ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

# МАТЕМАТИКА

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
# И
# ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Сборник статей**

**Редакторы серии :**

**Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян**

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Гармонический анализ и приближения имеют сильные традиции в Армении и являются одними из самых интенсивно прогрессирующих ветвей. Первые две международные конференции по этой тематике проходили в Нор Амберде (Армения), сентябрь 18 – 24, 1998 и сентябрь 11 – 18, 2001.

Настоящий номер журнала завершает публикацию, начатую в предыдущих двух номерах журнала, оригинальных статей, представленных на конференции "Гармонический Анализ и Приближения, III", проведённой в Цахкадзоре (Армения), 20 - 27 сентября 2005.

Организаторами третьей конференции были Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный комитет:

Н. Аракелян (Армения), З. Чисельский (Польша), П. Готье (Канада), Б. С. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), А. М. Олевский (Израиль), В. Н. Темляков (США), А. А. Талалян (Армения), П. Л. Ульянов (Россия).

Организационный комитет:

Г. Геворкян, А. Саакян, А. Акопян, М. Погосян.

Около 100 математиков из 13 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочитаны следующими математиками:

Н. Аракелян (Армения) "О задачах Дирихле и Неймана", Б. Боянов (Болгария) "Интерполяция двумерными полиномами основанная на проекциях Радона", К. Де Бур (США) "Что являются пределами проекторов Лагранжа?", Н. Дин (Израиль) "Метрическое приближение одномерных множествозначных функций", П. Готье (Канада) "Приближение Дзета функции Римана и с помощью этой функции", А. Акопян (Армения) "О Теореме Безу и Nullstellensatz", К. Казарян (Испания) "А-множества и всплески", С. Конягин (Россия) "Сходимость подпоследовательности частичных сумм ряда Фурье интегрируемых функций", М. Лейси (США) "Теорема Нехари в полидиске", В. Лу (Германия) "Лакунарная суммируемость", К. Осколков (США) "Частица Шрёдингера как полифрактал", В. Темляков (США) "О гриди алгоритмах с ограниченной глубиной поиска", Туан Ву Ким (США) "Выборка сигналов ограниченного диапазона", П. Войташик (Польша) "Анизотропные пространства и множества уровня".

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

*Известия НАН Армении. Математика*, 41, № 2, 2006, 5-13

# КАНТОРОВСКИЕ МНОЖЕСТВА, МИНИМАЛЬНЫЕ ДЛЯ КВАЗИСИММЕТРИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

**Г. А. Акопян**

*Университет Стони Брука, Стони Брук, NY 11794-3651*
*E-mail : hhakob@math.sunysb.edu*

**Резюме.** В статье доказывается, что среднеинтервальные Канторовы множества хаусдорфовой размерности 1 являются минимальными для квазисимметричных отображений прямой. Комбинируя этот результат с теоремой Ву получаем, что существуют "жёсткие" подмножества прямой, каждый квазисимметричный образ которых имеет нулевую длину и Хаусдорфову размерность 1.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданного $M \geq 1$, гомеоморфизм $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ будем называть $M$–**квазисимметричным**, если для любой пары смежных интервалов $I$ и $J$ одинаковой длины имеем

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|f(I)|}{|f(J)|} \leq M$$

($|\cdot|$ обозначает одномерную меру Лебега). Отображение квазисимметрично, если оно $M$-квазисимметрично для некоторого $M \geq 1$. Обозначим через $QS$ и $QS(M)$ множество всех квазисимметричных и $M$-квазисимметричных гомеоморфизмов прямой $\mathbf{R}$ соответственно. Обычно гомеоморфизм $f$ между метрическими пространствами $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ называется $\eta$–**квазисимметричным**, если существует гомеоморфизм $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такой, что для всех $x, y, z \in X$ и $t > 0$ имеем

$$d_X(x, y) \leq t d_X(y, z) \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \eta(t) d_Y(f(y), f(z)).$$

Мы исследуем хаусдорфову размерность образов компактных множеств $E \subset \mathbf{R}$

относительно квазисимметричных отображений $f$. Так как квазисимметричные отображения непрерывны по Гёльдеру (см. [1]), поэтому если $\dim_H(E) = 0$, то $\dim_H(f(E)) = 0$ . В работе [2] показано, что если $\dim_H(E) > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти квазисимметричное отображение такое, что $\dim{}_H(f(E)) > 1-\varepsilon$. В [9] Тукия доказал обратное утверждение, что для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset \mathrm{R}$ и $f \in QS$ такие, что $\dim{}_H(\mathrm{R} \setminus E) < \varepsilon$ и $\dim{}_H(f(E)) < \varepsilon$. В настоящей работе доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** *Среднеинтервальные Канторовы множества размерности 1 минимальны для квазисимметричных отображений.*

Множество $E \subset \mathrm{R}$ называется **минимальным для квазисимметричных отображений**, если $\dim{}_H(f(E)) \geq \dim{}_H(E)$, $\forall f \in \mathcal{QS}$. Будем говорить, что множество $E \subset \mathrm{R}$ является **среднеинтервальным Канторовым множеством**, если оно строится следующим образом. Зафиксируем последовательность $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ чисел интервала $(0,1)$. Выбросим средний интервал $J_{1,1}$ с центром в точке $1/2$ длины $c_1$ из интервала $[0,1] = E_{0,1}$. Компоненты оставшегося множества будем обозначать через $E_{1,1}$ и $E_{1,2}$. Из середины интервала $E_{1,i}$ выбросим интервал $J_{2,i}$ длины $c_2|E_{1,i}|$, $i = 1,2$, и т.д.. Пусть $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} E_{n,j}$ где $E_{n,j} = E_{n+1,2j-1} \cup J_{n+1,j} \cup E_{n+1,2j}$, $|J_{n,j}| = c_n|E_{n-1,j}|$ и $|E_{n+1,j}| = |E_{n+1,j'}|$ для любых $j$ и $j'$. Через $E(\mathbf{c})$ будем обозначать множество соответствующее последовательности $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $E_{0,1}$ | | | |
| | $E_{1,1}$ | | $J_{1,1}$ | | $E_{1,2}$ | |
| $E_{2,1}$ | $J_{2,1}$ | $E_{2,2}$ | $J_{1,1}$ | $E_{2,3}$ | $J_{2,2}$ | $E_{2,4}$ |

**Рис. 1.** Средний интервал Канторова множества

Следующие определения введены Пансу в [6]. **Конформная размерность** метрического пространства $X$ есть инфимальная размерность Хаусдорфа квазисимметричных образов пространства $X$ :

$$\mathcal{C}\dim(X) = \inf\left\{\dim{}_H(Y) \,|\, \exists \ \text{квазисимметричное } f : X \to Y\right\}.$$

Для множества $E \subset \mathrm{R}^n$ можно определить **квазиконформную размерность** как inf по меньшим подмножествам отображений

$$\mathcal{QC}\dim(E) = \inf\{\dim{}_H(f(E)) \,|\, \ \text{квазисимметричное } f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n\}.$$

В этой терминологии, теорема Тукия гласит, что существуют подмножества из $\mathbf{R}$ размерности 1 и квазиконформной размерности $< 1$. Как следует из теоремы Ковалёва [5], эти множества имеют квазиконформную размерность 0. Наше определение минимальности является частным случаем определения из [10] : $E \subset \mathbf{R}^n$ минимально
1) в случае конформной размерности, если $\mathcal{C}\dim(E) = \dim_H(E)$ ;
2) в случае квазисимметричной размерности, если $\mathcal{QC}\dim(E) = \dim_H(E)$.
В [3] было показано, что для любого $\alpha \geq 1$ существуют Канторовы множества в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ хаусдорфовой размерности $\alpha$, минимальные для конформной размерности. Все до сих пор известные примеры минимальных подмножеств из $\mathbf{R}$ содержали квазисимметрично плотные множества положительной меры Лебега. Напомним (см. [11]), что $E \subset \mathbf{R}$ называется **квазисимметрично плотным множеством**, если $|f(E)| > 0, \forall f \in \mathcal{QS}$.
В [4] показано, что среднеинтервальное Канторово множество $E(\mathbf{c})$ при $c_i < 1/2$ квазисимметрично плотно тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^p < \infty, \forall p > 0$. Наша теорема даёт частичный отрицательный ответ на следующий вопрос из [3] (см. стр. 370) : Если множество $E$ не квазисимметрично плотно, то это множество $E$ может ли иметь квазисимметричный образ хаусдорфовой размерности $< 1$ ? (Недавно автор настоящей работы ответил на вопрос Бишопа и Тайсона доказав, что существуют подмножества $\mathbf{R}$ конформной размерности 1 и длины ноль. В действительности, если $E = E(c)$, где $c$ – неубывающая последовательность и $\dim_H(E) = 1$, то $\mathcal{C}\dim(E) = 1$). Другими словами : Если множество не квазисимметрично плотное, то оно имеет ли конформную размерность $< 1$ ? Теорема 1.1 утверждает, что всякий средний интервал канторова множества длины ноль и размерности 1 является примером множества, которое не квазисимметрично плотное и имеет квазиконформную размерность 1. Можно ли в этом случае утверждать, что $\mathcal{C}\dim(E) = 1$ ? Существует ли множество $E \subset \mathbf{R}$ такое, что $\mathcal{QC}\dim(E) = 1$, однако $\mathcal{C}\dim(E) < 1$ ? Существует ли "жёсткое" множество, каждый $\mathcal{QS}$-образ которого имеет размерность 1 и длину 0 ?
В [11] множество называется **квазисимметрично нулевым**, если все его $\mathcal{QS}$-образы имеют длину ноль. В [12] Ву доказала, что если $\mathbf{c} = c_i \notin l^p, \forall p \geq 1$, то $E = E(\mathbf{c})$ является нулевым. Она также заметила, что, в частности, нуль множества могут иметь размерность 1. Следовательно, комбинируя теорему 1.1 с теоремой Ву, получаем утвердительный ответ на вышеизложенный вопрос.

**Следствие 1.2.** Существуют квазисимметрично нулевые минимальные множества.

Достаточно взять последовательность

$$c_i = \begin{cases} (1/i)^{\frac{1}{i}}, & \text{если} \quad i = 2^m \\ (1/i)^i, & \text{если} \quad i \neq 2^m \end{cases}$$

и построить соответствующее канторово множество $E(\mathbf{c})$. Мы оставляем читателю проверку того, что это множество имеет размерность 1 и удовлетворяет условию теоремы Ву.

## §2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что хаусдорфова $t$-мера метрического пространства $E$ определяется следующим образом :

$$H^t(E) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^t : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \operatorname{diam} U_i < \varepsilon \right\},$$

где $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – открытое покрытие множества $E$. Хаусдорфова размерность множества $E$ определяется так :

$$\dim_H(E) = \inf\{ t : H^t(E) = 0\}.$$

Обычно оценка сверху для хаусдорфовой размерности множества даётся нахождением явных покрытий для этого множества. Оценки снизу могут быть найдены из **принципа распределения масс** : Если множество $E \subset \mathbf{R}$ является носителем положительной борелевской меры $\mu$, удовлетворяющей условию $\mu(E \cap I) \leq C|I|^d$, для некоторой фиксированной постоянной $C > 0$ и любого интервала $I \subset \mathbf{R}$, то $\dim_H(E) \geq d$.

Пусть $N(E, \varepsilon)$ – минимальное число $\varepsilon$-шаров необходимых для покрытия множества $E$. Для множества $E$ **Верхняя и нижняя размерности Минковского** определяются как

$$\overline{\dim}_M(E) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}, \quad \underline{\dim}_M(E) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$$

соответственно. Когда эти два числа совпадают, их общее значение называется размерностью Минковского множества $E$. Вообще, для подмножества прямой имеем $\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_M(E) \leq \overline{\dim}_M(E) \leq 1$ (см. [8]). Следовательно, когда $\dim_H(E) = 1$, то размерность Минковского множества $E$ существует и равна 1.

**Лемма 2.1.** *Если $E = E(\mathbf{c})$ и $\dim_M(E) = 1$, то*

$$\sqrt[n]{n \prod_{i=1}^{n} (1 - c_i)} \to 1, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i^p \to 0, \quad 0 < p < 1. \tag{2.2}$$

**Доказательство :** Из определения размерности Минковского, вытекает

$$\dim_M(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{2^n}{\prod_{i=1}^n (1-c_i)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\log 2} \log \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (1-c_i)}} = 1.$$

Следовательно имеет место (2.1). Теперь, из неравенства между геометрическим и арифметическим средними $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1-c_i)} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1-c_i) \le 1$ (см. [7]) следует, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1-c_i) \to 1$ или, эквивалентно, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i \to 0$. Комбинируя также с неравенством Йенсена, получаем $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i$ при $p < 1$. Откуда следует (2.2).

В доказательстве теоремы 1.1 мы используем следующий вариант леммы из [12].

**Лемма 2.2.** *Если $f$ – $M$-квазисимметричная функция, то для любых двух интервалов $J \subset I$ имеем*

$$\frac{1}{(1+M)^2}\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^q \le \frac{|f(J)|}{|f(I)|} \le 4\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^p \tag{2.3}$$

*где $p = p(M) = \log_2(1 + 1/M)$, $q = q(M) = \log_2(1 + M)$.*

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

**Доказательство.** Пусть $f \in \mathbf{Q}S(M)$ для некоторого $M \ge 1$. Построим меру $\mu$ на $f(E)$, удовлетворяющую условию $\mu(I) \le C|I|^d$ для некоторого $d < 1$ и некоторой постоянной $C > 0$. По принципу распределения масс получаем, что $\dim_H(f(E)) \ge d$. Так как $d$ произвольно, то $\dim_H(f(E)) = 1$. Отметим, что множество $E$ имеет структуру дерева, где каждый родительский интервал имеет двух детей и тоже самое верно для $f(E)$.

Обозначим $I_{n,j} = f(E_{n,j})$ и определим меру $\mu$ индуктивно :

$$\mu(I_{0,1}) = 1,$$
$$\mu(I_{n,j}) = \frac{|I_{n,j}|^d}{|I_{n,j}|^d + |I'_{n,j}|^d}\mu(I_{n-1,k}), \quad n \ge 1,$$

где $I_{n-1,k}$ – родитель интервала $I_{n,j}$, а $I'_{n,j}$ – другой интервал имеющий того же родителя, что и $I_{n,j}$. Теперь для интервала $I = I_{n,j_n}$ посчитаем $\mu(I)/|I|^d$. Существует единственная последовательность интервалов $I = I_{n,j_n} \subset I_{n-1,j_{n-1}} \subset \ldots \subset I_{2,j_2} \subset I_{1,j_1} \subset I_0 = f([0,1])$, где упрощая обозначения мы обозначаем интервал $I_{k,j_k}$ через $I_k$. Обозначая $G_n = I_{n-1} \setminus (I_n \cup I'_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$ из неравенства Ву получаем

$$\frac{c_i^q}{1+M^2} \le \frac{|G_i|}{|I_{i-1}|} \le 4c_i^p,$$

и поэтому по индукции имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu(I_n)}{|I_n|^d} &= \frac{1}{|I_n|^d + |I'_n|^d} \cdot \frac{|I_{n-1}|^d}{|I_{n-1}|^d + |I'_{n-1}|^d} \cdot \ldots \cdot \frac{|I_1|^d}{|I_1|^d + |I'_1|^d} \cdot |I_0| = \\
&= \frac{(|I_n| + |G_n| + |I'_n|)^d}{|I_n|^d + |I'_n|^d} \cdot \frac{(|I_{n-1}| + |G_{n-1}| + |I'_{n-1}|)^d}{|I_{n-1}|^d + |I'_{n-1}|^d} \cdot \ldots \\
&\ldots \cdot \frac{(|I_1| + |G_1| + |I'_1|)^d}{|I_1|^d + |I'_1|^d} = \left( \prod_{i=1}^{n} \frac{|I_i|^d + |I'_i|^d}{(|I_i| + |G_i| + |I'_i|)^d} \right)^{-1} = \left( \prod_{i=1}^{n} p_i \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Во втором равенстве использовали соотношение $|I_{k-1}| = |I_k| + |G_k| + |I'_k|, \forall k$.

Ниже оценим произведение в скобках используя (2.3). Идея состоит в использовании левого и правого неравенства из (2.3) при "малых" и "больших" $c_i$ соответственно. Прежде всего заметим, что $1 - 4x \geq (1-x)^5$ для $0 < x < 1/10$, и положим

$$
\begin{aligned}
S &= \left\{ i \in \mathrm{N} : c_i < \min\left( \sqrt[p]{\frac{1}{10}}, \frac{1}{3} \right) \right\}, \\
S_n &= S \cap \{ i \leq n \} \\
s_n &= \mathrm{card}\ (S_n).
\end{aligned}
$$

Из (2.1) следует, что $s_n/n \to 1$ при $n \to \infty$.

При $i \in S$ из второго неравенства в (2.3) следует следующая оценка

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{|I_i|^d + |I'_i|^d}{(|I_i| + |I'_i|)^d} \cdot \frac{(|I_i| + |I'_i|)^d}{(|I_i| + |G_i| + |I'_i|)^d} = \frac{|I_i|^d + |I'_i|^d}{(|I_i| + |I'_i|)^d} \cdot \left( 1 - \frac{|G_i|}{|I_{i-1}|} \right)^d \geq \\
&\geq \frac{|I_i|^d + |I'_i|^d}{(|I_i| + |I'_i|)^d} \cdot (1 - 4c_i^p)^d = \frac{1 + \left( \frac{|I'_i|}{|I_i|} \right)^d}{\left( 1 + \frac{|I'_i|}{|I_i|} \right)^d} \cdot (1 - 4c_i^p)^d
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Поскольку $c_i < 1/3$, $I_i$ и $I'_i$ – образы двух интервалов $E_i$ и $E'_i$ одной и той же длины, отличающихся друг от друга самое большее на $|E_i|$. Следовательно, применяя определение квазисимметричности, непосредственно получаем $\frac{1}{M}(1 + \frac{1}{M}) \leq |I'_i|/|I_i| = |f(E'_i)|/|f(E_i)| \leq M(M+1)$. При $d < 1$ наименьшее значение функции $x \mapsto \frac{1+x^d}{(1+x)^d}$ на отрезке $[(M+1)/M^2, M(M+1)]$ достигается в точке $M(M+1)$ и равно $\frac{1+(M(M+1))^d}{(1+M(M+1))^d} > 1$. Это значение будем обозначать через $C_1(M,d) > 1$. Следовательно, (3.2) окончательно дает следующую оценку

$$
p_i \geq C_1(M,d)(1 - c_i^p)^{5d}
$$

для $i \in S$. При $i \notin S$ воспользуемся первым неравенством (2.3), чтобы получить

$$p_i = \frac{|I_i|^d + |I_i'|^d}{(|I_i| + |G_i| + |I_i'|)^d} = \frac{|I_i|^d + |I_i'|^d}{|I_{i-1}|^d} = \left(\frac{|I_i|}{|I_{i-1}|}\right)^d + \left(\frac{|I_i'|}{|I_{i-1}|}\right)^d \geq$$
$$\geq \frac{2}{(1+M)^{2d}} \left(\frac{|E_i|}{|E_{i-1}|}\right)^{dq} = \frac{2}{(1+M)^{2d}} \left(\frac{(1-c_i)}{2}\right)^{dq} = \frac{1}{C_2(M,d)}(1-c_i)^{dq}, \tag{3.3}$$

где $C_2(M,d) = \frac{(1+M)^{5d}}{2}$. Комбинируя (3.1), (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} p_i &\geq \prod_{i \in S_n} C_1(1-c_i^p)^{5d} \cdot \prod_{\{i \leq n\} \setminus S_n} C_2^{-1}(1-c_i)^{dq} \\ &\geq \frac{C_1^{s_n}}{C_2^{n-s_n}} \prod_{i \in S_n} (1-c_i^p)^{5d} \cdot \prod_{i=1}^{n} (1-c_i)^{dq}\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $C_1 > 1$ и $C_2 < \infty$. Отсюда, так как $s_n/n \to 1$, вытекает, что существует постоянная $C(M,d) > 1$ такая, что

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq C^n \prod_{i \in S_n} (1-c_i^p)^{5d} \cdot C^n \prod_{i=1}^{n} (1-c_i)^{dq}. \tag{3.5}$$

Покажем, что правая часть стремится к бесконечности при $n \to \infty$. В этом случае, из (3.5) получаем, что $\prod_{i=1}^{n} p_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, из (3.1) вытекает, что существует постоянная $C$ такая, что для каждого интервала $I_n$ имеем

$$\mu(I_n) \leq C|I_n|^d.$$

Для второго члена в (3.5) имеем

$$\log\left(C^n \prod_{i=1}^{n} (1-c_i)^{dq}\right) \geq n \left(\log C + dq \log \sqrt{[n]}\prod_{i=1}^{n}(1-c_i)\right).$$

В силу (2.1), $\log \sqrt{[n]}\prod_{i=1}^{n}(1-c_i) \to 0$ и, следовательно, $C^n \prod_{i=1}^{n}(1-c_i)^{dq} \to \infty$. С другой стороны, первый член в (3.5) можно оценить следующим способом :

$$C^n \prod_{i \in S_n} (1-c_i^p)^{5d} \geq C^n \prod_{i=1}^{n} (1-\tilde{c_i}^p)^{5d}, \tag{3.6}$$

где $\tilde{c_i} = \min(c_i, \sqrt{[p]}0.1) \leq \sqrt{[p]}0.1 < 1$. Чтобы доказать, что правая часть в (3.6) стремится к бесконечности, достаточно показать, что

$$\log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1-\tilde{c_i}^p)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1-\tilde{c_i}^p) \to 0.$$

Для этого сперва заметим, что $\log(1-x) > -2x$ при $0 < x \le 0.1$. Так как $\tilde{c}_i^p \le 0.1$, то в силу (2.1) и из того факта, что $s_n/n \to 1$, имеем

$$0 > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1-\tilde{c}_i{}^p) > -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i{}^p > -2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i^p + \frac{n-s_n}{n}\cdot\frac{1}{10}\right) \longrightarrow 0.$$

Итак, получаем, что

$$C^n\prod_{i\in S_n}(1-c_i^p)^a \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, условие роста принципа распределения масс имеет место для всех интервалов $f(E_{i,j})$.

