

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինովյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Զաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Զամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасын

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

А. В. Абрамян

Ереванский Государственный Университет

Резюме. В настоящей работе получены рекуррентные формулы для ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. Доказана теорема о существовании ортогональных рациональных функций, множество нулей которых всюду плотно в замкнутом единичном круге.

§1. ВВЕДЕНИЕ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Рассмотрим систему Малмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}$, ассоциированную с последовательностью комплексных чисел $\{z_k\}$, $|z_k| < 1$:

$$\begin{aligned} r_0(z) &= \frac{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_0 z}, \\ r_n(z) &= \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Известно, что система (1.1) ортогональна на единичной окружности $T = \{\xi : \xi = e^{i\vartheta}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$ относительно веса $(2\pi)^{-1} d\vartheta$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{r_m(\xi)} d\vartheta = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases} \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad \xi = e^{i\vartheta}.$$

Пусть $\mu(\vartheta)$ – произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[0, 2\pi]$ с бесконечным множеством точек роста. Следуя М. М. Джрбашяну, ортогонализируем упорядоченную последовательность рациональных функций (1.1) на

окружности T относительно меры $(2\pi)^{-1}d\mu$. Получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом :

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= \alpha_n z^n + \dots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_m(\xi)} d\mu(\vartheta) &= \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Теорема 1.1. *Справедливы соотношения :*

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(z) &= a_n \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \varphi_n(z) + b_n \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n^*(z), \\ \varphi_{n+1}^*(z) &= \bar{a}_n \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n^*(z) + \bar{b}_n \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \varphi_n(z),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_n^*(z) &= \frac{B_n(z)}{z} \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{z}\right)}, & B_n(z) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}, \\ a_n &= \frac{1 - z_{n+1} \bar{z}_n}{1 - |z_n|^2} \overline{\left(\frac{\varphi_{n+1}^*(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)} \right)}, & b_n &= \frac{1 - \bar{z}_{n+1} z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}^*(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}.\end{aligned}$$

Заметим, что формулы (1.2) можно вывести из одной теоремы М. М. Джрбашяна [1] (часть 1). Предлагаем более короткое доказательство. Доказательству предположим лемму, доказанную М. М. Джрбашяном (см. [1], часть 1).

Лемма 1.1. *Имеет место формула :*

$$\varphi_n^*(z) = - \frac{\bar{z}_n}{|\bar{z}_n|} \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{\alpha_n} \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(z_n)} \varphi_k(z).$$

Доказательство : Пусть $\varphi_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{nk} \varphi_k(z)$. Тогда

$$\lambda_{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n^*(\xi) \overline{\varphi_k(\xi)} d\mu(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_n(\xi)}{\varphi_n(\xi)} \frac{1}{\xi} \overline{\varphi_k(\xi)} d\mu(\vartheta).$$

Так как $\xi^{-1} B_n(\xi) \overline{\varphi_k(\xi)} = \sum_{i=0}^n \nu_{i,k} r_i(\xi)$, то $\lambda_{nk} = \nu_{nk} / \alpha_n$ и

$$\begin{aligned}\nu_{nk} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{B_n(\xi)}{\xi} \overline{\varphi_k(\xi) r_n(\xi)} d\vartheta = \frac{|z_n|}{z_n} (1 - |z_n|^2)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi_k(\xi)}{\xi - z_n} d\xi \\ &= \frac{|z_n|}{\bar{z}_n} (1 - |z_n|^2)^{1/2} \overline{\varphi_k(\xi) z_n}.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1.1 : Рассмотрим разложение

$$\frac{z_{n+1}-z}{1-\bar{z}_{n+1}}\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k^{(n)}\varphi_k(z), \quad (1.3)$$

при $k \leq n-1$ имеем

$$\overline{\lambda_k^{(n)}} = \frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_n(\xi)} \frac{1-\bar{z}_{n+1}\xi}{z_{n+1}-\xi} \varphi_k(\xi) d\mu(\vartheta).$$

Учитывая, что

$$\frac{1-\bar{z}_{n+1}\xi}{z_{n+1}-\xi} \varphi_k(\xi) = \sum_{i=0}^n \gamma_i r_i(\xi) + \frac{1-|z_{n+1}|^2}{z_{n+1}-\xi} \varphi_k(z_{n+1}),$$

найдем

$$\lambda_k^{(n)} = (1-|z_{n+1}|^2) \overline{\varphi_k(z_{n+1})} \delta_n, \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad (1.4)$$

где $\delta_n = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\overline{\varphi_n(\xi)}}{\bar{z}_{n+1}-\xi} \mu(\vartheta)$. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\left(\frac{1-\bar{z}_{n+1}\xi}{z_{n+1}-\xi} \right)} \mu(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \overline{\left(\sum_{i=0}^n \gamma_i r_i(\xi) + \frac{P_n}{z_{n+1}-\xi} \right)} \mu(\vartheta) \\ &= \frac{\bar{\gamma}_n}{\alpha_n} + \frac{\bar{P}_n}{2\pi} \int_T \frac{\overline{\varphi_n(\xi)}}{\bar{z}_{n+1}-\xi} \mu(\vartheta) = \frac{\bar{\gamma}_n}{\alpha_n} (1-|z_n|^2) \overline{\varphi_n(z_{n+1})} \delta_n. \end{aligned}$$

Легко вычислить

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{\left(\frac{1-\bar{z}_{n+1}\xi}{z_{n+1}-\xi} \varphi(\xi) - \frac{P_n}{z_{n+1}-\xi} \right)} d(\vartheta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{\varphi_n(\xi)} \frac{z_{n+1}-\xi}{1-\bar{z}_{n+1}\xi} d(\vartheta) - \frac{\bar{P}_n}{2\pi} \int_T \frac{\xi r_n(\xi)}{1-\bar{z}_{n+1}\xi} d(\vartheta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_T r_n(\xi) \overline{\varphi_n(\xi)} \frac{z_{n+1}-\xi}{1-\bar{z}_{n+1}\xi} d(\vartheta) = \\ &= -\frac{|z_n|}{\bar{z}_n} (1-|z_n|^2)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \varphi_n^*(\xi) \frac{z_{n+1}-\xi}{1-\bar{z}_{n+1}\xi} \frac{d\xi}{\xi - z_n} = \\ &= \frac{|z_n|}{\bar{z}_n} (1-|z_n|^2)^{1/2} \frac{z_n - z_{n+1}}{1-\bar{z}_{n+1}z_n} \varphi_n^*(\xi). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi_n^*(z_n) = \frac{|z_n|}{\bar{z}_n} \frac{\alpha_n}{(1-|z_n|^2)^{1/2}}$, найдем

$$\lambda_n^{(n)} = \frac{z_{n+1} - z_n}{1 - \bar{z}_{n+1}} + (1 - |z_{n+1}|^2) \overline{\varphi_n(z_{n+1})} \delta_n. \quad (1.5)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{z_{n+1} - \xi}{1 - \bar{z}_{n+1}\xi} \varphi_n(\xi) \overline{\varphi_{n+1}(\xi)} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_{n+1}(\xi)} \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i r_i(\xi) d\mu(\vartheta) = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{n+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{z_{n+1} - \xi}{1 - \bar{z}_{n+1}\xi} \varphi_n(\xi) \overline{r_{n+1}(\xi)} d\vartheta = \\ &= (1 - |z_{n+1}|^2)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_T \overline{\varphi_n^*(\xi)} \frac{1 - \bar{z}_{n+1}\xi}{z_{n+1} - \xi} \frac{d\xi}{1 - \bar{z}_{n+1}\xi} = (1 - |z_{n+1}|^2)^{1/2} \varphi_n^*(z_{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_{n+1}^{(n)} = -\alpha_{n+1}^{-1} (1 - |z_{n+1}|^2)^{1/2} \varphi_n^*(z_{n+1}). \quad (1.6)$$

Учитывая формулы (1.3) – (1.6) и лемму 1.1, получим

$$\frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n(z) = \ell_n \varphi_{n+1}(z) + q_n \varphi_{n+1}^*(z), \quad (1.7)$$

где ℓ_n и q_n – некоторые коэффициенты. Переходя к $*$ -сопряженному в формуле (1.7), получаем

$$\frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} \frac{1 - \bar{z}z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n^*(z) = \bar{\ell}_n \varphi_{n+1}^*(z) + \bar{q}_n \varphi_{n+1}(z). \quad (1.8)$$

Итак, из (1.7) и (1.8) получим

$$\bar{\ell}_n \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n(z) - q_n \frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n^*(z) = \mu_n \varphi_{n+1}(z), \quad (1.9)$$

где $\mu_n = |\ell_n|^2 - |q_n|^2$. Аналогично, переходя к $*$ -сопряженному в формуле (1.9), получим

$$\ell_n \frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n^*(z) - \bar{q}_n \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1}z} \varphi_n(z) = \mu_n \varphi_{n+1}^*(z). \quad (1.10)$$

При $z = z_n$ из (1.9) и (1.10) имеем

$$-q_n \frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} = \mu_n \frac{1 - \bar{z}_{n+1}z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}, \quad (1.11)$$

$$\ell_n = \mu_n \frac{|z_{n+1}|}{\bar{z}_{n+1}} \frac{1 - \bar{z}_{n+1}z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}^*(z)}{\varphi_n^*(z_n)}. \quad (1.12)$$

Учитывая, что $\mu_n \neq 0$, из (1.9) и (1.12) выводим формулы (1.2).

Следствие 1.1. Имеет место формула (см. [1], часть 2) :

$$s_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z) = \\ = \frac{(1 - \bar{z}_{n+1}z)(1 - \bar{z}_{n+1}\xi)}{1 - |z_{n+1}|^2} \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(\xi)} \varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(\xi)} \varphi_{n+1}(z)}{1 - \bar{\xi}z}.$$

Следствие 1.2. Все нули $\varphi_n(z)$ лежат в единичном круге $|z| < 1$.

Следствие 1.3. Имеет место формула

$$\frac{1 - |z_n|^2}{|1 - \bar{\xi}z_n|^2} \frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_{kn}|^2}{|\xi - z_{kn}|^2}, \quad (1.13)$$

где z_{kn} ($k = 1, 2, \dots, n$) — нули многочлена $\varphi_n(z)$.

§2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим рациональные функции

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} [\varphi_n(\xi) - \varphi_n(z)] d\mu(\vartheta),$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_T d\mu(\vartheta) \quad \text{и} \quad \gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_n(\xi) d\mu(\vartheta).$$

Теорема 2.1. Имеет место формула :

$$c_0 \{ \varphi_n^*(z) \psi_n(z) + \varphi_n(z) \psi_n^*(z) \} = 2 \frac{1 - |z_n|^2}{(z - z_n)(1 - \bar{z}_n z)} B_n(z).$$

Доказательство : Пусть

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\vartheta), \quad (2.1)$$

тогда

$$\psi_n(z) + \varphi_n(z) F(z) = \frac{1}{\pi c_0} \int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} d\mu(\vartheta) = z B_n(z) \frac{1}{\pi c_0} \int_T \frac{\overline{\varphi_n(\xi)}}{1 - \bar{\xi}} d\mu(\vartheta). \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) имеем

$$c_0 \{ \varphi_n^*(z) \psi_n(z) + \varphi_n(z) \psi_n^*(z) \} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_T \frac{\varphi_n^*(\xi) \varphi_n(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} d\mu(\vartheta) + \frac{\varphi_n(z)}{\pi} \int_T \frac{B_n(\xi) \overline{\varphi_n(\xi)}}{z - \xi} d\mu(\vartheta).$$

Так как (см. [1], часть 1)

$$\frac{1}{1-\bar{\xi}z} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{r_k(\xi)} r_k(z) + \frac{\overline{B_{n-1}(\xi)} B_{n-1}(z)}{1-\bar{\xi}z}, \quad (2.3)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_n^*(z)}{\pi} \int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\vartheta) &= \frac{1-|z_n|^2}{z-z_n} \frac{B_n(z)}{\pi} \int_T \frac{s_n(\xi, z)}{1-\bar{z}_n \bar{\xi}} d\mu(\vartheta) - \\ &\quad - \frac{1-|z_n|^2}{z-z_n} \frac{B_n(z) \varphi_n(z)}{\pi} \int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{1-\bar{z}_n \bar{\xi}} d\mu(\vartheta) + \\ &\quad + \frac{1-\bar{z}_n z}{z-z_n} \frac{B_n(z) \varphi_n(z)}{\pi} \int_T \frac{1-z_n \bar{\xi}}{1-\bar{z}_n \bar{\xi}} \frac{\varphi_n(\xi)}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\vartheta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} c_0 \{ \varphi_n^*(z) \psi_n(z) + \varphi_n(z) \psi_n^*(z) \} &= \\ &= 2 \frac{1-|z_n|^2}{(z-z_n)(1-\bar{z}_n z)} B_n(z) + \frac{B_n(z) \varphi_n(z)}{\pi} \int_T \varphi_n(\xi) \Omega_n(\xi, z) d\mu(\vartheta), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_n(\xi, z) = \frac{1-\bar{z}_n z}{z-z_n} \frac{1-z_n \bar{\xi}}{1-\bar{z}_n \bar{\xi}} \frac{1}{1-\bar{\xi}z} - \frac{1-|z_n|^2}{z-z_n} \frac{1}{1-\bar{z}_n \bar{\xi}} + \frac{1}{z-\xi} \equiv 0, \quad |\xi| = 1.$$

Следствие 2.1. Справедливо равенство :

$$c_0 \Re \left\{ \frac{\psi_n(\xi)}{\varphi_n(\xi)} \right\} = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad |\xi| = 1. \quad (2.4)$$

Следствие 2.2. Имеет место равенство :

$$\int_T r_k(\xi) d\sigma_n(\vartheta) = \int_T r_k(\xi) d\mu(\vartheta),$$

где

$$d\sigma_n(\vartheta) = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \frac{d\vartheta}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема 2.2. Справедливы соотношения :

$$\psi_{n+1}(z) = a_n \frac{z_n - z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \psi_n(z) - b_n \frac{1-\bar{z}_n z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \psi_n^*(z),$$

$$\psi_{n+1}^*(z) = \bar{a}_n \frac{1-\bar{z}_n z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \psi_n^*(z) - \bar{b}_n \frac{z_n - z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \psi_n(z).$$

Доказательство : Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\psi_{n+1}^*(z) - \bar{a}_n \frac{1-\bar{z}_n z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \psi_n^*(z) = -\bar{b}_n \frac{z_n - z}{1-\bar{z}_{n+1}z} \psi_n(z) + J(z),$$

где

$$J(z) = \frac{B_{n+1}(z)}{\pi c_0} \int_T \frac{\varphi_{n+1}(\xi)}{z - \xi} d\mu(\vartheta) - \bar{a}_n \frac{1 - \bar{z}_n z}{1 - \bar{z}_{n+1} z} \frac{B_n(z)}{\pi c_0} \int_T \frac{\overline{\varphi_{n+1}(\xi)}}{z - \xi} d\mu(\vartheta) + \bar{b}_n \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_{n+1} z} \frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \frac{1}{\pi c_0} \int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{1 - \bar{\xi} z} d\mu(\vartheta).$$

После преобразования с использованием (1.2) и (2.3) имеем

$$J(z) = \frac{B_{n+1}(z)}{\pi c_0} \int_T \frac{\overline{\varphi_{n+1}(\xi)}}{z - \xi} \left\{ 1 - \frac{1 - \bar{z}_n z}{z_{n+1} - z} \frac{z_{n+1} - \xi}{1 - \bar{z}_n \xi} \right\} d\mu(\vartheta).$$

Остается заметить, что

$$1 - \frac{1 - \bar{z}_n z}{z_{n+1} - z} \frac{z_{n+1} - \xi}{1 - \bar{z}_n \xi} = \frac{(z - \xi)(1 - \bar{z}_n z_{n+1})}{(z - z_{n+1})(1 - \bar{z}_n \xi)}.$$

Используя (2.3), найдем $J(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

§ 3. РЕКУРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛИТЕЛЕЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\varphi_n(z) = \tau_n \omega_n(z) / \Pi_n(z)$, где $\tau_n = \varphi_n^*(0)$, $n = 0, 1, \dots$,

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \xi_{kn}) \quad \text{и} \quad \pi_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 - \bar{z}_k z) \quad (|\xi_{kn}| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Согласно определению $\varphi_n^*(z) = z^{-1} B_n(z) \overline{\varphi_n(z^{-1})} = \lambda_n \bar{\tau}_n \omega_n^*(z) / \pi_n(z)$,

$$\lambda_n = \prod_{k=0}^n \left(-\frac{|z_k|}{z_k} \right) \quad \text{и} \quad \omega_n^*(z) = z^n \bar{\omega}_n \left(\frac{1}{z} \right),$$

так формулы (1.2) принимают вид

$$\omega_{n+1}(z) = u_n(1 - \bar{z}_n z) \omega_n^*(z) - v_n(z_n - z) \omega_n(z), \quad (3.1)$$

$$\omega_{n+1}^*(z) = \bar{v}_n(1 - \bar{z}_n z) \omega_n^*(z) - \bar{u}_n(z_n - z) \omega_n(z),$$

$$u_n(z) = (1 - |z_n|^2)^{-1} \omega_{n+1}(z) / \omega_n^*(z) = [\omega_{n+1}(0) + z_n \omega_n(0)] / (1 - |z_n \omega_n(0)|^2),$$

$$\bar{v}_n(z) = (1 - |z_n|^2)^{-1} \omega_{n+1}^*(z) / \omega_n^*(z) = [1 + z_n \omega_n(0) \overline{\omega_{n+1}(0)}] / (1 - |z_n \omega_n(0)|^2).$$

Теорема 3.1. *Имеет место тождество*

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq 1} \left| \frac{\omega_n^*(z)}{\omega_n^*(z)} \right|^2 ds \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |z_k|^2)^{-2k-1} \frac{|\omega_{k+1}^*(z_k)|^{2(k+1)}}{|\omega_k^*(z_k)|^{2k}} \left(1 - \left|\frac{\omega_{k+1}(z_k)}{\omega_k^*(z_k)}\right|^2\right)^{k+1} = \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |z_k|^2) |\omega_k^*(z_k)|^2 \left(\frac{1 - |\omega_{k+1}(0)|^2}{1 - |z_k \omega_k(0)|^2}\right)^{k+1}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Доказательство: Вычисление интеграла дает

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq 1} \left| \frac{\omega_n^*(z)}{\omega_n^*(z)} \right|^2 ds \right\} = \prod_{k=1}^n \omega_n^*(\xi_{kn}). \quad (3.3)$$

Далее, из (3.1) при $z = \xi_{kn+1}$ и $k = 1, 2, \dots, n+1$ имеем

$$\prod_{k=1}^{n+1} \omega_n^*(\xi_{kn+1}) = (\bar{v}_n)^{n+1} \left(1 - \left|\frac{u_n}{v_n}\right|^2\right)^{n+1} \frac{\omega_{n+1}^*(z_n)}{\omega_{n+1}^*(\xi_{kn})} \prod_{k=1}^n \omega_{n+1}^*(\xi_{kn}), \quad (3.4)$$

а при $z = \xi_{kn}$ и $k = 1, 2, \dots, n$

$$\prod_{k=1}^{n+1} \omega_{n+1}^*(\xi_{kn}) = v_n^n \omega_n^*(z_n) \prod_{k=1}^n \omega_{n+1}^*(\xi_{kn}). \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) следует (3.2) (при $z_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, см. [2]).

Заметим, что

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq 1} \left| \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} \right|^2 ds \right\} = \prod_{k=0}^n |\Phi_n^*(z_k)|^2 \pi_n(z_k).$$

Следствие 3.1. Имеет место равенство $\Phi_n(z) = \varphi_n(z)/\tau_n$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq 1} \left| \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} \right|^2 ds \right\} &= \left(\prod_{k=0}^n |\Phi_n^*(z_k)|^2 \pi_n(z_k) \right)^{-1} \\
&\times \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |z_k|^2) |\omega_k^*(z_k)|^2 \left(\frac{1 - |\omega_{k+1}(0)|^2}{1 - |z_k \omega_k(0)|^2} \right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Следствие 3.2. Справедливо равенство:

$$|\tau_n|^{-2} = |\tau_0|^{-2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |\omega_{k+1}(0)|^2}{1 - |z_k \omega_k(0)|^2}.$$

Теорема 3.2. Для того, чтобы $|\omega_n^*(z)|^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри $|z| < 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1 - |z_n|^2}{|1 - \bar{z}_n \xi|^2} \frac{1}{n |\varphi_n(\xi)|^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(\xi)|^2 d\vartheta \xrightarrow{*} d\vartheta \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где знак $\xrightarrow{*}$ означает слабую сходимость в $C(T)$.

Доказательство: Из (1.13) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - \bar{z}_n \xi|^2} \frac{1}{n |\varphi_n(\xi)|^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(\xi)|^2 \ln |\xi - z| d\vartheta = \ln |\omega_n^*(\bar{z})|^{1/n}.$$

Остается воспользоваться леммой 2 из [3].

Теорема 3.3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(0) = 0$, то для любого $f \in C(T)$ и произвольной фиксированной точки $\xi \in T$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_{kn}) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(\xi) d\theta,$$

где ξ_{nk} ($k = 1, 2, \dots, n$) — нули многочлена $F_n(z) = \omega_n(z) + \xi \omega_n^*(z)$.

Доказательство: Так как все нули многочлена $\omega_n(z)$ лежат внутри единичного круга $|z| < 1$, то все нули многочлена $F_n(z)$ лежат на единичной окружности T (см. [7]). Достаточно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(z)|^{1/n} = 1$ равномерно внутри $|z| < 1$ (см. [4]). При условиях теоремы легко доказывается (см. [4, 5]), что при $z_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $|\omega_n^*(z)|^{1/n} \rightarrow 1$ и $\frac{\omega_n(z)}{\omega_n^*(z)} \rightarrow 0$ равномерно внутри $|z| < 1$.

Теорема 3.4. Для произвольной последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ ($|z_k| \leq 1, k = 0, 1, 2, \dots$), существует последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}$ ($|\omega_k| \leq 1, k = 0, 1, 2, \dots$) такая, что множество нулей полиномов $\omega_k(z) = z^k + \dots$, определенных по формулам

$$\omega_{k+1}(z) = u_k(1 - \bar{z}_k z) \omega_k^*(z) - v_k(z_k - z) \omega_k(z), \quad \omega_0(z) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_k = (\omega_{k+1} + z_k \omega_k) / (1 - |z_k \omega_k|^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v_k = (1 + \bar{z}_k \bar{\omega}_k \omega_{k+1}) / (1 - |z_k \omega_k|^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

всюду плотно в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Теорема доказывается методом работы [6].

В заключение заметим, что формулы (1.2) имеют свои аналоги в теории ортогональных на единичной окружности многочленов (см. [5]).

Abstract. The paper derives some recurrent formulas for orthogonal on the circle rational functions with fixed poles. A theorem on existence of orthogonal rational functions with a set of zeros everywhere dense in the closed unit disc is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на окружности", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 1, часть 1, стр. 3 – 24, часть 2, 106 – 125, 1966.
2. Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г. Сеге", Изв. АН СССР, сер. мат., том 35, № 2, стр. 408 – 427, 1971.
3. А. В. Абрамян, "О нулях ядра Сеге", Доклады АН СССР, № 4, стр. 152 – 155, 1998.
4. Е. А. Рахманов, "Об асимптотике отношения ортогональных многочленов", Мат. Сборник, том 118(160), № 1(5), 104 – 117.

5. Я. Л. Геронимус, Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, Физматгиз, Москва, 1958.
6. M. Pilar Alfaro, Luis Vigil, "Solution of a problem of P. Turan on Zeros of Orthogonal polynomials on the unit circle", J. of Approx. Theory, vol. 53, pp. 195 – 197, 1988.
7. Г. Поляа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, М., Наука, 1978.

Поступила 21 Сентября 2005

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО q -ХРОМАТИЧЕСКОГО ПОДГРАФА

Р. О. Адамян и С. Е. Маркосян

Ереванский Государственный Университет

E-mail : ruboam@yahoo.com

Резюме. В настоящей работе исследована задача нахождения максимального q -хроматического подграфа, где q – натуральное число. Построен класс графов сравнения, для которых алгоритм, приведенный в [1], не дает оптимального решения, когда $q = \omega - 2$, где ω – число вершин наибольшего полного подграфа. Предложен оптимальный алгоритм для графов сравнения, когда $q = \omega - 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – обыкновенный граф с хроматическим числом $\chi(G)$ и q ($1 \leq q \leq \chi(G)$) – целое число. Найти частичную q -раскраску (q -хроматический подграф) в графе G значит найти q непересекающихся, независимых подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_q$ множества вершин G . q -хроматический подграф будем называть максимальным (т.е. обладающим оптимальной q -раскраской), если число “раскрашенных вершин” $|\bigcup_{1 \leq j \leq q} S_j|$ принимает свое максимальное значение. Поэтому задачу нахождения максимального q -хроматического подграфа иногда называют задачей нахождения q -максимальных независимых множеств (q -MIS).

Проблема нахождения максимального q -хроматического подграфа является обобщением проблем нахождения наибольшего независимого множества ($q = 1$) и раскраски графа минимальным количеством красок ($q = \chi(G)$). Впервые задача q -MIS была сформулирована и решена для графов интервалов в работах [2], [3]. Потом были разработаны алгоритмы решения этой задачи для классов хордальных [4], транзитивно и котранзитивно ориентируемых графов [1], [5], [11]. Некоторые свойства оптимального (максимального) q -хроматического подграфа,

связанные со свойствами минимума соотношений, были исследованы в работах [6], [7].

Обыкновенный неориентированный граф $G = (V, E)$ будем называть *графом сравнения*, если существует взаимно-однозначное отображение между вершинами графа и элементами некоторого частично упорядоченного множества такое, что между двумя вершинами существует ребро тогда и только тогда, когда соответствующие элементы частично упорядоченного множества сравнимы [8]. Класс графов сравнения совпадает с классом транзитивно ориентируемых графов. Иногда граф сравнения будем обозначать $\bar{G} = (V, \Gamma)$, где Γ – многозначное отображение как в [9].

Граф будем называть *графом косравнения*, если его дополнение является графом сравнения. Нахождение максимального q -хроматического подграфа в графе G эквивалентно нахождению таких полных подграфов $K_1, K_2, \dots, K_q$ в дополнении графа G , что $|\bigcup_{1 \leq j \leq q} K_j|$ имеет максимальное значение. Эта задача является задачей нахождения q максимальных полных подграфов. Задача нахождения q максимальных полных подграфов для графов сравнения имеет эффективное решение [5]. Следовательно, задача нахождения максимального q -хроматического подграфа для графов косравнения имеет эффективное решение.

Если каким-то способом транзитивно ориентировать граф сравнения G , то длина самой длинной цепи в транзитивно ориентированном графе $\bar{G}$ равна хроматическому числу графа G [9]. Следовательно, для нахождения максимального q -хроматического подграфа графа $\bar{G}$, необходимо удалить из $\bar{G}$ минимальное количество вершин Y , чтобы в графе $\bar{G} - Y$ не осталось цепи длиннее q . Количество удаляемых вершин не зависит от того, каким образом транзитивно ориентирован граф G , чтобы получить ориентированный граф $\bar{G}$, так как число вершин наибольшего полного подграфа произвольного графа сравнения G равно длине самой длинной цепи любого транзитивно ориентированного графа $\bar{G}$, полученного от G .

Теперь определим понятие ранжировки транзитивно ориентированного графа. *Ранжировкой* транзитивно ориентированного графа $\bar{G} = (V, \Gamma)$ называется разделение множества его вершин V на подмножества $X_1, X_2, \dots, X_{\omega(G)}$ следующим образом

$$X_1 = \{v \in V / \Gamma^{-1}v = \emptyset\},$$

$$X_i = \left\{ v \in V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j / \Gamma^{-1}v \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \right\}, \quad i = 2, \dots, \omega$$

. Очевидно, что каждое подмножество X_j является независимым множеством вершин, а разбиение $X_1, X_2, \dots, X_{\omega(G)}$ — минимальной раскраской графа G .

В [1] приведен следующий алгоритм для нахождения максимального q -хроматического подграфа в графе сравнения G .

1. Граф G транзитивно ориентировать и обозначить полученный граф через $\vec{G}_\omega$.
2. Взять $k = \omega$.
3. Ранжировать граф $\vec{G}_k$.
4. Построить сеть N_k с добавлением вершин s и t к вершинам $\vec{G}_k$, где участвуют только ребра между соседними рангами ранжированного графа $\vec{G}_k$, а вершины s и t соединены со всеми вершинами первого и последнего рангов соответственно.
5. Найти в сети N_k минимальный вершинный разрез Y_k с помощью алгоритма нахождения максимального потока.
6. Построить граф $\vec{G}_{k-1} = \vec{G}_k - Y_k$.
7. Если $k = q + 1$, то завершить работу алгоритма, в противном случае взять $k = k - 1$ и перейти к шагу 3.

В 5-ом шаге алгоритма существенно то, что выбирается вершинный разрез, получаемый с помощью алгоритма нахождения максимального потока, а не произвольный минимальный вершинный разрез. Например, для получения максимального $\omega - 2$ -хроматического подграфа в графе, приведенном на Рис. 1, достаточно удалить вершины x_1 и x_ω , однако если алгоритм возьмет произвольный минимальный вершинный разрез, то число удаляемых вершин может быть 3.

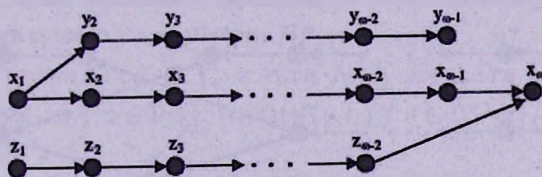
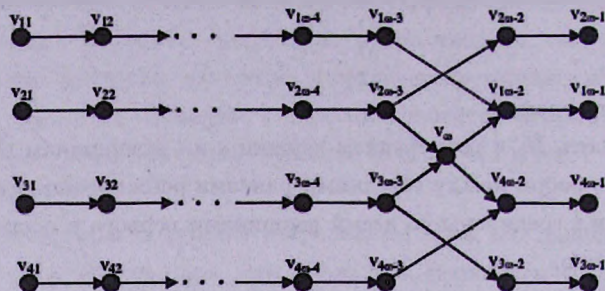
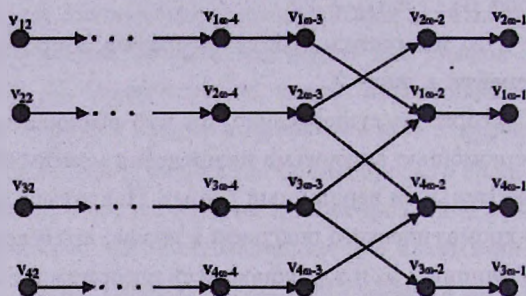
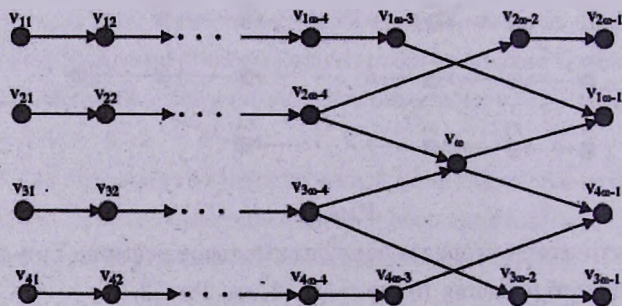


Рис. 1.

