ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 3–6

COMPLETE HYPERSURFACES IN S^{n+1} WITH NONNEGATIVE WEYL TENSOR : NON-SYMMETRIC ROOTS IN THE UNIT DISC

E. Abedi

Tarbiat Moallem University of Azarbaijan, Tabriz, Iran
E-mail : esabedi@yahoo.com

The paper presents a simple proof of a theorem by Q-M. Cheng on compact locally conformally flat Riemannian manifolds and shows that a complete connected oriented hypersurface in S^{n+1} with nonnegative Weyl tensor and Ricci curvature is isometric to a space form or a Riemannian product $S^{n-1} \times S^1$.

§1. INTRODUCTION

A well known result in Riemannian geometry states that every compact n-dimensional Riemannian manifold can be deformed to a Riemannian manifold with constant scalar curvature by a conformal transformation (see [3], [5], [6]). In [4], Tani proved that any compact connected oriented locally conformally flat n-dimensional Riemannian manifold M^n with constant scalar curvature is isometric to a space form if the Ricci curvature of M^n be positive. On the other hand, Cheng in [1] completely classified compact connected oriented locally conformally flat n-dimensional Riemannian manifolds with both the scalar curvature r constant and the Ricci curvature nonnegative and proved the following theorem.

Theorem (Cheng [1]). *Let M^n be a compact connected oriented locally conformally flat n-dimensional Riemannian manifold with constant scalar curvature. If the Ricci curvature of M^n is nonnegative, then M^n is isometric to a space form or a Riemannian product $S^{n-1}(c) \times S^1$.*

In this paper we present a simple proof of the above theorem. Further, we prove that if M^n is a complete connected oriented hypersurface in the sphere S^{n+1} with scalar curvature $r \geq n(n-1)$, nonnegative Ricci curvature and nonnegative Weyl tensor, then M^n is isometric to a space form or a Riemannian product $S^{n-1}(c) \times S^1$; that is, we obtain the following theorems.

Theorem 1. *Let M^n be a complete connected oriented locally conformally flat n-dimensional Riemannian manifold with constant scalar curvature. If the Ricci curvature of M^n is nonnegative, then M^n is isometric to a space form or a Riemannian product $S^{n-1}(c) \times S^1$.*

Theorem 2. *Let M^n be a complete connected oriented hypersurface in S^{n+1} with nonnegative Weyl tensor and scalar curvature. If Ricci curvature is nonnegative, then M^n is isometric to a space form or a Riemannian product $S^{n-1}(c) \times S^1$.*

§2. PRELIMINARIES

Let M^n be a complete hypersurface in the sphere S^{n+1}. We denote by $\overline{\nabla}$ and ∇ the Riemannian connections on S^{n+1} and M^n, respectively. Then we have

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \quad \overline{\nabla}_X N = -AX \tag{1}$$

where $X, Y \in \chi(M)$, N is the normal vector field and h is the second fundamental form on M^n. Also A is a shape operator that satisfies

$$\langle AX, Y\rangle = \langle h(X,Y), N\rangle, \quad X, Y \in \chi(M).$$

For hypersurface M^n the *Gauss equation* is

$$R(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle AY,Z\rangle AX - \langle AX,Z\rangle AY \tag{2}$$

for $X, Y, Z \in \chi(M)$, where R is the curvature tensor corresponding to the connection ∇; that is, $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$. The Ricci curvature of M^n is defined by $Ric(X,Y) = \sum_i \langle R_{XE_i}Y, E_i\rangle$, where $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ is a local frame of orthonormal vector fields on M^n. The mean curvature and square norm of the second fundamental form of M^n are defined by $nH = \sum_i h_{ii}$, $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$, where h_{ij} denotes the components of the second fundamental form, i.e. $h_{ij} = \langle h(E_i, E_j), N\rangle$. From the above equation, we have

$$R_{ij} = (n-1)\delta_{ij} + nHh_{ij} - \sum_k h_{ik}h_{kj}, \tag{3}$$

$$r = n(n-1) + n^2H^2 - S, \tag{4}$$

where R_{ij} and r are components of the Ricci curvature tensor and the scalar curvature of M^n, respectively.

A Riemannian manifold M^n is called *locally conformally flat*, if every point on M^n admits a coordinate neighborhood with coordinates $x_1, \ldots, x_n$ in which the Riemannian metric can be expressed as

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2(x) dx_i^2,$$

where $\lambda(x)$ is a positive function defined in the coordinate neighborhood. We choose a local frame of orthonormal vector fields $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ adapted to the Riemannian metric of M^n. Let C_{ijkl} denote the components of the Weyl tensor of M^n ; that is

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta_{jl} - R_{il}\delta_{jk} + R_{jl}\delta_{ik} - R_{jk}\delta_{il}) + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Also, the Beck tensor with the components C_{ijk} is defined by

$$C_{ijk} = \frac{1}{n-2}(R_{ij,k} - R_{ik,j}) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\delta_{ij}r_k - \delta_{ik}r_j),$$

where $R_{ij,k} = \nabla_{E_k} R_{ij}$ and $r_k = \nabla_{E_k} r$. For $n \geq 4$, M^n is know to be a locally conformally flat Riemannian manifold if and only if $C_{ijkl} = 0$, and that $C_{ijk} = 0$ on M^n in this case. When $n = 3$, we always have $C_{ijkl} = 0$. Hence, if M^n is a locally conformally flat n-dimensional Riemannian manifold, then

$$R_{ijkl} = \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta_{jl} - R_{il}\delta_{jk}) - \frac{r}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{5}$$

and

$$\left(R_{ij,k} - \frac{1}{2(n-1)}\delta_{ij}r_k\right) - \left(R_{ik,j} - \frac{1}{2(n-1)}\delta_{ik}r_j\right) = 0. \tag{6}$$

Moreover, if the scalar curvature r is constant, then we obtain

$$R_{ij,k} = R_{ik,j}. \tag{7}$$

§3. PROOFS OF THEOREMS

Proof of Theorem 1. We select a local frame of orthonormal vector fields, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ adapted to the Riemannian metric of M^n, such that $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. The values of λ_i for $i = 1, 2, \ldots, n$ are the eigenvalues of the Ricci curvature tensor (R_{ij}) of M^n. Since scalar curvature r of M^n is constant, from equation (7), with choice $j = i$ and $k \neq i$, we have

$$\lambda_{i,k} = 0, \quad k \neq i. \tag{8}$$

Since $r = \sum_k R_{kk} = \sum_k \lambda_k$ is constant, we have

$$0 = r_i = \sum_k \lambda_{k,i}. \tag{9}$$

The equations (8) and (9) imply that λ_i for $i = 1, 2, \ldots, n$ are constant. Therefore, $\sum_{i,j} R_{ij}^2$ is constant. As shown by Goldberg [2], Theorem 3, a compact M^n is isometric to a space form or isometric to $S^{n-1}(c) \times S^1$.

Proof of Theorem 2. Suppose $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be a local frame of orthonormal vector fields of M^n such that $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. From equation (2), we have $R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})$. Hence, we infer that

$$R_{ijij} = 1 + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Moreover,

$$C_{ijij} = R_{ijij} - \frac{1}{n-2}(R_{ii} + R_{jj}) + \frac{r}{(n-1)(n-2)}, \quad i \neq j. \tag{11}$$

From equations (4), (10) and (11), we obtain

$$\sum_{i \neq j} C_{ijij} = r - \frac{2n(n-1)}{n-2} r + \frac{n}{(n-2)} r = \frac{-2(n-1)^2}{n-2} r. \tag{12}$$

Since r and Weyl tensor is nonnegative, (12) implies that $r = 0$ is constant and $C_{ijij} = 0$ for $i, j = 1, 2, \ldots, n$ and $i \neq j$. Since C_{ijkl} have symmetries of curvature tensor R_{ijkl} and $C_{ijkl} + C_{jkil} + C_{kijl} = 0$, we have $C_{ijkl} = 0$. Thus M^n is locally conformally flat manifold. By Theorem 1 the proof is complete.

REFERENCES

1. Q-M. Cheng, "Compact locally conformally flat Riemannian manifolds", Bull. London Math. Soc., vol. 33, pp. 459 – 465, 2001.
2. S. I. Goldberg, "On conformally flat spaces with definite Ricci curvature", Kodai Math. Sem. Rep., vol. 21, pp. 226 – 232, 1969.
3. R. Schoen, "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature", J. Differential Geom., vol. 20, pp., 479 – 495, 1984.
4. M. Tani, "On a conformally flat Riemannian manifold", Tohoku Math. J., vol. 19, pp. 206 – 214, 1967.
5. N. Trudinger, "Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., Cl. Sci., vol 22, pp. 265 – 274, 1968.
6. H. Yamabe, "On the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds", Osaka J. Math., vol. 12, pp. 21 – 37, 1960.

Поступила 23 февраля 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 7–14

CARACTERISATION DE QUELQUES PARTIES PRECOMPACTES DANS LES TREILLIS VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES ET SOLIDES

Belmesnaoui Aqzzouz et Redouane Nouira

Université Mohammed V-Souissi, Sala Eljadida, Morocco ;
Université Ibn Tofail, Kénitra, Morocco
E-mail : baqzzouz@hotmail.com

By using the pre-Lebesque topology, the paper points at some relations between several notions of precompact subsets in a locally solid and convex vector lattice.

§1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

1. La relation d'intéraction entre la structure d'ordre et la structure topologique dans un treillis de Banach est trés importante. Par exemple il existe plusieurs résultats qui établissent la relation entre les parties compactes et la structure d'ordre dans ces espaces, mais il reste encore certains résultats désirables non résolus. Comme par exemple la relation entre la compacité et la continuité de la norme i.e. la topologie définie par la norme est de Lebesgue. De mêmenous ne connaissons pas la relation qui existe entre une partie précompacte pour l'ordre et les suites disjointes et convergentes de cette partie. Enfin, nous savons qu'une partie précompacte pour l'ordre est quasi précompacte pour l'ordre mais nous nous connaissons rien sur la réciproque.

La objectif de ce papier est de répondre à ces différentes questions. Plus précisément, nous montrerons que si (E, τ) est un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet, et A une partie solide de E engendrée par un borné équilibré B telle que toute suite disjointe de A est convergente vers 0 pour la topologie τ, alors A est une partie précompacte pour l'ordre. Ensuite, nous donnerons une caractérisation des topologies pré-Lebesgue, plus précisément nous établirons que la topologie τ est pré-Lebesgue si, et seulement si, toute partie quasi précompacte pour l'ordre dans (E, τ) est précompacte pour l'ordre. Enfin, nous donnerons quelques conséquences.

Pour établir ces résultats, nous aurons besoin de quelques rappels. Un treillis vectoriel est un espace vectoriel ordonné E tel que $\sup(x, y)$ existe pour tous $x, y \in E$. A chaque élément $x \in E$, on associe son module $|x| = \sup(x, -x)$, sa partie positive $x^+ = \sup(x, 0)$ et sa partie négative $x^- = (-x)+$. Une partie A du treillis vectoriel E est dite solide si $x \in A$, $y \in E$ et $|y| \leq |x$ impliquent $y \in A$. Un idéal est un sousespace vectoriel solide de E. Le plus petit idéal contenant une partie A de E est appelé l'idéal engendré par A. Si $A = \{x\}$, l'idéal engendré par x est appelé idéal principale et sera note par I_x. On dit qu'une suite généralisée (x_α) est convergente en ordre vers $x \in E$ s'il existe une suite généralisée (y_α) telle que $y_\alpha \downarrow 0$ et $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ pour tout α, où la notation $y_\alpha \downarrow 0$ signié que la suite (y_α) est décroissante, son infimum existe et $\inf(y_\alpha) = 0$. Une bande est un idéal fermé pour l'ordre.

Soit E un treillis vectoriel. Pour tous $x, y \in E$ tels que $x \leq y$, l'ensemble $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ est appelé un intervalle d'ordre. Une partie de E est dite bornée pour l'ordre si elle est contenue dans un intervalle d'ordre.

Une semi-norme p sur un treillis vectoriel est dite de treillis si $x, y \in E$ et $|x| \leq |y|$ impliquent $p(x) \leq p(y)$. Un treillis vectoriel E muni d'une topologie vectorielle τ est dit localement convexe et solide si 0 admet un système fondamental de voisinages convexes et solides.

Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe et solide. La topologie τ est dite de Lebesgue (resp. pré-Lebesgue) si pour toute suite généralisée (x_α) telle que $x_\alpha \downarrow 0$ (resp. pour toute suite (x_n) telle que $0 \leq x_n \uparrow x$) dans E, la suite (x_α) converge vers 0 (resp. la suite (x_n) est de Cauchy) pour la topologie τ, où la notation $x_n \uparrow x$ signifie que la suite (x_n) est croissante et majorée par x.

Si E' est le dual topologique de E, on note par $|\sigma|$ (E, E') la topologie faible absolue définie sur E par la famille des semi-normes de treillis $\{P_f : f \in E'\}$, où $P_f(x) = |f|$ $(|x|)$ pour tout $x \in E$.

Pour plus de détails sur les treillis vectoriels localement convexes et solides, nous renvoyons le lecteur au livre d'Aliprantis et Burkinshaw [1].

§2. LES RÉSULTANTS PRINCIPAUX

Soient $(E, \Im)$ un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé. Une partie A de E est dite quasi précompacte pour l'ordre (resp. précompacte pour l'ordre), si pour tout voisinage U de 0, il existe $x \in E^+$ (resp. $I(A)$) tel que $A \subset [-x, x] + U$, où $E^+ = \{z \in E : 0 \leq z\}$ et $I(A)$ est l'idéal d'ordre engendré par A.

D'après [3], nous savons que un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé $(E, \Im)$,

1- Toute partie précompacte pour l'ordre est quasi précompacte pour l'ordre.

2- Toute partie précompacte pour la topologie $\Im$ est précompacte pour l'ordre.

3- Toute partie quasi précompacte pour l'ordre est bornée pour la topologie $\Im$.

4- Toute partie bornée pour l'ordre est quasi précompacte pour l'ordre.

Rappelons qu'une suite (x_n) d'un treillis vectoriel E est dite disjointe si $\inf(|x_n|, |x_m|) = 0$ losque $n \neq m$.

Avant d'établir nos résultats principaux, nous commençons par montrer quelques préliminaires.

Proposition 2.1. *Soient E un treillis vectoriel et $(x_n)_n$ une suite de E^+, contenue dans l'idéal engendré par un certain $x \in E^+$. Alors il existe une suite positive disjointe $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $0 < u_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve : Par hypothèse, il existe une suite croissante (α_n) dans $\mathbb{R}^+$, et qui tend vers $+\infty$ telle que $x_n \leq \alpha_n x$ pour tout n. Posons

$$u_n = \left(x_{n+1} - (\alpha_{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\alpha_{n+1}} x \right)^+ .$$

Si $0 \leq n \leq m$, alors on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{(\alpha_{m+1})^2} u_m \leq \left(\frac{1}{(\alpha_{m+1})^2} x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{(\alpha_{m+1})^2} \frac{1}{\alpha_{n+1}} x \right)^+ \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha_{m+1}} \frac{1}{\alpha_{m+1}} x_{m+1} - x_{n+1} \right)^+ \leq \left(\frac{1}{\alpha_{m+1}} x - x_{n+1} \right)^+ \leq \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} x - x_{n+1} \right)^+ \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha_n} x + (\alpha_{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{n+1} \right)^+ \leq \left(x_{n+1} - (\alpha_{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\alpha_n} x \right)^- .
\end{aligned}$$

Comme $\left(x_{n+1}-(\alpha_{n+1})^2\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{\alpha_n}x\right)^-$ est orthogonale à u_n, alors $u\wedge u_n=0$. Ce qui montre le résultat.

Remarque 2.2. Notons que

$$0\leq u_n\leq x_{n+1},\quad u_n+\frac{1}{\alpha_n}x\geq\left(x_{n+1}-(\alpha_n)^2\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^+.$$

Proposition 2.3. *Soit $(E,\Im)$ un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet. Soient $(x_n)_{n\geq1}$ une suite positive dans E, $(b_n)_{n\geq1}$ une suite bornée pour la topologie $\Im$ dans E, et $(\alpha_n)_{n\geq1}$ suite dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<+\infty$. Si $\alpha_n x_n\leq b_n$ pour tout $n\geq1$, alors il existe une suite $(z_n)_n$ dans E^+ qui converge vers 0 pour la topologie $\Im$ telle que la suite $(u_n)_n$ définie par*

$$u_n=\left(x_{n+1}-\frac{1}{(\alpha_{n+1})^2}\sum_{k=1}^{n}x_k-z_n\right)^+$$

est disjointe.

Preuve : Posons $z_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\alpha_k b_k$. Si $0\leq n<m$, nous obtenons

$$0\leq(\alpha_{m+1})^2u_m=\left(x_{m+1}(\alpha_{m+1})^2-\sum_{k=1}^{m}x_k-(\alpha_{m+1})^2z_m\right)^+\leq$$

$$\leq\left((\alpha_{m+1})^2x_{m+1}-x_{n+1}\right)^+\leq(\alpha_{m+1}b_{m+1}-x_{n+1})^+\leq\left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k b_k-x_{n+1}\right)^+\leq$$

$$\leq(z_n-x_{n+1})^+\leq\left(z_n-x_{n+1}+\frac{1}{(\alpha_{n+1})^2}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^+=$$

$$=\left(x_{n+1}-\frac{1}{(\alpha_{n+1})^2}\sum_{k=1}^{n}x_k-z_n\right)^-.$$

Comme $\left(x_{n+1}-\frac{1}{(\alpha_{n+1})^2}\sum_{k=1}^{n}x_k-z_n\right)^-$ est orthogonal à u_n, alors suite est dis jointe. D'où le résultat.

Remarque 2.4. Notons que $0\leq\left(x_{n+1}-\frac{1}{(\alpha_{n+1})^2}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^+u_n+z_n$ et que $0\leq u_n\leq x_{n+1}$.

Nous montrons maintenant les résultats principaux de ce papier.

Théorème 2.5. *Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet, et A une partie solide de E engendrée par un borné équilibré B. Si toute suite disjointe de A est convergente vers 0 pour la topologie τ, alors A est précompacte pour l'ordre.*

Preuve : Supposons que la partie A est non précompacte pour l'ordre, il existe alors un voisinage solide W de 0 dans E tel que A est non contenue dans $[-z, z] + W$ pour tout $z \in I(A)$, où $I(A)$ est l'idéal engendré par A. Ceci est équivalent a la propriété suivante :

(1) Pour tout $z \in I(A)$ avec $z \geq 0$, il existe $a \in A$ avec $a \geq 0$ tel que $(a - z)^+ \notin W$.

Soit $0 \leq y_1 \in A$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\alpha_1 y_1 = b_1 \in B$. D'après la propriété (1), il existe $y_2 \in A$ avec $y_2 \geq 0$ tel que

$$\left(y_2 - \frac{1}{(\alpha_1)^2} y_1\right)^+ \in W.$$

De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $\alpha_2 y_2 = b_2 \in B$ et il existe $y_3 \in A$ tel que

$$\left(y_3 - \frac{1}{(\alpha_1)^2}(y_1 + y_2)\right)^+ \notin W.$$

Donc on a des suites $(y_n)_{n \geq 1} \subset A$, $(b_n)_{n \geq 1} \subset B$ et $(\alpha_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}^+$ telles que

$$0 \leq y_n, \; \alpha_n y_n \leq b_n$$

et

$$\left(y_{n+1} - \frac{1}{(\alpha_n)^2} \sum_{i=1}^{n} y_i\right)^+ \notin W. \tag{2}$$

On peut choisir α_n de telle sorte que $\sum_{n \geq 1} \alpha_n < +\infty$. D'après la Proposition 2.3, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est disjointe. Comme $0 \leq u_n \leq y_{n+1}$, alors $u_n \in A$ et donc la suite (u_n) est convergente vers 0 pour la topologie τ. Or la suite (z_n) est convergente vers 0 pour la topologie τ, il s'ensuit que la suite $\left(y_{n+1} - \frac{1}{(\alpha_{n+1})^2} \sum_{i=1}^{n} y_i\right)^+$ est convergente vers 0 pour la topologie τ (la remarque 2.4). Ceci est en contradiction avec la relation (2).

Le résultat suivant donne une caractérisation des topologies pré-Lebesgue d'un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé.

Théorème 2.6. *Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *La topologie τ est pré-Lebesgue.*

2) *Pour toute partie A de E, A est précompacte pour l'ordre si, et seulement si, elle est quasi précompacte pour l'ordre.*

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit A une partie quasi précompacte pour l'ordre de E, elle est donc bornée pour la topologie τ. Soit B l'envellope solide de A dans $\hat{E}$, où $\hat{E}$ est le complété topologique de (E, τ). D'après le Théorème 2.5, qu'il suffit de montrer que toute suite disjointe dans B est convergente vers 0 pour la topologie $\hat{\tau}$ de $\hat{E}$. Soit $(x_n)_n$ toute suite disjointe de B est convergente vers 0 pour la topologie $\hat{\tau}$ une suite disjointe dans B, et U un voisinage convexe et solide de 0 dans E. Il existe alors $y \in (\hat{E})^+$ tel que

$$A \subset [-y, y] + \frac{U}{2}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(|x_n| - |x_n| \wedge y) \in \frac{U}{2}.$$

Comme la suite $(|x_n| \wedge y)$ est convergente vers 0 pour la topologie $\hat{\tau}$ qui est une topologie de Lebesgue, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$ on a

$$|x_n| \wedge y \in \frac{U}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$|x_n| \in \frac{U}{2} + \frac{U}{2} = U.$$

Par conséquent, la suite (x_n) converge vers 0 pour la topologie τ. L'ensemble B et par suite A est précompact pour l'ordre dans $(\hat{E}, \hat{\tau})$. D'où la précompacité pour l'ordre de A dans (E, τ).

2) $\Longrightarrow$ 1) Il suffit de montrer que toute suite disjointe (x_n) dans A telle que $0 \leq x_n \leq x$, est convergente vers 0 pour la topologie τ. Comme $0 \leq x_n \leq x$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est quasi précompacte pour l'ordre, et donc précompacte pour l'ordre. Prenons $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et soit U un voisinage convexe et solide de 0 dans E. Il existe $y \in I(A)$ avec $y \geq 0$ tel que

$$A \subset [-y, y] + \frac{U}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n - x_n \wedge y \in U/2$. Or $y \in I(A)$, donc il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq y \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$.

Si $n > N$, alors $x_n \wedge y = 0$, et donc $x_n \in U/2$ i.e. la suite (x_n) converge vers 0 pour la topologie τ. Par conséquent, la topologie τ est pré-Lebesgue. Ce qui achève la démonstration.

Rappelons qu'un treillis vectoriel E est dit complet pour l'ordre si toute partie non vide majorée de E admet un supremum. Aussi, un élément non nul d'un treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal d'ordre engendré par u coincide avec le sous-treillis vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets.

Comme conséquence du théorème précédent et du corollaire 3.4 de [2], nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.7. Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide et complet. Si le complété de E pour la topologie faible absolue $|\sigma\ (E, E')$ est discret, alors pour toute partie A de E, A est précompacte pour l'ordre si, et seulement si, elle est quasi précompacte pour l'ordre.

Comme conséquence du théorème précédent et de la proposition 3.7 de [2], nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.8. Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide complet et σ-complet pour l'ordre. Si le dual topologique E' est discret, alors pour toute partie A de E, A est précompacte pour l'ordre si, et seulement si, elle est quasi précompacte pour l'ordre.

Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ entre des treillis vectoriels localement convexes et solides est une application linéaire continue ; il est dit positif si $T(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$. Lopérateur $T : E \longrightarrow> F$ est dit précompact pour l'ordre (resp. quasiprécompact pour l'ordre) si l'image par T de toute partie bornée de E est une partie précompacte pour l'ordre (resp. quasiprécompacte pour l'ordre) de F.

D'après le théorème 2.6, on a aussi la conséquence suivante :

Corollaire 2.9. Soient (E, τ) et $(F, \Im)$ des treillis vectoriels localement convexes solides et séparés. Si la topologie $\Im$ est pré-Lebesgue, alors la classe des opérateurs précompactes pour l'ordre coincide avec celle des opérateurs quasi précompactes pour l'ordre.

Enfin, nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.10. *Si (E, τ) est un treillis vectoriel localement convexe solide discret et complet pour l'ordre dont la topologie τ est pré-Lebesgue, alors toute partie A*

précompacte pour l'ordre dans E est précompacte pour la topologie τ.

Preuve : En effet, si A est une partie précompacte pour l'ordre de E, alors pour tout voisinage U de 0 pour la topologie τ dans E, il existe $x > 0$ tel que

$$A \subset [-x, x] + \frac{U}{2}.$$

Comme l'intervalle d'ordre $[-x, x]$ est précompact pour la topologie τ ([1], p. 156), il existe une partie finie $K \subset [-x, x]$ telle que

$$[-x, x] \subset K + \frac{U}{2}.$$

Par suite, $A \subset K + U$, et la partie A est donc précompacte pour la topologie τ.

Comme conséquences, nous obtenons les résultsts suivants :

Corollaire 2.11. Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide discret et complet pour l'ordre dont la topologie τ est pré-Lebesgue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- Toute partie de E est précompacte pour l'ordre.
2- Toute partie de E est précompacte pour la topologie τ.
3- Toute partie de E est quasi précompacte pour l'ordre.
4- Toute partie de E est bornée pour l'ordre.
5- Toute partie de E est bornée pour la topologie τ.

