = -1, -2, \dots$, то существует c_0 такая, что $f(t) - c_0 \delta^{(-y_0-1)}(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,

б) если $y_0 \neq -1, -2, \dots$, то, возможны следующие подслучаи :

b1) если $y_0 > a$, то $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,

b2) если $\alpha < y_0 < a$, то функция $f(t) - c_0 t^{y_0}$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$, с некоторой постоянной c_0 .

Замечание 1. Если в Теореме 3 условие $s > 0$ заменить более слабым условием $s \neq 0, -1, -2, \dots$, тогда кроме нуля y_0 , следует учитывать и другие нули уравнения (15) y_1, y_2, \dots , которые все расположены на чисто мнимой оси. Если ни один из них не равен $-1, -2, \dots$, то Теорема 3 остаётся верной. Если же один из них совпадает с $-1, -2, \dots$, (а это может случиться только с одним из корней), скажем, $y_j = -\ell$, где ℓ — целое положительное число, то кроме контрчленов, которые перечислены в Теореме 3, нужно вычесть еще один контрчлен $c_1 \delta^{(\ell-1)}(t)$. Доказательство Теоремы 3 основано на следующем. При $z = re^{i\beta}$

$$\frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) = \frac{1}{r\rho(r)} \left(f(t'), \frac{\ln^n(c - \frac{t'}{r} e^{-i\beta})}{(c - \frac{t'}{r} e^{-i\beta})^s} \right) = \frac{1}{\rho(r)} \left(f(rt), \frac{\ln^n(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s} \right).$$

Теперь остаётся проверить условия Теоремы 1 для семейства

$$\varphi_0^\beta(t) = \sin^Q(\beta/2) \frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s}, \quad \beta \in I,$$

где Q достаточно велико, а I — счётное множество значений $\beta \in (0, 2\pi)$, имеющее концы интервала своими предельными точками. При этом нужно учесть, что преобразование Меллина $\varphi_0^\beta(t)$ равно

$$\sin^Q(\beta/2) e^{(\beta-\pi)(s+i)} c^{1-s-iz} [\ln c + \psi(s) - \psi(s - 1 + iz)] \frac{\Gamma(1 - iz)\Gamma(s - 1 + iz)}{\Gamma(s)}.$$

Abstract. The paper is devoted to the extension of Wiener-type Tauberian theorems to a class of generalized functions of slow growth. A functional is shown to have certain

asymptotics (in the weak sense) if and only if it displays the same asymptotics on a test function whose Mellin transform is bounded away from zero in a strip of the complex plane. As an application of this result we give some Abelian and Tauberian theorems for several Stieltjes transforms.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции и операции над ними*, том 1, Физматгиз, Москва, 1959.
2. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, "Тауберова теорема типа Вивера для обобщённых функций медленного роста", *Матем. сб.*, том 189, № 7, стр. 91-130, 1998.
3. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций*, Наука, Москва, 1986.
4. N. Wiener, "Tauberian theorems", *Ann. of Math.*, vol 33, № 1, pp. 1-100, 1932.
5. R. P. Boas and D. V. Widder, "The iterated Stieltjes transform", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol 45, pp. 1-72, 1939.
6. S. Pilipović, B. Stanković, and A. Takači. *Asymptotic behavior and Stieltjes transformation of distributions*, Band 116, Teubner Verlag, Leipzig, 1990.

Поступила 21 сентября 2006



КОЛЛЕКТИВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ИСТОЧНИКАМИ

Н. Б. Енгибарян

Институт математики НАН Армении

Резюме. Рассматривается одновременное марковское блуждание большого числа тождественных частиц в одночастичном фазовом пространстве Ω , при наличии их источников и потерь. Предполагается возможность бесконечного накопления частиц во всем пространстве, оставляя их количество локально ограниченным. Предложен один простой критерий существования σ -ограниченного равновесного распределения.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим марковский процесс (цепь Маркова) с пространством состояний Ω и дискретным временем $m = 0, 1, \dots$ (см. [1]). Пусть S – совокупность большого числа тождественных частиц, одновременно совершающих блуждание по состояниям пространства Ω . Предполагается возможность наличия поглощающих состояний и источников. Описанный процесс мы назовём коллективным марковским процессом (КМП) или коллективным случайным блужданием.

В процессе КМП, со временем может произойти бесконечное накопление частиц в Ω в целом, оставляя их количество локально ограниченным. Такие ситуации возникают в теории переноса излучения, в кинетической теории газов и в других разделах физической кинетики (см. [2], [3]). Например, поле излучения в атмосфере, заполняющей полупространство $z \geq 0$, в случае консервативного рассеяния (см. [3]). Световые кванты, входящие в среду со стороны границы $z = 0$, совершают случайное блуждание (многократное рассеяние) и отражаются из среды с вероятностью 1. Тем не менее, при стационарном освещении среды, поле излучения имеет отличный от нуля предел при $z \rightarrow \infty$.

При больших концентрациях частиц могут играть роль нелинейные эффекты. Тогда закон случайного блуждания индивидуальной частицы в фазовом пространстве становится зависящим от созданного распределения частиц в Ω в данный момент времени. Решение задач КМП путём суммирования вероятностей, соответствующих исходов блуждания одной частицы, часто затруднительно, а иногда выглядит невозможным.

В настоящей работе делается попытка исследовать указанный круг вопросов в рамках одной модели случайных процессов, которую мы назовём кинетическим приближением. Это приближение близко по смыслу процедуре статистического усреднения в кинетической стадии эволюции многочастичных систем.

Приводится один простой критерий существования равновесного распределения частиц в Ω , в классе σ -ограниченных распределений.

§2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ И СУБСТОХАСТИЧЕСКИЕ ЯДРА

2.1. Пространства мер. Пусть (Ω, F) – пространство с σ -алгеброй F измеримых множеств (см. [1]). Обозначим через $A = A_F$ множество (σ -аддитивных) ограниченных мер ν на F , для которых $\nu(\Omega) < +\infty$. Через $A_\sigma \supset A$ обозначается σ -конечных мер, для которых существуют $B_k \in F$, $k = 1, 2, \dots$, такие что

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots, \quad \Omega = \cup B_k \quad \text{и} \quad \nu(B_k) < +\infty, \quad (2.1)$$

а через θ обозначается нулевая мера.

Введём в A_σ частичный порядок \succ следующим образом: если $x, y \in A_\sigma$, то скажем, что $x \succ y$ если $x = y + z$, где $z \in A_\sigma$. Если $x, y \in A$, то и $z \in A$.

Пусть $E \supset A$ – банахово пространство зарядов с конечной вариацией

$$\|x\|_E = \text{Var } x = \sup_{B \in F} [|x(B)| + |x(\Omega \setminus B)|].$$

Тогда при $x \in A$ имеем

$$\|x\| = x(\Omega). \quad (2.2)$$

Если $(x_n) \subset A$, $x_n \uparrow$ и $x_n(\Omega) \leq c$, то

$$x_n \rightarrow x \in A, \quad x(\Omega) \leq c. \quad (2.3)$$

Если $x_n \rightarrow x$ по вариации, то она сходится слабо, т.е.

$$\int_B f dx_n \rightarrow \int_B f dx, \quad B \in F, \quad (2.4)$$

для любой функции f , ограниченной и измеримой относительно F .

2.2. Интегральный оператор со стохастическим или субстохастическим ядром. Пусть $w(B, \omega) \geq 0$ – стохастическое или субстохастическое ядро марковских переходных вероятностей, где $B \in F$ и $\omega \in \Omega$ (см. [1]). При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $w(B, \omega)$ является мерой на F , причём

$$\lambda(\omega) := w(\Omega, \omega) \leq 1. \quad (2.5)$$

Кроме того, $w(B, \omega)$ является F -измеримой функцией от ω , $\forall B \in F$. Для простоты мы потребуем от $w(B, \omega)$, как функции от ω , принадлежность бэровскому классу.

Случай $\lambda(\omega) \equiv 1$ назовём консервативным. Обозначим

$$q = \sup \lambda(\omega) (\leq 1). \quad (2.6)$$

Случай $q < 1$ назовём равномерно диссипативным, случай $q = 1$ – критическим, а случай

$$\lambda(\omega) < 1, \quad \omega \in \Omega, \quad q = 1 \quad (2.7)$$

назовём сильно диссипативным.

Пусть W – оператор перехода с ядром w :

$$y(B) = (Wx)(B) = \int_{\Omega} w(B, t) dx(\omega). \quad (2.8)$$

В консервативном случае $\lambda(\omega) \equiv 1$ и мы имеем

$$(Wx)(\Omega) = x(\Omega). \quad (2.9)$$

Из (2.8) имеем

$$y(B) \leq \int_{\Omega} w(\Omega, \omega) dx(\omega) = \int_{\Omega} \lambda(\omega) dx(\omega) \leq qx(\Omega), \quad B \in F, \quad x \in A.$$

Следовательно, $\|W\|_B \leq q$. Нетрудно показать, что

$$\|W\|_B = q. \quad (2.10)$$

§3. КОЛЛЕКТИВНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

3.1. Линейная кинетическая (полустохастическая) модель КМП. Пусть система S состоит из большого числа тождественных частиц. Рассмотрим коллективный марковский процесс (КМП), т.е. независимое блуждание этих частиц в одночастичном фазовом пространстве Ω с дискретным временем. Блуждание

индивидуальной частицы описывается ядром $w(B, \omega)$ марковских переходных вероятностей с дискретным временем. Если в некоторый момент времени $t \geq 0$ частица находится в точке $\omega \in \Omega$, то в момент времени $t + 1$ она с вероятностью $w(B, \omega)$ окажется в множестве $B \in F$. У системы S предполагается наличие стационарных первичных источников.

В каждый момент времени мы будем приближённо описывать состояние системы S усреднённым распределением $x \in A$, где $x(B)$ – среднее количество частиц, находящихся в множестве $B \in F$. Мера x назовём состоянием системы S . Источники будут заданы конечной мерой $g \in A$.

Введём оператор эволюции φ , сопоставляющий состоянию x системы S в некоторый момент дискретного времени t её состояние $y = \varphi x$ в момент $t + 1$. В рамках принятого нами приближения считается, что эволюция системы происходит в соответствии с исходным законом переходных вероятностей W , с учётом источников. Это означает, что $\varphi x(B) = g(B) + (Wx)(B)$, где оператор W определяется согласно (2.9).

Далее, через $x_n = x_n(B)$ обозначим состояние системы S в момент времени $n \geq 0$. Тогда, из определения φ мы приходим к эволюционному уравнению для задачи коллективного случайного блуждания : $x_{n+1} = \varphi x_n$ или

$$x_{n+1} = g + Wx_n \quad (3.1)$$

с начальным состоянием

$$x_0 = \alpha \in A. \quad (3.2)$$

Рекуррентное соотношение (3.1) определяет последовательность $(x_n) \subset A$. Выписывая (3.1) в раскрытом виде, получаем

$$x_{n+1}(B) = g(B) + \int_{\Omega} w(B, \omega) dx_n(\omega), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Заметим, что равновесные состояния процесса КМП инвариантны относительно оператора эволюции φ , т.е удовлетворяют уравнению $x = g + Wx$, или

$$x(B) = g(B) + \int_{\Omega} w(B, \omega) dx(\omega). \quad (3.4)$$

Принятую модель КМП мы назовём кинетической.

В случае $g = 0$, соотношениями вида (3.1) описывается вероятностное распределение одной частицы в момент времени n , если за α принять начальное распределение вероятностей (см. [1]). Отсюда следует, что при $g = 0$ статистическое

усреднение эквивалентно усреднению по времени, т.е. тогда кинетическая модель является точной. При $g \neq 0$ такая эквивалентность вообще говоря, не имеет места, и кинетическая модель может носить приближённый характер.

Заметим, что уравнения вида (3.4) возникают в различных вопросах теории вероятностей. К такому уравнению с нулевым или ненулевым g сводится множество задач теории восстановления, теории марковских и полумарковских процессов, теории очередей, физической кинетики и др. (см. [1] – [6]). Нашей основной целью является нахождение общих простых критериев существования σ -ограниченных решений уравнения (3.4).

3.2. Случай существования плотности. Пусть ядро w , начальное состояние α и источник g обладают плотностью относительно некоторой меры $\mu \in A$, т.е.

$$w(B, \omega) = \int_B k(\tau, \omega) d\mu(\tau),$$

$$g(B) = \int_B h(\tau) d\mu(\tau), \quad h \in L(\Omega, \mu),$$

$$\alpha(B) = \int_B \eta(\tau) d\mu(\tau), \quad \eta \in L(\Omega, \mu).$$

Тогда, из (3.2), (3.3), индукцией по n , получаем

$$x_n(B) = \int_B f_n(\tau) d\mu(\tau),$$

где $0 \leq f_n \in L(\Omega, \mu)$ определяются посредством :

$$f_{n+1}(\tau) = h(\tau) + \int_{\Omega} k(\tau, \omega) f_n(\omega) d\mu(\omega), \quad f_0 = \eta. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) сводится к следующему интегральному уравнению, где искомая функция есть плотность f распределения x :

$$f(\tau) = h(\tau) + \int_{\Omega} k(\tau, \omega) f(\omega) d\mu(\omega), \quad (3.6)$$

$$x(B) = \int_B f(\tau) d\mu(\tau).$$

3.3. Учёт нелинейных эффектов. В отличие от предыдущих пунктов, переходные вероятности будем считать зависящими от конфигурации x системы S . Если в некоторый момент времени t система находится в макроскопическом состоянии x , то частица, находящаяся в точке $\omega \in \Omega$, в момент $t+1$ с вероятностью $w(B, \omega|x)$ окажется в множестве $B \in F$.

Эволюция системы описывается следующими рекуррентными соотношениями :

$$x_{n+1}(B) = g(B) + \int_{\Omega} \omega(B, \omega | x_n) dx_n(\omega) \quad (3.7)$$

и начальным состоянием (3.2). Равновесные состояния определяются из нелинейного уравнения :

$$x(B) = g(B) + \int_{\Omega} \omega(B, \omega | x) dx(\omega). \quad (3.8)$$

§4. СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССА (3.1)

4.1. **Некоторые общие свойства.** Если итерации x_n сходятся по вариации в A , то в (3.3) можно совершить предельный переход. Предел x будет решением уравнения (3.4). Согласно (2.10), в равномерно диссипативном случае $q < 1$ оператор φ , сжимающий в банаховом пространстве E зарядов. Следовательно, $x_n \rightarrow x \in A$ при любом начальном условии (3.2). Предел x будет единственным равновесным распределением в A .

Пусть

$$x_0 = \theta. \quad (4.1)$$

Тогда x_n возрастает, т.е. $\theta = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$. Если последовательность x_n ограничена по норме, т.е. $x_n(\Omega) \leq c$, то эта последовательность сходится в A , а предел x будет минимальным решением уравнения равновесия (3.4).

В критическом случае $q = 1$ (см. (2.7)) решение x уравнения (3.4) может существовать как в A , так и в пространстве σ -конечных мер A_σ (см., например, [1] - [13]).

Однородное ($g = 0$) и неоднородное задачи одновременно могут иметь решения в A_σ . Построение этих решений предполагает продолжение оператора W из A в некоторый класс σ -конечных мер.

4.2. **Пример.** Элементарным примером задачи КМП, имеющей решение в A_σ , но не имеющей решение в A , может служить следующая задача коллективной игры "орёл-решка" с бесконечно богатым противником. Пусть в условиях классической задачи о разорении игрока в каждый момент дискретного времени n в игру вступает один игрок с единичным капиталом в один драм. Тогда уравнение равновесия (3.4) принимает вид

$$x = 1 + \frac{1}{2}x, \quad (4.2)$$

а (3.3) принимает вид

$$x^{(1)} = 1 + \frac{1}{2}x^{(2)}, \quad x^{(m)} = \frac{1}{2}x^{(m-1)} + \frac{1}{2}x^{(m+1)}, \quad m \geq 2,$$

где $x^{(m)}$ – математическое ожидание числа игроков с выигрышем в m драмов. Любой игрок с вероятностью 1 разорвется, однако минимальным положительным решением системы (4.2) является $x^{(m)} = 2$. Это решение не принадлежит A , поскольку ряд $\sum_m x^{(m)}$ расходится.

4.3. T – сходимоть. Пусть $x_n(\Omega) \rightarrow \infty$ в процессе (3.2), (3.3). Рассмотрим вопрос сходимоть x_n по подходящей топологии, к решению уравнения равновесия (3.4) в A_σ .

В определении (2.1) σ -конечных мер выбор покрытия $T = (B_k)$ множества Ω зависит от конкретной меры ν . Ниже мы выделим классы σ -конечным мер и зарядов, соответствующих одной и той же системе T .

Пусть $T = (B_k)$, $B_k \in F$, $k = 1, 2, \dots$, – система множеств, удовлетворяющая условию $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, $\Omega = \cup B_k$. Обозначим через $F_T \subset F$ класс измеримых множеств $B \in F_T$ таких, что $B \subset B_k$ при некотором k . Далее, через $A(T) \subset A$ обозначим множество σ -конечных мер ν таких, что $\nu(B_k) < +\infty$, $k = 1, 2, \dots$. Заметим, что класс $A(T)$ представляет собой пространство Фреше с топологией сходимости по вариации на множествах B_k .

Отметим, что если монотонная последовательность $x_n \in A$ ограничена на каждом множестве B_k , т.е.

$$x_n(B_k) \leq c_k, \quad (4.3)$$

то

$$x_n \rightarrow x \text{ в } A(T), \quad x_n(B) \leq x(B) \leq c_k, \quad B \subset B_k, \quad B \in F. \quad (4.4)$$

Будем говорить, что мера x является $A(T)$ -решением уравнения равновесия (3.4), если $x(B) < \infty$, для всех $B \in F_T$ и имеет место равенство (3.4).

Лемма 4.1. Пусть процесс x_n , определяемый согласно (3.2), (3.3), сходится в $A(T)$: $x_n \rightarrow x$. Тогда x является минимальным $A(T)$ -решением уравнения (3.4).