Очевидно, что этот алгоритм дает оптимальное решение при $q = \omega - 1$, но не дает оптимального решения при $q = \omega - 2$, см. Рис. 2.

Ясно, что в первом цикле алгоритм удалит из графа $\vec{G}_\omega$ вершину v_ω . В результате получится $\omega - 1$ -хроматический граф $\vec{G}_{\omega-1}$. Во втором цикле из графа $\vec{G}_{\omega-1}$ будут удалены вершины $v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}$ (см. Рис. 3). Итак, мы получили $\omega - 2$ -хроматический граф $\vec{G}_{\omega-2}$ имеющий $4\omega - 8$ вершин.

Рис. 2. Исходный граф $\vec{G}_\omega$.Рис. 3. Граф $\vec{G}_{\omega-2}$, полученный в конце второго цикла.Рис. 4. Максимальный $\omega - 2$ -хроматический подграф.

Заметим, что максимальный $\omega - 2$ -хроматический подграф в графе G , который получается из G удалением вершин $v_{2\omega-3}, v_{1\omega-2}, v_{3\omega-3}, v_{4\omega-2}$, содержит $4\omega - 7$ вершин (см. Рис. 4). Следовательно, алгоритм полученный в [1] не

оптимален.

§2. ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ q-ХРОМАТИЧЕСКОГО ПОДГРАФА ПРИ $q = \omega - 2$

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Любым способом транзитивно ориентировать граф G , затем ранжировать полученный граф $\vec{G}_\omega$.
2. Добавляя вершины s и t к графу $\vec{G}_\omega$, построить сеть N_ω , где участвуют только ребра между соседними рангами ранжированного графа $\vec{G}_\omega$, а вершины s и t соединены со всеми вершинами первого и последнего рангов соответственно.
3. Найти в сети N_ω минимальный вершинный разрез Y_ω .
4. Построить транзитивно ориентированный и ранжированный граф $\vec{G}_{\omega-1} = \vec{G}_\omega - Y_\omega$.
5. Из ранжированного графа $\vec{G}_{\omega-1}$ построить сеть $N_{\omega-1}$, как это было сделано для сети N_ω and $\vec{G}_\omega$.
6. Добавить удаленные вершины Y_ω к $N_{\omega-1}$ следующим способом. Пусть $X_0 = \{s\}, X_1, \dots, X_{\omega-1}, X_\omega = \{t\}$ — ранги сети $N_{\omega-1}$. Вершину $y \in Y_\omega$ добавить между рангами X_k и X_{k+1} , так, чтобы все вершины, предшествующие y в графе $\vec{G}_\omega - (Y_\omega \setminus \{y\})$, находились бы в рангах $X_0, X_1, \dots, X_k$, а все последующие y вершины находились бы в рангах $X_{k+1}, \dots, X_{\omega-1}, X_\omega$. Очевидно, что для каждой вершины $y \in Y_\omega$ существует единственное число k такое, что вершину y можно добавить между рангами X_k и X_{k+1} . С каждой вершиной $y \in Y_\omega$, добавленной между рангами X_k и X_{k+1} , добавить те дуги из графа $\vec{G}_\omega$, которые соединяют вершину y с вершинами в рангах X_k и X_{k+1} . Полученную сеть обозначить через $N_{\omega-1}^+$.
7. Для каждой вершины $y_i \in Y_\omega$ к сети $N_{\omega-1}^+$ добавить вершины s_i и t_i и дуги $(s, s_i), \{(s_i, u) / u \in \Gamma y_i\}, (t_i, t), \{(v, t_i) / v \in \Gamma^{-1} y_i\}$. Полученную сеть обозначить $N_{\omega-1}^{++}$.
8. Найти минимальный вершинный разрез $Y_{\omega-1}$ в $N_{\omega-1}^{++}$.
9. $Y_{\omega-1}$ разделить на две части $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} \cup Y_{st}$, где

$$Y_{st} = Y_{\omega-1} \cap \{s_i, t_i / y_i \in Y_\omega\}, \quad Y'_{\omega-1} = Y_{\omega-1} \setminus Y_{st}.$$

Затем построить $Y = Y'_{\omega-1} \cup Y'_\omega$, где

$$Y'_\omega = \{y_i \in Y_\omega / \{s_i, t_i\} \cap Y_{st} \neq \emptyset\}.$$

Если $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, то $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ и $Y_\omega \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$ (см. свойства 5 и 6 пункта 2.1 ниже). Таким образом, $|Y'_\omega| = |Y_{st}|$ и $|Y| = |Y_{\omega-1}|$.

Граф $\vec{G}_{\omega-2} = \vec{G}_{\omega} - Y$ будет максимальным $\omega - 2$ -хроматическим подграфом.

Для обоснования алгоритма сперва покажем, что полученный подграф $\omega - 2$ -хроматический, а потом, что он — максимальный. Во время доказательства при вычислении длин цепей мы будем игнорировать вершины s и t .

2.1. Некоторые свойства в сетях $N_{\omega-1}^+$ и $N_{\omega-1}^{++}$.

1. Если в сети $N_{\omega-1}^{++}$ существует вершина $y \in Y_{\omega}$ такая, что $\Gamma^{-1}y = \{s\}$ или $\Gamma y = \{t\}$, то $y \in Y$.

Доказательство : Предположим $y_i \in Y_{\omega}$ и $\Gamma^{-1}y_i = \{s\}$. Тогда согласно построению сети $N_{\omega-1}^{++}$ добавлена вершина t_i в $N_{\omega-1}^{++}$, которая соединена с вершинами s и t дугами (s, t_i) и (t_i, t) . Следовательно, в сети $N_{\omega-1}^{++}$ существует цепь st_it , откуда следует, что $t_i \in Y_{\omega-1}$. Следовательно, $y_i \in Y'_{\omega} \subseteq Y$.

Аналогичным способом покажем, что если $y_i \in Y_{\omega}$ и $\Gamma y_i = \{t\}$.

2. В $N_{\omega-1}^+$ существуют $|Y_{\omega}|$ вершино-непересекающиеся цепи длиной ω , каждая из них проходит через точно одну вершину из Y_{ω} .

Доказательство : Так как Y_{ω} — минимальный вершинный разрез в N_{ω} , то существуют вершино-непересекающиеся цепи $P_1, P_2, \dots, P_{|Y_{\omega}|}$ длиной ω , каждая из которых проходит через точно одну вершину из Y_{ω} . Покажем, что подобные цепи существуют в $N_{\omega-1}^+$. Пусть $y_i \in Y_{\omega}$ и $y_i \in P_i$, $P_i = sv_1 \dots v_{k-1}y_iv_{k+1} \dots v_{\omega}t$. Покажем, что в $N_{\omega-1}$ существует цепь $P_i - y_i = sv_1 \dots v_{k-1}v_{k+1} \dots v_{\omega}t$. Из этого будет следовать, что в $N_{\omega-1}^+$ существует цепь P_i . Ясно, что в $N_{\omega-1}$ существует цепь $sv_1 \dots v_{k-1}$, так как из него не была удалена ни одна из его вершин. Предположим, (v_{j-1}, v_j) — первая дуга, отсутствующая в P_i (при $j = k + 1$ будем рассматривать дугу (v_{k-1}, v_{k+1})). Эта дуга может отсутствовать только тогда, когда вершины v_{j-1} и v_j не находятся в соседних рангах $\vec{G}_{\omega-1}$. Следовательно, в $N_{\omega-1}$ существует $s - v_j$ цепь R , длина которой больше j . Но в этом случае цепь $Rv_{j+1} \dots v_{\omega}t$ будет иметь длину ω , что противоречит тому, что Y_{ω} — разрез. Итак, в $N_{\omega-1}$ имеем цепи $P_i - y_i$.

3. В $N_{\omega-1}^+$ не существует цепь из y_i в y_j , где $y_i, y_j \in Y_{\omega}$ и $y_i \neq y_j$.

Доказательство. Если существует цепь между двумя вершинами из Y_{ω} , то найдутся две вершины y_i и y_j ; между которыми существует цепь, не проходящая через другие вершины из Y_{ω} . Пусть y_i находится между рангами $k_i - 1$ и k_i Y_{ω} , а y_j — рангами $k_j - 1$ и k_j ($k_i < k_j$). Предположим, что существует цепь $P = y_iv_{k_i} \dots v_{k_j-1}y_j$. Возьмем части $sv_1 \dots v_{k_i-1}y_i$ и $y_jv_{k_j} \dots v_{\omega-1}t$ цепей P_i и P_j , проходящих через вершины y_i и y_j , как описано

в свойстве 2. В этом случае цепь $R = v_1 \cdots v_{k_i-1} y_i v_{k_i} \cdots v_{k_j-1} y_j v_{k_j} \cdots v_{\omega-1} t$ будет иметь длину $\omega + 1$, что приводит к противоречию.

4. Любая цепь в сети $N_{\omega-1}^{++}$ от s до t может пройти не более, чем через одну s_i или t_j вершину. Таким образом, любая цепь в сети $N_{\omega-1}^{++}$ может иметь самое большее один прыжок.

Доказательство : Согласно свойству 3 в сети $N_{\omega-1}^+$ не существует цепи между двумя разными вершинами из Y_{ω} , поэтому в $N_{\omega-1}^{++}$ нет цепи между какими-то вершинами s_i и t_j . Таким образом, любая цепь в $N_{\omega-1}^{++}$, проходящая от s до t , может пройти самое большее через одну вершину s_i или t_j .

5. $Y_{\omega} \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$.

Доказательство : Предположим, $y \in Y_{\omega} \cap Y_{\omega-1}$. Так как $Y_{\omega-1}$ — минимальный вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$, то в $N_{\omega-1}^{++}$ существуют $|Y_{\omega-1}|$ вершино-непересекающиеся цепи, каждая из которых проходит через точно одну вершину из $Y_{\omega-1}$. Пусть $P = s \cdots u y v \cdots t$ — одна из этих цепей, которая проходит через y . Согласно конструированию сети $N_{\omega-1}^+$, в $N_{\omega-1}^+$ существует дуга (u, v) , следовательно, удалением вершины y цепь P не разорвется. Это противоречит тому, что $Y_{\omega-1}$ — вершинный разрез.

6. Если $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, то $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$.

Доказательство. Предположим, что $Y_{st} \supseteq \{s_i, t_i\}$. $Y_{\omega-1}$ — минимальный вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$, поэтому существуют $|Y_{\omega-1}|$ вершино-непересекающиеся цепи, каждая из которых проходит через точно одну вершину из $Y_{\omega-1}$. Пусть через s_i и t_i проходят P_{s_i} и P_{t_i} из этих цепей : $P_{s_i} = s s_i v_1 \cdots v_k t$, $P_{t_i} = s u_1 \cdots u_m t_i t$. Тогда дуга (u_m, v_1) принадлежит $N_{\omega-1}^{++}$. Следовательно, $R = s u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_k t$ — цепь в $N_{\omega-1}^{++}$, что противоречит тому, что $Y_{\omega-1}$ — вершинный разрез.

7. Если $y_i \in Y_{\omega} \setminus Y$, то любые $s - y_i$ и $y_i - t$ цепи проходят по крайней мере через одну вершину из Y .

Доказательство : Очевидно, $y_i \in Y_{\omega}$ и $y_i \notin Y$, следовательно, $\{s_i, t_i\} \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$. Следовательно, любая $s - t_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y_{\omega-1}$, так как $Y_{\omega-1}$ — вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$. Аналогично, любая $s_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из Y .

8. Если $y_i \in Y \cap Y_{\omega}$, то или любая $s - y_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$ или любая $y_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$.

Доказательство : Очевидно, $y_i \in Y \cap Y_\omega \Rightarrow \{s_i, t_i\} \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow |\{s_i, t_i\} \cap Y| = 1$. Поэтому, если $s_i \notin Y$, то любая $y_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$. Аналогично, если $t_i \notin Y$, то любая $s - y_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$.

2.2. Доказательство $\omega - 2$ -хроматичности графа $\bar{G}_{\omega-2}$.

Теорема 1. Граф $\bar{G}_{\omega-2}$ $\omega - 2$ -хроматичен.

Доказательство : Чтобы показать, что граф $\bar{G}_{\omega-2}$ $\omega - 2$ -хроматичен, достаточно показать, что в $\bar{G}_{\omega-2}$ нет цепи длиннее, чем $\omega - 2$. Предположим, $Q = u \cdots v$ - цепь в $\bar{G}_{\omega-2}$. Если Q не содержит вершин из множества Y_ω , то Q не может иметь длину больше $\omega - 2$, потому что в противном случае получится, что Q содержит вершины со всех рангов сети $N_{\omega-1}^+ - Y$, так как $N_{\omega-1}^+$ имеет только $\omega - 1$ рангов. Следовательно, Q есть сеть в $N_{\omega-1}^+ - Y$, что противоречит тому, что Y - разрез в $N_{\omega-1}^+$. Если Q содержит вершины из множества Y_ω , то из вершин $y_i \in Y_\omega$, принадлежащих Q , возьмем самую близкую к u и из вершин $y_j \in Y_\omega$ - самую близкую к v (заметим, что вершины y_i и y_j могут совпадать). Предположим, вершина y_i добавлена к сети $N_{\omega-1}$ между рангами k_i и $k_i + 1$, а вершина y_j - между рангами k_j и $k_j + 1$ ($k_i \leq k_j$). Тогда часть цепи Q от y_i до y_j не может иметь длину больше $k_j - k_i + 1$, так как в противном случае, взяв цепи, сконструированные в свойстве 2. пункта 2.1 и проходящие через y_i и y_j и соединяя части этих цепей от s до y_i и от y_j до t (имеющие длину $k_i + 1$ и $\omega - k_j$ соответственно) с частью Q от y_i до y_j . Получим, что в графе $\bar{G}$ есть цепь длиннее, $(k_i + 1) + (k_j - k_i + 1) + (\omega - k_j) - 2 = \omega^1$, что приводит к противоречию.

Часть цепи Q от u до y_i не может иметь длину больше k_i , так как, в противном случае, получится, что часть цепи Q от u до y_i содержит вершины из всех рангов от 1 до k_i сети $N_{\omega-1}^+ - Y$, следовательно, части цепи Q от u до y_i будет цепью в $N_{\omega-1}^+ - Y$, что противоречит свойству 7. из 2.1. Аналогично, по свойству 7. из 2.1 часть цепи Q от y_j до v не длиннее $\omega - k_j - 1$. Следовательно, длина цепи Q не превосходит $(k_i) + (k_j - k_i + 1) - (\omega - k_j - 1) - 2 = \omega - 2$. Итак, мы показали, что в графе $\bar{G}_{\omega-2}$ нет цепи, длиннее $\omega - 2$. Теорема доказана.

2.3. Доказательство оптимальности алгоритма.

Теорема 2. Алгоритм удаляет минимальное количество вершин для получения $\omega - 2$ -хроматического подграфа.

Доказательство : Пусть Z - некоторое оптимальное решение. Для доказательства оптимальности алгоритма достаточно показать, что в $N_{\omega-1}^{++}$ существует

¹Во время подсчета длины цепи отнимаем 2, потому что вершины y_i и y_j сосчитаны дважды.

вершинный разрез, содержащий $|Z|$ вершин.

Если $|Z| = |Y|$, то в качестве вершинного разреза в $N_{\omega-1}^{++}$ возьмем $Y_{\omega-1}$, так как $|Y_{\omega-1}| = |Y|$.

Предположим, что $|Z| < |Y|$. Так как $Y_{\omega-1}$ — минимальный вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$ и $|Y_{\omega-1}| = |Y|$, то в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ существует $s-t$ цепь. Далее, Z — разрез в $N_{\omega-1}^{++}$, поэтому любая $s-t$ цепь в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ обязательно должна пройти через вершины s_i или t_i . Кстати, ни для какого фиксированного i в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ не существуют $s-t$ цепи, проходящие через s_i и t_i , так как, соединяя эти цепи, получим, что в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ существует цепь $s-t$. Это противоречит тому, что Z есть решение.

Пусть

$$I_t = \{i / t_i \in N_{\omega-1}^{++} - Z, \text{ существует } s-t \text{ цепь, проходящая через } t_i\},$$

$$I_s = \{i / s_i \in N_{\omega-1}^{++} - Z, \text{ существует } s-t \text{ цепь, проходящая через } s_i\}.$$

Очевидно, $I_s \cap I_t = \emptyset$.

Пусть $K_t = \{y_i \in Y_{\omega} / i \in I_t\}$ и $K_s = \{y_i \in Y_{\omega} / i \in I_s\}$. Далее, пусть $\{P_i / i \in I_t\}$ и $\{R_i / i \in I_s\}$ — множества вершино-непересекающихся $s-t$ цепей длиной ω , построенные в свойстве 2. из 2.1 и проходящие через все вершины K_t и K_s соответственно. Соединяя существующую в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ $s-t_i$ цепь с y_i-t частью цепи P_i , получим цепь P'_i . Аналогично, соединяя существующую в $N_{\omega-1}^{++} - Z$ s_i-t цепь с $s-y_i$ частью цепи R_i , получим R'_i цепь. По построению цепи P'_i его y_i-t часть проходит по крайней мере через две вершины из Z . Пусть v_{i_0} самая близкая к y_i вершина из Z на y_i-t части цепи P'_i (v_{i_0} и y_i могут совпадать).

Пусть $V_t = \{v_{i_0} / i \in I_t\}$. Аналогично, пусть v_{i_0} самая близкая к y_i вершина из Z на $s-y_i$ части цепи R'_i и пусть $V_s = \{v_{i_0} / i \in I_s\}$. Кстати, $V_s \cap V_t = \emptyset$, так как цепи P_i и R_i — вершино-непересекающиеся. По построению множества V_t , каждая вершина из V_t следует за некоторой вершиной из Y_{ω} в $N_{\omega-1}^{++}$. Итак, никакая вершина из V_t не может предшествовать никакой вершине из Y_{ω} в $N_{\omega-1}^{++}$, так как в противном случае получим цепь между двумя вершинами из Y_{ω} в $N_{\omega-1}^{++}$.

Аналогично, каждая вершина в V_s предшествует какой-нибудь вершине из Y_{ω} и не следует ни за какой вершиной из Y_{ω} . Итак, в $N_{\omega-1}^{++}$ никакая вершина из V_t не может предшествовать никакой вершине из V_s .

Теперь покажем, что если $S = \{s_i / i \in I_s\}$ и $T = \{t_i / i \in I_t\}$, то множество

$$Z' = Z \setminus (V_s \cup V_t) \cup T \cup S$$

есть вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$. Предположим обратное, в $N_{\omega-1}^{++} - Z'$ существует $s-t$ цепь Q . Так как $Z \cup S \cup T$ есть вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$, то Q содержит

вершины из множества $V_s \cup V_t$. Если Q содержит вершины из V_t , то пусть v_{i_0} самая близкая к t вершина из V_t на Q (v_{i_0} будет ближайшей из множества $V_s \cup V_t$, так как все вершины из V_t следуют за вершинами из V_s). Соединяя $s - v_{i_0}$ часть цепи P'_i , проходящей через v_{i_0} и $v_{i_0} - t$ часть цепи Q , построим новую цепь W в $N_{\omega-1}^{++}$. Заметим, что v_{i_0} не предшествует ни одной вершине из Y_ω , поэтому она не предшествует ни одной вершине t_i . Следовательно, $v_{i_0} - t$ часть цепи Q проходит через все ранги $N_{\omega-1}^{++}$, между v_{i_0} и t . Следовательно, W имеет длину ω , но содержит только одну вершину v_{i_0} из Z . Это противоречит тому, что Z есть решение. Если Q не содержит вершины из V_t , то взяв самую близкую к s вершину из V_s на Q , получим цепь длиной ω , как в предыдущем случае, которая содержит только одну вершину из Z . Это противоречит тому, что Z есть решение задачи.

Таким образом, мы доказали, что Z' есть вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$ и $|Z| = |Z'|$. Следовательно, алгоритм оптимальный. Теорема доказана.

§3. ПРИМЕР, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЙ РАБОТУ АЛГОРИТМА

Рассмотрим такой пример, где в графе $\vec{G}_\omega$ есть цепь между двумя вершинами из Y_ω , но в сети $N_{\omega-1}^+$ нет такой цепи. В качестве входа в алгоритм возьмем граф G из Рис. 5.

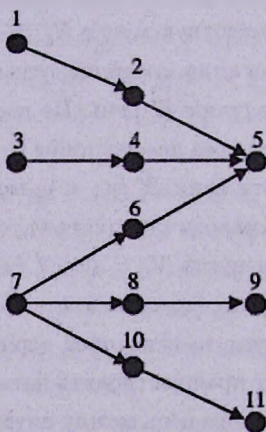


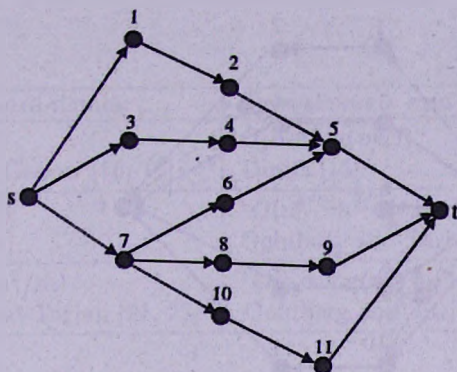
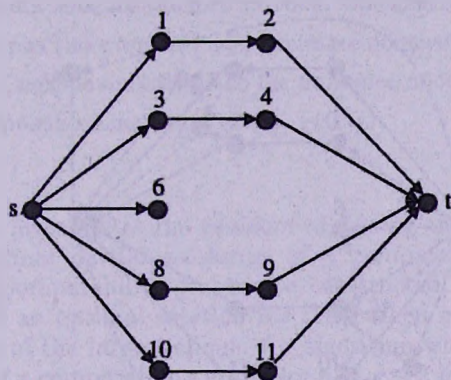
Рис. 5. Исходный граф $\vec{G}_\omega$.

В конце 2-ого шага получим сеть N_ω , представленную на Рис. 6.

В сети N_ω $Y_\omega = \{5, 7\}$ является минимальным вершинным разрезом. Следовательно, алгоритм построит граф $\vec{G}_{\omega-1}$ и соответствующую сеть $N_{\omega-1}$ (Рис. 7).

В конце 6-ого шага алгоритма получим сеть $N_{\omega-1}^+$ из Рис. 8. Добавляя

вершины s_i и t_i в конце 7-ого шага, получим сеть $N_{\omega-1}^{++}$ из Рис. 9. Заметим, что $Y_{\omega-1} = \{2, 4, s_5, 8, t_7, 10\}$ – минимальный вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$. Этот разрез содержит вершины s_i и t_i типов. Поэтому по алгоритму, вместо вершин s_5 и t_7 возьмем вершины 5 и 7 соответственно.

Рис. 6. Сеть N_{ω} .Рис. 7. Сеть $N_{\omega-1}$.

Следовательно, $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ – минимальное множество, удаление которого из G дает максимальный 1-хроматический подграф.

§4. СРАВНЕНИЕ ДАННОГО АЛГОРИТМА С ОБЩИМ АЛГОРИТМОМ

Доказательство Фомина [12] и Франка [13] теоремы Грина и Клейтмана [14] дает полиномиальный алгоритм для нахождения максимального q -хроматического подграфа для произвольного q ($1 \leq q \leq \chi(G)$). В теореме Грина и Клейтмана

проблема q -MIS сформулирована в терминах частично упорядоченных множеств, т.е. надо найти максимальное объединение q антицепей. В этом алгоритме используется алгоритм нахождения циркуляции с минимальной стоимостью для ориентированного графа. Напротив, в нашем алгоритме используется алгоритм нахождения максимального потока.

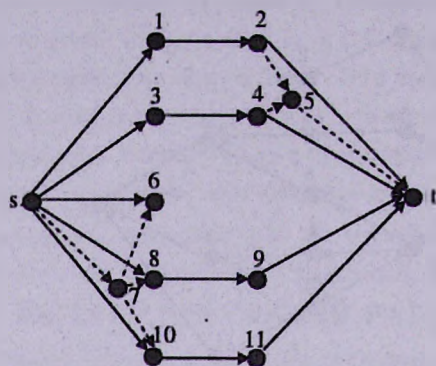


Рис. 8. Сеть $N_{\omega-1}^+$ (добавленные дуги показаны короткими пунктирами).

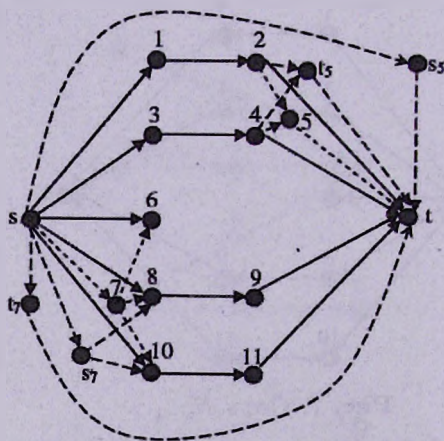


Рис. 9. Сеть $N_{\omega-1}^{++}$ (добавленные дуги показаны длинными пунктирами).

В следующей таблице приведены сложности алгоритмов для нахождения циркуляции с минимальной стоимостью и алгоритмов для нахождения максимального потока. В таблице, n обозначает число вершин, m – число ребер, C – максимум абсолютных значений пропускных способностей ребер, K – максимум абсолютных значений стоимостей ребер, * показывает асимптотически лучшие

результаты в таблице.

Если в графе максимальный поток можно найти алгоритмом со сложностью $MF(n, m, C)$, то в этом графе циркуляцию с минимальной стоимостью можно найти алгоритмом со сложностью $O(n \log K \cdot MF(n, m, C))$ [24]. Но алгоритмы нахождения циркуляции и максимального потока имеют одинаковую сложность [11].

Максимальный поток	Циркуляция с min стоимостью
$O(nm \log C)$ Dinits [15], Gabow [16, 17]	$O(nm \log(nC))$ Dinits [15]
$O(n^{5/3} m^{2/3})$ Galil [18, 19]	$*O(n^{5/3} m^{2/3} \log(nK))$ Goldberg and Tarjan [20]
$*O(nm \log(n^2/m))$ Goldberg and Tarjan [21, 22]	$*O(nm \log(n^2/m) \log(nK))$ Goldberg and Tarjan [23]

Из этой таблицы видно, что алгоритмы для нахождения циркуляции с минимальной стоимостью имеют по меньшей мере $\log n$ раз большую сложность, чем алгоритмы для нахождения максимального потока. Следовательно, наш алгоритм по меньшей мере $\log n$ раз (по степени) эффективнее общего алгоритма при частном случае $q = \omega - 2$. Следовательно, было бы полезнее обобщить предложенный алгоритм на случай произвольного q ($1 \leq q \leq \chi(G)$).

Abstract. The paper investigates the problem of finding the maximal q -colorable subgraph, i.e. the optimal partial q -coloring of a comparability graph, where q is a natural number. Comparability graphs are constructed, such that the known algorithms do not find an optimal solution for them when $q = \omega - 2$, where ω is the number of vertices of the largest clique. An algorithm which finds the maximal q -colorable subgraph of a comparability graph for $q = \omega - 2$ is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Маркосян "О некоторых алгоритмах и свойствах графов сравнения", Изв. НАН Армении. Математика, том 35, по. 3, стр. 65 - 78, 2000.
2. С. Е. Маркосян, "О раскраске вершин графов интервалов", Вопросы радио-электроники, сер. ЭВТ, том 4, pp. 3 - 6, 1972.
3. С. Е. Маркосян, А. Г. Маркосян, "Некоторые алгоритмы сравнения графов интервалов", Кибернетика, том. 2, pp. 72 - 81, 1976.
4. M. Yannakakis, F. Gavril, "The maximum k-colorable problem for chordal graphs", Information Processing Letters, pp. 133-137, 1987.
5. F. Gavril, "Algorithms for maximum k coloring and k covering of transitive graphs", Networks, 17, pp. 465 - 470, 1987.

6. C. Berge, "Minimax Relations for the partial q -coloring of Graphs", Discrete Mathematics, vol. 74, pp. 3 – 14, North-Holland, 1989.
7. K. Cameron. A min-max relation for the partial q -coloring of a graph. Part II : Box perfection, Discrete Mathematics, vol. 74, pp. 15 – 27, North-Holland, 1989.
8. L. Lovasz, "Perfect graphs", in : Selected Topics in Graph Theory 2, pp. 55 – 87, Academic Press N.Y., 1983.
9. C. Berge. Theorie des graphes et ses applications. Paris, p. 316, 1958.
10. M. Garey, D. Johnson. Computers and intractability. San Francisco, p. 191, 1979.
11. A. Schrijver, "Combinatorial Optimization", in : Springer-Verlag, pp. 224 – 226, 2003.
12. S. V. Fomin, "Finite partially ordered sets and Young tableaux", Soviet Mathematics Dokladi, vol. 19, pp. 1510 – 1514, 1978.
13. A. Frank, "On chain and antichain families of a partially ordered set", Journal of Combinatorial Theory, Series B 29, pp. 176 – 184, 1980.
14. C. Greene, D. J. Kleitman, "The structure of Sperner k -families", Journal of Combinatorial Theory, Series A 20, pp. 41 – 68, 1976.
15. E. A. Dinits, "The method of scaling and transportation problems", Studies in Discrete Mathematics, Moscow, pp. 46 – 57, 1973.
16. H. N. Gabow, "Scaling algorithms for network problems", in : 24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, New York, pp. 248 – 257, 1983.
17. H. N. Gabow, "Scaling algorithms for network problems", Journal of Computer and System Science, vol. 31, pp. 148 – 168, 1985.
18. Z. Galil, "New algorithm for the maximal flow problem", in : 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, New York, pp. 231 – 245, 1978.
19. Z. Galil, "An $O(V^{5/3}E^{2/3})$ algorithm for the maximal flow problem", Acta Informatica, vol. 14, pp. 221 – 242, 1980.
20. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "Solving minimum-cost flow problems by successive approximation", in : Proceedings of the 19-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, pp. 7 – 18, 1987.
21. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "A new approach to the maximum flow problem", in : Proceedings of the 18-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, pp. 136 – 146, 1986.
22. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "A new approach to the maximum flow problem", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 35, pp. 921 – 940, 1988.
23. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "Finding minimum cost circulations by successive approximation", Mathematics of Operations Research, vol. 15, pp. 430 – 466, 1990.
24. H. Röck, "Scaling techniques for minimal cost network flows", Discrete Structures and Algorithms, München, pp. 181 – 191, 1980.