Enń, d'après le corollaire 3.5 de [2], le dual topologique du treillis de Banach l^∞ nest pas discret. Mais on a la question suivante :

Question 2.12. Montrer que pour toute partie A de l', A est précompacte pour l'ordre si, et seulement si, elle est quasi précompacte pour l'ordre.

REFERENCES

1. C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. Locally solid Riesz spaces. Ac. Press, 1978.
2. B. Aqzzouz et R. Nouira, "Sur les opérateurs précompacts positifs", C. R. Math. Acad. Sc. Paris, vol. 337, no. 8, pp. 527 – 530, 2003.
3. A. C. Zaanen. Riesz spaces. II, North Holland Publishing Company, 1983.

Поступила 23 февраля 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 15–36

ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПОЛУГРУППОВЫХ АЛГЕБРАХ

С. А. Григорян и Т. А. Хорькова

Казанский Государственный Энергетический Университет, Россия
E-mail : gsuren@inbox.ru

В данной работе исследуются точечные дифференцирования на полугрупповой алгебре $l^1(S)$ и на алгебре A_S, полученной для замыкания в $\sup_G$-норме. В частности, даются условия совпадения точечного дифференцирования на $l^1(S)$ и на A_S.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A – коммутативная банахова алгебра, а M_S – пространство всех мультипликативных фунционалов на A. Линейный непрерывный функционал ∂ на A называется *точечным дифференцированием* в $m \in M_A$, если $\partial(f \cdot g) = m(f)\partial(g) + m(g)\partial(f)$ для любых f, $g \in A$. Вопрос существования точечного дифференцирования переплетается с различными задачами банаховых алгебр (см. работы Б. Т. Батикяна [2], Дж. Вермера [8], [9]). Особенно интересна связь точечного дифференцирования с аналитичностью пространства M_A (см. А. Браудер [3]). Одним из классов банаховых алгебр, обладающих достаточно богатой аналитической структурой, являются полугрупповые алгебры. Такие алгебры впервые начали изучать Р. Аренс и И. Зингер [1]. Основная цель этих исследований – найти новый подход к изучению аналитических почти-периодических функций, т.е. алгебр функций на компактных абелевых группах инвариантных относительно сдвигов (см. [5] – [7]).

В данной работе исследуются непрерывные дифференцирования двух полугрупповых алгебр. Первая, это банахова алгебра $l^1(S)$ функций на компактной абелевой группе G с абсолютно сходящимся рядом Фурье и со спектром, содержащимся в полугруппе S группы характеров группы G. Вторая – банахова алгебра A_S, полученная с помощью замыкания в $\sup_G$-норме.

Работа состоит из восьми параграфов. В §2 приведены необходимые сведения из теории полугрупповых алгебр. §3 посвящен двузначным весам на полугруппе. Напомним, что весом на полугруппе называется полугрупповой гомоморфизм в полугруппу неотрицательных чисел. Между весами и мультипликативными функционалами существует тесная связь, в частности, точечные дифференцирования определяются весами. В следующих четырех параграфах исследуются точечные дифференцирования полугрупповой алгебры $l^1(S)$. В последнем §8 исследуются точечные дифференцирования алгебры A_S.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть G – компактная связная абелева группа, группа характеров которой изоморфна аддитивной группе Γ. Для каждого $a \in \Gamma$ пусть χ^a – соответствующий характер группы G. Каждую непрерывную функцию f на G можно представить в виде формального ряда Фурье

$$f \sim \sum_{a\in\Gamma} c_a^f \chi^a$$

с коэффициентами Фурье

$$c_a^f = \int_G f\chi^{-a} d\mu,$$

где μ – нормированная мера Хаара группы G. Множество $Sp(f) = \{a \in \Gamma : c_a^f \neq 0\}$ называется *спектром функции* f. Алгебра $C(G)$ всех непрерывных функций на G содержит банахову подалгебру $l^1(\Gamma)$ абсолютно сходящихся рядов Фурье с нормой

$$||f||_1 = \sum |c_a^f|$$

и поточечным произведением на G. Отметим, что коэффициент Фурье $c_a^{f\cdot g}$ произведения функций $f \cdot g$ представляется в виде ряда

$$c_a^{f\cdot g} = \sum_{b+d=a} c_b^f c_d^g.$$

Пусть S – некоторая подполугруппа группы Γ, содержащая единичный элемент $0 \in \Gamma$. Введем следующие обозначения

$$A_S = \{f \in C(G) : Sp(f) \subset S\},$$
$$l^1(S) = \{f \in l^1(\Gamma) : Sp(f) \subset S\}.$$

Алгебры A_S и $l^1(S)$ являются замкнутыми подалгебрами алгебры $C(G)$ в равномерной на G норме.

Полухарактером полугруппы S называется полугрупповой гомоморфизм S в единичный диск D комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Полухарактер φ на S называется *положительным*, если $\varphi(a) \geq 0$ для всех $a \in S$. Каждый мультипликативный функционал $m : l^1(S) \to \mathbb{C}$ определяет полухарактер $\varphi_m : S \to D$, $\varphi_m(a) = m(\chi^a)$, и, обратно, каждый полухарактер $\varphi : S \to D$ задает мультипликативный функционал $m_\varphi : l^1(S) \to \mathbb{C}$:

$$m_\varphi(f) = \sum_{a\in\Gamma} c_a^f \varphi(a).$$

По теореме Аренса-Зингера, отображение $m \to \varphi_m$ задает изоморфизм между пространством M_S максимальных идеалов алгебры $l^1(S)$ и полугруппой $Hom(S, D)$ полухарактеров полугруппы S. Отметим, что M_S также является пространством максимальных идеалов алгебры A_S.

Везде в дальнейшем предполагаем, что полугруппа S порождает группу Γ, т. е. $\Gamma = \{a - b : a, b \in S\}$. В этом случае группа G есть *группа характеров полугруппы* S и граница Шилова алгебр A_S и $l^1(S)$ совпадает с G.

Отображение $\nu : S \to [0, \infty]$ называется *весом* на S, если $\nu(a+b) = \nu(a)+\nu(b)$ для любых a, $b \in S$ и $\nu(0) = 0$. Вес называется конечным, если $\nu(a) < \infty$ для всех $a \in S$ и двузначным, если $\nu(a) = 0$ или $\nu(a) = \infty$.

Множество всех весов на S будем обозначать в дальнейшем через $W(S)$, множество всех конечных конечных весов на S через $W_0(S)$ и множество двузначных весов через $W_\infty(S)$. На $W(S)$ можно задать групповую структуру

$$(\nu_1 + \nu_2)(a) = \nu_1(a) + \nu_2(a)$$

и определить произведение числа $\alpha \geq 0$ на вес $\nu : (\alpha\nu)(a) = \alpha \cdot \nu(a)$. Относительно приведенных операций множества $W(S)$, $W_0(S)$ и $W_\infty(S)$ являются конусами в векторных пространствах, порожденных соответствующими полугруппами.

Каждый вес $\nu \in W(S)$ порождает полухарактер $\exp(iz\nu) : S \to D$, $\operatorname{Im} z > 0$. По теореме о полярном разложении Аренса–Зингера, каждый полухарактер φ можно представить в виде $\varphi = \exp(iz\nu) \cdot \alpha$, где $\nu \in W(S)$, а $\alpha \in G$, $\alpha(a) = \chi^a(\alpha)$. Поэтому, в дальнейшем, нас будут интересовать полухарактеры вида $\exp(iz\nu)$, так как другие полухарактеры порождаются сдвигами экспоненциальных полухарактеров. Если $\nu \in W_\infty(S)$, то полухарактер $\exp(iz\nu)$ принимает на S два значения 0 и 1. Множество двузначных хатрактеров образует подгруппу идемпотентов Id_S в полугруппе $Hom(S, D)$ (p – идемпотент, если $p^2 = p$).

§3. ДВУЗНАЧНЫЕ ВЕСА

Подполугруппа J полугруппы S называется *идеалом*, если $a+b \in J$ для любых $a \in S$ и $b \in J$.

Определение 3.1. Если $a \in J$ для любого $a \in S$ и целого $n > 0$ такого, что $na \in J$, то J называется *изолированным (насыщенным)* идеалом.

Можно показать, что семейство насыщенных идеалов образует полугруппу относительно произведения пересечения.

Лемма 3.1. *Каждый двузначный вес $\nu : S \to \{0, \infty\}$ порождает насыщенный идеал J_ν, и каждый насыщенный идеал J представляется в виде пересечения некоторого семейства насыщенных идеалов вида J_ν.*

Доказательство : Так как $\nu(na) = n\nu(a)$, то из условия $\nu(na) = \infty$ следует, что $\nu(a) = \infty$, следовательно, $J_\nu = \{a \in S : \nu(a) = \infty\}$ – насыщенный идеал. Теперь покажем, что каждый насыщенный идеал J представляется в виде пересечения некоторого семейства насыщенных идеалов вида J_ν. Пусть $a \notin J$, положим $S_a^0 = \{b \in S$: для которых существует элемент $d \in S$ такой что $b + d \in \mathbb{N}a\}$. Пусть $S_a^\infty = S \backslash S_a^0$. Покажем, что S_a^∞ – идеал в S : если $b \in S_a^\infty$ и $d \in S$, то $b+d \notin S_a^0$, так как в противном случае нашлось бы $c \in S$ такое, что $b+d+c \in \mathbb{N}a$. Следовательно $b + (d + c) \in \mathbb{N}a$, т.е. $b \in S_a^0$. Следовательно, $b + d \in S_a^\infty$.

Пусть $\nu : S \to \{0, \infty\}$ такой вес, что $\nu(b) = 0$, если $b \in S_a^0$ и $\nu(b) = \infty$, если $b \in S_a^\infty$. Очевидно, что ν – двузначный вес, $S_a^\infty = J_\nu$, $a \notin J_\nu$ и $J \subset J_\nu$. Таким образом, для любого $a \in S \backslash J$ найдется двузначный вес ν такой, что $a \notin S_a^\infty$. Следовательно,

$$J = \bigcap_{a \in S \backslash J} S_a^\infty,$$

и доказательство завершено.

Пусть $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$ – семейство всех подполугрупп полугруппы S, $0 \in S$. Естественный порядок на $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$ определяется следующим образом : $H_i < H_j$ если и только если $H_i \subset H_j$. Относиельно такого порядка $\{0\}$ является минимальным элементом, а полугруппа S – максимальным элементом. С помощью полугруппы $H \in \{H_i\}_{i \in \Lambda}$ разобьем полугруппу S на две подполугруппы : $S_H^0 = \{b \in S$: существует элемент $d \in S$ такой, что $b + d \in H\}$ и $S_H^\infty = S \backslash S_H^0$.

Лемма 3.2. *Для каждого $H \in \{H_i\}_{i \in \Lambda}$, существует двузначный вес $\nu_H : S \to \{0, \infty\}$ такой, что*

$$S_H^0 = \{a \in S : \nu_H(a) = 0\} \quad \textit{и} \quad S_H^\infty = \{a \in S : \nu_H(a) = \infty\}.$$

Доказательство леммы 3.2 аналогично доказательству леммы 3.1.

Подполугруппа K полугруппы S называется *гранью* если из условия $a+b \in K$ следует $a, b \in K$. Пусть $\{K\}$ – множество всех граней полугруппы S. Покажем, что пересечение двух граней является гранью. Пусть $a+b \in K_1 \cap K_2$, тогда $a, b \in K_1$ и $a, b \in K_2$, и, следовательно, $a, b \in K_1 \cap K_2$. Поэтому семейство граней $\{K\}$ является частично упорядоченным подмножеством упорядоченного множества $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$.

На множестве двузначных весов $W_\infty(S)$ на полугруппе S введем псевдопорядок : $\nu_1 \preceq \nu_2$, если $S^0_{\nu_2} = \{a \in S : \nu_2(a) = 0\}$ содержится в $S^0_{\nu_1}$.

Теорема 3.1. *Отображение $K \to \nu_K$ порождает сохраняющий порядок изоморфизм между гранями полугруппы S и $W_\infty(S)$.*

Доказательство : Если K – грань, то $S^0_K = K$, где $S^0_K = \{a \in S$: для которых существует $b \in S$ такое, что $a+b \in K\}$. Поэтому отображение $K \to \nu_K$ есть сохраняющее порядок инъективное отображение. С другой стороны, S^0_ν есть грань для $\nu \in W_0(S)$. Поэтому $K \to \nu_K$ – сохраняющее порядок биективное отображение. Доказательство завершено.

Везде в дальнейшем будем рассматривать пространство весов $W_\infty(S)$ как частично упорядоченное множество относительно введенного выше порядка.

§4. АНАЛИТИЧНОСТЬ В СПЕКТРЕ ПОЛУГРУППОВЫХ АЛГЕБР

С помощью веса $\nu \in W(S)$ можно определить отображение верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ в M_S. Действительно, для фиксированного $t \in \mathbb{R}$ определим $\alpha^\nu_t = \exp(it\nu)$, $\alpha^\nu_t(a) = \exp(it\nu(a))$ – характер полугруппы S. Отображение $t \to \alpha^\nu_t$ порождает групповой гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ в группу характеров G полугруппы S. Этот гомоморфизм можно продолжить до полугруппового гомоморфизма $z \to \alpha^\nu_z$ $(\alpha^\nu_z(a) = \exp(iz\nu(a)))$ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ в M_B $(Hom(S; D))$:

$$z_1 + z_2 \to \alpha^\nu_{z_1+z_2}, \quad \alpha^\nu_z(f) = \sum c^f_a \exp(iz\nu(a)).$$

Функция $f^\nu(z) = \alpha^\nu_z(f)$ является непрерывной почти-периодической на $\mathbb{C}_+$ и аналитической в $int\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}^0_+$. Обозначим через $D^0 = intD$, а через $\widehat{f}$ – преобразование Гельфанда функции f.

Лемма 4.1. *Каждый вес $\nu \in W(S)$ порождает вложение $\varphi : D^0 \to M_B$ так, что функция $\widehat{f} \circ \varphi(z)$ является аналитической.*

Доказательство : Если $t \to \alpha^\nu_t$ не является периодическим отображением, т.е. из условия $t_1 \neq t_2$ следует $\alpha^\nu_{t_1} \neq \alpha^\nu_{t_2}$, то $\mathbb{R}$ вкладывается в G, и, следовательно, отображение $z \to \alpha^\nu_z$ порождает вложение $\mathbb{C}_+$ в M_S. Дробно-линейное отображение

$w \to i\frac{1+w}{1-w}$ порождает отображение D^0 на $\mathbb{C}^0$. Поэтому отображение $\varphi(w) = \alpha^{\nu}_{i\frac{1+w}{1-w}}$ есть такое вложение открытого единичного диска D^0 в M_S, что

$$\widehat{f} \circ \varphi(w) = \sum_{a \in S} c_a^J \exp \frac{1+w}{1-w} \tau(a)$$

есть анлитическая функция на D^0. В случае, когда отображение $t \to \alpha_t$ – периодическое, образом вещественной прямой $\mathbb{R}$ в G будет единичная окружность S^1 в G , а полоса

$$E = \{z \in \mathbb{C}_+ : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq t_0\},$$

где t_0 – минимальный из положительных периодов отображения $t \to \alpha_t$, перейдет при отображении $z \to \alpha_z$ в единичный диск D. Доказательство завершено.

Определим порядок на $W(S) : \nu_1 < \nu_2$, если существует такой вес $\nu_3 \in W(S)$, что $\nu_2 = \nu_1 + \nu_3$ Зафиксируем вес $\tau \in W(S)$. Пусть $K_\tau = \{\nu \in W(S) : \nu < \alpha\tau$ для некоторого $\alpha > 0\}$. Множество K_τ содержит двузначный вес, порожденный весом τ. Пусть $S_\tau^0 = \{a \in S : \tau(a) < \infty\}$ и $S_\tau^\infty = \{a \in S : \tau(a) = \infty\}$,

$$\widehat{\tau}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a \in S_\tau^0, \\ \infty, & \text{если} \quad a \in S_\tau^\infty, \end{cases}$$

является двузначным весом, порожденным весом τ. Пусть $\widehat{K}_\tau = \{\nu + \widehat{\tau} : \nu \in K_\tau\}$. Очевидно, $\widehat{K}_\tau$ – конус в K_τ и если $\nu + \nu_1 = \nu + \nu_2$ для любых $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \widehat{K}_\tau$, тогда $\nu_1 = \nu_2$, т.е. $\widehat{K}_\tau$ – полугруппа с сокращением. Множество

$$L_\tau = \left\{\nu_1 - \nu_2 : \nu_1, \nu_2 \in \widehat{K}_\tau\right\} \quad ((\nu_1 - \nu_2)(a) = \nu_1(a) - \nu_2(a) \ \text{ для } a \in S_\tau^0)$$

есть векторное пространство над $\mathbb{R}$. Очевидно, $\widehat{K}_\tau$ содержится в L_τ.

Набор весов $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ из $\widehat{K}_\tau$ назовем *линейно независимым*, если они образуют линейно независимое семейство векторов в L_τ.

Определение 4.1. *Порядком* веса τ $(ord(\tau))$ назовем максимальное число линейно независимых весов $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ таких, что $\tau = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$.
Очевидно, $ord(\tau) \leq dim\ L$.

Определение 4.2. Отображение $\psi : D^n \to M_S$ назовем *локальным вложением*, если для любого $z \in D^n$ существует такая окрестность $U \ni z$ в D^n, что $\psi|_U$ есть вложение.

Теорема 4.1. *Пусть $n = ord(\tau)$. Тогда для каждой точки* $\exp i(z_1^0\nu_1 + z_2^0\nu_2 + \ldots + z_n^0\nu_n)$ M_S *существует локальное вложение $\psi \in M_S$ открытого n-мерного диска M_S такое, что $\widehat{f} \circ \psi$ есть n-мерная аналитическая функция для любой $f \in A_S$.*

Доказательство : Определим сначала отображение $\mathbb{C}_+^n = \mathbb{C}_+ \times \ldots \times \mathbb{C}_+$ в M_S, полагая $(z_1, \ldots, z_n) \to \exp i(z_1\nu_1 + \ldots + z_n\nu_n)$, где веса $\nu_1, \ldots, \nu_n$ линейно независимы и $\tau = \nu_1 + \ldots + \nu_n$. Покажем, что это отображение есть локальное вложение. Зафиксируем элемент $a_0 \neq 0$ in S_τ^0 такой, что $\nu_k(a_0) > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Пусть для некоторого $\delta > 0$

$$|t_1\nu_1(a_0) + \ldots + t_k\nu_k(a_0)| < 1 \text{ для всех } |t_k| < \delta, \ k = 1, \ldots, n.$$

Для каждой точки $z^0 \in \mathbb{C}_+^n$, $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ множество всех $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n$ таких, что $|z_k^0 - z_k| < \delta$ для всех $k = 1, \ldots, n$, назовем δ-окрестностью z^0 и обозначим через $U_\delta(z^0)$.

Отображение $(z_1, \ldots, z_n) \to \exp i(z_1\nu_1 + \ldots + z_n\nu_n)$ порождает вложение $U_\delta(z)$ в M_S. Действительно, пусть $\exp i(z_1\nu_1 + \ldots + z_n\nu_n) = \exp i(z_1'\nu_1 + \ldots + z_n'\nu_n)$ для двух наборов $(z_1, \ldots, z_n)$ и $(z_1', \ldots, z_n')$ из $U_\delta(z^0)$. Тогда

$$\exp i((z_1 - z_1')\nu_1(a) + \ldots + (z_n - z_n')\nu_n(a)) = 1.$$

Следовательно, существует такое натуральное число m, что

$$(z_1 - z_1')\nu_1(a) + \ldots + (z_n - z_n')\nu_n(a) = 2\pi m.$$

Покажем, что $m = 0$. Заметим, что

$$|(z_1 - z_1')\nu_1(a) + \ldots + (z_n - z_n')\nu_n(a)| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_k'|\nu_k(a) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_k^0|\nu_k(a) + \sum_{k=1}^{n} |z_k' - z_k^0|\nu_k(a) \leq 2,$$

так как $|z_k - z_k^0| < \delta$ и $|z_k' - z_k^0| < \delta$. Поэтому $m = 0$ и отображение $(z_1, \ldots, z_n) \to \exp i(z_1\nu_1 + \ldots + z_n\nu_n)$ есть локальное вложение и $\exp(i\sum z_k\nu_k(a))$ является n-мерной аналитической функцией для любого $a \in S$.

Замечание. Препятствием для локального вложения аналитического вложения множества размерности больше чем $n = ord(\tau)$, служат элементы полугруппы S_ν^∞.

§5. ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ИДЕМПОТЕНТАХ ДЛЯ АЛГЕБРЫ $l^1(S)$

В данном и следующем параграфах описываются точечные дифференцирования на алгебре $l^1(S)$. Так как пространство максимальных идеалов инвариантно относительно сдвигов, нам достаточно исследовать точечные дифференцирования на положительных полухарактерах полугруппы S. Для начала опишем все точечные дифференцирования в идемпотентах в M_S, т.е. в m_p, $p \in Id_S$.

Итак, каждый элемент $p \in Id_S$ разбивает полугруппу S на две непересекающиеся подполугруппы

$$S_p^0 = \{a \in S : \, p(a) = 1\} \quad \text{и} \quad S_p^\infty = \{a \in S : \, p(a) = 0\},$$

и при этом S_p^∞ – идеал в S. Разобьем полугруппу S_p^∞ на эквивалентные классы. Элемент $a \in S_p^\infty$ называется *p-крайним*, если его нельзя представить в виде суммы двух элементов из S_p^∞. Элемент $a \in S_p^\infty$ называется *сильно p-крайним*, если для любого $d \in S_p^0$ элемент $d + a$ есть p-крайний в S. Заметим, что если a является сильно p-крайним элементом в S, то a – крайний элемент.

Пусть L – множество всех сильно p-крайних точек в S. Покажем, если $a \in L$, $b \in S_p^\infty$ такие элементы полугруппы S, что $c + a = d + b$ для некоторых c, $d \in S_p^0$, тогда $b \in L$. Допустим противное. Пусть b не принадлежит множеству L. Тогда найдутся $l \in S_p^0$ и $k, j \in S_p^\infty$ такие, что $l + b = k + j$. Отсюда $(c + l) + a = d + l + b = (d + k) + j$. Так как $c + l \in S_p^0$ и $d + k \in S_p^\infty$, получаем, что a не является сильно p-крайней точкой. Пришли к противоречию с условием $a \in L$.

Введем понятие *эквивалентности* на множестве L : $a \in L$ эквивалентно $b \in L$ (пишем $a \sim b$), если найдутся d, $c \in S_p^0$ такие, что $d + a = b + c$. Очевидно, что если $a \sim b$ и $b \sim c$, тогда $a \sim c$. Обозначим через $L(a)$ множество элементов из L эквивалентных a. Отметим, что если $d \in S_p^0$ и $b \in L(a)$, тогда $d + b \in L(a)$. Таким образом, множество L можно разбить на эквивалентные классы, каждый из которых инвариантен относительно действия полугруппы S_p^0.

Лемма 5.1. *Пусть c, $b \in S$ такие элементы, что $c + b = a \in L$. Тогда либо $c \in S_p^0$ и $b \in L(a)$, либо, наоборот, $b \in S_p^0$ и $c \in L(a)$.*

Доказательство : Если b, $c \in S_p^0$, тогда $b + c \in S_p^0$, если же b, $c \in S_p^\infty$, тогда $b + c = a$ не является сильно p-крайней точкой, т.е. $a \notin L$. Поэтому, либо $b \in S_p^0$ и $c \in S_p^\infty$, либо, наоборот, $c \in S_p^0$ и $b \in S_p^\infty$. В первом случае, $b \sim a$, а во втором – $c \sim a$.

Теорема 5.1. *Каждый класс сильно p-крайних точек определяет точечное дифференцирование на $l^1(S)$ в точке m_p, $p \in Id_S$.*

Доказательство : Пусть $a_0 \in L$. На базисных элементах $\{\chi^a\}_{a\in S}$ алгебры $l^1(S)$ определим функцию

$$\varphi_0(\chi^a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \in L(a_0), \\ 0, & \text{если} \quad a \notin L(a_0). \end{cases}$$

Эта функция продолжается до линейного непрерывного функционала ∂ на $l^1(S)$:

$$\text{если} \quad f = \sum_{a\in S} c_a^f \chi^a, \quad \text{тогда} \quad \partial(f) = \sum_{a\in S} c_a^f \varphi_0(e_a) = \sum_{a\in L(a_0)} c_a^f.$$

Покажем, что функционал $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ является точечным дифференцированием в мультипликативном функционале m_p алгебры $l^1(S)$, порожденном полухарактером $p \in Id_S$. Сначала проверим функционал ∂ на базисе элементов $\{\chi^a\}_{a\in S}$ алгебры $l^1(S)$. Покажем, что

$$\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = p(a)\partial(\chi^b) + p(b)\partial(\chi^a)$$

или, что то же самое,

$$\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = m_p(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_p(\chi^b)\partial(\chi^a).$$

Возможны два случая : $a + b \in L(a_0)$ и $a + b \notin L(a_0)$. Если $a + b \in L(a_0)$, то $\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = \partial(\chi^{a+b}) = \varphi(a+b) = 1$, и если $a+b \notin L(a_0)$, то $\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = \partial(\chi^{a+b}) = \varphi(a+b) = 0$. Согласно лемме 5.1 можно предположить, что $a \in S_p^0$, $b \in L(a_0)$. Поэтому $m_p(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_p(\chi^b)\partial(\chi^a) = 1$. Пусть $a + b \notin L(a_0)$, Тогда возможны следующие случаи :

1) $a, b \in S_p^0$, 2) $a, b \in S_p^\infty$, 3) $a \in S_p^0$, $b \notin L(a_0)$, 4) $b \in S_p^0$, $b \notin L(a_0)$.