Доказательство. Если $B \subset B_k$ и $B \in F$, то с учётом (4.4) и (3.3), приходим к неравенству

$$g(B) + \int_{\Omega} w(B, \omega) dx_n(\omega) \leq x(B).$$

Откуда следует сходимоть интеграла $\int_{\Omega} w(B, \omega) dx_n(\omega)$ и неравенство

$$g(B) + \int_{\Omega} w(B, \omega) dx(\omega) \leq x(B). \quad (4.5)$$

С другой стороны, из (3.3) имеем

$$x_{n+1}(B) \leq g(B) + \int_{\Omega} w(B, \omega) dx(\omega)$$

что влечёт за собой неравенство, противоположное к (4.4). Лемма 4.1 доказана. Имеет место следующая простая лемма сравнения, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 4.2. Пусть W_1 – оператор вида (2.8) с ядром $w_1 \geq w$ и пусть уравнение $y = g + W_1 y$ имеет $A(T)$ -решение. Тогда уравнение (3.4) имеет минимальное $A(T)$ -решение $x \prec y$.

Следствие. Из существования некоторого $A(T)$ -решения уравнения (3.4) следует существование его минимального $A(T)$ -решения.

4.4. Теорема существования. Рассмотрим функцию потерь $\delta(\omega) = 1 - \lambda(\omega) \geq 0$, где λ определяется согласно (2.5). Рассмотрим процесс (3.3) с нулевым начальным состоянием (4.1). Очевидно, подставляя $B = \Omega$ в (3.3), получаем

$$x_{n+1}(\Omega) = g(\Omega) + \int_{\Omega} [1 - \delta(\omega)] dx_n(\omega), \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, имеем $x_{n+1}(\Omega) = g(\Omega) + x_n(\Omega) - \int_{\Omega} \delta(\omega) dx_n(\omega)$. С учётом $x_n(\Omega) \leq x_{n+1}(\Omega)$ приходим к основному неравенству.

Лемма 4.3. Если последовательность x_n определяется по (3.3) и (4.1), то

$$\int_{\Omega} \delta(\omega) dx_n(\omega) \leq g(\Omega). \quad (4.6)$$

В ряде случаев оценка (4.6) позволяет установить сходимость x_n по соответствующей T -топологии. Мы ограничимся рассмотрением случая сильно диссипативного оператора W . Тогда, согласно (2.7) имеем

$$\delta(\omega) > 0, \quad \inf \delta(\omega) = 0. \quad (4.7)$$

Введем следующие множества :

$$B_k = \left\{ \omega \in \Omega : \delta(\omega) \geq \frac{1}{k} \right\}. \quad (4.8)$$

Из измеримости функции δ следует, что $B_k \in F$, а из (4.7) следует, что $\cup B_k = \Omega$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть функция потерь δ удовлетворяет условиям (4.7) и $T = (B_k)$, где множества B_k определены согласно (4.8). Тогда процесс (3.3), (4.1) сходится к $A(T)$ -решению уравнения равновесия (3.4). Причём имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} \delta(\omega) dx(\omega) \leq g(\Omega). \quad (4.9)$$

Доказательство. Используя неравенство (4.6), получаем

$$x_n(B_k) = \int_{B_k} dx_n \leq k \int_{B_k} \delta(\omega) dx_n(\omega) \leq kg(\Omega),$$

т.е. выполняется неравенство (4.3) при $c_k = kg(\Omega)$. Поэтому, (x_n) сходится в $A(T)$. Применяя Лемму 4.1 приходим к равенству (3.4). Совершая в (4.6) предельный переход, получаем (4.9). Теорема 4.1 доказана.

Следствие. Равновесное состояние x принадлежит весовому B пространству σ -конечных зарядов мер с конечной нормой $\|x\|_s = \int_{\Omega} \delta(\omega) |dx(\omega)| < \infty$.

Теорему 4.1 нетрудно перефразировать в терминах процесса (3.5). Теорема 4.1 легко распространяется на нелинейное уравнение (3.8). Приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. Пусть переходной оператор W обладает следующими свойствами :

а) оператор W – монотонный, т.е. если $x \succ y$, то $Wx \succ Wy$, $x, y \in A$,

б) имеет место неравенство $(Wx)(\Omega) \leq \int_{\Omega} \lambda(\omega) dx(\omega)$, $x \in A$, где функция λ удовлетворяет условиям (2.7). Тогда процесс (3.7), (4.1) сходится в $A(T)$ к решению уравнения равновесия (3.8), где $A(T)$ определяется как в Теореме 4.1.

4.5. О задачах переноса излучения. Теория переноса излучения изучает весьма сложный коллективный процесс многократного рассеяния, т.е. случайные блуждания большого числа частиц одного или нескольких сортов в области $G \subset \mathbb{R}^3$ с возможностью изменения направления их движения, энергии и других характеристик, а также - взаимного превращения частиц различных сортов. В рамках линейной теории переноса предполагаются, что частицы блуждают в фазовом пространстве независимо друг от друга, по закону, который соответствует некоторому марковскому процессу. Соответствующее фазовое пространство Ω является декартовым произведением $G \times G_1$, где G_1 – фазовое пространство направлений, энергий и др., первичные источники и потери могут присутствовать. Тогда стационарные уравнения переноса составляются в "кинетическом" приближении.

Практически, все линейные стационарные задачи переноса излучения допускают запись в виде интегрального уравнения (3.4) относительно искомой функции источника, с сильно диссипативным оператором. Интегральное уравнение (3.4) для той или иной конкретной задачи переноса может быть выведено либо из краевой задачи для соответствующего интегро-дифференциального уравнения переноса, либо непосредственно, с помощью уравнения Пайерлса (см. [13]).

Теорема 4.1 приводит к довольно общей теореме существования для линейных стационарных задач переноса.

4.6. Некоторые замечания. Функция $\delta(\omega)$ учитывает только потери из состояния ω за один шаг. Теорема 4.1 может быть распространена на тот случай, когда условие сильной диссипативности (2.7) не выполняется, но частица с положительной вероятностью из любой точки может перейти в поглощающее множество за конечное число шагов, т.е. поглощающее множество достижимо из любого состояния.

Примером задачи “с источниками в бесконечности” является известная проблема Милна в теории переноса излучения (см. [3] – [5]). Примером течения частиц в бесконечность даёт решение уравнения восстановления на всей прямой или в многомерном пространстве (см. [1], [6], [10], [12]).

Abstract. The paper considers simultaneous Markov random walk of identical particles in one-particle phase space Ω , in the presence of particle sources and losses. There are countably many particles in the whole space, but their numbers remain locally bounded. A simple existence criterion of σ -bounded equilibrium distribution is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Ее Приложения, том 2, Мир, Москва, 1984.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
3. В. В. Соболев, Рассеяние Света в Атмосферах Планет, Наука, Москва, 1972.
4. F. Spitzer, “The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density”, Duke Math. J., vol. 24, no. 3, pp. 323 – 343, 1957.
5. I. Busbridge, The Mathematics of the Radiative Transfer, Oxford, 1960.
6. В. Рудин, Функциональный Анализ, Мир, Москва, 1975.
7. Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации для интегральных операторов”, Мат. сборник, том 191, № 12, 2000.
8. Н. Б. Енгибарян, “Уравнения свертки, содержащие сингулярные вероятностные распределения”, Известия РАН, Сер. Математика, том 60, № 2, 1996.
9. Н. Б. Енгибарян, “Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой”, Матем. сборник, том 193, № 6, 2002.
10. N. B. Yengibarjan, “Renewal equation on the whole line”, Stochastic Processes and Their Applications, vol. 85, pp. 237 – 247, 2000.
11. N. B. Yengibarjan, “Factorization of Markov chains”, J. of Theoretical Probability, vol. 17, no. 2, pp. 459 – 481, 2004.
12. Н. Б. Енгибарян, “Уравнение восстановления в многомерном пространстве”, Теория Вероятностей и её применения, том 49, № 4, стр. 779 – 785, 2004.
13. Б. Дэвисон, Теория Переноса Нейтронов, Москва, Атомиздат, 1960.

УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КАК МОДЕЛЬ МЕЖБАССЕЙНОВОЙ КИНЕТИКИ

С. В. Козырев

Математический институт им. В. А. Стеклова, Российской Академии Наук
E-mail : kozurev@mi.ras.ru

Резюме. Обсуждается процедура построения дерева бассейнов приближения межбассейновой кинетики для случайного блуждания на сложном энергетическом ландшафте. Строится соответствующая общая модель межбассейновой кинетики и показывается, что такая модель эквивалентна диффузии на некотором ультраметрическом пространстве, порождаемой псевдодифференциальным оператором. Простейший пример такой ультраметрической диффузии описывается p -адическим уравнением теплопроводности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

p -адические и ультраметрические методы использовались в различных областях математической физики и приложений, от теории струн [1], [2] и теории спиновых стёкол [3] до приложений к когнитивным наукам [4].

В настоящей работе обсуждается применение методов теории ультраметрических псевдодифференциальных операторов [5], [6] к построению моделей межбассейновой кинетики для общих энергетических ландшафтов. Показано, что модель межбассейновой кинетики, получаемая при помощи процедуры заливки ландшафта энергии общего вида, эквивалентна модели ультраметрической диффузии на ультраметрическом пространстве. В частности, простейшая модель межбассейновой кинетики имеет вид [7] p -адического уравнения теплопроводности с оператором Владимирова p -адического дробного дифференцирования [2]. Известным примером применения ультраметрики в физике является метод реплик теории спиновых стёкол [3], где ультраметрика возникала другим образом.

Динамика широкого класса физически важных сложных систем (стёкла, кластеры, полимеры) описывается случайным блужданием на сложном энергетическом ландшафте. В частности, такие модели важны для описания функционирования белков в рамках релаксационной концепции динамики белка [8]. В связи с этим

большой интерес представляет приближённое описание динамики на сложных ландшафтах. Метод межбассейновой кинетики даёт приближённое описание случайного блуждания на сложных энергетических ландшафтах и основан на описании кинетики, порождённой переходами между группами состояний, т.е. бассейнами. Минимальные бассейны соответствуют локальным минимумам энергии, большие бассейны (супербассейны, объединения бассейнов) устроены иерархически. Основные постулаты такого приближения :

- (1) Пространство состояний разделено на бассейны, которые разбиваются на подбассейны иерархическим образом (образуя направленное дерево бассейнов).
- (2) Вероятности перехода между состояниями бассейнов зависят только от бассейнов, но не зависят от выбора состояний в бассейнах.

Переходы между бассейнами описываются следующей системой кинетических уравнений :

$$\frac{d}{dt}f(i, t) = - \sum_j [T(i, j)f(i, t) - T(j, i)f(j, t)] \nu(j), \quad (1)$$

где индексы i и j нумеруют состояния системы, $T(i, j) \geq 0$ есть вероятность перехода в единицу времени из i в j , а $\nu(j) > 0$ суть некоторые положительные числа (объёмы бассейнов).

Описанные ограничения приближения межбассейновой кинетики на матрицу $T(i, j)$ означают, что эта матрица будет блочной с большим числом одинаковых матричных элементов. В важном частном случае матрицу $T(i, j)$ можно взять равной матрице Паризи, применяющейся в методе реплик теории спиновых стёкол [3].

Различные модели межбассейновой кинетики и иерархической динамики изучались в работах [9] – [12]. В работах [13], [14] p -адическая диффузия обсуждалась в связи с релаксацией спиновых стёкол. Динамика белка изучалась при помощи месбауэровской спектроскопии Г. Фраунфельдером и В. И. Гольданским [22]. Идея об иерархичности пространства состояний белка была высказана Фраунфельдером (см. для обзора [15]).

Автором, совместно с В. А. Аветисовым и А. Х. Биккуловым, был предложен [16] подход описания моделей межбассейновой кинетики ультраметрической диффузией, порождаемой псевдодифференциальными операторами. При таком подходе постулаты межбассейновой кинетики предлагается интерпретировать следующим образом :

- (1) = пространство состояний ультраметрично,
- (2) = вероятность перехода локально постоянна.

Тогда в простейшем случае, т.е. $T(i, j)$ есть p -ичная матрица Паризи некоторого простого вида, и все $\nu(j)$ равны между собой, система уравнений межбассейновой кинетики принимает вид p -адического уравнения теплопроводности [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + D_x^\alpha f(x, t) = 0. \quad (2)$$

Этот результат связан с p -адической параметризацией матрицы Паризи, описанной в [7], [17]. Здесь D_x^α – оператор Владимирова p -адического дробного дифференцирования, действующий по переменной x , описывающей дерево бассейнов для сложного энергетического ландшафта (конформационная переменная для моделей динамики белка). p -адические модели межбассейновой кинетики обсуждались в [7], [16], [18].

Процедуры построения иерархии бассейнов и моделей межбассейновой кинетики по энергетическому ландшафту изучались Стилинджером и Вебером [19], [20], Бекером и Карплусом [21]. Такие модели применялись для построения иерархии бассейнов для пептидов [21] по данным молекулярной динамики. При таком подходе, сложный ландшафт приближается деревом связности и функцией распределения энергии активаций.

Очень схематично такая процедура может быть описана следующим образом. Ландшафт энергии системы заливается водой, вода образует лужи вокруг локальных минимумов. При повышении уровня воды лужи начинают сливаться, пока не останется всего одна лужа. Результатом процедуры является направленное дерево бассейнов(луж), причём минимальным лужам ставится в соответствие их глубина (значения локальных минимумов энергии), более крупным лужам – уровень энергии, на которых эти лужи сливаются (величина барьера активации между бассейнами). В результате мы получаем дерево бассейнов и функцию на дереве бассейнов, которая описывает распределение энергий локальных минимумов и барьеров активации. Это и есть модель межбассейновой кинетики. Руководствуясь этой аналогией, мы будем называть обсуждаемую процедуру построения дерева бассейнов по энергетическому ландшафту процедурой заливки энергетического ландшафта.

В настоящей работе строится уравнение ультраметрической диффузии, описывающее в приближении межбассейновой кинетики (для процедуры заливки) динамику на сложном энергетическом ландшафте общего вида. Такое уравнение имеет вид ультраметрического псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \int_X \frac{e^{-\beta E(\text{sup}(x, y))}}{\nu(\text{sup}(x, y))} \left[e^{\beta E(x)} f(x, t) - e^{\beta E(y)} f(y, t) \right] d\nu(y) = 0,$$

где $x, y \in X$ лежат в ультраметрическом пространстве, отвечающем дереву бассейнов энергетического ландшафта, $f(x, t)$ есть распределение заселённости. Для широкого класса потенциалов, такие уравнения являются точно решаемыми, что позволяет исследовать динамику на таких сложных ландшафтах в приближении межбассейновой кинетики аналитически. В частном случае вышеприведённое уравнение принимает вид p -адического уравнения теплопроводности (2).

Настоящая работа устроена следующим образом. В §2 описывается процедура заливки, т.е. построения дерева бассейнов и функции на этом дереве распределения энергий активации для ландшафта энергии общего вида. В §3 строится соответствующая общая модель межбассейновой кинетики. В §4 показывается эквивалентность модели межбассейновой кинетики из §3 и модели ультраметрической диффузии на пространстве, отвечающем дереву бассейнов, с псевдодифференциальным генератором (в смысле работ [5], [6]).

§2. ЛАНДШАФТ И ДЕРЕВО БАССЕЙНОВ

Опишем процедуру заливки, которая сопоставляет ландшафту (т.е. вещественнозначной функции на области в \mathbb{R}^N), описывающей распределение потенциальной энергии) дерево бассейнов, функцию на этом дереве, описывающую набор барьеров активации для случайного блуждания на ландшафте, и меру на границе дерева, отвечающую объёмам соответствующих бассейнов.

Рассмотрим энергетический ландшафт U , т.е. гладкая вещественная функция на конфигурационном пространстве M . Конфигурационное пространство есть компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}^N$ (с мерой Лебега), являющееся некоторым многообразием с краем. Рассмотрим для функции U набор всех её локальных минимумов. Мы предполагаем, что этот набор конечен.

Для локального минимума i , рассмотрим подмножество $R(i)$ в конфигурационном пространстве M (называемом бассейном притяжения i), состоящее из таких точек $\xi \in M$, для которых

- 1) существует путь (т.е. непрерывная кривая) в M , соединяющий ξ и i такой, что U убывает на пути от ξ к i ,
- 2) если существуют пути от ξ к различным локальным минимумам, вдоль которых U убывает, то расстояние от ξ до i меньше (или равно) расстояниям от ξ до других минимумов. Здесь расстояние от ξ до i понимается в смысле расстояния вдоль энергетической поверхности, т.е. как точная нижняя грань длин путей на ландшафте энергии, соединяющих эти точки.

Если различные $R(i)$ и $R(j)$ могут пересекаться только по множеству нулевой меры, а объединение всех $R(i)$ есть всё конфигурационное пространство M .

Таким образом, бассейны $R(i)$ реализуют разбиение всего конфигурационного пространства. Введём следующие определения.

- 1) Для точек α и β из M и пути $S \subset M$ в конфигурационном пространстве, соединяющего эти две точки α и β , мы будем говорить, что точка α отделена от точки β энергетическим барьером E на пути S , если

$$\sup_{\xi \in S} U(\xi) = E.$$

- 2) Для точек α и β из M мы будем говорить, что α отделена от точки β энергетическим барьером E , если

$$U(\alpha, \beta) = \inf_S \sup_{\xi \in S} U(\xi) = E.$$

Мы будем говорить, что бассейны $R(i)$ и $R(j)$ E -связны (или имеют кинетическую связность E), если энергетический барьер между локальными минимумами i и j не превосходит E . Легко видеть, что E -связность есть отношение эквивалентности. Далее, зафиксируем энергию E и определим супербассейн $R^E(i)$ как объединение всех бассейнов $R(j)$, E -связных с бассейном $R(i)$.

Для данного E может существовать несколько E -связных супербассейнов, каждый из которых есть объединение конечного числа бассейнов. Поскольку кинетическая связность есть отношение эквивалентности, супербассейны с данной кинетической связностью образуют разбиение конфигурационного пространства M . (т.е. M есть объединение таких супербассейнов, и разные супербассейны пересекаются по множеству меры нуль). В дальнейшем супербассейны мы также будем называть бассейнами, бассейны притяжения, отвечающие локальным минимумам – минимальными бассейнами.

Фиксируем теперь шкалу энергий, т.е. возрастающую последовательность вещественных чисел $\{E_k\}$. Тогда для $E_l > E_k$ все E_l -связные бассейны являются конечными объединениями E_k -связных бассейнов. Бассейну I поставим в соответствие такую минимальную E_k из энергетической шкалы $\{E_k\}$, что I E_k -связен. Назовём $E(I) = E_k$ кинетической связностью бассейна I в энергетической шкале $\{E_k\}$. Итак, мы получаем иерархию бассейнов, отвечающую некоторому направленному дереву \mathcal{T} , и функцию на этом дереве – кинетическую связность бассейнов.