Поступила 13 января 2006

BOOL'S BLOCK-BY-BLOCK METHOD FOR SECOND KIND VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

G. M. Attia

Mansoura University, Egypt

E-mail : gattia@mans.edu.eg

The paper develops the block-by-block method by using Bool's quadrature rule with the order of convergence $O(h^6)$ and adaptation of the Bool's blocks for use on graded nodes. To illustrate the effectiveness of developed method, a number of numerical examples are presented containing a comparison with Simpson's block-by-block method.

§1. INTRODUCTION

Volterra equations arise most natural in certain types of time-dependent problems whose behavior at time t depends not only on the state at that time, but also on the states at pervious times as in renewal equation. Volterra integral equations have applications in history-dependent problems, in the system theory, in heat conduction and diffusion, see [18]. Nonlinear Volterra integral equation of the second kind has the form

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in R^+, \quad (1)$$

where $f(x)$ is the free term, $k(x, t, \varphi(t))$ is the kernel of the integral equation and $\varphi(x)$ is the unknown function.

Various authors used Fredholm integral equation technique to solve Volterra integral equations. Orsi [17] introduced a numerical approach for solving Volterra integral equations of the second kind when the kernel contains a mild singularity. The idea of that approach was to use the

technique of Fredholm equations to find the starting values of equation (1). A convergence result in [17] was illustrated by numerical examples.

The second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels typically have solutions which are not smooth near the initial point of the integration interval. Brunner [5] used an adaptation of the analysis originally developed for nonlinear weakly singular Fredholm integral equations, and presented a complete discussion of the optimal (global and local) order of convergence of piecewise polynomial collocation methods on graded grids for nonlinear Volterra integral equations with algebraic or logarithmic singularities in their kernels.

Different algorithms were used to solve Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernel. So in [2], [3] and [4] the authors studied some unbounded integral operators as Kober and Djrbashian and used the product block-by-block method for singular equations.

Blyth et al [6] used Walsh function method to find a numerical solution of the second kind Volterra integral equation rewritten as Fredholm integral equations with appropriately modified kernels. However, the Walsh function solution method has lower order of convergence as compared with the quadrature method.

Ford et al [8] considered nonlinear Volterra integral equations of the form

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) \omega(\varphi(t)) dt, \quad x \in R^+, \quad (2)$$

where $\omega(\varphi)$ is not Lipschitz continuous. They demonstrated that the solutions in that case may not be smooth. They also selected some cases, that can be reduced to ordinary differential equations, and compared the solutions obtained by standard numerical methods for ordinary differential equations with those obtained by quadrature methods.

Karapetyants et al [15] considered Volterra nonlinear integral equation of the form

$$\varphi^m(x) = f(x) + \alpha(x) \int_0^x k(x-t)b(t)\varphi(t) dt, \quad 0 < x < d \leq \infty, \quad (3)$$

where $m > 1$ and the functions $\alpha(x)$, $k(u)$, $b(t)$ and $f(x)$ are real-valued.

If $b(t) = 1$ and $m > 0$, this equation arises in applications, e.g. in water perlocation [11], [19] and in the nonlinear theory of wave propagation [16]. When $m > 1$ and $f(x) = 0$, equation (3) may have a nontrivial solution $\varphi(x)$, see [20]. Equation (3) with $\alpha(x) = b(t) = 1$, $0 < m < 1$, and continuous kernel $k(u)$ was considered in [1], where the results refer to the uniqueness of solution $\varphi(x)$ in some spaces of continuous or integrable functions. A similar problem for equation (3) with $m < 0$ and a non-increasing kernel $k(u)$ in the class of almost decreasing functions was studied in [13] with $\alpha(x) = b(t) = 1$. In [14] estimates from below and asymptotic properties near zero of the solution $\varphi(x)$ of the equation (3) with $m > 1$ were obtained for $\alpha(x)$, $k(u)$ and $f(x)$ possessing power asymptotic behavior near zero.

In the following Section 2 we state the basic theories of the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear Volterra integral equation of the second kind on the interval $[0, T]$ for some $T > 0$. Section 3 gives a short survey on the literature on Simpson's block-by-block method and the Bool's block-by-block method for nonlinear Volterra equation of the second kind.

§2. PRELIMINARIES

This section is devoted to introduction of nonlinear Volterra integral equation of the second kind and discusses about existence, uniqueness of solutions and error bounds.

2.1. Existence and uniqueness. The nonlinear Volterra integral equation of the second kind is of the form

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad 0 < x < d \leq \infty, \quad (4)$$

where $f(x)$, $k(x, t, \varphi(t))$ and $\varphi(x)$ are the free term, the kernel of the integral equation and the unknown functions respectively. The following theorem establishes some conditions for unique solvability of the equation (4), see [12] and [18]. One of them is that the kernel $k(x, t, u)$ satisfies the simple Lipschitz condition with respect to the third argument :

$$|k(x, t, y) - k(x, t, z)| \leq L|y - z|, \quad (5)$$

where L is independent of x , t , y and z .

Theorem 1. Let the functions $f(t)$ and $k(x, t, u)$ in equation (4) be continuous in $0 \leq t \leq x \leq T$. If the kernel $k(x, t, u)$ satisfy the Lipschitz condition (5), then equation (4) has unique, continuous solution for any finite T .

2.2. Error Bound. The following theorem estimates the value of the error bound for the approximate solution φ_n [18].

Theorem 2. Let the conditions of the previous theorem be satisfied. Besides, let φ_n be an approximate solution of the equation (4), which is obtained by the quadrature technique and let

$$r(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt - \varphi_n(x). \quad (6)$$

Then

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq Re^{Lx}, \quad (7)$$

where $\varphi(x)$ is the solution of equation (4) and $R = \max |r(x)|$.

§3. SOLUTION METHODS

One of the popular methods for solving nonlinear Volterra integral equation of the second kind is the quadrature method. The error of that method depends on the position of mesh points. The following technique is general for determining the nodes. For instance, if $\beta = 1$ (see (9)), then we have the case of equal space nodes (uniform nodes), and if $\beta \neq 1$, then we have the case of graded nodes.

3.1. Graded nodes for Simpson's block-by-block method. The interval $[0, T]$ is divided into $N = 2M$ subintervals, and the nodes are chosen to satisfy

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N \leq T. \quad (8)$$

The even nodes are chosen as

$$t_{2k} = \left(\frac{2kT}{N} \right)^\beta = \left(\frac{k}{M} \right)^\beta T, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (9)$$

and the odd nodes as

$$t_{2k+1} = \frac{1}{2} (t_{2k} + t_{2k+2}), \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (10)$$

The width of each subinterval is

$$h_k = (t_{k+1} - t_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2M - 1, \quad (11)$$

$$x_k = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2M. \quad (12)$$

3.2. Simpson's Block-by Block method. The block-by-block method essentially is an extrapolation procedure and has the advantage of being self-starting. This method can be adapted to graded nodes see [3]. The trapezoidal method is a low order method, the other methods as Simpson's require one or more starting values. We shall follow Linz [18] in description of the method. The so-called block-by-block methods generalize the well-known implicit Runge-Kutta methods for ordinary differential equations and the term is also used in connection with integral equations. The idea behind the block-by-block methods is quite general, but is most easily understood by considering a special case.

Let us use Simpson's rule as the numerical integration formula. If we know φ_1 , then we can simply compute φ_2 by the formula

$$\varphi_2 = f(x_2) + \frac{h_1}{3} [k(x_2, t_0, \varphi(t_0)) + 4k(x_2, t_1, \varphi(t_1)) + k(x_2, t_2, \varphi(t_2))]. \quad (13)$$

To obtain a value of φ_1 , we introduce another point $t_{1/2} = \frac{h_1}{2}$ and the corresponding value $\varphi_{1/2}$, then by Simpson's rule with $\varphi_0, \varphi_{1/2}$ and φ_1 ,

$$\varphi_1 = f(x_1) + \frac{h_1}{6} [k(x_1, t_0, \varphi(t_0)) + 4k(x_1, t_{1/2}, \varphi(t_{1/2})) + k(x_1, t_1, \varphi(t_1))]. \quad (14)$$

The unknown value of $\varphi_{1/2}$ can be approximated by quadratic interpolation, using the values of φ_0, φ_1 and φ_2 , that is $\varphi_{1/2}$ is being replaced by

$$\varphi_{1/2} \approx \frac{1}{8} [3\varphi_0 + 6\varphi_1 - \varphi_2]. \quad (15)$$

Equations (13) and (14) are a pair of simultaneous equations for φ_1 and φ_2 . For sufficiently small h , unique solution exists and can be obtained by Newton's method.

The general process should now be clear : for $(k = 0, 1, \dots, M - 1)$ the approximate solution can be computed by

$$\begin{aligned} \varphi_{2k+1} = & f(x_{2k+1}) + \sum_{j=1}^k h_j \sum_{l=0}^2 \omega_l k(x_{2k+1}, t_{2j+l}, \varphi(t_{2j+l})) + \\ & + \frac{h_k}{2} \sum_{l=0}^2 \omega_l k\left(x_{2k+1}, t_{2j+\frac{1}{2}}, \varphi\left(t_{2j+\frac{1}{2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\varphi_{2k+2} = f(x_{2k+2}) + \sum_{j=1}^{k+1} h_j \sum_{l=0}^2 \omega_l k(x_{2k+2}, t_{2j+l}, \varphi(t_{2j+l})), \quad (17)$$

$$\varphi_{2k+1/2} \approx \frac{1}{8} [3\varphi_{2k} + 6\varphi_{2k+1} - \varphi_{2k+2}], \quad k = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (18)$$

$$[\omega_l] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2. \quad (19)$$

3.3. Graded nodes for Bool's block-by-block method. In this subsection we make two suggestions. The first is on application of Bool's quadrature rule, which is considered as an extrapolation technique for Simpson's rule, and the second is on application of Bool's rule relating graded nodes. The Bool's quadrature formula states that

$$\int_0^{x_4} \varphi(x) dx = \frac{2h}{45} [7\varphi_0 + 32\varphi_1 + 12\varphi_2 + 32\varphi_3 + 7\varphi_4]. \quad (20)$$

Furthermore, there exists a value c with $c \in (0, x_4)$, such that the error term $E(\varphi, h)$ takes the form

$$E(\varphi, h) = -\frac{8h^7}{945} \varphi^{(6)}(c). \quad (21)$$

The interval $[0, T]$ is divided into $N = 4M$ subintervals, and the nodes are chosen to satisfy

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N \leq T. \quad (22)$$

Besides, the even nodes are found from

$$t_{4k} = \left(\frac{4k}{N}\right)^\beta T = \left(\frac{k}{M}\right)^\beta T, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (23)$$

and the width of each subinterval is

$$h_{4k} = \frac{1}{4} (t_{4k+4} - t_{4k}), \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (24)$$

The other nodes are found from the formula

$$t_{4k+j} = t_{4k} + jh_{4k}, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (25)$$

$$x_k = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, 4M. \quad (26)$$

3.4. Bool's block-by-block Method. In the Simpson's block-by-block method, two equations in two unknowns are solved in each stage with an error of order $O(h^4)$. In the case of Bool's block-by-block method, actually we solve four equations in four unknowns but the error is of order $O(h^6)$ and the method uses the extrapolation technique of Simpson's block-by-block method. The equations of Bool's block-by-block method are

$$\begin{aligned} \varphi_{4k+1} = & f(x_{4k+1}) + \sum_{j=1}^k 2h_{4j-4} \sum_{l=4}^0 w_l k(x_{4k+1}, t_{4j-l}, \varphi(t_{4j-l})) + \\ & + \frac{h_{4k}}{2} \sum_{l=0}^4 w_l k(x_{4k+1}, t_{4k+l/4}, \varphi(t_{4k+l/4})), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{4k+2} = & f(x_{4k+2}) + \sum_{j=1}^k 2h_{4j-4} \sum_{l=4}^0 w_l k(x_{4k+2}, t_{4j-l}, \varphi(t_{4j-l})) + \\ & + h_{4k} \sum_{l=0}^4 w_l k(x_{4k+2}, t_{4k+l/2}, \varphi(t_{4k+l/2})), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\varphi_{4k+3} = f(x_{4k+3}) + \sum_{j=1}^k 2h_{4j-4} \sum_{l=4}^0 w_l k(x_{4k+3}, t_{4j-l}, \varphi(t_{4j-l})) +$$

$$+ \frac{3h_{4k}}{2} \sum_{l=0}^4 w_l k (x_{4k+3}, t_{4k+3l/4}, \varphi(t_{4k+3l/4})), \quad (29)$$

$$\varphi_{4k+4} = f(x_{4k+4}) + \sum_{j=1}^{k+1} 2h_{4j-4} \sum_{l=4}^0 w_l k (x_{4k+4}, t_{4j-l}, \varphi(t_{4j-l})), \quad (30)$$

where $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

$$[w_l] = \left[\frac{7}{45} \quad \frac{32}{45} \quad \frac{12}{45} \quad \frac{32}{45} \quad \frac{7}{45} \right], \quad l = 0, 1, \dots, 4. \quad (31)$$

At each step, equations (27) - (30) have to be solved simultaneously for the unknowns $\varphi(t_{4k+1})$, $\varphi(t_{4k+2})$, $\varphi(t_{4k+3})$ and $\varphi(t_{4k+4})$, so that we obtain a block of unknowns at a time. The values of $\varphi(t_{4k+1/4})$, $\varphi(t_{4k+1/2})$, $\varphi(t_{4k+3/4})$, $\varphi(t_{4k+3/2})$ and $\varphi(t_{4k+9/4})$ can be computed by interpolation of a fourth degree polynomial, using $\varphi(t_{4k})$, $\varphi(t_{4k+1})$, $\varphi(t_{4k+2})$, $\varphi(t_{4k+3})$ and $\varphi(t_{4k+4})$ as follows :

$$\varphi_{4k+1/4} = \frac{1}{2048} [1155\varphi_{4k} + 1540\varphi_{4k+1} - 990\varphi_{4k+2} + 420\varphi_{4k+3} - 77\varphi_{4k+4}], \quad (32)$$

$$\varphi_{4k+1/2} = \frac{1}{128} [35\varphi_{4k} + 140\varphi_{4k+1} - 70\varphi_{4k+2} + 28\varphi_{4k+3} - 5\varphi_{4k+4}], \quad (33)$$

$$\varphi_{4k+3/4} = \frac{1}{2048} [195\varphi_{4k} + 2340\varphi_{4k+1} - 702\varphi_{4k+2} + 260\varphi_{4k+3} - 45\varphi_{4k+4}], \quad (34)$$

$$\varphi_{4k+3/2} = \frac{1}{128} [-5\varphi_{4k} + 60\varphi_{4k+1} + 90\varphi_{4k+2} - 20\varphi_{4k+3} + 3\varphi_{4k+4}], \quad (35)$$

$$\varphi_{4k+9/4} = \frac{1}{2048} [35\varphi_{4k} - 252\varphi_{4k+1} + 1890\varphi_{4k+2} + 420\varphi_{4k+3} - 45\varphi_{4k+4}]. \quad (36)$$

§4. NUMERICAL EXAMPLES

Three examples are given to illustrate the effectiveness of the above.

Example 1. A linear example :

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2} \varphi(t) dt. \quad (37)$$

This equation has an exact solution of the form

$$\varphi(x) = (1 + x^2) \exp(x) \quad (38)$$

Example 2. Equation with a convolution type kernel :

$$\varphi(x) = \sinh(x) - \int_0^x \cosh(x-t) \varphi(t) dt. \quad (39)$$

The exact solution is

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \exp\left(\frac{-x}{2}\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right) \quad (40)$$

Example 3. A nonlinear example :

$$\varphi(x) = 1 + \sin^2(x) - \int_0^x 3 \sin(x-t) \varphi^2(t) dt. \quad (41)$$

The exact solution is

$$\varphi(x) = \cos(x). \quad (42)$$

4.1. Results. The numbers 1,2,3 refer to the above examples. Table 1 contains the comparison between Max. relative (E_r) of Simpson's block and the Bool's block for same number of subintervals.

<i>Ex.</i>	<i>N</i>	<i>E_r of Simpson's block</i>	<i>E_r of Bool's block</i>
1	32	4.813E-7	5.617E-10
	64	3.002E-8	8.728E-12
2	32	2.432E-6	2.537E-9
	64	3.108E-7	8.319E-11
3	32	9.866E-8	4.372E-10
	64	5.949E-9	6.224E-12

Table 1. Results of relative error of Simpson and Bool blocks on uniform mesh.

Table (2) shows the effect of graded nodes in Bool's block by block method, which reduces the Max. relative error.

Ex.	N	E_r of Bool's at $\beta = 1$	E_r of Bool's at $\beta \neq 1$	β
1	16	$3.638E-8$	$3.298E-8$	0.90
	64	$8.728E-12$	$7.948E-12$	0.95
2	16	$6.710E-9$	$6.501E-9$	1.05
	64	$8.319E-11$	$1.544E-12$	1.05
3	16	$3.214E-8$	$1.147E-8$	0.95
	64	$6.224E-12$	$1.844E-12$	0.95

Table 2. The effect of graded nodes on relative error of Bool's block.

Conclusion. The block-by-block method is a self-starting method and it can be applied to solve Volterra integral equations as Fredholm integral equations. The method is developed in two directions. Firstly, we use Bool's quadrature rule which has order of convergence $O(h^6)$. Secondly, the Bool's block is adapted for use on graded nodes. The comparison of Simpson's block and Bool's block shows that the Max. relative error of Bool's block becomes about 2.907×10^{-4} times the value of Max. relative error of Simpson's block. Also, the Max. relative error when Bool's block is used on graded nodes reduces considerably.

Acknowledgment. I am grateful to Professor A. Nersessian for his support and guidance advice.

REFERENCES

1. S. N. Askhabov, "Integral equations of convolution type with nonlinearity", Colloq. Math., vol. 62, pp. 49 - 65, 1991.
2. G. M. Attia & A. B. Nersessian, "Solution of Volterra integral equation with singular kernels", Second International Conference on Engineering Mathematics and Physics (ICEMP 94), Cairo University, Faculty of Engineering, vol. 3, pp. 249 - 258, 1994.
3. G. M. Attia, "Uniform-graded mesh block method for second kind Volterra integral equation", Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 5, pp. 3 - 8, 1998.
4. G. M. Attia, A. El-Sedeek, Salah El-Emam and Sahar Fawzy, "Product block method for Volterra integral equation of the second kind, with singular kernel", MEJ, vol. 23, no. 2, pp. 11 - 18, 1998.
5. H. Brunner, A. Peadar, and G. Vainikko, "The piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equations", Mathematics of Computation, vol. 68, no. 227, pp. 1079 - 1095, 1999.

6. W. F. Blyth, R. L. May and P. Widyaningsih, "Volterra integral equations solved in Fredholm form using Walsh functions", *Anziam*, J. 45 (E), pp. C269 – C282, 2004.
7. C. T. H. Baker, "Volterra integral equations", Manchester Center for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report no. 366, October 2000.
8. J. Ford, J. T. Edwards and K. Frischmuth, "Qualitative behavior of approximate solutions of some Volterra integral equations with non-Lipschitz non-linearity", Manchester Center for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report no. 310, October 1997.
9. N. J. Ford & C. T. H. Baker, "Preserving transience in numerical solutions Volterra integral equations of convolution type", Manchester Center for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report no. 284, 1996.
10. N. J. Ford & C. T. H. Baker, "Qualitative behavior and stability of solutions of discretized non-linear Volterra integral equations of convolution type", Manchester Center for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report no. 261, 1994.
11. J. Gonserzewics, H. Marcinkowska, W. Okrasinski and K. Tabits, "On the perlocation of water from cylinder reservoir into the surrounding soil", *Zatosow Math.*, vol. 16, pp. 249 – 261, 1978.
12. A. J. Jerri. *Introduction to Integral Equations with Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
13. N. Karapetyants & A. Yakubov, "A convolution equation with power nonlinearity of negative order", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 44, pp. 517 – 520, 1992.
14. N. Karapetyants, A. A. Kilbas and M. Saigo, "On the solution of nonlinear Volterra convolution equation with power nonlinearity", *J. of Integral Equations and Applications*, vol. 8, pp. 429 – 445, 1996.
15. N. Karapetyants, A. A. Kilbas, M. Saigo and S. G. Samko, "Upper and lower solutions of nonlinear Volterra convolution integral equations with power non-linearity", *J. of Integral Equations and Appl.*, vol. 12, no. 4, pp. 421 – 448, 2001.
16. J. J. Keller, "Propagation of simple nonlinear waves in gas field tubes with friction", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 32, pp. 170 – 181, 1981.
17. A. P. Orsi, "Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels", *Mathematics of Computation*, vol. 65, no. 215, pp. 1201 – 1212, 1996.
18. P. Linz. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Siam, Philadelphia, 1985.
19. W. Okarasinski, "On the existence and uniqueness of nonnegative solution of a certain nonlinear convolution equation", *Ann. Polon. Math.*, vol. 36, pp. 175 – 181, 1979.
20. W. Okarasinski, "On a nonlinear convolution equation occurring in the theory of water perlocation", *Ann. Polon. Math.*, vol. 37, pp. 223 – 229, 1980.

КРИТЕРИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ В ТЕРМИНАХ ЗАЙДЕНБЕРГА–ТАРСКОГО

Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян

Институт математики НАН Армении

Резюме. В работе найдены совпадающие необходимые и достаточные условия для гипозеллиптичности одного класса многочленов двух переменных. Выявлена связь между гипозеллиптичностью и величиной числа Зайденберга–Тарского изучаемых многочленов.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

После введения Л. Хермандером понятия гипозеллиптичности дифференциального оператора и найденных им алгебраических условий гипозеллиптичности (см. [1], теорема 11.1.3), оказалось, что иногда эти условия трудно поддаются проверке. Поэтому усилия многих математиков были направлены на нахождение легко проверяемых алгебраических условий гипозеллиптичности.

В работах С. М. Никольского [2] и В. П. Михайлова [3] описаны классы многочленов, через которые оценивается все мономы, входящие в них. Это класс невырожденных многочленов, по своему характеру "близких" к гипозеллиптическим многочленам и являющихся гипозеллиптическими при естественных ограничениях на их многогранник Ньютона. Далее подобные классы гипозеллиптических многочленов были изучены многими авторами (см., например, [4], [5]). В работах [6], [7] найдены достаточные условия гипозеллиптичности вырождающихся многочленов, сильно отличающихся от эллиптических.

При формулировке задачи и результатов, будем пользоваться стандартными обозначениями : R^2 – 2-мерное евклидово пространство, N_0^2 – множество 2-мерных мультииндексов. Для $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ($\xi \in R^2$, $\alpha \in N_0^2$) положим

$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Рассмотрим многочлен

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{|\alpha|=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha \quad (1.1)$$

с вещественными коэффициентами, где P_j – ненулевой однородный многочлен порядка d_j ($j = 0, 1, \dots, M$), $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$. Положим $\Sigma(P_j) = \{\eta \in R^2 : |\eta| = 1, P_j(\eta) = 0\}$, $0 \leq j \leq M$. Обозначим через I_2 множество многочленов $\{P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)\}$ таких, что $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Из теоремы 11.1.3 Л. Хермандера (см. [1]) следует, что $P \in I_2$, если P – гипозеллиптичен. С другой стороны, очевидно, что для многочлена $P \in I_2$ $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) \cap \dots \cap \Sigma(P_M) = \emptyset$, при этом P ограничен либо снизу, либо сверху. Так как добавление константы не влияет на поведение многочлена на бесконечности, то далее будем считать, что для изучаемых многочленов $P \in I_2$, $P(\xi) > 0$ при всех $\xi \in R^2$.

В работе [6] найдены достаточные условия гипозеллиптичности, при этом доказано, что при $n = 2$ и $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) = \emptyset$ эти условия являются также и необходимыми.

Цель настоящей статьи – нахождение критерия (совпадающих необходимых и достаточных условий), при котором многочлен $P \in I_2$ является гипозеллиптическим, когда $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) \neq \emptyset$. При этом, будем рассматривать только случай, когда

$$\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) \cap \Sigma(P_2) = \emptyset. \quad (1.2)$$

Пусть $P \in I_2$. Если $\Sigma_0 \equiv \Sigma(P_0) = \emptyset$, то многочлен P эллиптичен и по теореме 11.1.10 работы [1] гипозеллиптичен. Поэтому будем считать, что $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Пусть $\eta \in \Sigma_0$ и $l_j = l_j(\eta)$ – кратность нуля η многочлена P_j ($0 \leq j \leq M$). Далее, каждой точке $\eta \in \Sigma_0$ сопоставим точку $\tau = \tau(\eta) \in R^2$ такую, что $|\tau| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$ и обозначим

$$D_\tau^{l_j} P_j(\eta) = \frac{1}{l_j!} \sum_{|\nu|=l_j} \frac{\tau^\nu}{\nu!} D^\nu P_j(\eta). \quad (1.3)$$

Очевидно, что при $\eta \in \Sigma(P_j)$ $D_\tau^{l_j} P_j(\eta) \neq 0$ ($0 \leq j \leq M$), при этом $D_\tau^{l_0} P_0(\eta) > 0$ при $P \in I_2$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$D_\varepsilon(\eta) = \{\xi \in R^2 : |(\xi, \tau)| < \varepsilon |(\xi, \eta)|\}. \quad (1.4)$$

Далее всюду будем считать, что число ε выбрано так, что $\mathbb{D}_\varepsilon(\eta) \cap \Sigma_0 = \{\pm\eta\}$.

По лемме 1.2 работы [8] существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и для всех $\xi \in \mathbb{D}_\varepsilon(\eta)$, $j = 0, 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |D_\tau^{l_j} P_j(\eta)| |(\xi, \eta)|^{d_j - l_j} |(\xi, \tau)|^{l_j} < |P_j(\xi)| < \\ & < \frac{3}{2} |D_\tau^{l_j} P_j(\eta)| |(\xi, \eta)|^{d_j - l_j} |(\xi, \tau)|^{l_j}, \quad \eta \in \Sigma(P_j). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Известно (см. [9], [10] или [1]), что для многочлена $P(\xi) > 0$ существуют вещественные числа $C > 0$ и A такие, что

$$P(\xi) > C|\xi|^A \quad (1.6)$$

для достаточно больших $\xi \in R^2$. Наибольшее из чисел A назовем числом Зайденберга-Тарского многочлена P и обозначим через $ST(P)$. Очевидно, это число эквивалентным образом можно определить как нижний предел

$$ST(P) = \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\ln P(\xi)}{\ln |\xi|},$$

при этом для многочленов двух переменных существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $ST(P) = \min\{ST(P, \eta, \varepsilon) : \eta \in \Sigma_0\}$, где

$$ST(P, \eta, \varepsilon) = \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\ln P(\xi)}{\ln |\xi|}, \quad \xi \in D_\varepsilon(\eta).$$

В работе [11] приведен алгоритм вычисления числа $ST(P)$ и $ST(P, \eta, \varepsilon)$ при $P \in I_2$. Пусть $P \in I_2$ и $\eta \in \Sigma_0$, обозначим

$$\delta_{0,1}(\eta) = \frac{d_0 - d_1}{l_0 - l_1}, \quad \delta_{0,2}(\eta) = \frac{d_0 - d_2}{l_0}, \quad \delta_{1,2}(\eta) = \frac{d_1 - d_2}{l_1},$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(P) = \{\eta : \eta \in \Sigma_0 \setminus \Sigma(P_1)\},$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(P) = \{\eta \in \Sigma_0 \cap \Sigma(P_1) : \delta_{0,1}(\eta) \neq \delta_{0,2}(\eta)\},$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_3(P) = \{\eta \in \Sigma_0 \cap \Sigma(P_1) : \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{0,2}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta) \equiv \Delta(\eta)\}.$$

Тогда $\Sigma_0 \equiv \Sigma(P_0) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Для полноты изложения приведем некоторые известные результаты, которыми будем пользоваться в течение работы.

Лемма 1.1 (см. [12]) Пусть многочлен P гипоеллиптичен. Тогда для каждой точки $\eta \in \Sigma_0$ существует число $k = k(\eta) : 0 < k < M$ такое, что

$$1) P_0(\eta) = P_1(\eta) = \dots = P_{k-1}(\eta) = 0, P_k(\eta) \neq 0, d_k > 0,$$

2) $d_i - l_i(\eta) < d_k, i = 0, 1, \dots, k-1$.

Лемма 1.2 (см. [13]) Пусть $P \in I_2$, $\eta \in \Sigma_3$, точка $\tau = \tau(\eta)$ и число $\Delta = \Delta(\eta)$ определены как выше, $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta) = t(\eta + t^{-\Delta} x \tau)$, где $t > 0$ и $x \in R^1$. Тогда функция $f(t, x) = f(t, x, \eta) \equiv P[\xi(t, x)]$ представляется в виде

$$f(t, x) = \sum_{i=0}^{M_0} t^{d_2-i\Delta} Q_i(x), \quad (1.7)$$

где

$$Q_i(x) = Q_i(x, \eta) = [D_\tau^{l_0+i} P_0(\eta) x^{l_0} + D_\tau^{l_1+i} P_1(\eta) x^{l_1} + D_\tau^{l_2} P_2(\eta)] x^i, \quad i = 0, 1, \dots, M_0. \quad (1.8)$$

При этом

$$1) \quad f(t, x, \eta) = t^{d_2} [Q_0(x, \eta) + o(1)], \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x \in R^1, \quad (1.9)$$

2) $Q_0(x, \eta) \geq 0$ для любого $x \in R^1$,

3) $\text{card } X_0(\eta) \equiv \text{card } \{x \in R^1 : Q_0(x, \eta) = 0\} \leq 2$,

4) если $x_0 \in X_0(\eta)$, то x_0 - двукратный корень многочлена Q_0 , при этом $Q_0^{(1)}(x_0, \eta) \neq 0$,

5) существуют числа $C > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\varpi \in (0, 1)$ такие что

$$\inf_{\xi \in D_\varepsilon(\eta, t)} P(\xi) \geq C \inf_{\varpi \leq |x| \leq \varpi^{-1}} f(t, x, \eta), \quad \text{где } D_\varepsilon(\eta, t) = \{\xi \in D_\varepsilon(\eta) : |\xi| = t\}.$$

В лемме 1.3 $l = l(\eta)$ - кратность η , $\tau = \tau(\eta)$ определяется как выше.