Во всех этих случаях $m_p(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_p(\chi^b)\partial(\chi^a) = 0$. Таким образом, для любых $a, b \in S$ выполняется равенство

$$\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = m_p(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_p(\chi^b)\partial(\chi^a).$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что приведенное равенство распространяется на алгебру $l^1(S)$. Действительно,

$$\partial(f\cdot g) = \partial\left(\sum_{a\in S}\sum_{d+b=a} c_d^f c_b^g \chi^d \chi^b\right) = \sum_{a\in S}\left(\sum_{d+b=a} c_d^f c_b^g \partial(\chi^d\cdot\chi^b)\right)$$
$$= \sum_{a\in S}\left(\sum_{d+b=a} c_d^f c_b^g (m_p(\chi^d)\partial(\chi^b) + m_p(\chi^b)\partial(\chi^d))\right).$$

Лемма 5.2. *Пусть $\partial : l^1 \to \mathbb{C}$ некоторое точечное дифференцирование m_p, $p \in Id_S$. Тогда*

a) $\partial(\chi^a) = 0$ для любого $a \in S_p^0 \cup (S_p^\infty \setminus L)$,

b) $\partial(\chi^a) = \partial(\chi^b)$ для любых $a, b \in L(c)$.

Доказательство : a) Пусть $a \in S_p^0$, i.e. $m_p(\chi^a) = 1$. Тогда

$$\partial(\chi^{na}) = m_p(\chi^{(n-1)a})\partial(\chi^a) + m_p(\chi^a)\partial(\chi^{(n-1)a}) = \partial(\chi^a) + \partial(\chi^{(n-1)a}),$$

и, продолжая этот процесс, получим

$$\partial(\chi^{na}) = n\partial(\chi^a).$$

Так как $\|\chi^{na}\|_1 = 1$ и ∂ – непрерывный линейный функционал, получим $\partial(\chi^a) = 0$. Пусть теперь $a \in S_p^0 \setminus L$. Тогда найдутся b, $c \in S_p^\infty$ такие, что $a = b+c$. Поэтому $\partial(\chi^a) = \partial(\chi^{b+c}) = 0$, так как $m_p(\chi^a) = m_p(\chi^b) = 0$.
b) Пусть $a + c = b + d$, где c, $d \in S_p^0$ и a, $b \in S_p^\infty$. Тогда $\partial(\chi^{a+c}) = m_p(\chi^a)\partial(\chi^c) + m_p(\chi^c)\partial(\chi^a) = \partial(\chi^a)$ и, аналогично, $\partial(\chi^{b+d}) = \partial(\chi^b)$. Следовательно, $\partial(\chi^a) = \partial(\chi^b)$. Доказательство завершено.

Представим множество L сильно p-крайних точек в виде объединения $L = \bigsqcup_{i \in I} L_i$, где каждое множество $L_i = L(a_i)$ есть некоторый класс эквивалентности сильно p-крайних точек. Пусть ∂_i – дифференцирование на $L(a_i)$, порожденное элементом a_i

$$\partial_i = \sum_{b \in L(a_i)} c_b^f.$$

Как хорошо известно, пространство, сопряженное к $l^1(S)$ есть $l^\infty(S)$ – пространство функций, ограниченных на S. Обозначим через $l_p^\infty(S)$ – пространство всех тех функций на S, которые принимают постоянные значения на каждом классе L_i, $i \in I$, сильно p-крайних точек. Отметим, что $l_p^\infty(S)$ изоморфно $l^\infty(I)$. Этот изоморфизм задается отображением

$$h \to \widetilde{h}, \quad h \in l_p^\infty(S), \quad \widetilde{h} \in l^\infty(I) \quad \text{и} \quad \widetilde{h}(i) = h(a_i).$$

Теорема 5.2. *Пространство точечных дифференцирований на $l^1(S)$ в m_p, $p \in Id_S$ совпадает с $l^\infty(I)$.*

Доказательство : С помощью функции $h \in l^\infty(I)$ определим функционал

$$\partial_h = \sum_{i \in I} h(i)\partial_i,$$

где ∂_i дифференцирование, порожденное классом L_i :

$$\partial_i(\chi^a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \in L_i, \\ 0, & \text{если} \quad a \notin L_i. \end{cases}$$

Очевидно $\|\partial_i\| = 1$,

$$\|\partial_h\| = \sup_{\substack{f \in l^1(S) \\ \|f\|_1 = 1}} |\partial_h(f)| = \sup_{i \in I} |h(i)|,$$

и $\partial_h : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование на $l^1(S)$ в m_p.

Обратно, пусть $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование. С помощью леммы 5.2(b) определим функционал $h \in l^\infty(I) :\ h(i) = \partial(\chi^{a_i})$, $a_i \in L_i$. Пусть

$$\partial_h = \sum_{i \in I} h(i)\partial_i$$

Покажем, что $\partial_h = \partial$. Действительно, если $a \in L$, тогда существует i_0 такой, что $a \in L_{i_0}$, и имеет место

$$\partial(\chi^a) = h(i_0) = \partial_h(\chi^a).$$

Если $a \notin L$, то $\partial(\chi^a) = \partial_h(\chi^a) = 0$. Поскольку семейство $\{\chi^a\}_{a \in S}$ – базис в $l^1(S)$, то $\partial = \partial_h$.

§6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА $l^1(S)$ В m_p

Пусть Γ_p – полугруппа группы Γ, порожденная полугруппой

$$S_p^0 = \{a \in S :\ p(a) = 1\},$$

т.е. $\Gamma_p = \{a - b :\ a,\ b \in S_p^0\}$. Очевидно Γ_p есть группа характеров фактор-группы G/G_p, где $G_p = \{\alpha \in G :\ \chi^a(\alpha) = 1$ для всех $a \in S_p^0\}$ – компактная подгруппа группы G.

Определение 6.1. Пусть φ – линейный непрерывный функционал на $l^1(S)$. Регулярная борелевская мера μ на группе G называется представляющей мерой для φ, если $\varphi(f) = \int_G f d\mu$, $\forall f \in l^1(S)$.

Лемма 6.1. *Нормированная мера Хаара τ_p группы G_p является представляющей мерой для мультипликативного функционала m_p.*

Доказательство : Покажем, что

$$m_p(f) = \int_G f d\tau_p,\ f \in l^1(S).$$

Нам достаточно проверить это равенство для всех χ^a, $a \in S$. Если $a \in S_p^0$, то сужение характера χ^a на G_p равно тривиальному характеру. Поэтому,

$$1 = p(a) = m_p(\chi^a) = \int_{G_p} d\tau_p = 1.$$

Если же $a \notin S_p^0$, то сужение характера χ^a группы G на G_p есть нетривиальный характер. Следовательно,

$$0 = p(a) = m_p(\chi^a) = \int_{G_p} \chi^a d\tau_p = 0.$$

Доказательство завершено.

Опишем теперь представляющие меры для дифференцирований ∂ в точке m_p, порожденных эквивалентным классом сильно p-крайних точек. Из построения класса $L(a)$ следует, что условие (b) из леммы 5.2 равносильно условию существования таких c и d в S_p^0, что $c + b = d + a$ или, что то же самое, $\chi^a = \chi^b$ на G_p.

Теорема 6.1. *Мера $\mu_a = \chi^{-a} d\tau_p$ является представляющей мерой для точечного дифференцирования в m_p, порожденного классом $L(a)$.*

Доказательство : Пусть $b \in S_p^0$. Тогда $\chi^b|_{G_p} \equiv 1$ и

$$\int_{G_p} \chi^b d\mu_a = \int_{G_p} \chi^{-a} d\tau_p = 0.$$

Если же $b \in S_p^\infty \backslash L(a)$, тогда $\chi^b|_{G_p} \neq \chi^a|_{G_p}$. Поэтому

$$\int_{g_p} \chi^b d\mu_a = \int_{G_p} \chi^{b-a} d\tau_p = 0.$$

В случае, когда $b \in L(a)$, имеем $\chi^b = \chi^a$ на G_p. Отсюда

$$\int_{G_p} \chi^b d\mu_a = \int_{G_p} d\tau_p = 1.$$

Теперь, применив лемму 5.2, получим, что μ_a – представляющая мера.

§7. ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛУХАРАКТЕРАХ

Пусть теперь m – произвольный мультипликативный функционал на алгебре $l^1(S)$. Тогда найдется полухарактер $\varphi : S \to D$ такой, что $m = m_\varphi$. По теореме о полярном разложении $\varphi = \xi \cdot \alpha$, где $\xi : S \to [0,1]$ – положительный полухарактер, а $\alpha \in G$. В §4 мы показали, что если $\xi \notin Id_S$, то существует вложение $\psi : D_0^n \to M_S$ такое, что $\psi(0) = \xi$ и каждая функция $\widehat{f} \circ \psi(z_1 \cdots z_n)$, $f \in l^1(S)$, является аналитической на D_0^n. Каждая аналитическая функция имеет точечное дифференцирование. Поэтому в m_ξ есть точеное дифференцирование, порожденное аналитичностью. Таким дифференцированием является

$$\frac{\partial}{\partial z_k} f = \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \widehat{f} \circ \psi \right)(0).$$

Покажем, что в точке m_ξ могут существовать и другие точечные дифференцирования. Пусть E_ξ – множество всех аддитивных комплекснозначных функций $h : S_\xi^0 \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\sup_{a\in S_\xi^0} |\xi(a)h(a)| = M_h < \infty.$$

Лемма 7.1. *a) Для любой функции $h \in E_\xi$ линейный функционал*

$$\partial_h(f) = \sum_{a\in S_\xi^0} c_a^f \xi(a)h(a)$$

является точечным дифференцированием на $l^1(S)$ в точке m_ξ.

b) Пусть $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование в m_ξ такое, что $\partial(\chi^a) = 0$, если $a \in S_\xi^0$. Тогда $\partial = \partial_h$ для некоторого $h \in E_\xi$.

Доказательство : а) Из неравенства

$$|\partial_h(f)| \le \sum_{a\in S_\xi^0} |c_a^f| \cdot M_h = M_h \cdot \|f\|_1,$$

следует, что $\partial_h(f)$ – непрерывный линейный функционал на $l^1(S)$. Дла доказательства того, что ∂_h – точечное дифференцирование, заметим, что $\partial_h(\chi^a) = 0$, если $a \in S_\xi^\infty$. Поэтому, если $a,\ b \in S_\xi^0$, то

$$\begin{aligned}\partial_h(\chi^a \cdot \chi^b) &= \xi(a+b)\cdot h(a+b) = \xi(a)\xi(b)h(b) + \xi(b)\xi(a)h(a)\\ &= m_\xi(\chi^a)\partial_h(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a).\end{aligned}$$

В случае, когда $b \notin S_\xi^0$, $\partial_h(\chi^{a+b}) = 0$ и $m_\xi(\chi^a)\partial_h(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a) = 0$.

b) Пусть $h(a) = \frac{\partial(\chi^a)}{\xi(a)}$. Тогда для $a,\ b \in S_\xi^0$

$$h(a+b) = \frac{\partial(\chi^{a+b})}{\xi(a+b)} = \frac{m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a)}{\xi(a)\xi(b)} = h(a) + h(b) \quad (m_\xi(\chi^a) = \xi(a)).$$

Таким образом, h – аддитивный функционал на S_ξ^0 и $\partial = \partial_h$. Доказательство завершено.

Пусть теперь $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – дифференцирование на $l^1(S)$ в m_ξ такое, что $\partial(\chi^{a_0}) \neq 0$ для некоторого $a_0 \in S_\xi^\infty$. Покажем, что a_0 – сильно p-крайняя точка, где p – идемпотент ($p(b) = 1$ на S_ξ^0 и $p(b) = 0$ на S_ξ^∞). Действительно, пусть $c + a_0 = b + d$, где $c \in S_\xi^0$ и $b,\ d \in S_\xi^\infty$. Тогда, с одной стороны, $\partial(\chi^{c+a_0}) = m_\xi(\chi^c)\partial(\chi^{a_0}) + m_\xi(\chi^{a_0})\partial(\chi^c) = \partial(\chi^{a_0}) \neq 0$, а с другой стороны, $\partial(\chi^{b+d}) = m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^d) + m_\xi(\chi^d)\partial(\chi^b) = 0$.

Пусть $L(a_0)$ – множество всех сильно p-крайних точек, эквивалентных точке a_0. Определим функцию $k : L(a_0) \to \mathbb{R}_+$, такую, что $k(a_0) = 1$ и $k(b) = \frac{\xi(c)}{\xi(d)}$, если $b + d = c + a_0$, $(d, c \in S_\xi^0)$. Покажем, что эта функция определена корректно. Действительно, так как S – полугруппа с сокращением, то из условия $b + d_1 = c_1 + a_0$ следует $c_1 + d = d_1 + c$. Поэтому

$$\frac{\xi(d)}{\xi(c)} = \frac{\xi(d_1)}{\xi(c_1)}.$$

Заметим, что $b + l + d = c + l + a_0$, откуда $k(b + l) = \frac{\xi(c+l)}{\xi(d)} = k(b)\xi(l)$.

Лемма 7.2. *Пусть $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование в m_ξ и $\partial(\chi^{a_0}) \neq 0$ для некоторого $a_0 \in S_\xi^\infty$. Тогда*

$$\sup_{b\in L(a_0)} k(b) < \infty.$$

Обратно, если для некоторого $a_0 \in S_\xi^\infty$, выполняется приведенное неравенство, тогда существует точечное дифференцирование $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ в точке m_ξ такое, что $\partial(\chi^{a_0}) \neq 0$.

Доказательство : Пусть $\partial(\chi^{a_0}) \neq 0$. Если $b \in L(a_0)$ и $b+d = a_0+c$ для некоторых $d, c \in S_\xi^0$, тогда из свойства дифференциала следует $\partial(\chi^{b+d}) = \partial(\chi^b)\xi(d)$ и $\partial(\chi^{a_0+c}) = \partial(\chi^{a_0})\xi(c)$. Поэтому $\partial(\chi^b) = \partial(\chi^{a_0})k(b)$. Из непрерывности линейного функционала следует , что семейство $\{|\partial(\chi^b)|\}_{b\in L(a_0)}$ ограничено сверху. Поэтому

$$\sup_{b\in L(a_0)} k(b) < \infty.$$

Обратно, предположим

$$\sup_{b\in L(a_0)} k(b) = M < \infty.$$

Определим функцию

$$\partial(\chi^b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \in S_\xi^0, \\ k(b), & \text{если} \quad b \in L(a_0), \\ 0, & \text{если} \quad b \in S_\xi^\infty \backslash L(a_0), \end{cases}$$

на базисе $\{\chi^b\}_{b\in S}$ пространства $l^1(S)$ и продолжим по линейности до функции $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$, полагая

$$\partial(f) = \sum_{b\in S} c_b^f \partial(\chi^b).$$

Так как

$$|\partial(f)| \leq \sum_{b\in S} |c_b^f| k(b) \leq M\|f\|_1,$$

то $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – ограниченный линейный функционал. Покажем, что ∂ – точечное дифференцирование в m_ξ, т.е. $\partial(f \cdot g) = m_\xi(f)\partial(g) + m_\xi(g)\partial(f)$. Это равенство достаточно доказать для элементов χ^a, $a \in S$. Пусть $a + b \in S_\xi^0$, тогда $\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = \partial(\chi^{a+b}) = 0$, для всех $a, b \in S_\xi^0$. Аналогично, $m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a) = 0$ $(\partial(\chi^b) = \partial(\chi^a) = 0)$. Если $a, b \in S_\xi^\infty$, то $a + b \notin L(a_0)$. Поэтому $\partial(\chi^{a+b}) = 0$, а поскольку $m_\xi(\chi^a) = m_\xi(\chi^b) = 0$, то и в этом случае $m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a) = 0 = \partial(\chi^{a+b}) = 0$. Наконец, случай $a \in S_\xi^0$, $b \in S_\xi^\infty$. Пусть $b \in L(a_0)$. Тогда

$$\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = \partial(\chi^{a+b}) = k(b+a) = k(b)\xi(a),$$

а, с другой стороны,

$$m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_\xi\partial(\chi^a) = m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) = \xi(a)k(b) = k(b+a).$$

Если $b \in S_\xi^\infty \backslash L(a_0)$, то $a + b \in S_\xi^0 \backslash L(a_0)$ и

$$\partial(\chi^a \cdot \chi^b) = 0 = m_\xi(\chi^a)\partial(\chi^b) + m_\xi(\chi^b)\partial(\chi^a),$$

что и завершает доказательство.

Пусть $p \in Id_S$ – идемпотент, порожденный полухарактером ξ :

$$p(a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \in S_\xi^0, \\ 0, & \text{если} \quad a \in S_\xi^\infty. \end{cases}$$

Пусть $\{L_i\}_{i \in I}$ – семейство всех эквивалентных классов сильно p-крайних точек. Для каждого $i \in I$ зафиксируем $a_i \in L_i = L(a_i)$. Определим функцию $k_i : l(a_i) \to \mathbb{R}_+$ аналогично функции k на $L(a_0)$ $(k_i(a_i) = 1)$. Обозначим через $l(I)$ пространство всех таких функций $f : I \to \mathbb{C}$, что

$$\sup |f(i) \cdot M_i| < \infty \quad (0 \cdot \infty = 0), \qquad \text{где} \quad M_i = \sup_{b \in L_i} k_i(b).$$

Линейное пространство $l(I)$ является банаховым пространством в норме

$$||f||_\xi = \sup_{i \in I} |f(i) \cdot M_i|.$$

Для каждого $i \in I_p$ определим дифференцирование $\partial_i : l^1(S) \to \mathbb{C}$, полагая

$$\partial_i(b) = \begin{cases} k_i, & \text{если} \quad b \in L_i, \\ 0, & \text{если} \quad b \in S \backslash L_i. \end{cases}$$

Теорема 7.1. *Пусть $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование на $l^1(S)$ в точке m_ξ. Тогда найдутся некоторые $h \in E_\xi$ и $f \in l(I)$ такие, что*

$$\partial = \partial_h + \sum_{i \in I} f(i)\partial_i.$$

Доказательство : Представим банахову алгебру $l^1(S)$ в виде прямой суммы

$$l^1(S) = l^1(S_\xi^0) + l^1(S_\xi^\infty).$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{\partial} : l^1(S) \to \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\partial}(f) = \begin{cases} \partial(f), & \text{если} \quad f \in l^1(S_\xi^0), \\ 0, & \text{если} \quad f \in S_\xi^\infty. \end{cases}$$

Согласно лемме 7.1(b), найдется такая аддитивная функция $h \in E_\xi$, что $\widetilde{\partial} = \partial_h$. Пусть $\partial_0 = \partial - \partial_h$. Тогда очевидно, $\partial_0(\chi^b) = 0$, если $b \in S_\xi^0$. Пусть $f : I \to \mathbb{C}$ такая функция, что $f(i) = \partial_0(\chi^{a_i})$. Покажем, что $f \in l(I)$. Пусть $b \in L_i$, тогда найдутся c, $d \in S_\xi^0$ такие, что $b+c = d+a_i$. Поскольку $\partial_0(\chi^b \cdot \chi^c) = m_\xi(b)\partial_0(\chi^c) + m_\xi(c)\partial_0(\chi^b) = \partial_0(\chi^b)m_\xi(\chi^c) = \partial_0(\chi^{a_i})m_\xi(\chi^d)$, то $\partial_0(\chi^b) = \partial_0(\chi^{a_i})k_i(b) = f(i)k_i(b)$. Так как ∂ – непрерывный функционал, то

$$\sup_{a \in S} |\partial(\chi^a)| < \infty$$

Отсюда

$$\sup_{i \in I} |f(i)k_i(b)| < \infty,$$

т.е. $f \in l(I)$. Осталось показать, что

$$\partial_0 = \sum_{i \in I} f(i)\partial_i.$$

Но это равенство непосредственно следует из определения ∂_i, $i \in I$.

Следствие 6.4. Пространство всех дифференцирований на алгебре $l^1(S)$ в точке m_ξ изоморфно прямой сумме пространств $E_\xi + l(I)$.

§8. ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРЕ A_S

Из неравенства $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty = \sup_G |f|$ следует, что сужение на $l^1(S)$ точечного дифференцирования, заданного на алгебре A_S есть точечное дифференцирование. В данном прагрaфе укажем на те точечные дифференцирования $l^1(S)$, которые можно продолжить до точечного дифференцирования на A_S и приведем условие на S, при котором точечные дифференцирования на $l^1(S)$ и A_S совпадают. Пусть $\{L_i\}_{i\in I}$ – множество всех классов эквивалентности сильно p-крайних точек.

Лемма 8.1. *Для каждого $i \in I$ точечное дифференцирование ∂_i в m_p продолжается с алгебры $l^1(S)$ до точечного дифференцирования на A_S.*

Доказательство : Согласно теореме 6.1, каждое точечное дифференцирование ∂_i на $l^1(S)$ в точке $m_p \in M_S$ имеет интегральное представление

$$\partial_i(f) = \int_{G_p} f\chi^{-a}d\tau_p, \quad a \in L_i,$$

где $G_p = \{\alpha \in G : \chi(\alpha) = 1 \text{ для всех } \alpha \in S_p^0\}$ и τ_p– нормированная мера Хаара группы G_p. Поэтому

$$|\partial_i(f)| \leq \int_{G_p} |f|d\tau_p \leq \sup_G |f| = \|f\|_\infty,$$

и по теореме Хана-Банаха линейный функционал ∂_i продолжается до линейного функционала $\widetilde{\partial}_i$ на A_S. Поскольку $l^1(S)$ плотно в A_S, то это продолжение единственно. Докажем, что $\widetilde{\partial}_i$ – точечное дифференцирование, для этого зафиксируем $f,\ g \in A_S$ и рассмотрим последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ из $l^1(S)$, сходящиеся в $\|\cdot\|_\infty$-норме к f и g соответственно. Из равенства $\partial_i = \widetilde{\partial}_i$ на $l^1(S)$ имеем

$$\widetilde{\partial}_i(f_ng_n) = m_p(f_n)\widetilde{\partial}_i(g_n) + m_p(g_n)\widetilde{\partial}_i(f_n)$$

Переходя к пределу по n, получим

$$\widetilde{\partial}_i(fg) = m_p(f)\widetilde{\partial}_i(g) + m_p(g)\widetilde{\partial}_i(f),$$

т.е. $\widetilde{\partial}_i : A_S \to \mathbb{C}$ – точечное дифференцирование в m_p. Доказательство завершено.

Если a и b – сильно p-эквивалентные элементы полугруппы S, тогда найдутся такие c и d из S_p^0, что $a+c = b+d$. Следовательно, $\chi^{a+c} = \chi^{b+d}$. Поскольку $\chi^c = \chi^d = 1$ на G_p, то получим, что $\chi^a = \chi^b$ на G_p. Таким образом, семейство характеров $\{\chi^a\}_{a\in L_i}$ переводится в один и тот же характер группы G_p.

Пусть $\{\psi_i\}_{i\in I}$ – множество характеров группы G_p таких, что $\psi_i = \chi^a|_{G_p}$, $a \in L_i$. Обозначим через $M_p(G_p)$ пространство конечных регулярных абелевых мер на G_p, которые можно представить в виде формального ряда Фурье

$$\mu \sim \sum_{i\in I} \alpha_i^\mu \bar{\psi}_i, \quad \text{где} \quad \alpha_i^\mu = \int_{G_p} \psi_i d\mu.$$

Напомним, что под произведением $f \cdot \mu$ функции f и меры μ мы понимаем такую меру ν, что

$$\int_G g d\nu = \int_G g f d\mu.$$

Лемма 8.2. *a) Пространство мер $M_p(G_p)$ – слабо* замкнутое подпространство в пространстве $M(G)$ всех регулярных борелевых мер на G.*

b) Линейная комбинация мер $\psi_i \tau_p$, $i \in I$, слабо плотна в пространстве мер $M_p(G_p)$.*

Доказательство : Для доказательства a) достаточно заметить, что если сеть мер $\{\mu_j\}_{j \in J}$ из $M_p(G_p)$ слабо* сходится к мере μ_0, то для любого характера χ группы G_p справедливо равенство

$$\lim_J \int \chi d\mu_j = \int \chi d\mu_0.$$

Если $\chi \notin \{\bar{\psi}_i\}_{i \in I}$, то этот предел равен нулю, и, следовательно, μ_0 можно представить в виде формального ряда Фурье

$$\mu_0 \sim \sum_{i \in I} c_i^0 \bar{\psi}_i, \quad \text{где} \quad c_i^0 = \int_{G_p} \psi_i d\mu.$$

Пункт b) следует из теоремы 2.2.4 работы [6] (стр. 94), что и завершает доказательство.