Вершинами дерева \mathcal{T} будут E_k -связные бассейны для всевозможных k , порядок в дереве соответствует вложению бассейнов, минимальные вершины отвечают областям притяжения локальных минимумов. Вершины I и J дерева соединены

убывающим ребром, если отвечающие им бассейны вложены друг в друга и кинетическая связность, отвечающая I в энергетической шкале, на одну степень больше шкалы кинетической связности, отвечающей J (т.е. I E_k -связен, но не E_{k-1} -связен, и J E_{k-1} -связен, но не E_{k-2} -связен).

В данном направленном дереве имеем

$$\text{sup}(i, j) = I, \quad (3)$$

где I – минимальный бассейн из \mathcal{T} , содержащий бассейны $R(i)$ и $R(j)$. Таким образом, кинетическая связность в энергетической шкале для бассейна $\text{sup}(i, j)$ есть минимальная энергия из шкалы $\{E_k\}$, большая или равная энергетическому барьеру $U(i, j)$ между локальными минимумами i и j .

Следуя [21], направленное дерево \mathcal{T} , определяющееся ландшафтом энергии U и энергетической шкалой $\{E_k\}$, назовём деревом связности ландшафта U . Это дерево содержит информацию о кинетике системы на данном энергетическом ландшафте в приближении межбассейновой кинетики. Описанную процедуру построения дерева бассейнов и распределения барьеров активации на дереве мы будем называть процедурой заливки ландшафта: мы заливаем ландшафт U водой, постепенно повышая уровень воды, принимающий значения из шкалы $\{E_k\}$. Сначала бассейны будут отдельными лужами, залитыми водой, супербассейны есть слияние луж. Дерево связности ландшафта описывает историю слияния луж при повышении уровня воды.

§3. МЕЖБАССЕЙНОВАЯ КИНЕТИКА

Для исследования динамики на сложном ландшафте представляется важным развитие приближённых подходов, основанных на представлениях об общих свойствах динамики на сложных ландшафтах. Важным примером такого подхода является метод межбассейновой кинетики, когда ландшафт делится на области (бассейны), отвечающие локальным минимумам энергии (бассейны притяжения локальных минимумов). Затем по некоторым правилам строится набор вероятностей перехода в единицу времени между бассейнами.

Бассейны образуют естественную иерархию, следовательно набор вероятностей перехода между бассейнами должен быть иерархическим. Таким образом, случайное блуждание на сложном ландшафте приближается иерархически устроенной системой кинетических уравнений, описывающих переходы между бассейнами. Динамикой внутри бассейнов при этом пренебрегают: для сложного ландшафта энергии, где бассейны являются достаточно малыми, пренебрежение является адекватным.

Теперь рассмотрим дерево бассейнов, порождаемое процедурой заливки ландшафта энергии. Построим систему уравнений межбассейновой кинетики, пользуясь формулой Эйринга-Полани

$$\kappa = A \exp(-\beta \Delta F),$$

где κ – константа скорости реакции, ΔF – свободная энергия активации, в теории Эйринга активированного комплекса $A = kT/h$, а k и h – постоянные Больцмана и Планка, T – температура, а β – обратная температура. Такие формулы дают приближённое выражение для констант скоростей реакций, которые могут, в частности, описываться движением частицы на ландшафте энергии.

Рассмотрим следующую систему кинетических уравнений межбассейновой кинетики :

$$\frac{dg(i, t)}{dt} = - \sum_{j \neq i} \left[e^{\beta(F(i) - G(\text{sup}(i, j)))} C(i, j) g(i, t) - e^{\beta(F(j) - G(\text{sup}(i, j)))} C(j, i) g(j, t) \right],$$

где i и j – минимальные бассейны (области притяжения локальных минимумов), $g(i)$ – заселённость минимального бассейна i , $F(i)$ – свободная энергия бассейна i , $\text{sup}(i, j)$ – минимальный супербассейн, содержащий бассейны i и j , $G(\text{sup}(i, j))$ – свободная энергия переходного состояния для перехода между бассейнами i и j (мы считаем, что такое переходное состояние определяется супербассейном $\text{sup}(i, j)$).

Коэффициенты $C(i, j)$ выбираются положительными и симметричными, поэтому система кинетических уравнений будет удовлетворять условиям детального баланса. Эти коэффициенты описывают модификацию формулы Эйринга на случай переходов не между двумя состояниями, а между набором состояний с единственным промежуточным (переходным) состоянием. Мы предлагаем следующий выбор для таких коэффициентов

$$C(i, j) = \frac{\#(i)\#(j)}{\#^2(\text{sup}(i, j))}, \quad (4)$$

где $\#(i)$ – число состояний в бассейне i (т.е. объём). При таком выборе, при растяжениях ландшафта энергии коэффициент $C(i, j)$ не меняется.

Интерпретация : вероятность попадания из бассейна i в переходное состояние, соответствующее супербассейну $\text{sup}(i, j)$ равна $\#(i)/\#(\text{sup}(i, j))$; вероятность перехода из переходного состояния в бассейн j равна $\#(j)/\#(\text{sup}(i, j))$.

При таком выборе коэффициентов система уравнений межбассейновой кинетики примет вид

$$\frac{df(i, t)}{dt} = - \sum_{j \neq i} \frac{e^{-\beta G(\text{sup}(i, j))}}{\#^2(\text{sup}(i, j))} \left[e^{\beta B(i)} f(i, t) - e^{\beta B(j)} f(j, t) \right] \#(j),$$

где $f(i) = g(i)/\#(i)$ – плотность заселённости бассейна i , а $E(i)$ – энергия бассейна i (т.е. $e^{\beta F(i)} = e^{\beta E}/\#(i)$). Чтобы окончательно избавиться от свободных энергий, достаточно считать, что объём переходного состояния для бассейна $\text{sup}(i, j)$ пропорционален объёму этого бассейна, т.е.

$$e^{S(\text{sup}(i, j))} \sim \#(\text{sup}(i, j)), \quad (5)$$

где $S(\text{sup}(i, j))$ – энтропия переходного состояния. При таком выборе энтропии переходного состояния система кинетических уравнений межбассейновой кинетики примет вид

$$\frac{df(i, t)}{dt} = - \sum_{j \neq i} \frac{e^{-\beta E(\text{sup}(i, j))}}{\#(\text{sup}(i, j))} \left[e^{\beta E(i)} f(i, t) - e^{\beta E(j)} f(j, t) \right] \#(j), \quad (6)$$

где $E(\text{sup}(i, j))$ – энергия переходного состояния для бассейна $\text{sup}(i, j)$, которая участвует в процедуре заливки.

§4. УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ

Иерархия вложенных бассейнов энергетического ландшафта описывается направленным деревом \mathcal{T} , строится ультраметрическое пространство $X(\mathcal{T})$ (см., например, [5]). Если дерево \mathcal{T} конечно, то ультраметрическое пространство $X(\mathcal{T})$ отождествляется с набором минимальных вершин дерева \mathcal{T} . Расстояние (т.е. ультраметрика) в X определяется, с точностью до эквивалентности, частичным порядком в дереве \mathcal{T} (две метрики эквивалентны; если порождают одинаковое множество шаров). Такую ультраметрику будем обозначать через $d(x, y)$, и отметим, что бассейны являются шарами относительно $d(x, y)$.

Меру ν на пространстве $X(\mathcal{T})$ определим следующим образом: мера шара берётся равной объёму соответствующего бассейна в конфигурационном пространстве M . Для конечного дерева бассейнов точки ультраметрического пространства $X(\mathcal{T})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с локальными минимумами i энергетического ландшафта. Мера точки x , отвечающей бассейну i , берётся равной объёму $\#(i)$ бассейна притяжения локального минимума i .

Пользуясь эквивалентностью между направленными деревьями и ультраметрическими пространствами, получаем следующую теорему.

Теорема 1. Система уравнений межбассейновой кинетики (6) эквивалентна ультраметрическому псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \int_X \frac{e^{-\beta E(\text{sup}(x, y))}}{\nu(\text{sup}(x, y))} \left[e^{\beta E(x)} f(x, t) - e^{\beta E(y)} f(y, t) \right] d\nu(y) = 0, \quad (7)$$

где ультраметрическое пространство X отвечает дереву бассейнов процедуры заливки ландшафта энергии, точки x ультраметрического пространства отвечают минимальным бассейнам i , (т.е. областям притяжения минимумов энергии), мера ν соответствует объёму бассейна, т.е. $\nu(x) = \#(i)$ для минимального бассейна i , отвечающего минимальному шару x в ультраметрическом пространстве.

Мы не будем ограничивать рассмотрение динамики на энергетических ландшафтах ультраметрическими пространствами из конечного числа точек, но будем рассматривать общий случай уравнений вида (7) на регулярных ультраметрических пространствах в смысле работы [5]. Конечные деревья бассейнов получаются при рассмотрении гладких энергетических ландшафтов, а ландшафты энергии сложных систем могут быть весьма сложными. Для негладкого ландшафта наше построение дерева бассейнов напрямую неприменимо: действительно, можно рассмотреть индуктивный предел направленных деревьев, интерпретируемых как деревья бассейнов, и связанных с ними пространств функций. Для предельного бесконечного дерева мы можем исследовать псевдодифференциальное уравнение вида (7) на ультраметрическом пространстве, отвечающем предельному дереву, и интерпретировать такое уравнение как описывающее динамику на сложном негладком ландшафте.

Пример. Рассмотрим случай, когда $X = Q_p$, мера ν есть мера Хаара μ , и энергия активации выбирается следующим образом:

$$E(|x - y|_p) = k \ln |x - y|_p, \quad k > 0,$$

потенциал минимальных шаров (точек) Q_p кладётся равным нулю. Если $|x - y|_p = p^\gamma$, то энергия активации линейна по γ , а для вероятности перехода

$$\frac{e^{-\beta E(\text{sup}(x,y))}}{\nu(\text{sup}(x,y))} = \frac{e^{-\beta k \ln |x-y|_p}}{|x-y|_p} = \frac{1}{|x-y|_p^{1+\beta k}}.$$

Уравнение межбассейновой кинетики принимает вид p -адического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + D_x^\alpha f(x,t) = 0,$$

где показатель α оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования

$$D_x^\alpha f(x,t) = \Gamma_p^{-1}(-\alpha) \int_{Q_p} \frac{f(x,t) - f(y,t)}{|x-y|_p^{1+\alpha}} d\mu(x)$$

пропорционален обратной температуре $\alpha = \beta k$.

Замечание 1. Задача Коши для p -адического уравнения теплопроводности является точно решаемой. Аналогично, задача Коши для уравнения (7) точно решается при помощи ультраметрического вейвлет-преобразования, если можно выбрать энергии локальных минимумов равными $E(x) = \text{const}$. Таким образом, в приближении межбассейновой кинетики динамика для широкого класса сложных ландшафтов допускает аналитическое исследование. В частности, получаемые при помощи применения p -адических методов результаты для динамики связывания миоглобина с CO [16] совпадают с данными спектроскопических экспериментов. Следует отметить, что модель связывания миоглобина с CO играет в физике белка основополагающую роль, аналогичную роли модели атома водорода в квантовой механике [23].

Замечание 2. Развиваемые здесь ультраметрические модели межбассейновой кинетики важны в первую очередь для построения моделей динамики сложных систем, в которых можно в явном виде заложить характеристики энергетического ландшафта. В частности, в работе [18] были описаны p -адические модели межбассейновой кинетики, дающие набор различных характерных для сложных систем режимов релаксации.

Благодарности. Автор благодарен В. А. Аветисову, А. Х. Бикуюлову, В. С. Владимирову, И. В. Воловичу и А. Ю. Хренникову за плодотворные обсуждения и важные замечания. Автор был частично поддержан грантами: DFG Project 436 RUS 113/809/0-1, РФФИ 05-01-04002-ННЮ-, РФФИ 05-01-00884-а, грантом Президента Российской Федерации для поддержки научной школы НШ 6705.2006.1 и программой Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Abstract. Within a general model of interbasin kinetics a tree of approximation basins is constructed for random walk on a complicated energy landscape. The outcome is shown to be equivalent to the diffusion on some ultrametric space generated by a pseudodifferential operator. The simplest example of such an ultrametric diffusion is described by the p -adic heat conduct equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. V. Volovich, "p-adic string", Class. Quantum Gravity, vol. 4, L83-L87, 1987.
2. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, Ye. I. Zelenov, p -adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 1994.
3. M. Mezard, G. Parisi, M. Virasoro, Spin-glass Theory and Beyond, World Scientific, Singapore, 1987.
4. A. Khrennikov, Non-Archimedean Analysis, Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models, Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Pseudodifferential operators on ultrametric spaces and ultrametric wavelets", Russian Math. Izv., vol. 69, no. 5, 2005,

- <http://arxiv.org/abs/math-ph/0412062>.
6. A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Wavelets on ultrametric spaces", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 19, pp. 61 – 76, 2005.
 7. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, "Application of p -adic analysis to models of spontaneous breaking of the replica symmetry", *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 32, no. 50, pp. 8785 – 8791, 1999, <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9904360>.
 8. Л. А. Блюменфельд, *Проблемы биологической физики*, Наука, Москва, 1977.
 9. K. H. Hoffmann, P. Sibani, "Diffusion in hierarchies", *Phys. Rev. A*, vol. 38, pp. 4261 – 4270, 1988.
 10. F. H. Stillinger, "Relaxation behavior in atomic and molecular glasses", *Phys. Rev. B*, vol. 41, pp. 2409 – 2416, 1990.
 11. H. Yoshino, "Hierarchical diffusion, aging and multifractality", *J. Phys. A*, vol. 30, p. 1143, 1997. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9604033>
 12. A. T. Ogielski, D. L. Stein, "Dynamics on ultrametric spaces", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, no. 15, pp. 1634 – 1637, 1985.
 13. L. Brekke, M. Olson, " p -Adic diffusion and relaxation in glasses", Preprint UTTG-16-89, EFI-89-23.
 14. L. Brekke, P. G. O. Freund, " p -Adic numbers in physics", *Phys. Rept.*, vol. 233, no. 1, pp. 1–66, 1993.
 15. H. Frauenfelder, S. G. Sligar, P. G. Wolynes, "The energy landscape and motions of proteins", *Science*, vol. 254, pp. 1598–1603, 1991.
 16. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, " p -Adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes", *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 35, no. 2, pp. 177–189, 2002. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106506>
 17. G. Parisi, N. Sourlas, " p -Adic numbers and replica symmetry breaking", *European Phys. J. B*, vol. 14, pp. 535–542, 2000. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9906095>
 18. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, V. A. Osipov, " p -Adic description of characteristic relaxation in complex systems", *J. Phys. A : Math. and Gen.*, vol. 36, no. 15, pp. 4239–4246, 2003. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0210447>
 19. F. H. Stillinger, T. A. Weber, "Hidden structure in liquids", *Phys. Rev. A*, vol. 25, pp. 978–989, 1982.
 20. F. H. Stillinger, T. A. Weber, "Packing structures and transitions in liquids and solids", *Science*, vol. 225, pp. 983–989, 1984.
 21. O. M. Becker, M. Karplus, "The topology of multidimensional protein energy surfaces : theory and application to peptide structure and kinetics", *J. Chem. Phys.*, vol. 106, pp. 1495–1517, 1997.
 22. В. И. Гольдманский, Ю. Ф. Крупянский, К. В. Шайтан, А. Б. Рубин, *Биофизика*, том 32, стр. 761–774, 1987.
 23. H. Frauenfelder, B. H. McMahon, P. W. Fenimore, "Myoglobin : the hydrogen atom of biology and paradigm of complexity", *PNAS*, vol. 100, no. 15, pp. 8615–8617, 2003.

Поступила 5 сентября 2006

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН, Москва
E-mail : sergeev@mi.ras.ru

Резюме. Изучаются гармонические отображения римановых поверхностей M в пространства петель ΩG компактных групп G с помощью твисторного подхода. Гармонические отображения в пространства петель представляют особый интерес ввиду их связи с решениями уравнений Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 .

§1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучаются гармонические отображения римановых поверхностей M в пространства петель ΩG компактных групп Ли G . Интерес к таким отображениям объясняется результатом Атья [1], утверждающим, что пространство модулей G -инстантов на \mathbb{R}^4 можно отождествить с пространством централизованных голоморфных отображений римановой сферы $\mathbb{C}P^1$ в пространство петель ΩG . В соответствии с этим утверждением, естественно предположить, что пространство модулей G -полей Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 можно аналогичным образом отождествить с пространством централизованных гармонических отображений $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \Omega G$.

Для исследования гармонических отображений римановых поверхностей в пространства петель, мы пользуемся твисторным подходом. Главная идея этого подхода (применительно к рассматриваемой задаче) состоит в том, чтобы построить

При подготовке этой работы автор пользовался частичной поддержкой грантов РФФИ 04-01-00236, 02-02-04002, программой поддержки ведущих научных школ грант НШ-1542.2003.1 и научной программы “Нелинейная динамика” Президиума РАН.

для заданного риманового многообразия N так называемое твисторное расслоение $\pi : Z \rightarrow N$ с почти комплексным многообразием Z , обладающее следующим свойством : для любого псевдоголоморфного отображения $\psi : M \rightarrow Z$ произвольной римановой поверхности M в твисторное пространство Z , его проекция $\pi \circ \psi : M \rightarrow N$ на многообразии N является гармоническим отображением. Тем самым, можно сказать, что твисторный подход позволяет свести исходную “вещественную” задачу описания гармонических отображений римановых поверхностей M в заданное риманово многообразие N , к “комплексной” задаче описания псевдоголоморфных отображений из M в почти комплексное многообразие Z .

Обзор общей теории твисторных пространств можно найти в [5] (см. также [10]). В данной работе нас интересует специальный класс римановых многообразий N , образуемый грассмановыми многообразиями $N = G_r(\mathbb{C}^d)$. В этом случае роль твисторного расслоения $\pi : Z \rightarrow N$ играют однородные флаговые расслоения $\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^d)$. При этом гармонические отображения $\varphi : M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^d)$ возникают как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$ (относительно почти комплексной структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$).

Для того, чтобы воспользоваться твисторным подходом для описания гармонических отображений $\varphi : M \rightarrow \Omega G$ в случае бесконечномерного многообразия петель, мы вкладываем ΩG изометрически в бесконечномерный грассманиан $Gr_{HS}(H)$ некоторого комплексного гильбертова пространства H . Указанный грассманиан является несвязным объединением грассманианов $G_r(H)$ виртуальной размерности r . Для каждого из грассманианов $G_r(H)$ по аналогии с конечномерной ситуацией, определяются виртуальные флаговые расслоения $\mathcal{F}_r(H) \rightarrow G_r(H)$. Пользуясь этими расслоениями, мы можем построить гармонические отображения $\varphi : M \rightarrow \Omega G$ как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}_r(H)$.