Для завершения доказательства необходимо показать, что рост имеет место для любого интервала $I \subset \mathbf{R}$ (можно предположить, что мера $\mu$ определена на всей действительной оси по формуле $\mu(I) = \mu(I \cap f(E))$). Итак, зафиксируем интервал $I \subset \mathbf{R}$. Пусть $l_i = |E_{i,j}|, \forall i,j$. Ясно, что $l_i \searrow 0$, поэтому существует $i$ такое, что $l_{i+1} \le |f^{-1}(I)| < l_i$. Отсюда следует, что существуют самое большее 2 интервала $i$-го поколения, пересекающие $f^{-1}(I)$ и, следовательно, не больше 4-х таких интервала $i+1$-го поколения. Обозначая последние четыре интервала через $E_1,\ldots,E_4$ (некоторые из них могут быть пустыми), получаем

$$\mu(I) \le \mu(f(E_1)) + \ldots + \mu(f(E_4)) \le C(|f(E_1)|^d + \ldots + |f(E_4)|^d).$$

Теперь поскольку $|E_i| \le |f^{-1}(I)|$, то $E_1 \cup \ldots \cup E_4 \subset 3f^{-1}(I)$ ($3f^{-1}(I)$ – растяжение образа $f^{-1}(I)$) и, следовательно,

$$|f(E_1)|^d + \ldots + |f(E_4)|^d \le 4|f(3f^{-1}(I))|^d.$$

Из определения квазисимметричности следует, что

$$|f(3f^{-1}(I))|^d \le (1+2M)^d|f(f^{-1}(I))|^d = C(M,d)|I|^d$$

и поэтому комбинируя последние три неравенства, получаем искомый рост :

$$\mu(I) \le C|I|^d$$

для некоторой постоянной $C$ и произвольного интервала $I$. Как было замечено, так как $d$ может быть выбран сколь угодно близким к 1, то $\dim_H(f(E)) = 1$.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Кристоферу Бишопу за его советы и поддержку, а также Саиду Закери за множество комментариев к первоначальному варианту этой статьи, что сделало изложение намного ясным и чётким.

**Abstract.** The paper shows that the middle interval Cantor sets of Hausdorff dimension 1 are minimal for quasisymmetric maps of a line. Combining this with a theorem of Wu we conclude that there exist "rigid" subsets of a line whose every quasisymmetric image has zero length and Hausdorff dim. 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal mappings, Van Nostrand, 1996.
2. C. J. Bishop, "Quasiconformal mappings which increase dimension", Ann. Acad. Sci. Fenn., vol. 24, pp. 397 – 407, 1999.
3. C. J. Bishop, J. Tyson, "Locally minimal sets for conformal dimension", Ann. Acad. Sci. Fenn., vol. 26, pp. 361 – 373, 2001.
4. S. Buckley, B. Hanson, P. MacManus, "Doubling for general sets", Math. Scand., vol. 88, pp. 229 – 245, 2001.
5. L. Kovalev, "Conformal dimension does not assume values between zero and one", Duke Math. J., vol. 134, no. 1, pp. 1 – 13, 2006.
6. P. Pansu, "Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative", Ann. Acad. Sci. Fenn., vol. 14, no. 2, pp. 177 – 212, 1989.
7. G. Pólya, G. Szegö. Problems and theorems in analysis I. Springer, 1976.
8. P. Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge University Press, 1995.
9. P. Tukia, "Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings", Math. Scand., vol. 65, pp. 152 – 160, 1989.
10. J. Tyson, Jang-Mei Wu, "Quasiconformal dimensions of self-similar fractals", Rev. Math. Iberoamericana, vol. 22, no. 1, pp. 205–258, 2006.
11. S. Staples, L. Ward, "Quasisymmetrically thick sets", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., vol. 23, pp. 151 – 168, 1998.
12. Jang-Mei Wu, "Null sets for doubling and dyadic doubling measures", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., vol. 18, pp. 77 – 91, 1993.

Поступила 22 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 2, 2006, 14-24

# О РАСХОДИМОСТИ ГРИДИ АЛГОРИТМА ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УОЛША ПО НОРМЕ $L^1$

**С. А. Епископосян**

*Ереванский государственный университет*
*E-mail : sergoep@ysu.am*

**Резюме.** В работе описаны подсистемы $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обобщённой системы Уолша, которые не являются квазигриди системами в $\overline{span\{\psi_{n_k}\}}$ по норме $L^1[0,1]$. Доказан также аналог теоремы Ф. Рисса для обобщённой системы Уолша.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

В 1932 г. Ф. Рисс доказал, что существует функция $f_0(x) \in L^1[0,2\pi]$, тригонометрический ряд Фурье которой расходится по норме $L^1[0,2\pi]$. Аналогичный результат доказан для системы Уолша (см. [1], стр. 125).

В настоящей статье мы строим функцию $f_0(x) \in L^1[0,1]$, ряд Фурье которой по обобщённой системе Уолша расходится по норме $L^1[0,1]$. Исследуется также спектр и убывание коэффициентов Фурье "плохой" функции $f_0(x)$.

Обобщённую систему Уолша порядка $a \geq 2$ обозначим через $\Psi_a = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Предположим также, что последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксирована так, что

$$\frac{M_{2s}}{M_{2s-1}} > 2, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Рассмотрим подсистему системы $\Psi_a$ :

$$\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_m(x) : M_{2s-1} \leq m \leq M_{2s}, \quad s = 1, 2, \ldots\}. \tag{2}$$

Через $\mathcal{L} = \overline{span\{\psi_{n_k}\}}$ обозначим замыкание линейной оболочки подсистемы $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^1[0,1]$.

**Теорема 1.** *Для любой последовательности $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию*

$$\beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0, \tag{3}$$

*и любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $f_0(x) \in \mathcal{L}$, $f_0(x) = 0$ вне $[0, \varepsilon]$, ряд Фурье которой по подсистеме $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ расходится по $L^1[0,1]$-норме и коэффициенты Фурье удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty, \quad c_{n_k} = \int_0^1 f_0(t)\psi_{n_k}(t)dt.$$

Настоящая работа посвящена вопросам сходимости гриди алгоритма (см. [2] - [5]) относительно обобщённой системы Уолша по норме $L^1[0,1]$.
Для функции $f \in L^1[0,1]$, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\psi_k(x),$$

где $a_k(f)$ суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\Psi_a$.

**Определение 1.** $m$-ый гриди аппроксимант функции $f$ относительно системы $\Psi_a$ определяется формулой

$$G_m(f, \Psi_a) = \sum_{k\in\Lambda} a_k(f)\psi_k,$$

где $\Lambda \subset \{1, 2, \ldots\}$, $\#\Lambda = m$ ($\#\Lambda$ – число элементов множества $\Lambda$) такое, что

$$|a_n(f)| \geq |a_k(f)|, \quad n \in \Lambda, \quad k \notin \Lambda.$$

**Определение 2.** Система $\{\psi_{n_k}\}$ называется **квазигриди** системой в $\mathcal{L}$, если для любой функции $f \in \mathcal{L}$ последовательность $\{G_m(f, \psi_{n_k})\}$ сходится к $f$ по норме $L^1[0,1]$.
Из Следствия 2.3 (см. [5]) следует, что обобщённая система Уолша $\Psi_a$ не является квазигриди системой в $L^p[0,1]$ при $1 < p < \infty$.

**Теорема 2.** *Существует функция $f(x) \in \mathcal{L}$ такая, что гриди аппроксимант $G_m(f, \Psi_a)$ относительно подсистемы $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обобщённой системы Уолша $\{\psi_n\}$ расходится по норме $L^1[0,1]$, т.е. подсистема $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не является квазигриди системой в $\mathcal{L}$.*

## §2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УОЛША

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{2\pi i/a}$.

Обобщённую систему Радемахера $\Phi_a = \{\varphi_n\}$ порядка $a$ определим следующим образом (см. [7]).

**Определение 3.** Для $x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, a-1$, положим $\varphi_0(x) = \omega_a^k$ и

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x), \quad n \geq 0, \quad \Phi_a = \{\varphi_n\}. \tag{4}$$

Тогда обобщённая система Уолша $\Psi_a = \{\psi_n\}$ порядка $a$ определяется так :

**Определение 4.** Для $n = \alpha_1 a^{n_1} + \ldots + \alpha_s a^{n_s}$, $n_1 > \ldots > n_s$, $s = 1, 2, \ldots$, где $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1, 2, \ldots, s$, положим $\psi_0(x) = 1$ и

$$\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_{n_1}}(x) \cdots \varphi_{n_s}^{\alpha_{n_s}}(x), \quad \Psi_a = \{\psi_n\}. \tag{5}$$

Отметим, что $\Psi_2$ является классической системой Уолша.

**Замечание.** Известно [6], что обобщённая система Уолша $\Psi_a$, $a \geq 2$, является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$. Основные свойства этой системы были получены Р. Пели, Г. Кристенсоном, Ж. Файном и другими математиками (см. [6] - [8]).

Будем рассматривать следующие интервалы ранга $n$ относительно $a$ :

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}\right), \quad k = 0, \ldots, a^n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $\varphi_n(x)$ - $n$-ая функция Радемахера порядка $a$, то из Определения 4 следует

$$\varphi_n(x) = \omega_a^k = e^{\frac{2\pi i k}{a}}, \quad x \in \Delta_k^{(n+1)} = \left[\frac{k}{a^{n+1}}, \frac{k+1}{a^{n+1}}\right). \tag{6}$$

Теперь отметим некоторые свойства обобщённой системы Уолша.

**Свойство 1.** Из (5) следует

$$\psi_{a^k+j}(x) = \varphi_k(x)\psi_j(x), \quad 0 \leq j \leq a^k - 1. \tag{7}$$

**Свойство 2.** Функция

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t), \tag{8}$$

называющаяся ядром порядка $n$ по системе $\Psi_a$, удовлетворяет следующему равенству (см. [19]) :

$$D_{a^n}(t) = \begin{cases} a^n & \text{для} \quad t \in \Delta_0^{(n)}(a) = \left[0, \frac{1}{a^n}\right); \\ 0 & \text{для} \quad t \in \left[\frac{1}{a^n}, 1\right). \end{cases} \tag{9}$$

**Свойство 3.** Если число $n$ представимо в виде $n = a^k + m$, $0 \leq m < a^k$, то из (5), (7) и (8) получаем

$$D_n(t) = D_{a^k}(t) + \varphi_k(t) D_m(t), \quad t \in [0, 1). \tag{10}$$

**Свойство 4.** Для любого натурального числа $m$ и для любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$|D_m(t)| \leq m. \tag{11}$$

## §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Обозначим через

$$L_k = \int_0^1 |D_k(t)| \, dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

постоянные Лебега обобщённой системы Уолша $\{\Psi_a\}$.

В работе [7] доказано, что постоянные Лебега удовлетворяют условию $L_k = O(\log_a k)$, где $O$ зависит от $a$.

Следующее утверждение показывает, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что последовательности $L_{n_k}$ имеет тот же порядок роста, что и $\log_a n_k$.

**Лемма 1.** *Существует последовательность натуральных чисел*

$$m_{2s} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i}, \quad m_{2s+1} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

*такая, что* $a^k \leq m_k < a^{k+1}$ *и*

$$L_{m_k} = \int_0^1 |D_{n_k}(t)| \, dt > \frac{1}{a}\left(\frac{k}{2} + 1\right) > \frac{1}{2a} \log_a m_k, \quad k \geq 1. \tag{13}$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$m_{2s} = \frac{a^{2s+2} - 1}{a^2 - 1} < \frac{a^2}{a^2 - 1} a^{2s},$$

$$m_{2s+1} = \frac{a^{2s+3} - a}{a^2 - 1} = a\frac{a^{2s+2} - 1}{a^2 - 1} < \frac{a^2}{a^2 - 1} a^{2s+1},$$

т.е.

$$m_k < \frac{a^2}{a^2-1}a^k < a^{k+1}, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{14}$$

Отсюда и из (11) имеем

$$|D_{m_k}(t)| < \frac{a^2}{a^2-1}a^k, \quad t \in [0,1), \quad k = 0,1,2,\dots \tag{15}$$

Для доказательства (13) сначала докажем, что

$$\int_{1/a^{k+2}}^{1} |D_{m_k}(t)|dt > \frac{1}{a}\left(\frac{k}{2}+1\right). \tag{16}$$

Это означает, что при $k = 2s$ мы должны показать, что

$$\int_{1/a^{2s+2}}^{1} |D_{m_{2s}}(t)|\, dt > \frac{1}{a}(s+1), \quad s = 0,1,2,\dots \tag{17}$$

Так как $m_0 = 1$ при $s = 0$, то из Определения 5 и (8) получаем

$$\int_{1/a^2}^{1} |D_1(t)|\, dt = \int_{1/a^2}^{1} |\Psi_0(t)|\, dt = 1 - \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a}.$$

Предположим теперь, что (17) имеет место при некотором $s-1$, т.е.

$$\int_{1/a^{2s}}^{1} |D_{m_{2(s-1)}}(t)|\, dt > \frac{s}{a}. \tag{18}$$

Тогда из (9) и (15) вытекает

$$D_{a^{2s}}(t) = a^{2s}, \quad t \in I_{2s,0}, \tag{19}$$

$$|D_{m_{2(s-1)}}(t)| < \frac{a^2}{a^2-1}a^{2(s-1)} = \frac{a^{2s}}{a^2-1}, \quad t \in [0,1). \tag{20}$$

Кроме того, из (12) следует, что

$$m_{2s} = a^{2s} + m_{2(s-1)} \tag{21}$$

и, следовательно, из (10), (18) и (19), при $t \in \Delta_0^{(2s)}(a) = \left[0, \frac{1}{a^{2s}}\right)$, имеем

$$|D_{m_{2s}}(t)| = |D_{a^{2s}}(t) + \varphi_{2s}(t)D_{m_{2(s-1)}}(t)| \geq |D_{a^{2s}}(t)| - |D_{m_{2(s-1)}}(t)| > \frac{a^2-2}{a^2-1}a^{2s}.$$

Отсюда, используя вложение $\left(\frac{1}{a^{2s+2}}, \frac{1}{a^{2s}}\right) \subset \Delta_0^{(2s)}(a)$, приходим к неравенству

$$\int_{1/a^{2s+2}}^{1/a^{2s}} |D_{m_{2s}}(t)|\, dt > \frac{a^2-2}{a^2-1}a^{2s}\left(\frac{1}{a^{2s}} - \frac{1}{a^{2s+2}}\right) = \frac{a^2-2}{a^2-1}\frac{a^2-1}{a^{2s+2}} \cdot a^{2s} = \frac{a^2-2}{a^2} \geq \frac{1}{a}. \tag{22}$$

Учитывая (9), (10), (18) и (21) получаем

$$\int_{1/a^{2s}}^{1} |D_{m_{2s}}(t)|\, dt = \int_{1/a^{2s}}^{1} |D_{m_{2(s-1)}}(t)|\, dt > \frac{s}{a}.$$

Отсюда и из (22) заключаем, что

$$\int_{1/a^{2s+2}}^{1} |D_{m_{2s}}(t)|\, dt = \int_{1/a^{2s+2}}^{1/a^{2s}} |D_{m_{2s}}(t)| dt +$$

$$+ \int_{1/a^{2s}}^{1} |D_{m_{2s}}(t)| dt > \frac{1}{a} + \frac{s}{a} > \frac{1}{a}(s+1), \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Аналогичными рассуждениями доказывается неравенство (16) в случае $k = 2s+1$. Таким образом, остаётся отметить, что

$$L_{m_k} = \int_0^1 |D_{m_k}(t)|\, dt > \int_{1/a^{k+2}}^{1} |D_{m_k}(t)|\, dt > \frac{1}{a}\left(\frac{k}{2}+1\right) >$$

$$> \frac{1}{2a}(k+1) > \frac{1}{2a}\log_a m_k$$

поскольку из $a^k \le m_k < a^{k+1}$ вытекает $\log_a m_k < k+1$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Пусть последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ фиксирована и удовлетворяет условию (3). Тогда для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$ и $B > 10$ существует полином по подсистеме $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вида*

$$P(x) = \sum_{N \le n_k \le M} c_{n_k} \psi_{n_k}(x)$$

*обладающий следующими свойствами :*

1) $$P(x) = 0, \quad x \notin [0, \varepsilon],$$

2) $$\|P(x)\|_1 = \int_0^1 |P(x)| dx < \varepsilon,$$

3) $$\sum_{N \le n_k \le M} |c_{n_k}| \beta_{n_k} < \varepsilon,$$

4) $$\max_{N \le m \le M} \left[ \int_0^1 \left| \sum_{N \le n_k \le m} c_{n_k} \psi_{n_k}(x) \right| dx \right] > B.$$

**Доказательство.** Выберем натуральные числа $p_0$ и $k_0$ настолько большими (см. (1) - (3)), чтобы выполнялись условия :

$$k_0 \geq \frac{4aB}{\varepsilon} + 1, \tag{24}$$

$$a^{k_0} + i \in [M_{2p_0-1}, M_{2p_0}), \quad 0 \leq i \leq a^{k_0} - 1, \tag{25}$$

$$\beta_j < \frac{1}{a^{k_0}}, \quad j \geq M_{2p_0}. \tag{26}$$

Далее, положим (см. (7) и (25))

$$P(x) = \sum_{N \leq n_k \leq M} c_{n_k} \psi_{n_k}(x) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{a^{k_0}-1} \psi_{a^{k_0}+i}(x) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \psi_{a^{k_0}}(x) \sum_{i=0}^{a^{k_0}-1} \psi_i(x) = \frac{\varepsilon}{2} \psi_{a^{k_0}}(x) D_{a^{k_0}}(x), \tag{27}$$

где $N = a^{k_0}$, $M = a^{k_0+1} - 1$ и

$$c_{n_k} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{если} \quad a^{k_0} \leq n_k \leq a^{k_0+1} - 1, \\ 0 & \text{если} \quad n_k \notin \left[a^{k_0}, a^{k_0+1}\right). \end{cases} \tag{28}$$

Тогда из (9) и (26) - (28) получим $P(x) = 0$ для $x \in \left[\frac{1}{a^{k_0}}, 1\right]$ и

$$\int_0^1 |P(x)|\, dx = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 |D_{a^{k_0}}(x)|\, dx = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{N \leq n_k \leq M} |c_{n_k}| \beta_{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} a^{k_0} \left( \max_{N \leq n_k \leq M} \beta_{n_k} \right) < \varepsilon.$$

Таким образом, условия 1) — 3) выполнены. Для проверки условия 4), выберем число $m_{k_0}$, $a^{k_0} \leq m_{k_0} < a^{k_0+1}$ из Леммы 1 так, чтобы

$$L_{m_{k_0}} = \int_0^1 |D_{m_{k_0}}(t)| dt > \frac{1}{2a} \log_a m_{k_0} > \frac{k_0}{2a}.$$

Отсюда и из соотношений (24) и (28) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{N \leq n_k \leq m_{k_0}} c_{n_k} \psi_{n_k}(x) \right| dx > \frac{\varepsilon}{2} \frac{k_0}{2a} > B.$$

Лемма 2 доказана.

## §4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Пусть целое число $a \geq 2$ фиксировано.

**Доказательство Теоремы 1.** Пусть дано $\varepsilon > 0$. Если последовательно применим Лемму 2, то можем найти последовательность непересекающихся полиномов по подсистеме $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$P_s(x) = \sum_{N_{s-1} \leq n_k < N_s} c_{n_k}^{(s)} \psi_{n_k}(x), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

которые удовлетворяют условиям

$$P_s(x) = 0, \quad x \notin \left[0, \frac{\varepsilon}{2^s}\right], \tag{30}$$

$$\int_0^1 |P_s(x)|\, dx < \frac{1}{2^s}, \tag{31}$$

$$\sum_{N_{s-1} \leq n_k < N_s} \left|c_{n_k}^{(s)}\right| \beta_{n_k} < \frac{1}{2^s}. \tag{32}$$

$$\max_{N_{s-1} \leq m < N_s} \left[\int_0^1 \left| \sum_{N_{s-1} \leq n_k \leq m} c_{n_k}^{(s)} \psi_{n_k}(x) \right| dx \right] > B. \tag{33}$$

Далее, положим

$$f_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \psi_{n_k}(x), \tag{34}$$

где $c_{n_k} = c_{n_k}^{(s)}$ при $N_{s-1} \leq n_k < N_s$, $s = 1, 2, \ldots$. Тогда учитывая соотношения (30) и (32) - (34) получаем

$$f_0(x) = 0, \quad x \notin [0, \varepsilon], \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty.$$

Из (31) и (34) имеем

$$\int_0^1 |f_0(x)|\, dx \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left[\int_0^1 |P_s(x)|\, dx\right] \leq 1.$$

Следовательно $f_0(x) \in L^1[0,1]$. Теперь отметим, что в силу условий (29) и (34) (см. Замечание) имеем

$$c_{n_k} = \int_0^1 f_0(t) \overline{\psi_{n_k}(t)} dt,$$

т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \psi_{n_k}(x)$ является рядом Фурье функции $f_0(x)$ по подсистеме обобщённой системы Уолша, который в силу (33) расходится по норме $L^1[0,1]$. Теорема 1 доказана.