Лемма 1.3. Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ однородный многочлен порядка $d > 0$ и $\Sigma(R) :=$

$\{\xi \in R^2 : |\xi| = 1, R(\xi) = 0\} \neq \emptyset, \eta \in \Sigma(R)$. Тогда для любого $t > 0$, $\delta > 0$, $x \in R^1$, $j \leq l$ и $\xi(t, x, \eta) = t(\eta + t^{-\delta} x \tau)$

$$D_\tau^j R[\xi(t, x, \eta)] = \sum_{k \geq l-j} t^{d-j-\delta k} x^k D_\tau^{k+j} R(\eta). \quad (1.10)$$

Доказательство : По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} D_\tau^j R[\xi(t, x, \eta)] &= t^{d-j} D_\tau^j R(\eta + t^{-\delta} x \tau) = t^{d-j} \sum_{k \geq l-j} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha D_\tau^j R(\eta) t^{-\delta|\alpha|} x^{|\alpha|} \tau^\alpha = \\ &= t^{d-j} \sum_{k \geq l-j} t^{-\delta k} x^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha D_\tau^j R(\eta) \tau^\alpha = t^{d-j} \sum_{k \geq l-j} t^{-\delta k} x^k D_\tau^{k+j} R(\eta), \end{aligned}$$

что и доказывает представление (1.10).

§2. ОЦЕНКА СНИЗУ ЧИСЛА ЗАЙДЕНБЕРГА-ТАРСКОГО

Лемма 2.1. Если многочлен $P \in I_2$ удовлетворяет условию (1.2). Тогда для каждой точки $\eta \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ существуют положительные числа ε , C_1 и C_2 такие, что

$$1 + |P(\xi)| \geq C_1 \sum_{j=0}^2 |P_j(\xi)| \geq C_2 |\xi|^{d_2}, \quad \forall \xi \in D_\varepsilon(\eta). \quad (2.1)$$

Доказательство : При $\eta \in \Sigma_1$ или $\eta \in \Sigma_2$ и $\delta_{1,2}(\eta) > \delta_{0,2}(\eta)$ оценка (2.1) непосредственно следует из условия (1.2) и теоремы 1.1 работы [13].

Пусть $\eta \in \Sigma_2$ и $\delta_{1,2}(\eta) < \delta_{0,2}(\eta)$ (случай $\delta_{1,2}(\eta) = \delta_{0,2}(\eta)$ исключается, так как $\eta \notin \Sigma_3$). Предположим обратное, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{\xi^s = \xi^s(\varepsilon)\} \subset D_\varepsilon(\eta)$ такая, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ и

$$[1 + |P(\xi^s)|] / \sum_{j=0}^2 |P_j(\xi^s)| \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Положим $\eta^s = \xi^s / |\xi^s|$ ($s \in N$). Так как $|\eta^s| = 1$ ($s \in N$), то за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $\eta^s \rightarrow \zeta$ для некоторой точки $\zeta \in R^2$. Из (2.2) непосредственно следует, что $\zeta \in \Sigma_0$, а из определения множества $D_\varepsilon(\eta)$ следует, что либо $\zeta = \eta$, либо $\zeta = -\eta$. Будем считать, что $\zeta = \eta$. Представим ξ^s ($s \in N$) по базису $\{\eta, \tau\}$:

$$\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau = (\xi^s, \eta) \eta + (\xi^s, \tau) \tau. \quad (2.3)$$

Очевидно $|\varphi_s| \rightarrow \infty$ и $|\psi_s / \varphi_s| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi_s > 1$ и $\psi_s \geq 0$ для всех $s \in N$. При этом (за счет выбора подпоследовательности) возможны следующие два случая : а) $\psi_s \leq \varphi_s^{1-\delta_{0,2}}$ ($s \in N$) и б) $\psi_s > \varphi_s^{1-\delta_{0,2}}$ ($s \in N$). Так как для многочлена $P \in I_2$ удовлетворяется условие (1.2), то (см. [13], теорема 1.1) $P_0(\xi^s) \geq 0$ ($\xi \in R^2$) и $P_2(\eta) > 0$. Тогда в случае а) имеем для достаточно больших s $P_0(\xi^s) \geq 0$ и $P_2(\xi^s) > 0$. Поэтому

$$|P(\xi^s)| \geq P_0(\xi^s) + P_2(\xi^s) - |P_1(\xi^s)| - \sum_{j=3}^M |P_j(\xi^s)|. \quad (2.4)$$

В силу (1.5), в случае а) имеем для достаточно больших s

$$|P_1(\xi^s)| \leq C_1 \varphi_s^{d_1 - l_1} \psi_s^{l_1} \leq C_1 \varphi_s^{d_2} \varphi_s^{l_1(\delta_{1,2} - \delta_{0,2})}, \quad (C_1 \geq 0),$$

и в обоих случаях а) и б) имеем

$$P_2(\xi^s) \geq C_2 \varphi_s^{d_2} \quad (C_2 > 0).$$

Так как $\delta_{1,2} < \delta_{0,2}$, то отсюда следует, что $|P_1(\xi^s)|/P_2(\xi^s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Для $j = 3, \dots, M$ в обоих случаях а) и б), очевидно

$$|P_j(\xi^s)|/P_2(\xi^s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Эти соотношения вместе с (2.4) противоречат (2.2). В случае б) в силу (1.5) имеем для достаточно больших s

$$|P_1(\xi^s)|/P_0(\xi^s) \leq C_3 \varphi_s^{-(d_0-d_1)+(l_0-l_1)} \psi_s^{-(l_0-l_1)}, \quad (C_3 \geq 0). \quad (2.6)$$

Так как $d_0 > d_1$ и $\psi_s/\varphi_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что $|P_1(\xi^s)|/P_0(\xi^s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, если $l_0 \leq l_1$. Последнее соотношение вместе с (2.5) противоречит (2.2). Пусть $l_0 > l_1$, тогда из (2.6) имеем для достаточно больших s

$$\begin{aligned} |P_1(\xi^s)|/P_0(\xi^s) &\leq C_3 [\varphi_s^{1-\delta_{0,1}}/\psi_s]^{l_0-l_1} \leq C_4 [\varphi_s^{1-\delta_{0,1}}/\varphi_s^{1-\delta_{0,2}}]^{l_0-l_1} = \\ &= C_4 \varphi_s^{(\delta_{0,2}-\delta_{0,1})(l_0-l_1)}, \end{aligned}$$

где $C_4 > 0$. Простой подсчет показывает, что $\delta_{02} < \delta_{01}$ при $\delta_{12} < \delta_{02}$, поэтому

$$|P_1(\xi^s)|/P_0(\xi^s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

По тем же соображениям последнее соотношение вместе с (2.5) противоречит (2.2). Лемма доказана.

Далее, положим $P(\xi) = R(\xi) + r(\xi) := P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi) + r(\xi)$.

Теорема 2.1. Пусть многочлен P удовлетворяет условию (1.2) и $R \in I_2$. Тогда

1.1) $ST(P) = d_0$ при $\Sigma_0 = \emptyset$,

1.2) $ST(P, \eta) = d_1$ при $\Sigma_0 \neq \emptyset$ и $\eta \in \Sigma_1$,

1.3) $ST(P, \eta) = d_2$ при $\eta \in \Sigma_2$,

2) если P гипозэллиптичен, то $ST(P) > \sigma \equiv \max\{d_2 - 2, 0\}$, при этом $ST(P, \eta) > d_2 - 2(1 - \Delta(\eta))$ при $\eta \in \Sigma_3$,

3) если P гипозэллиптичен и $d_3 \leq d_2 - 2$, то $ST(P) = ST(R)$,

4) если $d_3 \leq d_2 - 2$, то P и R одновременно гипозэллиптичны или нет.

Доказательство : Пункт 1.1) очевиден. Докажем 1.2). Пусть $\eta \in \Sigma_1$, тогда $P_1(\eta) \neq 0$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ при $\xi \in D_\varepsilon(\eta)$ либо $|\xi|/|(\xi, \eta)| - \eta| < \varepsilon$, либо $|\xi|/|(\xi, \eta)| + \eta| < \varepsilon$, то из леммы 2.1 и формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &\geq C_1 |P_1(\xi)| = C_1 |P_1[(\xi, \eta)\eta + (\xi, \tau)\tau]| = \\ &= C_1 |(\xi, \eta)|^{d_1} |P_1\{\text{sign}(\xi, \eta)\eta + [(\xi, \tau)/|(\xi, \eta)|]\tau\}| \geq \end{aligned}$$

$$\geq C_1 |(\xi, \eta)|^{d_1} \{ |P_1[\text{sign}(\xi, \eta)\eta]| - C_2 \varepsilon \} = C_1 |(\xi, \eta)|^{d_1} [|P_1(\eta)| - C_2 \varepsilon], \quad C_1, C_2 > 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $\xi \in D_\varepsilon(\eta)$. Теперь заметим, что из $\xi \in D_\varepsilon(\eta)$ следует, что $|(\xi, \eta)| \geq |\xi|/\sqrt{1+\varepsilon^2}$. Выбирая ε так, чтобы $|P_1(\eta)| \geq 2\varepsilon C_2$ для достаточно больших $\xi \in D_\varepsilon(\eta)$, получим.

$$|P(\xi)| \geq \frac{C_1}{2} \left(|\xi|/\sqrt{1+\varepsilon^2} \right)^{d_1} \quad \text{и} \quad |P_1(\eta)| \geq C_3 |\xi|^{d_1}, \quad C_3 > 0,$$

откуда следует, что $ST(P, \eta) \geq d_1$.

Пусть $\xi^s = s\eta$ ($s \in N$), тогда $\xi^s \in D_\varepsilon(\eta)$ для любого $\varepsilon > 0$ и

$$|P(\xi^s)| = \left| \sum_{j=1}^M P_j(\xi^s) \right| \leq C_3 |\xi^s|^{d_1}, \quad s \in N, \quad C_3 > 0,$$

т.е. $ST(P, \eta) \leq d_1$, следовательно, $ST(P, \eta) = d_1$ при $\eta \in \Sigma_1$. Пункт 1.3) доказывается аналогично. Докажем пункт 2). Пусть, наоборот, $ST(P) \leq \sigma$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что

$$|\xi^s| \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad [1 + P(\xi^s)] |\xi^s|^{-\sigma_s} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

где $\sigma_s = \sigma + \delta$. Полагая $\eta^s = \xi^s / |\xi^s|$ ($s \in N$) и рассуждая как при доказательстве леммы 2.1, получим предельную точку η . Если $\eta \notin \Sigma_3$, то противоречие с (2.7) получится как в лемме 2.1 (см. также теорему 0.1 в [11]). Пусть $\eta \in \Sigma_3$, точка $\tau = \tau(\eta)$ выбрана как выше и точки $\{\xi^s\}$ представлены в виде (2.3), где $\varphi_s > 1$, $\psi_s \geq 0$, ($s \in N$). Если $\psi_s = 0$ для любого бесконечного множества $\{s\}$, то можно считать, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Тогда $P_0(\xi^s) = P_1(\xi^s) = 0$, ($s \in N$), $P_2(\eta) > 0$, и $P(\xi^s) = \varphi_s^{d_2} \cdot P_2(\eta) + o(\varphi_s^{d_2})$ при $s \rightarrow \infty$. Так как последовательности φ_s и $|\xi^s|$ имеют одинаковый порядок роста при $s \rightarrow \infty$, то это противоречит (2.7), если $0 < \delta \leq 2$.

Пусть теперь $\varphi_s > 1$, $\psi_s > 0$, положим

$$\rho_s = 1 - \ln \psi_s / \ln \varphi_s \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s} \quad (s \in N). \quad (2.8)$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\rho_s \geq 0$ ($s \in N$). При этом, если за счет выбора подпоследовательности имеем $\rho_s \rightarrow \infty$ или $\rho_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то противоречие с (2.7) получится как при доказательстве теоремы 0.1 работы [11]. Пусть $0 < \rho' \leq \rho_s \leq \rho'' < \infty$ ($s \in N$). За счет выбора подпоследовательности можно считать, что $\rho_s \rightarrow \rho > 0$ при $s \rightarrow \infty$. Если $\delta \neq \Delta(\eta)$ (см. определение

множества Σ_3), то противоречие с (2.7) получится как при доказательстве теоремы 0.1 работы [11]. Пусть $\delta = \Delta = \Delta(\eta)$ и

$$\xi^s = \varphi_s \left(\eta + \frac{\psi_s}{\varphi_s} \tau \right) = \varphi_s (\eta + \varphi_s^{-\rho_s} \tau) = \varphi_s (\eta + \varphi_s^{-\Delta} x_s \tau), \quad (2.9)$$

где $x_s = \varphi_s^{\Delta - \rho_s}$ ($s \in N$). Из формулы Тейлора и леммы 1.2 имеем (см. (1.9))

$$P(\xi^s) = \varphi_s^{d_2} [Q_0(x_s, \eta) + o(1)] \quad \text{as } s \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Из определения множества Σ_3 следует, что $l_0 > l_1$, поэтому (см. (1.8)) если $x_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то $Q_0(x_s, \eta) = D_\tau^{l_0} P_0(\eta) x_s^{l_0} + o(x_s^{l_0})$. Тогда (2.10) противоречит (2.7) при $\delta \leq 2$. Если $x_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то противоречие получится за счет того, что $P_2(\eta) \neq 0$ при $\eta \in \Sigma_3$. Таким образом, можно считать, что $\omega \leq x_s \leq \omega^{-1}$ для всех $s \in N$ и некоторого числа $\omega \in (0, 1)$, и, что последовательность $\{x_s\}$ сходится: $x_s \rightarrow x'$ при $s \rightarrow \infty$ и $x' \in [\omega, \omega^{-1}]$. Если $x' \notin X_0(\eta)$, то $Q_0(x', \eta) > 0$ в силу леммы 1.2, и (2.10) противоречит (2.7) когда $\delta \leq 2$. Пусть $x' \in X_0(\eta)$, тогда простой подсчет показывает, что (см. (1.7), (1.8))

$$\begin{aligned} D_\tau^2 P(\xi^s) &\equiv D_\tau^2 P[\varphi_s (\eta + \varphi_s^{-\Delta} x_s \tau)] = f_{xx}'''(t, x_s) \varphi_s^{-2(1-\Delta)} \\ &= Q_0''(x_s, \eta) \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)} + \sum_{i=1}^{M_0} Q_i''(x_s, \eta) \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)-i\Delta}, \quad s \in N, \end{aligned}$$

при этом из пункта 4) леммы 1.2 следует, что при достаточно больших s $|Q_0''(x_s, \eta)| \geq C_1 > 0$. Тогда для некоторого $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} |D_\tau^2 P(\xi^s)| &\geq |Q_0''(x_s, \eta)| \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)} - \sum_{i=1}^{M_0} |Q_i''(x_s, \eta)| \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)-i\Delta} \\ &\geq C_1 \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)} - o(\varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)}) \geq C_2 \varphi_s^{d_2-2(1-\Delta)} \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

По теореме Хермандера (см. [1], теорема 11.13) существуют положительные числа A и a такие, что для гипоеллиптического многочлена P и достаточно большого ξ

$$|D^\alpha P(\xi)|/P(\xi) \leq A|\xi|^{-|\alpha|a} \quad \text{и} \quad 0 \neq \alpha \in N_0^2. \quad (2.11)$$

Откуда для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq \frac{1}{A} |D_\tau^2 P(\xi^s)| |\xi^s|^{2a} \geq \frac{C_2}{A} |\xi^s|^{d_2-2(1-\Delta)+2a}, \quad (2.12)$$

что противоречит (2.7) при $\delta \leq 2(\Delta + a)$. Этим первая часть пункта 2) доказана. Докажем вторую часть. Пусть, наоборот, для некоторой точки $\eta \in \Sigma_3$ $ST(P, \eta) \leq$

$d_2 - 2(1 - \Delta(\eta))$. Тогда для любого $\delta > 0$ и $\{\sigma_s\} \equiv \{d_2 - 2(1 - \Delta(\eta)) + \delta\}$ существует подпоследовательность $\{\xi^s\}$ такая, что

$$|\xi^s| \rightarrow \infty \quad P(\xi^s)(1 + |\xi^s|)^{-\sigma_s} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Проводя аналогичные рассуждения как выше, получим неравенство (2.12), противоречащее (2.7) при $\delta < 2a$.

Докажем пункт 3). По уже доказанной части и по условию теоремы $ST(P) > d_2 - 2 \geq d_3$, поэтому для $C_3 > 0$

$$|\tau(\xi)|/P(\xi) \leq C_3 |\xi|^{d_3 - ST(P)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

т.е. многочлены P и R имеют одинаковую мощность. Следовательно, $ST(P) = ST(R)$. Пункт 4) теоремы следует из того, что по теореме 10.4.3 работы [1] многочлены, имеющие одинаковую мощность, имеют одинаковую по Л. Хермандеру силу, а по теореме 11.1.9 работы [1] такие многочлены либо одновременно гипотетичны, либо нет. Теорема 2.1 доказана.

Далее для $R \in I_2$, $\eta \in \Sigma(P_0)$ ($t > 0$, $\varepsilon > 0$) положим $D_\varepsilon(\eta, t) = \{\xi \in D_\varepsilon(\eta) : |\xi| = t\}$. При $\eta \in \Sigma_3$ и $\omega \in (0, 1)$ через $D_{\varepsilon\omega}(\eta, t)$ обозначим множество точек $\xi \in D_\varepsilon(\eta, t)$ таких

$$d_\eta(\xi) \equiv d_\eta(\xi, R) = \rho((\xi, \tau)/|(\xi, \eta)|^{1-\Delta}, \quad X_0(\eta) \cup X_0(-\eta)) \leq \omega,$$

где ρ — функция расстояния. Положим

$$\chi(R, \eta, \delta) = \max_{0 \leq j \leq 3} \{d_j - l_j(\eta)\delta\}, \quad \delta \geq 0,$$

$$\mu(t) = \mu(t, \eta, \varepsilon) = \inf\{R(\xi) : \xi \in D_\varepsilon(\eta, t)\},$$

$$\mu_\omega(t) = \mu_\omega(t, \eta, \varepsilon) = \inf\{R(\xi) : \xi \in D_{\varepsilon\omega}(\eta, t)\}.$$

Лемма 2.2. Пусть $R \in I_2$, $\eta \in \Sigma(P_0)$ и $\omega \in (0, 1)$. Тогда существуют числа $C = C(\eta, \varepsilon, \omega) > 1$ и $M = M(\eta, \varepsilon, \omega) > 0$ такие, что при $t \geq M$

$$C^{-1}t^{ST(R, \eta)} \leq \mu(t, \eta, \varepsilon) \leq Ct^{ST(R, \eta)}, \quad (2.14)$$

$$C^{-1}\mu_\omega(t, \eta, \varepsilon) \leq \mu(t, \eta, \varepsilon) \leq C\mu_\omega(t, \eta, \varepsilon). \quad (2.15)$$

Доказательство : Так как $R \in I_2$ и μ — полуалгебраическая функция по t , то по теореме А.2.5 работы [1] для некоторых A и a $\mu(t, \eta, \varepsilon) = At^a(1 + o(1))$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда $a = ST(R, \eta)$, и (2.14) следует из определения числа $ST(R, \eta)$.

Правая часть неравенства (2.15) очевидна. Для доказательства левой части предположим обратное, что существует тройка $(\eta, \varepsilon, \omega)$ и последовательность $\{t_s\}$ такие, что

$$t_s \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \mu_\omega(t_s)/\mu(t_s) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Так как для любого $s \in N$ множества $D_\varepsilon(\eta, t_s)$ и $D_{\varepsilon\omega}(\eta, t_s)$ компактны, то существуют точки $\xi^{s,1} \in D_\varepsilon(\eta, t_s)$ и $\xi^{s,2} \in D_{\varepsilon\omega}(\eta, t_s)$ такие, что для любого $s \in N$

$$\mu(t_s) = R(\xi^{s,1}) \quad \text{и} \quad \mu_\omega(t_s) = R(\xi^{s,2}), \quad (2.17)$$

при этом по (2.16)

$$R(\xi^{s,2})/R(\xi^{s,1}) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Отметим, что $\Delta(\eta) = \Delta(-\eta) \equiv \Delta < 1$ для любой точки $\eta \in \Sigma_3$, при этом множества $X_0(\pm\eta)$ состоят из конечного числа точек. Отсюда и из определения множества $D_{\varepsilon\omega}(\eta t)$ следует, что с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\omega) > 0$

$$|x_s^{(2)}| \equiv |(\xi^{s,2}, \tau)|/|(\xi^{s,1}, \eta)|^{1-\Delta} \leq C_1, \quad s \in N. \quad (2.19)$$

Имея ввиду то, что $\chi(R, \eta, \Delta) = \chi(R, -\eta, \Delta)$ при $\eta \in \Sigma_3$, представляя точки $\{\xi^{s,2}\}$ в виде (2.3), (2.9) и применяя лемму 1.2, получим

$$R(\xi^{s,2}) = \varphi_s^{d_2} [Q_0(x_s^{(2)}, \eta) + o(1)] \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Так как множество $\{x_s^{(2)}\}$ ограничено (см. (2.19)) и φ_s и $t_s = |\xi^{s,2}|$ имеют одинаковый порядок роста при $s \rightarrow \infty$, то отсюда имеют

$$R(\xi^{s,2}) \leq C_2 t_s^{d_2}, \quad C_2 > 0, \quad s \in N. \quad (2.21)$$

С другой стороны, так как $D_{\varepsilon\omega}(\eta, t_s) \subset D_\varepsilon(\eta, t_s)$ ($s \in N$), то из (2.16) следует, что $\xi^{s,1} \in D_\varepsilon \setminus D_{\varepsilon\omega}$, $d_\eta(\xi^{s,1}) \geq \omega$ и поэтому для достаточно больших s $Q_0(x_s^{(1)}, \eta) \geq C_3 > 0$, где $x_s^{(1)} \equiv (\xi^{s,1}, \tau)/|(\xi^{s,1}, \eta)|^{1-\Delta}$. Тогда, представляя последовательность $\{R(\xi^{s,1})\}$ в виде (2.20), имеем для достаточно больших s $R(\xi^{s,1}) \geq C_4 t_s^{d_2} C_3 > 0$, что вместе с (2.21) противоречит (2.18). Лемма доказана.

Теорема 2.2. Пусть многочлен $R(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$ гипозллиптичен, тогда выполняется условие (1.2) и

- 1) $d_0 - l_0(\eta) < ST(R, \eta)$ при $\eta \in \Sigma_0$,
- 2) $d_1 - l_1(\eta) < ST(R, \eta)$ при $\eta \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Доказательство : Из гипоеллиптичности R следует, что $R \in I_2$, откуда очевидным образом следует (1.2). Если $\eta \in \Sigma_0 \setminus \Sigma_3$, то пункты 1) и 2) следуют из леммы 1.1 и теоремы 2.1. Для доказательства пункта 1) при $\eta \in \Sigma_3$ предположим обратное, что для некоторой точки $\eta \in \Sigma_3$

$$d_0 - l_0(\eta) \geq ST(R, \eta). \quad (2.22)$$

Очевидно (см. (2.17)), что для произвольных $\varepsilon > 0$, $\omega \in (0, 1)$ и $s \in N$ существуют точки $\xi^s = \xi^s(\varepsilon, \omega) \in D_{\varepsilon\omega}(\eta, s)$ такие, что $\mu_\omega(s) = \inf\{R(\xi) : \xi \in D_{\varepsilon\omega}(\eta, s)\} = R(\xi^s)$, при этом по лемме 2.2

$$C^{-1}s^{ST(R, \eta)} \leq R(\xi^s) \leq Cs^{ST(R, \eta)}, \quad C > 0, \quad s \in N. \quad (2.23)$$

По определению множества $D_{\varepsilon\omega}(\eta, s)$

$$|x_s| \equiv |(\xi^s, \tau)|/|(\xi^s, \eta)|^{1-\Delta} \leq \omega_1, \quad s \in N, \quad (2.24)$$

где $\Delta = \Delta(-\eta) < 1$ и $\omega_1 = \omega + d \equiv \omega + \max\{|x| : x \in X_0(\eta) \cup X_0(-\eta)\}$.

Как при доказательстве леммы 2.1 получим, что единственной предельной точкой последовательности $\{\eta^s = \xi^s/|\xi^s|\}$ будет точка $\eta \in \Sigma_3$, удовлетворяющая соотношению (2.22). Представим точки ξ^s по базису $\{\eta, \tau\}$ в виде (2.3), (2.9), где (см. (2.24)) $|x_s| \leq \omega_1$ ($s \in N$) и оценим поведение многочлена $D_r^{l_0} R$ на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s \rightarrow \infty$. В силу (1.5) имеем для достаточно больших s некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} |D_r^{l_0} R(\xi^s)| &\geq |D_r^{l_0} P_0(\xi^s)| - |D_r^{l_0} P_1(\xi^s)| - |D_r^{l_0} P_2(\xi^s)| \\ &\geq \frac{1}{2}\varphi_s^{d_0-l_0} |D_r^{l_0} P_0(\eta)| - C_1\varphi_s^{d_1-l_0} \geq \frac{1}{4}|D_r^{l_0} P_0(\eta)|\varphi_s^{d_0-l_0}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $l_0 = l_0(\eta)$, $D_r^{l_0} P_0(\eta) \neq 0$, при этом φ_s и $s = |\xi^s|$ имеют одинаковый порядок роста при $s \rightarrow \infty$. По теореме 11.1.3 работы [1] гипоеллиiptический многочлен R удовлетворяет (2.11). Имея ввиду, что $D_r^{l_0} P_0(\eta) \neq 0$, из (2.23), (2.25) и (2.11) имеем

$$C_2 s^{ST(R, \eta)} \geq R(\xi^s) \geq C_3 s^{d_0-l_0+a l_0},$$

где C_2, C_3 и a – положительные постоянные. Это противоречит (2.22).

Докажем справедливость пункта 2) для точек $\eta \in \Sigma_3$. Пусть, наоборот, для некоторой точки $\eta \in \Sigma_3$

$$d_1 - l_1(\eta) \geq ST(R, \eta). \quad (2.26)$$

Рассуждая как выше, получим последовательность $\{\xi^s\} : \xi^s \in D_{\varepsilon\omega}(\eta, s)$ ($s \in N$) и ограниченную последовательность $\{x_s\}$ (см. (2.24)). Не умаляя общности, будем считать, что последовательность $\{x_s\}$ сходится: $x_s \rightarrow x'$ при $s \rightarrow \infty$. Покажем, что $x' \in X_0(\eta)$. Пусть, наоборот, $Q_0(x', \eta) \neq 0$. Тогда, применяя формулу Тейлора, получим для достаточно больших s (см. формулу (1.7))

$$R(\xi^s) = \sum_{j \geq 0} \varphi_s^{d_2-j\Delta} Q_j(x_s, \eta) \geq \frac{1}{2} Q_0(x', \eta) \varphi_s^{d_2},$$

где $\Delta = \Delta(\eta)$, а многочлены Q_j ($j = 0, 1, \dots, M_0$) определяются формулами (1.8). Отсюда и из (2.23) следует, что $ST(R, \eta) \geq d_2$, что по лемме 1.1 противоречит (2.26).

Итак, $x' \in X_0(\eta)$. В силу леммы 1.2 кратность корня x' равна 2. Оценим поведение многочлена $D_r^{l_1} R$ на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s \rightarrow \infty$. В силу леммы 1.3 имеем для достаточно больших s , $l_j = l_j(\eta)$ ($j = 0, 1$) и $\Delta = \Delta(\eta)$

$$\begin{aligned} |D_r^{l_1} R(\xi^s)| &\geq |D_r^{l_1} P_0(\xi^s) + D_r^{l_1} P_1(\xi^s)| - C_4 \varphi_s^{d_2-l_1} = \\ &= \left| \sum_{k=l_0-l_1}^{d_0-l_1} \varphi_s^{d_0-l_1-k\Delta} x_s^k D_r^{k+l_1} P_0(\eta) + \sum_{k=0}^{d_1-l_1} \varphi_s^{d_1-l_1-k\Delta} x_s^k D_r^{k+l_1} P_1(\eta) \right| - C_4 \varphi_s^{d_2-l_1}, \end{aligned}$$

где $C_4 > 0$ — постоянная. Так как для точек $\eta \in \Sigma_3$ $l_1 < l_0$ и $d_0 - \Delta(l_0 - l_1) = d_1$, то, проводя простые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} |D_r^{l_1} R(\xi^s)| &\geq \varphi_s^{d_1-l_1} |D_r^{l_0} P_0(\eta) x_s^{l_0-l_1} + D_r^{l_1} P_1(\eta)| + o(\varphi_s^{d_1-l_1}) \\ &= \varphi_s^{d_1-l_1} |Q_0^{(l_1)}(x_s, \eta)| + o(\varphi_s^{d_1-l_1}) \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.27)$$

По лемме 1.1 $d_1 - l_1 < d_2$, т.е. $l_1 \geq 2$, а по лемме 1.2 $Q_0^{(l_1)}(x', \eta) \neq 0$, поэтому из оценок (2.11) и соотношений (2.23), (2.27) получаем для некоторой постоянной $C_5 > 0$

$$C_2 |\xi^s|^{ST(R, \eta)} \geq R(\xi^s) \geq C_5 |\xi^s|^{d_1-l_1+a l_1} \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Это противоречит (2.26). Теорема 2.2 доказана.

§3. КРИТЕРИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

Сначала докажем два вспомогательных предложения, которые применим при доказательстве основной теоремы. Пусть $\Omega = \{(\theta, x) : 0 < \theta < \delta, a < x < b\}$, $g(\theta, x) \geq 0$ при всех $(\theta, x) \in \Omega$, $t > 0$, $f(t, x) = t^d g(t^{-\Delta} x)$, где δ, a, b, d — положительные числа и $\Delta \in (0, 1)$.