Замкнутое множество F в G называется *множеством пика* для алгебры A_S, если существует такая функция $f \in A_S$, что $f(\alpha) = 1$, если $\alpha \in F$ и $|f(\alpha)| < 1$, если $\alpha \notin F$. Пересечение множеств пика называется p-множеством. Если p-множество состоит из одного элемента, то его называют p-точкой. Пусть $\varphi : A_S \to \mathbb{C}$ – непрерывный линейный функционал на A_S и пусть μ такая регулярня мера на G, что

$$\varphi(f) = \int_G f d\mu.$$

Обозначим через *supp* μ носитель меры μ. У функционала может существовать много представляющих мер. Пусть μ_F – сужение меры μ на множество F. Каждая функция $g \in A_S$ порождает функционал $\varphi_g : A_S \to \mathbb{C}$, где $\varphi_g(f) = \varphi(gf)$. Пусть $\{F_j\}_{j \in J}$ – семейство множеств пика для алгебры A_S таких, что $F = \bigcap F_j$ и пусть $\{f_j\}_{j \in J}$ – соответствующее семейство функций, имеющих пик на $\{F_j\}_{j \in J}$.

Лемма 8.3. *Пусть μ – представляющая мера для функционала φ. Если для любой функции f_j, $j \in J$ выполняется равенство*

$$\varphi_{f_j^n} = \varphi$$

для всех целых положительных $n \geq 0$, тогда μ_F – представляющая мера для φ.

Доказателство : Из условия леммы следует, что для любого целого $n > 0$, $\varphi_{f_j^n} = \varphi$ или, что то же самое,

$$\int_G f f_j^n d\mu = \int_G f d\mu, \ f \in A_S.$$

Переходя к пределу, получим

$$\int_G f d\mu_{F_j} = \int_G f d\mu,$$

т.е. μ_{F_j} – представляющая мера для φ. Для завершения доказательства достаточно применить лемму Цорна к частично упорядоченной последовательности $\{\mu_{F_j}\}_{j \in J}$ ($\mu_{F_{j_1}} < \mu_{F_{j_2}}$ если $F_{j_1} \subset F_{j_2}$).

Пусть D_p – пространство всех точечных дифференцирований в точке p для алгебры A_S.

Теорема 8.1. *Существует изометрический изоморфизм между банаховыми пространствами D_p и $M_p(G_p)$.*

Доказательство : Пусть $A_{S_p^0}$ и $A_{S_p^\infty}$ – замкнутые подалгебры алгебры A_S, порожденные полугруппами S_p^0 и S_p^∞ соответственно. Покажем, что $A_S = A_{S_p^0} + A_{S_p^\infty}$. Пусть $f \in A_S$. Тогда функция $f_0(\alpha) = \int_{G_p} f(\alpha\beta) d\tau_p(\beta)$ также принадлежит алгебре A_S : это следует из инвариантности алгебры A_S относительно сдвигов элементами группы G.

Покажем, что функция $f_0(\alpha)$ принадлежит алгебре $A_{S_0^p}$. Для этого достаточно показать, что если $a \in S_p^\infty$, то a-ый коэффициент функции f_0 равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned}\int_G f_0 \bar{\chi}^a d\tau &= \int_G \int_{G_p} f(\alpha\beta) \bar{\chi}^a(\alpha) d\tau_p(\beta) d\tau(\alpha) \\ &= \int_{G_p} \left(\int_G f(\alpha\beta) \bar{\chi}^a(\alpha) d\tau(\alpha) \right) d\tau_p(\beta),\end{aligned}$$

где внутренний интеграл равен $c_a^f \cdot \chi^a(\beta)$ в силу инвариантности меры τ, а сужение характера χ^a на G_p есть нетривиальный характер группы G_p. Поэтому

$$\int_G f_0 \bar{\chi}^a d\tau = c_a^f \int_{G_p} \chi^a(\beta) d\tau_p(\beta) = 0.$$

Следовательно, функция f_0 принадлежит $A_{S_p^0}$.

Точно так же можно проверить, что для любого $a \in S_p^0$ a-ые коэффициенты Фурье функций f и f_0 совпадают. Поэтому функция $f_\infty = f - f_0$ принадлежит $A_{S_p^\infty}$ и $A_S = A_{S_p^0} + A_{S_p^\infty}$.

Пусть $\partial \in D_p$ и μ – представляющая мера функционала ∂. Покажем, что μ_{G_p} – также представляющая мера для ∂. Для этого достаточно показать, G_p – p-множество для A_S. Пусть $\{\gamma_j\}_{j\in J}$ – семейство всех конечных подмножеств полугруппы S_p^0. Каждое конечное множество $\gamma_j = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ определяет множество пика F_j с помощью функции $f_j = \frac{1}{n}(\chi^{a_{j_1}} + \ldots + \chi^{a_{j_n}})$, $F_j = \{\alpha \in G : f_j(\alpha) = 1\}$. Покажем, что $\partial_{f_j^n} = \partial$. Действительно, если $f = f_0 + f_\infty \in A_S$, тогда $\partial(f) = \partial(f_\infty)$ и

$$\begin{aligned}\partial(f_j^n \cdot f) &= \partial(f_j^n(f_0 + f_\infty)) = \partial(f_j^n f_0 + f_j^n f_\infty) = \partial(f_j^n f_\infty)\\ &= m_p(f_j^n)\partial(f_\infty) + \partial(f_j^n)m_p(f_\infty) = \partial(f_\infty).\end{aligned}$$

Следовательно, $\partial_{f_j^n} = \partial$. Так как $G_p = \bigcap F_j$, то, согласно лемме 8.3, получим, что мера μ_{G_p} – представляющая для функции ∂.

Покажем, что $\mu_{G_p} \in M_p(G_p)$. Пусть элемент $a \in S_p^\infty$ такой, что

$$\partial(\chi^a) = \int_{G_p} \chi^a d\mu_{G_p} \neq 0.$$

Покажем, что a – сильно p-крайняя точка, т.е. $a \in L_i$ для некоторого $i \in I$. Действительно, в противном случае $a = b + c$, где b, $c \in S_p^\infty$. Откуда

$$\partial(\chi^a) = \partial(\chi^b\chi^c) = m_p(\chi^b)\partial(\chi^c) + m_p(\chi^c)\partial(\chi^b) = 0,$$

так как $m_p(\chi^b) = m_p(\chi^c) = 0$. Следовательно, $\partial(\chi^a) = \int_{G_p} \psi_i d\mu_{G_p}$ ($\chi^a = \psi_i$ на G_p). Таким образом, мера μ_{G_p} имеет формальный ряд Фурье $\sum_{i\in I} c_i\psi_i$, т.е. $\mu_{G_p} \in M_p(G_p)$.

Одновременно мы показали, что μ_{G_p} – *единственная представляющая мера для точечного дифференцирования* ∂. Действительно, для любой представляющей меры на G_p функционала ∂ i-ый коэффициент Фурье равен $\partial(\chi^a)$, где $a \in L_i$. Так как каждая мера единственным образом определяется своими коэффициентами Фурье, то μ_{G_p} – единственная представляющая мера для дифференцирования ∂.

Покажем, что $\|\partial\| = \|\mu_{G_p}\|$, т.е. нормы линейного функционала ∂ и меры μ равны. Действительно, из интегрального представления

$$\partial(f) = \int_{G_p} f d\mu_{G_p}, \quad f \in A_S$$

следует, что $\|\partial\| \le \|\mu_{G_p}\|$. Допустим $\|\partial\| < \|\mu_{G_p}\|$. Продолжим по теореме Хана-Банаха линейный функционал ∂ на A_S с сохранением нормы до линейного функционала $\widetilde{\partial}$ на $C(G)$. По теореме Рисса найдется мера $\widetilde{\mu} \in M(G)$ такая, что

$$\widetilde{\partial}(f) = \int_G f d\widetilde{\mu} \quad \text{для всех} \quad f \in C(G),$$

и $\|\widetilde{\partial}\| = \|\widetilde{\mu}\|$. Так как сужение $\widetilde{\partial}$ на A_S совпадает с ∂, то сужение меры $\widetilde{\mu}$ на G_p совпадает с мерой μ_{G_p}. Из теории мер имеем

$$\|\partial\| = \|\widetilde{\partial}\| = \|\widetilde{\mu}\| = \|\widetilde{\mu}_{G\setminus G_p}\| + \|\widetilde{\mu_{G_p}}\| \geq \|\widetilde{\mu}_{G_p}\| = \|\mu_{G_p}\|.$$

Пришли к противоречию. Таким образом, $\|\partial\| = \|\mu_{G_p}\|$.

Каждая мера $\mu \in M_p(G_p)$ определеляет линейный функционал ∂ на A_S по правилу

$$\partial(f) = \int_G f d\mu.$$

Покажем, что ∂ есть точечное дифференцирование на A_S. Пусть P_I – линейное пространство функций на G_p, состоящих из конечных комбинаций $\sum_{k=1}^m c_{i_k}\psi_{i_k}$ на $\mathbb{C}$, где ψ_i – характер группы G_p, $i \in I$.

По теореме 6.1 мера вида $f\tau_p$, где $f \in P_I$, является представляющей мерой для некоторого точечного дифференцирования на A_S в точке m_p. Кроме того, для каждого $\mu \in M_p(G_p)$ существует сеть мер $\{f_j\tau_p\}_{j\in J}$, $f_j \in P_I$, *-слабо сходящаяся к мере μ такая, что $\|f_j\tau_p\| \leq \|\mu\|$. Пусть ∂_j – точечное дифференцирование, для которого $f_j\tau_p$ – представляющая мера. Тогда для любого $f \in A_S$,

$$\lim_J \partial_j(f) = \lim_J \int_G f f_j d\tau_p = \partial(f).$$

Откуда

$$\partial(f\cdot g) = \lim_J \partial_j(f\cdot g) = m_p(f)\lim_J \partial_j(g) + m_p(g)\lim_J \partial_j(f) = m_p(f)\partial(g) + m_p(g)\partial(f).$$

Теорема 8.1 доказана.

Abstract. The paper investigates point derivations on semigroup algebra $l^1(S)$ and on algebra A_S, obtained for the closure in $\sup_G$-norm. In particular, the coincidence condition of point derivation on $l^1(S)$ and on A_S is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions". T.A.M.S., vol. 81, pp. 379 – 393, 1956.
2. B. T. Batikyan, "Point derivations on algebraic extension of Banach algebra", Lobachevskii Journal of Math., vol. 6, pp. 33 – 37, 2005.
3. A. Browder, "Point derivations and analytic structure in the spectrum of a Banach algebra", J. Funct. Anal., vol. 7, № 1, pp. 156 – 164, 1971.
4. T. W. Gamelin. Uniform Algebras, 2nd ed., Chelsea, New York, 1984.
5. S. A. Grigoryan, "Generalized analytic functions", Russian Math. Surveys, vol. 49, pp. 1 – 40, 1994.

6. S. A. Grigoryan S. A., Th. V. Tonev, Shift-invariant uniform algebras on groups, Monographie Matematyczne, vol. 68, 2006.
7. H. Helson. Lectures on invariant subspaces, Acad. Press, N. Y., 1964.
8. J. Wermer, "Bounded point derivations of certain Banach algebras", J. Funct. Anal., vol. 1, pp. 28 – 36, 1967.
9. Дж. Вермер, "Банаховы алгебры и аналитические функции", Т. П., стр. 9 – 73.

Поступила 22 июля 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 37–42

ОБ ОПЕРАТОРЕ БИЦАДЗЕ

Г. Арутюнян

Institut for Mathematics, Ossietzky University
Oldenburg, Germany
E-mail : harutyunyan@mathematik.uni-oldenburg.de

В работе дается общее решение краевой задачи Робина для более общих операторов второго порядка с оператором Бицадзе как главной частью.

§1. ЗАДАЧА РОБИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ν – вектор внешней нормали к границе $\partial\mathbb{D}$. Общее решение неоднородного уравнения Бицадзе $w_{\bar{z}\bar{z}} = f$ for $f \in L_1(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ записывается в виде

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\xi d\eta, \tag{1}$$

где φ и ψ – произвольные аналитические функции в $\mathbb{D}$ (см. [1], параграф 5.1). Отсюда получаем

$$w_z(z) = \varphi'(z) + \bar{z}\psi'(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta,$$

$$w_{\bar{z}}(z) = \psi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta.$$

Очевидно, что в нашем случае $\partial_\nu w = z w_z + \bar{z} w_{\bar{z}}$. Поэтому для заданного $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$ из краевого условия Робина (комбинации условий Дирихле и Ньюмана)

$$w + \partial_\nu w = \gamma \quad \text{на} \quad \partial\mathbb{D}$$

следует

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) + 2\overline{z}\psi(z) + \psi'(z) =$$
$$= \gamma(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{2\overline{z}\zeta - (|\zeta|^2+1)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta, \quad |z| = 1. \tag{2}$$

Далее, добавляя обычное краевое условие

$$w_{\overline{z}} + \partial_\nu w_{\overline{z}} = \gamma_1$$

для заданного $\gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, получим

$$\psi(z) + z\psi'(z) = \gamma_1(z) - \overline{z}f(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{\zeta}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta =: \tilde{\gamma}_1(z), \quad |z| = 1. \tag{3}$$

Согласно теореме 7 работы [2], задача Дирихле (3) для аналитической функции $\psi + z\psi'$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \tilde{\gamma}_1(\zeta)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta = 0, \quad |z| < 1, \tag{4}$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \zeta f(\zeta)\left(\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}\right)^2 d\xi d\eta, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

и решение дается с помощью формулы Коши

$$\psi(z) + z\psi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\gamma}_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad |z| < 1.$$

Из этого комплексного дифференциального уравнения получим

$$\psi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\gamma}_1(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta}d\tilde{\zeta}\right\}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \tilde{\gamma}_1(\zeta)\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\tilde{\zeta})\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\zeta}}{(\tilde{\zeta} - \zeta)^2}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta\right\}d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}.$$

Следовательно, так как при $|z| < 1$ внутренний интеграл равен нулю, получаем, что

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta. \tag{6}$$

Подстановка (6) в формулу (2) дает

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) = \gamma(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\}\left\{\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z^2} - \frac{\overline{\zeta}}{z(1 - z\overline{\zeta})}\right\}d\zeta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{2\overline{z}\zeta - (|\zeta|^2 + 1)}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta =: \tilde{\gamma}(z), \quad |z| = 1.$$

Эта задача Дирихле для аналитической функции $\varphi + z\varphi'$ разрешима тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\tilde{\gamma}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta = 0, \quad |z| < 1. \tag{7}$$

Альтернативно, можно воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln(1 - \zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta^2} - \frac{\overline{\tilde{\zeta}}}{\zeta(1 - \zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right\}\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta = -2z\overline{\tilde{\zeta}},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\zeta}\tilde{\zeta} - (|\tilde{\zeta}|^2 + 1)}{(\tilde{\zeta} - \zeta)^2}\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta = \{2\tilde{\zeta}\overline{z} - (|\tilde{\zeta}|^2 + 1)\}\left(\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\tilde{\zeta}}\right)^2,$$

чтобы записать соотношение (7) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}d\zeta - \frac{\overline{z}}{\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\}\overline{\zeta}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\{|\zeta|^2 + 1 - 2\overline{z}\zeta\}\left(\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}\right)^2 d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

и решением будет

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\tilde{\gamma}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Решая дифференциальное уравнение, как показано выше, получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\tilde{\gamma}(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta}d\tilde{\zeta}\right\}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\tilde{\gamma}(\zeta)\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z}d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta} f(\zeta)\}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln(1 - \tilde{\zeta}\overline{\zeta})}{\tilde{\zeta}^2} - \frac{\overline{\zeta}}{\tilde{\zeta}(1 - \tilde{\zeta}\overline{\zeta})}\right\}\frac{\ln(1 - z\overline{\tilde{\zeta}})}{z}d\tilde{\zeta}\right]d\zeta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}\zeta - (|\zeta|^2 + 1)}{(\zeta - \tilde{\zeta})^2}\frac{\ln(1 - z\overline{\tilde{\zeta}})}{z}d\tilde{\zeta}\right]d\xi d\eta.$$

Можно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln\left(1-\tilde{\zeta}\zeta\right)}{\tilde{\zeta}^2}-\frac{\zeta}{\tilde{\zeta}\left(1-\tilde{\zeta}\zeta\right)}\right\}\frac{\ln\left(1-z\overline{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\tilde{\zeta}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}\overline{\zeta}^{k+1}}{k(k+1)}-\frac{\overline{\zeta}}{z}\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)=\frac{\overline{\zeta}}{z}+\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2\overline{\zeta}}{z}\right)\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}\zeta-\left(|\zeta|^2+1\right)}{\left(\zeta-\tilde{\zeta}\right)^2}\frac{\ln\left(1-z\overline{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\tilde{\zeta}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}\zeta-\left(|\zeta|^2+1\right)}{\left(\overline{\tilde{\zeta}}\zeta-1\right)^2}\frac{\ln\left(1-z\overline{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\overline{\tilde{\zeta}}=0.$$

Поэтому

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z}d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right\}\frac{z\overline{\zeta}+\left(1-2z\overline{\zeta}\right)\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z^2}d\zeta. \tag{9}$$

Подставляя (6) и (9) в (1), получим

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\zeta f(\zeta)-\gamma_1(\zeta)\right\}\left\{\frac{\overline{\zeta}}{z}+\frac{|z|^2-2z\overline{\zeta}+1}{z^2}\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right\}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta. \tag{10}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. Краевая задача Робина в единичном диске

$$w_{z\overline{z}}=f,\quad f\in L_1(\mathbb{D},\mathbb{C}),$$

$$w+\partial_\nu w=\gamma,\quad w_{\overline{z}}+\partial_\nu w_{\overline{z}}=\gamma_1,\quad \gamma,\gamma_1\in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}),$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда данные функции f,γ,γ_1 удовлетворяют соотношениям (5) и (8). Решение дается формулой (10).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БИЦАДЗЕ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

В этом параграфе мы дадим общее решение для уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + q(z)w_{z\bar{z}} = f, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{11}$$

где $q(z)$ – измеримая функция и $f \in L_p(\mathbb{D})$, $p > 2$. Предположим, что q удовлетворяет сильному условию эллиптичности

$$|q(z)| \leq q_0 < 1.$$

Обозначим $\rho = w_{\bar{z}\bar{z}}$ и заметим, что согласно параграфу 5.1 работы [1]

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \rho(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\xi\, d\eta, \tag{12}$$

где φ и ψ – аналитические функции в $\mathbb{D}$. Следовательно,

$$w_{z\bar{z}}(z) = \psi'(z) + \Pi\rho(z),$$

где

$$\Pi\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta,$$

и уравнение (11) принимает вид

$$\rho(z) + q(z)\psi'(z) + q(z)\Pi\rho(z) = f(z). \tag{13}$$

Используя свойство П-опеатора (см. параграф 3 работы [3]) функция ρ может быть представлена в виде ряда Ньюмана

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(q\Pi)^k(f - q\psi')(z) =$$

$$= f(z) - q(z)\psi'(z) + q(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k}\int_{\mathbb{D}^k} \frac{f(\zeta_k) - q(\zeta_k)\psi'(\zeta_k)}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{q(\zeta_l)}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2}, \tag{14}$$

где $d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_k d\eta_k$ и $\zeta_0 \equiv z$.

Рассмотрим частный случай $q(z) \equiv \mathrm{const} = c$, $z \in \mathbb{D}$, где (14) представляется в виде

$$\rho(z) = f(z) - c\psi'(z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}c^k\int_{\mathbb{D}}\{f(\zeta_k)-c\psi'(\zeta_k)\}d\xi_k d\eta_k\int_{\mathbb{D}^{k-1}}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_{k-1}d\eta_{k-1}.$$

Используя индукцию, найдем, что

$$\int_{\mathbb{D}^{k-1}}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_{k-1}d\eta_{k-1}=k\pi^{k-1}\frac{\overline{(\zeta_k-z)}^{k-1}}{(\zeta_k-z)^{k+1}}.$$

Отсуда, подставляя значение ρ в (12), получим

$$w(z)=\varphi(z)+\overline{z}\psi(z)+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\{f(\zeta)-c\psi'(\zeta)\}\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi\, d\eta+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{D}^2}\{f(\zeta)-c\psi'(\zeta)\}\frac{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}^{k-1}}{(\zeta-\tilde{\zeta})^{k+1}}\frac{\overline{\tilde{\zeta}-z}}{\tilde{\zeta}-z}d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}d\xi d\eta. \tag{15}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}^{k-1}}{\left(\zeta-\tilde{\zeta}\right)^{k+1}}\frac{\overline{\tilde{\zeta}-z}}{\tilde{\zeta}-z}d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}=\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}\right)^{k+1}. \tag{16}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}^{k-1}}{(\zeta-\tilde{\zeta})}\frac{\overline{\tilde{\zeta}-z}}{\tilde{\zeta}-z}d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}=\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}^{k-1}\left(\frac{1}{\zeta-\tilde{\zeta}}+\frac{1}{\tilde{\zeta}-z}\right)d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}-$$

$$-\frac{1}{\zeta-z}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}^{k}\left(\frac{1}{\zeta-\tilde{\zeta}}+\frac{1}{\tilde{\zeta}-z}\right)d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}=\frac{1}{k(k+1)}\frac{\overline{(\zeta-z)}^{k+1}}{\zeta-z}. \tag{17}$$

Теперь (16) получим при вычислении k-ой производной (17) относительно ζ. Получаем, что (15) принимает вид

$$w(z)=\varphi(z)+\overline{z}\psi(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k+1}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\{f(\zeta)-c\psi'(\zeta)\}\left(\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}\right)^{k+1}d\xi d\eta=$$

$$=\varphi(z)+\overline{z}\psi(z)+\frac{1}{c\pi}\int_{\mathbb{D}}\{f(\zeta)-c\psi'(\zeta)\}\ln\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-z-c\,\overline{(\zeta-z)}}\right)d\xi d\eta.$$

Abstract. The paper gives the general solution of the Robin boundary value problem for more general second order operators with the Bitsadze operator as a main part.

REFERENCES

1. H. Begehr, Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An introductory text, World Scientific, Singapore, 1994.
2. H. Begehr, "Boundary value problems in complex analysis I", Bol. Asoc. Mat. Venezolana, vol. 12, pp. 65 – 85, 2005.
3. I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon, London, 1962.

Поступила 8 Марта 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 43–60

CONORMAL SYMBOLS OF MIXED ELLIPTIC PROBLEMS WITH SINGULAR INTERFACES

Gohar Harutyunyan and B.-W. Schulze

Carl von Ossietzky University, Oldenburg, Germany
E-mail : gohar@mathematik.uni-oldenburg.de
Universität Potsdam, Potsdam, Germany
E-mail : schulze@math.uni-potsdam.de

Mixed elliptic problems are characterized by conditions that have a discontinuity on the boundary interface of codimension 1. Earlier additional interface conditions were studied in the case of smooth interface. The present paper studies a structure used in the case of interfaces with conical singularities, namely, corner conormal symbols of the operators. The main focus is on the second order operators and additional interface conditions that are holomorphic in an extra parameter, in particular on the Zaremba problem.

§1. INTRODUCTION

This paper studies the conormal symbolic structure of mixed elliptic problems when the interface has conical singularities. Let X be the closure of an open bounded set $G \subset \mathbb{R}^d$ with boundary Y subdivided into subsets $Y_\pm$, such that $Y = Y_- \cup Y_+$ and $Y_\pm \subset Y$ are closed, where $Z := Y_+ \cap Y_-$ is a submanifold of Y with conical singularity v and $Z_{reg} := Z \setminus \{v\}$ is of the codimension 1 in Y. Assuming that A is an elliptic differential second order operator in $G = \operatorname{int} X$ with coefficients smooth up to the boundary, we consider the mixed boundary value problem

$$Au = f \quad \text{in} \quad G, \quad T_\pm u = g_\pm \quad \text{on} \quad \operatorname{int} Y_\pm, \tag{1}$$

with boundary operators $T_\pm = \mathrm{r}_\pm B_\pm$, where the differential operators $B_\pm$ of the orders $\mu_\pm$ are given in a neighborhood of $Y_\pm$ in $\mathbb{R}^d$ and satisfy the Shapiro-Lopatinskij condition uniformly up to Z from the respective sides. Here $\mathrm{r}_\pm$ denote the operators of restriction to $\operatorname{int} Y_\pm$.

A well known case is the so called Zaremba problem for the Laplacian $A = \Delta$, possessing Dirichlet/Neumann conditions on the minus/plus side of the boundary. Here the problem is to understand the regularity of solutions and parametrices of the operator $\mathcal{A} = {}^t(A\ T_-\ T_+)$ in suitable weighted Sobolev spaces, both near Z_{reg} and v. This problem has been studied in [5], based on earlier papers [1] and [3] for the case of smooth Z with regularity in standard and weighted edge Sobolev spaces.