Коротко о содержании статьи. В §2 мы напоминаем основные свойства гармонических отображений римановых многообразий. В §3 объясняется общая идея твисторного подхода к исследованию гармонических отображений, которая конкретизируется затем (§4) в специальном случае грассмановых многообразий. В §5 мы напоминаем определение пространства петель ΩG и теорему Атьи, устанавливающую взаимно-однозначное соответствие между G -инстантонами на \mathbb{R}^4 и голоморфными сферами в ΩG . В §6 вводится грассманиан Гильберта–Шмидта $Gr_{HS}(H)$ и грассманианы $G_r(H)$ виртуальной размерности r . Здесь же строится изометрическое вложение пространства петель ΩG в грассманиан $Gr_{HS}(H)$, которое позволяет считать гармонические отображения $\varphi : M \rightarrow \Omega G$ принима-

ющими значения в одном из грассманианов $G_r(H)$. Гармонические отображения $\varphi : M \rightarrow G_r(H)$ можно строить как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}_r(H)$ на $G_r(H)$.

§2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ : ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Пусть $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ есть гладкое отображение риманового многообразия M , наделённого римановой метрикой g , в риманово многообразии N с римановой метрикой h . Зададим энергию отображения φ интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi(p)|^2 \text{vol}_g. \quad (1)$$

Норму дифференциала в подинтегральном выражении можно вычислить в локальных координатах следующим образом. Обозначим локальные координаты в точке $p \in M$ через (x^i) , а локальные координаты в точке $q = \varphi(p) \in N$ через (u^α) . Тогда

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta},$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ суть компоненты отображения φ , (g_{ij}) и $(h_{\alpha\beta})$ метрические тензоры многообразий M и N соответственно, (g^{ij}) — компоненты матрицы, обратной к (g_{ij}) , а vol_g — элемент объёма метрики g .

Определение 1. Гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется гармоническим, если оно является экстремальным для функционала энергии $E(\varphi)$ по отношению к произвольным гладким вариациям φ с компактным носителем.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала $E(\varphi)$ имеет в введённых выше локальных координатах (x^i) на M и (u^α) на N следующую форму :

$$\Delta_M \varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\varphi) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad (2)$$

где Δ_M — стандартный оператор Лапласа–Бельтрами на M , задаваемый формулой

$$\Delta_M \varphi^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right\},$$

где ${}^M \Gamma_{ij}^k$ обозначает символ Кристоффеля связности Леви–Чивита ${}^M \nabla$ многообразия M , соответственно, ${}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ есть символ Кристоффеля связности Леви–Чивита ${}^N \nabla$ многообразия N .

В частном случае $N = \mathbb{R}^n$, уравнение (2) превращается в линейное уравнение Лапласа–Бельтрами $\Delta_M \varphi^\gamma = 0$ для компонент φ^γ , $\gamma = 1, \dots, n$, отображения φ .

Первый нетривиальный пример нелинейного гармонического уравнения возникает в так называемой $SO(3)$ -модели, происходящей из теории ферромагнетизма. В этом примере, рассматриваются гладкие отображения $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto S^2$ с конечной энергией $E(\varphi) < \infty$. Чтобы обеспечить условие конечности энергии, такие отображения должны стабилизироваться на бесконечности, т.е. $\varphi(x) \rightarrow \varphi_0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Следовательно, рассматриваемые отображения φ продолжаются до отображений $\varphi : S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty \mapsto S^2$. Последние, как известно, обладают топологическим инвариантом, называемым степенью отображения :

$$\deg \varphi = \int_{S^2} \varphi^* \text{vol},$$

где "vol" обозначает нормированную форму объёма на сфере S^2 .

С учётом этого, мы можем уточнить задачу об описании гармонических отображений в рассматриваемом случае следующим образом : описать критические точки функционала энергии $E(\varphi)$ в заданном топологическом классе, т.е. при фиксированном значении степени $\deg \varphi$.

Обозначим через $z = x_1 + ix_2$ комплексную координату на плоскости \mathbb{R}^2 , а через w комплексную координату в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$, задаваемую стереографической проекцией. В этих координатах энергия отображения $\varphi = w(z)$ будет задаваться следующей формулой

$$E(\varphi) = 2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial_z w|^2 + |\partial_{\bar{z}} w|^2}{(1 + |w|^2)^2} |dz \wedge d\bar{z}|, \quad (3)$$

причём степень отображения φ вычисляется по формуле

$$\deg \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar{z}} w|^2}{(1 + |w|^2)^2} |dz \wedge d\bar{z}|. \quad (4)$$

Сравнивая две последние формулы, мы получаем оценку энергии снизу :

$$E(\varphi) \geq 4\pi |\deg \varphi|.$$

Из неё вытекает, что минимум энергии $E(\varphi)$ при заданной степени $k = \deg \varphi$ достигается на голоморфных функциях $w = \varphi(z)$, если $k \geq 0$, и на антиголоморфных функциях $w = \varphi(z)$, если $k \leq 0$.

Используя $SO(3)$ -инвариантность задачи, зафиксируем асимптотическое значение $\varphi_0 = 1$. Тогда отображения $w = \varphi(z)$ минимизирующие энергию $E(\varphi)$ в классе $k \geq 0$ будут записываться в виде

$$w = \varphi(z) = \prod_{j=1}^k \frac{z - a_j}{z - b_j},$$

где a_j, b_j – произвольные комплексные числа. В частности, при фиксированном k пространство минимумов параметризуется $4k + 2$ вещественными параметрами.

Если сравнивать построенные решения $SO(3)$ -модели с решениями уравнений дуальности Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 , то можно сказать, что голоморфные (или антиголоморфные) отображения $\varphi : \mathbb{R}^2 \cup \infty \rightarrow S^2$ отвечают инстантонным (или антиинстантонным) решениям уравнений дуальности. Ниже мы увидим, что указанное соответствие между гармоническими отображениями и решениями уравнений Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 имеет, на самом деле, гораздо более глубокий смысл.

Можно показать, что в рассмотренном случае $SO(3)$ -модели функционал энергии $E(\varphi)$ не имеет других критических точек, за исключением локальных минимумов. Другими словами, не существует других гармонических отображений $\varphi : \mathbb{R}^2 \cup \infty \rightarrow S^2$ помимо голоморфных и антиголоморфных.

Заметим, что в случае гармонических отображений между общими комплексными многообразиями, голоморфные и антиголоморфные отображения будут также задавать локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Более подробно, предположим, что наше риманово многообразие (M, g) наделено комплексной (или почти комплексной) структурой ${}^M J$, совместимой с римановой метрикой g , и, аналогично, многообразие (N, h) имеет комплексную (или почти комплексную) структуру ${}^N J$, совместимую с римановой метрикой h .

Определение 2. Гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется голоморфным (или псевдоголоморфным), если касательное отображение $\varphi_* : TM \rightarrow TN$ коммутирует с комплексной (или почти комплексной) структурой на M и N , т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_*.$$

Гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется антиголоморфным (или псевдо-антиголоморфным), если $\varphi_* : TM \rightarrow TN$ антикоммутирует с комплексной (или почти комплексной) структурой на M и N .

Обобщая наблюдение, сделанное нами в случае $SO(3)$ -модели, можно показать, что для кэлеровых (или почти кэлеровых) многообразий голоморфные и антиголоморфные отображения $\varphi : M \rightarrow N$ всегда реализуют локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Однако, в общем случае, у функционала $E(\varphi)$ имеются и другие критические точки, т.е. неминимальные гармонические отображения.

§3. ТВИСТОРНЫЙ ПОДХОД

Вспользуемся для описания гармонических отображений $\varphi : M \rightarrow N$ римановых поверхностей в римановы многообразия. Напомним формулировку так называемой твисторной программы Пенроуза :

Построить для заданного риманова многообразия N твисторное расслоение $\pi : Z \rightarrow N$, где Z – почти комплексное многообразие, называемое твисторным пространством, для которого имеется взаимно-однозначное соответствие между объектами римановой геометрии на N и объектами голоморфной геометрии на Z .

Таким образом, твисторный подход позволяет исследовать вещественную геометрию риманового многообразия N через комплексную геометрию его твисторного пространства.

Первая конструкция твисторного расслоения (чётномерного) риманова многообразия N была предложена в работе Атьи–Хинчина–Зингера [2]. В качестве твисторного пространства Z многообразия N было предложено расслоение комплексных структур на N , совместимых с римановой метрикой h . Указанное пространство обладает естественной почти комплексной структурой \mathcal{J}^1 , которую мы называем АНС-структурой (подробное описание АНС-структуры можно найти в [2] и [5]). Ниже в §4 мы приведём другую конструкцию твисторного расслоения в специальном случае грассмановых многообразий.

Пусть (Z, \mathcal{J}^1) есть твисторное пространство нашего (чётномерного) многообразия (N, h) , снабжённое почти комплексной АНС-структурой \mathcal{J}^1 . Если программа Пенроуза применима к рассматриваемой нами задаче, мы вправе ожидать, что гармонические отображения $\varphi : M \rightarrow N$ произвольной римановой поверхности M в наше многообразие N , должны возникать как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \rightarrow (Z, \mathcal{J}^1)$. Однако это не вполне верно. Проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \rightarrow (Z, \mathcal{J}^1)$ действительно удовлетворяют некоторым ультрагиперболическим дифференциальным уравнениям второго порядка на N , т.е. гармонические уравнения с “неправильной” структурой. Следовательно, для того, чтобы построить гармонические отображения с помощью твисторного подхода, мы должны заменить АНС-структуру \mathcal{J}^1 вдоль некоторых касательных направлений к Z обратной почти комплексной структурой $-\mathcal{J}^1$. Более точно, мы вводим новую почти комплексную структуру \mathcal{J}^2 на Z , называемую ES-структурой (см. [7]) :

$$\mathcal{J}^2 = \begin{cases} -\mathcal{J}^1 & \text{вдоль вертикальных } \pi\text{-направлений,} \\ \mathcal{J}^1 & \text{вдоль горизонтальных } \pi\text{-направлений.} \end{cases}$$

Теперь мы можем дать более формальное определение твисторного расслоения.

Определение 3. Гладкое расслоение $\pi : Z \rightarrow N$ с почти комплексным многообразием (Z, \mathcal{J}^2) называется твисторным расслоением риманова многообразия N , если проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого псевдоголоморфного отображения $\psi : M \rightarrow Z$ произвольной римановой поверхности M в Z является гармоническим отображением $\varphi : M \rightarrow N$.

Заметим, что почти комплексные структуры \mathcal{J}^1 и \mathcal{J}^2 на твисторном пространстве Z , как правило, не интегрируемы. Более точно, АНС-структура \mathcal{J}^1 интегрируема тогда и только тогда, когда N конформно плоско, тогда как ЕС-структура \mathcal{J}^2 никогда не интегрируема. Этот результат с первого взгляда выглядит разочаровывающим, поскольку не интегрируемые почти комплексные структуры могут быть очень плохими. Например, они могут вообще не иметь непостоянных голоморфных функций. Однако наше преимущество состоит в том, что в рассматриваемой задаче мы имеем дело не с голоморфными функциями (т.е. голоморфными отображениями $f : Z \rightarrow \mathbb{C}$ из твисторного пространства Z) но с двойственным объектом : голоморфными отображениями $\psi : M \rightarrow Z$ римановой поверхности M в наше многообразие Z .

Такое отображение голоморфно относительно почти комплексной структуры \mathcal{J}^2 на Z , если оно удовлетворяет $\bar{\partial}_J$ -уравнению на M , т.е. уравнению Коши–Римана относительно почти комплексной структуры $J := \psi^*(\mathcal{J}^2)$, индуцированной на M псевдоголоморфным отображением ψ . Структура J уже интегрируема на M (как и любая почти комплексная структура на римановой поверхности), и, следовательно, свойства интегрируемости почти комплексной структуры \mathcal{J}^2 на твисторном пространстве Z не играют существенной роли в изучаемой нами проблеме.

§4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Обратимся теперь к специальному классу римановых многообразий, представляемому грассмановыми многообразиями, и дадим в этом случае иную (и вполне явную) конструкцию твисторных расслоений, где роль твисторных пространств будут играть флаговые многообразия.

Для определения флаговых многообразий в \mathbb{C}^d , фиксируем разложение числа $d = r_1 + \dots + r_n$ в сумму натуральных чисел и положим $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$.

Определение 4. Флаговое многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ типа \mathbf{r} в \mathbb{C}^d состоит из наборов $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ попарно ортогональных линейных подпространств E_i в \mathbb{C}^d размерности r_i таких, что $\mathbb{C}^d = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

В частности, для $\mathbf{r} = (r, d - r)$ флаговое многообразие

$$\mathcal{F}_{(r, d-r)}(\mathbb{C}^d) = \{\mathcal{E} = (E, E^\perp) : \dim E = r\} = G_r(\mathbb{C}^d)$$

совпадает с грассмановым многообразием r -мерных подпространств в \mathbb{C}^d .

Флаговое многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ допускает следующее представление в виде однородного пространства :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = U(d)/U(r_1) \times \dots \times U(r_n).$$

Имеется также другое, комплексное представление многообразия $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ в виде однородного пространства комплексной группы :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = GL(d, \mathbb{C})/\mathcal{P}_{\mathbf{r}},$$

где $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ — параболическая подгруппа блочных верхне-треугольных матриц с блоками размерностей $r_i \times r_i$ на диагонали.

Из указанных представлений вытекают следующие свойства :

- (i) $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ обладает естественной $U(d)$ -инвариантной комплексной структурой, которую мы обозначаем снова через \mathcal{J}^1 ,
- (ii) $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ является компактным кэлеровым многообразием.

Твисторные расслоения над грассмановыми многообразиями параметризуются упорядоченными подмножествами в $\{1, \dots, n\}$. Фиксируем такое подмножество σ , а также тип флага $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$ и положим $r := \sum_{i \in \sigma} r_i$. По этим данным построим однородное расслоение

$$\pi = \pi_\sigma : \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \frac{U(d)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)} \longmapsto \frac{U(d)}{U(r) \times U(d-r)} = G_r(\mathbb{C}^d),$$

сопоставляя флагу $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ подпространство $E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$.

Для построенного однородного расслоения имеется естественное однородное разложение комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ в прямую сумму вертикального и горизонтального подрасслоений. Пользуясь этим разложением, можно построить $U(d)$ -инвариантную почти комплексную структуру \mathcal{J}^2 на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, исходя из начальной комплексной структуры \mathcal{J}^1 на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, точно также, как в предыдущем параграфе.

Теорема 1 (Берстол–Саламон [4]). *Построенное флаговое расслоение*

$$\pi_\sigma : (\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d), \mathcal{J}^2) \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$$

является твисторным, т.е. его проекция $\varphi := \pi_\sigma \circ \psi : M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^d)$ является гармоническим отображением для любого \mathcal{J}^2 -голоморфного отображения $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}$.

Более того, Берстол [3] доказал, что в случае $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ верно также обратное утверждение, а именно: любое гармоническое отображение $\varphi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^d)$ может быть получено в виде проекции некоторого \mathcal{J}^2 -голоморфного отображения $\psi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$ относительно какого-либо твисторного расслоения $\pi_\sigma : \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^d)$. Таким образом, задача описания гармонических сфер в грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^d)$ полностью сводится к задаче описания \mathcal{J}^2 -голоморфных сфер в флаговых многообразиях $\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$. Последняя проблема была решена Вудом в [11] (см. также [4]). Хотя решение Вуда является технически сложным, главную его идею можно пояснить следующим образом.

Любое гладкое отображение $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$ порождает в каждой точке $p \in M$ ортогональное разложение

$$\mathbb{C}^d = E_1(p) \oplus \dots \oplus E_n(p)$$

индуцированное из $\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$ отображением ψ . Иными словами, имеется ортогональное разложение тривиального расслоения $M \times \mathbb{C}^d$ в сумму подрасслоений E_1, \dots, E_n . Если исходное отображение ψ было \mathcal{J}^1 -голоморфным, т.е. голоморфным относительно канонической комплексной структуры на $\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$, то подрасслоения E_1, \dots, E_n будут голоморфны относительно индуцированной комплексной структуры $J_\psi := \psi^*(\mathcal{J}^1)$ на M .

Идея Вуда состоит в том, чтобы строить \mathcal{J}^2 -голоморфные отображения $M \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$, перестраивая \mathcal{J}^1 -голоморфные отображения $M \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^d)$. Исходя из определения почти комплексной структуры \mathcal{J}^2 , можно догадаться, что указанная перестройка должна состоять в замене некоторых голоморфных подрасслоений E_i антиголоморфными подрасслоениями \bar{E}_i (и обратной процедуре для ортогональных дополнений E_i^\perp).

§5. ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ И ПОЛЯ ЯНГА-МИЛЛСА

Обратимся теперь к бесконечномерным римановым многообразиям N , точнее, рассмотрим в качестве N пространство петель ΩG компактной группы Ли G . В конце данного параграфа мы поясним, почему этот случай представляет для нас особый интерес.

Обозначим через $LG = C^\infty(S^1, G)$ группу петель группы G , т.е. пространство

гладких отображений $S^1 \mapsto G$, где S^1 отождествляется с единичной окружностью в \mathbb{C} . Пространство петель ΩG (или, что то же самое, пространство централизованных петель) группы G есть однородное пространство (правых смежных классов) группы LG вида

$$\Omega G = LG/G, \quad (5)$$

где группа G в знаменателе отождествляется с подгруппой постоянных отображений $S^1 \mapsto g_0 \in G$ в LG .

Группа петель LG действует на ΩG левыми сдвигами. Обозначим через o начало в ΩG , представленное классом постоянных отображений $o := [G]$. Касательное пространство к ΩG в начале o отождествляется с пространством $\Omega g = Lg/g$.

Пространство петель ΩG имеет естественную симплектическую структуру, инвариантную относительно действия группы петель LG на ΩG . Ввиду инвариантности, достаточно определить её сужение на $T_o(\Omega G) = \Omega g$. Для этого фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли \mathfrak{g} и рассмотрим 2-форму ω на Lg вида

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in Lg.$$

Эта формула задаёт инвариантную замкнутую 2-форму на LG , которая порождает инвариантную симплектическую структуру на ΩG .