**Доказательство Теоремы 2.** Учитывая соотношения (1), (2) и (7), можно найти последовательности натуральных чисел $\{k_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ и $\{p_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ такие, что выполнены следующие условия :

$$k_\nu > a\left[(\nu-1)^2+1\right], \tag{35}$$

$$\psi_{a^{k_\nu}}(x)\psi_i(x)=\psi_{a^{k_\nu}+i}(x), \quad 0\le i<a^{k_\nu}, \tag{36}$$

$$a^{k_\nu}+i\in[M_{2p_\nu-1},M_{2p_\nu}), \quad 0\le i<a^{k_\nu}, \tag{37}$$

Теперь для любого натурального числа $\nu$ полагаем

$$f_\nu(x)=\sum_{N_\nu\le n_k<N_\nu-1} c_{n_k}^{(\nu)}\psi_{n_k}(x)=\sum_{i=0}^{a^{k_\nu}-1}\left(\frac{1}{\nu^2}+2^{-(a^{k_\nu}+i)}\right)\psi_{a^{k_\nu}+i}(x)=$$

$$=\frac{1}{\nu^2}\psi_{a^{k_\nu}}(x)\sum_{i=0}^{a^{k_\nu}-1}\psi_i(x)+\sum_{i=0}^{a^{k_\nu}-1}2^{-(a^{k_\nu}+i)}\psi_{a^{k_\nu}+i}(x)=$$

$$=\frac{1}{\nu^2}\psi_{a^{k_\nu}}(x)D_{a^{k_\nu}}(x)+\frac{1}{2^{a^{k_\nu}}}\sum_{i=0}^{a^{k_\nu}-1}2^{-i}\psi_{a^{k_\nu}+i}(x), \tag{38}$$

где

$$c_{n_k}^{(\nu)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu^2}+2^{-n_k} & \text{если} \quad N_\nu\le n_k=N_\nu+i<N_{\nu+1}, \quad 0\le i<N_\nu,\\ 0 & \text{если} \quad n_k<N_\nu, \quad \nu\ge 1,\end{cases} \tag{39}$$

$$N_\nu=a^{k_\nu}, \quad N_{\nu+1}=a^{k_\nu+1}. \tag{40}$$

Положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{n_k}(f)\psi_{n_k}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{N_\nu\le n_k<N_\nu-1}c_{n_k}^{(\nu)}\psi_{n_k}(x)\right], \tag{41}$$

где

$$c_{n_k}(f)=c_{n_k}^{(\nu)} \quad \text{для} \quad N_\nu\le n_k<N_\nu-1, \quad \nu=1,2,\dots \tag{42}$$

Покажем теперь, что $f(x)\in L^1[0,1]$. Учитывая соотношения (38) – (40), получаем

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\psi_{a^{k_\nu}}(x)D_{a^{k_\nu}}(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a^{k_\nu}}}\left[\sum_{i=0}^{2^{k_\nu}-1}2^{-i}\psi_{a^{k_\nu}+i}(x)\right]=G(x)+H(x). \tag{43}$$

Далее, из Определения 5 и (9) имеем

$$\int_0^1 |G(x)|dx \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\left[\int_0^1 |D_{a^{k_\nu}}(x)|\,dx\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} < \infty,$$

откуда следует, что $G(x) \in L^1[0,1]$. Аналогично

$$\int_0^1 |H(x)|dx \le \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} < \infty,$$

т.е. $H(x) \in L^1[0,1]$. Отсюда и из (43) вытекает, что $f(x) \in L^1[0,1]$.

Теперь для любого натурального числа $\nu$ выберем числа $k$ и $j$ так, чтобы $N_\nu \le n_k < N_{\nu+1} \le n_j < N_{\nu+2}$. Тогда, учитывая (39) получаем

$$c_{n_j}(f) = c_{n_j}^{(\nu+1)} = \frac{1}{(\nu+1)^2} + 2^{-n_j} < \frac{1}{\nu^2} + 2^{-n_k} = c_{n_k}^{(\nu)} = c_{n_k}(f),$$

т.е. $c_{n_j}(f) < c_{n_k}(f)$. Аналогично, для любых натуральных чисел $n_k$, $N_\nu \le n_k < N_{\nu+1}$ и $\nu \ge 1$ имеем

$$c_{n_k+1}^{(\nu)} = \frac{1}{\nu^2} + 2^{(-n_k+1)} < \frac{1}{\nu^2} + 2^{-n_k} = c_{n_k}^{(\nu)}.$$

Таким образом, $c_{n_{k+1}}(f) < c_{n_k}(f)$. С другой стороны, если $k \to \infty$, то $n_k \to \infty$ и $\nu \to \infty$ (см. (39), (40)). Из (42) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}(f) = 0$ и, следовательно, $c_{n_k}(f) \searrow 0$. Ясно, что для любых чисел $m_\nu$, удовлетворяющих условию

$$a^{k_\nu} \le m_\nu < a^{k_\nu+1}, \tag{44}$$

с использованием формул (40) – (42) и Определения 1, получаем

$$G_{a^{k_\nu}+m_\nu}(f,\psi_{n_k}) - G_{a^{k_\nu}}(f,\psi_{n_k}) = \sum_{i=a^{k_\nu}}^{a^{k_\nu}+m_\nu-1}\left(\frac{1}{\nu^2} + 2^{-(a^{k_\nu}+i)}\right)\psi_{a^{k_\nu}+i}(x) = J_1 + J_2, \tag{45}$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\nu^2}\psi_{a^{k_\nu}}(x)\sum_{i=a^{k_\nu}}^{a^{k_\nu}+m_\nu-1}\psi_i(x),$$

$$J_2 = \frac{1}{2^{a^{k_\nu}}}\psi_{a^{k_\nu}}(x)\sum_{i=a^{k_\nu}}^{a^{k_\nu}+m_\nu-1}\frac{1}{2^i}\psi_i(x).$$

С другой стороны, из (36) имеем

$$J_1 = \frac{1}{\nu^2}\psi_{a^{k_\nu}}(x)\sum_{i=0}^{m_\nu-1}\psi_{a^{k_\nu}+i}(x) = \frac{1}{\nu^2}\psi^2_{a^{k_\nu}}(x)D_{m_\nu}(x),$$

$$|J_2| \leq \sum_{i=a^{k_\nu}}^{a^{k_\nu}+m_\nu-1} \frac{1}{2^i} \mid \psi_i(x) \mid \leq \sum_{i=a^{k_\nu}}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2^{a^{-k_\nu}+1}.$$

Отсюда и из (45) приходим к неравенству

$$\mid G_{a^{k_\nu}+m_\nu}(f, \psi_{n_k}) - G_{a^{k_\nu}}(f, \psi_{n_k}) \mid \geq \frac{1}{\nu^2} \mid D_{m_\nu}(x) \mid - 2^{a^{-k_\nu}+1}. \tag{35}$$

Взяв в качестве $m_\nu$ число из Леммы 1 (см. (12) и (13)), удовлетворяющее неравенству $a^{k_\nu} \leq m_\nu < a^{k_\nu+1}$, из (35) и (46) для $\nu \geq 2$ получаем

$$\int_0^1 \mid G_{a^{k_\nu}+m_\nu}(f, \psi_{n_k}) - G_{a^{k_\nu}}(f, \psi_{n_k}) \mid dx > \frac{1}{\nu^2} \int_0^1 |D_{m_\nu}(x)| \, dx - 2^{a^{-k_\nu}+1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2a\nu^2} \log_a m_\nu - 2^{a^{-k_\nu}+1} \geq \frac{k_\nu}{2a\nu^2} - 2^{a^{-k_\nu}+1} \geq \frac{a\left[(\nu-1)^2+1\right]}{2a\nu^2} - 2^{a^{-k_\nu}+1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} - 2^{a^{-k_\nu}+1} \geq C_1.$$

Таким образом, последовательность $\{G_n(f, \Psi_a)\}$ расходится по норме $L^1$, т.е. в $L^1[0,1]$ подсистема $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не является квазигриди системой на замыкании своей линейной оболочки. Теорема 2 доказана.

**Abstract.** The paper describes subsystems $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ of the generalized Walsh system, which in the norm of $L^1[0,1]$ are not quasi-greedy systems in $\overline{span\{\psi_{n_k}\}}$. An analog of F.Riesz theorem is proved for the generalized Walsh system.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Теория и Применения, Москва, 1987.
2. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Adv. Comput. Math., vol. 5, pp. 173 – 187, 1995.
3. V. N. Temlyakov, "The best $m$-term approximation and greedy algorithms", Advances in Comput. Math., vol. 8, pp. 249 – 265, 1998.
4. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general biorthogonal systems", J. of Approx. Theory, vol. 107, pp. 293 – 314, 2000.
5. R. Gribonval, M. Nielsen, "On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems" available at : http ://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.
6. R. Paley, "A remarkable systems of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., vol. 34, pp. 241 – 279, 1932.
7. H. E. Christenson, "A class of generalized Walsh functions", Pacific J. Math., vol. 45, pp. 17 – 31, 1955.
8. J. Fine, "The generalized Walsh-functions", Trans. AMS 69, pp. 66 – 67, 1950.

Поступила 11 октября 2005

*Известия НАН Армении. Математика*, 41, № 2, 2006, 25-42

# ВЕСОВЫЕ $L^p$-НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ШАРП-МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

**В. Г. Кротов**

*Белорусский государственный университет*

**Резюме.** Доказываются неравенства вида

$$\|\mathcal{S}_\sigma f\|_{L^q_\nu(X)} \leq c\|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p_\mu(X)}$$

для максимальных функций

$$\mathcal{S}_\eta f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - P_B f|\, d\mu,$$

где "sup" берется по всем шарам $B$, содержащим точку $x \in X$, $P_B : L^1_{\mu,loc} \longmapsto L^1_{\mu,loc}$. На меры $\mu$ и $\nu$ на метрическом пространстве $(X, d)$ налагаются некоторые условия. Даны приложения этих неравенств к обобщённым пространствам Соболева на $X$.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(X, d, \mu)$ – хаусдорфово пространство с регулярной борелевской мерой $\mu$ и квазиметрикой $d$. Последнее означает, что функция $d : X \times X \longmapsto [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x),$$

и существует постоянная $a_d \geq 1$ такая, что для любых $x, y, z \in X$ имеем

$$d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)]. \tag{1}$$

Кроме того, семейство открытых шаров $B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$ образует базу окрестностей топологии $X$.

Неотрицательная функция $\nu$, определённая на $\sigma$-алгебре борелевских множеств из $X$, называется **внешней мерой**, если она монотонна и субаддитивна, т.е.

$$G_1 \subset G_2 \implies \nu(G_1) \le \nu(G_2), \quad \nu\left(\bigcup_j G_j\right) \le \sum_j \nu(G_j).$$

Для борелевской функции $f$ и внешней меры $\nu$ на $X$, положим

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu\{|f|>\lambda\}\,d\lambda\right)^{1/p}, \quad p>0.$$

Если $\nu$ является мерой, то эта величина совпадает с

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(\int_X |f|^p\,d\nu\right)^{1/p}$$

(конечно, при $0<p<1$ это не норма). Кроме того, всюду $L^p_\nu(X)$ $(p>0)$ будет означать множество классов $\nu$-эквивалентности борелевских функций на $X$, для которых $\|f\|_{L^p_\nu(X)}<\infty$. Ниже всякую неотрицательную борелевскую меру на $X$ будем называть просто мерой.

Всюду ниже будем использовать следующее стандартное обозначение

$$f_E = \fint_E f\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu \tag{2}$$

для среднего значения функции $f \in L^1_{loc}(E)$ на измеримом множестве $E \subset X$ конечной меры, а если $\mu(E)=0$, то считаем $f_E=0$.

Предположим, что для каждого шара $B \subset X$ задано отображение $P_B : L^1_{loc}(X) \longmapsto L^1_{loc}(X)$, и определим максимальные функции

$$\mathcal{S}_{\eta,P}f(x) = \mathcal{S}_\eta f(x) = \sup_{B\ni x}\frac{1}{\eta(t)}\fint_B |f-P_Bf|\,d\mu, \tag{3}$$

изучение которых является целью нашей работы. В (3) "sup" берется по всем шарам $B=B(y,t)$, содержащим точку $x$, а $\eta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ - положительная функция.

Впервые максимальные функции подобного рода появились в работах А. Кальдерона [2] и А. Кальдерона и Р. Скоттта [3]. Систематическому изучению вариантов (3), когда $X=\mathbb{R}^n$, $\eta(t)=t^\alpha$ $(\alpha>0)$, а $P_B$ - проектор на подпространство полиномов степени $[\alpha]$ или $\max\{n\in\mathbb{Z}:n<\alpha\}$, посвящена монография [5], где рассматривались также другие максимальные функции, определения которых по форме близки к (3).

Один из основных результатов статьи является неравенство

$$\|\mathcal{S}_\sigma f\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p_\omega(X)},$$

которое справедливо, например, если мера $\omega$ со свойством удвоения и внешняя мера $\nu$ таковы, что

$$\nu(B(x,t)) \le ct^{-\delta}\omega(B(x,t)),$$

а $p > 0$, $\delta > 0$, $\sigma(t) = t^{-\frac{\delta}{p}}\eta(t)$ (см. Следствие 1). Это и более общие неравенства доказываются в §2. Они могут широко использоваться в теории пространств гладких функций.

В последние годы большое число публикаций посвящено пространствам Соболева первого порядка на метрических пространствах с мерой (см., например, [7] – [10]). В §3 мы укажем некоторые применения результатов §2 к классам Соболева $W^p_\alpha(X)$, $0 < \alpha \le 1$.

Результаты настоящей статьи были анонсированы в [22].

## §2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведём сначала ряд вспомогательных утверждений. Прежде всего нам понадобится следующая геометрическая лемма, относящаяся к пространству с квазиметрикой $(X,d)$. Эта лемма имеется в [4].

**Лемма 1.** *Существует постоянная $\rho = \rho_d \ge 1$ такая, что для любого множества $E \subset X$ и любого покрытия $\{B\}$ множества $E$ шарами существует не более чем счётное подсемейство $\{B_j\} \subset \{B\}$ со свойствами*

$$E \subset \bigcup_j \rho_d B_j \quad \text{и} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \ne j).$$

Здесь и далее $\rho B$ означает шар с тем же центром, что и $B$, радиуса в $\rho$ раз больше. В случае неограниченного $X$ в Лемме 1 следует дополнительно потребовать ограниченность радиусов шаров $\{B\}$.

Напомним определение некасательной максимальной функции

$$Nu(x) = \sup\{|u(y,t)| : d(x,y) < t\}, \quad x \in X, \quad t > 0, \tag{4}$$

и введём оператор умножения

$$J_\alpha u(x,t) = \alpha(t)u(x,t).$$

Следующая лемма является основным техническим средством этой статьи и представляет собой вариант нашей Леммы 3 из [21], доказательство которой основано на идеях работы [20]. (В работах [20] и [21] такие (и более сложные) утверждения использовались при изучении точных оценок касательного граничного поведения функций из пространств Харди–Соболева и соответствующих тент-пространств.)

**Лемма 2.** *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$, мера $\omega$ и внешняя мера $\nu$ удовлетворяют условию*

$$\varphi(t)\,\nu\left(B\left(x, At\right)\right) \le c\omega\left(B\left(x,t\right)\right), \quad x \in X, \quad t > 0, \tag{5}$$

*для некоторого $A > a_d\rho_d$, где $a_d$ – постоянная из (1), а $\rho_d$ – постоянная из Леммы 1. Тогда для любой функции $u : X \times (0, \operatorname{diam} X) \longmapsto \mathbb{R}$ и $p > 0$, справедливо неравенство*

$$\|N\left(J_\alpha u\right)\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|Nu\|_{L^p_\omega(X)}, \quad \text{где} \quad \alpha(t) = \varphi^{1/p}(t). \tag{6}$$

**Доказательство :** Для $\lambda > 0$ рассмотрим множества

$$E^\alpha(\lambda) = \{x \in X : N(J_\alpha u)(x) > \lambda\},$$

и для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$E^\alpha_k(\lambda) = \left\{x \in E^\alpha(\lambda) : 2^{-k-1} < t_\alpha(x) \le 2^{-k}\right\},$$

где

$$t_\alpha(x) = \sup\left\{t : \exists y \in X,\ d(x,y) < t,\ t^\alpha|u(y,t)| > \lambda\right\}.$$

Ясно, что множества $E^\alpha_k(\lambda)$ измеримы и

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E^\alpha_k(\lambda) = E^\alpha(\lambda), \quad E^\alpha_k(\lambda) \cap E^\alpha_i(\lambda) = \emptyset \quad (k \ne i).$$

Пусть

$$\varepsilon = 1 - \frac{a_d\rho_d}{A} > 0.$$

Положим также

$$N_0 u(x) = \sup\left\{|u(y,t)| : d(x,y) < \frac{1-\varepsilon}{a_d}t\right\},$$

$$t_0(x) = \sup\left\{t : \exists y \in X \quad d(x,y) < \frac{1-\varepsilon}{a_d}t,\ |u(y,t)| > \lambda\right\}$$

и

$$E^0(\lambda) = \{x \in X : N_0 u(x) > \lambda\},$$

$$E^0_k(\lambda) = \left\{x \in E^0(\lambda) : 2^{-k-1} < t_0(x) \le 2^{-k}\right\}.$$

Тогда

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E^0_k(\lambda) = E^0(\lambda), \quad E^0_k(\lambda) \cap E^0_i(\lambda) = \emptyset \quad (k \ne i).$$

Для оценки меры $\nu(E_k^\alpha(\lambda))$ рассмотрим произвольную точку $x \in E_k^\alpha(\lambda)$ и найдём $y_x \in X$ и $t_x \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]$, для которых

$$d(x, y_x) < t_x \quad \text{and} \quad \alpha(t_x)|u(y_x, t_x)| > \lambda. \tag{7}$$

Семейство шаров $\{B(y_x, t_x) : x \in E_k^\alpha(\lambda)\}$ образует покрытие множества $E_k^\alpha(\lambda)$. По Лемме 1, из него можно выделить такое не более чем счётное подсемейство шаров $B_j = B(y_{x_j}, t_{x_j})$, $j \geq 1$, что

$$B_j \cap B_i = \emptyset, \quad E_k^\alpha(\lambda) \subset \bigcup_j \rho_d B_j. \tag{8}$$

Введём новое семейство шаров

$$B_j^* = B\left(y_{x_j}, \frac{1-\varepsilon}{a_d} t_{x_j}\right)$$

и покажем, что имеют место включения

$$B_j^* \subset \bigcup_{i=k-k_0}^{k} E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right), \quad j \geq 1, \tag{9}$$

где $k_0 = \left[\log_2 \frac{a_d^2}{\varepsilon}\right] + 2$.

Действительно, пусть $x \in B_j^*$. Возьмём пару $(z, \tau)$ так, что $d(x, z) < \frac{1-\varepsilon}{a_d}\tau$ и $\tau > 2^{k_0-k}$. Тогда

$$(x_j, z) \leq a_d^2 d(x_j, y_{x_j}) + a_d^2 d(y_{x_j}, x) + a_d d(x, z) \leq a_d^2 t_{x_j} + a_d^2 \frac{1-\varepsilon}{a_d} t_{x_j} + a_d \frac{1-\varepsilon}{a_d}\tau \leq$$

$$\leq 2a_d^2 2^{-k} + (1-\varepsilon)\tau \leq \varepsilon 2^{k_0-k} + (1-\varepsilon)\tau < \tau$$

в силу выбора $k_0$. Итак, $d(x_j, z) < \tau$ и $\tau > 2^{-k}$. Кроме того, так как $x_j \in E_k^\alpha(\lambda)$, то

$$|u(z, \tau)| \leq \frac{\lambda}{\alpha(\tau)} \leq \frac{\lambda}{\alpha(2^{k_0-k})} \leq \frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})},$$

и следовательно,

$$x \notin \bigcup_{i<k-k_0} E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right). \tag{10}$$

Используя неравенства

$$|u(y_{x_j}, t_{x_j})| > \frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}, \quad d\left(x, y_{x_j}\right) < \frac{1-\varepsilon}{a_d} t_{x_j} \quad \text{and} \quad t_{x_j} > 2^{-k-1}$$

(см. (7)) можно доказать, что

$$x \notin \bigcup_{i>k} E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right) \quad \text{и} \quad x \in \bigcup_{i\le k} E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right).$$

Отсюда и из (10) вытекает включение (9).

Так как шары $B_j^*$ не пересекаются, то в силу (8), (9) и основного условия (5), получаем

$$\nu\left(E_k^\alpha(\lambda)\right) \le \sum_j \nu(\rho_d B_j) = \sum_j \omega(B_j^*)\frac{\nu(\rho_d B_j)}{\omega(B_j^*)} \le \frac{c}{\varphi(2^{-k})}\sum_{i=k-k_0}^{k} \omega\left(E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right)\right).$$

С учетом этого неравенства, очевидным образом следует требуемое утверждение. В самом деле, так как $\alpha^p(t) = \varphi(t)$, то

$$\|N(J_\alpha u)\|^p_{L^p_\nu(X)} = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu\left(E^\alpha(\lambda)\right) d\lambda \le$$

$$\le c\int_0^\infty \lambda^{p-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\varphi(2^{-k})}\sum_{i=k-k_0}^{k}\omega\left(E_i^0\left(\frac{\lambda}{\alpha(2^{-k})}\right)\right) d\lambda =$$

$$= c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=k-k_0}^{k}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega\left(E_i^0(\lambda)\right) d\lambda = c\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega(E^0(\lambda))\, d\lambda \le \|N_0 u\|^p_{L^p_\omega(X)}.$$

Лемма 2 доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$, мера $\omega$ и внешняя мера $\nu$ удовлетворяют условию (5) для некоторого $A > a_d\rho_d$. Пусть ещё задана функция $\eta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ и при некотором $p > 0$ имеем*

$$\sigma(t) = \eta(t)\left[\varphi(t)\right]^{-1/p}.$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$\|S_\sigma f\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|S_\eta f\|_{L^p_\omega(X)}, \quad f \in L^1_{loc}(X). \tag{11}$$

**Доказательство** : Используя некасательную максимальную функцию (4) и функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{\eta(t)} \fint_{B(x,t)} |f - P_{B(x,t)}f|\, d\mu, \tag{12}$$

можно записать

$$S_\eta f(x) = Nu(x) \quad \text{и} \quad S_\sigma f(x) = N\left(J_\alpha u\right)(x) \tag{13}$$

(см. (6)). Следовательно, достаточно применить Лемму 2.