In [1], the interface Z is regarded as a smooth edge on the boundary of X. In [5], the regular part Z_{reg} of Z is a smooth edge, v plays the role of a corner point and the elliptic regularity of solutions in weighted corner Sobolev spaces was established. In [5], the operators are described by a principal symbolic hierarchy $\sigma = (\sigma_\psi, \sigma_\partial, \sigma_\wedge, \sigma_c)$, where σ_ψ is the standard homogeneous principal symbol of $\mathcal{A}$, σ_∂ is the pair of boundary symbols on the $\pm$ sides of the boundary, $\sigma_\wedge$ is the edge of the symbol on Z_{reg} and σ_c is the corner conormal symbol.

In the corner Sobolev spaces there are two weights $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$, the $\sigma_\wedge$ ellipticity refers to the "cone weight" γ, while the σ_c ellipticity refers to the corner weight δ. In the Zaremba case the authors proved that for a suitable set of admissible weights γ the ellipticity with respect to σ_c is satisfied for all δ, except for a discrete set of exceptional weights. The complete answer contains extra interface conditions on Z_{reg}, which depend on γ, which quantity is computed.

The present paper is aimed at a more detailed study of the meromorphic corner conormal symbolic structure.

§2. MIXED PROBLEMS IN AN INFINITE CYLINDER

In contrast to the notation in Introduction, we now slightly change the context and consider mixed elliptic problems in an infinite cylinder.

Let $N = \overline{\Omega}$ be the closure of a smooth, bounded domain in $\mathbb{R}^m$ and let $M = 2N$ denote the double of N obtained by gluing together two copies $N_\pm$ of N along the common boundary to a closed compact C^∞ manifold (we identify N with N_+). Further, let $H^s(\mathbb{R} \times M)$ denote the cylindrical Sobolev space on $\mathbb{R} \times M$ of smoothness $s \in \mathbb{R}$.

Let us briefly recall corresponding definitions. The space $L^\mu_{cl}(M; \mathbb{R}^l_\lambda)$ of parameter-dependent pseudo-differential operators on M of order μ contains an element $R^\mu(\lambda)$ which is parameter-dependent elliptic und induces isomorphisms. $R^\mu(\lambda) : H^s(M) \longrightarrow H^{s-\mu}(M)$ for all $s \in \mathbb{R}$ and parameter values $\lambda \in \mathbb{R}^l$. The space $H^s(\mathbb{R} \times M)$ is defined to be the closure of $C_0^\infty(\mathbb{R}, C^\infty(M))$ with respect to the norm

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} \|R^s(\tau)(Fu)(\tau)\|^2_{L^2(M)}\, d\tau \right\}^{1/2},$$

where $R^s(\tau) \in L^s_{cl}(M; \mathbb{R}_\tau)$ is an order reducing element and F is the Fourier transform in $\mathbb{R}$. The space $L^2(M)$ is defined by a fixed Riemannian metric on M. Moreover, let

$$H^s(\mathbb{R} \times \text{int } N) := \{u|_{\mathbb{R}\times\text{int } N} : u \in H^s(\mathbb{R} \times 2N)\}.$$

In order to investigate conormal symbols in a corner situation, we study mixed elliptic problems in an infinite cylinder. To avoid too complicated notation, we assume that X, $Y = \partial X$, $Y_\pm$ and Z are as before, but Z is a C^∞ submanifold of Y of the codimension 1, $Y_- \cup Y_+ = Y$ and $Y_- \cap Y_+ = Z$. Accordingly, we obtain the cylindrical Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R} \times \text{int } X)$ and $H^s(\mathbb{R} \times \text{int } Y_\pm), H^s(\mathbb{R} \times Z)$. We set

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) := e^{-t\delta} H^s(\mathbb{R} \times \text{int } X),$$

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_\pm) = e^{-t\delta} H^s(\mathbb{R} \times \text{int } Y_\pm),$$

and assume that

$$A = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(t, x) D^\alpha_{t,x}$$

is an elliptic differential operator of the second order, with coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R} \times X)$. Besides, $T_\pm := \mathrm{r}_\pm B_\pm$ are the boundary operators, $\mathrm{r}_\pm$ are the restrictions to $\mathbb{R} \times \text{int } Y_\pm$ of the differential operators

$$B_\pm = \sum_{|\beta| \le \mu_\pm} b_{\beta,\pm}(t, x) D^\beta_{t,x}$$

where the coefficients $b_{\beta,\pm} \in C^\infty(\mathbb{R} \times U_\pm)$ for some open neighbourhoods $U_\pm$ of $Y_\pm$. We assume that the boundary operators $T_\pm$ are elliptic on $Y_\pm$ with respect to A, i.e. they satisfy the Shapiro-Lopatinskij condition uniformly up to Z from the respective $\pm$ sides. Under suitable assumptions on the coefficients for $|t| \longrightarrow \infty$, for any fixed δ and for all $s \in \mathbb{R}, s > \max\{\mu_\pm + \frac{1}{2}\}$ we obtain continuous operators

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ T_- \\ T_+ \end{pmatrix} : H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \longmapsto \begin{pmatrix} H^{s-2,\delta-2}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_- - \frac{1}{2},\delta-\mu_-}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_+ - \frac{1}{2},\delta-\mu_+}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_+) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

We compare (2) with the mixed boundary value problem on the infinite, stretched cone $(\text{int } X)^\wedge = \mathbb{R}_+ \times \text{int } X \ni (r, x)$ obtained by substituting the diffeomorphism $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$, $t \longrightarrow e^{-t} = r$. Assuming that M is a closed, compact C^∞ manifold of the dimension d, we write

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(M^\wedge), \quad s, \gamma \in \mathbb{R}, \quad M^\wedge := \mathbb{R}_+ \times M \ni (r, x),$$

for the completion of the space $C_0^\infty(\mathbb{R}_+, C^\infty(M))$ with respect to the norm

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{d+1}{2}-\gamma}} \|R^s(\Im \mathrm{w}) M_{r\to\mathrm{w}} u(\mathrm{w})\|^2_{L^2(M)}\, d\mathrm{w} \right\}^{1/2},$$

where $M_{r\to\mathrm{w}}$ is the Mellin transform

$$M_{r\to\mathrm{w}} u(\mathrm{w}) = \int_0^\infty r^{\mathrm{w}-1} u(r)\, dr$$

on $u(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, C^\infty(M))$ (which function is holomorphic in w), $\Gamma_\beta := \{\mathrm{w} \in \mathbb{C} : \Re \mathrm{w} = \beta\}$, and $R^s(\tau) \in L^s_{cl}(M; \mathbb{R}_\tau)$ is an order reducing family of order s. Further, assuming that X is a compact C^∞ manifold with C^∞ boundary ∂X, we define

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}((\text{int } X)^\wedge) := \left\{ u|_{(\text{int } X)^\wedge} : u \in \mathcal{H}^{s,\gamma}((2X)^\wedge) \right\},$$

where $2X$ is the double of X, obtained by gluing two copies $X_\pm$ along the common boundary ∂X, where X_+ is identified with X. Then the mapping $v(t, x) \longmapsto u(r, x)$ as defined by $u(e^{-t}, x) = v(t, x)$ induces an isomorphism $H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \longmapsto \mathcal{H}^{s,\gamma}((\text{int } X)^\wedge)$, where $\gamma = \delta + \frac{d+1}{2}$ and $d = \dim X$. Consequently, the operator A takes the form

$$\mathrm{A} := r^{-2} \sum_{j=0}^{2} \mathrm{a}_j(r)(-r\partial_r)^j,$$

i.e. turns to be a Fuchs type differential operator on the infinite, stretched cone $(\text{int } X)^\wedge = \mathbb{R}_+ \times \text{int } X$, possessing coefficients $\mathrm{a}_j \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathrm{Diff}^{2-j}(X))$. Besides, the boundary operators are transformed into

$$\mathrm{T}_\pm := \mathrm{r}_\pm \mathrm{B}_\pm, \quad \text{where} \quad \mathrm{B}_\pm := r^{-\mu_\pm} \sum_{k=0}^{\mu_\pm} \mathrm{b}_{k,\pm}(r)(-r\partial_r)^k,$$

with coefficients $\mathrm{b}_{k,\pm} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Diff}^{\mu_\pm - k}(U_\pm))$, where $U_\pm$ is as above. Assuming that the coefficients a_j and $\mathrm{b}_{k,\pm}$ are independent of r for r large enough, we obtain the continuous operators

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{T}_- \\ \mathrm{T}_+ \end{pmatrix} : \mathcal{H}^{s,\gamma}((\text{int } X)^\wedge) \longmapsto \begin{matrix} \mathcal{H}^{s-2,\gamma-2}((\text{int } X)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\mu_- -\frac{1}{2},\gamma-\mu_- -\frac{1}{2}}((\text{int } Y_-)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\mu_+ -\frac{1}{2},\gamma-\mu_+ -\frac{1}{2}}((\text{int } Y_+)^\wedge) \end{matrix}, \tag{3}$$

$$s \in \mathbb{R}, \quad s > \max\left\{\mu_\pm + \frac{1}{2}\right\}.$$

The operator (3) represents a mixed boundary value problem in a cone $(\text{int } X)^\wedge$ with a subdivision of $\partial X^\wedge$ into $Y_\pm^\wedge$, where the interface $Z^\wedge$ has conical singularities at $r = 0$. According to the operator calculus on manifolds with conical points, the operator (3) has a conormal symbol defined as the holomorphic in $\mathbf{w} \in \mathbf{C}$ operator family

$$\sigma_{\mathrm{C}}(\mathfrak{A})(\mathbf{w}) := \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{C}}(\mathbf{A}) \\ \sigma_{\mathrm{C}}(\mathbf{T}_-) \\ \sigma_{\mathrm{C}}(\mathbf{T}_+) \end{pmatrix}(\mathbf{w}) : H^s(\text{int } X) \longmapsto \begin{matrix} H^{s-2}(\text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_- - \frac{1}{2}}(\text{int } Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_+ - \frac{1}{2}}(\text{int } Y_+) \end{matrix}$$

where

$$\sigma_{\mathrm{C}}(\mathbf{A})(\mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{2} \mathbf{a}_j(0)\mathbf{w}^j \quad \text{and} \quad \sigma_{\mathrm{C}}(\mathbf{T}_\pm)(\mathbf{w}) = \mathrm{r}_\pm \sum_{k=0}^{\mu_\pm} \mathbf{b}_{k,\pm}(0)\mathbf{w}^k.$$

§2. REDUCTION TO THE BOUNDARY

Now consider another boundary operator :

$$\mathbf{T} = \mathrm{r}\mathbf{B}, \quad \text{where} \quad \mathbf{B} = r^{-\mu} \sum_{k=0}^{\mu} \mathbf{b}_k(r)(-r\partial_r)^k,$$

where the coefficients $\mathbf{b}_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathrm{Diff}^{\mu-k}(U))$ for a neighbourhood U of Y. Assuming as above that $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_k$ are independent of r for r large enough, we conclude that the operator

$$\mathbb{D} := \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{2} \mathbf{a}_j(r)(-r\partial_r)^j \\ \mathrm{r}\sum_{k=0}^{\mu} \mathbf{b}_k(r)(-r\partial_r)^k \end{pmatrix} : \mathcal{H}^{s,\gamma}((\text{int } X)^\wedge) \longmapsto \begin{matrix} \mathcal{H}^{s-2,\gamma}((\text{int } X)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\mu-\frac{1}{2},\gamma}(Y^\wedge) \end{matrix} \tag{4}$$

represents a boundary value problem on $X^\wedge$ for any $\gamma, s \in \mathbb{R}$, $s > \mu + \frac{1}{2}$.

Let $\mathbf{T}$ satisfy the Shapiro-Lopatinskij condition with respect to $\mathbf{A}$ (in the Fuchs type sense, cf. [6]). Then the conormal symbol

$$\sigma_{\mathrm{C}}(\mathbb{D})(\mathbf{w}) := \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{2} \mathbf{a}_j(0)\mathbf{w}^j \\ \mathrm{r} \sum_{k=0}^{\mu} \mathbf{b}_k(0)\mathbf{w}^k \end{pmatrix} \tag{5}$$

is an operator-valued function holomorphic in $\mathbf{w} \in \mathbf{C}$, which defines a parameter-dependent elliptic family of boundary value problems on X

with the parameter $\tau = \Im \mathrm{w}$. Hence, for every $c \le c'$ there is a countable set $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ with finite intersection $\mathbf{D} \cap \{\mathrm{w} \in \mathbf{C} : c \le \Re \mathrm{w} \le c'\}$, such that the operators (5) define the isomorphisms

$$\sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{D})(\mathrm{w}) : H^{s}(\text{int } X) \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2}(\text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu-\frac{1}{2}}(Y) \end{array}$$

for all $\mathrm{w} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$ and all sufficiently large $s \in \mathbb{R}$. The main purpose of the present study is to determine admissible corner weights of the mixed problems, therefore, for simplicity we assume that the coefficients a_j and b_k do not depend on r. Hence for all sufficiently large $s \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{D} = \mathrm{op}_M^{\gamma-\frac{d}{2}}(\sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{D}))$$

(4) reduces to isomorphisms, such that $\Gamma_{\frac{d+1}{2}-\gamma} \cap \mathbf{D} = \emptyset$ with $\Gamma_\beta := \{\mathrm{w} \in \mathbf{C} : \mathrm{w} = \beta + i\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$. We have

$$\mathrm{op}_M^{\gamma-\frac{d}{2}}(\sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{D})) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\frac{d+1}{2}-\gamma}} \int_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^{-\mathrm{w}} \sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{D})(\mathrm{w}) u(r') \frac{dr'}{r'} d\mathrm{w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^{-\frac{d+1}{2}+\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^{-i\tau} \sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{D}) \left(\frac{d+1}{2} - \gamma + i\tau\right) (r')^{\frac{d+1}{2}-\gamma} u(r') \frac{dr'}{r'} d\tau.$$

As noted above, the transformation $u(r,x) \longmapsto u(e^{-t},x)$ induces an isomorphism $\mathcal{H}^{s,\frac{d+1}{2}}(X^\wedge) \longmapsto H^s(\mathbb{R} \times \text{int } X)$ for all $s \in \mathbb{R}$. Hence we come to an operator

$$\mathcal{D} := \mathrm{op}^\delta(|\mathfrak{d}) = F^{-1}\mathfrak{d}(w)F : H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R} \times Y), \end{array} \tag{6}$$

where $\mathfrak{d}(w) := {}^{t}(\mathfrak{e}(w)\,\mathfrak{t}(w)) = \sigma_{\mathbf{C}}(\mathcal{D})(\mathrm{w}), \mathrm{w} = iw$ is an isomorphism for all $\delta \in \mathbb{R}$ such that $I_\delta \cap D = \emptyset$ for $I_\beta := \{w \in \mathbb{C} : \Im w = \beta\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $D = \{w \in \mathbb{C} : iw \in \mathbf{D}\}$.

For a compact C^∞ manifold M, by $L^\mu_{cl}(M;\mathbb{R}^l)$ we denote the space of all classical pseudo-differential operators of order $\mu \in \mathbb{R}$ on M depending on a parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Moreover, for a Fréchet space F and an open set $U \subseteq \mathbb{C}$ by $\mathcal{A}(U,F)$ we denote the space of all holomorphic functions in U with values in F.

We now employ the fact that for every constants $c \le c'$ there exists a holomorphic operator function

$$\mathrm{r}(w) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}, L^{s-\mu-\frac{1}{2}}_{cl}(Y)),$$

such that for every $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{r}(\tau + i\beta) \in L_{cl}^{s-\mu-\frac{1}{2}}(Y;\mathbb{R}_\tau)$$

uniformly in compact β-intervals and for any fixed $s \in \mathbb{R}$, all $\tau \in \mathbb{R}$ and all $c \leq \beta \leq c'$

$$\mathrm{r}(\tau + i\beta) : H^{s-\mu-\frac{1}{2}}(Y) \longmapsto L^2(Y)$$

is a family of isomorphisms. Using this, one can in particular obtain an isomorphism

$$\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}) : H^{s-\mu-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R} \times Y) \longmapsto H^{0,\delta}(\mathbb{R} \times Y), \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

We choose $\mathrm{r}(w)$ as follows. Let $\alpha \in \mathbb{R}$ (α plays the role of $s - \mu - \frac{1}{2}$) and fix a collar neighbourhood $\cong [-1,1] \times Z$ of the interface $Z \subset Y$. Choose local coordinates $(n,z) \in [-1,1] \times U$ for an open set $U \subset \mathbb{R}^{d-2}$ with covariables $(\nu,\zeta) \in \mathbb{R}^{d-1}$ and form a symbol

$$p_-^\alpha(n,\nu,\zeta,\lambda) := \left(f\left(\frac{\nu}{C\langle\zeta,\lambda\rangle}\right)\langle\zeta,\lambda\rangle - i\nu\right)^{\alpha\omega(n)} \langle\nu,\zeta,\lambda\rangle^{\alpha(1-\omega(n))}, \qquad (7)$$

where $\omega \in C_0^\infty(-1,1)$ is a real-valued function, $0 \leq \omega \leq 1$, that equals 1 in a neighbourhood of the origin, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ and $f(\nu) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is a function such that $f(0) = 1$ and $\mathrm{supp}\, F^{-1}f \subset \mathbb{R}_-$ (with Fourier transform on n-axis). Then we get $p_-^\alpha(n,\nu,\zeta,\lambda) \in S_{cl}^\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1+l}_{\nu,\zeta,\lambda})$, where p_-^α is elliptic with respect to the covariable (ν,ζ,λ) for $C > 0$ sufficiently large. After that, on Y we define a parameter-dependent elliptic operator $\mathrm{p}_-^\alpha(\lambda) \in L_{cl}^\alpha(Y;\mathbb{R}^l)$ by taking $p_-^\alpha(n,\nu,\zeta,\lambda)$ to be the local amplitude functions in the collar neighbourhood of Z and $\langle\eta,\lambda\rangle^\alpha$ outside that neighbourhood and assuming that η is the covariable on Y.

One can find in [3] the precise standard construction in terms of open coverings of Y by charts, subordinate partitions of unity, etc. Similar to that, starting from $p_+^\alpha(n,\nu,\zeta,\lambda)$ defined as the complex conjugate of (7), we obtain a family $\mathrm{p}_+^\alpha(\lambda) \in L_{cl}^\alpha(Y;\mathbb{R}^l)$. By virtue of the specific properties of the symbol (7) in a neighbourhood of Z we come to the following theorems, where $\mathrm{e}_+^s : H^s(\mathrm{int}\ Y_+) \longmapsto H^s(Y)$ denotes a continuous operator such that $\mathrm{r}_+\mathrm{e}_+^s = \mathrm{id}_{H^s(\mathrm{int}\ Y_+)}$, and for $s > -\frac{1}{2}$ $\mathrm{e}_+ : H^s(\mathrm{int}\ Y_+) \longmapsto H^{\min(s,0)}(Y)$ is the operator of extension by 0 to the opposite side of Y.

Theorem 2.1 *There is a constant $M > 0$ such that the operators*

$$\mathrm{p}_-^\alpha(\lambda) : H^s(\mathrm{int}\ Y) \longmapsto H^{s-\alpha}(Y)$$

and

$$r_+ p_-^\alpha(\lambda) e_+^s : H^s(\text{int } Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_+)$$

are isomorphisms for all $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $|\lambda| \geq M$. For $s > -\frac{1}{2}$ and for all $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $|\lambda| \geq M$,

$$r_+ p_-^\alpha(\lambda) e_+ : H^s(\text{int } Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_+)$$

is a family of isomorphisms. Besides, $(r_+ p_-^\alpha(\lambda) e_+)^{-1} = r_+ (p_-^\alpha)^{-1}(\lambda) e_+$. The similar statements hold for $p_+(\lambda)$ by replacing the signes $+$ and $-$.

Denoting $L_{cl}^\alpha(Y; \mathbb{C} \times \mathbb{R}^l)$ the space of all $h(w, \lambda) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}, L_{cl}^\alpha(Y; \mathbb{R}_\lambda^l))$ such that for all $\beta \in \mathbb{R}$

$$h(\tau + i\beta, \lambda) \in L_{cl}^\alpha(Y; \mathbb{R}_{\tau,\lambda}^{1+l})$$

uniformly in compact β-intervals, we replace the parameter λ by $(\tau, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+l}$ and consider the corresponding families $p_\pm^\alpha(\tau, \lambda)$. Then we choose some $\psi(b) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ such that $\psi(b) \equiv 1$ in a neighbourhood of $b = 0$ and setting

$$r_\pm^\alpha(w, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{-iwb} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \psi(b) e^{i\tau b} p_\pm^\alpha(\tau, \lambda) đ\tau \right\} db \tag{8}$$

we obtain an operator function in $L_{cl}^\alpha(Y; \mathbb{C} \times \mathbb{R}^l)$. The following theorem is proved in [4].

Theorem 2.2. *For every two constants $c \leq c'$ there exists an $M > 0$ such that*

$$r_\pm^\alpha(w, \lambda) : H^s(Y) \longmapsto H^{s-\alpha}(Y),$$

and

$$r_+ r_-^\alpha(w, \lambda) e_+^s : H^s(\text{int } Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_+),$$

$$r_- r_+^\alpha(w, \lambda) e_-^s : H^s(\text{int } Y_-) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_-,)$$

are isomorphisms for all $c \leq \Im w \leq c'$ and all $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $|\lambda| \geq M$. Besides, for $s > -\frac{1}{2}$

$$r_+ r_-^\alpha(w, \lambda) e_+ : H^s(\text{int } Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_+),$$

$$r_- r_+^\alpha(w, \lambda) e_- : H^s(\text{int } Y_-) \longmapsto H^{s-\alpha}(\text{int } Y_-)$$

are families of isomorphisms for the mentioned values of w and λ.

We use the notation $e_\pm^s$ and $e_\pm$ for the corresponding extension operators

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times (\text{int } Y_\pm)) \longmapsto H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times Y), \quad s \in \mathbb{R}$$

and

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times (\text{int } Y_\pm)) \longmapsto H^{\min(s,0),\delta}(\mathbb{R} \times Y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad s > -1/2$$

respectively, where $\delta \in \mathbb{R}$ is arbitrary. Then Theorem 2.2 implies the following corollary.

Corollary 2.3. Let $\mathrm{r}_-(w,\lambda)$ denote the operator function as in Theorem 2.2. Then for any $\delta, s \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_-^\alpha)(\lambda) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}\times Y) \longmapsto H^{s-\alpha,\delta}(\mathbb{R}\times Y),$$

$$\mathrm{r}_+\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_-^\alpha)(\lambda)\mathrm{e}_+^s : H^{s,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y_+),$$

and for any $\delta, s \in \mathbb{R}$, $s > -1/2$, the operators

$$\mathrm{r}_+\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_-^\alpha)(\lambda)\mathrm{e}_+ : H^{s,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y_+) \longmapsto H^{s-\alpha,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y_+)$$

are isomorphisms for all $|\lambda| \geq M$ and suitably chosen $M > 0$. Similar relations obtained by an interchange of the signes + and − are also valid.

We fix some $\lambda_1 \in \mathbb{R}^l$ $(|\lambda_1| > M)$ and set $\mathrm{r}_\pm^\alpha(w) := \mathrm{r}_\pm^\alpha(w,\lambda_1)$. It is known that there exists a meromorphic inverse $(\mathrm{r}_\pm^\alpha)^{-1}(w)$ and

$$\mathrm{op}^\delta((\mathrm{r}_\pm^\alpha)^{-1}) = (\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_\pm^\alpha))^{-1}.$$

Similarly, the operators

$$\mathrm{r}_+\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_-^\alpha)\mathrm{e}_+^s, \quad \mathrm{r}_+\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_-^\alpha)\mathrm{e}_+, \quad \mathrm{r}_-\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_+^\alpha)\mathrm{e}_-^s, \quad \mathrm{r}_-\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_+^\alpha)\mathrm{e}_-$$

can be inverted.

Using the operator (6) we pass to reduction of orders to 0 on the boundary. As above, we write $\partial(w) := {}^{\mathrm{t}}(e(w)\ \mathrm{t}(w))$, $\alpha = s - \mu - \frac{1}{2}$ and to be concrete, form

$$\mathrm{diag}\,(1, \mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}_+^\alpha))\mathrm{op}^\delta(\partial) = \mathrm{op}^\delta\begin{pmatrix} e \\ \mathrm{r}_+^\alpha \mathrm{t}\end{pmatrix} : H^{s,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ X) \longmapsto \begin{matrix} H^{s-2,\delta}(\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ X) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y). \end{matrix}$$

Along with the restriction operators $\mathrm{r}_\pm$ to $\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y_\pm$ and the extensions $\mathrm{e}_\pm$ by zero to $\mathbb{R}\times \mathrm{int}\ Y$ we have an isomorphism

$$(\mathrm{e}_- \quad \mathrm{e}_+) : \begin{matrix} L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_+) \end{matrix} \longmapsto L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y)$$

with the inverse ${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{r}_- \quad \mathrm{r}_+)$. Similarly as in the calculus of pseudo-differential boundary value problems, the operator function $\mathfrak{d}(w)$ has a meromorphic inverse $\mathfrak{d}^{-1}(w) =: (\mathrm{g}(w)\ \mathrm{k}(w))$.

Remark 2.4. It is known that the Laurent coefficients of $\mathfrak{d}^{-1}$ are smoothing operators of finite rank, more precisely, smoothing in the calculus of boundary value problems on X with the transmission property at Y.