Инвариантная комплексная структура на ΩG индуцируется комплексным представлением пространства петель $\Omega G = LG/G$ в виде однородного пространства комплексной группы петель $LG^{\mathbb{C}} = C^\infty(S^1, G^{\mathbb{C}})$, где $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация группы Ли G . Это представление имеет вид (см. [8], а также [9])

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}}, \quad (6)$$

где $L^+G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ – подгруппа $LG^{\mathbb{C}}$, состоящая из отображений $S^1 \mapsto G^{\mathbb{C}}$, которые допускают гладкое продолжение до голоморфных отображений $\Delta := \{|z| < 1\} \mapsto G^{\mathbb{C}}$ единичного круга.

Введённые симплектическая и комплексная структуры на ΩG совместимы в том смысле, что $\omega(\mathcal{J}^1\xi, \mathcal{J}^1\eta) = \omega(\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in T_o(\Omega G)$ и симметрическая форма $g^1(\xi, \eta) := \omega(\xi, \mathcal{J}^1\eta)$ на $T_o(\Omega G) \times T_o(\Omega G)$ положительно определена. Эта симметрическая форма продолжается до инвариантной римановой метрики g^1 на ΩG . Следовательно, ΩG является кэлеровым многообразием Фреше, наделённым кэлеровой метрикой g^1 .

Нашей целью является изучение гармонических отображений компактных римановых поверхностей M в пространство петель ΩG . Мотивацией для этого исследования служит теорема Атья (см. [1]), утверждающая, что имеется взаимнооднозначное соответствие между пространством модулей G -инстантонов на \mathbb{R}^4 и пространством центрированных голоморфных отображений $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \Omega G$, переводящих ∞ в начало $o \in \Omega G$.

Исходя из теоремы Атья, естественно предположить, что имеется также взаимнооднозначное соответствие между пространством центрированных гармонических отображений $h: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \Omega G$ и пространством модулей решений G -уравнений Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 .

§6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Мы собираемся изучать гармонические отображения в пространства петель с помощью изометрического вложения ΩG в бесконечномерное грассманоно многообразие $Gr_{HS}(H)$, называемое иначе грассманианом Гильберта–Шмидта. Начнём с его определения, копирующего стандартное определение конечномерного грассманиана $G_r(\mathbb{C}^d)$.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство, реализованное в виде пространства $L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций с нулевым средним по окружности S^1 (или его векторного аналога $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^d)$).

Предположим, что H наделено поляризацией, т.е. разложением

$$H = H_+ \oplus H_- \quad (7)$$

в прямую ортогональную сумму бесконечномерных замкнутых подпространств. В рассматриваемом случае $H = L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ в качестве таких подпространств можно взять

$$H_{\pm} = \left\{ \gamma \in H : \gamma(z) = \sum_{\pm k > 0} \gamma_k z^k \right\}.$$

Любой ограниченный линейный оператор $A \in L(H)$ имеет относительно поляризации (7) блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $GL(H)$ группу линейных ограниченных операторов на H , имеющих ограниченный обратный, и определим группу Гильберта–Шмидта $GL_{HS}(H)$, состоящую из операторов $A \in GL(H)$, у которых вне-диагональные

члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта (коротко, HS-операторами). Другими словами, группа $GL_{HS}(H)$ состоит из операторов $A \in GL(H)$, у которых вне-диагональные члены b и c “малы”, по сравнению с диагональными членами a и d . Обозначим также через $U_{HS}(H)$ пересечение $GL_{HS}(H)$ с группой $U(H)$ унитарных операторов в H .

Определение 5. Грассманиан Гильберта–Шмидта $Gr_{HS}(H)$ состоит из замкнутых подпространств $W \subset H$ таких, что ортогональная проекция $pr_+ : W \rightarrow H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $pr_- : W \rightarrow H_-$ является оператором Гильберта–Шмидта. Эквивалентно, подпространство $W \in Gr_{HS}(H)$, если W совпадает с образом линейного оператора $w : H_+ \rightarrow H$ такого, что оператор $w_+ := pr_+ \circ w$ фредгольмов, а $w_- := pr_- \circ w$ – оператор Гильберта–Шмидта.

Грассманиан $Gr_{HS}(H)$ допускает однородное представление вида

$$Gr_{HS}(H) = U_{HS}(H) / U(H_+) \times U(H_-),$$

из которого вытекает, что $Gr_{HS}(H)$ является кэлеровым гильбертовым многообразием.

Многообразие $Gr_{HS}(H)$ состоит из счётного числа связанных компонент, нумерованных индексом фредгольмова оператора w_+ , где $w : H_+ \rightarrow H$ – линейный оператор, ассоциированный с подпространством $W \in Gr_{HS}(H)$. Будем говорить, что подпространство W имеет виртуальную размерность d , если индекс оператора w_+ равен d . Обозначим через $G_d(H)$ компоненту $Gr_{HS}(H)$, состоящую из подпространств W виртуальной размерности d . Тогда $Gr_{HS}(H)$ является несвязным объединением компонент $G_d(H)$. Поэтому изучение гармонических отображений римановых поверхностей в $Gr_{HS}(H)$ сводится к исследованию гармонических отображений в грассманианы $G_d(H)$ виртуальной размерности d , которое можно проводить также, как в случае конечномерного грассманова многообразия $G_r(\mathbb{C}^d)$.

А именно, для любого разложения $d = r_1 + \dots + r_n$, где r_i – целые числа, определим соответствующее ему виртуальное флаговое многообразие $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r(H)$ типа $r = (r_1, \dots, r_n)$, состоящее из наборов $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ попарно ортогональных подпространств $W_i \subset H$ виртуальной размерности r_i . Далее, для любого упорядоченного подмножества $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ положим $r := \sum_{i \in \sigma} r_i$ и построим однородное флаговое расслоение $\pi : \mathcal{F}_r(H) \rightarrow G_r(H)$, сопоставляя виртуальному флагу $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ подпространство $W = \bigoplus W_i$. Также как в конечномерном случае, введём почти комплексные структуры \mathcal{J}^1 и \mathcal{J}^2 на

многообразия $\mathcal{F}_r(H)$. Следующее утверждение аналогично теореме Берстола-Саламона в конечномерной ситуации.

Теорема 2. Однородное расслоение $\pi : (\mathcal{F}_r(H), \mathcal{J}^2) \rightarrow G_r(H)$ является твисторным, т.е. для любого \mathcal{J}^2 -голоморфного отображения $\psi : M \rightarrow \mathcal{F}_r(H)$ его проекция $\varphi := \pi \circ \psi : M \rightarrow G_r(H)$ есть гармоническое отображение.

Пользуясь этой теоремой, можно строить гармонические отображения $M \rightarrow G_r(H)$, проектируя \mathcal{J}^2 -голоморфные отображения $M \rightarrow \mathcal{F}_r(H)$ на $G_r(H)$.

Построим теперь изометрическое вложение пространства петель ΩG в грассманиан Гильберта-Шмидта $Gr_{HS}(H)$, упомянутое в начале параграфа. Предположим, что G есть матричная группа, т.е. G представлена в виде подгруппы унитарной группы $U(n)$ при некотором n . Изометрическое вложение $LG \rightarrow U_{HS}(H)$ задаётся отображением

$$\gamma \in LG = C^\infty(S^1, G) \mapsto M_\gamma \in U_{HS}(H),$$

где оператор умножения M_γ определяется посредством

$$f \in H = L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n) \mapsto (M_\gamma f)(z) := \gamma(z)f(z) \quad \text{для } z \in S^1.$$

Легко проверить, что $M_\gamma \in U_{HS}(H)$, если петля γ является гладкой (см. [8]).

Построенное вложение группы петель LG в $U_{HS}(H)$ индуцирует изометрическое вложение $\Omega G \rightarrow Gr_{HS}(H)$. Следовательно, мы можем считать, что гармонические отображения $M \rightarrow \Omega G$ принимают значения в $Gr_{HS}(H)$. Это сводит исследование гармонических отображений $M \rightarrow \Omega G$ к изучению гармонических отображений $M \rightarrow Gr_{HS}(H)$, т.е. к задаче, рассмотренной ранее в начале этого параграфа.

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предположим, что гипотеза о полях Янга-Миллса, сформулированная нами в §5, доказана, т.е. имеется взаимнооднозначное соответствие между пространством модулей G -полей Янга-Миллса на \mathbb{R}^4 и пространством центрированных гармонических сфер в пространстве петель ΩG . Допустим также, что с помощью твисторного подхода мы можем построить произвольную гармоническую сферу в грассманиане $Gr_{HS}(H)$ в виде проекции некоторой \mathcal{J}^2 -голоморфной сферы в одном из виртуальных флаговых многообразиях $\mathcal{F}_r(H)$. Что может дать наша конструкция для описания полей Янга-Миллса на \mathbb{R}^4 ? Похоже, что в этом случае мы получаем процедуру, позволяющую строить произвольные поля Янга-Миллса на \mathbb{R}^4 из инстантонов и анти-инстантонов с помощью конечного числа перестроек типа Вуда.

Abstract. The twistor approach is used for the study of mappings of Riemann surfaces M into loop spaces ΩG of compact Lie groups G . The harmonic mappings into the loop spaces are of special interest due to connections with the solutions of the Yang-Mills equation in \mathbb{R}^4 .

REFERENCES

1. M. F. Atiyah, "Instantons in two and four dimensions", *Comm. Math. Phys.*, vol. 93, pp. 437 – 451, 1984.
2. M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry", *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 362, pp. 425 – 461, 1978.
3. F. E. Burstall, "A twistor description of harmonic maps of a 2-sphere into a Grassmannian", *Math. Ann.*, vol. 274, pp. 61 – 74, 1986.
4. F. E. Burstall, S. Salamon, "Tournaments, flags and harmonic maps", *Math. Ann.*, vol. 277, pp. 249 – 265, 1987.
5. Й. Давидов, А. Г. Сергеев, "Твисторные пространства и гармонические отображения", *Успехи матем. наук*, том 48, № 3, стр. 3 – 96, 1993.
6. S. K. Donaldson, "Instantons and geometric invariant theory", *Comm. Math. Phys.*, vol. 93, pp. 453 – 460, 1984.
7. J. Eells, S. Salamon, "Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds", *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*, vol. 12, pp. 589 – 640, 1985.
8. A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
9. А. Г. Сергеев, *Кэлерова геометрия пространств петель*, Московский центр непр. матем. образ., Москва, 2001.
10. А. Г. Сергеев, "Гармонические отображения в однородные римановы многообразия : твисторный подход", *Успехи матем. наук*, том 59, № 6, стр. 177 – 200, 2004.
11. J. C. Wood, "The explicit construction and parameterization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 386, pp. 1 – 31, 1988.

Поступила 1 сентября 2006

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ n -ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВНЕ КРУГА

Н. Е. Товмасян

Ереванский государственный инженерный университет
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе доказано существование и единственность решения задачи Дирихле вне круга в классе функций, имеющих порядок роста r^{n-1} при $r \rightarrow \infty$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Указан эффективный метод решения этой задачи.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть D – внешняя область единичного круга, т.е. $D = \{z : |z| > 1, z \neq \infty\}$, Γ – единичная окружность $|z| = 1$, $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле для n -гармонического уравнения ($n \geq 2$) :

$$\Delta^n u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial r^k} |_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$|u(x, y)| \leq c|z|^{n-1}, \quad (x, y) \in D, \quad (3)$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $\frac{\partial u}{\partial r}$ – производная функции u по направлению радиуса-вектора (т.е. по направлению внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$), c – положительная постоянная, зависящая от u , а f_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – заданные вещественные функции на Γ . Предполагаем, что вещественное решение u $2n$ -раз непрерывно дифференцируемо в D и $n-1$ -раз непрерывно дифференцируемо в замкнутом кольце $1 \leq |z| \leq (1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$). Предполагаем, что f_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – бесконечно дифференцируемы на Γ . В конце работы мы уточним порядок гладкости функции f_k . При $f_k \equiv 0$, $k = 0, \dots, n-1$, задачу (1)–(3) называем однородной.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1)–(3) имеет единственное решение.*

Кроме того, в работе указывается эффективный метод решения рассмотренной задачи.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для исследования задачи (1)–(3) приведём некоторые леммы. Рассмотрим функцию вида

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} z^k \psi_k(z) + P_{n-2}(x, y) \ln(z\bar{z}) + P_{n-1}(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (4)$$

где $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$ – аналитические в D функции, обращающиеся в нуль на бесконечности, а P_{n-2} и P_{n-1} суть полиномы порядка не выше $n-2$ и $n-1$ соответственно относительно x и y с действительными коэффициентами.

Лемма 1. *Если в (4) $u \equiv 0$, то $P_{n-2} \equiv P_{n-1} \equiv 0$ и $\psi_k \equiv 0$ при $k = 0, \dots, n-1$.*

Доказательство. Ясно, что

$$P_{n-2}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-2-k}(z) z^k, \quad \ln(z\bar{z}) = \ln z + \ln \bar{z}, \quad (5)$$

где q_{n-2-k} – некоторый полином порядка не выше $n-2-k$, и $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$. Пусть теперь

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и пусть в (4) $u \equiv 0$. Тогда, применяя оператор $\frac{\partial^n}{\partial z^n}$ к обеим частям (4) и учитывая (5), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^{(n)}(z) z^k = 0, \quad z \in D_0, \quad (6)$$

$$\omega_k(z) = \psi_k(z) + q_{n-2-k}(z) \ln z, \quad z \in D_0, \quad (7)$$

где $D_0 = D \setminus \{(x, 0) : x > 1\}$ – область D без положительной полуоси абсцисс.

Применяя операторы $\frac{\partial^k}{\partial z^k}$ ($k = 0, \dots, n-1$) к обеим частям (6), получим $\omega_k^{(n)}(z) = 0$, $z \in D_0$. Следовательно, ω_k – полином порядка не выше $n-1$ относительно z . Отсюда и из (7) следует, что функция $q_{n-2-k}(z) \ln z$ аналитична в области D , а это возможно только при $q_{n-2-k} \equiv 0$. Итак, равенство (7) принимает вид

$\omega_k(z) = \psi_k(z)$ при $z \in D$ и $k = 0, \dots, n-1$. Так как ω_k — полином и $\psi_k(\infty) = 0$, то имеем $\omega_k \equiv \psi_k \equiv 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Отсюда и из (4) и (5) ($u \equiv 0$) получаем утверждение Леммы 1.

Лемма 2. Если u — решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству (3), то при $|z| \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}(z) \right| \leq C_{kj} |z|^{n-1-j-k}, \quad k, j = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где C_{kj} — некоторые постоянные.

Доказательство опускаем, поскольку его можно получить по схеме из книги [1] (глава 3, § 16, стр. 161, формула (3)), с использованием фундаментального решения n -гармонического уравнения и формулы Грина.

Лемма 3. Однородная задача (1)–(3) имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть u — решение однородной задачи (1)–(3). Тогда u бесконечно дифференцируема в кольце $1 \leq |z| \leq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) [2], и

$$\iint_D u(z) \Delta^n u(z) dx dy = 0. \quad (9)$$

Если $n = 2m$, то применяя формулу Грина в (9), используя неравенство (8) и однородные граничные условия (2) ($f_k \equiv 0$, $k = 0, \dots, n-1$), получаем

$$\iint_D (\Delta^m u(z))^2 dx dy = 0,$$

и следовательно

$$\Delta^m u(z) = 0, \quad z \in D. \quad (10)$$

С другой стороны, u удовлетворяет однородным граничным условиям (2). Из (10) и (2) следует, что $u \equiv 0$. При нечётном n лемма 3 доказывается аналогично.

Лемма 3 доказана.

Теперь рассмотрим функцию вида

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} (z\bar{z} - 1)^k \varphi_k(z) + P_{n-2}(x, y) \ln(z\bar{z}) + P_{n-1}(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (11)$$

где φ_k ($k = 0, \dots, n-1$) — аналитические функции в области D , удовлетворяющие условиям

$$|\varphi_k(z)| \leq C |z|^{-k-1}, \quad z \in D, \quad (12)$$

а P_{n-2}, P_{n-1} — полиномы, удовлетворяющие тем же условиям, что и в (4). Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Если в (11) $u \equiv 0$, то $P_{n-2} \equiv P_{n-1} \equiv 0$ и $\varphi_k \equiv 0$ при $k = 0, \dots, n-1$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Тогда задача (1)–(3) принимает вид

$$\Delta^2 u = 0, \quad z \in D, \quad (13)$$

$$u(z) = f_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(z) = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (14)$$

$$|u(z)| \leq C|z|, \quad z \in D. \quad (15)$$

Решение задачи (13)–(15) ищем в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} (\varphi_0(z) + (z\bar{z} - 1)\varphi_1(z)) + C_0 + C_1x + C_2y + C_3 \ln z\bar{z}, \quad (16)$$

где φ_j ($j = 0, 1$) — искомые аналитические функции в области D , удовлетворяющие условиям

$$|\varphi_j(z)| \leq c|z|^{-j-1}, \quad j = 0, 1, \quad (17)$$

а C_k ($k = 0, \dots, 3$) — искомые действительные постоянные. Легко проверить, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (13) и условию (15). Подставляя $u(z)$ из (16) в граничные условия (14), получим $\operatorname{Re} (\varphi_0(z) + C_0 + (C_1 + iC_2)z^{-1}) = f_0(z)$ и $\operatorname{Re} (2\varphi_1(z) + z\varphi_0'(z) + (C_1 + iC_2)z^{-1} + 2C_3) = f_1(z)$ при $z \in \Gamma$. Применяя формулу Шварца [3] (стр. 223), получаем

$$\varphi_0(z) = -C_0 - (C_1 + iC_2)z^{-1} + F_0(z), \quad z \in D, \quad (18)$$

$$2\varphi_1(z) + z\varphi_0'(z) + (C_1 + iC_2)z^{-1} + 2C_3 = F_1(z), \quad z \in D, \quad (19)$$

где

$$F_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta, \quad k = 0, 1. \quad (20)$$

Из (19) и (18) определяем функцию

$$\varphi_1(z) = -C_3 - (C_1 + iC_2)z^{-1} + 0.5F_1(z) - 0.5zF_0'(z). \quad (21)$$

Отметим, что из (18), (21) и (20) следует, что аналитические функции φ_0 и φ_1 удовлетворяют условиям (17) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(e^{i\theta}) d\theta, & C_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta})) d\theta, \\ C_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta (f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta})) d\theta, & C_3 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Итак, мы построили частное решение задачи (13)–(15). Согласно лемме 3, эта задача других решений не имеет. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Задача (13)–(15) имеет единственное решение (16), где φ_j и C_j определяются формулами (18), (21) и (22).