**Следствие 1.** Пусть мера $\omega$ и внешняя мера $\nu$ удовлетворяют условию

$$\nu(B(x,At)) \le ct^{-\delta}\omega(B(x,t)), \quad x \in X, \quad t > 0,$$

при некотором $A > a_d\rho_d$ и $\delta > 0$. Далее, пусть $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – заданная функция и пусть при некотором $p > 0$ имеем

$$\sigma(t) = t^{-\frac{\delta}{p}}\eta(t).$$

Тогда справедливо неравенство (11) для любой функции $f \in L^1_{loc}(X)$.

Кроме того, верна следующая лемма, которая получается с использованием известного метода неравенств соболевского типа (см. [11]).

**Лемма 3.** *Пусть $q \ge p > 0$, $\gamma > 0$ и пусть мера $\omega$ удовлетворяют условию*

$$\omega(B(x,t)) \ge ct^{\gamma}, \quad x \in X, \quad t \in (0, \operatorname{diam} X). \tag{14}$$

*Тогда для любой функции $u : X \times (0, \operatorname{diam} X) \longmapsto \mathbb{R}$*

$$\|N\,(J_\alpha u)\,\|_{L^q_\omega(X)} \le c\|Nu\|_{L^p_\omega(X)}, \quad \text{где} \quad \alpha(t) = t^{\gamma\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{15}$$

**Доказательство.** Пусть для краткости $\theta = \gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Возьмём произвольную точку $x \in X$ и зафиксируем $\Delta > 0$, которое будет выбрано позже. Пусть пара $(y,t)$ такова, что $d(x,y) < t$. Тогда при $t < \Delta$ имеем

$$|J_\alpha u(y,t)| \le \Delta^\theta Nu(x).$$

При $t \ge \Delta$ рассуждаем так : из неравенства $|u(y,t)| \le Nu(z)$ при всех $z \in B(y,t)$ и из условия (14) вытекает, что

$$|J_\alpha u(y,t)| \le t^\theta \left(\fint_{B(y,t)} N^p u\, d\omega\right)^{1/p} \le ct^{\theta-\frac{\gamma}{p}}\|Nu\|_{L^p_\omega(X)}.$$

Таким образом,

$$N(J_\alpha u)(x) \le c\left(\Delta^\theta Nu(x) + \Delta^{\theta-\frac{\gamma}{p}}\|Nu\|_{L^p_\omega(X)}\right).$$

Осталось выбрать $\Delta > 0$ так, чтобы слагаемые в правой части совпали, т.е.

$$\Delta = \|Nu\|^{p/\gamma}_{L^p_\omega(X)}\,[Nu(x)]^{-p/\gamma}.$$

Мы получаем неравенство

$$[N\,(J_\alpha u)\,(x)]^q \le c\,[Nu(x)]^p\,\|Nu\|^{q-p}_{L^p_\omega(X)}$$

откуда следует (15). Доказательство Леммы 3 завершено.

Отметим, что применение Лемм 3 и 2 приводит к неравенству вида (11) для пар пространств $L^p_\omega$ и $L^q_\nu$.

**Теорема 2.** *Пусть $q \geq p > 0$, $\gamma \geq \delta > 0$, мера $\omega$ и внешняя мера $\nu$ удовлетворяют условиям (14). Пусть ещё задана функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ и $\eta(t) = t^{\frac{\gamma}{p}-\frac{\delta}{q}}\sigma(t)$. Если для некоторого $A > a_d\rho_d$*

$$\nu(B(x, At)) \leq ct^{\delta-\gamma}\omega(B(x,t)), \quad x \in X, \quad t > 0,$$

*то справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{S}_\sigma f\|_{L^q_\nu(X)} \leq c\|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p_\omega(X)}, \quad f \in L^1_{loc}(X). \tag{16}$$

**Доказательство.** Рассуждая как в доказательстве Теоремы 1 (см. (12), (13)) и используя факторизацию оператора умножения, получаем

$$\mathcal{S}_\sigma f(x) = N\left(J_\alpha u\right)(x) = N\left(J_{\alpha_1}J_{\alpha_2}u\right)(x),$$

где $\alpha_1(t) = t^{\delta/q}$ и $\alpha_2(t) = t^{\gamma\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$. Отсюда приходим к заключению, что $\alpha_1(t)\alpha_2(t) = \alpha(t)$. Наше утверждение получается теперь последовательным применением Лемм 2 и 3 :

$$\|\mathcal{S}_\sigma f\|_{L^q_\nu(X)} = \|N\left(J_{\alpha_1}J_{\alpha_2}u\right)\|_{L^q_\nu(X)} \leq$$

$$\leq c\|N\left(J_{\alpha_2}u\right)\|_{L^q_\omega(X)} \leq c\|Nu\|_{L^p_\omega(X)} = c\|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p_\omega(X)}.$$

Теорема 2 доказана.

**Следствие 2.** Пусть $q \geq p > 0$, $\gamma \geq \delta > 0$, мера $\mu$ и внешняя мера $\nu$ удовлетворяют условиям

$$\mu(B(x,t)) \geq ct^\gamma, \quad x \in X, \quad t \in (0, \operatorname{diam} X), \tag{17}$$

$$\nu(B(x, At)) \leq ct^{\delta-\gamma}\mu(B(x,t)), \quad x \in X, \quad t > 0, \tag{18}$$

для некоторого $A > a_d\rho_d$. Далее, пусть задана функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ и $\eta(t) = t^{\frac{\gamma}{p}-\frac{\delta}{q}}\sigma(t)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\mathcal{S}_\sigma f\|_{L^q_\nu(X)} \leq c\|\mathcal{S}_\eta f\|_{L^p_\mu(X)}, \quad f \in L^1_{loc}(X). \tag{19}$$

Заметим, что если $p > 1$, $X = [0,1]^n$ и $\nu = \mu$ – мера Лебега (тогда $\gamma = \delta = n$ и условие (18) излишне), то аналогичный результат получен В. И. Колядой [18], [19]. Точнее, В. И. Коляда рассматривал максимальные функции вида

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - f(x)|\, d\mu, \tag{20}$$

(на $\mathbb{R}^n$ с $\eta(t) = t^\alpha$ их впервые изучал А. Кальдерон [2]) и доказал неравенство

$$||\mathcal{N}_\sigma f||_{L^{q,p}_\mu(X)} \leq c||\mathcal{N}_\eta f||_{L^p_\mu(X)}, \tag{21}$$

где $L^{q,p}$ – пространство Лоренца. Это неравенство несколько сильнее неравенства (16) Теоремы 2, которое следует из (21) с $\nu = \mu$ и заменой $\mathcal{S}_\eta$ на $\mathcal{N}_\eta$. Неравенство В. И. Коляды (21) было распространено И. А. Иванишко [14] на общие пространства однородного типа.

Отметим, что все результаты этого параграфа остаются справедливыми, если максимальные функции (3) заменить на более общие

$$\mathcal{S}_{\eta,P,r} f(x) = \mathcal{S}_{\eta,r} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(t)} \left( \fint_B |f - P_B f|^r \, d\mu \right)^{1/r}, \quad r > 0,$$

конечно, при предположении, что $f \in L^r_{loc}(X)$ и $P_B : L^r_{loc}(X) \longmapsto L^r_{loc}(X)$.

## §3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Начнем со случая, когда $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $d$ – евклидова метрика и $\mu$ – мера Лебега на $X = \mathbb{R}^n$. Пусть $B_0 = B(0,1)$ – единичный шар, $\mathbf{P}_k$ – множество всех алгебраических полиномов степени $k \in \mathbb{N}$ и $\{\phi_m\}_{|m| \leq k}$ – ортонормированный базис, полученный ортогонализацией Грама-Шмидта $L^2(B_0)$ из системы мономов

$$x^m = \prod_{i=1}^n x_i^{m_i}, \quad |m| = \sum_{i=1}^n m_i \leq k.$$

Далее, определим проектор $P^k : L^1(B_0) \to \mathbf{P}_k$ следующим образом :

$$P^k f = \sum_{|m| \leq k} (f, \phi_m)\phi_m, \quad (f,g) = \int_{B_0} fg \, d\mu,$$

и "пересадим" его на произвольный шар $B = B(x_0, t)$ равенством

$$P^k_B = T_B^{-1} \circ P^k \circ T_B, \quad \text{где} \quad T_B x = x_0 + tx \cdot \tag{22}$$

(см. [5], стр. 8).

В дальнейшем обозначаем через $[\alpha] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq \alpha\}$ и $(\alpha) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k < \alpha\}$.

Для любой функции $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим максимальные функции

$$f^\flat_\alpha(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{t^\alpha} \fint_B |f - P_B^{(\alpha)} f| \, d\mu,$$

$$f^\sharp_\alpha(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{t^\alpha} \fint_B |f - P_B^{[\alpha]} f| \, d\mu,$$

где "sup" берётся по всем шарам $B = B(y,t)$, содержашим точку $x$.
Функции $f^\flat_\alpha$ были введены в работе [3] при $0 < \alpha \le 1$ и в [5] при любом $\alpha > 0$. Монография [5] посвящена систематическому изучению таких максимальных функций. Интерес к ним продиктован, в частности, следующим утверждением, вытекающим из результатов А. Кальдерона [2] (см. также Теорему 6.2 в [5]) :

$$f^\flat_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff f \in W^p_k(\mathbb{R}^n), \quad p > 1 \tag{23}$$

(с эквивалентностью норм), где $W^p_k(\mathbb{R}^n)$ – обычные пространства Соболева. Отметим, что функции $f^\sharp_\alpha$ и $f^\flat_\alpha$ совпадают при нецелом $\alpha$ и, кроме того, $f^\sharp_\alpha(x) \le c f^\flat_\alpha(x)$, при $\alpha \in \mathbb{N}$ (см. Следствие 2.2 в [5]).

**Следствие 3.** Пусть $0 < p \le q$, $0 < \delta \le n$, $\alpha \ge \frac{n}{p} - \frac{\delta}{q}$ и внешняя мера $\nu$ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующему условию :

$$\nu(B(x,t)) \le ct^\delta.$$

Тогда для любого $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|f^\sharp_\beta\|_{L^q_\nu(\mathbb{R}^n)} \le c\|f^\sharp_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \beta = \alpha + \frac{\delta}{q} - \frac{n}{p}.$$

Доказательство этого неравенства непосредственно следует из Теоремы 2, применённой к максимальной функции $f^\sharp_\alpha$. Надо только ещё заметить, что если в определении $f^\sharp_\alpha$ вместо $P_B^{[\alpha]}$ взять проектор $P_B^k$ с $k \ge [\alpha]$, то получим эквивалентную (поточечно) максимальную функцию (см. Лемма 2.3 в [5]).
Рассмотрим частный случай $\beta = 0$ Следствия 3. При $k = 0$ проектор (22) имеет вид

$$P_B^0 f(x) = f_B = \fint_B f \, d\mu,$$

и максимальная функция $f^\sharp_0$ совпадает с максимальной функцией Феффермана-Стейна [6]

$$f^\sharp(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f - f_B| \, d\mu.$$

**Следствие 4.** Пусть $0 < p \le q$, $0 < \delta \le n$, $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{\delta}{q} > 0$ и пусть внешняя мера $\nu$ удовлетворяет условию (2) в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|f^\sharp\|_{L^q_\nu(\mathbb{R}^n)} \le c\|f^\sharp_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Далее укажем некоторые приложения результатов предыдущего параграфа к пространствам Соболева на общих метрических пространствах $(X, d, \mu)$ однородного типа.

Рассмотрим случай, когда

$$P_B f(x) = f_B = \fint_B f \, d\mu$$

и $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, в определении (3) максимальных функций $\mathcal{S}_\eta f$, т.е.

$$\mathcal{S}_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} t^{-\alpha} \fint_B |f - f_B| \, d\mu.$$

Кроме того, если $\eta(t) = t^\alpha$, то для максимальных операторов (20) вместо $\mathcal{N}_\eta$ также будем писать $\mathcal{N}_\alpha$.

Говорят, что внешняя мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения (краткая запись для этого $\mu \in \mathbf{D}$), если

$$\mu\left(B(x, 2t)\right) \le c\mu\left(B(x, t)\right), \quad x \in X, \quad t > 0. \tag{24}$$

Если имеет место (24), то тройка $(X, d, \mu)$ называется пространством однородного типа [4]. Легко видеть, что если $\mu \in \mathbf{D}$, то при некотором $\gamma > 0$

$$\mu\left(B(x, s)\right) \le c\left(\frac{s}{t}\right)^\gamma \mu\left(B(x, t)\right), \quad x \in X, \quad 0 < t \le s, \tag{25}$$

(можно взять $\gamma = \log_2 c$, где $c$ – постоянная из неравенства (24)). Будем писать $\mu \in \mathbf{D}_\gamma$, если выполнено условие (25). Таким образом,

$$\mathbf{D} = \bigcup_{\gamma > 0} \mathbf{D}_\gamma.$$

Укажем на связь между условиями (25) и (17). Если мера $\mu \in \mathbf{D}_\gamma$ и $\operatorname{diam} X < \infty$, то

$$\mu(B(x, t)) \ge ct^\gamma, \quad x \in X, \quad t \in (0, \operatorname{diam} X).$$

Для доказательства достаточно взять $s = 2\operatorname{diam} X$ в (25), тогда $X \subset B(x, s)$ для любого $x \in X$ и

$$\mu(B(x, t)) \ge c\left(\frac{t}{s}\right)^\gamma \mu(B(x, s) \ge c\mu X (2\operatorname{diam} X)^{-\gamma} t^\gamma = ct^\gamma.$$

Если же $\operatorname{diam} X = \infty$, то, вообще говоря, (17) не следует из (25).

До конца нашей статьи, считаем выполненным условие (25). Кроме того, будем предполагать, что $\operatorname{diam} X < \infty$ (хотя это не всегда необходимо), тогда условие (17) будет выполнено автоматически. Для упрощения записей считаем также, что $\operatorname{diam} X = 1$ и $\mu(X) = 1$. Следуя [28], для $p \geq 1$ и $0 < \alpha \leq 1$ определим "дробные" пространства Соболева

$$W_\alpha^p(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{W_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L_\mu^p(X)} + \|S_\alpha f\|_{L_\mu^p(X)} < \infty\}. \tag{26}$$

Из результатов А. Кальдерона [2] следует, что для $X = \mathbb{R}^n$ и $\alpha = 1$ классы (26) совпадают с классическими пространствами Соболева первого порядка (см. (23) при $k = 1$). Отметим, что в работах [13], [28] и [15] даются различные описания пространств $W_\alpha^p(X)$. Например, определение (26) не изменится, если в нём $\mathcal{S}_\alpha$ заменить на $\mathcal{N}_\alpha$. При этом,

$$\|f\|_{W_\alpha^p(X)} \asymp \|f\|_{L_\mu^p(X)} + \|\mathcal{N}_\alpha f\|_{L_\mu^p(X)}, \tag{27}$$

где $A(f) \asymp B(f)$ означает, что $c^{-1} \leq A(f)/B(f) \leq c$, где $c \geq 1$ – постоянная, не зависящая от $f$.

Далее, заметим, что классы $W_\alpha^p(X)$ совпадают с дробными пространствами Хайлаша-Соболева $M_\alpha^p(X)$ (см. [28]). Функция $f \in L^p(X)$, принадлежит классу $M_\alpha^p(X)$, если существует функция $g \in L^p(X)$ и множество $E \subset X$ с $\mu(E) = 0$, для которых

$$|f(x) - f(y)| \leq d^\alpha(x, y)\big[g(x) + g(y)\big], \quad x, y \in X \setminus E. \tag{28}$$

Норма в $M_\alpha^p(X)$ вводится равенством

$$\|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \left(\|f\|_{L_\mu^p(X)}^p + \inf_g \|g\|_{L_\mu^p(X)}^p\right)^{1/p},$$

где "inf" берётся по всем функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (28). Тогда (см. [28])

$$\|f\|_{W_\alpha^p(X)} \asymp \|f\|_{M_\alpha^p(X)} \tag{29}$$

(в [28] пространства $W_\alpha^p(X)$ и $M_\alpha^p(X)$ обозначались несколько иначе). Кроме того, в [15] основные результаты работы [28] распространены на более широкие шкалы пространств, которые порождаются максимальными функциями вида (20).

Теперь определим ёмкости, порождённые классами $M_\alpha^p(X)$

$$\operatorname{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|_{M_\alpha^p(X)}^p : f \geq 1 \qquad E\} \tag{30}$$

(см. [26] и [16] при $\alpha = 1$). Из (27) и (29) следует, что если в этом определении $\|f\|_{M^p(X)}^p$ заменить на $\|f\|_{W_\alpha^p(X)}$ или на $\|f\|_{L_\mu^p(X)} + \|\mathcal{N}_\alpha f\|_{L_\mu^p(X)}$, то мы получим эквивалентные функции множества.

**Лемма 4.** *Для любого $p > 1$ и $0 < \beta < \alpha \le 1$ имеем*

*1) $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ является внешней мерой,*

*2) для любого шара $B(x,t) \subset X$*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x,t)) \le ct^{-\alpha p}\mu B(x,t),$$

*3) $\mu(E) \le \mathrm{Cap}_{\beta,p}(E) \le c\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)$,*

*4) $\left[\mathrm{Cap}_{\beta,q}(E)\right]^p \le c\left[\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)\right]^q$, при $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$.*

**Доказательство :** Утверждения 1)–3) доказаны в [16] для $\alpha = 1$ и в [26] для $\alpha \in (0,1]$. Утверждение 4) легко выводится из результатов работы [14] (см. также (19) при $\nu = \mu$).

Напомним, что точка $x \in X$ называется точкой Лебега функции $f \in L^1_{loc}(X)$, если

$$f(x) = \lim_{t\to+0} ⨍_{B(x,t)} f\,d\mu. \tag{31}$$

В силу регулярности меры $\mu$, для любой функции $f \in L^1_{loc}(X)$ почти все (относительно $\mu$) точки из $X$ являются точками Лебега. Для соболевских функций это утверждение можно существенно усилить (см. [17] для $\alpha = 1$ и [26] для $0 < \alpha \le 1$). Действительно, верно следующее утверждение.

**Лемма 5.** *Для любой функции $f \in W^p_\alpha(X)$, $p > 1$ и $0 < \alpha \le 1$ существует некоторая функция $f_* \in W^p_\alpha(X)$ такая, что $\mu$-почти всюду $f(x) = f_*(x)$ и $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкость множества точек, не являющихся точками Лебега для $f_*$, равна нулю.*

По Лемме 5, (31) дает естественное определение значений функции $f \in W^p_\alpha(X)$ $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-почти всюду, а именно функцию $f_*$ из Леммы 5 обычно называют точным представителем класса эквивалентности $f \in W^p_\alpha(X)$). В частности, так мы понимаем значения $f(x)$ в определении (20) максимальной функции Кальдерона-Коляды $\mathcal{N}_\eta f$.

**Теорема 3.** *Если $1 < p \le q$, $0 < \beta < \alpha \le 1$, $\alpha < \frac{\gamma}{p}$ и $\delta = \alpha - \beta - \gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, то*

$$\left(\int_0^\infty \lambda^{q-1}\mathrm{Cap}_{\delta,q}\left(\{\mathcal{N}_\beta f > \lambda\}\right) d\lambda\right)^{1/q} \le c\|f\|_{W^p_\alpha(X)}, \quad f \in W^p_\alpha.$$

**Доказательство :** Пусть $f \in W^p_\alpha(X)$, и $x \in X$ – точка Лебега для $f$, $B = B(x,t)$ – любой шар с центром в точке $x$. Далее, пусть $t > 0$ и $B_k = B(x, 2^{-k}t)$, $k \ge 0$. Тогда (см. (31)

$$f(x) = f_B + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \left[ f_{B_{k+1}} - f_{B_k} \right] = f_B + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ f_{B_{k+1}} - f_{B_k} \right].$$

Так как в силу условия удвоения (24) имеем

$$|f_{B_{k+1}} - f_{B_k}| \le ⨍_{B_{k+1}} |f - f_{B_k}|\, d\mu \le c ⨍_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu,$$

то из предыдущего равенства получаем

$$⨍_{B(x,t)} |f - f(x)|\, d\mu \le c \sum_{k=0}^{\infty} ⨍_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu \le$$

$$\le ct^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\beta k} = ct^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} f(x).$$

Отсюда и из (24) легко вывести, что

$$t^{-\beta} ⨍_{B} |f - f(x)|\, d\mu \le c\mathcal{S}_{\beta} f(x)$$

для любого шара $B \subset X$ радиуса $t$, содержащего точку $x$. Итак, по Лемме 5 неравенство

$$\mathcal{N}_{\beta} f(x) \le c\mathcal{S}_{\beta} f(x)$$

справедливо для всех точек Лебега $x \in X$ функции $f$, за исключением множества нулевой $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкости, а по Лемме 4, за исключением множества нулевой $\mathrm{Cap}_{\delta,q}$-емкости. Следовательно,

$$\mathrm{Cap}_{\delta,q}(\{\mathcal{N}_{\beta} f > \lambda\}) \le \mathrm{Cap}_{\delta,q}(\{\mathcal{S}_{\beta} f > c^{-1}\lambda\}), \quad \lambda > 0.$$

Теперь, применяя Следствие 2 с $\nu = \mathrm{Cap}_{\delta,q}$, $\eta(t) = t^{\alpha}$, $\sigma(t) = t^{\beta}$, получаем неравенство

$$\|\mathcal{N}_{\beta} f\|_{L^q_{\nu}} \le \|\mathcal{S}_{\beta} f\|_{L^q_{\nu}} \le c\|\mathcal{S}_{\alpha} f\|_{L^p_{\mu}} \le c\|f\|_{W^p_{\alpha}(X)}.$$

Теорема 3 доказана.