Let us now form the operator

$$\mathcal{L} := (\mathrm{op}^\delta(\mathrm{g})\ \mathrm{op}^\delta(\mathrm{k}(\mathrm{r}^\alpha_\mp)^{-1})\mathrm{e}_-\ \mathrm{op}^\delta(\mathrm{k}(\mathrm{r}^\alpha_\mp)^{-1})\mathrm{e}_+) : \begin{matrix} H^{s-2,\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} X) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_+) \end{matrix} \longmapsto H^{s,\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} X),$$

which is an isomorphism (recall that $\alpha = s-\mu-1/2$). It is evident that multiplying $\mathcal{L}$ by $\mathcal{A}$ from the left (cf. formula (2)) we obtain the operator

$$\mathcal{AL} : \begin{matrix} H^{s-2,\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} X) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_+) \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} H^{s-2,\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_--\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_+-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R}\times \operatorname{int} Y_+) \end{matrix} \tag{9}$$

By virtue of $\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1} = \operatorname{diag}(1,1)$ we obtain the operator $\mathcal{AL}$ in the form

$$\mathcal{AL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T_-G & T_-KR^{-1}\mathrm{e}_- & T_-KR^{-1}\mathrm{e}_+ \\ T_+G & T_+KR^{-1}\mathrm{e}_- & T_+KR^{-1}\mathrm{e}_+ \end{pmatrix},$$

where we employ the abbreviation $G := \mathrm{op}^\delta(\mathrm{g})$, $K := \mathrm{op}^\delta(\mathrm{k})$, $R := \mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}^\alpha_\mp)$, $\alpha = s-\mu-\frac{1}{2}$. We also want to reduce the Sobolev spaces on the $\mathbb{R}\times \operatorname{int} Y_\mp$ on the right of (9) to zero. To this end we take the elements $\mathrm{r}^{\alpha_\mp}_\pm(w)$, $\alpha_\mp = s-\mu_\mp-\frac{1}{2}$ and for $s > \max\{\mu_+,\mu_-\}$ set

$$R_- := \mathrm{r}_-\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}^{\alpha_-}_+)\mathrm{e}_-, \quad R_+ := \mathrm{r}_+\mathrm{op}^\delta(\mathrm{r}^{\alpha_+}_-)\mathrm{e}_+.$$

Setting $\mathcal{R} := \operatorname{diag}(1, R_-, R_+)$, and multiplying (9) from the left by $\mathcal{R}$ we get an operator

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{RAL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ R_-T_-G & R_-T_-KR^{-1}\mathrm{e}_- & R_-T_-KR^{-1}\mathrm{e}_+ \\ R_+T_+G & R_+T_+KR^{-1}\mathrm{e}_- & R_+T_+KR^{-1}\mathrm{e}_+ \end{pmatrix}$$

with the 2×2 lower right corner

$$\begin{pmatrix} R_-T_-KR^{-1}\mathrm{e}_- & R_-T_-KR^{-1}\mathrm{e}_+ \\ R_+T_+KR^{-1}\mathrm{e}_- & R_+T_+KR^{-1}\mathrm{e}_+ \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_+) \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-) \\ \oplus \\ L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_+) \end{matrix}. \tag{10}$$

The latter operator represents the reduction of our mixed problem to the boundary, combined with suitable reductions of orders.

§3. ELLIPTICITY WITH INTERFACE CONDITIONS

We assume that the boundary condition T_- is the restriction of T to $\operatorname{int} Y_-$, that means $\mu = \mu_-$ or $\alpha = \alpha_-$. In that case, since the order reducing operators R and R_- are connected by the relation $R_- = \mathrm{r}_- R \mathrm{e}_-$, we obtain

$$R_- T_- K R^{-1} \mathrm{e}_- = \mathrm{id}_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}\times Y_-)} \tag{11}$$

and

$$R_- T_- K R^{-1} \mathrm{e}_+ = 0. \tag{12}$$

In fact, from $T = \mathrm{r} B$ for a differential operator B in a neighbourhood of Y it follows that $T_- = \mathrm{r}_- \mathrm{r} B$. This implies that $\mathrm{r} B K = 1$ and

$$R_- T_- K R^{-1} \mathrm{e}_- = \mathrm{r}_- R \mathrm{e}_- \mathrm{r}_- R^{-1} \mathrm{e}_-,$$

i.e. we obtain (11). Moreover, (12) is equal to $\mathrm{r}_- R \mathrm{e}_- \mathrm{r}_- R^{-1} \mathrm{e}_+ = 0$, because

$$\mathrm{r}_- R^{-1} \mathrm{e}_+ = \mathrm{r}_- \mathrm{op}^\delta (\mathrm{r}_+^{-\alpha}) \mathrm{e}_+ = 0.$$

Thus the operator (10) is a triangular matrix with the lower right corner

$$F :\doteq R_+ T_+ K R^{-1} \mathrm{e}_+ : L^{2,\delta}(\mathbb{R} \times Y_+) \longmapsto L^{2,\delta}(\mathbb{R} \times Y_+). \tag{13}$$

The operator (13) can be written in the form $F = \mathrm{op}^\delta(\mathrm{f})$ for a meromorphic operator family

$$\mathrm{f}(w) = \mathrm{r}_+ \mathrm{r}_-^{\alpha_+}(w) \mathrm{e}_+ \mathrm{t}_+(w) \mathrm{k}(w) \mathrm{r}_+^{-\alpha_-}(w) \mathrm{e}_+ : L^2(Y_+) \longmapsto L^2(Y_+).$$

The operators $\mathrm{f}(w)$ are parameter-dependent elliptic of order zero, with the parameter $\Re w = \tau \in \mathbb{R}$. The homogeneous principal boundary symbol $\sigma_\partial(\mathrm{f})(z, \tau, \zeta)$ is a family of continuous operators

$$\sigma_\partial(\mathrm{f})(z, \tau, \zeta) : L^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto L^2(\mathbb{R}_+), \tag{14}$$

independent of the choice of δ and homogeneous in the sense

$$\sigma_\partial(\mathrm{f})(z, \lambda\tau, \lambda\zeta) = \sigma_\partial(\mathrm{f})(z, \tau, \zeta)$$

for every $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\tau, \zeta) \neq 0$. By construction, the operator family $f(w)$ depends on $s \in \mathbb{R}$. We now assume that $s \in \mathbb{R}$ is chosen in such a way that (14) is a family of Fredholm operators for all $(\tau, \zeta) \neq 0$. The sufficient property, that the subordinate conormal symbol has no zeros on the line $\Gamma_{\frac{1}{2}}$, will be checked in a concrete example below. In the case of the Fredholm property we have a K-theoretic index element

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{S}^*Z}\sigma_\partial(\mathbf{f}) \in K(\mathbf{S}^*Z),$$

where $\mathbf{S}^*Z$ is defined to be the compact space $\{(z,\tau,\zeta) \in \mathbb{R}\times T^*Z : |\tau,\zeta| = 1\}$ with the canonical projection $\pi_1 : \mathbf{S}^*Z \longmapsto Z$. Another condition we impose

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{S}^*Z}\sigma_\partial(\mathbf{f}) \in \pi_1^* K(Z).$$

For suitable $J_\pm \in \mathrm{Vect}\,(Z)$ there is a block matrix family of isomorphisms

$$\begin{pmatrix} \sigma_\partial(\mathbf{f})(z,\tau,\zeta) & \sigma_\partial(\mathbf{k})(z,\tau,\zeta) \\ \sigma_\partial(\mathbf{t})(z,\tau,\zeta) & \sigma_\partial(\mathbf{q})(z,\tau,\zeta) \end{pmatrix} : \pi_1^* \begin{pmatrix} L^2(\mathbb{R}_+) \\ \oplus \\ J_- \end{pmatrix} \longmapsto \pi_1^* \begin{pmatrix} L^2(\mathbb{R}_+) \\ \oplus \\ J_+ \end{pmatrix}$$

between the corresponding pull backs with respect to π_1.

We now choose a system of charts $\chi_j : U_j \longmapsto \mathbb{R}^{d-2}$ on Z for an open covering $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ of Z. Let $(\varphi_j)_{j=1,\dots,N}$ be a subordinate partition of unity and $(\psi_j)_{j=1,\dots,N}$ a system of functions $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$ such that $\psi_j \equiv 1$ on $\mathrm{supp}\,\varphi_j$ for all j. Moreover, let $\sigma, \tilde{\sigma} \in C^\infty(Y_+)$ be supported in a collar neighbourhood of Z, $\tilde{\sigma} \equiv 1$ in a neighbourhood of $\mathrm{supp}\,\sigma$, and $\sigma \equiv 1$ in a neighbourhood of Z. We then define the operator family

$$\sum_{j=1}^{N} \begin{pmatrix} \sigma\varphi_j(\chi_j^* \times \mathrm{id}) & 0 \\ 0 & \varphi_j\chi_j^* \end{pmatrix} \mathrm{Op}_z(g_j)(\tau) \begin{pmatrix} (\chi_j^* \times \mathrm{id})^{-1}\tilde{\sigma}\psi_j & 0 \\ 0 & (\chi_j^*)^{-1}\psi_j \end{pmatrix} \tag{15}$$

where $g_j(z,\tau,\zeta)$ is given by

$$\chi(\tau,\zeta) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\partial(\mathbf{k}) \\ \sigma_\partial(\mathbf{t}) & \sigma_\partial(\mathbf{q}) \end{pmatrix} (z,\tau,\zeta)$$

in local coordinates with respect to the charts $\chi_j : U_j \longmapsto \mathbb{R}^{d-2}$ and $\chi_j \times \mathrm{id} : U_j \times [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^{d-2} \times \overline{\mathbb{R}}_+$ on Z and in a collar neighbourhood of Z with the normal variable in $[0,1)$.

Now (15) is a family of block matrix operators

$$g(\tau) := \begin{pmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}(\tau) : \begin{matrix} (L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z,J_-) \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z,J_+) \end{matrix}.$$

Given some constant $C > 0$, for $|\tau| > C$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\tau + i\delta) & g_{12}(\tau) \\ g_{21}(\tau) & g_{22}(\tau) \end{pmatrix} \tag{16}$$

is a family of Fredholm operators defining isomorphisms. Similarly as (8) we now pass to a holomorphic operator function

$$\mathrm{g}(w) := \int_{\mathbb{R}} e^{-iwb} \left\{ \int \psi(b) e^{-i\tau b} g(\tau) đ\tau \right\} db$$

for a $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ that is equal to 1 near the origin. We then have $\mathrm{g}(w) = (\mathrm{g}_{ij}(w))_{i,j=1,2}$ with $\mathrm{g}_{11}(w) = 0$. This gives us a family of operators

$$\begin{pmatrix} \mathrm{f}(w) & \mathrm{g}_{12}(w) \\ \mathrm{g}_{21}(w) & \mathrm{g}_{22}(w) \end{pmatrix} : \begin{array}{c} L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_-) \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_+) \end{array} \tag{17}$$

meromorphic in $w \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.1. *There exists a discrete set $M \subset \mathbb{R}$ such that (17) is a family of isomorphisms for all $w = \tau + i\delta, \tau \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R} \setminus M$.*

Proof : The family (17) is parameter-dependent elliptic in the class of boundary value problems on Y_+ (of order zero and without the transmission property at Z), cf. [2], [8], with parameter $\tau = \Re\, w$. The meromorphy is clear by construction, in fact $\mathrm{g}_{ij}(w)$ are even holomorphic for all i, j. Let us assume for the moment that $\mathrm{f}(w)$ is holomorphic in the complex plane. The operators (16) are parameter-dependent elliptic and the principal parameter-dependent interior and boundary symbols are independent of δ. The same is true for (17), i.e., (17) is Fredholm for every $w \in \mathbb{C}$ and a holomorphic operator function. Moreover, there is a constant $c > 0$ such that (16) are isomorphisms for all $|\tau| > c$. Thus our operator function satisfies a well known condition on holomorphic Fredholm families which are isomorphic for at least one value of the complex parameter. This gives us the invertibility for all w with $\Im w$ outside some discrete set.

In the case where $\mathrm{f}(w)$ is meromorphic we can argue in a similar manner taking into account that the Laurent coefficients are smoothing and of finite rank, see Remark 2.4. This completes the proof.

So (17) is a meromorphic operator function invertible for all $w \in \mathbb{C} \setminus N$, where $N \subset \mathbb{C}$ is a discrete set such that $N \cap \{c \leq \Im w \leq c'\}$ is finite for every $c \leq c'$. Now we pass from the symbol $\mathrm{a}(w) : H^s(\mathrm{int}\, X) \longmapsto \tilde{H}^{s-2}(\mathrm{int}\, X)$ for $\tilde{H}^{s-2}(\mathrm{int}\, X) := H^{s-2}(\mathrm{int}\, X) \oplus H^{s-\mu_- -\frac{1}{2}}(\mathrm{int}\, Y_-) \oplus H^{s-\mu_+ -\frac{1}{2}}(\mathrm{int}\, Y_+)$ to an operator function $\tilde{\mathrm{a}}(w)$ by adding extra entries of trace and potential type such that $\tilde{\mathrm{a}}(w) : H^s(\mathrm{int}\, X) \oplus L^2(Z, J_-) \longmapsto \tilde{H}^{s-2}(\mathrm{int}\, X) \oplus L^2(Z, J_+)$ are meromorphic and invertible. To this end we form the block matrix operator family

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{m}(w) & \mathrm{f}(w) & \mathrm{g}_{12}(w) \\ 0 & \mathrm{g}_{21}(w) & \mathrm{g}_{22}(w) \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(Y_-) \\ \oplus \\ L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_-) \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} L^2(Y_-) \\ \oplus \\ L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_+) \end{matrix} \tag{18}$$

for the meromorphic operator function

$$\mathrm{m}(w) := \mathrm{r}_+ \mathrm{r}_-^{\alpha+}(w) \mathrm{e}_+ \mathrm{t}_+(w) \mathrm{k}(w) \mathrm{r}_+^{-\alpha-}(w) \mathrm{e}_-,$$

which has the property

$$\mathrm{op}^\delta(\mathrm{m}) = R_+ T_+ K R^{-1} \mathrm{e}_-.$$

Moreover, for

$$\mathrm{n}_\pm(w) := \mathrm{r}_\pm \mathrm{r}_\mp^{\alpha\pm}(w) \mathrm{e}_\pm \mathrm{t}_\pm(w) \mathrm{g}(w)$$

we have $\mathrm{op}^\delta(\mathrm{n}_\pm) = R_\pm T_\pm G$.
Setting

$$\tilde{\mathrm{a}}_0(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{n}_-(w) & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{n}_+(w) & \mathrm{m}(w) & \mathrm{f}(w) & \mathrm{g}_{12}(w) \\ 0 & 0 & \mathrm{g}_{21}(w) & \mathrm{g}_{22}(w) \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^{s-2}(\mathrm{int}\, X) \\ \oplus \\ L^2(Y_-) \\ \oplus \\ L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_-) \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} H^{s-2}(\mathrm{int}\, X) \\ \oplus \\ L^2(Y_-) \\ \oplus \\ L^2(Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_+) \end{matrix}$$

yields an operator $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \mathrm{op}^\delta(\tilde{\mathrm{a}}_0)$ that has $\mathcal{A}_0$ at the upper left corner.
Setting

$$\mathrm{l}(w) := \mathrm{diag}\,(\mathrm{g}(w), \mathrm{k}(w)(\mathrm{r}_+^\alpha(w))^{-1}\mathrm{e}_-, \mathrm{k}(w)(\mathrm{r}_-^\alpha(w))^{-1}\mathrm{e}_+),$$

$$\mathrm{r}(w) := \mathrm{diag}\,(1, \mathrm{r}_- \mathrm{r}_+^{\alpha-}(w)\mathrm{e}_-, \mathrm{r}_+ \mathrm{r}_-^{\alpha+}(w)\mathrm{e}_+),$$

we have $\mathcal{L} = \mathrm{op}^\delta(\mathrm{l})$ and $\mathcal{R} = \mathrm{op}^\delta(\mathrm{r})$. Moreover, let

$$\tilde{\mathrm{l}}(w) := \mathrm{diag}\,(\mathrm{l}(w), \mathrm{id}_{L^2(Z, J_-)}),$$

$$\tilde{\mathrm{r}}(w) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{r}(w), \mathrm{id}_{L^2(Z, J_+)}).$$

We then obtain an operator function

$$\tilde{\mathbf{a}}(w) := \tilde{\mathbf{r}}^{-1}(w)\tilde{\mathbf{a}}_0(w)\tilde{\mathbf{l}}^{-1}(w) : \begin{array}{c} H^s(\text{int } X) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_-) \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2}(\text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_- -\frac{1}{2}}(\text{int } Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_+ -\frac{1}{2}}(\text{int } Y_+) \\ \oplus \\ L^2(Z, J_+) \end{array} \tag{19}$$

Remark 3.2. We have

$$\tilde{\mathbf{a}}(w) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(w) & \mathbf{k}_Z(w) \\ \mathbf{t}_Z(w) & \mathbf{q}_Z(w) \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{a}(w)$ is the symbol of the original mixed problem (2). The other entries play the role of trace, potential, etc., symbols with respect to the interface Z.

Theorem 3.3. *There exists a discrete set $N \subset \mathbb{C}, N \cap \{c \leq \Im w \leq c'\}$ finite for every $c \leq c'$, such that $\tilde{\mathbf{a}}(w)$ is a family of isomorphisms for all $w \in \mathbb{C} \setminus N$.*

Proof : Since from Proposition 3.1 we have an operator function of the asserted kind, (18) as well as $\tilde{\mathbf{a}}_0(w)$ also have that property. It remains to note, that the factors at $\tilde{\mathbf{a}}_0(w)$ on the left hand side of (19) preserve this structure.

Corollary 3.4. The operator

$$\tilde{\mathcal{A}} := \text{op}^\delta(\tilde{\mathbf{a}}) : \begin{array}{c} H^s(\mathbb{R} \times \text{int } X) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{R} \times Z, J_-) \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_- -\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\mu_+ -\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_+) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{R} \times Z, J_+) \end{array}$$

is an isomorphism for all $\delta \in \mathbb{R}$ such that $I_\delta \cap N = \emptyset$.

§4. THE ZAREMBA PROBLEM

Let us consider the Zaremba problem

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Delta \\ T_- \\ T_+ \end{pmatrix} : H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2,\delta-2}(\mathbb{R} \times \text{int } X) \\ \oplus \\ H^{s-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\frac{3}{2},\delta-1}(\mathbb{R} \times \text{int } Y_+) \end{array}$$

on a cylinder $\mathbb{R} \times X$ for the Laplace operator Δ with Dirichlet and Neumann conditions on Y_- and Y_+, respectively, where $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$. We identify $\mathbb{R}^2$ with the complex plane, $Y_- := \{x = e^{i\phi} : 0 \le \phi \le \alpha\}, Y_+ := \{x = e^{i\phi} : \alpha \le \phi \le 2\pi\}$ for some $0 < \alpha < 2\pi$. We have

$$\Delta v = e^{2t}\{\partial_t^2 v - \partial_t v + \Delta_X v\},$$

$$T_- v = v(t, e^{i\phi})|_{0 \le \phi \le \alpha}, \tag{20}$$

$$T_+ v = \rho^{-1}\partial_\phi v(t, e^{i\phi})|_{\alpha \le \phi \le 2\pi}, \quad v(t,x) \in H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \operatorname{int} X),$$

where ρ is the exterior normal direction to Y, and

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ T_- \\ T_+ \end{pmatrix} : H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times \operatorname{int} X) \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2,\delta-2}(\mathbb{R} \times \operatorname{int} X) \\ \oplus \\ H^{s-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R} \times \operatorname{int} Y_-) \\ \oplus \\ H^{s-\frac{1}{2},\delta}(\mathbb{R} \times \operatorname{int} Y_+) \end{array}$$

for every fixed δ and all $s \in \mathbb{R}, s > \frac{3}{2}$. After the diffeomorphism

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R} \times X) \longmapsto \mathcal{H}^{s,\gamma}(X^\wedge), \quad \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+, \quad e^{-t} \longmapsto r,$$

$\gamma = \delta + \frac{3}{2}$, the operators in (20) take the form

$$\underline{\Delta} u = r^{-2}\{(r\partial_r)^2 u + r\partial_r u + \Delta_X u\},$$

$$\mathrm{T}_- u = u(r, e^{i\phi})|_{0 \le \phi \le \alpha}, \quad \mathrm{T}_+ u = \rho^{-1}\partial_\phi u(r, e^{i\phi})|_{\alpha \le \phi \le 2\pi},$$

and we get the continuous operators

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underline{\Delta} \\ \mathrm{T}_- \\ \mathrm{T}_+ \end{pmatrix} : \mathcal{H}^{s,\gamma}((\operatorname{int} X)^\wedge) \longmapsto \begin{array}{c} \mathcal{H}^{s-2,\gamma-2}((\operatorname{int} X)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2},\gamma}((\operatorname{int} Y_-)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\frac{3}{2},\gamma}((\operatorname{int} Y_+)^\wedge) \end{array}$$

$v(t,x) = u(e^{-t}, x)$, for every fixed γ and for all $s \in \mathbb{R}, s > \frac{3}{2}$. The corresponding conormal symbols have the form

$$\sigma_{\mathrm{c}}(\underline{\Delta})(\mathrm{w})u = \mathrm{w}^2 u - \mathrm{w}u + \Delta_X u, \quad \sigma_{\mathrm{c}}(\mathrm{T}_-)u = u(e^{i\varphi})|_{0 \le \varphi \le \alpha},$$

$$\sigma_{\mathrm{c}}(\mathrm{T}_+)u = \rho^{-1}\partial_\phi u|_{\alpha \le \varphi \le 2\pi}, \quad u \in H^s(X).$$

Let us take as another boundary operator $\mathrm{r}u := \mathrm{T}u = u(r, e^{i\phi})$ which represents the Dirichlet condition on Y. Then

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} (r\partial_r)^2 + r\partial_r + \Delta_X \\ \mathrm{r} \end{pmatrix} : \mathcal{H}^{s,\gamma}((\mathrm{int}\ X)^\wedge) \longmapsto \begin{array}{c} \mathcal{H}^{s-2,\gamma-2}((\mathrm{int}\ X)^\wedge) \\ \oplus \\ \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(Y^\wedge) \end{array}$$

for all $s, \gamma \in \mathbb{R}, s > \frac{1}{2}$, and

$$\sigma_{\mathrm{C}}(\mathcal{D})(\mathrm{w})u = \begin{pmatrix} \mathrm{w}^2 u - \mathrm{w}u + \Delta_X u \\ \mathrm{r}u \end{pmatrix}, \quad u \in H^s(X).$$

We have

$$\mathbb{D} = \mathrm{op}_M^{\gamma-1}(\sigma_{\mathrm{C}}(\mathbb{D}))$$

and

$$\mathcal{D} = \mathrm{op}^\delta(\mathfrak{d}), \quad \mathfrak{d}(w) = {}^t(\mathfrak{c}(w)\ \mathfrak{t}(w)),$$

where

$$\mathfrak{c}(w) = -w^2 - iw + \Delta_X, \quad \mathfrak{t}(w) = \mathrm{r}.$$

According to [7] (Section 11.1), the symbol $\mathfrak{d}(w)$ defines the isomorphisms

$$H^s(\mathrm{int}\ X) \longmapsto \begin{array}{c} H^{s-2}(\mathrm{int}\ X) \\ \oplus \\ H^{s-\frac{1}{2}}(Y) \end{array}, \quad w = \tau + i\delta, \quad \delta \in [-1, 0].$$

Given such a δ, we have $\alpha = \alpha_- = s - \frac{1}{2}$, $\alpha_+ = s - \frac{3}{2}$, and as order reduction operators we take

$$\mathrm{r}_-^{s-\frac{3}{2}}(w) = (f(\frac{\nu}{C\langle\tau\rangle})\langle\tau\rangle - i\nu)^{s-\frac{3}{2}},$$

$$\mathrm{r}_+^{-s+\frac{1}{2}}(w) = \overline{(f(\frac{\nu}{C\langle\tau\rangle})\langle\tau\rangle - i\nu)^{-s+\frac{1}{2}}}, \quad w = \tau + i\delta.$$

The corresponding family (14) is a family of Fredholm operators for all $(\tau, \zeta) \neq 0$ if $s \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, cf. Proposition 3.1 in [3].
In our example we have

$$\sigma_\partial(f)(\tau) = \mathrm{r}^+ \mathrm{op}(b)(\tau)\mathrm{e}^+, \tag{21}$$

where

$$b(\nu, \tau) = (f(\frac{\nu}{C|\tau|})|\tau| - i\nu)^{s-\frac{3}{2}} |\nu, \tau| \overline{(f(\frac{\nu}{C|\tau|})|\tau| - i\nu)^{-s+\frac{1}{2}}}.$$

According to the result from Section 3.1 of [3], the operator (21) is

(i) bijective for $\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$,
(ii) surjective for $\frac{1}{2} < s + j < \frac{3}{2}$, $j \in \mathbb{N}$, where $\dim \ker \sigma_\theta(f)(\tau) = j$,
(iii) injective for $\frac{1}{2} < s + j < \frac{3}{2}$, $-j \in \mathbb{N}$, where $\dim \operatorname{coker} \sigma_\theta(f)(\tau) = -j$.
Hence there is a family of isomorphisms

$$(\sigma_\theta(\mathbf{f})(\tau) \quad \sigma_\theta(\mathbf{k})(\tau)) : \begin{array}{c} L^2(\mathbb{R}_+) \\ \oplus \\ Z \times \mathbb{C}^{j_-} \end{array} \longmapsto L^2(\mathbb{R}_+), \quad j_- := [s - \frac{1}{2}].$$

Remark 4.1. In problems of Zaremba type, given as meromorphic families of conormal symbols there is a parameter-dependent case, where w is replaced by (w, λ) and $(\Re w, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+l}$ is the parameter. The extra conditions (of potential type) can also depend on λ. Then for every weight δ there is a λ such that $\bar{\mathbf{a}}(w, \lambda)$ (the parameter-dependent version of $\bar{\mathbf{a}}(w)$) is a family of isomorphisms (19) for all $\Re w = \delta$, whenever $|\lambda|$ is chosen sufficiently large.