В общем случае $n \geq 3$ исследование задачи (1)–(3) аналогично случаю $n = 2$, и поэтому остановимся на основных моментах доказательства теоремы 1, опуская детали. В общем случае решение задачи (13)–(15) ищем в виде (11). Функция u , определённая формулой (11), удовлетворяет уравнению (1) и условию (3). Подставляя эту функцию в граничные условия (2), аналогично случаю $n = 2$, однозначно определяем аналитические функции φ_k ($k = 0, \dots, n-1$) по граничным данным f_k и коэффициентам полиномов P_{n-2} и P_{n-1} (общее число этих коэффициентов равно n^2). Далее, подчиняя полученные функции φ_k условиям (12), получаем n^2 линейных действительных уравнений для определения n^2 неизвестных коэффициентов полиномов P_{n-2} и P_{n-1} . Из лемм 3 и 4 следует, что соответствующая однородная линейная система уравнений имеет только нулевое решение. Следовательно, неоднородная система уравнений имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

Описанный метод позволяет при любом фиксированном n эффективно построить решение задачи (1)–(3).

Пусть теперь функции $\frac{d^j f_k}{d\theta^j}(t)$ ($j = 0, \dots, n-1-k$) непрерывны по t ($t = e^{i\theta}$). Тогда можно проверить, что решение, полученное вышеуказанным путем, является решением и в этом случае. Отсюда и из леммы 3 следует, что теорема 1 справедлива и в этом случае.

Abstract. The paper demonstrates the existence and uniqueness of solution of the Dirichlet problem in the exterior of a disc, in a class of functions with the growth rate r^{n-1} as $r \rightarrow \infty$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). An effective solution method is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, Математический анализ, II спец. курс, Наука, Москва, 1965.
2. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Наука, Москва–Ленинград, 1948.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1973.

УРАВНЕНИЕ АМБАРЦУМЯНА В ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

А. Х. Качатрян

Институт математики НАН Армении

E-mail : aghavard@hotmail.ru

Резюме. Работа носит обзорный характер и в ней приводятся основные результаты по исследованию и решению интегро-дифференциальных или интегральных уравнений типа свёртки. С помощью этих уравнений описывается ряд задач физической кинетики. Для этих уравнений разработаны различные факторизационные методы и показана универсальная и фундаментальная роль уравнения Амбарцумяна.

ВВЕДЕНИЕ

В начале 40-х годов В. А. Амбарцумяном был сформулирован принцип инвариантности, который первоначально применялся для задачи многократного рассеяния света в мутной среде [1]. Принцип инвариантности сводит решение многих задач к нелинейному функциональному уравнению, именуемого уравнением Амбарцумяна (А-уравнение)

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p)G(p)}{s+p} dp, \quad G(p) \geq 0. \quad (0.1)$$

Функция Амбарцумяна $\varphi(s)$ является основным решением (предел простых итераций с нулевым приближением) А-уравнения. Функция $\varphi(s)$ обладает следующими свойствами :

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)G(s)}{s} ds = 1 - \sqrt{1-\lambda}, \quad 1 \leq \varphi(s) \downarrow \text{ in } s,$$

если $\lambda < 1$, то $\varphi(+0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$ а если $\lambda = 1$, то $\varphi(s) = O(s)$ при $s \rightarrow +\infty$.
Здесь $\lambda \leq 1$ – так называемая вероятность выживания при элементарном акте рассеяния.

С А-уравнением ассоциируется основное уравнение переноса излучения относительно функции источника

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\tau} K(x-t)f(t)dt, \quad \tau \leq +\infty. \quad (0.2)$$

Во всех приложениях ядро интегрального уравнения (2.2) является вполне монотонной функцией вида :

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|^s} G(s) ds, \quad 2 \int_a^b G(s) \frac{ds}{s} = \lambda \leq 1. \quad (0.3)$$

Заметим, что в случае $\tau = +\infty$, уравнение (0.2) представляет собой интегральное уравнение Винера–Хопфа (WH-уравнение).

Изучению А-уравнения и разработке его математической теории посвящены многочисленные работы (см. [2, 3] и ссылки в них). Впервые в [2] была установлена связь между функцией Амбардумяна и факторизацией интегральных операторов Винера–Хопфа. В дальнейшем стало ясно, что сочетание А-уравнения с нелинейным уравнением факторизации Енгибаряна является мощным орудием для эффективного аналитического решения WH-уравнения.

В различных областях физической кинетики, таких как теория переноса излучения, кинетическая теория газов, металлов и др., существует ряд задач, которые описываются скалярными или векторными интегральными уравнениями с суммарно-разностным ядром или интегро-дифференциальными уравнениями первого или второго порядка типа свёртки.

Настоящая работа носит обзорный характер основных результатов по исследованию вышеуказанных уравнений и показана центральная роль А-уравнения. Основные результаты получены в последние годы (см. [4 – 9], [11]), а некоторые из них находятся в процессе публикации.

§1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Задача 1 (из кинетической теории газов). Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 задана декартова система координат (x, y, z) . Пусть газ заполняет полупространство $x > 0$, ограниченное твёрдой плоскостью $x = 0$. Газ течёт вдоль этой плоскости со скольжением, со среднemasсовой скоростью $U(x)$. Будем считать, что градиент температуры и концентрации отсутствуют.

Уравнение Больцмана в рамках модели Бхатнагар–Гросс–Крук (BGK) имеет вид

(см. [4])

$$s_1 \frac{\partial f^\pm(x, \bar{s})}{\partial x} = -f(x, \bar{s}) + \pi^{-3/2} e^{-(\bar{s}-\bar{v}(x))^2}, \quad (1.1)$$

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_2 [f^+(x, \bar{s}) + f^-(x, \bar{s})] ds_1 ds_2 ds_3, \quad (1.2)$$

здесь $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор молекулярной скорости и

$$f^+(x, \bar{s}) = \begin{cases} f(x, \bar{s}) & \text{если } s_1 \geq 0 \\ 0 & \text{если } s_1 < 0 \end{cases}, \quad f^-(x, \bar{s}) = \begin{cases} 0 & \text{если } s_1 > 0 \\ f(x, \bar{s}) & \text{если } s_1 \leq 0 \end{cases},$$

где $f(x, \bar{s})$ – функция распределения молекул. К уравнениям (1.1) и (1.2) присоединим граничные условия

$$f^+(0, s_1, s_2, s_3) = \frac{1-\varepsilon}{\pi^{3/2}} e^{-s^2} + \varepsilon f^-(0, -s_1, s_2, s_3), \quad (1.3)$$

$$f^-(x, s_1, s_2, s_3) \rightarrow 0 \quad \text{если } x \rightarrow +\infty, \quad (1.4)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – коэффициент accommodations.

Теорема 1.1. *Нелинейная граничная задача (1.1) – (1.4) эквивалентна следующему интегральному уравнению с суммарно-разностным ядром относительно среднemasсовой скорости*

$$U(x) = \int_0^{+\infty} K(x-t)U(t)dt + \varepsilon \int_0^{+\infty} K(x+t)U(t)dt, \quad (1.5)$$

с ядром

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-|x|s} e^{-1/s^2} \frac{ds}{s}. \quad (1.6)$$

Заметим, что ядро K удовлетворяет условию консервативности $\|K\|_{L_1} \equiv 1$. Искомые функции распределения $f^+(x, \bar{s})$ и $f^-(x, \bar{s})$ можно определить из следующих простых нелинейных соотношений:

$$f^+(x, \bar{s}) = C e^{-x/s_1} + \int_0^x e^{-(x-t)/s_1} e^{-(s_1^2+s_2^2)} e^{-(s_2-U(t))^2} \frac{dt}{s_1}, \quad (1.7)$$

$$f^-(x, \bar{s}) = \int_x^{+\infty} e^{-(t-x)/s_1} e^{-(s_1^2+s_2^2)} e^{-(s_2-U(t))^2} \frac{dt}{s_1}, \quad (1.8)$$

$$C = \frac{1-\varepsilon}{\pi^{3/2}} e^{-s^2} + \frac{\varepsilon}{\pi^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^{-t/s_1} e^{-(s_1^2+s_2^2)} e^{-(s_2-U(t))^2} \frac{dt}{s_1}. \quad (1.9)$$

Задача 2 (из теории переноса излучения). Пусть водный бассейн со стороны атмосферы освещается излучением интенсивности $I_0^+(\zeta)$, где ζ – косинус

угла между направлением падающего солнечного излучения и нормалью к поверхности моря. Задача состоит в нахождении поля излучения в море, учитывая, что фотоны в ходе диффузии могут отразиться от поверхности моря (внутреннее отражение). Предполагается, что отражающая поверхность ограничивает рассматриваемую среду со стороны падающего на неё излучения.

Будем считать, что рассеяние света внутри водного бассейна является когерентным и изотропным. Тогда уравнение переноса имеет вид (см. [5] и ссылки в ней)

$$\pm \zeta \frac{dI^\pm(x, \zeta)}{dx} = -I^\pm(x, \zeta) + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 [I^+(x, \zeta') + I^-(x, \zeta')] d\zeta', \quad (1.10)$$

где λ - альbedo рассеяния, а $I^+(x, \zeta)$, $I^-(x, \zeta)$ суть искомые интенсивности, распространяющиеся в сторону возрастания и убывания x .

К уравнению (1.10) присоединим граничные условия

$$I^+(0, \zeta) = I_0^+(\zeta) + \epsilon I^-(0, \zeta), \quad (1.11)$$

$$I^-(x, \zeta) = O(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.12)$$

Заметим, что граничная задача (1.10) - (1.12) сводится к неоднородному интегральному уравнению вида (1.5) :

$$S(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} K(x-t)S(t)dt + \epsilon \int_0^{+\infty} K(x+t)S(t)dt, \quad (1.13)$$

относительно функции источника

$$S(x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 [I^+(x, \zeta') + I^-(x, \zeta')] d\zeta' \quad (1.14)$$

с ядром

$$K(x) = \frac{\lambda}{2} \int_1^{+\infty} e^{-|x|s} \frac{ds}{s}.$$

Здесь

$$g(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xs} \frac{ds}{s^2}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = \lambda \leq 1.$$

§ 2. ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И УРАВНЕНИЕ АМБАРЦУМЯНА

Перепишем уравнение (1.13) (или (1.5)) в операторном виде

$$(I - \widehat{K} - \widehat{K}_0)S = g. \quad (2.1)$$

В работах [10, 11] была рассмотрена возможность построения следующей факторизации :

$$I - \widehat{K} - \widehat{K}_0 = (I - \widehat{V}_-)(I - \widehat{U}_0)(I - \widehat{V}_+), \quad (2.2)$$

где \widehat{V}_\pm суть вольтерровые операторы вида

$$(\widehat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)f(t)dt \quad \text{и} \quad (\widehat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t)dt, \quad (2.3)$$

а \widehat{U}_0 - интегральный оператор типа "Ханкеля"

$$(\widehat{U}_0 f)(x) = \int_0^{+\infty} U_0(x+t)f(t)dt. \quad (2.4)$$

Ядро операторов V_\pm задаётся формулой

$$V(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi(s)G(s)ds, \quad (2.5)$$

где $\varphi(s)$ - функция Амбарцумяна. Очевидно, что $V > 0$ и

$$\alpha_0 = \int_0^{+\infty} V(x)dx = 1, \quad \alpha_k = m_k(V) = \int_0^{+\infty} x^k V(x)dx = k! \int_a^b \varphi(s)G(s) \frac{ds}{s^{k+1}}. \quad (2.7)$$

Заметим, что ядро оператора \widehat{U}_0 выражается через функцию Амбарцумяна посредством соотношения (см. [11]) :

$$U_0(x) = \varepsilon \int_a^b e^{-xs} \varphi^2(s)G(s)ds. \quad (2.8)$$

Факторизация (2.2) сводит решение исходного уравнения (1.5) (или (1.13)) к трём связанным простым уравнениям

$$(I - \widehat{V}_-)F = g, \quad (2.9)$$

$$(I - \widehat{U}_0)\Psi = F, \quad (2.10)$$

$$(I - \widehat{V}_+)U = \Psi. \quad (2.11)$$

Факторизация (2.2) даёт возможность получить аналитическое решение исходного уравнения (1.5) через функцию Амбарцумяна (см. [5, 11]). Факторизация позволяет также получить асимптотическое поведение решения, что имеет важное значение в приложениях (см. [8]). Для различных физических характеристик получены явные выражения через функцию Амбарцумяна. Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами (см. [12] и ссылки в ней). Результаты, относящиеся к аналитическому решению уравнения (1.5) (или (1.13)) можно найти в работах автора [5 – 8, 11].

§ 3. ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{dx} + \lambda \int_0^{+\infty} K(x-t)E(t)dt = 0, \quad E(+\infty) = 0, \quad \lambda > 0, \quad (3.1)$$

с ядром

$$K(x) = \int_1^{+\infty} e^{-|x|s} \frac{ds}{s^2} = \int_1^{+\infty} e^{-|x|s} G(s)ds. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) выводится из стационарного линейного, модельного уравнения Больцмана без учёта в интеграле члена столкновений, который учитывает энергетические взаимодействия. Уравнением (3.1) описывается задача распределения электрического поля в полубесконечном металле, при наличии чисто внешнего электрического поля.

Физический параметр $\lambda = \left(\frac{\Omega_p}{\nu}\right)^2$ фигурирующий в уравнении (3.1), представляет собой квадрат отношения плазменной частоты Ω_p к частоте столкновений электронов ν в металле.

Теорема 3.1. Пусть $\alpha = \alpha_0$ – точка максимума функции

$$\lambda(\alpha) = \alpha \left(2 \int_a^b \frac{sG(s)}{s^2 - \alpha^2} ds \right)^{-1}, \quad 0 < \alpha < a.$$

Тогда если $0 < \lambda \leq \lambda(\alpha_0)$ ($\equiv \lambda_0$), то задача (3.1) в пространстве Соболева $W_1^1(0, +\infty)$ обладает решением вида

$$E(x) = [S(x) + H(x)]e^{-\alpha x},$$

где

i) если $0 < \lambda < \lambda_0$, то $H(x) \in L_1(0, +\infty)$ и из

$$S(x) = 1 + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-ux}) \frac{d\rho(u)}{u}, \quad \text{следует, что } S(x) = O(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

ii) если $\lambda = \lambda_0$, то $H(x) \in L_1^{loc}$, причём $\int_0^x H(t)dt = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$ и из

$$S(x) = 1 + mx + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-ux}) \frac{d\rho(u)}{u}, m \geq 0, \text{ следует, что } S(x) = O(x).$$

Теорема 3.2. Если $\lambda > \lambda_0$ и существует $\alpha \in (0, a)$ такое, что уравнение

$$2\lambda \int_a^b \frac{s G(s) ds}{(z + \alpha)[s^2 - (z + \alpha)^2]} = 1$$

имеет комплексный корень z_0 , для которого $0 < \operatorname{Re} z_0 < a - \alpha$ и $\operatorname{Im} z_0 > 0$, то задача (3.1) в пространстве Соболева имеет решение вида :

$$E(x) = e^{-\alpha x} \left\{ 2A e^{-\beta x} \cos(\omega x - \vartheta) - \int_0^{+\infty} e^{-xu} d\rho(u) \right\} + H(x)e^{-\alpha x},$$

где $H(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

$$f_1(x) \in L_1(0, +\infty), \quad f_2(x) \in C_M(0, +\infty), \quad \beta = \operatorname{Re} z_0, \quad \omega = \operatorname{Im} z_0,$$

$$Ae^{i\vartheta} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} te^{s_0 t} T_\alpha(t) dt \right)^{-1},$$

ρ - конечная на $[0, +\infty)$ мера, непрерывная в нуле и $T_\alpha = e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} K(t) dt$.

Заметим, что при $0 < \lambda \leq \lambda_0$ решение положительно и экспоненциально убывает. При $\lambda > \lambda_0$ возникает затухающее знакопеременное решение. Качественный характер решения связан с физическими явлениями и нуждается в физической интерпретации.

Результаты этого параграфа опубликованы в работах [9, 13].

§ 4. ОБ ОДНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу температурного скачка в кинетической теории газов в рамках линеаризованной ВГК модели уравнения Больцмана. Эта задача описывается системой консервативных интегральных уравнений свёртки на полупрямой с 2×2 матричным ядром :

$$f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^2 \int_0^{+\infty} K_{ij}(x-t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

где

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(x) dx = 2 \int_a^b G_{ij}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = (\delta_{ij})^2, \quad (4.2)$$

a (δ_{ij}) – единичная матрица.

Вопрос необратимости оператора $I - \widehat{K}$ определяется с помощью символа $I - \overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s)$ – по компонентное преобразование Фурье от K . А именно, для обратимости оператора $I - \widehat{K}$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий (см. [15]):

а) Символ невырожден, т.е.

$$\det [I - \overline{K}(s)] \neq 0, \quad (4.3)$$

б) частные индексы равны нулю, т.е. $\chi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{darctg} (I - \overline{K}(s)) ds = 0$.

Однако, в случае системы (4.1), (4.2) условие (4.3) в точке $s = 0$ нарушается, и символ имеет нуль четвёртого порядка. Такая высокая степень вырожденности существенно усложняет изучение и прямое численное решение системы (4.1). Несмотря на это, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. Символ $I - \overline{K}(s)$ допускает разложение

$$I - \overline{K}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \beta^2} [I - \overline{T}(s)], \quad (4.4)$$

где $I - \overline{T}(s)$ – символ оператора $I - \widehat{T}$ с ядром

$$T(x) = \int_a^{+\infty} e^{-|x|\rho} G(\rho) \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right) d\rho, \quad G(\rho) = (G_{ij}(\rho))_{i,j=1,2,\dots}. \quad (4.5)$$

Более того, в точке $s = 0$ имеем

$$\det (I - \overline{T}(0)) = \frac{5}{12} \beta^4 \neq 0, \quad (4.6)$$

где β – положительное число.