**Следствие 5.** Если $p > 1$, $0 < \beta < \alpha \le 1$ и $\alpha < \frac{\gamma}{p}$, то

$$\left( \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}\left(\{\mathcal{N}_{\beta} f > \lambda\}\right) d\lambda \right)^{1/p} \le c\|f\|_{W^p_{\alpha}(X)}.$$

Заметим, что утверждения Теоремы 3 и Следствия 5 напоминают "сильное неравенство для емкости" В. Г. Мазьи (см., например, [23], стр. 301).

**Следствие 6.** Если $f \in W^p_\alpha(X)$, где $1 < p \leq q$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $\alpha < \frac{\gamma}{p}$ и $\delta = \alpha - \beta - \gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, то для $\mathrm{Cap}_{\delta,q}$-почти всех $x \in X$ имеем

$$\lim_{t\to+0} t^{-\beta}\left(f(x) - ⨍_{B(x,t)} f\,d\mu\right) = 0.$$

Заметим, что Следствие 5 является частным случаем $p = q$ Теоремы 3, а Следствие 6 следует из Теоремы 3 стандартным способом вывода сходимости почти всюду из оценок для максимальных операторов.

Приведём ещё одно следствие Теоремы 3, касающееся $\mathrm{Cap}_{\delta,q}$-свойства Лузина для функций из $W^p_\alpha(X)$. Оно вытекает непосредственно из следующего неравенства :

$$|f(x) - f(y)| \leq d^\beta(x,y)\left[\mathcal{N}_\beta f(x) + \mathcal{N}_\beta f(y)\right], \quad x, y \in X.$$

**Следствие 7.** Пусть $f \in W^p_\alpha(X)$ при $1 < p \leq q$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $\alpha < \frac{\gamma}{p}$, и $\delta = \alpha - \beta - \gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянная $C_\varepsilon > 0$ и множество $E_\varepsilon \subset X$ такие, что $\mathrm{Cap}_{\delta,q}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ для которых

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\varepsilon d^\beta(x,y), \quad x, y \in E_\varepsilon.$$

Для функций на $[0,1]$ скорость сходимости почти всюду средних Стеклова и количественные оценки $C$-свойства Лузина в терминах $L^p$-модулей непрерывности впервые изучал К. И. Осколков [25]. Для функций на $[0,1]^n$ решение подобных вопросов можно вывести из результатов В. И. Коляды [19].

Пусть $H_\beta(X)$ – обычные классы Гёльдера

$$H_\beta(X) = \left\{ f : \|f\|_{H_\beta(X)} = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x,y)} < +\infty \right\}.$$

Следствие 7 можно усилить используя продолжение Мак-Шейна [24] в класс $H_\beta(X)$ сужения функции $f \in W^p_\alpha(X)$ на множество $\{x \in X : \mathcal{N}_\beta f(x) \leq \lambda\}$ (при больших значениях $\lambda$) и схему доказательства Теоремы 5 из [7].

**Следствие 8.** Пусть $f \in W^p_\alpha(X)$ при $1 < p \le q$, $0 < \beta < \alpha \le 1$, $\alpha < \frac{\gamma}{p}$ и $\delta = \alpha - \beta - \gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in H_\beta(X)$ такая, что

$$\mathrm{Cap}_{\delta,q}\{f \ne \varphi\} < \varepsilon, \quad \|f-\varphi\|_{W^r_\beta(X)} < \varepsilon, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\delta}{\gamma}.$$

Если вместо продолжения Мак-Шейна использовать продолжение типа Уитни (следуя [8]), то можно дополнительно получить, что $\varphi \in W^p_\alpha(X)$ и $\|f-\varphi\|_{W^p_\alpha(X)} < \varepsilon$. Более подробно этот вопрос автор рассмотрит в другой работе. Заметим, что при $\alpha = 1$, $p = q$ это доказано в [8].

Для $X = \mathbb{R}^n$, результаты такого типа имеют достаточно длинную историю. Из последних работ отметим статьи Б. Боярского, П. Хайлаша, П. Стржелецкого [1], Д. Свансона [27] и Л.-И. Хедберга, Ю. Нетрусова [12]. В них, в частности, подробно изложена история предшествующих результатов в этом направлении.

**Abstract.** For metric spaces $(X, d)$ from a certain class an inequality of the form

$$\|S_\sigma f\|_{L^q_\nu(X)} \le c\|S_\eta f\|_{L^p_\mu(X)}$$

is proved for the maximal functions

$$S_\eta f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(t)} \int_B |f - P_B f|\, d\mu,$$

where "sup" is taken over all balls $B$ containing the point $x \in X$, $P_B : L^1_{\mu,loc} \longmapsto L^1_{\mu,loc}$, $\mu$ and $\nu$ are measures over $X$. Some applications of these inequalities to generalized Sobolev spaces over $X$ are given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. Bojarski, P. Hajlasz, P. Strzelecki, "Improved $C^{k,\lambda}$-approximation of higher order Sobolev functions in norm and capacity", Indiana Univ. Math. J., vol. 51, no. 3, pp. 507 – 540, 2002.
2. A. P. Calderon, "Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions", Studia Math., vol. 44, pp. 167 – 186, 1972.
3. A. P. Calderon, R. Scott, "Sobolev type inequalities for $p > 0$", Studia Math., vol. 62, pp. 75 – 92, 1978.
4. R. R. Coifman, G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certain Espaces Homogenés, Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer–Verlag, 1971.

5. R. DeVore, R. Sharpley, "Maximal functions measuring local smoothness", Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 47, pp. 1 – 115, 1984.
6. C. Fefferman, E. M. Stein, "$H^p$ spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, no. 3–4, pp. 137 – 193, 1972.
7. P. Hajlasz, "Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces", Potential Analysis, vol. 5, no. 4, pp. 403 – 415, 1996.
8. P. Hajlasz, J. Kinnunen, "Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces", Potential Analysis, Revista Math. Iberoamericana, vol. 14, no. 3, pp. 601 – 622, 1998.
9. P. Hajlasz, P. Koskela, "Sobolev met Poincaré", Memoirs of Amer. Math. Soc., vol. 145, pp. 1 – 101, 2000.
10. J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Berlin, Springer–Verlag, 2001.
11. L.–I. Hedberg, "On certain convolutions inequalities", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 36, no 2, pp. 505 – 510, 1972.
12. L.– I. Hedberg, Yu. Netrusov, "An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation", Memoirs of the Amer. Math. Soc. (to appear)
http ://math.liu.se/lahed/HedNet7.pdf
13. J. Hu, "A note on Hajlasz-Sobolev spaces on fractals", J. Math. Analysis Appl., vol. 280, no. 1, pp. 91 – 101, 2003.
14. И. А. Иванишко, "Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа", Труды Инст. Мат. НАН Беларуси, том 12, № 1. стр. 64 – 68, 2004.
15. И. А. Иванишко, "Обобщённые классы Соболева на метрических пространствах с мерой", Мат. заметки, том 77, № 6, стр. 937 – 940, 2005.
16. J. Kinnunen, O. Martio, "The Sobolev capacity on metric spaces", Ann. Acad. Sci. Fenn., vol. 21, pp. 367 – 382, 1996.
17. J. Kinnunen, V. Latvala, "Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces", Revista Math. Iberoamericana, vol. 18, no. 3, pp. 685 – 700, 2002.
18. В. И. Коляда, "Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью", Доклады АН СССР, том 293, № 3, стр. 534 – 537, 1987.
19. V. I. Kolyada, "Estimates of maximal functions measuring local smoothness", Analysis Math., vol. 25, pp. 277 – 300, 1999.
20. В. Г. Кротов, "Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением и их приложения", ТРУДЫ МИАН, том 190, стр. 117 – 138, 1989.
21. В. Г. Кротов, "Касательное граничное поведение функций многих переменных", Мат. заметки, том 68, № 2, стр. 230 – 248, 2000.
22. В. Г. Кротов, "Весовые $L^p$-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой", Доклады РАН, том 404, № 2, стр. 155 – 158, 2005.
23. В. Г. Мазья, Пространства Соболева, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1985.

24. E. J. McShane, "Extension of range of functions", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 34, pp. 837-842, 1934.
25. К. И. Осколков, "Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры", Мат. сборник, том 103, № 4, стр. 563 – 589, 1977.
26. М. А. Прохорович, "Ёмкости и точки Лебега для дробных классов Соболева на метрических пространствах с мерой", Изв. НАН Беларуси, № 1, pp. 19 – 23, 2006.
27. D. Swanson, "Pointwise inequalities and approximation in fractional Sobolev spaces", Studia Math., vol. 149, no. 2, pp. 147 – 174, 2002.
28. D. Yang, "New characterization of Hailash-Sobolev spaces on metric spaces", Science in China, Ser. 1, vol. 46, no. 5, pp. 675 – 689, 2003.

Поступила 1 октября 2005

*Известия НАН Армении. Математика*, 41, № 2, 2006, 43–56

# УСКОРЕННАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

**А. Нерсесян, А. Погосян, Р. Бархударян**

*Институт математики НАН Армении*

**Резюме.** В статье изучается ускоренная сходимость для ряда Фурье, опирающаяся на аппроксиманты Падэ для коэффициентов. Основная идея применена к разложениям по собственным функциям граничной задачи для модели дифференциального уравнения первого порядка с разрывными коэффициентами и обсуждены численные результаты.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что приближение 2-периодической функции $f \in C^{\infty}(R)$ частными суммами ряда Фурье

$$S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{i\pi n x}, \quad f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi n x} dx \tag{1}$$

очень эффективно. Однако когда аппроксимируемая функция имеет точку разрыва, эта процедура приводит к явлению Гиббса. Известны, различные решения этой проблемы (см. [2], [12, 13] и список работ в них). А. Крылов в 1906 [14] и Ланцош в 1966 [15] предложили вычитание полиномиальных представлений разрывностей функции и её производных. В работе [15] корректируемым многочленом была линейная комбинация многочленов Бернулли. В ряде работ [3, 5 – 8, 10, 11] Готтлиб и Енгоф развили этот метод для практических реализаций. Далее мы ссылаемся на этот метод как полиномиальный (или P-) метод. Иной путь, предложенный в общем виде Чини в работе [4], это приближение Фурье-Паде, которое использует аппроксиманты Паде [1]. Другие тригонометрическо–рациональные исследования проводились в работах [9], [16].

В [17, 19] и [20] аппроксиманты Паде были применены к асимптотическому разложению коэффициентов Фурье. Этот подход приводит к квазиполиномиальному приближению (QP-метод) и существенно обобщает P-метод.

В настоящей статье применяются аппроксиманты Фурье-Паде к P и QP приближениям для дополнительного ускорения сходимости и применения этого подхода к разложениям по собственным функциям модельной задачи для некоторого дифференциального уравнения (см. [21]) с негладкими коэффициентами.

## §2. ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПАДЕ (PP-) ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сперва опишем P-приближение. Положим $f \in C^q[-1,1]$ для некоторого $q \geq 0$ и обозначим

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \ k = 0, \cdots, q.$$

Согласно асимптотическому разложению коэффициентов Фурье

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^{1} f^{(q)}(x) e^{-i\pi n x} dx \tag{2}$$

функцию $f$ можно разделить на две части

$$f(x) = F(x) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x), \tag{3}$$

где $F$ - относительно гладкая функция с коэффициентами Фурье $F_n = o(n^{-q})$, $n \to \infty$, а $B_k(x)$ - 2-периодические многочлены Бернулли с коэффициентами Фурье

$$B_{k,n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Приближение функции $F$ по $S_N(F)$ приводит к Полиномиальному (P-) приближению

$$S_{q,N}(f) = S_N(F) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x), \tag{4}$$

где коэффициенты Фурье функции $F$ можно найти из (3)

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_{k,n}.$$

Для краткости приняв $S_{0,N}(f) \equiv S_N(f)$ применим приближение Фурье-Паде для дополнительного ускорения $S_N(F)$. Следуя [16], рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\theta := \{\theta_k\}_{|k|=1}^{p}$, $p \geq 1$. Обозначим

$$\Delta_n^0(\theta, F) = F_n,$$
$$\Delta_n^k(\theta, F) = \Delta_n^{k-1}(\theta, F) + \theta_{k\, sgn(n)} \Delta_{(|n|-1) sgn(n)}^{k-1}(\theta, F), \quad k \geq 1,$$

где $sgn(n) = 1$, если $n \geq 0$ и $sgn(n) = -1$, если $n < 0$.
Из (3) и (4) получаем

$$R_{q,N}(f) := f(x) - S_{q,N}(f) = F(x) - S_N(F) = R_N^+(F) + R_N^-(F),$$
$$R_N^+(F) := \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n e^{i\pi nx}, \quad R_N^-(F) := \sum_{n=-\infty}^{-N-1} F_n e^{i\pi nx}. \tag{5}$$

Легко проверить, что

$$R_N^+(F) = -\frac{\theta_1 F_N\, e^{i\pi(N+1)x}}{1+\theta_1 e^{i\pi x}} + \frac{1}{1+\theta_1 e^{i\pi x}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^1(\theta, F) e^{i\pi nx}.$$

Повторение этого преобразования $p$ раз приводит к разложению

$$R_N^+(F) = -\, e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, F)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} +$$
$$+ \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_k e^{i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^p(\theta, F) e^{i\pi nx}. \tag{6}$$

Аналогичное разложение функции $R_N^-(F)$ приводит к следующему **Полиномиально-Паде (PP-) приближению** (см. [16]) :

$$S_{p,q,N}(f) := S_N(F) - e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, F)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} -$$
$$- e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_{-k} \Delta_{-N}^{k-1}(\theta, F)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_{-s} e^{-i\pi x})} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x).$$

Естественно положить $S_{0,q,N}(f) \equiv S_{q,N}(f)$.
Существуют разные способы определения вектора $\theta$. Один из них – метод Фурье-Паде, когда вектор $\theta$ находится как решение системы

$$\Delta_n^p(\theta, F) = 0, \quad n = -N-p, \cdots, -N-1, N+1, \cdots, N+p.$$

Другой подход связан со следующей теоремой, где $||f|| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ означает $L_2$-норму.

**Теорема 1 [16].** *Пусть $f \in C^{q+p}[-1,1]$, для некоторых $q \geq 0$, $p \geq 1$, и $f^{(q+p)}$ абсолютно непрерывны на $[-1,1]$. Если*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N},\ k = 1, \cdots, p,\ \tau_k > 0,\ \tau_j \neq \tau_i,\ j \neq i;$$

то

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+\frac{1}{2}}\|f(x)-S_{p,q,N}(f)\| = |A_q(f)|c_p(q),$$

где

$$c_p(q) = \frac{1}{\pi^{q+1}}\left(\int_1^\infty |\phi_{p,q}(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

$$\phi_{p,q}(t) := \frac{(-1)^p}{t^{q+1}} -$$

$$-\frac{1}{q!}\sum_{j=1}^{p}\frac{e^{-\tau_j(t-1)}}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p}(\tau_i-\tau_j)}\sum_{k=0}^{p}\gamma_k(p)(-1)^{k+1}\sum_{m=0}^{p-k-1}(q+p-k-m-1)!\tau_j^m$$

а $\gamma_k(p)$ определяются тождеством

$$\prod_{k=1}^{p}(1+\tau_k x) \equiv \sum_{k=0}^{p}\gamma_k(p)x^k. \tag{7}$$

Можно легко показать, что при $p=0$ и $f\in C^q[-1,1]$, для некоторого $q\geq 0$, имеющей абсолютно непрерывную $q$-ую производную, имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{q+\frac{1}{2}}\|f(x)-S_{q,N}(f)\| = |A_q(f)|c_0(q), \quad c_0(q)=\frac{1}{\pi^{q+1}\sqrt{2q+1}}.$$

| $q$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_3(q)$ | 0.00095 | 0.00007 | $9\cdot10^{-6}$ | $1\cdot10^{-6}$ | $2\cdot10^{-7}$ | $4\cdot10^{-8}$ |
| $c_0(q)/c_3(q)$ | 61.3 | 185.1 | 411.6 | 771.8 | 1296.7 | 2017.4 |
| $\tau_1$ | 0.2510 | 0.6382 | 1.1230 | 1.6730 | 2.2699 | 2.9023 |
| $\tau_2$ | 1.28553 | 2.2362 | 3.2067 | 4.1868 | 5.1725 | 6.1617 |
| $\tau_3$ | 4.2225 | 5.7813 | 7.2573 | 8.6781 | 10.0589 | 11.4089 |

**Таблица 1.** Числовые значения $c_3(q)$ и $c_0(q)/c_3(q)$ при $1\leq q\leq 6$, полученные использованием числовых оптимальных значений параметров $\tau_k$, $k=1,2,3$.

В Таблице 1 представлены некоторые результаты из [16] по выбору параметров $\tau_k$, минимизирующих $L_2$-ошибку для $p=3$. Отношение $c_0(q)/c_3(q)$ описывает эффективность $L_2$-оптимального рационального приближения $S_{p,q,N}(f)$ в сравнении с $S_{q,N}(f)$ для $N>>1$.

## §3. КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНО–ПАДЕ (QPP-) ПРИБЛИЖЕНИЯ

Следуя [17 – 20], рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\eta:=\{\eta_k\}_{k=1}^m$, $m\geq 1$ и обозначим

$$\delta_n^0(\eta,f)=A_n(f), \quad \delta_n^k(\eta,f)=\delta_n^{k-1}(\eta,f)+\eta_k\delta_{n-1}^{k-1}(\eta,f), \quad 1\leq k\leq q.$$

Если $n < 0$, то положим $\delta_n^k(\eta, f) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Легко проверить, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) x^k = x^q \frac{A_{q-1}(f)\eta_1}{1+\eta_1 x} + \frac{1}{1+\eta_1 x} \sum_{k=0}^{q-1} (A_k(f) + \eta_1 A_{k-1}(f)) x^k. \qquad (8)$$

Заметим, что для $\eta_1 = 0$ сумма в левой части (8) остается неизменной. Повторение этого преобразования $m$ раз ($m \leq q-1$) приводит к формуле

$$\sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) x^k = x^q \sum_{k=1}^{m} \frac{\eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\eta_s x)} + \frac{1}{\prod_{s=1}^{m}(1+\eta_s x)} \sum_{k=0}^{q-1} \delta_k^m(\eta, f) x^k. \qquad (9)$$

Пусть теперь $f \in C^q[-1, 1]$ при некотором $q \geq 1$. Применяя преобразование (9) к первому члену (2) с $(i\pi n)^{-1}$ вместо $x$, получаем

$$f_n = P_n + Q_n, \quad n \neq 0, \qquad (10)$$

где

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f)(i\pi n)^k}{\prod_{s=1}^{k}(i\pi n + \eta_s)}$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}(i\pi n)^m}{2\prod_{k=1}^{m}(i\pi n + \eta_k)} \sum_{k=q-m}^{q-1} \frac{\delta_k^m(\eta, f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^{1} f^{(q)}(t)\, e^{-i\pi n t} dt. \qquad (11)$$

и

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1}(i\pi n)^m}{2\prod_{s=1}^{m}(i\pi n + \eta_s)} \sum_{k=0}^{q-m-1} \frac{\delta_k^m(\eta, f)}{(i\pi n)^{k+1}}.$$

Согласно (10), функцию $f$ можно разделить на две части

$$f(x) = P(x) + Q(x), \qquad (12)$$

где

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\pi n x}, \quad P_0 = f_0, \quad Q(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} Q_n e^{i\pi n x}.$$

Приближение $P$ частным рядом Фурье приводит к следующему приближению [17 – 20]

$$T_{q,m,N}(f) = S_N(P) + Q(x), \qquad (13)$$

где коэффициенты Фурье функции $P$ можно найти из (12)

$$P_n = f_n - Q_n.$$

Искомый вектор $\eta$ в (13) определим из системы

$$\delta_k^m(\eta, f) = 0, \quad k = q - m, \cdots, q - 1. \tag{14}$$

В [17] показано, что функция $Q(x)$ является квазиполиномом вида

$$Q(x) = \sum_k a_k x^{p_k} e^{i\omega_k x},$$

где $\omega_k \in \mathbb{C}$, а $\{p_k\}$ – множество неотрицательных целых чисел. Приближение (13), (14) называется **QP-методом или QP-приближением.** Важно отметить, что для $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_m = 0$, QP-приближение совпадает с P-приближением $S_{q,N}(f)$.

Для дополнительного ускорения QP-метода мы действуем, как в предыдущем параграфе. Из (13) и (12) имеем (см. (5)) :

$$R_{q,m,N}(f) := f(x) - T_{q,m,N}(f) = R_N^+(P) + R_N^-(P),$$

где

$$R_N^+(P) := \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n e^{i\pi n x}$$
$$= -e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, P)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_k e^{i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^p(\theta, P) e^{i\pi n x}.$$

Аналогичное разложение $R_N^-(P)$ сводится к следующему **Квазиполиномиально-Паде (QPP-) приближению :**

$$T_{p,q,m,N}(f) = S_N(P) - e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, P)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})}$$
$$- e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_{-k} \Delta_{-N}^{k-1}(\theta, P)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_{-s} e^{-i\pi x})} + Q(x).$$

Докажем теперь аналог Теоремы 1 для QPP-приближений.