Лемма 3.1. Пусть $g \in C^{(2)}(\Omega)$, $g(\theta, x) \geq 0$ и

$$|g''_{\theta\theta}(\theta, x)| + |g''_{xx}(\theta, x)| \leq \text{const}, \quad (\theta, x) \in \Omega, \\ \inf_{x \in [a, b]} [f(t, x)t^{-[d-2(1-\Delta)]}] \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\sup_{x \in (a, b)} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| / f + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| / ft^{1-\Delta} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Доказательство : В силу леммы 3.1 работы [15] (см. также лемму 2.1 работы [16]),

$$|g'_x(\theta, x)| + |g'_\theta(\theta, x)| \leq C\sqrt{g(\theta, x)}, \quad (\theta, x) \in \Omega, \quad C > 0.$$

Отсюда имеем для всех $(t, x) : (t^{-\Delta}, x) \in \Omega$

$$|f'_t(t, x)| \leq dt^{-1}f(t, x) + C\Delta t^{\frac{d}{2}-(\Delta+1)}\sqrt{f(t, x)}.$$

Поэтому имеем равномерно по $x \in [a, b]$

$$|f'_t|/f \leq dt^{-1} + C\Delta t^{-2\Delta}/\sqrt{ft^{-[d-2(1-\Delta)]}} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Аналогично,

$$|f'_x|/ft^{1-\Delta} \leq \frac{t^{\frac{d}{2}-(1-\Delta)}}{\sqrt{f(t, x)}} = \frac{1}{\sqrt{ft^{-[d-2(1-\Delta)]}}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

что доказывает лемму.

Лемма 3.2. Пусть $R = P_0 + P_1 + P_2 \in I_2$, $\Sigma_3 = \Sigma_3(R) \neq \emptyset$, $\eta \in \Sigma_3$, число $\Delta = \Delta(\eta) \in (0, 1)$ и точка $\tau = \tau(\eta)$ определены как выше, при этом, $\omega \in (0, 1)$, $x \in [\omega, \omega^{-1}]$, $t > 0$, $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \tau) = t(\eta + t^{-\Delta}x\tau)$, $f(t, x) = f(t, x, \eta, \tau) = R[\xi(t, x, \eta, \tau)]$ и

$$\inf_{|x| \in [\omega, \omega^{-1}]} f(t, x)t^{-[d_2-2(1-\Delta)]} \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\sup_{|x| \in [\omega, \omega^{-1}]} [|D_\tau f| + |D_\eta f|]/f \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство : Как было отмечено выше, функция f представляется в виде (1.7), (1.8). Так как $R \geq 0$, то легко убедиться в том, что при $\theta > 0$ пара функций

$$g(\theta, x) = \sum_{i=0}^{M_0} \theta^i Q_i(x, \eta) \quad \text{и} \quad f(t, x) = t^{d_1} g(t^{-\Delta}, x) = \sum_{i=0}^{M_0} t^{d_2-i\Delta} Q_i(x, \eta)$$

удовлетворяет условиям леммы 3.1, и поэтому функция f удовлетворяет соотношению (3.1). Простые вычисления показывают, что

$$D_{\tau}f = t^{-(1-\Delta)}f'_x(t, x) \quad \text{и} \quad D_{\eta}f = f'_t - (1-\Delta)xt^{-1}f'_x.$$

Это вместе с (3.1) доказывает лемму.

Следующие две теоремы являются основными результатами настоящей статьи.

Теорема 3.1. *Многочлен R является гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда :*

- 1) $ST(R) > 0$,
- 2) $d_2 - 2(1 - \Delta(\eta)) < ST(R, \eta)$ при $\eta \in \Sigma_3$,
- 3) $d_0 - l_0(\eta) < ST(R, \eta)$ при $\eta \in \Sigma_0$,
- 4) $d_1 - l_1(\eta) < ST(R, \eta)$ при $\eta \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Доказательство : Необходимость условия 1) следует из теоремы 2.1, если иметь ввиду что $R \in I_2$ и, следовательно, справедливо условие (1.2). Необходимость условий 2), 3) и 4) следует из теорем 2.1 и 2.2.

Докажем теперь достаточность. Пусть, наоборот, (см. [7]) при выполнении условий 1), 2) 3) и 4). существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$\left| \left| \frac{\partial R(\xi^s)}{\partial \xi_1} \right| + \left| \frac{\partial R(\xi^s)}{\partial \xi_2} \right| \right| / [1 + |R(\xi^s)|] \geq \varepsilon, \quad s \in N. \quad (3.2)$$

Положим $\eta^s = \xi^s / |\xi^s|$ ($s \in N$). За счет выбора подпоследовательности можно считать, что последовательность $\{\eta^s\}$ сходится. Пусть $\eta^s \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$. Из (3.2) следует, что $\eta \in \Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Сначала рассмотрим случай $\eta \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Так как $ST(R) > 0$, то $R \in I_2$ и удовлетворяется условие (1.2). Тогда по теореме 2.1 $ST(R, \eta) = d_1$ при $\eta \in \Sigma_1$ и $ST(R, \eta) = d_2$ при $\eta \in \Sigma_2$. Отсюда и из условий 3) и 4) теоремы имеем

$$d_0 - l_0(\eta) < d_1, \quad \eta \in \Sigma_1, \quad (3.3)$$

$$\max\{d_0 - l_0(\eta), d_1 - l_1(\eta)\} < d_2, \quad \eta \in \Sigma_2. \quad (3.4)$$

Пусть точка $\tau = \tau(\eta) \in R^2$ определена как выше, и элементы $\{\xi^s\}$ представлены по базису $\{\eta, \tau\}$ в виде (2.3), где $\varphi_s = (\xi^s, \eta) > 1$ и $\psi_s = (\xi^s, \tau) \geq 0$ для достаточно больших s и $\psi_s / \varphi_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Это в частности означает, что $\xi^s \in D_{\varepsilon}(\eta)$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $\psi_s \leq \text{const}$ для бесконечного множества $\{s\}$, то будем

считать, что $\psi_s \leq \text{const}$ для всех $s \in N$. Тогда для достаточно больших s из неравенства (1.5) и условий (3.3), (3.4) следует, что для $C_j > 0$ ($j = 1, \dots, 4$)

$$R(\xi^s) \geq C_1 \varphi_s^{d_1}, \quad \eta \in \Sigma_1, \quad R(\xi^s) \geq C_2 \varphi_s^{d_2}, \quad \eta \in \Sigma_2, \\ \left| \frac{\partial R(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| \leq C_3 \varphi_s^{d_1-1}, \quad \eta \in \Sigma_1, \quad \left| \frac{\partial R(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| \leq C_4 \varphi_s^{d_2-1}, \quad \eta \in \Sigma_2 \quad (i = 1, 2).$$

Эти соотношения противоречат (3.2).

Если $\psi_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, тогда из (1.5) следует, что

$$|P_j(\xi^s)| \geq C_5 \varphi_s^{d_j - l_j} \psi_s^{l_j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.5)$$

$$\left| \frac{\partial P_j(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| \leq C_6 \varphi_s^{(d_j-1)-l_{j,i}} \psi_s^{l_{j,i}}, \quad j = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

где C_5 и C_6 — положительные постоянные и $l_{j,i} = l_{j,i}(\eta)$ — кратность нуля η многочлена $\frac{\partial P_j}{\partial \xi_i}$ ($j = 0, 1, 2, i = 1, 2$). Так как $l_{j,i} \geq l_j - 1$ ($j = 0, 1, 2, i = 1, 2$) и $\psi_s/\varphi_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то из (3.6) имеем для достаточно больших s

$$\left| \frac{\partial P_j(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| \leq C_6 \varphi_s^{d_j - l_j} \psi_s^{l_j - 1}, \quad j = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2,$$

. Это вместе с (3.5) противоречит (3.2).

В случае $\eta \in \Sigma_3$ мы, очевидно, имеем $ST(R, \eta) \leq d_2$. Тогда $\Delta = \Delta(\eta) \in (0, 1)$ и $\max\{d_0 - l_0(\eta) : d_1 - l_1(\eta)\} < d_2$ согласно условиям 1), 2), 3), 4). Обозначим

$$\omega_1 = \left| \frac{P_2(\eta)}{6D_r^{l_1} P_1(\eta)} \right|^{1/l_1} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \left| \frac{D_r^{l_1} P_1(\eta)}{6D_r^{l_0} P_0(\eta)} \right|^{1/(l_0 - l_1)},$$

и рассмотрим следующие возможные случаи (за счет выбора подпоследовательности):

- а) $\psi_s \leq \omega_1 \varphi_s^{1-\Delta}, \forall s \in N,$
- б) $\psi_s \geq \omega_2 \varphi_s^{1-\Delta}, \forall s \in N,$
- с) $\omega_1 \varphi_s^{1-\Delta} \leq \psi_s \leq \omega_2 \varphi_s^{1-\Delta}, \forall s \in N$

(при этом, если $\omega_1 \geq \omega_2$, то случай с) исключается). Так как $R \in I_2$, то по лемме 1.1 работы [13] $P_0(\xi^s) \geq 0$ и $P_2(\xi^s) > 0$ для достаточно больших s . Поэтому, для таких s

$$R(\xi^s) \geq P_0(\xi^s) + P_2(\xi^s) - |P_1(\xi^s)|. \quad (3.7)$$

В случае а) по неравенству (1.5) и определению чисел ω_1 и $\Delta = \Delta(\eta)$ имеем

$$|P_1(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} |D_r^{l_1} P_1(\eta)| \varphi_s^{d_1 - l_1} \psi_s^{l_1} \leq \frac{3}{2} \omega_1^{l_1} |D_r^{l_1} P_1(\eta)| \varphi_s^{d_1 - l_{11} + (1-\Delta)l_1} \\ = \frac{1}{4} P_2(\eta) \varphi_s^{d_2} \leq \frac{1}{2} P_2(\xi^s). \quad (3.8)$$

Отсюда и из (3.7) для достаточно больших s

$$R(\xi^s) \geq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^2 |P_j(\xi^s)| \geq \frac{1}{4} |P_2(\xi^s)| \geq \frac{1}{8} |P_2(\eta)| |\xi^s|^{d_2}. \quad (3.9)$$

Из неравенства (1.5) следует, что для достаточно больших s имеем с некоторыми постоянными $C_7 > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P_j(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| &\leq \frac{3}{2} \left| D_{\tau}^{l_{j,i}} \frac{\partial P_j(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| \varphi_s^{d_j-1-l_{j,i}} \psi_s^{l_{j,i}} \leq C_7 \varphi_s^{d_j-1-l_{j,i}} \varphi_s^{(1-\Delta)l_{j,i}} = \\ &= C_7 \varphi_s^{d_j-1-\Delta l_{j,i}} = C_7 \varphi_s^{d_j-1-\Delta l_{j,i}+\Delta(l_j-l_{j,i})} \leq C_7 \varphi_s^{d_2+\Delta-1}, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где последняя оценка имеет место в силу неравенств $l_{j,i} \geq l_j - 1$, $\varphi_s \geq 1$ ($j=0,1,\dots,M$, $s \in N$). Неравенства (3.9) и (3.10) противоречат (3.2) так как $\Delta < 1$.

В случае б), аналогично (3.8) получим неравенство $|P_1(\xi^s)| \leq 0,5P_0(\xi^s)$ для достаточно больших s , которое влечет (3.9). С другой стороны, по (1.5) и (3.9) для достаточно больших s , $j=0,1,2$, $i=1,2$ с некоторой постоянной $C_8 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P_j(\xi^s)}{\partial \xi_i} \right| / R(\xi^s) &\leq \left[\frac{3}{2} \left| D_{\tau}^{l_{j,i}} \frac{\partial P_j(\eta)}{\partial \xi_i} \right| \varphi_s^{d_j-l_{j,i}-1} \psi_s^{l_{j,i}} \right] / \left[\frac{1}{4} |P_j(\xi^s)| \right] \leq \\ &\leq \left[\frac{3}{2} \left| D_{\tau}^{l_{j,i}} \frac{\partial P_j(\eta)}{\partial \xi_i} \right| \varphi_s^{d_j-l_{j,i}-1} \psi_s^{l_{j,i}} \right] / \left[\frac{1}{8} |D_{\tau}^{l_j} P_j(\eta)| \varphi_s^{d_j-l_j} \psi_s^{l_{j,i}} \right] \leq \\ &\leq C_8 \varphi_s^{l_j-l_{j,i}-1} \psi_s^{l_{j,i}-l_j} = C_8 \frac{1}{\varphi_s} \left(\frac{\psi_s}{\varphi_s} \right)^{l_{j,i}-l_j+1} \left(\frac{\varphi_s}{\psi_s} \right) = C_8 \frac{1}{\psi_s} \left(\frac{\psi_s}{\varphi_s} \right)^{l_{j,i}-l_j+1} \leq \frac{1}{\psi_s}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где оценки получены так же, как последнее неравенство в (3.10). Теперь заметим, что в случае б) мы имеем $\psi_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, и, следовательно, (3.11) противоречит (3.2).

Пусть $\omega_1(\eta) \leq \omega_2(\eta)$. Рассмотрим случай с). Положим $x_s = \psi_s \varphi_s^{-(1-\Delta)}$, тогда $\omega_1 \leq x_s \leq \omega_2$ ($s \in N$). Очевидно, при достаточно больших s $f(\varphi_s, x_s) = R(\xi^s)$ и по лемме 3.2

$$[|D_{\tau} R(\xi^s)| + |D_{\eta} R(\xi^s)|] / R(\xi^s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Это противоречит (3.2), поскольку первые производные многочлена R являются линейной комбинацией производных $D_{\tau} R$ и $D_{\eta} R$. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть $P = R + \tau$ — многочлен вида (1.1), удовлетворяющий условию (1.2), при этом $d_3 \leq d_2 - 2$. Многочлен P гипозеллиптичен тогда и только тогда, когда многочлен R удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и 4) теоремы 3.1.

Доказательство следует непосредственно из теорем 2.1 и 3.1.

Следующий пример иллюстрирует полученный основной результат. Пусть

$$P(\xi) = \xi_1^6(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_1^2\xi_2^2) - 2\xi_1^3\xi_2^6 + \xi_2^8 + \sum_{|\alpha| \leq 6} \gamma_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}.$$

Здесь $d_0 = 10$, $d_1 = 9$, $d_2 = 8$, $d_3 = 6 = d_2 - 2$, $\Sigma_0 = \{\pm\eta\} = \{(0, \pm 1)\}$. Простые выкладки показывают, что $\Sigma_3 = \Sigma_0$, $\Delta = \Delta(\pm\eta) = 1/3$, $l_0 = l_0(\pm\eta) = 6$, $l_1 = l_1(\pm\eta) = 3$, $l_2 = l_2(\pm\eta) = 0$, т.е. условие (1.2) удовлетворяется. Пусть $\tau = \tau(\pm\eta) = (1, 0)$, тогда $Q_0(x) = Q(x, \pm\eta) = (x^3 - 1)^2 \geq 0$ и $X_0(\pm\eta) = \{1\} \subset [0, 5; 2]$. Так как для достаточно больших t

$$\begin{aligned} \inf_{0.5 \leq x \leq 2} P[t(\pm\eta + t^{-\Delta}x\tau)] &= \inf_{0.5 \leq x \leq 2} P\left[t\left(t^{-\frac{1}{3}}x, \pm 1\right)\right] = \\ &= \inf_{0.5 \leq x \leq 2} \left[t^8(x^3 - 1)^2 + t^{\frac{22}{3}}x^8 + t^{\frac{20}{3}}x^{10} + \sum_{|\alpha| \leq 6} \gamma_\alpha (\pm 1)^{\alpha_2} t^{\frac{2}{3}\alpha_1 + \alpha_2} x^{\alpha_1}\right], \end{aligned}$$

то для таких t равномерно по $x \in [0, 5; 2]$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^8 t^{\frac{22}{3}} \leq P\left[t\left(t^{-\frac{1}{3}}x, \pm 1\right)\right] \leq \frac{1}{4} 2^8 t^{\frac{22}{3}},$$

т.е. $ST(P) = 22/3 > 8 - 2(1 - \Delta)$ и условия 1) и 2) теоремы 3.1 для многочлена R выполняются. Условия 3) и 4) той же теоремы легко проверяются. Так как $d_3 \leq d_2 - 2$, то по теореме 3.2 многочлен P гипоеллиптичен.

Abstract. Some necessary and sufficient conditions for the hypoellipticity of a class of polynomials of two variables are found. The connection between hypoellipticity and the Seidenberg-Tarski number of the polynomials is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1983.
2. С. М. Никольский "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, том 146, № 4, стр. 767 - 769, 1962.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса полиномов, ДАН СССР, том 164, № 3, стр. 571 - 573, 1965.
4. S. Gindikin, L. Volevich. The method of Newton's polyhedron in the theory of PDE. Kluwer, vol. 86, 1992.
5. C. Zuily, "Sur hypoellipticite des operateurs differential", Compts. Rendus Acad, Sci. Paris, vol. 277, № 2, pp. 529 - 531, 1973.
6. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоеллиптичность", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 143 - 159, 1979.

7. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоеллиптичности дифференциальных операторов", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 21, № 5, стр. 453 – 470, 1986.
8. O. R. Gabrielyan, H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Reducing the comparison of polynomials of two variables to a comparison of functions of one variable", in : Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics, Proc. of ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, pp. 41 – 51, 2004.
9. A. A. Seidenberg, "A new decision method for elementary algebra", Ann. Math., vol. 60, pp. 365 – 374, 1954.
10. A. Tarski, "A decision method for elementary algebra and geometry", Manuscript, Berkeley, 63 p., 1951.
11. H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of polynomials of two variables", in : Topics in Analysis and Applications, NATO Science Series, vol. 147, pp. 163 – 190, 2004.
12. Г. Г. Казарян "Об одном семействе гипоеллиптических полиномов", Изв. АН Арм. ССР. Математика, том 9, № 3, стр. 189 – 211, 1974.
13. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О поведении неэллиптических полиномов $P(\xi_1, \xi_2)$ на бесконечности", Изв. НАН Армении, Математика, том 39, № 3, стр. 1 – 18, 2004.
14. О. Р. Габриелян, "О степени превалирования вырождающихся многочленов и об их гипоеллиптичности", Изв. НАН Армении, Математика, том 38, № 6, стр. 63 – 82, 2003.
15. F. Treves, "A new method of proof of the subelliptic estimates", Comm. Puer and Appl. Math., vol. 24, pp. 71 – 115, 1974.
16. T. Matsuzawa, "On some degenerate parabolic equations", Nagoya Math. J., vol. 51, pp. 57 – 77, 1973.

Поступила 21 Сентября 2005

ВЕСОВЫЕ $\bar{\partial}$ -ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ ЗИГЕЛЯ

А. О. Карапетян

Институт математики НАН Армении

E-mail : armanakar2005@gambler.ru

Резюме. В работе вводятся весовые пространства $L^p_{\alpha,\gamma}(\Omega_n)$ с весовыми функциями вида $(Im \eta_1 - \sum_{k=2}^n |\eta_k|^2)^\alpha |\eta_1 + i|^{-\gamma}$, рассматриваемыми в области Зигеля $\Omega_n = \{\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n : Im \eta_1 > \sum_{k=2}^n |\eta_k|^2\}$ в $\mathbb{C}^n$. Для функций $f \in C^1(\Omega_n)$ таких, что f и $|\bar{\partial}f|$ принадлежат определенным пространствам $L^p_{\alpha,\gamma}(\Omega_n)$, устанавливаются весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления.

§0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. В работах [1], [2] М. М. Джрбашьяном были рассмотрены классы $\mathbb{H}^p(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$) функций $f(\zeta)$, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}^1$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta < +\infty \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Для этих классов была установлена следующая теорема.

Теорема 0.1. Каждая функция $f \in \mathbb{H}^p(\alpha)$ ($1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$) допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\zeta})^{2+\alpha}} d\xi d\eta, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (0.1)$$

В [1], [2] этот результат был применен для построения теории факторизации мероморфных в $\mathbb{D}$ функций класса Неванлинна–Джрбашьяна. Позднее выяснилось (см. обзоры [3], [4] и монографию [5]), что интегральное представление (0.1)

и его аналоги для различных областей (в том числе, многомерных) являются эффективным инструментом при решении многочисленных задач комплексного анализа. Прежде чем дать краткий обзор соответствующих исследований, введем некоторые обозначения.

0.2. Для произвольных $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\langle z, \zeta \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{\zeta}_k, \quad |\zeta| = \sqrt{\langle \zeta, \zeta \rangle}.$$

Запишем $\mathbb{B}_{n,r} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < r\}$, $0 < r < +\infty$. В частности, $\mathbb{B}_{n,1} = \mathbb{B}_n$ суть единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Далее, произвольное $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ может быть записано как $\eta = (\eta_1, \eta')$, $\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Для $w, \eta \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\langle w', \eta' \rangle = \sum_{k=2}^n w_k \bar{\eta}_k, \quad |\eta'| = \sqrt{\langle \eta', \eta' \rangle}.$$

Область Зигеля в пространстве $\mathbb{C}^n$ определяется следующим образом :

$$\Omega_n = \{\eta = (\eta_1, \eta') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} \eta_1 > |\eta'|^2\}.$$

Хорошо известно, что Ω_n и $\mathbb{B}_n$ биголоморфно эквивалентны. Заметим, что Ω_1 может быть понята как верхняя полуплоскость

$$\Pi_+ = \{\eta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \eta > 0\}.$$

Для области $G \subset \mathbb{C}^n$ через $\bar{G}$ обозначим ее замыкание. В частности,

$$\overline{\mathbb{B}_n} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| \leq 1\}, \quad \overline{\Omega_n} = \{\eta = (\eta_1, \eta') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} \eta_1 \geq |\eta'|^2\}.$$

Через $m(\cdot)$ обозначим $2n$ -мерную меру Лебега в пространстве $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$. Если $n \geq 1$ — целое число и $\beta \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re} \beta > -1$), то положим

$$c_{n,\beta} = \frac{\Gamma(n+1+\beta)}{\Gamma(1+\beta)\pi^n} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{\pi^n}. \quad (0.2)$$

Если $1 \leq p < +\infty$ и $\alpha > -1$, то запись $\beta \succ (p, \alpha)$ означает, что

$$\operatorname{Re} \beta \begin{cases} > \frac{\alpha+1}{p} - 1 & \text{при } 1 < p < +\infty, \\ \geq \alpha & \text{при } p = 1. \end{cases} \quad (0.3)$$

Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ класса C^1 задана в области $G \subset \mathbb{C}^n$. Обозначим через $(\bar{\partial}f)(z)$ ($z \in G$) вектор

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_1}, \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_2}, \dots, \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_n} \right) \in \mathbb{C}^n.$$

С учетом этого обозначения имеем

$$\langle (\bar{\partial}f)(z), a \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_k} \bar{a}_k, \quad z \in G,$$

для произвольного $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Наконец, для положительных величин a, b будем писать $a \asymp b$, если отношения a/b находятся между двумя фиксированными положительными числами.

0.3. Теперь мы готовы сформулировать и обсудить аналоги и обобщения теоремы 0.1.

Теорема 0.2. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$ и $\beta > (p, \alpha)$. Тогда каждая функция f , голоморфная в $\mathbb{B}_n$ такая, что

$$\int_{\mathbb{B}_n} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta) < +\infty,$$

допускает интегральное представление

$$f(z) = c_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n+1+\beta}} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{B}_n. \quad (0.4)$$

При $n = 1$, т. е. в случае единичного круга $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, это легко следует из теоремы 0.1. Что касается случая $n > 1$, теорема 0.2 была установлена в [6] (при $\alpha = 0$) и в [3, 4] (при $\alpha > -1$).

Позднее формула типа (0.4) была установлена в [7] для гладких (не обязательно голоморфных) в $\mathbb{B}_n$ функций :

Теорема 0.3. [7] Если $f \in C^1(\overline{\mathbb{B}_n})$ и $\operatorname{Re} \beta > -1$, то

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n+1+\beta}} dm(\zeta) \\ &- c_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}_n} \langle (\bar{\partial}f)(\zeta), \zeta - z \rangle \frac{(1 - \langle \zeta, z \rangle)^{n-1}}{[\mathcal{D}(z, \zeta)]^n} \Psi_\beta(z, \zeta) dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{B}_n, \end{aligned} \quad (0.5)$$

где

$$\Psi_\beta(z, \zeta) = \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \langle z, \zeta \rangle} \right)^{\beta+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1+\beta} C_{n-1}^p \left[\frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^2} \right]^p, \quad (0.6)$$

$$\text{и } \mathcal{D}(z, \zeta) = |1 - \langle z, \zeta \rangle|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2), \quad z, \zeta \in \mathbb{B}_n. \quad (0.7)$$

Очевидно, формула (0.5) совпадает с (0.4) для голоморфных в $\mathbb{B}_n$ функций класса $C^1(\overline{\mathbb{B}_n})$.

0.4. Имеются аналоги формулы (0.1) и для неограниченных областей. В частности, следующая теорема была установлена в работе [8] при $n = 1$ и в [9, 10] при $n > 1$.

Теорема 0.4. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$ и $\beta > (p, \alpha)$. Тогда каждая голоморфная в Ω_n функция f такая, что

$$\int_{\Omega_n} |f(\eta)|^p (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha d\tau(\eta) < +\infty.$$

допускает интегральное представление

$$f(z) = 2^{n-1+\beta} c_{n,\beta} \int_{\Omega_n} \frac{f(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^\beta}{[i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle]^{n+1+\beta}} d\tau(\eta), \quad w \in \Omega_n. \quad (0.8)$$

В [11] были введены классы функций $f(\eta)$, голоморфных в Ω_n и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega_n} |f(\eta)|^p \varphi(Im\eta_1 - |\eta'|^2) d\tau(\eta) < +\infty, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

где функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, положительна, непрерывна и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. В [11] (теорема 2.8) установлено, что каждая функция f из введенных классов допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega_n} f(\eta) \Phi(w, \eta) \varphi(Im\eta_1 - |\eta'|^2) d\tau(\eta), \quad w \in \Omega_n, \quad (0.9)$$

где ядро $\Phi(w, \eta)$ определяется через $\varphi(\tau)$ (посредством явной формулы) и является голоморфным по $w \in \Omega_n$ и антиголоморфным в $\eta \in \Omega_n$. В [11] показано также, что в специальном случае $\varphi(\tau) = \tau^\beta$, $\tau \in (0, +\infty)$ ($\beta > -1$) (0.9) совпадает с (0.8).

В настоящей работе устанавливается аналог формулы (0.8) для гладких (не обязательно голоморфных) функций в Ω_n из определенных весовых классов (см [9], [10]). По ходу дается усиление теоремы 0.4.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Хорошо известно (см. [12], параграф 2.3), что многомерные преобразования Кэли

$$\Phi: \zeta \rightarrow \left(i \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1}, i \frac{\zeta'}{1 - \zeta_1} \right), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \mathbb{B}_n, \quad (1.1)$$

$$\Phi^{-1}: \eta \rightarrow \left(\frac{\eta_1 - i}{\eta_1 + i}, 2 \frac{\eta'}{\eta_1 + i} \right), \quad \eta = (\eta_1, \eta') \in \Omega_n, \quad (1.2)$$

осуществляют биголоморфный изоморфизм областей $\mathbb{B}_n$ и Ω_n . Пусть $\Delta(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{B}_n$ и $\Delta^{-1}(\eta)$, $\eta \in \Omega_n$, соответственно, обозначают комплексные якобианы отображений Φ и Φ^{-1} . Следующее утверждение проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 1.1. (а) При $\zeta \in \mathbb{B}_n$ и $2 \leq j \leq n$:

$$\frac{\partial \Phi_1(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{2i}{(1 - \zeta_1)^2}, \quad \frac{\partial \Phi_1(\zeta)}{\partial \zeta_k} = 0 \quad (2 \leq k \leq n), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_j(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{i\zeta_j}{(1 - \zeta_1)^2}, \quad \frac{\partial \Phi_j(\zeta)}{\partial \zeta_k} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \frac{i}{1 - \zeta_1}, & k = j \end{cases} \quad (2 \leq k \leq n), \quad (1.4)$$

где $\Phi(\zeta) = (\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta), \dots, \Phi_n(\zeta))$.

(б) При $\zeta \in \mathbb{B}_n$ и $\eta \in \Omega_n$:

$$\Delta(\zeta) \equiv \frac{2i^n}{(1 - \zeta_1)^{n+1}} \quad \text{и} \quad \Delta^{-1}(\eta) \equiv \frac{2^n i}{(\eta_1 + i)^{n+1}}. \quad (1.5)$$

(в) При $\zeta \in \mathbb{B}_n$ и $\eta \in \Omega_n$:

$$dm(\Phi(\zeta)) = |\Delta(\zeta)|^2 dm(\zeta) = 4 \frac{dm(\zeta)}{|1 - \zeta_1|^{2(n+1)}}, \quad (1.6)$$

$$dm(\Phi^{-1}(\eta)) = |\Delta^{-1}(\eta)|^2 dm(\eta) = 4^n \frac{dm(\eta)}{|\eta_1 + i|^{2(n+1)}}. \quad (1.7)$$

(г) При $w, \eta \in \Omega_n$:

$$1 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle = \frac{2i(\overline{\eta_1} - w_1) - 4\langle w', \eta' \rangle}{(w_1 + i)(\overline{\eta_1} - i)}, \quad (1.8)$$

$$1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2 = \frac{4(I\eta\eta_1 - |\eta'|^2)}{|\eta_1 + i|^2}. \quad (1.9)$$

Определение 1. Для произвольных функций $g(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{B}_n$, $f(\eta)$, $\eta \in \Omega_n$, и для произвольного $\beta \in \mathbb{C}$ будем писать

$$g(\zeta) \sim^\beta f(\eta),$$

если имеет место одно из следующих эквивалентных соотношений:

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{(1 - \zeta_1)^{n+1+\beta}}, \quad \zeta \in \mathbb{B}_n, \quad (1.10)$$

$$f(\eta) = g(\Phi^{-1}(\eta)) \left(\frac{2i}{\eta_1 + i} \right)^{n+1+\beta}, \quad \eta \in \Omega_n. \quad (1.11)$$

Лемма 1.2. Пусть $g(\zeta) \in C^1(\mathbb{B}_n)$, $f(\eta) \in C^1(\Omega_n)$, $\beta \in \mathbb{C}$ и $g(\zeta) \sim^\beta f(\eta)$. Тогда

$$\langle (\bar{\partial}g)(\Phi^{-1}(\eta)), \Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w) \rangle =$$

$$= \left(\frac{\eta_1 + i}{2i} \right)^{n+1+\beta} \frac{\bar{\eta}_1 - i}{\bar{w}_1 - i} \langle (\bar{\partial} f)(\eta), \eta - w \rangle, \quad w, \eta \in \Omega_n. \quad (1.12)$$

Доказательство : Сперва допустим, что $z, \zeta \in \mathbb{B}_n$. Тогда ввиду (1.10)

$$\langle (\bar{\partial} g)(\zeta), \zeta - z \rangle = \frac{1}{(1 - \zeta_1)^{n+1+\beta}} \sum_{k=1}^n (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\Phi(\zeta))}{\partial \eta_j} \cdot \frac{\partial \Phi_j(\zeta)}{\partial \zeta_k}.$$

Соотношения (1.3) и (1.4) дают

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\partial} g)(\zeta), \zeta - z \rangle &= -\frac{i}{(1 - \zeta_1)^{n+1+\beta}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial f(\Phi(\zeta))}{\partial \eta_1} \cdot \frac{2(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{(1 - \bar{\zeta}_1)^2} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial f(\Phi(\zeta))}{\partial \eta_j} \left(\frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\bar{\zeta}_j}{(1 - \bar{\zeta}_1)^2} + \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{1 - \bar{\zeta}_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь остается положить $\zeta = \Phi^{-1}(\eta)$, $z = \Phi^{-1}(w)$ в последнем соотношении и воспользоваться явным видом (1.2) отображения Φ^{-1} .