REFERENCES

1. N. Dines, G. Harutjunjan and B.-W. Schulze, The Zaremba problem in the edge Sobolev spaces. Preprint 2003/13, Institut für Mathematik, Potsdam, 2003.
2. G. I. Eskin. Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations, vol. 52, Math. Monographs., Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1980. Transl. of Nauka, Moskow, 1973.
3. G. Harutjunjan and B.-W. Schulze, "Parametrices of mixed elliptic problems", Math. Nachr., vol. 277, pp. 56 – 82, 2004.
4. G. Harutjunjan and B.-W. Schulze, "Reduction of orders in boundary value problems without the transmission property", Journal of the Math. Soc. of Japan, vol. 56, no. 1, pp. 65 – 85, 2004.
5. G. Harutjunjan and B.-W. Schulze, "The Zaremba problem with singular interfaces as a corner boundary value problem", Potential Analysis, vol. 25, no. 4, pp. 327 – 369, 2006.
6. V. A. Kondratyev, "Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical points" [in Russian], Trudy Mosk. Mat. Obshch., vol. 16, pp. 209 – 292, 1967.
7. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann. Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations. American Mathematical Society, 2001.
8. S. Rempel and B.-W. Schulze, "Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without transmission property", Math. Nachr., vol. 105, pp. 45-149, 1982.

Поступила 3 марта 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 61–70

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. М. Харатян и В. Н. Маргарян

Армянский Государственный Педагогический Университет
Институт математики НАН Армении

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, символы которых удовлетворяют некоторой оценке в окрестности нуля. Доказывается разрешимость таких уравнений в соответствующих классах многочленов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Л. Хермандером доказано, что любое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами локально разрешимо в пространстве обобщенных функций.

В работе [2] Н. Е. Товмасяна исследованы корректные граничные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными в классе функций, растущих не быстрее полинома. Там же доказано, что эти задачи, рассматриваемые в полупространстве, имеют бесконечное число решений.

В работе [3] А. О. Бабаяна доказано, что задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2n$ с постоянными коэффициентами в единичном круге имеет решение из класса функций, $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в открытом круге и удовлетворяющих условию Гельдера вместе с производными до порядка n вплоть до границы.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим через $\mathbb{R}^2$ двумерное вещественное евклидово пространство векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, а через $\mathbb{N}_0^2$ – двумерное множество мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для любых $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ обозначим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$, $||\xi|| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. $r \in \mathbb{N}_0$ Для любого $r \in \mathbb{N}_0$ через L_r обозначим множество однородных многочленов порядка r от двух переменных, через $\widetilde{L}_r$ – множество многочленов от двух переменных, порядок которых не превосходит r.

В настоящей работе рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в классе многочленов. Доказывается, что если символ $P(-i\xi_1, -i\xi_2)$ (где i – мнимая единица) дифференциального оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ удовлетворяет следующей оценке

$$|P(-i\xi_1, -i\xi_2)| \geq c||\xi||^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad ||\xi|| \leq \varepsilon,$$

с некоторыми числами $m \in \mathbb{R}^1$, $c, \varepsilon > 0$, то для любого целого неотрицательного числа k и и произвольного многочлена g порядка не превышающего k, уравнение $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$ имеет решение $U \in \widetilde{L}_{[m]+k}$, где $[m]$ – целая часть числа m.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (Q)} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$ – многочлен от двух переменных, где сумма распространяется по некоторому конечному набору мультииндексов $(Q) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Введем следующие обозначения $d(Q) \equiv \max_{\alpha \in (Q)} |\alpha|$, $r(Q) \equiv \min_{\alpha \in (Q)} |\alpha|$.

Лемма 1. *Пусть для ненулевого многочлена Q с некоторыми числами $c > 0$, $\varepsilon > 0$ и $m \geq 0$ выполняется следующая оценка*

$$|Q(\xi_1, \xi_2)| \geq c||\xi||^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad ||\xi|| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

Тогда $r = r(Q) \leq [m]$.

Доказательство : Представим многочлен Q в виде суммы однородных многочленов

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=r}^{d} Q_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=r}^{d} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=i} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}.$$

Из определения числа r следует, что $Q_r(\xi_1, \xi_2) \not\equiv 0$. Так как очевидно, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$|\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1}||\xi_2^{\alpha_2}| \leq ||\xi||^{\alpha_1}||\xi||^{\alpha_2} \leq ||\xi||^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

то с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ при $||\xi|| \le \varepsilon \le 1$

$$|Q(\xi_1,\xi_2)| = \left|\sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\right| \le c_1 \sum_{\alpha\in(Q)} ||\xi||^{|\alpha|} \le c_2||\xi||^r, \tag{2}$$

Из оценок (1) и (2) непосредственно следует, что $m \ge r$ и, так как r – целое неотрицательное число, то $[m] \ge r$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть $Q(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^6 - 2\xi_1^3\xi_2^4 + \xi_2^8 + \xi_1^8$. Тогда $|Q(\xi_1,\xi_2)| \ge \frac{1}{2}||\xi||^{32/3}$ при $||\xi|| \le 1$.

Пусть M – целое неотрицательное число,

$$R(-i\xi_1,-i\xi_2) = \sum_{j=0}^{M}\delta_j(-i\xi_1)^j(-i\xi_2)^{M-j}$$

однородный ненулевой многочлен, а $R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – соответствующий ему дифференциальный оператор

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{j=0}^{M}\delta_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j}.$$

Лемма 2. Для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $g \in L_k$ и любого ненулевого однородного линейного дифференциального оператора R порядка M уравнение

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = g \tag{3}$$

имеет решение в L_{M+k}.

Доказательство : Так как символ оператора R является ненулевым многочленом, то существует индекс $j : 0 \le j \le M$, для которого $\delta_j \ne 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\delta_0 \ne 0$ (в общем случае доказательство проводится аналогично с небольшой модификацией). Для $k \in \mathbb{N}_0$ и $x, y \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$g_k^{(s)} = g_k^{(s)}(x,y) = x^s y^{M+k-s}, \quad s = 0,1,\ldots,k. \tag{4}$$

Тогда

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)g_k^{(s)} = \sum_{j=0}^{M}\delta_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j x^s\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j} y^{M+k-s} =$$

$$= \sum_{\substack{0\le j\le M\\ s-k\le j\le s}} \delta_j\frac{s!}{(s-j)!}x^{s-j}\frac{(M+k-s)!}{(k-s+j)!}y^{k-s+j}, \quad s = 0,1,\ldots,k. \tag{5}$$

Положим $\Omega = \{\theta \in \mathbb{N}_0, \max(k-s, 0) \leq \theta \leq \min(k, M+k-s)\}$ и произведем в (5) замену $l = k - s + j$, получим

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) g_k^{(s)} &= \sum_{\substack{k-s\leq l\leq M+k-s \\ 0\leq l\leq k}} \delta_{l-k+s} \frac{s!}{(k-l)!} x^{k-l} \frac{(M+k-s)!}{l!} y^l \\
&= \sum_{l\in\Omega} \delta_{l-k+s} \frac{s!}{(k-l)!} x^{k-l} \frac{(M+k-s)!}{l!} y^l, \quad s = 0, 1, \ldots, k
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Обозначим через $\mathbf{g}$ вектор-функцию

$$
\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_k^{(0)} \\ g_k^{(1)} \\ \ldots \\ g_k^{(k)} \end{pmatrix}
$$

и через $\mathbb{A}$ обозначим $(k+1) \times (k+1)$-размерную треугольную матрицу

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
\frac{\delta_0 (M+k)!}{k!} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_1 (M+k-1)!}{k!} & \frac{\delta_0 (M+k-1)!}{(k-1)!} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_2 2!(M+k-2)!}{k!} & \frac{\delta_1 2!(M+k-2)!}{(k-1)!} & \frac{\delta_0 2!(M+k-2)!}{2!(k-2)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \\
\frac{\delta_k k!M!}{k!} & \frac{\delta_{k-1} k!M!}{(k-1)!} & \ldots\ldots & \frac{\delta_1 k!M!}{(k-1)!} & & \frac{\delta_0 k!M!}{k!}
\end{pmatrix}
$$

при $M \geq k$, и

$$
\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc}
\frac{\delta_0 (M+k)!}{k!} & 0 & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_1 (M+k-1)!}{k!} & \frac{\delta_0 (M+k-1)!}{(k-1)!} & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_M M!k!}{k!} & \frac{\delta_{M-1} M!k!}{(k-1)!} & \ldots & \ldots \\
0 & \frac{\delta_M (M+1)!(k-1)!}{(k-1)!} & \frac{\delta_{M-1} (M+1)!(k-1)!}{(2!(k-2)!} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\underbrace{\begin{array}{cccc}
\ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_0 M!k!}{M!(k-M)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_0 (M+1)!(k-1)!}{(M+1)!(k-M-1)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_M k!M!}{(k-M)!M!} & \frac{\delta_{M-1} k!M!}{(k-M+1)!(M-1)!} & \ldots & \frac{\delta_0 k!M!}{k!}
\end{array}}_{M+1}\right)
$$

при $M < k$. Тогда систему уравнений (6) можно записать в виде

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{g}=\mathbb{A}\begin{pmatrix}x^0y^k\\ x^1y^{k-1}\\ \dots\\ x^ky^0\end{pmatrix}.$$

Так как в обоих случаях $M \geq k$ и $M < k$ диагональ треугольной матрицы $\mathbb{A}$ состоит из ненулевых элементов, поскольку по предположению $\delta_0 \neq 0$, то матрица $\mathbb{A}$ обратима (см. [4]). Поэтому, в силу линейности дифференциального оператора R

$$\begin{pmatrix}x^0y^k\\ x^1y^{k-1}\\ \dots\\ x^ky^0\end{pmatrix}=R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbb{A}^{-1}\mathbf{g},$$

Таким образом, при $g \in L_k$ уравнение $R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = g$ разрешимо в L_{M+k}. Лемма доказана.

Построим решение уравнения (3). Пусть $g = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j x^j y^{k-j}$ и $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$. Если вектор-строка $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ является решением системы уравнений

$$\mathbf{Z}\mathbb{A} = \mathbf{C}, \tag{7}$$

то многочлен $U = \sum\limits_{s=0}^{k} d_s x^s y^{k+M-s}$ является решением дифференциального уравнения

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = g. \tag{8}$$

Подставив значение U в (6), получим

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U=\sum_{s=0}^{k}d_s\left(\sum_{j=0}^{M}\delta_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j x^s\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j}y^{k+M-s}\right)$$
$$=\sum_{s=0}^{k}d_s\left(\sum_{\substack{0\le j\le M\\ s-k\le j\le s}}\delta_j\frac{s!}{(s-j)!}x^{s-j}\frac{(M+k-s)!}{(k-s+j)!}y^{k-s+j}\right).$$

Обозначая $l = k - s + j$, получим

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U=\sum_{s=0}^{k}d_s\left(\sum_{l\in\Omega}\delta_{l-k+s}\frac{s!}{(k-l)!}\frac{(M+k-s)!}{l!}x^{k-l}y^l\right)=$$

$$= \mathbf{d}\mathbb{A}\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix}.$$

Откуда, в силу того, что $\mathbf{d}$ является решением уравнения (7), получаем

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = \mathbf{C}\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix} = g.$$

Пусть r, $d \in \mathbb{N}_0$ и

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{j=r}^{d} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=j} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}}$$

линейный дифференциальный оператор,

$$P(-i\xi_1, -i\xi_2) = \sum_{j=r}^{d} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=j} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2}$$

его полный символ, для которого

$$P_r(-i\xi_1, -i\xi_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2} \not\equiv 0.$$

Лемма 3. *Для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и произвольного $f \in \widetilde{L}_k$ уравнение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V(x,y) = f(x,y)$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{r+k}$.

Доказательство : Доказательство произведем по индукции по k. Пусть $k = 0$, т.е. $f(x,y) \equiv \text{const} \equiv c$. В силу леммы 2 уравнение

$$P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = c$$

имеет решение $U_0 \in L_r$. Так как $P_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 = 0$ при $j > r$, то

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 = \sum_{i=r}^{d} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{d} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_0 = c,$$

т.е. многочлен $U_0 \in L_r \subset \widetilde{L}_r$ является решением уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = c$.

Предположим, что утверждение леммы верно для любого $f \in \widetilde{L}_{k-1}$ $(k \geq 1)$, докажем его для любого $f \in \widetilde{L}_k$. Представим f в виде суммы однородных многочленов $f = f_k + f_{k-1} + \ldots + f_0$, где f_j – однородный многочлен порядка j $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $h^{(k-1)} \equiv f_{k-1} + \ldots + f_0 \in \widetilde{L}_{k-1}$. Если $f_k \equiv 0$, то $f \equiv h^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$, и утверждение леммы непосредственно следует из предположения индукции. Поэтому, пусть $f_k \not\equiv 0$. В силу леммы 2 уравнение

$$P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = f_k$$

имеет решение $U_{k+r} \in L_{r+k}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} = \sum_{i=r}^{q} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} \\ + \sum_{i=r+1}^{q} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} \equiv f_k + H^{(k-1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $H^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$. Так как $H^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$ и $h^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$, по предположению индукции уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = -H^{(k-1)} + h^{(k-1)} \tag{10}$$

имеет решение $\widetilde{V} \in \widetilde{L}_{r+k-1}$. Положим $V = U_{k+r} + \widetilde{V}$. Очевидно, $V \in \widetilde{L}_{r+k}$. Покажем, что многочлен V является решением уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = f.$$

Из соотношений (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) (U_{k+r} + \widetilde{V}) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \widetilde{V} \\ = f_k + H^{(k-1)} + [-H^{(k-1)} + h^{(k-1)}] = f_k + h^{(k-1)} = f, \quad (f \in \widetilde{L}_k). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – линейный дифференциальный оператор, полный символ которого удовлетворяет оценке (1). Тогда для любых $k\in\mathbb{N}_0$ и $g\in\widetilde{L}_k$ уравнение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U=g$$

имеет решение в $\widetilde{L}_{[m]+k}$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 1, 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть k_0 – целое неотрицательное число, а $P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда для того, чтобы при некотором $l\in\mathbb{N}_0$ имело место включение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k_0+l}\supset\widetilde{L}_{k_0} \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$p_l(\xi_1,\xi_2)\equiv\sum_{\substack{\alpha\in(P)\\|\alpha|\le l}}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2}\not\equiv 0.$$

Доказательство : Достаточность. Пусть $p_l(\xi_1,\xi_2)\not\equiv 0$ для некоторого $l\in\mathbb{N}_0$. Тогда , так как $r\equiv r(P)(\le l)$, то в силу леммы 3

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k+l}\supset P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k+r}\supset\widetilde{L}_k,\quad\forall k\in\mathbb{N}_0, \tag{12}$$

Следовательно, соотношение (11) верно и при $k=k_0$.

Необходимость. Пусть

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k_0+l}\supset\widetilde{L}_{k_0}$$

для некоторых $l,k_0\in\mathbb{N}_0$. Покажем, что

$$p_l(\xi_1,\xi_2)\not\equiv 0.$$

Предположим обратное, т.е. $p_l(\xi_1,\xi_2)\equiv 0$, тогда

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{\substack{\alpha\in(P)\\|\alpha|\ge l+1}}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_2}.$$

Следовательно, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\widetilde{L}_{k_0+l} \subset \widetilde{L}_{k_0-1}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Пусть* $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ *– дифференциальный оператор. Если для некоторых* $k_0, l \in \mathbb{N}_0$ $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) : \widetilde{L}_{k_0+l} \supset \widetilde{L}_{k_0}$, *то для любого целого неотрицательного числа* k

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) : \widetilde{L}_{k+l} \supset \widetilde{L}_k.$$

Доказательство : В силу теоремы 2

$$\sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ |\alpha| \leq l}} \gamma_{(\alpha_1, \alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2} \not\equiv 0.$$

Откуда, в силу леммы 3, непосредственно следует утверждение следствия.

Пример 2. Пусть

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2i\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} + \frac{\partial^8}{\partial x^8}.$$

. Так как символ оператора P совпадает с многочленом Q из примера 1, то в силу теоремы 1 уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{k+[\frac{32}{3}]} = \widetilde{L}_{k+10}$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и произвольного многочлена $g \in \widetilde{L}_k$. Заметим, что в силу леммы 3 уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{k+6} \subset \widetilde{L}_{k+10}$, так как $r \equiv \min_{\alpha \in (P)} |\alpha| = 6$.

Авторы выражают свою благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи.

Abstract. The paper proves that differential equations with constant coefficients, whose symbols satisfy some estimate near the origin, are solvable in appropriate spaces of polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциальных операторов, том I, II, Мир, Москва, 1974.

2. Н. Е. Товмасян, "Корректные граничные задачи для системы уравнений в частных производных в полупространстве в классе функций, растущих не быстрее полинома", Изв. НАН Армении, Математика, том 23, № 4, стр. 309 – 324, 1988.
3. А. О. Бабаян, "Задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения в единичном круге", Изв. НАН Армении, Математика, том 38, № 6, стр. 38 – 49, 2003.
4. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва 1971.

Поступила 20 января 2006

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 71-81

О МНОЖЕСТВАХ ПИКА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ

А. И. Петросян

Ереванский Государственный Университет
E-mail : albpet@xter.net

Доказывается, что всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия гладкости $C^{m,\alpha}$ на остове единичного полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для алгебры гладких функций $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{U}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon |z_i| < 1,\ i = 1, \dots, n\}$ – единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$, а $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_i| = 1,\ i = 1, \dots, n\}$ его остов. Для целого числа $m \geq 0$ через $A^m(\mathbb{U}^n)$ обозначается алгебра функций, голоморфных в $\mathbb{U}^n$, у которых все производные порядка не выше m непрерывно продолжаются на $\overline{\mathbb{U}}^n$, а через $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ – подалгебру тех функций из $A^m(\mathbb{U}^n)$, у которых все производные порядка m удовлетворяют в $\mathbb{U}^n$ условию Гельдера с показателем α.

Замкнутое подмножество K остова называется *множеством пика* для $A^m(\mathbb{U}^n)$ (или множеством пика для $A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$), если существует функция $f \in A^m(\mathbb{U}^n)$ (или, соответственно $f \in A^{m,\alpha}(\mathbb{U}^n)$) такая, что $f|_K \equiv 1$ и $|f| < 1$ на $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$, или, что равносильно,

$$f(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in K \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{1}$$

В теории множеств пика наиболее полно изучен случай полидиск-алгебры $A(\mathbb{U}^n) = A^0(\mathbb{U}^n)$. Хорошо известно, что в одномерном случае множества пика для диск-алгебры $A(\mathbb{U})$ суть замкнутые подмножества единичной окружности лебеговой меры 0, а в многомерном случае – нулевые множества ортогональных мер (см., например, [1]).

Для описания множеств пика в случае гладких функций (т.е. для $m \geq 1$), вводится понятие интерполяционного многообразия. Обозначим через C_q замкнутый положительный конус на $T_q(\mathbb{T}^n)$, образованный касательными векторами

$$\partial/\partial\theta_1|_q, \ldots, \partial/\partial\theta_n|_q, \quad \theta_i = \arg z_i.$$

Гладкое многообразие M остова называется интерполяционным многообразием, если в каждой точке $q \in M$ касательное пространство $T_q(M)$ пересекается с C_q только в начале координат. Очевидно, размерность M не превышает $n-1$.

В работах [2] и [3] доказано следующее необходимое условие : если K является множеством пика для $A^m(\mathbb{U}^n)$, $m \geq 1$, то в некоторой окрестности множества K существует интерполяционное многообразие M гладкости C^m такое, что $K \subset M$. В [3] исследована также достаточность этого условия и доказано, что *всякое компактное подмножество интерполяционного многообразия класса C^m является множеством пика для $A^{m-4}(\mathbb{U}^n)$.*

Основной результат настоящей работы, который сформулирован в теореме 2, утверждает, что *всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса гладкости $C^{m,\alpha}$ является множеством пика для* $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. Этот результат в предварительной форме был анонсирован в [4].

§ 2. "ПОЧТИ АНАЛИТИЧЕСКАЯ" ФУНКЦИЯ ПИКА

В следующей лемме интерполяционное подмногообразие остова расширяется до интерполяционного подмногообразия максимальной размерности, причем с сохранением гладкости.

Лемма 1. *Пусть M – интерполяционное $C^{m,\alpha}$-гладкое ($m \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$) подмногообразие остова $\mathbb{T}^n$ размерности $k < n-1$. Тогда на $\mathbb{T}^n$ существует $(n-1)$-мерное интерполяционное подмногообразие $\widetilde{M}$ той же гладкости и содержащее M.*

Доказательство : Пусть $p \in M$ и в некоторой ее окрестности U_p M задается как общее множество нулей $C^{m,\alpha}$-гладких функций $f_1, \ldots, f_{n-k}$:

$$M \cap U_p = \{x \in U_p : f_i(x) = 0, \ \ i = 1, \ldots, n-k\},$$

причем ранг матрицы $(\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k})$ на M равен $n-k$. Поскольку M является интерполяционным подмногообразием, то касательное подпространство к нему в точке p не содержит точек из $\mathbb{R}^n_-$. Поэтому нормальная плоскость, т.е.

плоскость, порожденная векторами $\operatorname{grad} f_1(p), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(p)$ содержит вектор $a_p \in \mathbb{R}^n_-$. Пусть

$$a_p = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \operatorname{grad} f_i(p). \tag{2}$$

Обозначим

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i f_i(x). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\operatorname{grad} v(p) = a_p \in \mathbb{R}^n_-$. Поэтому, в силу непрерывности, можно считать, что

$$\operatorname{grad} v(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \operatorname{grad} f_i(x) \in \mathbb{R}^n_- \quad \text{для всех} \quad x \in U_p. \tag{4}$$

Пусть, далее $\{U_j\}$ – локально конечное покрытие множества M окрестностями U_j, удовлетворяющим вышеприведенным условиям, $e_j(x)$ – соответствующее разбиение единицы. Рассмотрим $\widetilde{v}(x) = \sum_j e_j(x) v_j(x)$, где $v_j(x)$ – построенная как в (3) функция для окрестности U_j. Очевидно, что $\widetilde{v}(x) = 0$ при $x \in M$. С другой стороны, с учетом (4) и того, что $e_j(x) \geq 0$ получаем $\operatorname{grad} \widetilde{v}(x) = \sum_j e_j(x) \operatorname{grad} v_j(x) \in \mathbb{R}^n_-$ для всех $x \in M$. Поэтому множество нулей $\widetilde{M}$ функции $\widetilde{v}(x)$ в некоторой окрестности M удовлетворяет условиям леммы.

Следующая теорема посвящена свойствам так называемой “почти аналитической” функции пика в полидиске.

Теорема 1. *Пусть M – интерполяционное подмногообразие размерности $n-1$ остова полидиска класса гладкости $C^{m,\alpha}$, $m \geq 3$, K – компакт на M. Тогда в некоторой окрестности Ω of K этого компакта существует функция $F \in C^{m,\alpha}(\Omega)$ и константа $\gamma > 0$ такие, что*

a) $F(z) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $z \in K$,

b) $\operatorname{Re} F(z) \geq \gamma d(z, M)^2$ $(z \in \overline{\mathbb{U}}^n \cap \Omega)$, *где* $d(z, M)$ *– расстояние между* z *и* M,

c) $\overline{\partial} F = O\left[d(z, M)\right]^{m-1+\alpha}$,

d) $|F(z)| \geq \gamma d(z, M)$ $(z \in \overline{\mathbb{U}}^n \cap \Omega)$.

Доказательство : Пусть D – строгая псевдовыпуклая область с границей класса $C^{m,\alpha}$, в которую полидиск $\mathbb{U}^n$ вложен следующим образом :

1° $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus \mathbb{T}^n \subset D$,

2° $\mathbb{T}^n \subset \partial D$,

3° $T_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$ для всех $z \in M$,

где $T_z^c(\partial D)$ – комплексная плоскость максмальной размерности, содержащаяся в $T_z(\partial D)$. Условие 3° означает, что M является комплексно-касательным подмногообразием ∂D. Способ построения такой области D изложен в [7].