В работе [16] доказана следующая лемма :

**Lemma 1 [16].** *Пусть последовательность $P_n$ имеет следующее асимптотическое разложение при $q \geq 0$, $p \geq 1$ :*

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{s=q}^{p+q} \frac{\alpha_s}{(i\pi n)^{s+1}} + o(n^{-p-q-1}), \quad n \to \infty,$$

*где* $\{\alpha_s\}_{s=q}^{p+q}$ *– некоторые постоянные. Если*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \quad k = 1, \cdots, p,$$

*то асимптотическое разложение*

$$\Delta_n^p(\theta, P) = \alpha_q \frac{(-1)^{n+p+1}}{2(i\pi)^{q+1} q!} \sum_{k=0}^{p} \frac{(q+p-k)!(-1)^k \gamma_k(p)}{N^k (n-k)^{q+1} |n-k|^{p-k}} + o(n^{-q-p-1}),$$

*имеет место при* $N \to \infty$, $|n| \geq N+1$, *где числа* $\gamma_k(p)$ *определяются в (7).*

Через $\mu_k(m), k = 0, \cdots, m$, обозначим коэффициенты многочлена

$$\prod_{k=1}^{m} (1 + \eta_k x) \equiv \sum_{k=0}^{m} \mu_k(m) x^k.$$

Заметим, что систему (14) можно записать в следующем виде :

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_s(m) A_{k-s+q-m-1}(f) = -A_{k+q-m-1}(f), \quad k = 1, \cdots, m. \tag{15}$$

Положим

$$U_r^m = [A_{k-s+r}(f)], \quad k, \quad s = 1, \cdots, m.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $f \in C^{q+p}[-1,1]$ *для некоторых* $q \geq 1$, $p \geq 0$, *и пусть* $f^{(q+p)}$ *абсолютно непрерывна на* $[-1,1]$. *Если* $\det U_{q-m-1}^m \neq 0$, *то с* $\eta$, *найденным из (14) и* $\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}$, $k = 1, \cdots, p$, $\tau_k > 0$, $\tau_j \neq \tau_i$, $j \neq i$, *имеем*

$$\lim_{N \to \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \| f - T_{p,q,m,N}(f) \| = \left| \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m} \right| c_p(q),$$

*где* $c_p(q)$ *определено в Теореме 1.*

**Доказательство.** Из (12), (13) и (6) имеем

$$f(x) - T_{p,q,m,N}(f) := R_{p,q,m,N}^+(P) + R_{p,q,m,N}^-(P),$$

где

$$R_{p,q,m,N}^{\pm}(P) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1 + \theta_{\pm k} e^{\pm i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_{\pm n}^p(\theta, P) e^{\pm i\pi n x}.$$

После простых вычислений из (11) получаем

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{\ell=q}^{p+q} \frac{\alpha_\ell}{(i\pi n)^{\ell+1}} + o(n^{-p-q-1}), \quad n \to \infty,$$

где

$$\alpha_\ell = A_\ell(f) + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f) \sum_{s=1}^{k} \frac{\eta_s^{k-1}(-1)^{\ell-q}\eta_s^{\ell-q}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k}(\eta_s - \eta_j)}.$$

Теперь можно применить Лемму 1 к последовательности $\{P_n\}$ учитывая представление

$$\alpha_q = A_q(f) + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f) = \delta_q^m(\eta, f),$$

которое следует из соотношения

$$\delta_q^m(\eta, f) = \delta_q^{m-1}(\eta, f) + \eta_m \delta_{q-1}^{m-1}(\eta, f) = \delta_q^{m-2}(\eta, f) + \eta_{m-1}\delta_{q-1}^{m-2}(\eta, f) +$$

$$+\eta_m \delta_{q-1}^{m-1}(\eta, f) = \delta_q^0(\eta, f) + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f) = A_q(f) + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \delta_{q-1}^{k-1}(\eta, f).$$

По правилу Крамера, из (15) получаем

$$\mu_s(m) = \frac{M_s}{\det U_{q-m-1}^m}, \quad s = 1, \cdots, m,$$

где $\{M_s\}$ – соответствующие миноры. Следовательно, имеем

$$\delta_q^m(\eta, f) = A_q(f) + \sum_{s=1}^{m} \mu_s(m) A_{q-s}(f) = A_q(f) + \frac{1}{\det U_{q-m-1}^m} \sum_{s=1}^{m} M_s A_{q-s}(f)$$

$$= (-1)^m \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}.$$

Для завершения доказательства надо, как и при доказательстве Теоремы 1, заменить $A_q(f)$ на $(-1)^m \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}$.

Отметим, что для случая $p = 0$ Теорема 2 была доказана в [20].

## §4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для любых заданных $f$, $q$ и $m$ полагаем

$$a_{q,m}(f) = \left| A_q(f) \frac{\det\,(U_{q-m-1}^m)}{\det\,(U_{q-m}^{m+1})} \right|.$$

Постоянная $a_{q,m}(f)$ описывает эффективность QPP-приближения по сравнению с PP-приближением (с теми же значениями параметра $p$), предполагая $N >> 1$ и справедливость Теорем 1 и 2. Вычисления показывают, что эта постоянная фактически описывает ускоренную сходимость для широкого класса ситуаций. Заметим, что $a_{q,m}$ не зависит от параметра $p$.

Исследуем пример

$$f(x) = \frac{\sin(5x - 0.2)}{1.1 - x}. \qquad (16)$$

На Рис. 1 представлены графики $a_{q,m}(f)$ для (16) при $q = 5, 6, 7$ и $1 \le m \le q - 1$. Для этой функции QPP-метод более точен, чем PP-метод (для одного и того же значения параметра $p$) почти в 15 раз при $q = 5; m = 3$ и в 50 раз – для $q = 7; m = 3$.

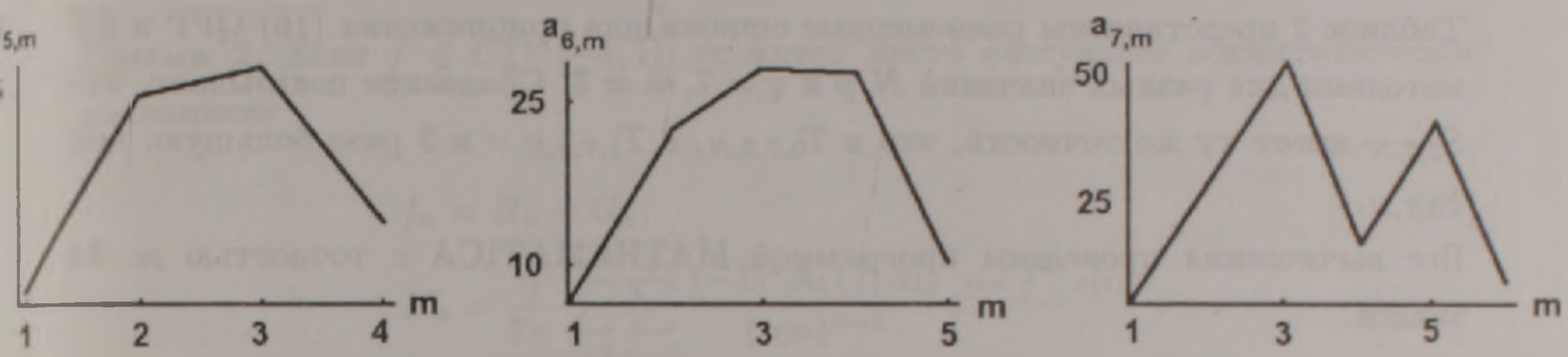


**Рис. 1.** Графики $a_{q,m}(f)$ для (16) при $q = 5, 6, 7$ и $1 \le m \le q - 1$.

Относительную эффективность QPP-метода в сравнении с PP-методом можно описать следующим отношением

$$a_{N,q,m,p}(f) = \frac{\max\limits_{|x| \le 1} |f - S_{p,q,N}(f)|}{\max\limits_{|x| \le 1} |f - T_{p,q,m,N}(f)|}.$$

| N | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_{N,7,3,3}$ | 101.17 | 64.36 | 50.91 | 48.58 | 48.57 |

**Таблица 1 :** Приблизительные значения $a_{N,7,3,3}$ для разных $N$.

В Таблице 1 показаны округлённые значения $a_{N,7,3,3}$ для (16).
Сравнение с теоретическим значением $a_{7,3} = 49.4408$ показывает, что экспериментальные и теоретические оценки достаточно близки уже при $N \ge 64$.

| | $S_{0,q,N}$ | $S_{1,q,N}$ | $S_{2,q,N}$ | $S_{3,q,N}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 128 | $1.8 \times 10^{-9}$ | $2.1 \times 10^{-10}$ | $4.5 \times 10^{-11}$ | $1.3 \times 10^{-11}$ | |
| 256 | $7.3 \times 10^{-12}$ | $8.3 \times 10^{-13}$ | $1.7 \times 10^{-13}$ | $4.7 \times 10^{-14}$ | |

| | $T_{0,q,m,N}$ | $T_{1,q,m,N}$ | $T_{2,q,m,N}$ | $T_{3,q,m,N}$ |
|---|---|---|---|---|
| 128 | $3.5 \times 10^{-11}$ | $4.1 \times 10^{-12}$ | $8.8 \times 10^{-13}$ | $2.5 \times 10^{-13}$ |
| 256 | $1.52 \times 10^{-13}$ | $1.7 \times 10^{-14}$ | $3.5 \times 10^{-15}$ | $9.7 \times 10^{-16}$ |

**Таблица 2** : Равномерные ошибки при приближении (16) методами QPP и PP для различных значений $N, p$ и $q = 7, m = 3$.

На Рис. 1 показаны также оптимальные значения $m$, когда параметр $q$ фиксирован. Итак, мы видим, что для $q = 7$ оптимальным является значение $m = 3$. В Таблице 2 представлены равномерные ошибки для приближения (16) QPP и PP методами для разных значений $N, p$ и $q = 7, m = 3$. Сравнение показывает, что $S_{2,7,N}$ имеет ту же точность, что и $T_{0,7,3,N}$, а $T_{1,7,3,N}$ – в 3 раза большую, чем $S_{3,7,N}$.

Все вычисления проведены программой MATHEMATICA с точностью до 64 знаков.

## § 5. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Подход предыдущих параграфов был обобщён в [18] для разложений по собственным функциям для одномерных граничных задач в случае, когда коэффициенты уравнений гладкие. Здесь мы рассматриваем модельное дифференциальное уравнение первого порядка с негладким коэффициентом. Некоторые предварительные результаты были получены в [21].

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$i\frac{du}{dx} = \lambda\,\varepsilon(x)u(x), \quad x \in (-1,1), \tag{17}$$

$$u(-1) = u(1), \tag{18}$$

где $\varepsilon(x) > \delta > 0$, $\varepsilon^{(q+1)}$ – кусочно-непрерывная функция в $[-1,1]$ с потенциальными точками разрыва $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{\mu}$, $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\mu-1} < \alpha_\mu = 1$. Обозначим этот класс функций через $C_\alpha^{q+1}[-1,1]$.

Легко вычислить собственные значения $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\{\phi_n\}$ задачи (17), (18)

$$\phi_n(x) = e^{-i\eta n\int_{-1}^{x}\varepsilon(t)dt}, \quad \lambda_n = -\pi\eta n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$\eta = \frac{2\pi}{\int_{-1}^{1}\varepsilon(t)dt}.$$

Система $\{\phi_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ортогональна в весовом пространстве $L_2[(-1,1),\varepsilon]$.

Рассмотрим теперь формальный ряд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \phi_n(x), \; f_n = \frac{\eta}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx \tag{19}$$

и формулу приближения :

$$W_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \phi_n(x). \tag{20}$$

**Лемма 2.** *Если $f \in C_\alpha^{q+1}[-1,1]$, то имеет место следующее асимптотическое разложение*

$$f_n = H_n + G_n, \tag{21}$$

$$H_n = \frac{\eta}{2\pi}\sum_{\ell=0}^{\mu-1}\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k A_k(f,\alpha_\ell)}{(i\eta n)^{k+1}} e^{i\eta n \int_{-1}^{\alpha_l} \varepsilon(t)dt},$$

$$G_n = \frac{\eta}{2\pi}\frac{(-1)^{q+1}}{(i\eta n)^{q+1}}\int_{-1}^{1} \varepsilon(x) g_{q+1}(x)\overline{\phi_n(x)} dx,$$

где

$$g_0(x) = f(x), \quad g_k(x) = \frac{g'_{k-1}(x)}{\varepsilon(x)},$$

$$A_k(f,-1) = g_k(1) - g_k(-1), \quad A_k(f,x) = g_k(x-0) - g_k(x+0).$$

**Доказательство.** Разделим интеграл в (19) на части точками скачков

$$f_n = \frac{\eta}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varepsilon(x) f(x)\overline{\phi_n(x)} dt = \frac{\eta}{2\pi}\sum_{\ell=0}^{\mu-1}\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{l+1}} \varepsilon(x) f(x)\overline{\phi_n(x)} dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\eta}{2\pi}\int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} \varepsilon(x) f(x)\overline{\phi_n(x)} dx = \frac{\eta}{2\pi}\int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} f(x)\varepsilon(x) e^{i\eta n \int_{-1}^{x} \varepsilon(t)dt} dx =$$

$$= \frac{g_0(x) e^{i\eta n \int_{-1}^{x} \varepsilon(t)dt}}{2i\pi n}\Bigg|_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} - \frac{1}{2i\pi n}\int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} g_1(x)\varepsilon(x) e^{i\eta n \int_{-1}^{x} \varepsilon(t)dt} dx. \tag{22}$$

Из (22) имеем

$$\frac{\eta}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varepsilon(x) f(x)\overline{\phi_n(x)} dt = \sum_{l=0}^{\mu-1} \frac{A_0(f,\alpha_l)}{2i\pi n} e^{i\eta n \int_{-1}^{\alpha_l} \varepsilon(t)dt} - \frac{1}{2i\pi n}\int_{-1}^{1} \varepsilon(x) g_1(x)\overline{\phi_n(x)} dx.$$

Интегрирование по частям $q-1$ раз приводит к (21). Доказательство завершено.

Для ускоренной сходимости (20) воспользуемся идеей Р-приближения. Согласно Лемме 2, разделим функцию $f$ на две части

$$f(x) = H(x) + G(x)$$

где $G(x)$ - гладкая по сравнению с $H(x)$, и рассмотрим следующий аналог Р-метода :

$$W_{q,N}(f) = H(x) + \sum_{n=-N}^{N} G_n \phi_n(x).$$

**Теорема 3.** *Если* $f \in C_a^{q+1}[-1,1]$, *то*

$$f - W_{q,N}(f) = o(N^{-q}), \quad N \to \infty.$$

**Доказательство** непосредственно следует из формул

$$f - W_{q,N}(f) = G - W_N(G) = \sum_{|n|>N} G_n \phi_n(x),$$

$$G_n = \frac{(-1)^q \eta}{2\pi(i\eta n)^{q+1}} \int_{-1}^{1} g_{q+1}(x)\varepsilon(x) e^{i\eta n \int_{-1}^{x} \varepsilon(t)dt} dx, \tag{23}$$

и из того факта, что интеграл в правой части (23), согласно теореме Римана–Лебега, есть $o(1)$, $n \to \infty$.

Аналоги PP и QPP приближений можно построить аналогичным образом. Через $W_{q,p,N}(f)$ и $W_{q,p,m,N}(f)$ обозначим аналоги PP и соответственно QPP приближений для (20).

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{1.1 - x}. \tag{24}$$

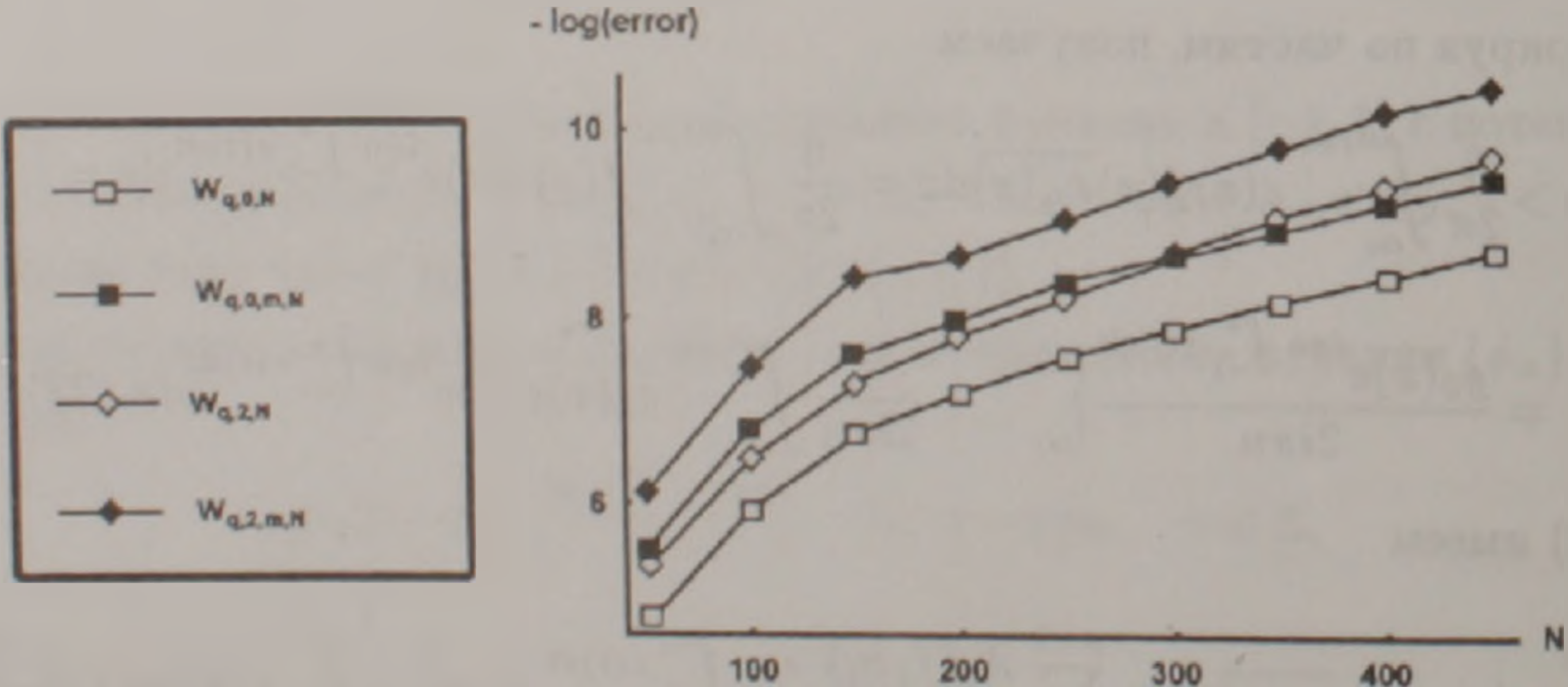


**Рис. 2.** Равномерные ошибки в логарифмической шкале для приближения (24) по $W_{q,p,N}(f)$ и $W_{q,p,m,N}(f)$ при $q = 7$, $m = 3$, $p = 0, 2$ и $\varepsilon$ как в (25).

На Рис. 2 равномерные ошибки в логарифмической шкале показаны для приближения (24) по $W_{q,p,N}(f)$ и $W_{q,p,m,N}(f)$ при $q = 7$, $m = 3$, $p = 0, 2$ и

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x < 1/3 \\ 4, & x \geq 1/3. \end{cases} \tag{25}$$

Мы видим, что $W_{7,2,N}(f)$ и $W_{7,2,3,N}(f)$ от 4 до 10 раз более точны (разница тем выше, чем больше значение параметра $N$) в сравнении с приближениями $W_{7,0,N}(f)$ и $W_{7,0,3,N}(f)$, соответственно. Приближения $W_{7,0,3,N}(f)$ и $W_{7,2,N}(f)$ показывают ту же точность (см. также замечания к Таблице 2).

**Abstract.** The paper studies convergence acceleration for Fourier series based on Pade approximants. An application to expansions by eigenfunctions of a boundary value problem for a first order model differential equation with discontinuous coefficient is considered and numerical results discussed.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. A. Baker, P. Graves-Morris, "Pad.e approximants", Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 59, 2-nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
2. G. Baszenski, F.-J. Delvos, M. Tasche, "A united approach to accelerating trigonometric expansions", Computers Math. Appl., vol. 30, no. 3 – 6, pp. 33 – 49, 1995.
3. W. Cai, D. Gottlieb and C. W. Shu, "Essentially non oscillatory spectral Fourier methods for shock wave calculations", Math. Comp., vol. 52, pp. 389 – 410, 1989.
4. E. W. Cheney, Introduction to Approximation Theory. McGraw-Hill, New York, 1966.
5. K. S. Eckhoff, "Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions", Mathematics of Computation, vol. 61, no. 204, pp. 745 – 763, 1993.
6. K. S. Eckhoff, "Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions", Mathematics of Computation, vol. 64, no. 210, pp. 671 – 690, 1995.
7. K. S. Eckhoff, "On a high order numerical method for functions with singularities", Mathematics of Computation, vol. 67, no. 223, pp. 1063 – 1087, 1998.
8. K. S. Eckhoff and C. E. Wasberg, "On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method", Thesis of Carl Erik Wasberg, Department of Mathematics. University of Bergen, Norway, 1996.
9. J. Geer, "Rational trigonometric approximations using Fourier series partial sums", Journal of Scientific Computing, vol. 10, no. 3, pp. 325 – 356, 1995.
10. D. Gottlieb, "Spectral methods for compressible flow problems", Proc. of 9-th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dynamics (Saclay, France, 1984) (Soubbaramayer and J.P.Boujot, eds.), Lecture Notes in Phys., vol.218, Springer-Verlag, Berlin and New York, pp. 48 – 61, 1985.