Далее, напомним, что в [7] было введено ядро $\mathcal{D}(z, \zeta)$ (см. (0.7)) и были установлены следующие неравенства :

$$\mathcal{D}(z, \zeta) \geq (1 - |\zeta|^2)|\zeta - z|^2 \geq 0, \quad z, \zeta \in \mathbb{B}_n, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{D}(z, \zeta) \geq (1 - |z|^2)|\zeta - z|^2 \geq 0, \quad z, \zeta \in \mathbb{B}_n. \quad (1.14)$$

Очевидно, $\mathcal{D}(z, \zeta) = 0$, если и только если $z = \zeta$.

Лемма 1.3. Пусть $w, \eta \in \Omega_n$, тогда

$$\operatorname{Re} (i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle) > 0, \quad (1.15)$$

$$|i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle|^2 \geq 4(\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2)(\operatorname{Im} \eta_1 - |\eta'|^2), \quad (1.16)$$

причем в (1.16) равенство достигается только, если $w = \eta$.

Доказательство. Для доказательства (1.15) достаточно воспользоваться следующим простым тождеством :

$$\operatorname{Re} (i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle) = \operatorname{Im} w_1 - |w'|^2 + \operatorname{Im} \eta_1 - |\eta'|^2 + |\eta' - w'|^2, \quad w, \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (1.17)$$

Что касается (1.16), то заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(\Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta)) = \\ &= |1 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2 - (1 - |\Phi^{-1}(w)|^2)(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2) \geq 0, \quad w, \eta \in \Omega_n, \end{aligned} \quad (1.18)$$

причем равенство достигается только лишь, если $w = \eta$. Теперь остается подставить (1.8) и (1.9) в (1.18) и тем самым завершить доказательство.

Лемма 1.4. Зафиксируем $w \in \Omega_n$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$G(w, \varepsilon) \equiv \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta - w| < \varepsilon\} \subset \Omega_n. \quad (1.19)$$

Тогда

$$|\eta - w| \asymp |\eta_1 + i|, \quad \eta \in \overline{\Omega_n} \setminus G(w, \varepsilon). \quad (1.20)$$

Доказательство. Сперва заметим, что $|\eta| \rightarrow +\infty \iff |\eta_1| \rightarrow +\infty$ для $\eta \in \overline{\Omega_n}$.

Следовательно,

$$\frac{|\eta - w|}{|\eta_1 + i|} \asymp \frac{|\eta|}{|\eta_1|} \quad (\eta \in \overline{\Omega_n}, \quad |\eta| \rightarrow +\infty).$$

Далее, очевидно, что если $\eta \in \overline{\Omega_n}$ и $|\eta| \rightarrow +\infty$, то

$$1 \leq \frac{|\eta|^2}{|\eta_1|^2} \leq \frac{|\eta_1|^2 + Im\eta_1}{|\eta_1|^2} \leq \frac{|\eta_1|^2 + |\eta_1|}{|\eta_1|^2} \leq 2.$$

Итак, мы установили оценку (1.20) при условии $\eta \in \overline{\Omega_n}$ и $|\eta| \rightarrow +\infty$. Остается заметить, что та же оценка очевидным образом имеет место на произвольном множестве типа

$$\{\eta \in \overline{\Omega_n} \setminus G(w, \varepsilon) : |\eta| \leq M\},$$

где $M > 0$ достаточно большое. Доказательство завершено.

Лемма 1.5. Существует положительное число C такое, что

$$|\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)| \geq \frac{C|\eta - w|}{|\eta_1 + i||w_1 + i|} \quad (1.21)$$

равномерно по $\eta \in \Omega_n$ и $w \in \Omega_n$.

Доказательство : Допустим $w, \eta \in \Omega_n$. Ввиду (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w) &= \frac{1}{\eta_1 + i}(\eta_1 - i, 2\eta') - \frac{1}{w_1 + i}(w_1 - i, 2w') = \\ &= \frac{2}{(\eta_1 + i)(w_1 + i)}\{(\eta_1 - w_1)a + \tau(0, \eta' - w')\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (i, -\eta') \in \mathbb{C}^n, \quad \tau = \eta_1 + i \in \mathbb{C}. \quad (1.23)$$

Заметим, что

$$1 \leq |a|^2 < |\tau|^2. \quad (1.24)$$

Из (1.22) следует, что

$$|\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)|^2 = \frac{4\varphi(\eta - w)}{|\eta_1 + i|^2|w_1 + i|^2}, \quad w, \eta \in \Omega_n, \quad (1.25)$$

где положено

$$\varphi(\rho) \equiv |\rho_1 a + \tau(0, \rho')|^2, \quad \forall \rho = (\rho_1, \rho') \in \mathbb{C}^n.$$

Теперь на время зафиксируем $\eta \in \Omega_n$. Легко видеть, что

$$\varphi(\rho) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \rho_i \bar{\rho}_j, \quad \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{C}^n,$$

где $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ — положительно определенная эрмитова матрица и может быть записана следующим образом :

$$B = \begin{pmatrix} |a|^2 & \bar{\tau}a_2 & \bar{\tau}a_3 & \dots & \bar{\tau}a_n \\ \tau\bar{a}_2 & |\tau|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \tau\bar{a}_3 & 0 & |\tau|^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau\bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & |\tau|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Хорошо известно, что

$$\varphi(\rho) \geq \lambda^* |\rho|^2, \quad \rho \in \mathbb{C}^n, \quad (1.27)$$

где $\lambda^* > 0$ суть минимальное собственное значение матрицы B . Для нахождения собственных значений B необходимо выписать характеристический многочлен $\mathcal{P}_B(\lambda)$. Несложные вычисления дают

$$\mathcal{P}_B(\lambda) = (|\tau|^2 - \lambda)^{n-2} \{ (|a|^2 - \lambda)(|\tau|^2 - \lambda) - |\tau|^2 |a'|^2 \}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.28)$$

Решая уравнение $\mathcal{P}_B(\lambda) = 0$, получаем собственные значения матрицы B :

$$\lambda_0 = |\tau|^2, \quad \lambda_{1/2} = \frac{|a|^2 + |\tau|^2 \pm \sqrt{D}}{2},$$

где

$$D = (|a|^2 + |\tau|^2)^2 - 4|\tau|^2 \geq (|\tau|^2 - 1)^2 > 0.$$

Очевидно, что $\lambda_1 > \lambda_2$. Поэтому мы должны сравнить λ_0 и λ_2 . В силу (1.24), $\lambda_0 > \lambda_2$. Следовательно, минимальное собственное значение равно

$$\lambda^* = \frac{|a|^2 + |\tau|^2 - \sqrt{D}}{2} = \frac{2|\tau|^2}{|a|^2 + |\tau|^2 + \sqrt{D}}. \quad (1.29)$$

Поскольку a и τ зависят от выбора $\eta \in \Omega_n$, то же можно сказать и о λ^* . Но нам нужно оценить λ^* независимо от $\eta \in \Omega_n$. Для этого заметим, что

$$|\tau|^2 < |a|^2 + |\tau|^2 + \sqrt{D} < 4|\tau|^2,$$

т.е. для произвольного $\eta \in \Omega_n$

$$\frac{1}{2} < \lambda^* < 2. \quad (1.30)$$

а это вместе с (1.27) дает $\varphi(\rho) \geq |\rho|^2/2$, $\rho \in \mathbb{C}^n$. Следовательно, ввиду (1.25) имеем

$$|\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)| \geq \frac{\sqrt{2}|\eta - w|}{|\eta_1 + i||w_1 + i|}, \quad w, \eta \in \Omega_n, \quad (1.31)$$

что совпадает с (1.21).

Определение 2. При $n \geq 1$ и $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ положим

$$J_n^{\alpha, \gamma} \equiv \int_{\Omega_n} \frac{(Im \eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha}{|\eta_1 + i|^{n+1+\gamma}} dm(\eta). \quad (1.32)$$

Лемма 1.6. $J_n^{\alpha, \gamma} < +\infty$, тогда и только тогда, когда $\gamma > \alpha > -1$.

Доказательство. При $n \geq 1$ и произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ положим

$$A_n^\alpha \equiv \int_{\mathbb{B}_n} (1 - |\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta), \quad (1.33)$$

$$B^\beta \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\beta/2}}. \quad (1.34)$$

Очевидно, $A_n^\alpha < +\infty \iff \alpha > -1$ и $B^\beta < +\infty \iff \beta > 1$. Далее имеем

$$\begin{aligned} J_n^{\alpha, \gamma} &= \int_{\Pi_+} \frac{dm(\eta_1)}{|\eta_1 + i|^{n+1+\gamma}} \int_{|\eta'| < \sqrt{Im \eta_1}} (Im \eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha dm(\eta') = \\ &= A_{n-1}^\alpha \int_{\Pi_+} \frac{(Im \eta_1)^{n-1+\alpha}}{|\eta_1 + i|^{n+1+\gamma}} dm(\eta_1) = A_{n-1}^\alpha B^{n+1+\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{v^{n-1+\alpha}}{(v+1)^{n+\gamma}} dv. \end{aligned}$$

Следовательно $J_n^{\alpha, \gamma} < +\infty$, тогда и только тогда

$$\begin{aligned} \alpha &> -1, \quad n+1+\gamma > 1, \\ n-1+\alpha &> -1, \quad (n+\gamma) - (n-1+\alpha) > 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что эта группа условий эквивалентна условиям $\alpha > -1$, $\gamma > \alpha$, и доказательство завершено.

§2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для функции $f(\eta)$, определенной на Ω_n и $\beta \in \mathbb{C} (Re \beta > -1)$ введем интегральный оператор

$$T_{n, \beta}(f)(w) = 2^{n-1+\beta} c_{n, \beta} \int_{\Omega_n} \frac{f(\eta) (Im \eta_1 - |\eta'|^2)^\beta}{[i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle]^{n+1+\beta}} dm(\eta), \quad w \in \Omega_n. \quad (2.1)$$

Ввиду формул (1.7), (1.8) и (1.9) этот оператор может быть записан в иной форме

$$T_{n,\beta}(f)(w) = \frac{c_{n,\beta}}{(w_1 + i)^{n+1+\beta}} \int_{\Omega_n} f(\eta) (\eta_1 + i)^{n+1+\beta} \frac{(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^\beta d\mathbf{m}(\Phi^{-1}(\eta))}{(1 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle)^{n+1+\beta}}. \quad (2.2)$$

Далее, для функций $f(\eta) \in C^1(\Omega_n)$ и $\beta \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re} \beta > -1$) введем интегральный оператор

$$\begin{aligned} P_{n,\beta}(\bar{\partial}f)(w) &= 2^{n+\beta} c_{n,\beta} \int_{\Omega_n} \langle \bar{\partial}f(\eta), \eta - w \rangle \frac{(Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{\beta+1}}{[i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle]^{\beta+1}} \times \\ &\times \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-4)^p}{p+1+\beta} \left(\frac{(Imw_1 - |w'|^2)(Im\eta_1 - |\eta'|^2)}{[i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle]^2} \right)^p \times \\ &\times \frac{(i(\bar{w}_1 - \eta_1) - 2\langle \eta', w' \rangle)^{n-1}}{([i(\bar{\eta}_1 - w_1) - 2\langle w', \eta' \rangle]^2 - 4(Imw_1 - |w'|^2)(Im\eta_1 - |\eta'|^2))^n} d\mathbf{m}(\eta), \quad w \in \Omega_n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

который ввиду формул (1.7), (1.8), (1.9) и (1.18) может быть записан следующим образом :

$$\begin{aligned} P_{n,\beta}(\bar{\partial}f)(w) &= \frac{c_{n,\beta}}{(w_1 + i)^{n+1+\beta}} \times \\ &\times \int_{\Omega_n} \langle \bar{\partial}f(\eta), \eta - w \rangle (\eta_1 + i)^{n+1+\beta} \frac{\bar{\eta}_1 - i}{\bar{w}_1 - i} \frac{(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^{\beta+1}}{(1 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle)^{\beta+1}} \times \\ &\times \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{p+1+\beta} \left(\frac{(1 - |\Phi^{-1}(w)|^2)(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)}{|1 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2} \right)^p \times \\ &\times \frac{(1 - \langle \Phi^{-1}(\eta), \Phi^{-1}(w) \rangle)^{n-1}}{(\mathcal{D}(\Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta)))^n} d\mathbf{m}(\Phi^{-1}(\eta)), \quad w \in \Omega_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что при $n = 1$ введенные операторы имеют следующий простой вид :

$$T_{1,\beta}(f)(w) = \frac{2^\beta(\beta+1)}{\pi} \int_{\Pi_+} \frac{f(\eta)(Im\eta)^\beta}{[i(\bar{\eta} - w)]^{2+\beta}} d\mathbf{m}(\eta), \quad w \in \Pi_+, \quad (2.5)$$

$$P_{1,\beta}(\bar{\partial}f)(w) = \frac{2^{\beta+1}}{\pi} \int_{\Pi_+} \frac{\frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}}}{\eta - w} \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{[i(\bar{\eta} - w)]^{\beta+1}} d\mathbf{m}(\eta), \quad w \in \Pi_+. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1. Пусть $\operatorname{Re} \beta > -1$ и функция $f \in C^1(\Omega_n)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{|f(\eta)| (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{\operatorname{Re} \beta}}{|\eta_1 + i|^{n+1+\operatorname{Re} \beta}} \in L^1(\Omega_n), \quad (2.7)$$

$$\frac{|\bar{\partial}f(\eta)| (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{\operatorname{Re} \beta + 1}}{|\eta_1 + i|^{n+1+\operatorname{Re} \beta}} \in L^1(\Omega_n). \quad (2.8)$$

Тогда имеем

$$f(w) = T_{n,\beta}(f)(w) - P_{n,\beta}(\bar{\partial}f)(w), \quad w \in \Omega_n. \quad (2.9)$$

Доказательство. Сперва предположим, что $\operatorname{Re} \beta \geq 0$. Исходя из функции $f \in C^1(\Omega_n)$, построим функцию $g(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{B}_n$, по формуле (1.10) так, что $g(\zeta) \sim^\beta f(\eta)$. Для $r \in (0, 1)$ положим

$$\mathbb{B}_{n,r} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < r\}, \quad \Omega_{n,r} = \Phi(\mathbb{B}_{n,r}).$$

Теперь зафиксируем $w \in \Omega_n$ и положим $z = \Phi^{-1}(w) \in \mathbb{B}_n$. Очевидно, что $z \in \mathbb{B}_{n,r}$ при $r_0 \leq r < 1$, где $r_0 \in (0, 1)$. Так как $g(\zeta) \in C^1(\overline{\mathbb{B}_{n,r}})$, $r_0 \leq r < 1$, то замена переменной приводит к формуле типа (0.5) для $\mathbb{B}_{n,r}$ ($r_0 \leq r < 1$):

$$\begin{aligned} g(z) = & r^2 c_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}_{n,r}} \frac{g(\zeta)(r^2 - |\zeta|^2)^\beta}{(r^2 - \langle z, \zeta \rangle)^{n+1+\beta}} dm(\zeta) - \\ & - r^2 c_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}_{n,r}} \langle (\bar{\partial}g)(\zeta), \zeta - z \rangle \frac{(r^2 - |\zeta|^2)^{\beta+1}}{(r^2 - \langle z, \zeta \rangle)^{\beta+1}} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{p+1+\beta} \left(\frac{(r^2 - |z|^2)(r^2 - |\zeta|^2)}{|r^2 - \langle z, \zeta \rangle|^2} \right)^p \times \\ & \times \frac{(r^2 - \langle \zeta, z \rangle)^{n-1}}{(|r^2 - \langle z, \zeta \rangle|^2 - (r^2 - |z|^2)(r^2 - |\zeta|^2))^n} dm(\zeta), \quad r_0 \leq r < 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее, положим $z = \Phi^{-1}(w)$, $\zeta = \Phi^{-1}(\eta)$, $\eta \in \Omega_{n,r}$ и воспользуемся формулой (1.12). Тогда из (2.10) имеем при $r_0 \leq r < 1$

$$\begin{aligned} f(w) = & r^2 \frac{c_{n,\beta}}{(w_1 + i)^{n+1+\beta}} \int_{\Omega_{n,r}} f(\eta)(\eta_1 + i)^{n+1+\beta} \frac{(r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^\beta}{(r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle)^{n+1+\beta}} dm(\Phi^{-1}(\eta)) - \\ & - r^2 \frac{c_{n,\beta}}{(w_1 + i)^{n+1+\beta}} \int_{\Omega_{n,r}} \langle (\bar{\partial}f)(\eta), \eta - w \rangle (\eta_1 + i)^{n+1+\beta} \frac{\bar{\eta}_1 - i}{w_1 - i} \times \\ & \times \frac{(r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^{\beta+1}}{(r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle)^{\beta+1}} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p C_{n-1}^p}{p+1+\beta} \left(\frac{(r^2 - |\Phi^{-1}(w)|^2)(r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)}{|r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2} \right)^p \times \\ & \times \frac{(r^2 - \langle \Phi^{-1}(\eta), \Phi^{-1}(w) \rangle)^{n-1}}{(|r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2 - (r^2 - |\Phi^{-1}(w)|^2)(r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2))^n} dm(\Phi^{-1}(\eta)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Легко проверить ввиду (2.2) и (2.4), что при $r = 1$ формула (2.11) совпадает с (2.9). Следовательно, мы должны в (2.11) устремить $r \uparrow 1$. Для этого заметим, что справедливы следующие оценки при $r_0 \leq r < 1$, $\eta \in \Omega_{n,r}$:

$$0 < r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2 < 1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2, \quad (2.12)$$

$$|r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle| \geq r^2 - |\Phi^{-1}(w)| r \geq r_0 (r_0 - |\Phi^{-1}(w)|) > 0, \quad (2.13)$$

$$|r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle| \leq 2, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & |r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2 - (r^2 - |\Phi^{-1}(w)|^2) (r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2) = \\ & = r^4 \mathcal{D} \left(\frac{1}{r} \Phi^{-1}(w), \frac{1}{r} \Phi^{-1}(\eta) \right) \geq r^4 \left(1 - \frac{|\Phi^{-1}(w)|^2}{r^2} \right) \frac{|\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)|^2}{r^2} \geq \\ & \geq (r_0^2 - |\Phi^{-1}(w)|^2) |\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)|^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\frac{(r^2 - |\Phi^{-1}(w)|^2) (r^2 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)}{|r^2 - \langle \Phi^{-1}(w), \Phi^{-1}(\eta) \rangle|^2} \leq 1. \quad (2.16)$$

Следовательно, чтобы применить теорему Лебега об ограниченной сходимости при $r \uparrow 1$, нужно показать, что

$$\int_{\Omega_n} |f(\eta)| |\eta_1 + i|^{n+1+Re\beta} (1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^{Re\beta} dm(\Phi^{-1}(\eta)) < +\infty, \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega_n} |\bar{\partial}(f)(\eta)| |\eta - w| |\eta_1 + i|^{n+2+Re\beta} \frac{(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^{Re\beta+1}}{|\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)|^{2n}} dm(\Phi^{-1}(\eta)) < +\infty. \quad (2.18)$$

Ввиду (1.7) и (1.9) легко видеть, что (2.17) эквивалентно (2.7). Кроме того, из формул (1.7), (1.9) и (1.21), (1.20) следует, что (2.18) эквивалентно (2.8). Таким образом для случая $Re\beta \geq 0$ доказательство завершено.

Зафиксируем произвольные $\mathbb{B}_0 \in \mathbb{C}$ с $Re \mathbb{B}_0 > -1$ и функцию $f \in C^1(\Omega_n)$, удовлетворяющую (2.7) и (2.8) при $\mathbb{B}_0$. Тогда f удовлетворяет (2.7) и (2.8) для каждого β с $Re\beta \geq Re\mathbb{B}_0$. Далее, зафиксируем также $w \in \Omega_n$. Тогда $T_{n,\beta}(f)(w)$ и $\mathcal{P}_{n,\beta}(\bar{\partial}f)(w)$ (как функции переменного β) голоморфны в области $Re\beta > Re\mathbb{B}_0$ и непрерывны в ее замыкании. Кроме того, имеет место (2.9) при дополнительном предположении $Re\beta \geq 0$. Следовательно, (2.9) имеет место и при $\mathbb{B}_0$ по теореме единственности голоморфных функций. Доказательство завершено.

Определение 3. Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Обозначим через $L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$ пространство всех комплекснозначных измеримых функций $f(\eta)$, $\eta \in \Omega_n$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p,\alpha,\gamma} \equiv \left(\int_{\Omega_n} \frac{|f(\eta)|^p (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha}{|\eta_1 + i|^\gamma} dm(\eta) \right)^{1/p} < +\infty. \quad (2.19)$$

При $\gamma = 0$ эти пространства были рассмотрены в [8] для $n = 1$ и в [9], [10] для $n > 1$. Для $n = 1$ пространства типа $L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$ ($\gamma \neq 0$) были рассмотрены в [13] (глава 4).

Теорема 2.2. Допустим, что функция $f \in C^1(\Omega_n)$ удовлетворяет одному из условий

- (а) $|f(\eta)|, |(\bar{\partial}f)(\eta)| (Im\eta_1 - |\eta'|^2) \in L_{\alpha,\gamma}^1(\Omega_n)$ при $\alpha > -1$, $\gamma \leq n+1+\alpha$ и $Re\beta \geq \alpha$,
 (б) $|f(\eta)|, |(\bar{\partial}f)(\eta)| (Im\eta_1 - |\eta'|^2) \in L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$ при $\alpha > -1$, $\gamma < n+1+\alpha$, $1 < p < +\infty$ и $Re\beta > \frac{\alpha+1}{p} - 1$.

Тогда справедливо интегральное представление (2.9)

Доказательство. Сперва положим

$$g_1(\eta) = |f(\eta)|, \quad g_2(\eta) = |(\bar{\partial}f)(\eta)| (Im\eta_1 - |\eta'|^2) \quad (\eta \in \Omega_n).$$

В силу теоремы 2.1 достаточно показать, что из условий (а) или (б) следует

$$\frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{Re\beta}}{|\eta_1 + i|^{n+1+Re\beta}} \in L^1(\Omega_n). \quad (2.20)$$

Теперь допустим, что имеет место (а), тогда $g_{1,2} \in L_{\alpha,\gamma}^1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{Re\beta}}{|\eta_1 + i|^{n+1+Re\beta}} = \\ &= \frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha}{|\eta_1 + i|^\gamma} \frac{(Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{Re\beta-\alpha}}{|\eta_1 + i|^{Re\beta-\alpha}} \frac{1}{|\eta_1 + i|^{n+1+\alpha-\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^\alpha}{|\eta_1 + i|^\gamma} \in L^1(\Omega_n), \end{aligned}$$

и (2.20) установлено. Далее, если имеет место (б), то $g_{1,2} \in L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$. Тогда в силу интегрального неравенства Гельдера мы имеем

$$\int_{\Omega_n} \frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{Re\beta}}{|\eta_1 + i|^{n+1+Re\beta}} dm(\eta) =$$

$$= \int_{\Omega_n} \frac{g_{1,2}(\eta) (Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{\alpha/p}}{|\eta_1 + i|^{\gamma/p}} \frac{(Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{Re-\alpha/p}}{|\eta_1 + i|^{n+1+Re-\gamma/p}} dm(\eta) \leq \|g_{1,2}\|_{p,\alpha,\gamma} J^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ и

$$J = \int_{\Omega_n} \frac{(Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{(Re-\alpha/p)q}}{|\eta_1 + i|^{(n+1+Re-\gamma/p)q}} dm(\eta).$$

Чтобы воспользоваться леммой 1.6 и, таким образом, завершить доказательство, потребуем, чтобы

$$q \left(Re - \frac{\alpha}{p} \right) > -1 \quad \text{и} \quad q \left(n + 1 + Re - \frac{\gamma}{p} \right) - (n + 1) > q \left(Re - \frac{\alpha}{p} \right),$$

или, после упрощений,

$$Re\beta > \frac{\alpha + 1}{p} - 1 \quad \text{и} \quad n + 1 + \alpha > \gamma,$$

что и обеспечивается условиями (6). Итак, теорема доказана.

Замечание. Заметим, что даже для голоморфных функций f теорема 2.2 является обобщением теоремы 0.4 и совпадает с ней лишь в специальном случае $\gamma = 0$.

Abstract. Weighted spaces $L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$ with weight functions of the form

$$\left(Im\eta_1 - \sum_{k=2}^n |\eta_k|^2 \right)^\alpha |\eta_1 + i|^{-\gamma}$$

are considered in the Siegel domain

$$\Omega_n = \left\{ \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n : Im\eta_1 > \sum_{k=2}^n |\eta_k|^2 \right\}$$

in $\mathbb{C}^n$. Weighted $\bar{\partial}$ -integral representations are established for functions $f \in C^1(\Omega_n)$, assuming f and $|\bar{\partial}f|$ belong to the spaces $L_{\alpha,\gamma}^p(\Omega_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге", ДАН Арм. ССР, том. 3, № 1, стр. 3 - 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, том 2, стр. 3 - 40, 1948.

3. М. М. Дзхрбашян, "A survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions", *Mat. Vestnik*, vol. 39, pp. 263 – 282, 1987.
4. М. М. Джрбашян, "Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений", *Изв. АН АРМ. ССР, Математика*, том 23, № 6, стр. 517 – 545, 1988.
5. А. Е. Джрбашян, F. A. Shamoyan, "Topics in the Theory of A_α^p Spaces", *Teubner-Texte zur Math.*, 105, Teubner, Leipzig, 1988.
6. F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions in balls", *Ind. Univ. Math. J.*, vol. 24, № 6, pp. 593 – 602, 1974.
7. Ph. Charpentier, "Formules explicites pour les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$ ", *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 30, № 4, pp. 121 – 154, 1980.
8. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, "Интегральные представления для некоторых классов функций, аналитических в полуплоскости", *ДАН АН СССР, Математика*, том 285, стр. 547 – 550, 1985.
9. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления некоторых классов функций в области Зигеля", *Изв. АН, Математика*, том 22, № 4, стр. 399 – 405, 1987.
10. М. М. Джрбашян, А. Н. Карапетян, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a Siegel domain", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 179, № 1, pp. 91 – 109, 1993.
11. А. О. Карапетян, "Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе", *Канд. диссерт.*, Ереван, 1987.
12. W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$* . Springer-Verlag, 1980.
13. A. M. Jerbashian. *Functions of α -bounded type in the half-plane*. Springer, 2005.

Поступила 21 Сентября 2005

О ДЕЙСТВИИ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА И ГАНКЕЛЯ В КЛАССАХ ХАРДИ И ДЖРБАШЯНА В ПОЛИДИСКЕ

Р. Ф. Шамоян и А. В. Арутюнян

Брянский Государственный Университет

E-mail : rsham@mail.ru

Ереванский Государственный Университет

E-mail : anahit@ysu.am

Резюме. В статье получен критерий для ограниченности произведений операторов Теплица в пространствах М. М. Джрбашяна в полидиске и критерий ограниченности операторов Ганкеля, действующих в пространствах Харди в бидиске. Кроме того, установлены теоремы факторизации для подклассов класса голоморфных в полидиске функций, имеющие самостоятельный интерес и дополняющие ряд известных утверждений такого типа.

§1. ВВЕДЕНИЕ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Задача установления критериев, при которых ограничены теплицевы операторы $T_{\beta}T_{\alpha}f$, действующие в пространствах М. М. Джрбашяна, по существу, была поставлена Д. Сарасоном в [1]. В работе [2] одним из авторов данной статьи был установлен такой критерий. Для этого в [2] был предложен подход к упомянутой задаче, основанный на теореме о диагональном отображении из [3]. Данную статью можно рассматривать как продолжение [2] в двух направлениях : рассматриваются классы со смешанной нормой в полидиске $\mathbb{D}^n$. Аналогичным задачам, связанным с проблемой Д. Сарасона посвящены недавние работы [8] - [12].

Кроме того, на наш взгляд представляют интерес полученные новые голоморфные теоремы о сильной факторизации пространств палаток T_4^p (определение см. в [4]), получающихся сразу в поликруге с помощью привлечения экстремальной функции Дынкина [5].

Впервые рассматриваются поликруговые аналоги операторов типа Ганкеля,

составленные из операторов типа Теплица. Отметим, что одномерные критерии ограниченности операторов типа Ганкеля, составленных из операторов типа Теплица, впервые были получены У. Коном [6].

В данной статье установлены прямые многомерные обобщения основного результата [6] о действии операторов типа Ганкеля в пространствах Харди H^p в круге $\mathbb{D}$. Доказательство этих результатов существенным образом опирается на одну теорему вложения для классов типа BMO в бидиске, полученную недавно С. Фергюсон и К. Садовски в [14]. Отметим, что в последние годы появилась целая серия статей, в которых вводились и изучались те или иные свойства классов типа BMO или их аналитических подпространств на торе $\mathbb{T}^n$ и в полидиске (см., например, [14], [15], [17] и указанную там литературу).

В первых двух параграфах статьи приведены необходимые обозначения и вспомогательные утверждения. Часть этих предложений используется в третьем параграфе, где доказывается теорема о действии произведений операторов Теплица в классах Харди и Джрбашяна в полидиске. В последнем, четвертом, параграфе доказана теорема об ограниченности операторов Ганкеля в полидиске, обобщающая теорему У. Кона.

1.2. Обозначения. Всюду ниже $\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1, 1 \leq i \leq n\}$ – его остов, $H(\mathbb{D}^n)$ – класс голоморфных в $\mathbb{D}^n$ функций, $dm_{2n}(z)$ и $dm_n(z)$ – нормированные меры Лебега на $\mathbb{D}^n$ и на $\mathbb{T}^n$. Далее, $H^p(\mathbb{D}^n)$ ($0 < p < \infty$) – класс Харди в $\mathbb{D}^n$ (см. [11]), а $A_\alpha^p(\mathbb{D}^n)$ ($0 < p < \infty, \alpha > -1$) – пространство М. М. Джрбашяна в $\mathbb{D}^n$.