Теорема 4.1. Оператор $I - \widehat{K}$ допускает разложение

$$I - \widehat{K} = (I - \widehat{U}^-)(I - \widehat{T})(I - \widehat{U}^+), \quad (4.7)$$

где операторы \widehat{U}^\pm суть нижние и верхние простые вольтерровые матричные операторы

$$(\widehat{U}^+ f)(x) = \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \quad (\widehat{U}^- f)(x) = \beta \int_x^{+\infty} e^{-\beta(t-x)} f(t) dt, \quad (4.8)$$

а \widehat{T} – матричный интегральный оператор Винера–Хопфа. Оператор $I - \widehat{T}$ обратим.

Факторизация (4.7) сводит решение системы (4.1) к последовательному решению трёх простейших связанных уравнений и даёт возможность получить аналитическое решение консервативной системы WH -уравнения. Эта факторизация даёт возможность изучить асимптотическое поведение этого решения в $+\infty$. Результаты настоящего параграфа готовятся к публикации.

§ 5. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Af = g(x) + \lambda \int_0^{+\infty} K(x-t)f(t)dt \quad (5.1)$$

с ядерной функцией

$$K(x) = \int_a^{+\infty} e^{-|x|s} G(s)ds, \quad a \geq 0. \quad (5.2)$$

Предполагаем, что

$$A > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad G(\rho) \geq 0 \quad \text{и} \quad 2 \int_a^{+\infty} G(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = 1. \quad (5.3)$$

К числу задач, сводящихся к однородному ($g = 0$) уравнению (5.1) относятся: аномальный спин-эффект, распространение геликоновых волн вблизи циклотронного резонанса и др. (см. [14]). Член Af играет роль локального взаимодействия, g играет роль внешних сил, а интегральный член обуславливает нелокальные взаимодействия. Доказана следующая теорема: если ядро K имеет вид (5.2), (5.3), то при произвольном $A > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место факторизация

$$D^2 + AI - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(D^2 + \gamma I)(I - \hat{V}_+), \quad (5.4)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, V_{\pm} суть вольтерровы операторы вида (2.3).

Эта факторизация применяется к решению уравнения (5.1). Результаты по изучению и решению уравнения (5.1) скоро будут опубликованы.

Заключение. Первоначально A -уравнение было выведено В. А. Амбарцумяном для решения некоторых астрофизических задач. В дальнейшем оказалось, что с помощью функции Амбарцумяна решается ряд задач не только в астрофизике, но и в других областях естествознания. Несмотря на то, что рассматриваемые задачи с физической точки зрения совершенно разные (взаимодействие излучения с веществом, взаимодействие молекул со стенкой, металла под воздействием

внешнего электрического поля, электрического тока в проводнике) и соответствующие процессы описываются разными скалярными (векторными) интегральными уравнениями (1.5), (4.1) или интегро-дифференциальными уравнениями (3.1), (5.1), тем не менее все решения и физические характеристики выражаются через функцию Амбарцумяна. Это еще раз подтверждает универсальную и фундаментальную роль уравнения Амбарцумяна.

Abstract. The paper presents a review of convolution type integro-differential and integral equations, that describe a series of problems in physical kinetics. For such equations, different factorization methods exist and among them the universal role of Ambartsumian equation is shown.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, "К вопросу о диффузном отражении света в мутной среде", ДАН СССР, том 38, стр. 257 – 261, 1943.
2. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. сборник, том 2(139), № 1(5), стр. 35 – 58, 1975.
3. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Об одном интегральном уравнении с разностным ядром", Мат. заметки, том 19, № 6, стр. 927 – 932, 1976.
4. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара-Гросса-Крука", Теоретическая и математическая физика, том 125, № 2, стр. 339 – 342, 2002.
5. А. Х. Хачатрян, А. Н. Афян, "Об аналитическом и численном решении задачи переноса излучения при наличии отражающей поверхности", Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 41, № 8, стр. 1158 – 1168, 2001.
6. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа", Мат. моделирование, РАН, том 16, № 1, стр. 67 – 74, 2004.
7. А. Х. Хачатрян, С. М. Андриян, "О скачке скорости разреженного газа в рамках линеаризированной БГК модели уравнения Больцмана", Мат. моделирование, РАН, том 16, № 2, стр. 31 – 42, 2004.
8. А. Х. Хачатрян, С. М. Андриян, "Об одной задаче физической кинетики", Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 45, № 11, стр. 2065 – 2073, 2005.
9. A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, "On solvability of some integro-differential equations with sum-difference kernels", International Journal of Pure and Applied Math. Sciences, vol. 2, no. 1, pp. 1 – 13, 2005.
10. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Некоторые задачи факторизации интегральных операторов типа свёртки", Дифф. уравнения, том 26, № 8, стр. 1442 – 1452, 1990.
11. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свёртки в кинетической теории", Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 45, № 38, стр. 466 – 482, 1998.

12. К. Черчиньяни, Теория и приложения уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
13. Х. А. Хачатрян, "Интегро-дифференциальные уравнения физической кинетики", Изв АН Армении, серия Математика, том 39, № 3, стр. 72 – 80, 2004.
14. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая кинетика, том 10, Наука, Москва, 1979.
15. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов", Успехи мат. наук, том 13, № 2, стр. 3 – 72, 1968.

Поступила 5 сентября 2006

**RANDOM FLUCTUATIONS AT THE PLANCK LENGTH SCALE :
A SOURCE OF QUANTUM RANDOMNESS**

A. Khrennikov

*International Center for Mathematical Modeling in Physics, Engineering,
Economy and Cognitive Sciences, University of Växjö, S-35195, Sweden
E-mail : Andrei.Khrennikov@msi.vxu.se*

Abstract. The mathematical formalism of quantum mechanics can be interpreted as a method for approximation of classical (measure-theoretic) averages of functions $f : L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$. These are the classical physical variables in Prequantum Classical Statistical Field Theory (PCSFT), as we call our model with hidden variables. The present paper provides a simple stochastic picture of a quantum approximation procedure equivalent to an approximative method for computation of averages of random variables. Since in PCSFT the space of hidden variables is $L_2(\mathbb{R}^3)$, the role of a classical random variable is played by a random field. In PCSFT we consider Gaussian random fields representing random fluctuations at the prequantum length scale. Quantum mechanical expression for the average (given by the von Neumann trace formula) is obtained by moving from the prequantum to the quantum length scale (the scale that enables to perform measurements). The order of deviations of quantum (approximative) averages from the classical ones is given by the length scaling parameter, which is extremely small for quantum systems, e.g., $\kappa \sim 10^{-69}$ for an electron.

§0. INTRODUCTION

The problem of coupling of classical statistical mechanics and quantum mechanics has been the subject of stormy debates since the first days of quantum mechanics, before the first rigorous analysis was presented in the book of J. von Neumann [1]. His conclusion was rather supporting for the orthodox Copenhagen interpretation and is known as von Neumann's no-go theorem. It is also a rather common viewpoint that Heisenberg's uncertainty relations strongly support the Copenhagen interpretation,

see, however, Ballentine [2] and De Muynck [3] for the opposite viewpoint. Later there were proved various no-go theorems, the most popular nowadays is Bell's theorem [4]. In spite of all no-go theorems and other arguments in support of impossibility of a prequantum classical statistical model, a search for such a model never ceased (double solution approach of De Broglie, Bohmian mechanics, see, e.g., [5], SED, see, e.g., [6], [7] Nelson's stochastic mechanics [8], [9], Davidson's random field approach [10]). In a series of papers [11] the author developed a prequantum classical model where the role of hidden variables is played by classical fields. That Prequantum Classical Statistical Field theory (PCSFT) is a close relative both to SED and to Davidson's random field approach.

It was shown that the mathematical formalism of quantum mechanics can be interpreted as a method for approximation of classical (measure-theoretic) averages of functions $f : L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$. In this paper we describe a simple stochastic quantum approximation procedure equivalent to an approximative method for computation of averages for functions of random variables. Since in PCSFT the space of hidden variables is $L_2(\mathbb{R}^3)$, the role of a classical random variable is played by a random field. In PCSFT we consider Gaussian random fields representing random fluctuations at the prequantum length scale.

Quantum mechanical expression for the average (given by the von Neumann trace formula) is obtained by moving from the prequantum to the quantum length scale that enables measurements. The order of deviations of quantum (approximative) averages from the classical ones is given by the length scaling parameter. If one considers the Planck scale as the prequantum length scale then that scaling parameter is extremely small for quantum systems, e.g., $\kappa \sim 10^{-69}$ for electron. But it increases as

$$\kappa \sim m^3,$$

where m is the mass of a system. This, on one hand, explains well why quantum mechanics provides excellent approximation for statistical behavior of ensembles of "quantum particles", electrons, neutrons and even for hypothetical gigantic particles as Higgs bosons. On the other hand, it becomes clear why quantum mechanics does not work for relatively heavy systems as compared with the Planck mass.

The Planck scaling of masses is a consequence of Gaussian random fluctuations at the Planck length scale. In contrast with the Planck length or time, the Planck mass is macroscopic – a disturbing fact for those who tried to couple this mass with micro-world. In PCSFT the Planck mass is simply a characteristic mass for our measurement devices which are used to investigate "quantum systems." The latter should be not too heavy as compared with the Planck mass.

To simplify the presentation and to emphasize length scaling procedure, we cling to the case of the real Hilbert space. The complex quantum mechanics can be developed in the same way as in [11].

§2. AN APPROXIMATE METHOD FOR CALCULATION OF MEAN VALUES IN CLASSICAL PROBABILITY THEORY

Let $y = f(x)$, where f is not linear but differs not too much from a line on some interval $[m_\eta - \delta, m_\eta + \delta]$, where $\eta = \eta(\omega)$ is a random variable,

$$m_\eta \equiv E = \int \eta(\omega) dP(\omega)$$

is its average and $\delta > 0$ is sufficiently small. Writing the first order Taylor expansion at the point m_η ,

$$y(\omega) \approx f(m_\eta) + f'(m_\eta)(\eta(\omega) - m_\eta), \tag{1}$$

and taking the average of both sides one obtains :

$$m_y \approx f(m_\eta). \tag{2}$$

The crucial point is that the linear term $f'(m_\eta)(\eta(\omega) - m_\eta)$ does not give any contribution. We remark that the approximative formula (2) was first discovered by Gauss and in the probabilistic literature it is sometimes called the Gaussian formula for averages.

Now we take the first three terms in the expansion of f into the Taylor series at the point m_x :

$$y(\omega) \approx f(m_\eta) + f'(m_\eta)(\eta(\omega) - m_\eta) + \frac{1}{2}f''(m_\eta)(\eta(\omega) - m_\eta)^2. \tag{3}$$

Hence

$$m_y \approx f(m_\eta) + \frac{\sigma_\eta^2}{2}f''(m_\eta), \tag{4}$$

where

$$\sigma_\eta^2 = E (\eta - m_\eta)^2 = \int (\eta(\omega) - m_\eta)^2 dP(\omega)$$

is the variance of the random variable η .

Let us consider the special case of symmetric fluctuations $m_\eta = 0$, and assume that $f(0) = 0$. Then we obtain the following special form of (4) :

$$m_y \approx \frac{\sigma_\eta^2}{2}f''(0). \tag{5}$$

Thus at some level of approximation we can calculate averages not by using the Lebesgue integral (as we do in classical probability theory), but by finding the second derivative. Such a "calculus of probability" would match well with experiment. Probably the reader has already found analogy with the quantum calculus of probabilities. This analogy is better seen in the multi-dimensional case. Let

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n),$$

so we consider a system of n random variables. We consider the vector average

$$m_\eta = (m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n})$$

and the covariance matrix

$$B_\eta = (B_\eta^{ij}), \quad B_\eta^{ij} = E (\eta_i - m_{\eta_i}) (\eta_j - m_{\eta_j}).$$

For the random variable $y(\omega) = f(\eta_1(\omega), \dots, \eta_n(\omega))$ we write the second order Taylor expansion :

$$\begin{aligned} y(\omega) \approx & f(m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \eta_i}(m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n})(\eta_i(\omega) - m_{\eta_i}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n})(\eta_i(\omega) - m_{\eta_i})(\eta_j(\omega) - m_{\eta_j}), \end{aligned} \quad (6)$$

and hence

$$m_y \approx f(m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(m_{\eta_1}, \dots, m_{\eta_n}) B_\eta^{ij}. \quad (7)$$

In vector notations

$$y(\omega) \approx f(m_\eta) + (f'(m_\eta), \eta(\omega) - m_\eta) + \frac{1}{2} (f''(m_\eta)(\eta(\omega) - m_\eta), \eta(\omega) - m_\eta). \quad (8)$$

and

$$m_y \approx f(m_\eta) + \frac{1}{2} \text{Tr} B_\eta f''(m_\eta). \quad (9)$$

For the special case $m_\eta = 0$ and $f(0) = 0$ we have

$$m_y \approx \frac{1}{2} \text{Tr} B_\eta f''(0). \quad (10)$$

The Hessian $f''(0)$ is always a symmetric operator. Let us now represent f by its second derivative at zero :

$$f \rightarrow A = \frac{1}{2} f''(0).$$

So at some level of approximation, instead of Lebesgue integrals, one can use linear algebra :

$$m_\eta \approx \text{Tr } B_\eta A. \tag{11}$$

§3. GAUSSIAN RANDOM FIELDS ON PREQUANTUM AND QUANTUM LENGTH SCALES

Let us consider a prequantum length scale l_{pq} and the corresponding system of coordinates $y = (y_1, y_2, y_3)$. The problem of the correct choice of l_{pq} is complicated. We shall come back to this problem in §5.

Let $\xi^\rho(y, \omega)$ ($y \in \mathbb{R}^3$) be a Gaussian random field with zero mean value ("symmetric fluctuations of vacuum") :

$$E \left(\int_{\mathbb{R}^3} \psi(y) \xi^\rho(y, \omega) d^3 y \right) = 0,$$

which is determined by its covariance operator ρ .

$$E \left(\int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(y) \xi^\rho(y, \omega) d^3 y \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \psi_2(u) \xi^\rho(u, \omega) d^3 u \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y, u) \psi_1(y) \psi_2(u) d^3 y d^3 u.$$

Here $\rho(y, u)$ is the kernel of the covariance operator ρ . We shall assume that the prequantum fluctuations are normalized, i.e.

$$\text{Tr } \rho = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y, y) d^3 y = E \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi^\rho(y, \omega)|^2 d^3 y \right) = 1.$$

Such a random field can be considered as a Gaussian random variable taking values in the Hilbert space $H = L_2(\mathbb{R}^3)$.

We now consider the characteristic length scale of quantum mechanics l_q and the corresponding system of coordinates $x = (x_1, x_2, x_3)$. The problem of the correct choice of l_q will be discussed in §5. Our basic assumption is that the prequantum and quantum length scales are coupled through a linear scaling, i.e.

$$x = \gamma y.$$

The prequantum interval of the unit length $r_{pq} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1$ corresponds to the quantum interval of the length $r_q = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \gamma$. If $\gamma \rightarrow 0$, then

$\tau_q \rightarrow 0$. Thus a "quantum point" has an extended prequantum spatial structure. On the other hand, the quantum interval of the unit length $\tau_q = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$ can be considered as the image (available from the measurement devices) of the huge prequantum interval $\tau_{p,q} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1/\gamma \rightarrow \infty$ as $\gamma \rightarrow 0$. Thus, systems which are commonly considered as point-like particles have huge spatial structures in the prequantum space (prespace).

We now consider the Gaussian random field $\eta^\rho(x, \omega)$ ($x \in \mathbb{R}^3$) that corresponds to a prequantum Gaussian random field $\xi^\rho(y, \omega)$ ($y \in \mathbb{R}^3$) through transition from the prequantum length scale to the quantum one :

$$\eta^\rho(x, \omega) = \xi^\rho\left(\frac{x}{\gamma}, \omega\right).$$

The mean value of the quantum-scale random field $\eta^\rho(x, \omega)$ is zero and the variance

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\eta^\rho(x, \omega)|^2 d^3x \right) &= E \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \xi^\rho\left(\frac{x}{\gamma}, \omega\right) \right|^2 d^3x \right) = \\ &= \gamma^3 E \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi^\rho(y, \omega)|^2 d^3y \right) = \gamma^3. \end{aligned}$$

Thus, transition from the prequantum space-scale to the quantum induces a rescaling of a prequantum Gaussian random field :

$$\text{Prob. distr. } \{\eta^\rho(x, \omega) : x \in \mathbb{R}^3\} = \text{Prob. distr. } \{\gamma^{3/2}\xi^\rho(y, \omega) : y \in \mathbb{R}^3\}.$$

Consider a map $f : L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, classical physical variable – a functional of classical fields $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$. We are interested in the average of the function $f(\eta^\rho(x, \omega))$ of the random field $\eta^\rho(x, \omega)$. To find $E f(\eta^\rho(x, \omega))$ precisely is a complicated problem. Therefore, we use the approximation method of functions of random variables based on the Taylor formula (see §2). The only difference is that we now consider $f = f(\psi)$ to be a function of a Hilbert vector. However, there is a well developed differential calculus on Hilbert spaces, as well as general normed spaces. So we obtain the asymptotic expansion (see [11])

$$E f(\eta^\rho(x, \omega)) = E f(\sqrt{\kappa}\xi^\rho(y, \omega)) = \frac{\kappa}{2} \text{Tr } \rho f''(0) + O(\kappa^2), \quad (12)$$

where

$$\kappa = \gamma^3.$$

To produce observable effects, the classical physical variable f should be strongly amplified :

$$f \rightarrow f_\kappa(\psi) \equiv \frac{2}{\kappa} f(\psi).$$

For the mean value of such an amplification we obtain the asymptotic expansion :

$$E f_{\kappa}(\eta^{\rho}(x, \omega)) = \text{Tr } \rho f''(0) + O(\kappa). \quad (13)$$

Thus, the average with respect to fluctuations at the prequantum length scale can be well approximated by the von Neumann trace-average basic for quantum mechanics.

From the point of view of PCSFT, quantum mechanics is an approximative statistical theory providing first order approximation with respect to random Gaussian fluctuations at the prequantum space-scale.

§4. HIDDEN VARIABLES : SPACE OF CLASSICAL FIELDS

For the space of hidden variables we choose

$$H = L_2(\mathbb{R}^3).$$

We repeat that we consider the real theory and generalization to a complex theory can be obtained by methods developed in [11]. The scalar product is given by the formula

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(y) \psi_2(y) d^3 y,$$

and the norm is

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^2(y) d^3 y.$$

Let us consider the functional space $\mathcal{V}(H)$ of those functions $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ for which

a) the state of vacuum is preserved, i.e.

$$f(0) = 0,$$

b) f is four times continuously differentiable as a functional (generally nonlinear) on the Hilbert space H ,

c) the fourth derivative of f is of exponential growth, i.e. $|||f^{(4)}(\psi)||| \leq c_f e^{r_f \|\psi\|}$ for some $c_f, r_f \geq 0$ and for all $\psi \in H$.