11. D. Gottlieb, L. Lustman, S. A. Orszag, "Spectral calculations of one-dimensional inviscid compressible flows", SIAM J. Sci. Statist. Comput., vol. 2, pp. 296 – 310, 1981.
12. D. Gottlieb and C. W. Shu, A. Solomonoff, H. Vandevon, "On the Gibbs Phenomenon I : Recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function", J. Comput. Appl. Math., vol. 43, pp. 81 – 92, 1992.
13. D. Gottlieb and C. W. Shu, "On the Gibbs Phenomenon V : Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function", Numer. Math., vol. 33, pp. 280 – 290, 1996.
14. А. Крылов, "О приближённых вычислениях", Курс лекций, прочитанных в 1906, Типолитография Биркенфелда, Ст.-Петербург, 1907.
15. C. Lanczos, Discourse on Fourier series. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966.
16. A. Nersessian and A. Poghosyan, "On a rational linear approximation of Fourier series for smooth functions", Journal of Scientific Computing 26, no. 1, pp. 111 – 125, 2006.
17. А. Нерсесян, Квазиполиномы типа Бернулли и ускоренная сходимость рядов Фурье кусочно-гладких функций", Доклады НАН РА, том 104, № 4, стр. 186 – 191, 2004.
18. A. Nersessian, "Accelerating convergence of expansions by eigenfunctions of one-dimensional boundary problems", Interuniversity Collection, Matematika, no. 4, 2005.
19. А. Нерсесян, А. Погосян, "Асимптотические оценки для метода нелинейной асселерации рядов Фурье", Доклады НАН РА, том 105, № 4, стр. 309 – 316, 2005.
20. A. Nersessian, A. Poghosyan, "Accelerating the convergence of trigonometric series", Central European Journal of Mathematics, 3, vol. 4, pp. 435 – 448, 2006.
21. А. Нерсесян, Р. Бархударян, "Представления ускоренной сходимости собственными функциями модели граничной задачи с разрывными коэффициентами", должна быть напечатана в Докладах НАН РА, том 106, № 1, стр. 5 – 12, 2006.

Поступила 21 сентября 2005

*Известия НАН Армении. Математика, 41, № 2, 2006, 57-74*

# О КВАЗИГРИДИ СИСТЕМНОСТИ И ДЕМОКРАТИЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ФАБЕРА–ШАУДЕРА

**А. А. Саргсян**

*Ереванский государственный университет*

**Резюме.** В работе получены необходимые и достаточные условия для квазигриди системности некоторых подсистем и для демократичности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера в $C_{[0,1]}$. Построена непрерывная функция, гриди алгоритм которой по системе Фабера–Шаудера расходится на счётном подмножестве отрезка [0.1].

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве $X$. Тогда для каждого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к $f$ по норме пространства $X$, т.е.

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f)\psi_n.$$

**Определение 1.** Базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется безусловным базисом в $X$, если для любого элемента $f \in X$ и для любой перестановки натуральных чисел $\rho = \{\rho(n)\}_{n=1}^{\infty}$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\rho(n)}(f)\psi_{\rho(n)}$$

сходится к $f$ по норме пространства $X$.

**Определение 2.** Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется демократичной системой в $X$, если для любых двух конечных множеств индексов $P$ и $Q$ с одинаковыми числами элементов, выполняется

$$\left\|\sum_{k\in P}\psi_k\right\|_X \le C\left\|\sum_{k\in Q}\psi_k\right\|_X,$$

где постоянная $C = C(X,\Psi)$ не зависит от $P$ и $Q$.
Перестановку натуральных чисел $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ назовём убывающей, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \ge |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f,\Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f,\Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Определим $m$-ый гриди аппроксимант элемента $f$ по базису $\Psi$, отвечающий перестановке $\sigma \in D(f,\Psi)$ следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f,\Psi,\sigma) := \sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f)\psi_{\sigma(n)}.$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как гриди алгоритм (см., например, [1]). Заметим, что гриди алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов, изучены С. В. Конягиным, В. Н. Темляковым [1], П. Войтащиком [2], Р. А. ДеВором [3], М. Г. Григоряном [4 - 6] и др. (см. [7 - 10]).

**Определение 3.** Говорят, что гриди алгоритм элемента $f \in X$ по системе $\Psi$ сходится, если существует $\sigma \in D(f,\Psi)$, для которой

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f,\Psi,\sigma) - f\|_X = 0. \tag{1.1}$$

Если система $\Psi$ является безусловным базисом, то последовательность операторов $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $f$, т.е. для неё имеет место (1.1) независимо от выбора $\sigma \in D(f,\Psi)$.

Величина

$$\varrho_m(f,\Psi) := \inf_{\alpha_1\ldots\alpha_m;k_1\ldots k_m}\left\|f - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_{k_i}\right\|_X,$$

называется лучшим $m$-членным приближением элемента $f$ по системе $\Psi$.

**Определение 4.** Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется гриди системой в $X$, или гриди базисом в $\overline{\mathrm{span}}(\Psi)$, если для любого элемента $f \in \overline{\mathrm{span}}(\Psi)$ существует перестановка $\sigma \in D(f,\Psi)$, для которой

$$\|f - G_m(f,\psi,\sigma)\|_X \le K\varrho_m(f,\Psi), \tag{1.2}$$

где постоянная $K = K(X, \Psi)$ не зависит от $f$ и от $m$. В работе [1] доказано, что если система $\Psi$ является гриди системой в $X$, то (1.2) имеет место для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$.

**Определение 5.** Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазигриди системой в $X$, или квазигриди базисом в $\overline{\mathrm{span}}(\Psi)$, если для любого элемента $f \in \overline{\mathrm{span}}(\Psi)$ и перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ выполняется (1.1).

Очевидно, что всякая гриди система является также квазигриди системой.

**Теорема (Конягин, Темляков [1]).** *Базис является гриди базисом тогда и только тогда, когда он безусловный и демократичный.*

**Теорема (Войтащик [2]).** *Базис $\Psi$ пространства $X$ является квазигриди базисом в $X$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in X$, для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ и натурального числа $m$ выполняется неравенство*

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \le B_0 \|f\|_X,$$

*где постоянная $B_0 = B_0(X, \Psi)$ не зависит от $f$ и $m$.*

В настоящей работе рассматривается вопрос квазигриди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера в $C_{[0,1]}$. Напомним, что система Фабера–Шаудера в $C_{[0,1]}$ есть система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad x \in [0, 1],$$

и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$,

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right) \\ 1, & \text{если} \quad x = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ & \text{линейна и непрерывна на } \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и } \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Число $k$ называется рангом функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$ $(n \ge 2)$ системы (1.3) обозначим через $\Delta_n = \Delta_k^{(i)}$, а через $x_n = x_k^{(i)}$, $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, обозначим точку, где $\varphi_n(x) = 1$.

В работе [10] доказано, что в пространстве $C_{[0,1]}$ не существует квазигриди базиса. Следовательно, система Фабера–Шаудера (которая является базисом в пространстве $C_{[0,1]}$, см. [11]) обладает следующим свойством : для любого положительного числа $B$ существуют функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, перестановка $\sigma_0 \in D(f, \Phi)$ и натуральное число $m_0$, для которых

$$||G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)||_C > B||f_0||_C.$$

Ниже доказывается следующее усиление этого результата.

**Теорема 1.** *Для любой точки $x_0 \in [0,1] \setminus \hat{E}_0$, где*

$$\hat{E}_0 = \left\{ \frac{i}{2^k} : \ k = 0, 1, \ldots, \ i = 0, 1, \ldots, 2^k \right\},$$

*существует функция $f_0 \in C_{[0,1]}$ такая, что для произвольного $\sigma \in D(f_0, \Phi)$ имеет место*

$$\lim_{m \to \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f_0) \varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty.$$

Для каждого $x \in [0,1]$, через $E_x$ обозначим множество, элементами которого являются числа, выражающие количества поочередных повторений 0 и 1 в двоичном разложении числа $x$. Например,

$$\text{для} \quad x^{(2)} = 0,00001110011110(1) \quad \text{имеем} \quad E_x = \{4, 3, 2, 1, \infty\}.$$

Далее, определим классы подсистем $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}$ и $\Phi_{(3)}$ системы (1.3) следующим образом : через $\Phi_{(1)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_R = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$\text{mes } \bar{\Delta}_k = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{и} \quad \bar{\Delta}_{k+1} \subset \bar{\Delta}_k,$$

через $\Phi_{(2)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $\bar{\Delta}_{k_{i+1}} \subset \bar{\Delta}_{k_i}$ (существует $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i}$, где $\bar{\Delta}'_{k_i}$ означает замыкание $\bar{\Delta}_{k_i}$). Наконец, через $\Phi_{(3)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$, для которых $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]}$, где $Q_{[0,1]}$ – совокупность рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Ясно, что $\Phi_{(1)} \subset \Phi_{(2)}$ и что системы класса $\Phi_{(2)}$ являются подсистемами систем класса $\Phi_{(1)}$, или совпадают с ними.

Ниже доказываются следующие теоремы.

**Теорема 2.** *Подсистема* $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}$ *является демократичной системой в* $C_{[0,1]}$ *тогда и только тогда, когда число элементов множества* $E_{x_0}$ $(x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k)$ *конечно.*

**Теорема 3.** *Подсистема* $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$ *является демократичной системой в* $C_{[0,1]}$, *если число элементов множества* $E_{x_0}$ $(x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i})$ *конечно.*

**Теорема 4.** *Подсистема* $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$ *является квазигриди системой в* $C_{[0,1]}$ *тогда и только тогда, когда*

$$x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_0.$$

**Теорема 5.** *Существует функция* $f(x) \in C_{[0,1]}$, *гриди алгоритм которой расходится на счётном подмножестве отрезка* $[0,1]$.

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

**2.1. Доказательство Теоремы 2, Необходимость.** Пусть

$$\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}, \quad x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k = \lim_{k\to\infty} \bar{x}_k,$$

число элементов $E_{x_0}$ счётно (т.е. число $x_0$ иррационально), и в двоичной системе $x_0$ имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \tag{2.1}$$

Тогда, из множества $E_{x_0}$ выделим такую возрастающую последовательность $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$, чтобы (2.1) была бы представима в виде

$$\begin{gathered} x_0^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k_1}\alpha_{k_1+1} \ldots \alpha_{k_1+\gamma_1}\alpha_{k_1+\gamma_1+1} \ldots \alpha_{k_2}\alpha_{k_2+1} \ldots \alpha_{k_2+\gamma_2} \ldots \\ k_1 \geq 0, \quad k_{i+1} \geq k_i + \gamma_i, \quad \gamma_{i+1} > \gamma_i, \\ \alpha_{k_i} \neq \alpha_{k_i+1} = \alpha_{k_i+2} = \ldots = \alpha_{k_i+\gamma_i} \neq \alpha_{k_i+\gamma_i+1}, \quad i = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующие две подсистемы системы $\Phi_R$ :

$$\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)} \quad (\bar{x}_{k_i+1}^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k_i}\, 1\ (0), \quad i = 1,2,\ldots)$$

и

$$\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_i+\gamma_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)} \quad (\bar{x}_{k_i+\gamma_i}^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k_i+\gamma_i-1}\, 1\ (0), \quad i = 1,2,\ldots).$$

Учитывая определения системы Фабера–Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, находим, что сумма $\sum_{i=1}^{\infty} \bar\varphi_{k_i+1}(x)$ равна нулю при $x \in [0,1] \setminus \overline{\Delta}_{k_1+1}$ и представляет собой "ломаную" с абсциссами вершин $\{\bar x_{k_i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ при $x \in \overline{\Delta}_{k_1+1}$. Каждая функция $\bar\varphi_{k_i+1}(x)$, $i = 1,2,\ldots$, принимает значения, меньше чем $\frac{1}{2^{\gamma_i - 1}}$ на $\bar\Delta_{k_j+1}$, $j = i+1, i+2, \ldots$, и поэтому для любого натурального числа $l$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar\varphi_{k_i+1}(\bar x_{k_l+1}) \le \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2^{\gamma_i-1}}, \quad \gamma_0 = 1$$

(знак равенства имеет место только при $l = 1$). Отсюда и из (2.2) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar\varphi_{k_i+1}(x) < 3, \quad \forall x \in [0,1].$$

Следовательно, учитывая $\|\varphi_n(x)\|_c = 1$, $n = 0,1,\ldots$, получаем

$$1 < \left\| \sum_{i\in P} \bar\varphi_{k_i+1}(x) \right\|_c < 3 \tag{2.3}$$

для любого $m$-элементного множества индексов $P$ $(m = 1,2,\ldots)$. Неравенства (2.3) эквивалентны демократичности подсистемы $\Phi_{R'} \in \Phi_2$.

Далее, используя определения системы (1.3) и класса $\Phi_{(1)}$, находим

$$\bar\varphi_{k_i+\gamma_i}(x_0) > \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Так как $\|\varphi_n(x)\|_c = 1$, $n = 0,1,\ldots$, то для любого $m$-элементного множества индексов $Q$ $(m = 1,2,\ldots)$ имеет место неравенство

$$\frac{m}{2} < \left\| \sum_{i\in Q} \bar\varphi_{k_i+\gamma_i}(x) \right\|_c < m. \tag{2.4}$$

Это эквивалентно демократичности подсистемы $\Phi_{R''} \in \Phi_2$. Из (2.3) и (2.4) следует, что подсистема $\Phi_{R'} \cup \Phi_{R''}$ не демократична и следовательно, система $\Phi_R \supset (\Phi_{R'} \cup \Phi_{R''})$ также не демократична в $C_{[0,1]}$. Доказательство необходимости завершено.

Из доказанного, в частности, следует недемократичность системы Фабера–Шаудера.

**Достаточность** : Пусть $x_0 \in [0,1]$ и число элементов $E_{x_0}$ конечно. Сначала рассмотрим случай, когда в $E_{x_0}$ входит $\infty$, т.е. $x_0 \in \hat E_0$. Пусть в двоичной системе $x_0$ имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}\, 0\, (1), \tag{2.5}$$

или, что то же самое,

$$x_0^{(2)} = 0, \beta_1\beta_2 \ldots = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{K-1}\ 1\ (0),$$

где $K$ – некоторое натуральное число (только числа 0 и 1 имеют единственное двоичное разложение : $0^{(2)} = 0,\ (0)$ ; $1^{(2)} = 0,\ (1)$). Для носителей функций $\{\bar{\varphi}_k\}_{k=K+1}^{\infty}$, для которых $\bar{x}_k^{(2)} = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\ 1\ (0)$, $k = K+1, K+2, \ldots$, $x_0$ является правым концом, а для носителей функций $\{\bar{\varphi}_l\}_{l=K+1}^{\infty}$, для которых $\bar{x}_l^{(2)} = 0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_{l-1}\ 1\ (0)$, $l = K+1, K+2, \ldots$, $x_0$ является левым концом. Из симметричности следует, что эти подсистемы с точки зрения наших рассуждений эквивалентны. Рассмотрим подсистему $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой, имеет место, например (2.5). Из определений системы Фабера–Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$ следует, что выражение $\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x)$ равно нулю при $x \in [0,1] \setminus \overline{\Delta}_{K+1}$ и представляет собой "ломаную" с абсциссами вершин $\{\bar{x}_k\}_{k=K+1}^{\infty}$, $x \in \overline{\Delta}_{K+1}$. При этом, для любого натурального числа $l \geq K+1$ имеем

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x_l) = \sum_{i=1}^{l-K} \frac{1}{2^{i-1}},$$

следовательно,

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x) < 3, \quad x \in [0,1].$$

Отсюда, учитывая $\|\varphi_n(x)\|_c = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, находим, что для любого $m$-элементного множества индексов $P$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеет место

$$1 < \left\| \sum_{k \in P} \bar{\varphi}_k(x) \right\|_c < K + 3,$$

что равносильно демократичности подсистемы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $E_{x_0}$ не содержит $\infty$, т.е. $x_0 \notin \hat{E}_0$. Через $T_0$ обозначим наибольший элемент $E_{x_0}$. Учитывая определения множества $E_x$, системы (1.3) и класса $\Phi_{(1)}$, находим

$$\bar{\varphi}_k(x_0) > \frac{1}{2^{T_0}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из этого следует, что для любого $m$-элементного множества индексов $P$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеет место

$$\frac{m}{2^{T_0}} < \left\| \sum_{k \in P} \bar{\varphi}_k(x) \right\|_c < m,$$

что означает демократичность системы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$. Теорема 2 доказана.

**Доказательство Теоремы 3.** аналогично доказательству достаточности Теоремы 2 с учётом того, что всякая система $\Phi_{R'} \in \Phi_{(2)}$ является подсистемой системы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$ или $\Phi_{R'} = \Phi_R \in \Phi_{(1)}$. Заметим также, что условие Теоремы 3 не является необходимым (см. доказательство необходимости Теоремы 2).

**2.2.Доказательство Теоремы 4. Необходимость.** Рассмотрим подсистемы классов $\Phi_{(1)}$ и $\Phi_{(3)}$ по отдельности. Если $x_0 \in Q_{[0,1]}$, то в двоичном разложении этого числа некая комбинация из 0 и 1 будет в периоде (при $x_0 \in \hat{E}_0$, то в периоде будет только 0 или 1).

**Лемма 1.** *Из всякой подсистемы* $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, *для которой* $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_0$, *можно выделить подсистему* $\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_{i_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ так, что

$$\bar{\varphi}_j(x_0) = \bar{\varphi}_{j+1}(x_0) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

**Доказательство.** Не ограничивая общности допустим, что двоичное разложение числа $x_0 \in Q_{[0,1]}$ имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M), \quad \alpha_m = 0;\ 1, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

где $M > 1$ – натуральное число ($M = 1$ только если $x_0 \in \hat{E}_0$ и поэтому $\bar{\varphi}_j(x_0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$). Тогда, учитывая определение (1.3) не трудно проверить, что носители функций $\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, $\left(\bar{x}_{m+p\cdot M}^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{(m-1+pM)} 1(0)\right)$ точками $\bar{x}_{k+p\cdot M}$, $k = m, m+1, \ldots$, претерпевает те же дробления, что и носитель функции $\bar{\varphi}_m(x)$ $\left(\bar{x}_m^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{(m-1)} 1(0)\right)$ точками $\bar{x}_k$, $k = m, m+1, \ldots$, при этом $x_0$ будет внутренней точкой для $\bar{\Delta}_{m+p\cdot M}$, $p = 0, 1, \ldots$, при $M \neq 1$. Следовательно, так как

$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = x_0,$$

то для любого $m = 1, 2, \ldots, M$ имеем

$$\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x_0) = \bar{\varphi}_{m+(p+1)\cdot M}(x_0) > 0, \quad p = 0, 1, \ldots$$

Так как $M$ конечно, то во всякой подсистеме $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} = x_0$, число функций одной из подсистем $\{\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x)\}_{p=0}^{\infty}$, $m = 1, 2, \ldots, M$ будет счётной. Лемма 1 доказана.

Пусть $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ такая подсистема системы (1.3), что $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_0$, а $\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_{i_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ есть её подсистема, указанная в Лемме 1. Положим

$$\bar{\varphi}_j(x_0) = y_0 > 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим последовательности $\{b_m\}_{m=1}^{\infty} = \{\frac{1}{m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{a_l\}_{l=1}^{\infty} = \{1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ldots\}$. Ясно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = -\infty \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_l = +\infty.$$

Учитывая это и $\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \Delta_n = 0$, построим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{\varphi}_{j_l}(x) \tag{2.6}$$

следующим образом : сначала возьмём первую функцию $\Phi_{R''}$ с коэффициентом $b_1$ и положим

$$\bar{S}_1(x) = A_1\bar{\varphi}_{j_1}(x) = b_1\bar{\varphi}_1(x) \quad \text{и} \quad \bar{\delta}_1 = \sup\{\delta : \bar{S}_1(x) > 0,\ |x - x_0| < \delta\}.$$

Затем положим

$$\bar{S}_2(x) = A_1\bar{\varphi}_{j_1}(x) + A_2\bar{\varphi}_{j_2}(x),$$

где $A_2 = c_1$ и $\bar{\Delta}_{j_2} \subset (x_0 - \bar{\delta}_1, x_0 + \bar{\delta}_1)$. Далее, поскольку

$$\bar{S}_2(x_0) = \frac{1}{2}y_0 > 0$$

и $\bar{S}_2(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то существует $0 < \bar{\delta}_2 < \bar{\delta}_1$ такое, что при $|x-x_0| < \bar{\delta}_2$ выполняется $\bar{S}_2(x) > 0$. Положим

$$\bar{S}_3(x) = \bar{S}_2(x) + A_3\bar{\varphi}_{j_3}(x),$$

где $A_3 = c_2$ и $\bar{\Delta}_{j_3} \subset (x_0 - \bar{\delta}_2, x_0 + \bar{\delta}_2)$.