Напомним, что оператор Теплица в полидиске $\mathbb{D}^n$ с символом f определяется на подпространстве $H(\mathbb{D}^n)$, в котором плотны аналитические многочлены $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ (см. [2], [8] – [10]), формулой :

$$(T_f^\alpha h)(w) = C(\alpha) \int_{\mathbb{D}^n} \frac{f(z)h(z)(1-|z|)^\alpha}{(1-w\bar{z})^{\alpha+2}} dm_{2n}(z), \quad w \in \mathbb{D}^n,$$

где

$$1 - w\bar{z} = \prod_{k=1}^n (1 - w_k \bar{z}_k), \quad \alpha > -1, \quad f \in L^2(\mathbb{D}^n),$$

а $C(\alpha)$ – n -мерная константа проектора М. М. Джрбашяна (см. [3], гл. 6).

Заметим, что $(T_f^\alpha h)(w)$ – аналитическая в $\mathbb{D}^n$ функция, и что

$$(T_f^\alpha T_g^\alpha h)(w) = f(w)(T_g^\alpha h)(w), \quad f, g \in H^2(\mathbb{D}^n) \quad (\text{или } f, g \in A^2(\mathbb{D}^n)).$$

Задачу, поставленную в круге Д. Сарасоном [2], можно сформулировать следующим образом. Если оператор $T_f T_{\bar{g}}$ определен для

$$f, g \in A^2(\mathbb{D}) \quad \text{или} \quad f, g \in H^2(\mathbb{D}).$$

то при каких дополнительных ограничениях на f и g оператор $T_f T_g$ ограничен в A^2 или H^2 ?

Известен ряд работ, посвященных случаю пространств Харди и тем или иным их обобщениям (см. [8] – [12]). Хотя задача в одномерных классах $A^2(\mathbb{D})$ остается открытой, недавно в [12] был рассмотрен многомерный (поликруговой) вариант этой проблемы, но результат [12] не точен, ибо имеется зазор между необходимым и достаточным условиями. В данной статье предложен иной подход к тем же задачам, основанный на привлечении теорем о диагональном отображении. Этот подход позволяет, при наличии дополнительного условия на символ g оператора Теплица, получить точные предложения о действии оператора $T_f^\alpha T_g^\alpha$ в некоторых аналитических подклассах $H(\mathbb{D})$.

При этом, нам понадобится ряд дополнительных определений и обозначений. Будем пользоваться стандартными обозначениями теории функций в полидиске :

$$A_{\alpha}^{p,q}(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \int_{\mathbb{I}^n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^q dm_n(\zeta) \right)^{p/q} (1-r)^\alpha dr < \infty \right\},$$

$$F_{\alpha}^{p,q}(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{I}^n} |f(r\zeta)|^q (1-r)^\alpha dm_n(r) \right)^{p/q} d\zeta < \infty \right\},$$

$$0 < p, q < \infty, \quad \alpha \in (-1, \infty), \quad \mathbb{I}^n = (0, 1]^n, \quad (1-r)^\alpha = \prod_{k=1}^n (1-r_k)^\alpha, \quad r \in \mathbb{I}^n.$$

Нам понадобится также следующая теорема о диагональном отображении в пространствах М. М. Джрбашяна $A_{\alpha}^p(\mathbb{D}^n)$ в полидиске $A_{\alpha}^p = A_{\alpha}^{p,p}$ (см. [3], стр. 144).

Теорема 1.1. Для любой функции $f(z) \in A_{\alpha}^p(\mathbb{D}^n)$ ($\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$, $n \geq 1$) имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z, \dots, z)|^p (1-|z|)^{\alpha n + 2n-2} dm_2(z) \leq C_3 \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha} dm_{2n}(z), \quad (1)$$

где C_3 – постоянная, и

$$(1-|z|)^{\alpha} = \prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{\alpha}.$$

Классы $BMOA$ в бидиске определены следующим образом

$$BMOA_{rect}(\mathbb{D}^2) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^2) : \sup_{w \in \mathbb{D}^2} \left[(1-|w|) \int_{\mathbb{D}^2} \frac{|D^{\alpha} f(z)|^2 (1-|z|)^{2\alpha-1}}{|1-\bar{z}w|^2} dm_4(z) \right] < +\infty, \quad \alpha > 0 \right\},$$

Далее, обозначим

$$(P_{+,+})(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} dm_2(\zeta)$$

двумерную проекцию Рисса из $L^2(\mathbb{T}^2)$ в $H^2(\mathbb{T}^2)$, через $(P_{+,\cdot})$ и $(P_{\cdot,+})$ – проекции Рисса по первой и второй переменной соответственно. Кроме того, обозначим

$$(P_{-,-})(f)(z) = \sum_{k_1 < 0} \sum_{k_2 < 0} \hat{f}(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

$$(P_{+,-})(f)(z) = \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 < 0} \hat{f}(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

и аналогично определим $(P_{-,+})(f)$ and $(P_{+,+})(f)$. Через (H_u^s) обозначим диагональный оператор Ганкеля с символом $u \in L^2(\mathbb{D}^2)$:

$$(H_u^s f)(z) = f(z)u(z) - C(s) \int_{\mathbb{D}^2} \frac{f(\zeta)u(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^{s-1}}{(1 - \bar{\zeta}z)^{s+1}} dm_4(\zeta).$$

Под $C(s)$ подразумевается двумерная константа проекции М. М. Джрбашяна. Через $(P_s)_i$ и $(P_+)_i$ соответственно будем обозначать одномерные проекции М. М. Джрбашяна и Рисса по переменной z_i , $i = 1, 2$:

$$(H_u^s f)_i(z) = f(z)u(z) - C_i(s)(P_s)_i(fu)(z),$$

$$(T_u f)_i(z) = (P_+)_i(fu)(z), \quad z \in \mathbb{D}^2,$$

где $C_i(s)$ – константа проектора М. М. Джрбашяна в $\mathbb{D}$ по z_i . Далее, по определению

$$BMOA(\mathbb{D}^2) = \{\Phi : \Phi = (P_{+,+})(g), \quad g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)\}.$$

Всюду ниже запись $\|f\|_X \subset YZ$, где X, Y, Z – подпространства $H(\mathbb{D}^n)$, будет означать, что любая голоморфная в $\mathbb{D}^n$ функция с конечной квазинормой $\|f\|_X$ разлагается в произведение двух функций из Y и Z . Запись $A \asymp B$ означает, что $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ при некоторых положительных постоянных C_1 и C_2 , а запись $A \preceq B$ означает, что $A \leq CB$ при некоторой постоянной C .

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

2.1. Согласно теореме из [5], при $s > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ существует внешняя функция ω_s , такая, что

$$\int_{\mathbb{D}_I} \frac{(1 - |z|)^{s-1}}{|\omega_s(z)|^\alpha} dm_2(z) \preceq |I|^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad \int_I \frac{dm(z)}{|\omega_s(z)|^\alpha} \preceq |I|^{1-\alpha}, \quad (2)$$

где $\diamond I = \{z \in \mathbb{D} : 1 - |I| < |z| < 1, \arg z \in I\}$ – коробка Карлесона, $I \subset \mathbb{T}$ – любая дуга (см. [5]) и $\omega_s \in \Lambda^s(\mathbb{D})$, где $\Lambda^s = \Lambda^s(\mathbb{D})$ – аналитический класс Гельдера с $s < 1$. Положив

$$(D^t f)(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} (k_1 + 1)^t \dots (k_n + 1)^t a_k z^k, \quad (3)$$

введем класс функций

$$\Lambda^s(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |Df(z)|(1 - |z|)^{1-s} < +\infty \right\}.$$

2.2. Экстремальная внешняя функция, построенная в [5], позволяет устанавливать факторизационные теоремы для различных подклассов $H(\mathbb{D}^n)$. Полагая, что $\phi \in X \subset H(\mathbb{D}^n)$ – любая функция, а $s = (s_1, \dots, s_n)$ ($s_j > 0$, $j = 1, \dots, n$) – фиксированный вектор, покажем, что приведенные выше свойства функции обеспечивают импликацию

$$\frac{\phi}{\prod_{i=1}^n \omega_{s_i}} \in Y \subset H(\mathbb{D}^n).$$

Отметим, что функция ϕ делится на “независимую” от нее функцию $\omega_{s_1} \dots \omega_{s_n}$, которую можно построить по множеству точек $\mathbb{D}^n$, удовлетворяющих так называемому K -свойству (см. [5]).

Пусть $Y = D^{-\gamma} H^q$ и $\phi \in D^{-\gamma} H^q(\mathbb{D}^n)$ при $\gamma \geq 0$ и $0 < q < \infty$, т.е. $D^{-\gamma} \phi \in H^q(\mathbb{D}^n)$, где D^t – дифференциальный оператор из $H(\mathbb{D}^n)$ to $H(\mathbb{D}^n)$, действующий по правилу (3), и $\omega_s^{-1} \phi = G$. Тогда

$$\|G_r\|_{H^q} \leq M_q(\phi, r) \prod_{i=1}^n M_\infty(\omega_{s_i}^{-1}, r_i), \quad (4)$$

где

$$M_q^q(f, r) = \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^q dm_n(\zeta).$$

Далее

$$\sup_{r \in \mathbb{I}^n} \|G_r\|_{H^q} \prod_{k=1}^n (1 - r_k)^{\gamma+t} \leq \sup_r M_q(D^{-\gamma} \phi, r) \prod_{i=1}^n \sup_r M_\infty(\omega_{s_i}^{-1}, r_i) (1 - r_i)^t. \quad (5)$$

Положим $t = (1 - \alpha)/\alpha$, $s = 1 - 2\alpha$ и $\alpha \in (0, 1/2)$. Для установления ограниченности второго множителя воспользуемся представлением М. М. Джрбашяна и следующей известной оценкой, справедливой для любой функции $f \in H(\mathbb{D})$ и любого $p \in (0, 1]$ (см. [3], Глава 6) :

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^p \leq C(p, \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|)^{\alpha p + 2p - 2} dm_2(z). \quad (6)$$

Также мы воспользуемся соотношением (см., например, [19])

$$\frac{1}{|I|^\alpha} \int_{\diamond I} d\mu(z) \asymp \sup_{w \in \mathbb{D}} \left\{ (1 - |w|)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{w}z|^{2\alpha}} \right\},$$

где $\alpha < 1$ and μ — любая положительная борелевская мера в $\mathbb{D}$.

Из представления М. М. Джрбашяна и формул (2), (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{|z| < 1} |\Phi(z)|(1 - |z|)^t &\leq L = \\ &= \sup_{|w| < 1} \left\{ (1 - |w|)^{t\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\Phi(z)|^\alpha (1 - |z|)^{\beta\alpha + 2\alpha - 2}}{|1 - \bar{w}z|^{(\beta+2)\alpha}} dm_2(z) \right\}^{1/\alpha}, \end{aligned}$$

где $t = (1 - \alpha)/\alpha$, $\beta = 2/\alpha - 4$, $\alpha \in (0, 1/2)$ и $\beta > 1$ и где $\Phi = \omega_{s_i}^{-1}$ и функция ω — внешняя. Легко видеть, что $L < +\infty$ и что $\prod_{i=1}^n \omega_{s_i} \in \Lambda^s(\mathbb{D}^n)$, если $\omega_{s_i} \in \Lambda^s(\mathbb{D})$. Итак, учитывая (4), мы показали, что при любых $t = (1 - \alpha)/\alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$ и $\gamma \geq 0$ имеет место $D^{-\gamma} H^q \subset H_{\gamma+t}^{\infty, q} \Lambda^{1-2\alpha}$, где

$$H_{\gamma+t}^{\infty, q} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \sup_{r \in \mathbb{I}^n} M_q(f, r)(1 - r)^{\gamma+t} < +\infty \right\}.$$

Аналогичным образом можно расщепить функции из более общих классов $F_{\alpha}^{p, q}(\mathbb{D}^n)$ и $A_{\alpha}^{p, q}(\mathbb{D}^n)$ со смешанной нормой в полидиске (см. [18]).

Отметим, что утверждения, приведенные ниже, существенно дополняют ряд известных утверждений, приведенных в монографии У. Рудина [18].

Предложение 2.1. Пусть $D^{-\gamma} F_{\alpha}^{p, q} = \{f : D^{-\gamma} f \in F_{\alpha}^{p, q}\}$. Тогда при любых значениях $\alpha \in (0, 1/2)$, $p \geq q$, $p, q \in (0, \infty)$, $\gamma \geq 0$ и $t = (1 - \alpha)/\alpha$

$$D^{-\gamma} F_{\alpha}^{p, q} \subset \Lambda^{1-2\alpha}(\mathbb{D}^n) A_{(\gamma+t)p+\alpha}^{p, q}(\mathbb{D}^n),$$

и при любых значениях $\alpha \in (0, 1/2)$, $p, q \in (0, \infty)$, $\gamma \geq 0$ и $t = (1 - \alpha)/\alpha$

$$D^{-\gamma} A_{\alpha}^{p, q} \subset A_{(\gamma+t)p+\alpha}^{p, q}(\mathbb{D}^n) \Lambda^{1-2\alpha}(\mathbb{D}^n).$$

Доказательство: Для краткости рассмотрим только пространства $F_{\alpha}^{p, q}$, поскольку для пространств $A_{\alpha}^{p, q}$ доказательство аналогично. Очевидно, что имеем

$$\begin{aligned} (1 - r)^{\gamma+t} \|G_r\|_{H^q} &\leq M_q D^{-\gamma}(\phi, r)(1 - r)^t \prod_{i=1}^n M_{\infty}(\omega_{s_i}^{-1}, r) \leq \\ &\leq M_q D^{-\gamma}(\phi, r) \prod_{i=1}^n \sup_r \{M_{\infty}(\omega_{s_i}^{-1}, r)(1 - r)^t\} \leq L M_q D^{-\gamma}(\phi, r). \end{aligned}$$

Возведя обе части неравенства в степень p и умножив на $(1-\tau)^\alpha$, проинтегрируем обе части по $(0, 1)$. Получим

$$\int_0^1 (1-\tau)^{(\gamma+t)p+\alpha} M_q^p(G, \tau) d\tau \leq L \int_0^1 M_q^p(D^{-\gamma}\phi, \tau) (1-\tau)^\alpha d\tau.$$

Теперь при $p \geq q$ применим неравенство Минковского

$$\int_0^1 (1-\tau)^{(\gamma+t)p+\alpha} M_q^p(G, \tau) d\tau \leq \|D^{-\gamma}\phi\|_{F_2^{p,q}}^p.$$

для значений $\alpha \in (0, 1/2)$, $p, q \in (0, \infty)$, $\gamma \geq 0$ and $t = (1-\alpha)/\alpha$

Предложение 2.2. *Имеют место следующие оценки :*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |f(z)|(1-|z|)^\gamma \leq \|f\|_{A_{\alpha}^{p,q}(\mathbb{D}^n)}, \quad 0 < p, q < \infty, \quad \gamma = \frac{\alpha+1}{p} + \frac{1}{q}, \quad (7)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |f(z)|(1-|z|)^\gamma \leq \|f\|_{F_2^{q,p}(\mathbb{D}^n)}, \quad 0 < p, q < \infty, \quad p \geq q, \quad \gamma = \frac{\alpha+1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (8)$$

Доказательство : Начнем с (7). В поликруге, очевидно,

$$M_\infty(f, r) \leq M_q(f, r)(1-r)^{-1/q}, \quad (9)$$

$$\sup_{r \in \mathbb{I}^n} M_q(f, r)(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}} \leq \|f\|_{A_{\alpha}^{p,q}}. \quad (10)$$

Следовательно,

$$M_\infty(f, r)(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p} + \frac{1}{q}} \leq \|f\|_{A_{\alpha}^{p,q}}.$$

Оценка (9) выводится последовательным применением одномерного результата, оценка (10) следует из неравенств

$$M_q^p(f, r)(1-r)^{\alpha+1} \leq \int_{1-2^{-k_1}}^{1-2^{-k_1-1}} \dots \int_{1-2^{-k_n}}^{1-2^{-k_n-1}} M_q^p(f, r)(1-r)^{p\frac{\alpha+1}{p}-1} d\tau \leq \|f\|_{A_{\alpha}^{p,q}}^p.$$

Ввиду неравенства Минковского $\|f\|_{A_{\alpha}^{p,q}} \leq C\|f\|_{F_2^{q,p}}$ при $p \geq q$. Тем самым, оценка (8) следует в силу (7). Заметим, что оценка (8) верна и без ограничения $p > q$.

2.3. Для доказательства основной теоремы §4 нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.1.

1°. Для любой функции $\Phi(z) \in H(\mathbb{D}^2)$, представимой в виде $\Phi(z) = \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)$, $z \in \mathbb{D}^2$, справедливы соотношения

$$\|D_z^\alpha \Phi\|_{BMOA_{\text{rect}}(\mathbb{D}^2)} = \prod_{i=1}^2 \|D_{z_i}^{\alpha_i} \Phi_i\|_{BMOA_{\text{rect}}(\mathbb{D})}.$$

2°. Если $\Phi \in H^1(\mathbb{D}^2)$ и $\|(P_{-,-})(\bar{\Phi}f)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$, то $\Phi \in BMOA(\mathbb{D}^2)$.

3°. Имеет место вложение $BMOA(\mathbb{D}^2) \subset BMOA_{\text{rect}}(\mathbb{D}^2)$.

Утверждение 1° очевидно, а утверждения 2° и 3° далеко не тривиальны и получены недавно в работе [14].

Лемма 2.2. Пусть Φ — голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция. Если $\Phi(0) = 0$, то

$$\sup_I \frac{1}{|I|^3} \int_{\diamond I} |\Phi(w)|^2 (1 - |w|) dm_2(w) \leq C \sup_I \frac{1}{|I|} \int_{\diamond I} |\Phi'(w)|^2 (1 - |w|) dm_2(w). \quad (11)$$

Доказательство : Не теряя общности предположим, что $\Phi \in BMOA$. Ввиду хорошо известного эквивалентного определения классов типа $BMOA$ (см. [19]), неравенство (11) эквивалентно

$$\begin{aligned} J &= \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\Phi(w)|^2 (1 - |w|)(1 - |z|)^3}{|1 - \bar{w}z|^6} dm_2(w) \preceq \\ &\preceq \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\Phi'(w)|^2 (1 - |w|)(1 - |z|)}{|1 - \bar{w}z|^2} dm_2(w) = \tilde{J}. \end{aligned}$$

Привнеся теорему 3 из [16], приходим к нужной оценке :

$$J \preceq \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\Phi'(w)|^2 (1 - |w|)^3 (1 - |z|)^3}{|1 - \bar{w}z|^6} dm_2(w) \preceq \tilde{J}.$$

Будем полагать, что $\Gamma_\alpha(\zeta) = \Gamma_{\alpha_1}(\zeta_1) \times \Gamma_{\alpha_2}(\zeta_2)$, $\alpha_i > 0$, $\zeta_i \in \mathbb{T}$,

$$\Gamma_{\alpha_i}(\zeta_i) = \{z \in D : |1 - \bar{\zeta}_i z| < \alpha_i(1 - |z|^2)\}, \quad i = 1, 2,$$

и для измеримой в $\mathbb{D}^2$ функции f положим

$$(A_\infty f)_1(\zeta) = \sup_{z \in \mathbb{D}^2} \{|f(z)| : z \in \Gamma_\alpha(\zeta)\}, \quad \zeta \in \mathbb{T}^2,$$

$$((A_q)_i f)(\zeta_i, z_j) = \left(\int_{\Gamma_{\alpha_i}(\zeta_i)} \frac{|f(z)|^q}{(1 - |z_i|)^2} dm_2(z_i) \right)^{1/q}, \quad 1 < q, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Имеют место оценки (см. [4], [22]) :

$$\left| \int_{\mathbb{D}^2} \frac{f(z)\overline{g(z)}}{1-|z|} dm_4(z) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{T}} (A_q)_2^p \left(\int_{\mathbb{T}} (A_q)_1^p(f)(\zeta) \right)^{1/p} dm(\zeta_1) dm(\zeta_2) \right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{T}} (A_q)_2^{p'} \left(\int_{\mathbb{T}} (A_q)_1^{p'}(g)(\zeta) \right)^{1/p'} dm(\zeta_1) dm(\zeta_2) \right)^{1/p'} = \|f\|_{T_q^p} \|g\|_{T_q^{p'}},$$

где $1 < p < +\infty$ — произвольные, $1/p + 1/p' = 1$ и

$$\int_{\mathbb{T}^n} \left(\sup_{z \in \Gamma(\zeta)} |D^\alpha f(z)| (1-|z|)^\alpha \right)^p dm_n(\zeta) \leq \|f\|_{H^p}^p, \quad p \in (0, \infty), \quad \alpha \geq 0. \quad (11')$$

Следующая лемма при $n = 1$ имеет многочисленные приложения (см. [4], [6]).

Лемма 2.3. Если $f \in H^p(\mathbb{D}^2)$ ($0 < p < +\infty$), то справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\zeta_2)} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\zeta_1)} |Df(z)|^2 dm_2(z_1) \right)^{p/2} dm(\zeta_1) \right)^{2/p} dm_2(z_2) \right)^{p/2} dm(\zeta_2) \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D}^2)}^p \quad (11'')$$

Доказательство : Предположив сначала, что $\alpha > 0$, $\max\{2, \alpha\} \leq p < +\infty$, $k \geq 0$ и $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$, докажем сначала оценку :

$$G(f, \alpha, p) \leq \|f\|_{H^p}^p,$$

где

$$G(f, \alpha, p) = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\Gamma_1(\zeta_1)} \dots \int_{\Gamma_1(\zeta_n)} |D^k f(z)|^{\alpha+2} (1-|z|)^{\alpha/p + (\alpha+2)k-2} dm_{2n}(z) \right)^{p/2} dm_n(\zeta).$$

Легко видеть, что при $\alpha = 0$, $k = 1$ и $p \geq 2$ такая оценка совпадает с одномерным классическим неравенством. Для упрощения записей нашу оценку докажем в бидиске, отметив, что в общем доказательство вполне аналогично.

Пользуясь соображениями двойственности и формулой

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\zeta)} g(w) dm_2(w) \right) \psi(\zeta) dm(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} g(z) \int_{\mathbb{T}} \lambda_{\Gamma(\zeta)}(z) \psi(\zeta) dm(\zeta) dm_2(z),$$

по каждой переменной в отдельности выведем

$$G(f, \alpha, p) \leq \int_{\mathbb{D}^2} |D^k f(z)|^{\alpha+2} (1-|z|)^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{T}} \lambda_{\Gamma(\zeta_2)}(z_2) \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{T}} \lambda_{\Gamma(\zeta_1)}(z_1) \psi(\zeta) dm(\zeta_1) \right) dm(\zeta_2) dm_2(z), \quad (12)$$

где $\psi \in L^q(T^2)$, $q = (p/2)'$ и $t = \alpha(1/p+k)+2k-2$. Далее, из одномерной формулы, установленной в [4], получаем

$$\left| \int_{\mathbb{D}^n} \frac{f(z)g(\bar{z})}{1-|z|} dm_{2n}(z) \right| \leq \int_{\mathbf{T}^n} (A_{q'}(f))(\zeta) (C_q(g))(\zeta) dm_n(\zeta) \quad (12')$$

где $A_q(f)$ и $C_q(g)$ образованы из одномерных аналогов обычной итерацией. Например,

$$(C_q f)^q(\zeta) = \sup_{t_1} \frac{1}{|I_{\mathbf{T}}(\zeta_1, t_1)|} \int_{I_{\mathbb{D}}(\zeta_1, t_1)} \frac{1}{1-|z_1|} \dots \\ \dots \sup_{t_n} \frac{1}{|I_{\mathbf{T}}(\zeta_n, t_n)|} \int_{I_{\mathbb{D}}(\zeta_n, t_n)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z_n|} dm_{2n}(z),$$

где $\zeta \in \mathbf{T}^n$, $1 \leq q < +\infty$ и $1/q + 1/q' = 1$. Функция $G(f, \alpha, p)$, участвующая в (12), оценивается сверху следующим образом: через (12') при $q = 1$

$$G(f, \alpha, p) \leq \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \sup_{z_1 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_1)} \sup_{z_2 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_2)} |D^k f(z)|^2 (1-|z|)^{2k} \sup_{z_1 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_1)} \sup_{z_2 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_2)} \frac{1}{1-|z|} \times \\ \times \int_{\mathbf{T}} \lambda_{\Gamma(\zeta_2)}(z_2) \left(\int_{\mathbf{T}} \lambda_{\Gamma(\zeta_1)}(z_1) \psi(\zeta) dm(\zeta_1) \right) dm(\zeta_2) \times \\ \times |D^k f(z)|^\alpha (1-|z|)^{\alpha(1/p+k)} dm(\tilde{\zeta}_1) dm(\tilde{\zeta}_2) \leq \\ \leq \|C_1(1-|z|)^{\alpha(1/p+k)} |D^k f(z)|^\alpha\|_{L^\infty(T^2)} \times \\ \times \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \sup_{z_1 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_1)} \sup_{z_2 \in \Gamma(\tilde{\zeta}_2)} (|D^k f(z)|^2 (1-|z|)^{2k}) M(\psi)(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) dm(\tilde{\zeta}_1) dm(\tilde{\zeta}_2),$$

где предполагаем

$$\mathbb{I}_{\mathbb{D}^n} = \mathbb{I}_{\mathbb{D}^n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n, t_1, \dots, t_n) = \left\{ z \in \mathbb{D}^n : |1 - z_1 \bar{\zeta}_1| < t_1, \dots, |1 - z_n \bar{\zeta}_n| < t_n \right\},$$

$$\mathbb{I}_{\mathbb{D}^n} = \mathbb{I}_{\mathbb{D}^n} \cap \mathbb{D}^n, \quad \mathbb{I}_{\mathbf{T}^n} = \mathbb{I}_{\mathbb{D}^n} \cap \mathbf{T}^n$$

где

$$M(f)(\tilde{\zeta}) = \sup_{t_1 > 0} \frac{1}{|\mathbb{I}_{\tilde{\zeta}_1, t}|} \int_{\mathbb{I}_{\tilde{\zeta}_1, t}} \sup_{t_2 > 0} \frac{1}{|\mathbb{I}_{\tilde{\zeta}_2, t}|} \int_{\mathbb{I}_{\tilde{\zeta}_2, t}} |\psi(\xi_1, \xi_2)| dm(\xi_1) dm(\xi_2)$$

— максимальная функция Харди-Литтлвуда. Для оценки первого множителя достаточно применить неравенство Гельдера с показателем $p/2$ оценку (11') и

хорошо известную теорему об ограниченности оператора Харди-Литтлвуда в полидиске (см. [7]). Итак, получаем

$$A = C_1 (|D^k f(z)|^\alpha (1 - |z|)^{\alpha(k+1/p)})(\zeta) \leq \sup_{t_2} \frac{1}{|I_T(\zeta_2, t_2)|} \int_{I_D(\zeta_2, t_2)} (1 - |z_2|)^{k\alpha + \alpha/p - 1} \times \\ \times \sup_{t_1} \frac{1}{|I_T(\zeta_1, t_1)|} \int_{I_D(\zeta_1, t_1)} |D^k f(z)|^\alpha (1 - |z_1|)^{k\alpha + \alpha/p - 1} dm_2(z_1) dm_2(z_2).$$

Применим неравенство Гельдера с показателем p/α к

$$\int_{|1 - \bar{\zeta}_1 \eta_1| < t_1} |D^k f(\zeta)|^\alpha dm(\zeta_1),$$

и получим

$$\sup_{t_1} \frac{1}{t_1} \int_{1-t_1}^1 \int_{|1 - \bar{\zeta}_1 \eta_1| < t_1} |D^k f(z)|^\alpha (1 - |z_1|)^{k\alpha + \alpha/p - 1} dm_2(z_1) \leq \\ \leq \sup_{t_1} \frac{1}{t_1} \int_{1-t_1}^1 [M_p^p(D^k f, |z_1|)]^{\alpha/p} t_1^{1/(p/\alpha)'} (1 - |z_1|)^{k\alpha + \alpha/p - 1} d|z_1| \leq \\ \leq \left(\int_T |D_{i_2}^k f(\zeta_1, |z_2| \zeta_2)|^p dm(\zeta_1) \right)^{\alpha/p}.$$

Остается повторить эти действия по z_2 , тем самым $A \leq \|f\|_{H^p}^p$.

Заметим, что оценка (11') при $p < 2$ легко выводится из следующего неравенства, полученного в работе [13]:

$$\int_{\mathbb{D}^n} |F(z)|^{p-2} |Df(z)|^2 (1 - |z|) dm_{2n}(z) \leq C \|f\|_{H^p}^p \quad 0 < p < 2, \quad (13)$$

где

$$F(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} (k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

Обозначим через $S_n(f)$ левую часть требуемой оценки и учтем, что

$$\int_{\mathbb{D}^n} |\Phi(z)| (1 - |z|)^\alpha dm_{2n}(z) \leq C_9 \int_{T^n} \int_{\Gamma_t(\zeta)} |\Phi(z)| (1 - |z|)^{\alpha-1} dm_{2n}(z) dm_n(\zeta)$$

при $\alpha > -1$ и $t > 0$ (см. [20]). Тогда получим

$$S_n^p(f) \leq \int_{T^n} \sup_{z \in \Gamma(\zeta)} |F(z)|^{\frac{2-p}{2}p} \left(\int_{\Gamma(\zeta_1)} \cdots \int_{\Gamma(\zeta_n)} \frac{|Df(z)|^2}{|F(z)|^{2-p}} dm_{2n}(z) \right)^{p/2} dm_n(\zeta).$$

Остается к последнему неравенству применить оценку (13), неравенство Гельдера и оценку (11') :

$$S_n^p(f) \leq \left(\int_{\mathbb{T}^n} \sup_{\Gamma(\zeta)} |F(z)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}^n} |F(z)|^{p-2} |Df(z)|^2 (1-|z|) dm_{2n}(z) \right)^{\frac{p}{2}}.$$

В итоге получим

$$S_n^p(f) \leq \|F\|_{H^p(\mathbb{D}^n)}^{\frac{2-p}{2}} \|f\|_{H^p(\mathbb{D}^n)}^{p/2} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D}^n)}^p, \quad 0 < p < 2,$$

чем и завершим доказательство леммы для случая $p > 2$. Доказательство для $p \geq 2$ приведено в [13].