Далее, в работе [5] (см. также [6]), доказано, что в некоторой окрестности Ω множества K существует почти аналитическая функция пика F, удовлетворяющая условиям a) и b) для области D. Следовательно, F удовлетворяет a) и b) также и для вложенного в D полидиска $\mathbb{U}^n$. Кроме этого, $\bar{\partial}F = 0$ на $\Omega \cap M$ вместе со всеми производными порядка до $\leq m-1$ включительно. Поскольку $\bar{\partial}F \subset^{m-1,\alpha}(\Omega)$, то $\bar{\partial}F(z) = O\left[d(z,M)\right]^{m-1+\alpha}$, т.е. имеет место c).
Отметим, что $F = u + iv$ обладает также следующим свойством

$$\text{grad } u(z) = -\chi_z/||\chi_z||^2 \quad \text{и} \quad \text{grad } v(z) = -\tau_z/||\tau_z||^2, \tag{5}$$

где χ_z вещественная нормаль в точке z к границе области D, $\tau_z = J\chi_z$, а J – операто в $\mathbb{R}^{2n}$, который соответствует умножению на i в пространстве $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Чтобы доказать свойство d), достаточно показать, что для любой точки $z \in M$ вдоль направления, касательного к остову и ортогонального к $T_z(M)$, производная функции F отлична от нуля. В самом деле, из условия $M \subset \partial D$ следует, что $T_z(M) \perp \chi_z$. Так как M имеет комплексно-касательное направление на ∂D, то $JT_z(M) \subset T_z^c(\partial D)$, Поэтому $JT_z(M) \perp \chi_z$ или, что то же, $T_z(M) \perp \tau_z$. Очевидно,

$$T_z(\mathbb{T}^n) \perp JT_z(\mathbb{T}^n) \quad \text{и} \quad T_z(\mathbb{T}^n) \oplus JT_z(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^{2n}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $T_z(M) \perp JT_z(M)$ и размерность $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ составляет $2n-2$. Таким образом, $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$ является ортогональным дополнением в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной нормали $N_z^c = \mathbb{R}[\chi_z] \bigoplus \mathbb{R}[\tau_z]$ к ∂D в точке z.

Пусть вектор ξ касателен к остову в точке z, т.е. $\xi \in T_z(\mathbb{T}^n)$ и ξ ортогонален к $T_z(M)$. Из (6) следует, чтоξ ортогонален также и к $T_z(M) \bigoplus JT_z(M)$, поэтому $\xi \in N_z^c$. С другой стороны, $\xi \perp \chi_z$, откуда следует, что вектор ξ параллелен τ_z. Так как, согласно (5), τ_z направлен вдоль градиента v, то $\xi v \neq 0$, следовательно, $\xi F \neq 0$, т.е. вдоль направления ξ производная F отлична от нуля.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что в неравенстве d) $d(z,M)$ участвует в первой, а не во второй степени, как это имеет место в случае строго псевдовыпуклой области. Это улучшение оценки является следствием того, что в отличие от границы строго псевдовыпуклой области, остов полидиска не имеет комплексных касательных векторов.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПИКА

Пусть K – компактное подмножество интерполяционного многообразия M, окрестность Ω и функция F удовлетворяет заключению теоремы 1. Для целочисленного вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ через D^p обозначается дифференциальный оператор $D_1^{p_1}\dots D_n^{p_n}$, а через $|p| = p_1+p_2+\dots+p_n$ – его порядок. Пусть, далее λ – вещественная функция класса C^∞ с носителем внутри Ω такая, что $0 \le \lambda \le 1$ и

$$\lambda = 1 \quad \text{в некоторой окрестности множества} \quad K. \tag{7}$$

Определим $(0,1)$-форму g на $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$

$$g = \begin{cases} \overline{\partial}\left(\lambda \dfrac{1}{F}\right) & \text{на} \quad \Omega, \\ 0 & \text{вне} \quad \Omega. \end{cases}$$

Лемма 2.2. Уравнение

$$\overline{\partial} u = g \tag{8}$$

в области $\mathbb{U}^n$ имеет решение $u(z)$, бесконечно дифференцируемое на множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus M$ и удовлетворяющее условиям

1° *$D^p u(z)$ ограничена в $\mathbb{U}^n$ при $0 \le |p| \le m-3$,*

2° *$D^p u(z) = O\,[d(z,M)]^{m-3-|p|+\alpha}$ при $m-2 \le |p| \le m$.*

Доказательство : На множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$ форма g имеет гладкость $C^{m,\alpha}$. Продолжим g, положив ее равной нулю на K. Полученная форма будет непрерывной на $\overline{\mathbb{U}}^n$. В самом деле, в Ω

$$g = \frac{1}{F}\,\overline{\partial}\lambda - \lambda\frac{\overline{\partial}F}{F^2}. \tag{9}$$

Ввиду (7) функция $\overline{\partial}\lambda$ равна нулю в окрестности ножества, на котором $1/F$ не определена. Поэтому $\overline{\partial}\lambda/F \in C^{m,\alpha}$ на $\overline{\mathbb{U}}^n$ и его носитель находится в $\Omega \setminus K$. Кроме того, согласно c) и d) теоремы 1 в окрестности множества $M \bigcap \Omega$ имеем $\overline{\partial}F = O\,[d(z,M)]^{m-1+\alpha}$ и $|F(z)| \ge \gamma d(z,M)$. Следовательно, с учетом того, что $m \ge 3$ имеем, что форма $\lambda(\overline{\partial}F/F^2)$ стремится к нулю при $z \to K$, и поэтому непрерывно продолжается на K.

Далее, из (9) с учетом, того, что $D^p\left(\overline{\partial}F\right) = O\,[d(z,M)]^{m-1-|p|+\alpha}$ получаем

$$D^p g(z) = O\,[d(z,M)]^{m-3-|p|+\alpha}, \quad p = 0,1,\dots,m. \tag{10}$$

В [9] дана формула $u(z) = R_\kappa[g](z)$ для весового решения уравнения (8). Для простоты рассматривается случай пространства $\mathbb{C}^2$. Мы также ограничимся случаем $\mathbb{C}^2$, где

$$R_\kappa[g](z) = \sum_{j=1}^{5} R_\kappa^j[g](z), \tag{11}$$

где $\kappa = (\kappa_1,\kappa_2)$, $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ и

$$R_\kappa^1[g](z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{U}^2} g\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right)^{\kappa_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\overline{\zeta}_2 z_2}\right)^{\kappa_2}\frac{(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)d\overline{\zeta}_2-(\overline{\zeta}_2-\overline{z}_2)d\overline{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^2_\kappa[g](z)=\frac{\kappa_2}{4\pi^2}\int_{\mathbb{U}^2} g\wedge\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\kappa_1}}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{\kappa_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\kappa_2-1}|\zeta_2-z_2|}{(1-\overline{\zeta}_2 z_2)^{\kappa_2+1}|\zeta-z|^2}d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^3_\kappa[g](z)=\frac{\kappa_1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{U}^2} g\wedge\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\kappa_2}}{(1-\overline{\zeta}_2 z_2)^{\kappa_2}(z_2-\zeta_2)}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\kappa_1-1}|\zeta_1-z_1|}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{\kappa_1+1}|\zeta-z|^2}d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$R^4_\kappa[g](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|<1} g_1(\zeta_1,z_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right)^{\kappa_1}\frac{d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1}{z_1-\zeta_1},$$

$$R^5_\kappa[g](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_2|<1} g_2(z_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\overline{\zeta}_2 z_2}\right)^{\kappa_2}\frac{d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_2}{z_2-\zeta_2}.$$

В работе [8] получены формулы для производных решения $R_\kappa[g]$, которые позволяют свести оценки производных $D^pR_\kappa[g]$ к оценкам $R_\kappa[D^pg]$.

Если $|p|\le m-3$, то, как следует из (10) $D^pg(z)$ ограничена. Поэтому функция $R_\kappa[D^pg](z)$ тоже ограничена (см. [9], теорема II.2). Отсюда следует утверждение 1° леммы.

Пусть $|p|\ge m-2$ и пусть $\{e_j\}$ – разбиение единицы для $\overline{\mathbb{U}^n}$. Тогда $R_\kappa[D^pg]=\sum_j R_\kappa[e_jD^pg]$. Если Supp $e_j\bigcap M=\emptyset$, т.е. если носитель e_j не пересекается с множеством особенностей формы D^pg, то e_jD^pg ограничен. Отсюда, как и выше, следует ограниченность $R_\kappa[e_jD^pg]$. Таким образом, остается случай Supp $e_j\bigcap M\ne\emptyset$, т.е. когда интегрирование в $R_\kappa[e_jD^pg]$ фактически проводится не по всему полидиску, а по той его части, которая примыкает к M. Чтобы не загромождать обозначениями, будем считать, что указанным свойством обладает $R_\kappa[D^pg]$. Требуемая оценка для него доказывается ниже, в предложении 2, откуда и следует 2°.

Следующая теорема является основной.

Теорема 2. *Всякое компактное подмножество интерполяционного подмногообразия класса $C^{m,\alpha}$, $m\ge 3$, на остове полидиска $\mathbb{U}^n$ является множеством пика для $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.*

Доказательство : Пусть компакт $K\subset M$. В силу леммы 1 можно считать, что M имеет максимальную размерность $n-1$. Пусть далее, функции $F(z)$ и $u(z)$ те же, что и в теореме 1 и лемме 2. Рассмотрим функцию

$$v(z)=\frac{\lambda(z)}{F(z)}-u(z).$$

Имеем $\overline{\partial}v=\overline{\partial}\frac{\lambda}{F}-\overline{\partial}u=g-\overline{\partial}u=0$, т.е. $v(z)$ – голоморфна в области $\mathbb{U}^n$. Далее,

$$\operatorname{Re} v=\lambda\frac{\operatorname{Re} F}{|f|^2}-\operatorname{Re} u. \tag{12}$$

Согласно лемме 2, функция $u(z)$ ограничена на $\overline{\mathbb{U}}^n$. Поэтому, с учетом пункта b) теоремы 1 и (12) имеем

$$\operatorname{Re} v(z) \geq -\max_{z\in\overline{\mathbb{U}}^n} \operatorname{Re} u(z) > -\infty.$$

Добавив, в случае необходимости, к функции $u(z)$ соответствующую константу, можно считать, что

$$\operatorname{Re} v(z) > 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K. \tag{13}$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{1}{v(z)} = \frac{F(z)}{\lambda(z) - u(z)F(z)} \tag{14}$$

является искомой функцией пика. Прежде всего, $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{U}^n$ и, как следует из (13) и (14), $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $z \in \overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$. Далее, нули $f(z)$ совпадают с нулями $F(z)$, т.е. ввиду пункта a) теоремы 1, с множеством K. Таким образом, f удовлетворяет условиям (1).

Остается проверить, что $f \in A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$. В силу теоремы Харди–Литтлвуда достаточно показать, что $D^j f(z) = O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$ для любого целочисленного вектора j такого, что $|j| = m$. Функция f бесконечно дифференцируема на множестве $\overline{\mathbb{U}}^n \setminus K$. Поэтому достаточно рассмотреть ее лишь в окрестности множества K, где имеем

$$f(z) = \frac{F(z)}{1 - u(z)F(z)}.$$

Выражение для $D^j f$ содержит производные $D^p u$, $|p| = 0, 1, \ldots, m$. Согласно лемме 2 при $0 \leq |p| \leq m-3$ эти производные ограничены, а при $|p| = m-2$ имеют порядок роста $O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$. С другой стороны, согласно той же лемме, производные $D^p u$ порядка $|p| = m-1$ и $|p| = m$ при подходе к M имеют больший порядок роста, а именно, $O\,[d(z,M)]^{\alpha-2}$ и $O\,[d(z,M)]^{\alpha-3}$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что те слагаемые в выражении для $D^j f$, которые содержат эти производные, имеют соответствующие сомножители F и F^2, которые "гасят" излишний рост, поэтому, согласно пункту d) теоремы 1, указанные слагаемые также имеют порядок роста $O\,[d(z,M)]^{\alpha-1}$.

§4. ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ

Предложение 1. *Пусть* $\kappa \geq \beta > 0$, $0 < \theta < \pi$ *и* $v = \operatorname{Im} w \geq 0$. *Тогда*

$$\frac{v^\kappa}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa\,|w|^\beta} \leq 2^\beta \quad \text{и} \quad \frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa} \leq \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta.$$

Доказательство : Рассмотрим 2 случая :

1° Пусть $|w - e^{i\theta}| < \frac{1}{2}$. Тогда $|w| \geq |e^{i\theta}| - |w - e^{i\theta}| \geq 1 - 1/2 = 1/2$. Очевидно

$$|w - e^{-i\theta}|^2 = (u - \cos\theta)^2 + (v + \sin\theta)^2 \geq (v + \sin\theta)^2 . \tag{15}$$

Поэтому

$$\frac{v^\kappa}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa \, |w|^\beta} \leq \frac{v^\kappa}{(v + \sin\theta)^\kappa} 2^\beta \leq 2^\beta,$$

$$\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa} = \frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta} \, |w - e^{-i\theta}|^\beta} \leq \frac{1}{|w - e^{-i\theta}|^\beta} \leq \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta .$$

2° Let $|w - e^{i\theta}| \geq \frac{1}{2}$. Тогда с учетом того, что $\left|w - e^{-i\theta}\right| \geq \left|w - e^{i\theta}\right|$, а также (15), будем иметь

$$\frac{v^\kappa}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa \, |w|^\beta} \leq \frac{v^\kappa}{|w - e^{i\theta}|^\beta \, |w - e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta} \, |w|^\beta} \leq 2^\beta \frac{v^{\kappa-\beta}}{(v + \sin\theta)^{\kappa-\beta}} \frac{v^\beta}{|w|^\beta} \leq 2^\beta,$$

$$\frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^\kappa} = \frac{v^{\kappa-\beta}}{|w - e^{-i\theta}|^{\kappa-\beta} \, |w - e^{-i\theta}|^\beta} \leq 2^\beta.$$

Предложение 2. *Пусть* $\kappa_i \geq 3$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$R_\kappa[D^p g](z) = O\left[d(z, M)\right]^{m-3-|p|+\alpha} \quad \text{при} \quad m - 2 \leq |p| \leq m.$$

Доказательство : Согласно (11), $R_\kappa[D^p g](z) = \sum_{j=1}^5 R_\kappa^j[D^p g](z)$. Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Оценка для $R_\kappa^1[D^p g](z)$. Сделаем дробно-линейную замену переменных, не нарушая общности, можно предположить, что кривая M перейдет в отрезок $\{\zeta\colon\ \xi_1 = \eta_1 = \eta_2 = 0 : 0 \leq \xi_2 \leq 1\}$. Таким образом, достаточно показать, что

$$J_1(z_1, z_2) = O\left[d(z, M)\right]^{-\beta}, \quad \beta = |p| - m + 3 - \alpha, \tag{16}$$

где

$$J_1(z_1, z_2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{(|\zeta_1| + \eta_2)^\beta} \frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1 - \bar{z}_1|^{\kappa_1}} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2 - \bar{z}_2|^{\kappa_2}} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3}.$$

Достаточно рассмотреть случаи $z_2 = 0$ или $z_1 = 0$. Имеем

$$J_1(z_1, 0) = \int_{[0,1]^2} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2|^{\kappa_2}} d\lambda(\zeta_2) \int_{[0,1]^2} \frac{1}{(|\zeta_1| + \eta_2)^\beta} \frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1 - \bar{z}_1|^{\kappa_1}} \frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta - z|^3}. \tag{17}$$

Пусть $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$. Обозначив внутренний интеграл через $J_1^*(z_1)$ и сделав в нем замену переменной $\zeta_1 = |z_1|w = |z_1|(u+iv)$ будем иметь

$$J_1^*(z_1) = \frac{1}{|z_1|^{\beta+1}} \iint_{[0,\frac{1}{|z_1|}]^2} \frac{1}{(|w|+\eta_2/|z_1|)^\beta} \frac{v^{\kappa_1}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_1}} \frac{du\,dv}{(|w-e^{i\theta}|^2 + |\zeta_2/z_1|^2)^{3/2}}.$$

Далее, так как $\beta < 3$, то $\kappa_i > \beta$. Применяя предложение 1, будем иметь

$$J_1^*(z_1) \le \frac{2^\beta}{|z_1|^{\beta+1}} \iint_{v>0} \frac{du\,dv}{(|w-e^{i\theta}|^2 + |\zeta_2/z_1|^2)^{3/2}}.$$

Перейдя к полярным координатам с центром в точке $e^{i\theta}$, получим

$$J_1^*(z_1) \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}} \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2 + |\zeta_2/z_1|^2)^{3/2}} = -\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}} \left(r^2 + \left|\frac{\zeta_2}{z_1}\right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{r=0}^\infty = \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta |\zeta_2|}.$$

Отсюда и из (17) будем иметь

$$J_1(z_1, 0) \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta} \iint_{[0,1]^2} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2|^{\kappa_2}} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|} \le \frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^\beta} \iint_{[0,1]^2} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|} = \frac{\gamma_1}{|z_1|^\beta}$$

здесь и ниже через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обозначаются константы. Учитывая, что в рассматриваемом случае $d(z, M) = |z_1|$, отсюда имеем оценку (16). Далее,

$$J_1(0, z_2) = \int_{[0,1]^2} \frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1|^{\kappa_1}} d\lambda(\zeta_1) \int_{[0,1]^2} \frac{\eta_2^{\kappa_2}}{|\zeta_2 - \bar{z}_2|^{\kappa_2}} \frac{d\lambda(\zeta_2)}{(|\zeta_1| + \eta_2)^\beta\, |\zeta - z|^3}. \qquad (18)$$

Пусть $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$. Обозначим внутренний интеграл через $J_1^{**}(z_2)$ и сделаем в нем замену переменной $\zeta_2 = |z_2|w = |z_2|(u+iv)$. Получим

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{1}{|z_2|^{\beta+1}} \iint_{[0,\frac{1}{|z_1|}]^2} \frac{v^{\kappa_2}\,du\,dv}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_2}\, v^\beta\, (|\zeta_1/z_2|^2 + |w-e^{i\theta}|^2)^{3/2}}.$$

Применяя предложение 1, получим

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{1}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \iint_{[0,\frac{1}{|z_2|}]^2} \frac{du\,dv}{(|\zeta_1/z_2|^2 + |w-e^{i\theta}|^2)^{3/2}}.$$

Переходя к полярным координатам

$$J_1^{**}(z_2) \le \frac{2\pi}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(|\zeta_1/z_2|^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi}{|z_2|^{\beta+1}} \left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\beta \frac{|z_2|}{|\zeta_1|} = \frac{\gamma_2}{|y_2|^\beta |\zeta_1|}.$$

Подставив это выражение в (18), получим

$$J_1(0,z_2)\le \frac{\gamma_2}{|y_2|^\beta}\int_{[0,1]^2}\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|}=\frac{\gamma_3}{|y_2|^\beta},$$

что дает оценку (16) для $J_1(0,z_2)$, если учесть, что $d(z,M)=|y_2|$.

Оценка для $R^2_\kappa[D^p g](z)$ и $R^3_\kappa[D^p g](z)$. Как и выше, вопрос сводится к оценке интеграла

$$J_2(z_1,z_2)=\int_{[0,1]^4}\frac{1}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta}\frac{\eta_1^{\kappa_1}}{|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}\,|\zeta_1-z_1|}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2-\bar z_2|^{\kappa_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}d\lambda(\zeta).$$

Имеем

$$J_2(z_1,0)=\int_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2|^{\kappa_2-1}}d\lambda(\zeta_2)\int_{[0,1]^2}\frac{\eta_1^{\kappa_1}\,d\lambda(\zeta_1)}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta\,|\zeta_1-\bar z_1|^{\kappa_1}\,|\zeta_1-z_1|\,|\zeta-z|^2}. \quad (19)$$

Пусть $z_1=|z_1|e^{i\theta}$. Обозначив внутренний интеграл через $J_2^*(z_1)$ и, сделав в нем замену переменной $\zeta_1=|z_1|w=|z_1|(u+iv)$, с учетом предложения 1, будем иметь

$$J_2^*(z_1)\le\frac{1}{|z_1|^{\beta+1}}\iint_{[0,\infty]^2}\frac{v^{\kappa_1}\,du\,dv}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_1}\,|w|^\beta|w-e^{i\theta}|\,(|w-e^{i\theta}|^2+|\zeta_2/z_1|^2)}$$
$$\le\frac{2^\beta}{|z_1|^{\beta+1}}\iint_{[0,\infty]^2}\frac{du\,dv}{|w-e^{i\theta}|\,(|w-e^{i\theta}|^2+|\zeta_2/z_1|^2)}.$$

Переходя к полярным координатам с центром в точке $e^{i\theta}$, будем иметь

$$J_2^*(z_1)\le\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}}\int_0^\infty\frac{dr}{r^2+|\zeta_2/z_1|^2}=\frac{\pi 2^{\beta+1}}{|z_1|^{\beta+1}}\left|\frac{z_1}{\zeta_2}\right|\arctan\frac{r|z|}{|\zeta_2|}\Bigg|_{r=0}^{\infty}=\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta\,|\zeta_2|}.$$

Подставив это неравенство в (19), получим оценку (16) для $J_2(z_1,0)$:

$$J_2(z_1,0)\le\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta}\iint_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}\,|\zeta_2|^2}{|\zeta_2|^{\kappa_2+1}}d\lambda(\zeta_2)\le\frac{\gamma_4}{|z_1|^\beta}\iint_{[0,1]^2}\frac{d\lambda(\zeta_2)}{|\zeta_2|}=\frac{\gamma_5}{|z_1|^\beta}.$$

Далее, имеем

$$J_2(0,z_2)=\int_{[0,1]^2}\left|\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right|^{\kappa_1}\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|}\int_{[0,1]^2}\frac{\eta_2^{\kappa_2-1}}{|\zeta_2-\bar z_2|^{\kappa_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2\,d\lambda(\zeta_2)}{(|\zeta_1|+\eta_2)^\beta\,|\zeta-z|^2}. \quad (20)$$

Пусть $z_2=|z_2|e^{i\theta}$. Сделав во внутреннем интеграле $J_2^{**}(z_2)$ замену переменной $\zeta_2=|z_2|w=|z_2|(u+iv)$, будем иметь

$$J_2^{**}(z_2)=\frac{1}{|z_2|^\beta}\iint_{[0,\frac{1}{|z_2|}]^2}\frac{v^{\kappa_2-1}}{|w-e^{-i\theta}|^{\kappa_2+1}}\frac{|w-e^{i\theta}|^2\,du\,dv}{(|\zeta_1/z_2|+v)^\beta\,(|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2)}.$$

Применяя предложение 1, получим

$$J_2^{**}(z_2) \le \frac{1}{|z_2|^\beta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta \iint_{\left[0,\frac{1}{|z_2|}\right]^2} \frac{1}{|w-e^{-i\theta}|^2}\,\frac{|w-e^{i\theta}|^2 du\,dv}{|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2}$$

$$\le \frac{1}{|z_2|^\beta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^\beta \iint_{\left[0,\frac{1}{|z_2|}\right]^2} \frac{du\,dv}{|\zeta_1/z_2|^2+|w-e^{i\theta}|^2}.$$

Перейдя к полярным координатам с центом в точке $e^{i\theta}$, получим

$$J_2^{**}(z_2) \le \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\int_0^{\frac{1}{|z_2|}} \frac{r\,dr}{|r|^2+|\zeta_1/z_2|^2} = \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\ln\left(1+\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right).$$

Отсюда и из (20) будем иметь

$$J_2(0,z_2) \le \frac{2\pi}{|y_2|^\beta}\iint_{[0,1]^2}\left|\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right|^{\kappa_1}\ln\left(1+\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\frac{d\lambda(\zeta_1)}{|\zeta_1|} = \frac{\gamma_6}{|y_2|^\beta}.$$

Так как теперь $d(z,M)=|y_2|$, оценка (16) для $J_2(0,z_2)$ доказана.

Оценка для $R^4_\kappa[D^p g](z)$ и $R^5_\kappa[D^p g](z)$ проводится аналогично, с очевидными упрощениями.

Abstract. It is proved, that any compact subset of an interpolation $C^{m,\alpha}$-smooth manifold on the distinguished boundary of the unit polydisc $\mathbb{U}^n$ is a peak set for the algebra of smooth functions $A^{m-1,\alpha}(\mathbb{U}^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Рудин. Теория функций в поликруге, Мир, Москва, 1974.
2. R. Saerens, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa CI. Sci. (4), vol. 11, pp. 177–211, 1984.
3. R. Saerens and E. L. Stout, Preprint, University of Washington, Seattle, Wash., 1984.
4. А. И. Петросян, "Множества пика и интерполяции алгебр гладких функций в полидиске и в трубе будущего", ДАН СССР, том 304, № 4, стр. 800–802, 1989.
5. А. Е. Туманов, Г. М. Хенкин, Теория функций и функциональный анализ, Центр. Эконом.-мат инст.АН СССР, Москва (1976), стр. 74–86.
6. J. Chaumat and A. M. Chollet, "Ensembles pic pour $A^\infty(D)$", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 29, № 3, pp. 171–200, 1979.
7. В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев, 'Комплексный анализ в трубе будущего", Сб. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Москва, том 8, стр. 191–266, 1985.
8. А. И. Петросян, "Оценка в C^m-норме минимальных решений $\overline{\partial}$-уравнения в полидиске", Изв. НАН Армении, Математика, том 26, № 2, стр. 99–107, 1991.
9. P. Charpentier, "Formules explecites pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial}u=f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 30, № 4, pp. 121–154, 1980.

Поступила 13 января 2006

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 4, 2006

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 4, 2006

Contents