The last two conditions have purely mathematical significance. They are necessary for rigorous treatment of expansions of the averages by small parameters (see (13), details can be found in [11]).

The space of all Gaussian random fields $\xi^{\rho}(y, \omega)$ of the type considered in §3 we denote by $S(H)$. We consider a classical statistical model on the space H with physical variables of the class $\mathcal{V}(H)$ and the statistical states given by Gaussian random fields of the class $S(H)$ – prequantum classical statistical field theory, PCSFT :

$$M_{PCSFT} = (S(H), \mathcal{V}(H)).$$

We recall that the conventional quantum statistical model with the real Hilbert state space $H = L_2(\mathbb{R}^3)$ is described in the following way :

- a) physical observables are represented by operators $A : H \mapsto H$ from the class $\mathcal{L}_s \equiv \mathcal{L}_s(H)$ of continuous self-adjoint operators,
- b) statistical states are represented by von Neumann density operators (the class of such operators is denoted by $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(H)$),
- c) the average of a physical observable (which is represented by the operator $A \in \mathcal{L}_s(H)$) with respect to a statistical state (represented by a density operator $\rho \in \mathcal{D}(H)$) is given by von Neumann's formula

$$\langle A \rangle_\rho \equiv \text{Tr } \rho A. \quad (14)$$

The quantum statistical model is the pair $M_{quant} = (\mathcal{D}, \mathcal{L}_s)$.

We define T to be maps from the classical model into the quantum model :

$$T : S(H) \mapsto \mathcal{D}(H), \quad T(\xi^\rho) = \rho, \quad (15)$$

$$T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{L}_s(H), \quad T(f) = f''(0). \quad (16)$$

Theorem 1. Both maps (15) and (16) are mappings onto the corresponding spaces. The map (15) is even and one-to-one. The map (16) is not one-to-one and is linear. The asymptotic equality (13) between the classical and the quantum averages is valid.

§5. THE MAGNITUDE OF LENGTH-SCALING

The small parameter of our model

$$\kappa = \gamma^3,$$

we depends on the choice of the quantum and the prequantum length scales. We now choose the atom length-scale in QM and the Planck length-scale in the prequantum classical theory. We start with the Planck scale based on the Planck length

$$l_{pq} = l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-33} \text{ sm} \quad (17)$$

The Planck length l_P can be expressed as

$$l_P = \frac{\hbar}{m_P c}, \quad (18)$$

where

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

is the Planck mass. We apply the generalization of the formula

$$l_m = \frac{\hbar}{mc} \tag{19}$$

to a system with an arbitrary mass m and find the corresponding length scale by formula (19). To obtain the atom time-scale, we choose the electron mass scale $m_e \approx 9.109 \times 10^{-31} kg$. This mass scale induces the length scale which is in the limits of the atom length scale :

$$l_a = l_e = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 3.86 \times 10^{-11} sm. \tag{20}$$

We recall that the Bohr radius is

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} \approx 5.292 \times 10^{-9} sm,$$

where α is the fine structure constant. Therefore,

$$\gamma = \frac{l_{prq}}{l_q} = \frac{l_P}{l_e} \approx 4.186 \times 10^{-23}. \tag{21}$$

We also remark that

$$\gamma = \frac{m_e}{m_P}. \tag{22}$$

Thus, our length-scaling parameter has the magnitude

$$\gamma \sim 10^{-23}.$$

Under such choice of the prequantum scale, the difference between statistical predictions of PCSFT and QM (given by (13)) is of the order

$$\kappa \sim 10^{-69}.$$

For instance, for the quantum observable A is given by (16) and the classical physical variable

$$f(\psi) = \frac{1}{2} \langle A\psi, \psi \rangle + \frac{1}{4} \langle A\psi, \psi \rangle^2, \quad A \in \mathcal{L},$$

the difference between the quantum prediction for the average of its quantum image $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr } \rho A$ and the PCSFT-prediction for the average of $f(\psi)$ should be of the order 10^{-69} (under the assumption that the Planck length l_P really provides the correct prequantum time-scale, for this we do not have any internal justification of such a choice inside PCSFT).

If we choose the characteristic atom length scale to be the Bohr radius, then the deviation would be 10^{-6} times smaller.

As mentioned above, we cannot guarantee that the Planck length really provides the right prequantum scale. The main problem induced by such a choice is that there is a huge gap between the atomic and the Planck scales. A scale between the Planck and atomic scales can be more natural. In that case κ could be larger, simplifying the experimental verification of PCSFT. On the other hand, choosing the Planck scale and the corresponding $\kappa \equiv \kappa_e \sim 10^{-23}$ clarifies why predictions of QM have not yet been violated since the deviation is really negligibly small.

One of the reasons in favor of the Planck scale as the scale of prequantum fluctuations is that the Planck mass has macroscopic magnitude.

Let a system have a mass m . Then choosing the corresponding time scale $l_m = \frac{\hbar}{mc}$ we obtain $\gamma = \frac{m}{m_P}$. Therefore QM should be violated for systems of macroscopic mass (as compared with the Planck mass). In principle, one may expect that it would be easier to produce deviations from QM for heavy elementary particles, e.g., muons. Let us take $m = m_{muon}$ and the corresponding time scale

$$\gamma_{muon} = \gamma_e \frac{m_{muon}}{m_e} \approx 207\gamma_e.$$

Then statistical deviations for muons become essentially larger than for electrons, but they are still very small $\kappa_{muon} \sim 10^{-63}$.

For the neutron, i.e. for a quite heavy quantum system we have

$$l_n = \frac{\hbar}{m_n c} \sim 10^{-14} sm.$$

We remark that the experimentally defined radius of neutron is about $r_n \approx 8 \times 10^{-14} sm$. Thus

$$\gamma_n \sim 10^{-19}, \quad \kappa_n \sim 10^{-57}.$$

PCSFT predicts that for neutrons QM works 10^6 worse than for muons, but this is still a negligibly small deviation.

Let us now consider the hypothetical particles such as e.g. Higgs bosons. Some models with supersymmetries predicts

$$m_{Higgs} \sim 120 GeV.$$

Here

$$\gamma_{Higgs} \sim 10^{-17}, \quad \kappa_{Higgs} \sim 10^{-51}.$$

Thus even possible discovery of Higgs bosons would not induce visible violations of laws of quantum mechanics. On the other hand, decreasing of the mass strongly increases the precision of the quantum approximation. For electron neutrino and antineutrino

$$\gamma_{e\text{-neutrino}} = \gamma_e \frac{m_{e\text{-neutrino}}}{m_e} < 4.31 \times 10^{-7} \gamma_e \sim 10^{-30}.$$

Here $\kappa_{e\text{-neutrino}} \sim 10^{-90}$.

It is impossible to interpolate directly our theory to photons, since we considered nonrelativistic QM. By a direct interpolation $\gamma_{\text{photon}} = 0$. Thus it would imply that the QM model is precise for photons. However, as already mentioned, such an interpolation can be too straightforward.

Резюме. Математический формализм квантовой механики можно интерпретировать как метод для приближений классических усреднений (по мере) функций $f : L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$. Они являются классическими физическими переменными в Предквантовой классической статистической теории поля (ПКСТП). Так мы называем нашу модель со скрытыми переменными. Настоящая статья даёт простую стохастическую картину процедуры квантового приближения эквивалентную аппроксимативному методу вычисления средних для случайных переменных. Поскольку в ПКСТП пространством скрытых переменных является $L_2(\mathbb{R}^3)$, роль классической случайной величины играет случайное поле. В ПКСТП мы рассматриваем гауссовские случайные поля, представляющие случайные колебания на шкале предквантовой длины. Кванто-механическое выражение для среднего (задаваемого формулой следа фон Неймана) получена движением из предквантовой к квантовой шкале длины (шкала, которая даёт возможность проводить измерения). Порядок отклонений квантовых (аппроксимативных) средних в классическом случае задаётся параметром определяющим масштаб длины, который очень мал для квантовых систем, например, для электрона равен $\kappa \sim 10^{-69}$.

REFERENCES

1. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1955.
2. L. Ballentine, *Quantum Mechanics : A Modern Development*, World Sc. Publ. Com., Singapore, 1998.
3. W. M. de Muynck, *Foundations of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach*, Kluwer, Dordrecht, 2002.
4. J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
5. P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993
6. L. De la Pena and A. M. Cetto, *The Quantum Dice : An Introduction to Stochastic Electrodynamics*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

7. L. De La Pena, Found. Phys., vol. 12, p. 1017, 1982.
8. E. Nelson, Quantum Fluctuation, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.
9. S. Albeverio and R. Höegh-Krohn, J. Math. Phys., vol. 15, p. 1745, 1975.
10. M. Davidson, J. Math. Phys., vol. 20, p. 1865, 1979; Physica A 96 465, 1979.
11. A. Yu. Khrennikov, J. Phys. A : Math. Gen., vol. 38, p. 9051, 2005, Found. Phys. Letters, vol. 18, pp. 637 – 650, 2005; Physics Letters A, vol. 357, p. 171, 2006.
12. E. Ventzel, Theory of Probability [in Russian], Fizmatlit, Moscow, 1958.

Поступила 3 сентября 2006

ТРАЕКТОРИИ ПОЛЁТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
С РЕАКТИВНОЙ ТЯГОЙ

А. О. Бабаян

Ереванский государственный инженерный университет

E-mail : armenak@web.am

В работе рассматривается движение летательного аппарата под действием сил

$$\vec{F}_g = m \vec{g}, \quad \vec{F}_R = -k \frac{dm(t)}{dt} \frac{\vec{V}}{V}, \quad \vec{F}_c = -\kappa \vec{V},$$

где $m(t)$ – масса летательного аппарата в момент времени t , $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ – скорость в момент времени t , $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$, k – положительная постоянная, а κ – неотрицательная функция. Закон движения определяется уравнением Мещерского [1]

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_c. \quad (1)$$

Пусть движение летательного аппарата осуществляется по траектории

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq x_0. \quad (2)$$

Заданы начальная скорость летательного аппарата и масса в конечной точке полёта

$$V(0) = \sqrt{V_1^2(0) + V_2^2(0)} = V_0, \quad m(x_0) = m_0. \quad (3)$$

Переходя к переменной x и записывая (1) в координатах, получим следующую систему

$$\begin{cases} m \frac{dV_1}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 - \kappa, & 0 \leq x \leq x_0 \\ m V_1 \frac{dV_2}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 V_2 - \kappa V_2 - gm, & 0 \leq x \leq x_0 \end{cases} \quad (4)$$

с краевыми условиями (3). Следующая теорема была доказана в [2] на основе равенства $V_2 = f'(x)V_1$.

Теорема 1. Задача (3)–(4) разрешима для любой функции $\kappa \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$f''(x) < 0, \quad f'''(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (5)$$

$$\frac{1 + (f'(0))^2}{f''(0)} = -\frac{V_0^2}{g}. \quad (6)$$

Используя теорему 1, в работах [2] и [3] были получены интегральные представления допустимых траекторий. Для эффективного определения оптимальных параметров полёта предпочтительнее параметрическое представление траекторий, определяемых функциями заданного класса. В работе рассматривается случай, когда $f(x) = P_3(x)$ – многочлен третьего порядка. Получены параметрические представления траекторий такого вида, по которым возможно осуществить полёт из точки $(0, 0)$ в точку (x_0, y_0) . Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Полёт из точки $(0, 0)$ до точки $(x_0, 0)$ может осуществляться по траектории $y = P_3(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \leq x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$. В частности,

1) если $0 \leq x_0 \leq \frac{V_0^2}{g}$, то

$$P_3(x) = l \left(x - \frac{1 + 0,5\rho}{x_0} x^2 + \frac{\rho}{2x_0^2} x^3 \right), \quad (7)$$

где $0 \leq \rho < 1$, а число l – решение уравнения

$$l^2 - 2l \frac{V_0^2}{gx_0} \left(1 + \frac{\rho}{2} \right) + 1 = 0, \quad (8)$$

2) если $\frac{V_0^2}{g} < x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$, то $P_3(x)$ определяется формулой (7), где l – решение уравнения (8), а ρ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$1 > \rho \geq \max \left(0; 2 \left(\frac{gx_0}{V_0^2} - 1 \right) \right). \quad (9)$$

Теорема 3. Полёт из точки $(0, 0)$ до точки (x_0, y_0) может осуществляться по траектории $y = P_3(x)$ тогда и только тогда, когда

$$y_0 < \left(\frac{3V_0^2}{2g} \right) - \frac{gx_0^2}{3V_0^2},$$

и

$$P_3(x) = \frac{y_0}{x_0} x + l \left(x - \frac{1 + 0,5\rho}{x_0} x^2 + \frac{\rho}{x_0^2} x^3 \right),$$

где l определяется из уравнения

$$l^2 - 2l \left(\frac{V_0^2}{gx_0} \left(1 + \frac{\rho}{2} \right) - \frac{y_0}{x_0} \right) + \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 + 1 = 0,$$

а ρ — произвольная постоянная, удовлетворяющая соотношениям

$$1 > \rho \geq \max \left(0; 2 \left(\frac{gx_0}{V_0^2} \left(\frac{y_0}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 + 1} \right) - 1 \right) \right).$$

Доказательство теоремы 2. Из условия $f(0) = 0$ следует, что свободный член многочлена равен нулю и, следовательно

$$P_3(x) = l \left(x + \frac{c}{x_0} x^2 + \frac{d}{x_0^2} x^3 \right).$$

При $x = x_0$ функция P_3 также обращается в нуль, поэтому

$$0 = l(x_0 + cx_0 + dx_0) \Rightarrow c = -(1 + d). \quad (10)$$

Из условий (5) следует, что

$$ld \geq 0, \quad (11)$$

и $2lcx_0^{-1} + 6ldxx_0^{-2} < 0$ при $0 \leq x \leq x_0$. Это неравенство эквивалентно следующим условиям

$$l(c + 3d) < 0, \quad lc < 0. \quad (12)$$

Теперь, обозначая $d = 0.5\rho$ и учитывая (10), представим неравенства (11) и (12) в виде $l\rho \geq 0$, $l(\rho - 1) < 0$, $-l(\rho + 2) < 0$. Отсюда следует, что

$$l > 0, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (13)$$

Итак, многочлен третьего порядка P_3 , удовлетворяющий условиям (5) и обращающийся в нуль в точках 0 и x_0 , представляется в виде (7), где l и ρ удовлетворяют (13).

Теперь рассмотрим условие (6). Подставляя функцию (7) в условие (6), получаем уравнение (8). Все действительные корни уравнения (8) — положительные, следовательно, это уравнение определяет l , удовлетворяющее условию (13) тогда и только тогда, когда

$$\frac{V_0^4}{(gx_0)^2} (1 + 0.5\rho)^2 - 1 \geq 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что если $0 \leq x_0 \leq \frac{V_0^2}{g}$, то траектория вида (7) при произвольном $0 \leq \rho < 1$ является допустимой. В случае $\frac{V_0^2}{g} < x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$, постоянная ρ должна удовлетворять условию (9). Если же $x_0 \geq \frac{3V_0^2}{2g}$, то уравнение (8) не имеет положительных корней и, следовательно, многочлен третьего порядка не является допустимой траекторией полёта от точки $(0, 0)$ до точки $(0, x_0)$. Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, поэтому мы его опускаем. При этом используем представление многочлена $P_3(x) = xy_0x_0^{-1} + Q_3(x)$, где Q_3 – многочлен третьего порядка, удовлетворяющий условию $Q_3(0) = Q_3(x_0) = 0$. Отметим, что в этом случае y_0 может быть отрицательным.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Дмитриевский, Внешняя баллистика, Машиностроение, Москва, 1979.
2. N. E. Tovmasyan, "The flight of an aircraft along a given trajectory and optimal flight control", in : Topics in Analysis and its Applications, NATO Science Series, Series II, Vol. 147, Kluwer Academic Publishers, pp. 347 – 364, 2004.
3. О. А. Бабаян, "Критерии возможности полёта летательного аппарата и интегральное представление допустимых траекторий", Математика в высшей школе, том 1, № 4, стр. 8 – 15, 2005.

Поступила 5 сентября 2006

11000 111
2006, 7.41, N

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 5, 2006

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
СБОРНИК СТАТЕЙ
СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии	4
Л. Г. АРАБАДЖЯН, А. С. ХАЧАТРЯН, Об уравнении переноса в случае возможности размножения частиц	5
Ю. Н. ДРОЖЖИНОВ, Б. И. ЗАВЬЯЛОВ, Тауберова теорема типа Винера для обобщённых функций медленного роста на полуоси	11
Н. Б. ЕНГИВАРЯН, Коллективные марковские процессы с источниками	18
С. В. КОЗЫРЕВ, Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики	28
А. Г. СЕРГЕЕВ, Гармонические отображения в пространства петель компактных групп Ли	39
Н. Е. ТОВМАСЯН, Задача Дирихле для n -гармонического уравнения вне круга	53
А. Х. ХАЧАТРЯН, Уравнение Амбарцумяна в физической кинетике	58
А. ХРЕННИКОВ, Случайные колебания на шкале длин Планка: источник квантовой случайности	69
<i>Краткие Сообщения</i>	
А. О. БАБАЯН, Траектории полёта летательных аппаратов с реактивной тягой	81

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 5, 2006

MATHEMATICAL PHYSICS AND RELATED QUESTIONS
COLLECTION OF PAPERS
CONTENTS

Editors' Preface	4
L. G. ARABAJYAN AND A. S. KHACHATRYAN, The transfer equation in the presence of particle multiplication	5
JU. N. DROZZINOV AND B. I. ZAVYALOV, A Wiener type Tauberian theorem for generalized functions of slow growth on the semiaxis	11
N. B. YENGIBARYAN, Collective Markov processes with sources	18
S. V. KOZYREV, Ultrametric dynamics as an interbasin kinetics model	28
A. G. SERGEEV, Harmonic mappings into the loop spaces of compact Lie groups	39
N. E. TOVMASYAN, Dirichlet problem for n -harmonic equation in the exterior of the disc	53
A. KH. KHACHATRYAN, V. Ambartsumian equation in physical kinetics	58
A. YU. KHRENNIKOV, Random fluctuations at the Planck length scale: a source of quantum randomness	69
<i>Brief Communications</i>	
A. O. BABAYAN, The trajectories of jet flights	81