§3. ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА В КЛАССАХ ХАРДИ И ДЖРБАШАНА В ПОЛИДИСКЕ

Определение 3.1. Скажем, что аналитическая в $\mathbb{D}^n$ функция g удовлетворяет условию (S), если

$$S(g) = \sup_{w, \zeta \in \mathbb{D}^n} \left(\frac{(1-|w|)^{s+2\alpha}}{|1-\bar{w}\zeta|^{-\gamma}} \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z)|^{-2}}{|1-\bar{z}\zeta|^\gamma} dm_{2n}(z) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z)|(1-|z|)^{\alpha-\frac{\gamma+1}{q}-\frac{1}{p}}}{|1-\bar{w}z|^{\alpha+2}} dm_{2n}(z) \right\}^2 \right) < \infty \quad (14)$$

для некоторых $\gamma, \alpha > 0, s+2\alpha > 0, \alpha > \gamma q^{-1} + q^{-1} + p^{-1} - 1, 0 < p, q < \infty$.

Подобное (14) условие приводилось и ранее (см., например, [11], [12]).

Теорема 3.1. Пусть $f, g \in H(\mathbb{D}^n)$ ($n > 1$) и g удовлетворяет условию (S) with $s = 2[(\gamma+1)q^{-1} + p^{-1} - \alpha - 2], \alpha - (\gamma+1)q^{-1} - p^{-1} > -1, \beta - 2\alpha - s > -1, \gamma > 0$. Тогда

1°. Оператор $T_f^\alpha T_g^\alpha$ действует ограниченно из $F_\gamma^{p,q}(\mathbb{D}^n)$ в A_β^2 тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{D}^n} \left\{ \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|f(w)|^2 (1-|w|)^{\beta-s-2\alpha}}{|1-\bar{w}\zeta|^\gamma} dm_{2n}(w) \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z)|^{-2}}{|1-\bar{z}\zeta|^\gamma} dm_{2n}(z) \right)^{-1} \right\} < +\infty. \quad (15)$$

2°. Оператор $T_f^\alpha T_g^\alpha$ действует ограниченно из $A_\gamma^{q,p}(\mathbb{D}^n)$ в A_β^2 тогда и только тогда, когда выполнена оценка (15).

Доказательство приведем только для утверждения 1°, так как утверждение 2° устанавливается вполне аналогично. Для доказательства необходимости условия

(15) воспользуемся теоремой о замкнутом графике : при ограниченности оператора $T_f^\alpha T_g^\alpha$ из $A_\gamma^{p,q}$ в A_β^2 (или $F_\gamma^{p,q}$ в A_β^2) имеет место оценка

$$\|f T_g^\alpha h\|_{A_\beta^2} \leq \|h\|_{A_\gamma^{p,q}} (\|h\|_{F_\gamma^{p,q}}), \quad f, g \in H(\mathbb{D}^n).$$

Положим

$$h(z) = \frac{1}{(1 - \bar{z}_1 z)^{\alpha+2}}, \quad z_1 \in \mathbb{D}, \quad \alpha > -1, \quad \alpha > \frac{\gamma+2}{p} - 2.$$

Тогда, очевидно,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{dm(\zeta)}{|1 - r\zeta|^a} \preceq \frac{1}{(1-r)^{a-1}}, \quad a > 1, \quad r \in (0, 1],$$

$$\int_0^1 (1 - \rho r)^{-\lambda} (1 - r)^\alpha dr \preceq (1 - \rho)^{-\lambda + \alpha + 1}, \quad \alpha > -1, \quad \lambda > \alpha + 1, \quad \rho \in (0, 1).$$

Из приведенных неравенств легко вывести оценки

$$\|h\|_{F_\gamma^{p,q}} \preceq \frac{1}{(1 - |z_1|)^{\alpha+2-\frac{1}{p}-\frac{\gamma+1}{q}}}, \quad \alpha > \frac{1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} - 2, \quad (16)$$

$$\|h\|_{A_\gamma^{q,p}} \leq \frac{1}{(1 - |z_1|)^{\alpha+2-\frac{1}{q}-\frac{\gamma+1}{p}}}, \quad \alpha > \frac{1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} - 2. \quad (17)$$

Из оценок (16), (17) и известной теоремы о проекторах (см., например, [3]) следуют неравенства (рассматриваем только классы $F_\gamma^{p,q}$) :

$$\begin{aligned} \|T_f^\alpha T_g^\alpha h\|_{A_\beta^2} &= \|f T_g^\alpha h\|_{A_\beta^2} = \\ &= \left(|g(z_1)|^2 \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|f(w)|^2 (1 - |w|)^\beta}{|1 - \bar{w} z_1|^{2(\alpha+2)}} dm_{2n}(w) \right)^{1/2} \preceq (1 - |z_1|)^{\frac{1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} - (\alpha+2)}, \\ &\int_{\mathbb{D}^n} \int_{\mathbb{D}^n} \left(\frac{|f(w)|^2 (1 - |w|)^\beta}{|1 - \bar{w} z_1|^{2(\alpha+2)}} dm_{2n}(w) \right) \frac{(1 - |z_1|)^{-s}}{|1 - \bar{z}_1 \zeta|^\gamma} dm_{2n}(z_1) \preceq \\ &\preceq \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 \zeta|^\gamma} dm_{2n}(z_1), \quad \zeta \in \mathbb{D}^n, \end{aligned} \quad (18)$$

где $s = 2((\gamma+1)q^{-1} + p^{-1} - (\alpha+2))$.

Используя неравенство (1), оценим интеграл слева в (18) снизу :

$$\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|f(z_1)|^2 (1 - |z_1|)^{-s} dm_{2n}(z_1)}{|1 - \bar{w} z_1|^{2(\alpha+2)} |1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} \geq C \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|\tilde{f}(z_1)|^2 (1 - |z_1|)^{-s+2n-2} dm_{2n}(z_1)}{\prod_{k=1}^n |1 - \bar{w}_k z_1|^{2(\alpha+2)} |1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma},$$

где $\tilde{f}(z_1) = f(z_1, \dots, z_1)$, $z_2 = (z_2^1, \dots, z_2^n)$ and $w = (w_1, \dots, w_n)$. Модифицируя рассуждения [3], (глава 6), оценим последний интеграл в (18) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}^n} |F(w_1, \dots, w_n, w_1, \dots, w_n)|^p (1 - |w_1|)^{2\alpha+2} (1 - |w_n|)^{2\alpha+2} dm_2(w_1) \dots dm_2(w_n) \leq \\ \leq \int_{\mathbb{D}^n} \int_{\mathbb{D}^n} |F(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{2n})|^p (1 - |w_1|)^\alpha \dots (1 - |w_{2n}|)^\alpha dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (18) следует, что при $\gamma > 0$, $\beta - 2\alpha - s > -1$ и $s > -1$

$$\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|f(w)|^2 (1 - |w|)^{\beta-2\alpha-s}}{|1 - \bar{w}z_2|^\gamma} dm_{2n}(w) \leq \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} dm_{2n}(z_1), \quad z_2 \in \mathbb{D}^n.$$

Докажем теперь достаточность условия (15). Для этого воспользуемся оценками (7) и (8). Опеним величину J сверху

$$\begin{aligned} J = \|(T_{\bar{g}}^\alpha h) f\|_{A_{\beta}^2}^2 = \int_{\mathbb{D}^n} |f(w)|^2 (1 - |w|)^\beta \left| \int_{\mathbb{D}^n} \frac{\overline{g(z)} h(z) (1 - |z|)^\alpha}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+2}} dm_{2n}(z) \right|^2 dm_{2n}(w) \leq \\ \leq \int_{\mathbb{D}^n} |f(w)|^2 (1 - |w|)^\beta \frac{|1 - \bar{w}z_2|^\gamma}{|1 - \bar{w}z_2|^\gamma} \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} dm_{2n}(z_1) \right)^{-1} \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} dm_{2n}(z_1) \right) \times \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z)| |h(z)| (1 - |z|)^\alpha}{|1 - \bar{w}z|^\alpha} dm_{2n}(z) \right)^2 dm_2(w). \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha - \frac{\gamma+1}{q} - \frac{1}{p} > -1$ и $\beta - 2\alpha - s > -1$ получим

$$\begin{aligned} J \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |h(z)| (1 - |z|)^{\frac{\gamma+1}{q} + \frac{1}{p}} \right)^2 \sup_{z_2 \in \mathbb{D}^n} \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|f(w)|^2 (1 - |w|)^{\beta-2\alpha-s}}{|1 - \bar{z}_2 w|^\gamma} dm_2(w) \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} dm_{2n}(z_1) \right)^{-1} \times \\ \times \sup_{w, z_2} \left\{ \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z_1)|^{-2}}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^\gamma} dm_{2n}(z_1) \left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|g(z)| |h(z)| (1 - |z|)^{\alpha - \frac{\gamma+1}{q} - \frac{1}{p}}}{|1 - \bar{w}z|^\alpha} dm_{2n}(z) \right)^2 \right\} \times \\ \times |1 - \bar{w}z_2|^\gamma (1 - |w|)^{s+2\alpha} \leq \|h\|_{F_{p, q}^2}^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§4. ОПЕРАТОРЫ ТИПА ГАНКЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $H^2(\mathbb{D}^2)$

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы о действии операторов Ганкеля в пространстве $H^2(\mathbb{D}^2)$. Теорема предлагает варианты обобщений на бидиск одного из основных результатов У. Кона [6].

Определение 4.1. Скажем, что символ оператора Ганкеля H_{Φ}^s удовлетворяет условию (N) , $\Phi \in (N)$, если $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)}$ и для любого аналитического многочлена $f(z_1, z_2)$

$$[\overline{\Phi_2(z_2)}(P_s)_{z_1}(\overline{\Phi_1}f) - \overline{\Phi_1(z_1)}(P_s)_{z_2}(\overline{\Phi_2}f)] \equiv 0.$$

Теорема 4.1. 1°. Если $s > 0$ и $\Phi \in H^1(\mathbb{D}^2)$ удовлетворяет $\Phi \in (N)$ и $u = \overline{\Phi} = \overline{F_1(\zeta_1)F_2(\zeta_2)}$, то оператор H_{Φ}^s можно продолжить до ограниченного оператора из $H^2(\mathbb{D}^2)$ в $L^2(\mathbb{T}^2)$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in BMOA_{rect}(\mathbb{D}^2)$.

2°. Если $s > 0$, $\Phi \in H^1(\mathbb{D})$ и $u = \overline{\Phi}$, тогда операторы вида

$$(\tilde{H}_{\Phi}^s)_i(f)(z) = f(z)(\overline{z_i \Phi(z_i)}) - (P_s)_{z_i}(\overline{\Phi}f)(z)$$

действуют ограничено из $H^2(\mathbb{T}^2)$ в $L^2(\mathbb{T}^2)$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in BMOA(\mathbb{D})$.

Доказательство. Установим только утверждение 1°, так как утверждение 2° доказывается вполне аналогично, с незначительными модификациями. Необходимость условия $\Phi \in BMOA_{rect}(\mathbb{D}^2)$ устанавливается следующим образом. Пусть $r < 1$ и $g_r(z) = (\overline{\Phi}_r f_r) - (P_s(\overline{\Phi}f))_r$, тогда ясно, что $(P_{-, -})(g) = \lim_{r \rightarrow 1} (P_{-, -})(g_r)$. Далее, очевидно, что

$$(P_{-, -})(\Phi_1 + \Phi_2) = (P_{-, -})\Phi_1 + (P_{-, -})\Phi_2, \quad (P_{-, -})(P_s(\overline{\Phi}f)) = 0,$$

поскольку

$$(P_{-, -}) \left(\sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_2 \geq 0} \hat{g}(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \right) = 0.$$

Тем самым

$$\lim_{r \rightarrow 1} (P_{-, -})(g_r) = (P_{-, -})(\overline{\Phi}f) \quad \text{и} \quad \|(P_{-, -})(g)\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

ввиду того, что $\|P_+g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$ и $\|P_-g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$. Теперь легко доказать, что

$$\|(P_{-, -})(\overline{\Phi}f)\|_{L^2} = \|(P_{-, -})g\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \leq C_8 \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

В силу леммы 2.1 получим $\Phi \in BMOA(\mathbb{D}^2)$ и $\Phi \in BMOA_{rect}(\mathbb{D}^2)$.

Достаточность условия $\Phi \in BMOA_{rect}(\mathbb{D}^2)$ для ограниченности оператора H_{Φ} будет установлена с использованием оценок лемм 2.2 и 2.3. Заметим сначала, что в силу леммы 2.1

$$D^{\alpha} F_i \in BMOA_{rect}(\mathbb{D}), \quad i = 1, 2, \quad \alpha \geq 0.$$

В работе У. Кона [6] получено интегральное представление для одномерного интегрального оператора $H_{\frac{s}{2}}$:

$$(H_{\frac{s}{2}}^s f)(z) = -\frac{C}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^s f(\zeta) \overline{\Phi'(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}z)^s (\zeta-z)} dm_2(\zeta), \quad s > 0.$$

Это представление выводится из следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned} -2\pi i \psi(z) &= \int_{\mathbb{D}} \overline{D} \left(\psi(\zeta) \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^s \right) \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta-z} = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{D} \psi(\zeta) \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^s \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta-z} + \int_{\mathbb{D}} \psi(\zeta) \overline{D} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^s \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta-z} = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{D} \psi(\zeta) \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^s \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta-z} - 2\pi i (P_s) \psi(z), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\psi = f\overline{\Phi}$ и $\overline{D} = \frac{d}{d\bar{\zeta}}$. Для наших целей необходимо найти двумерный вариант этих равенств, с их помощью получить интегральное представление для оператора $H_{\frac{s}{2}}^s$ в $\mathbb{D}^2$, и, далее, оценить каждый член суммы $H_{\frac{s}{2}}^s = \sum_{i=1}^3 S_i$.

Применяя представление (19) по первой переменной, для аналитической в круге $\mathbb{D}$ функции $\tilde{\psi}$ получим

$$\begin{aligned} C_2 \tilde{\psi}(z_1) &= \int_{\mathbb{D}} \overline{D}_{\zeta_1} \tilde{\psi}(\zeta_1) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^s}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^s (\zeta_1 - z_1)} dm_2(\zeta_1) - \\ &- C_1 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{s-1} \tilde{\psi}(\zeta_1)}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{s+1}} dm_2(\zeta_1), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$D_{\zeta_1} = \frac{d}{d\zeta_1}, \quad s > 0, \quad C_1 = C_1(s), \quad C_2 = C_2(s), \quad \tilde{\psi}(w_1) = \psi(w_1, z_2), \quad w_1 \in \mathbb{D}.$$

Далее, применив формулу (19) по второй переменной, получим

$$\begin{aligned} &\psi(z_1, z_2) - (P_s)_{z_2} (P_s)_{z_1} \psi(z_1, z_2) = \\ &= C_1 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{D}_{\zeta_1} \overline{D}_{\zeta_2} \psi(\zeta_1, \zeta_2) (1-|\zeta_1|^2)^s (1-|\zeta_2|^2)^s}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^s (\zeta_1 - z_1) (1-\bar{\zeta}_2 z_2)^s (\zeta_2 - z_2)} dm_2(\zeta_2) dm_2(\zeta_1) + \\ &+ C_2 \int_{\mathbb{D}} (P_s)_{z_2} (\overline{D}_{\zeta_1} \psi(\zeta_1, z_2)) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^s \frac{dm_2(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} + \\ &+ C_3 \int_{\mathbb{D}} \overline{D}_{\zeta_2} (P_s)_{z_1} \psi(z_1, \zeta_2) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^s \frac{dm_2(\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}. \end{aligned}$$

Применим это равенство к функции $\psi(z) = f(z)\overline{\Phi}(z)$. Тогда придем к следующему интегральному представлению:

$$(H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s)(z) = f(z)\overline{\Phi}(z) - C(P_s)_{z_1}(P_s)_{z_2}(f\overline{\Phi})(z) = C_1(s)J_1 + C_2(s)J_1 + C_2(s)J_3, \quad (21)$$

где $C = (4\pi^2)^{-1}$, C_1, C_2 — постоянные, а

$$J_1 = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta_1, \zeta_2) \overline{D}_{z_1} \overline{D}_{z_2} \overline{\Phi}(\zeta_1, \zeta_2) \prod_{k=1}^2 \frac{(1 - |\zeta_k|^2)^s}{(1 - \overline{\zeta}_k z_k)(\zeta_k - z_k)} dm_2(\zeta_1) dm_2(\zeta_2),$$

$$J_2 = \int_{\mathbb{D}} (P_s)_{z_2} f) \overline{\Phi}_{\zeta_1}(\zeta_1, z_2) \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^s dm_2(\zeta_1)}{(1 - \overline{\zeta}_1 z_1)^s (\zeta_1 - z_1)},$$

$$J_3 = \int_{\mathbb{D}} (P_s)_{z_1} f) \overline{\Phi}_{\zeta_2}(z_1, \zeta_2) \frac{(1 - |\zeta_2|^2)^s dm_2(\zeta_2)}{(1 - \overline{\zeta}_2 z_2)^s (\zeta_2 - z_2)}.$$

Замечание 4.1. Нетрудно показать, что если $\Phi = \Phi_1(\zeta_1)$ (или $\Phi = \Phi_2(\zeta_2)$), то $H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s(f) = C_2 J_2$ (или $H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s(f) = C_2 J_3$).

Напомним, что в интересующем нас случае $\Phi = \Phi_1(\zeta_1)\Phi_2(\zeta_2)$. Нам необходимо установить оценку $\|H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s(f)\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{D}^2)}$. Ввиду двойственности,

$$\|H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s f\|_{H(\mathbb{D}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} H_{\frac{\Phi}{\Psi}}^s(f)(\zeta) g(\overline{\zeta}) dm_2(\zeta),$$

где $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Тем самым, ввиду интегрального представления (21) для окончания доказательства теоремы достаточно показать, что

$$S_1 = \left| \int_{\mathbb{T}^2} J_1(\xi_1, \xi_2) \overline{g}(\xi_1, \xi_2) dm_2(\xi) \right| \leq \|g\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \|\Phi\|_{BMOA_{\text{rect}}},$$

$$S_2 = \left| \int_{\mathbb{T}^2} J_2(\xi_1, \xi_2) \overline{g}(\xi_1, \xi_2) dm_2(\xi) \right| \leq \|g\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \|\Phi\|_{BMOA_{\text{rect}}},$$

$$S_3 = \left| \int_{\mathbb{T}^2} J_3(\xi_1, \xi_2) \overline{g}(\xi_1, \xi_2) dm_2(\xi) \right| \leq \|g\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \|\Phi\|_{BMOA_{\text{rect}}}.$$

. В силу условия (N) теоремы $J_2 = -J_3$. Для оценки S_1 воспользуемся леммой 2.3 и одномерными рассуждениями У. Кона [6], поочередно фиксируя переменные z_1 и z_2 . Ввиду равенства

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|)^{\gamma} f(\zeta) \overline{g}(\zeta) dm_2(\zeta) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|)^{\alpha + \gamma} D^{\alpha} f(\zeta) \overline{g}(\zeta) dm_2(\zeta), \quad (22)$$

имеющего место при $\alpha, \gamma \in (-1, \infty)$ (см. [20], [21]), получим при $\alpha = 1$

$$S_1 = \left| \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{D}^2} \frac{(1 - |\zeta|^2)^s}{(1 - \overline{\zeta}\xi)^s (\zeta - \xi)} f(\zeta) \overline{\Phi}_1'(\zeta_1) \overline{\Phi}_2'(\zeta_2) \overline{g}(\xi) dm_2(\xi) dm_4(\zeta) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{D}^2} f(\zeta) \overline{\Phi_1'}(\zeta_1) \overline{\Phi_2'}(\zeta_2) G(\zeta) dm_2(\zeta) \right| \leq (I_1 + I_2),$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и

$$I_1 = \left| \int_{\mathbb{D}^2} (1 - |\zeta|) Df(\zeta_1, \zeta_2) \overline{\Phi_1'}(\zeta_1) \overline{\Phi_2'}(\zeta_2) G(\zeta) dm_2(\zeta) \right|,$$

$$I_2 = \left| \int_{\mathbb{D}^2} (1 - |\zeta|) f(\zeta) \overline{\Phi_1'}(\zeta_1) \overline{\Phi_2'}(\zeta_2) DG(\zeta) dm_2(\zeta) \right|,$$

$$G(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{(1 - |\zeta|^2)^s \bar{\xi}}{(1 - \bar{\zeta}\xi)^s (1 - \bar{\xi}\zeta)} \bar{g}(\xi) dm_2(\xi).$$

Имеют место следующие два соотношения

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{D}^2} \frac{f(z) \bar{g}(z)}{1 - |z|} dm_4(z) \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} A_2^p \left(\int_{\mathbb{T}} ((A_2(f))(\zeta))^p dm(\zeta_1) \right)^{1/p} dm(\zeta_2) \right)^{1/p} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{T}} A_2^{p'} \left(\int_{\mathbb{T}} ((A_2(f))(\zeta))^{p'} dm(\zeta_1) \right)^{1/p'} dm(\zeta_2) \right)^{1/p'} = \|f\|_{T_2^p} \|g\|_{T_2^{p'}}, \quad p > 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\|g_1 g_2\|_{T_2^p} \leq \|g_2\|_{T_2^\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^2} (A_\infty(g_1)(\zeta))^p dm_2(\zeta) \right)^{1/p} = \|g_2\|_{T_2^\infty} \|g_1\|_{(T_\infty^p)_1}, \quad p > 0, \quad (24)$$

$$\|g_2\|_{T_2^\infty} = \left\| \sup_{\zeta_2 \in \mathbb{I}_2} \frac{1}{|\mathbb{I}_2|} \int_{\diamond \mathbb{I}_2} \left\| \sup_{\zeta_1 \in \mathbb{I}_1} \frac{1}{|\mathbb{I}_1|} \int_{\diamond \mathbb{I}_1} \frac{|g_2(z)|^2}{1 - |z|} dm_2(z_1) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} dm_2(z_2) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/2}$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и $\|f\|_{T_\infty^p}$ определяется итерацией, как в случае одномерной нормы.

Доказательства приведенных оценок при $n = 1$, можно найти в [6, 20, 23]. В общем случае достаточно применить одномерный результат по каждой переменной в отдельности. Нам понадобятся еще два неравенства, доказанные в [6] в случае $n = 1$. При $1 < p < \infty$, $\rho = (1 - |z_1|)(1 - |z_2|)$ и при $\alpha + \beta + 1 > 0$, $\alpha + 1 > -1$ и $\beta + 1 > -1$

$$\begin{aligned} \|\rho S_{\alpha, \beta} g\|_{T_2^p} &= \left\| (1 - |z|)^{1+\alpha+\beta} D_{z_1} D_{z_2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{g(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{1+\alpha+\beta}}{(1 - \bar{\zeta}z)^{1+\alpha} (1 - \bar{\zeta}z)^{1+\beta}} d\zeta \right\|_{T_2^p} \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, p) \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\|S_{\alpha, \beta} g\|_{T_\infty^p} \leq \tilde{C}(\alpha, \beta, p) \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}. \quad (26)$$

В общем случае $n \geq 1$ они тоже получаются стандартным наращиванием числа переменных.

Для оценок I_1 и I_2 повторим рассуждения У. Кона по каждой переменной. Из соотношения (23) следует

$$|I_1| \leq \|\rho Df\|_{T_2^p} \|\rho \Phi'_1 \Phi'_2 G\|_{T_2^{p'}}, \quad (27)$$

$$|I_2| \leq \|\rho \Phi'_1 \Phi'_2 f\|_{T_2^p} \|\rho G\|_{T_2^{p'}}, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad (28)$$

Заметим, что для частных значений α и β функции двух переменных DG и $\rho S_{\alpha, \beta}(g)$ имеют "одинаковый вид". Более того, очевидно

$$\|\rho \Phi'_1 \Phi'_2\|_{T_2^\infty} = \|\Phi_1 \Phi_2\|_{BMOA_{\text{real}}(\mathbb{D}^2)} \quad (29)$$

Для завершения доказательства остается последовательно воспользоваться оценками (11'), (24) - (26) и (29), поочередно исключая переменные z_1 и z_2 и учитывая, что по лемме 2.3

$$\|\rho Df\|_{T_2^p} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D}^2)}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|\rho Df\|_{T_2^p}^p =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma_\alpha(\zeta_2)} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma_\alpha(\zeta_1)} |Df|^2 dm_2(z_1) \right)^{p/2} dm(\zeta_1) \right)^{2/p} dm_2(z_2) \right)^{p/2} dm(\zeta_2).$$

Замечание 4.2. Теоремы о действии операторов H_u^* и $(H_u^*)_i$ в классы М. М. Джрбашяна, а точнее из $L^2(\mathbb{D})$ в $L^2(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D})$, а позднее их обобщения в полидиске (критерии ограниченности) были установлены в работах [24] и [25].

Замечание 4.3. При $n = 1$ множитель Φ_2 в утверждениях 2° и 3° теоремы 4.1 исчезает, и в точности получаются критерии У. Кона [6]. При $n = 1$ утверждение 1° тоже обращается в теорему, установленную У. Коном.

Замечание 4.4. Действие операторов Ганкеля, определенных посредством обычной проекции Рисса из $L^2(\mathbb{T}^2)$ в $H^2(\mathbb{T}^2)$, было исследовано в [14]. Результаты работы [14] также дают характеристики других классов типа $BMOA$ в D^2 через символы операторов Ганкеля.

Abstract. Two boundedness criteria, one for products of Toeplitz operators in M. M. Djrbashian polydisc spaces and the other for boundedness of Hankel operators in Hardy spaces over the bidisc are established together with theorems on factorization of some subclasses of functions holomorphic in the polydisc.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Sarason, "Products of Toeplitz operators", Linear and Complex Analysis Book, Part I, Lecture Notes in Math., vol. 1573, Springer, Berlin, pp. 318 – 319, 1994.
2. Р. Ф. Шамоян, Об ограниченности произведений операторов Теплица. Препринт, Брянск, Бр.ГТУ, стр. 12, 2005.
3. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian. Theory of A_p^α Spaces, Teubner Texte zur Math., Leipzig, 1988.
4. R. Coifman, Y. Meyer, E. Stein, "Some new functional spaces and their application to harmonic analysis", Journal of Functional Analysis, vol. 62, pp. 304 – 335, 1985.
5. Е. Дынкин, "Множества свободной интерполяции для классов Гельдера", Мат. Сборник, том 109, № 1, стр. 107 – 128, 1979.
6. W. Cohn, "Hankel operators and Bergman Projections on Hardy spaces", Ill. J. Math., vol. 42, no. 3, pp. 493 – 508, 1998.
7. L. Grafakos, Classical and Modern Fourier Analysis, Prentice Hall, Columbia, 2003.
8. D. Zheng, "The distribution function inequality and products of Toeplitz and Hankel operators", J. Func. Analysis, vol. 138, pp. 477 – 501, 1996.
9. D. Zheng, K. Stroethoff, "Products of Hankel and Toeplitz operators on the Bergman space", J. Func. Analysis, vol. 169, pp. 289 – 213, 1999.
10. F. Nazarov, "A counter-example to Sarason conjecture", Preprint, Michigan, MSU, 15p. 1997 available at www.math.msu.edu/~fedja/preprint
11. D. Zheng, K. Stroethoff, "Bounded Toeplitz products on the Bergman space on the polydisc", J. Math. Analysis and Appl., vol. 278, pp. 125 – 135, 2003.
12. S. Pott, E. Strouse, "Products of Toeplitz operators on the A_p^α spaces", Preprint, Univ of Bordeaux 1, Bordeaux, 2004.
13. Р. Ф. Шамоян, "О некоторых оценках для интегралов площадей Лузина и квазинорм аналитических классов Бесова в поликруге", Фунд. и прикл. математика, том 3, стр. 141 – 155, 2005.
14. S. H. Ferguson, C. Sadosky, "Characterization of bounded mean oscillation on the polydisc in terms of Hankel operators and Carleson measures", D'Analyse Math., vol. 81, pp. 239 – 267, 2000.
15. В. Томоконников, "Операторы Ганкеля и Теплица в пространствах Харди", Зап. научн. сем. ЛОМИ, том 141, стр. 165 – 175, 1985.
16. Z. Wu, Ch. Xie, "The decomposition theorems for Q_p spaces", Arkhiv for Math., vol. 40, no. 2, pp. 383 – 401, 2002.
17. S. Y. Alice Chang, R. Fefferman, "A continuous version of the duality of H^1 and BMO on the bidisc", Ann. of Math, vol. 112, pp. 179 – 201, 1980.
18. У. Рудин, Теория функций в поликруге, Москва, Мир, 1974.
19. Дж. Гарнет, Ограниченные аналитические функции, Москва, Мир, 1984.
20. И. И. Э. Вербицкий, "Теоремы вложения для пространств аналитических функций со смешанными нормами", Препринт, Институт геофизики, Кишинев, 1987.
21. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer, Berlin, 2000.
22. М. Гварадзе, "О множителях одного класса голоморфных в поликруге функций", Сообщ. Инст. мат. ГССР, том 66, стр. 13 – 19, 1980.

23. W. Cohn, I. Verbitsky, "Factorization of Tent Spaces and Hankel operators", Journal of Func. Analysis, vol. 175, pp. 308 – 329, 2000.
24. D. Luecking, "Characterization of certain classes of Hankel operators on the Bergman spaces", J. Func. Anal., vol. 110. no. 2, pp. 247 – 271, 1992.
25. H. Li, "Hankel operators on the Bergman spaces on the unit polydisc", Proc. AMS, vol. 120, no. 4, pp. 1113 – 1121, 1994.

Поступила 29 ноября 2005

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 3, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

А. В. АБРАМЯН, О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами	3
Р. О. АДАМЯН И С. Е. МАРКОСЯН, Алгоритм нахождения максимального q -хроматического подграфа	12
Г. М. АТТИА, Bool's block-by-block method for second kind Volterra integral equations	26
Г. Г. КАЗАРЯН И В. Н. МАРГАРЯН, Критерий гипозэллиптичности многочленов в терминах числа Зайденберга-Тарского	37
А. О. КАРАПЕТЯН, Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления гладких функций в области Зигеля	55
Р. Ф. ШАМОЯН И А. В. АРУТЮНЯН, О действии оператора Теплица и Ганкеля в классах Джрбашяна и Харди в полидиске	70

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 3, 2006

CONTENTS

A. V. ABRAMYAN, Orthogonal on the circle rational functions with fixed poles	3
R. O. ADAMYAN AND S. E. MARKOSYAN, An algorithm for maximal q -colorable subgraph of comparability graph	12
G. M. ATTIA, Bool's block-by-block method for second kind Volterra integral equations	26
H. G. GHAZARYAN AND V. N. MARGARYAN, A hypoellipticity criterion for polynomials in terms of Seidenberg-Tarski number ..	37
A. H. KARAPETYAN, Weighted $\bar{\partial}$ -integral representations of smooth functions in the Siegel domain	55
R. F. SHAMOYAN AND A. V. HARUTYUNYAN, Products of Toeplitz and Hankel operators in Djrbashian and Hardy classes over the polydisc	70