По этому принципу выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{j_4}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{j_{m_1+1}}(x)$ с коэффициентами $c_3, \ldots, c_{m_1}$, чтобы

$$\bar{S}_{m_1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_1} A_l \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_1+1} A_l < 0.$$

Заметим, что в случае $\bar{S}_{m_1}(x_0) = 0$ в качестве $\bar{\varphi}_{j_{m_1+1}}(x)$ можно взять $\bar{\varphi}_{j_{m_1}+1}(x)$ и считать, что $\bar{\delta}_{m_1} = \bar{\delta}_{m_1-1}$. Далее, так как $\bar{S}_{m_1+1}(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то существует $0 < \bar{\delta}_{m_1+1} < \bar{\delta}_{m_1}$, что при $|x-x_0| < \bar{\delta}_{m_1+1}$ выполняется $\bar{S}_{m_1+1}(x) < 0$. Тогда, положим

$$\bar{S}_{m_1+2}(x) = \bar{S}_{m_1+1}(x) + A_{m_1+2}\bar{\varphi}_{j_{m_1+2}}(x),$$

где $A_{m_1+2} = b_2$ и $\bar{\Delta}_{j_{m_1+2}} \subset (x_0 - \bar{\delta}_{m_1+1}, x_0 + \bar{\delta}_{m_1+1})$.
По этому принципу выпишем функции $\bar{\varphi}_{j_{m_1+2}}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{j_{m_1+l_1}}(x)$ с коэффициентами $b_2, \ldots, b_{l_1}$ так, чтобы

$$\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_1+l_1-1} A_l \leq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+l_1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_1+l_1} A_l > 0.$$

Заметим, что если $\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) = 0$, то в качестве $\bar{\varphi}_{j_{m_1+l_1}}(x)$ можно взять $\bar{\varphi}_{j_{(m_1+l_1-1)}+1}(x)$ и предположить, что $\bar{\delta}_{m_1+l_1-1} = \bar{\delta}_{m_1+l_1-2}$. Потом снова выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{j_{m_1+l_1+1}}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{j_{m_2+l_1}}(x)$ с коэффициентами $c_{m_1+1}, \ldots, c_{m_2}$ $(m_2 > m_1)$, чтобы

$$\bar{S}_{m_2+l_1-1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_2+l_1-1} A_l \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_2+l_1}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m_2+l_1} A_l < 0, \quad \text{и т.д.}$$

Из схемы ясно, что $0 < \bar{\delta}_{l+1} \leq \bar{\delta}_l$, $l = 1, 2, \ldots$ и $\bar{\delta}_{m_i+l_i} < \operatorname{mes} \bar{\Delta}_{m_i+l_i}$, $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\lim_{l\to\infty} \bar{\delta}_l = 0. \tag{2.7}$$

Не трудно заметить, что построенный таким образом ряд (2.6) сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$, притом

$$\lim_{l\to\infty} \bar{S}_l(x_0) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{\varphi}_{j_l}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{\infty} A_l = 0, \tag{2.8}$$

а в точках $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ он представляет собой конечные суммы. Положим

$$f_1(x) = \lim_{l\to\infty} \bar{S}_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{\varphi}_{j_l}(x).$$

**Лемма 2.** *Функция $f_1(x)$ непрерывна на [0,1].*

**Доказательство.** Из (2.8) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N_\varepsilon$ что при $l \geq N_\varepsilon$ имеем

$$|A_l| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\bar{S}_l(x_0)| = y_0 \left| \sum_{i=1}^{l} A_i \right| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Пусть $\bar{S}_l(x_0) \neq 0$, $l = N_\varepsilon, N_\varepsilon + 1, \ldots$, а $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число. Допустим, что $0 < \bar{S}_{N_\varepsilon}(x_0) < \varepsilon$ (в случае $-\varepsilon < \bar{S}_{N_\varepsilon}(x_0) < 0$ рассуждения те же). Тогда для непрерывной функции $\bar{S}_{N_\varepsilon}(x)$ существует $0 < \bar{\delta}'_{N_\varepsilon} \leq \bar{\delta}_{N_\varepsilon}$

такое, что при $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$ выполняется $0 < \bar{S}_{N_\epsilon}(x) < \varepsilon$. Далее, из (2.7) следует, что неравенство $\bar{\delta}_{N_\epsilon+i} \geq \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$ выполняется лишь для конечного числа $\bar{\delta}_{N_\epsilon+i}$ $(i = 1, \dots, I)$, а из (2.9) следует, что в этих случаях ситуация не изменяется, т.е. $0 < \bar{S}_{N_\epsilon+i}(x) < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \bar{S}_{N_\epsilon+i}(x) < 0$, при $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$. Итак, пусть $\bar{\delta}_{N_\epsilon+I+1} < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$. Из (2.9) следует, что если $\bar{S}_{N_\epsilon+I+1}(x_0) > 0$ и $|x - x_0| < \bar{\delta}_{N_\epsilon+I+1}$, то

$$0 < \bar{S}_{N_\epsilon+I+1}(x) < \varepsilon$$

если же $\bar{S}_{N_\epsilon+I+1}(x_0) < 0$, то при $|x - x_0| < \bar{\delta}_{N_\epsilon+I+1}$ имеем

$$-\varepsilon < \bar{S}_{N_\epsilon+I+1}(x) < 0,$$

так что при $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$ будет выполнятся $|\bar{S}_{N_\epsilon+I+1}(x)| < \varepsilon$. Теперь отметим, что

$$\bar{\Delta}_{j_l} \subset (x_0 - \bar{\delta}_{l-1}, x_0 + \bar{\delta}_{l-1}).$$

Учитывая (2.9), с помощью тех же рассуждений можно заключить, что если $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$, то

$$|\bar{S}_l(x)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $l \geq N_\epsilon$. Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число $N_\epsilon$ и $\bar{\delta}'_{N_\epsilon} > 0$ такие, что

$$|\bar{S}_l(x)| < \varepsilon, \quad \forall l \geq N_\epsilon, \tag{2.10}$$

при $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$.

**Замечание 1.** Если среди $\{\bar{S}_l(x_0)\}_{l=N_\epsilon}^{\infty}$ существуют нули, то нетрудно доказать, что при $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$ имеем

$$|\bar{S}_l(x)| < 2\varepsilon, \quad \forall l \geq N_\epsilon.$$

Возвращаясь к доказательству Леммы 2 заключаем, что при $l \to \infty$ в (2.10) имеем $|f_1(x)| \leq \varepsilon$ для $|x - x_0| < \bar{\delta}'_{N_\epsilon}$, т.е. функция $f_1(x)$ непрерывна в точке $x_0$ (согласно (2.8) $f_1(x_0) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{\varphi}_{j_l}(x_0) = 0$). Ряд (2.6) является конечной суммой для произвольного $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, и, следовательно, непрерывность в точках $[0,1] \setminus \{x_0\}$ очевидна. Лемма 2 доказана.

**Замечание 2.** Учитывая схему построения функции $f_1(x)$, имеем $\|f_1(x)\|_{C_{[0,1]}} = b_1$.

Возвращаясь к доказательству необходимости Теоремы 4 заключаем, что из Леммы 2 и базисности системы (1.3) следует, что ряд (2.6) равномерно сходится к $f_1(x)$, и, следовательно,

$$f_1(x) \in \overline{\mathrm{span}}(\{\bar{\varphi}_{j_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}) \subset \overline{\mathrm{span}}(\Phi_{R''}) \subset \overline{\mathrm{span}}(\Phi_{R'}).$$

Из построения ряда (2.6) следует, что

$$G_m(f_1, \Phi_{R'}, \sigma, x_0) = \sum_{l=1}^{m} A_{\sigma(l)} \bar{\varphi}_{j_{\sigma(l)}}(x_0) = y_0 \sum_{l=1}^{m} a_l$$

при некотором $\sigma \in D(f_1, \Phi_{R'})$. Нетрудно видеть, что для любого $\sigma \in D(f_1, \Phi_{R'})$ имеем

$$\lim_{m \to \infty} G_m(f_1, \Phi_{R'}, \sigma, x_0) = +\infty.$$

Итак, подсистемы класса $\Phi_{(3)}$, для которых $x_0 \notin \hat{E}_0$, не являются квазигриди системами в $C_{[0,1]}$. Из сказанного следует, что подсистемы класса $\Phi_{(1)}$, для которых $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_0$ не являются квазигриди системами в $C_{[0,1]}$. Для доказательства необходимости остаётся рассмотреть только те подсистемы класса $\Phi_{(1)}$, для которых $x_0 \in [0,1]$ иррациональна. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$x_0 \in [0,1] \setminus (\hat{E}_0 \cup \hat{E}_1),$$

где

$$\hat{E}_1 = \left\{ \frac{3i-2}{3 \cdot 2^k}, \ \frac{3i-1}{3 \cdot 2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k \right\}.$$

Отметим, что $\hat{E}_1$ это совокупность всех тех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, двоичное разложение которых содержит 01 в периоде (см. [7]). Если $x_0 \in [0,1] \setminus (\hat{E}_0 \cup \hat{E}_1)$ – произвольное фиксированное число, то очевидно, что двоичное представление точки $x_0$ не содержит в периоде 0, 1 или 01. Поэтому, в двоичном разложении этого числа бесконечное число раз встретится одна из комбинаций 001 или 110.

Пусть $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая подсистема класса $\Phi_{(1)}$, что $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k \in [0,1] \setminus (\hat{E}_0 \cup \hat{E}_1)$. Пусть $x_0$ в двоичной системе имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots, \quad \alpha_i = 0, \ 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} = 001$ для некоторого $k \in N$. Тогда, используя (1.3) и определение класса $\Phi_{(1)}$, нетрудно доказать, что значение функции $\bar{\varphi}_k(x)$ ($\bar{x}_k = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \ 1 \ (0)$) в точке $x_0$ лежит в $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, а значение функции $\bar{\varphi}_{k+1}(x)$

$(\bar{x}_{k+1}=0,\ \alpha_1\ldots\alpha_k\ 1\ (0))$ в точке $x_0$ лежит в $\left(\frac{1}{2},1\right)$. В случае $\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}=110$ ситуация аналогична. Так как, в двоичном представлении числа $x_0$ по крайней мере одна из комбинаций 001 или 110 встречается бесконечное число раз, то существует бесконечное число функций в подсистеме $\Phi_R$, принимающие значения из $\left(\frac{1}{2},1\right)$ в точке $x_0$ (следовательно, такие функции образуют некую подсистему $\Phi'_R\in\Phi_R$), и существуют бесконечное число функций, принимающие значения из $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ в точке $x_0$ (такие функции образуют некую подсистему $\Phi''_R\in\Phi_R$). Через $B(\beta)$ обозначим совокупность последовательностей вида

$$\{B_m(\beta)\}_{m=1}^{\infty}=\{\beta_m b_m\}_{m=1}^{\infty}=\left\{\frac{\beta_m}{m}\right\}_{m=1}^{\infty},\quad \beta_m\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

через $C(\gamma)$ – совокупность последовательностей вида

$$\{C_m(\gamma)\}_{m=1}^{\infty}=\{\gamma_m c_m\}_{m=1}^{\infty}=\left\{-\frac{\gamma_m}{2m}\right\}_{m=1}^{\infty},\quad \gamma_m\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),$$

а через $H_m(\beta,\gamma)$, $m=1,2,\ldots$, – совокупность $m$-ых частичных сумм всевозможных рядов вида

$$\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2-\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{3}\beta_3+\frac{1}{4}\beta_4-\frac{1}{4}\gamma_2+\ldots,\quad \beta_i\in\left(\frac{1}{2},1\right),\quad \gamma_i\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\quad i=1,2,\ldots$$

Ясно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}B_m(\beta)=+\infty,\quad \sum_{m=1}^{\infty}C_m(\gamma)=-\infty\quad \text{и}\quad \lim_{m\to\infty}h_m=+\infty$$

для любых $\{B_m(\beta)\}_{m=1}^{\infty}\in B(\beta),\{C_m(\gamma)\}_{m=1}^{\infty}\in C(\gamma)$ и любого $h_m\in H_m(\beta,\gamma)$. Учитывая это, построим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j\bar{\varphi}_{k_j}(x)\tag{2.11}$$

следующим образом : сначала возьмем первую функцию подсистемы $\Phi'_R$ (обозначим её через $\bar{\varphi}_{k_1}(x)$, и положим $\beta_1=\bar{\varphi}_{k_1}(x_0)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$) с коэффициентом $A_1=\beta_1$). Положим

$$\bar{S}_1(x)=A_1\bar{\varphi}_{k_1}(x)\quad \text{и}\quad \bar{\delta}_1=\sup\{\delta:\bar{S}_1(x)>0,|x-x_0|<\delta\}.$$

Вслед за ним выпишем одну из функций класса $\Phi''_R$ с коэффициентом $A_2=c_1$ (обозначим её через $\bar{\varphi}_{k_2}(x)$ и положим $\gamma_1=\bar{\varphi}_{k_2}(x_0)\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$) так, что $\bar{\Delta}_{k_2}\subset\bar{\Delta}_{k_1}$. Положим

$$\bar{S}_2(x)=A_1\bar{\varphi}_{k_1}(x)+A_2\bar{\varphi}_{k_2}(x).$$

Имеем

$$\bar{S}_2(x_0) = \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma_1 > 0$$

и $\bar{S}_2(x)$ непрерывна на $[0,1]$. Поэтому, существует $0 < \bar{\delta}_2 < \bar{\delta}_1$ такое, что $\bar{S}_2(x) > 0$ при $|x - x_0| < \bar{\delta}_2$. Положим

$$\bar{S}_3(x) = \bar{S}_2(x) + A_3\bar{\varphi}_{k_3}(x),$$

где $A_3 = c_2$, $\bar{\varphi}_{k_3}(x) \in \Phi''_R$ и $\bar{\Delta}_{k_3} \subset (x_0 - \bar{\delta}_2, x_0 + \bar{\delta}_2)$.

По этому принципу выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{k_4}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{k_{m_1+1}}(x) \in \Phi''_R$ с коэффициентами $c_3, \ldots, c_{m_1}$, чтобы

$$\bar{S}_{m_1}(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+1}(x_0) < 0$$

(при $\bar{S}_{m_1}(x_0) = 0$, в качестве $\bar{\varphi}_{k_{m_1+1}}(x) \in \Phi''_R$ можно взять любую функцию подсистемы $\Phi''_R$ с номером $k_{m_1+1} > k_{m_1}$ и считать, что $\bar{\delta}_{m_1} = \bar{\delta}_{m_1-1}$). Функция $\bar{S}_{m_1+1}(x)$ непрерывна на $[0,1]$, и, следовательно, существует некоторое число $0 < \bar{\delta}_{m_1+1} < \bar{\delta}_{m_1}$ такое, что $\bar{S}_{m_1+1}(x) < 0$ при $|x - x_0| < \bar{\delta}_{m_1+1}$. Положим

$$\bar{S}_{m_1+2}(x) = \bar{S}_{m_1+1}(x) + A_{m_1+2}\bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x),$$

где $A_{m_1+2} = b_2$, $\bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x) \in \Phi'_R$ и $\bar{\Delta}_{k_{m_1+2}} \subset (x_0 - \bar{\delta}_{m_1+1}, x_0 + \bar{\delta}_{m_1+1})$.

Следуя этому принципу, находим $\bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1}}(x) \in \Phi'_R$ с коэффициентами $b_2, \ldots, b_{l_1}$ так, что

$$\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) \leq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+l_1}(x_0) > 0$$

(если $\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) = 0$, то в качестве $\bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1}}(x)$ можно взять любую функцию подсистемы $\Phi'_R$ с номером $k_{m_1+l_1} > k_{m_1+l_1-1}$ и считать $\bar{\delta}_{m_1+l_1-1} = \bar{\delta}_{m_1+l_1-2}$). Потом снова выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1+1}}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{k_{m_2+l_1}}(x) \in \Phi''_R$ с коэффициентами $c_{m_1}, \ldots, c_{m_2}$ $(m_2 > m_1)$ так, чтобы

$$\bar{S}_{m_2+l_1-1}(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_2+l_1}(x_0) < 0, \quad \text{и т.д.}$$

Ясно, что

$$0 < \bar{\delta}_{j+1} \leq \bar{\delta}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{j\to\infty} \bar{\delta}_j = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} A_j = 0. \tag{2.12}$$

Построенный таким образом ряд (2.11) сходится к каждой точке $x \in [0,1]$, притом

$$\lim_{j\to\infty} \bar{S}_j(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\bar{\varphi}_{k_j}(x_0) = 0, \tag{2.13}$$

а в точках $[0,1]\setminus\{x_0\}$ он представляет собой конечные суммы. Используя (2.12), (2.13) и рассуждения доказательства Леммы 2, получаем

$$f_2(x)=\lim_{j\to\infty}\bar{S}_j(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\bar{\varphi}_{k_j}(x)\in C_{[0,1]}.$$

Отсюда и из базисности системы (1.3) следует, что ряд (2.11) равномерно сходится к $f_2(x)$, и, следовательно,

$$f_2(x)\in\overline{\operatorname{span}}(\{\bar{\varphi}_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty})\subset\overline{\operatorname{span}}(\Phi_R).$$

Учитывая процесс построения ряда (2.11) заключаем, что при некоторой $\sigma\in D(f_2,\Phi_R)$ имеем

$$G_m(f_2,\Phi_R,\sigma,x_0)=\sum_{j=1}^{m}A_{\sigma(j)}\bar{\varphi}_{k_{\sigma(j)}}(x_0)\in H_m(\beta,\gamma).$$

Нетрудно видеть, что для любой $\sigma\in D(f_2,\Phi_R)$ получаем

$$\lim_{m\to\infty}G_m(f_2,\Phi_R,\sigma,x_0)=+\infty.$$

Таким образом, необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть $\Phi_{R'}=\{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}\in(\Phi_{(1)}\cup\Phi_{(3)})\subset\Phi_{(2)}$ и пусть $x_0=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}'_{k_i}\in\hat{E}_0$ (например, $\Phi_R=\{\varphi_{2^k+1}(x)\}_{k=0}^{\infty}$). Применив рассуждение, использованное при доказательстве достаточности Теоремы 2, не трудно показать, что для подсистемы $\Phi_{R'}$ существует число $T>0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{k_i}(x)<T,\quad x\in[0,1]. \tag{2.14}$$

Пусть $f(x)\in\overline{\operatorname{span}}(\Phi_{R'})$ – произвольная функция. Тогда

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\bar{\varphi}_{k_i}(x)\in C_{[0,1]},$$

где необходимо $A_i\to0$ при $i\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число $I_\varepsilon$, такое, что

$$|A_i|<\frac{\varepsilon}{T}\quad\text{при}\quad i\geq I_\varepsilon.$$

Рассматривая ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}|A_i\bar{\varphi}_{k_i}(x)| \tag{2.15}$$

и учитывая (2.14) заключаем, что

$$\sum_{i=I_\varepsilon}^{\infty} |A_i \bar{\varphi}_{k_i}(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0,1],$$

при $i \geq I_\varepsilon$, т.е. ряд (2.15) равномерно сходится. Следовательно, подсистема $\Phi_{R'}$ является безусловным базисом в $\overline{\mathrm{span}}(\Phi_{R'})$, и, следовательно, также является квазигриди системой в $C_{[0,1]}$. Заметим, что из этого утверждения, Теоремы 3 и теоремы Конягина–Темлякова следует, что система $\Phi_{R'}$ является также гриди системой в $C_{[0,1]}$. Теорема 4 доказана.

**Доказательство Теоремы 1.** следует из доказательства Теоремы 4.

**Замечание 3.** В силу Теоремы 4, среди подсистем $\Phi_{R'} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$ квазигриди системами являются те, для которых $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_0$, но вместе с этим существуют подсистемы системы (1.3), для которых $x_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_j} \notin \hat{E}_0$, и они являются казигриди системами в $C_{[0,1]}$. Ниже приведём пример одной из таких подсистем.

Пусть $x_0$ имеет следующее двоичное представление

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots = 0,01\ 001\ 0001 \ldots,$$

и пусть $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – подсистема системы (1.3), для которой $\bar{x}_k^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\ 1\ (0)$. Рассмотрим подсистему

$$\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}, \quad k_j = \sum_{i=1}^{j} i.$$

Учитывая определения системы (1.3) и подсистемы $\Phi_{R'}$ нетрудно видеть, что функция $\bar{\varphi}_{k_j}(x)$ $(x_{k_j}^{(2)} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k_j-1}\ 1\ (0))$ принимает значения из $\left(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}\right)$, $j = 1, 2, \ldots$ на $\bar{\Delta}_{k_{j+1}}$, и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_j}(\bar{x}_{k_1}) = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_j}(\bar{x}_{k_i}) < 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2^{j-1}} < 3, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Так как $\bar{\Delta}_{k_{j+1}} \subset \bar{\Delta}_{k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, с учётом рассуждений при доказательстве достаточности Теоремы 4, нетрудно доказать, что подсистема $\Phi_{R'}$ является безусловной и демократичной, следовательно, гриди базисом в $\overline{\mathrm{span}}(\Phi_{R'})$.

**2.3. Доказательство Теоремы 5.** Предположим, что $\{b_m^k\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{m+2(k-1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{c_m^k\}_{m=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{2m+2(k-1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$, – числовые последовательности. Для любого натурального числа $k$ обозначим

$$\{a_l^k\}_{l=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1+2(k-1)}, \frac{1}{2+2(k-1)}, -\frac{1}{2+2(k-1)},\right.$$

$$\frac{1}{3+2(k-1)}, \frac{1}{4+2(k-1)}, -\frac{1}{4+2(k-1)}, \ldots\Big\}$$

Ясно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m^k = +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m^k = -\infty \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_l^k = +\infty.$$

Пусть $\{x_{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \hat{E}_1$ – последовательность рациональных точек отрезка $[0,1]$ с двоичными разложениями вида

$$x_{(k)}^{(2)} = 0, \underbrace{0\ldots0}_{k-1}(10), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

Далее, пусть $\Phi_{R_{(k)}} = \{\varphi_{n_l^{(k)}}(x)\}_{l=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$, – подсистема системы Фабера–Шаудера, для которой $\cap_{l=1}^{\infty}\Delta_{n_l^{(k)}} = x_{(k)}$ $(\varphi_{n_l^{(k)}}(x) = \varphi_{k-1}^{(1)}(x)$, $\varphi_{n_l^{(k)}}(x_{(k)}) = \frac{2}{3}$, $l = 1, 2, \ldots$ (см. [7])). Используя функции подсистемы $\Phi_{R_{(k)}}$ и метод, изложенный в доказательстве необходимости Теоремы 4, полагая, что $\{b_m\}_{m=1}^{\infty} = \{b_m^k\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} = \{c_m^k\}_{m=1}^{\infty}$, построим непрерывную функцию $f_k(x)$. Ясно, что для любой $\sigma \in D(f_k, \Phi)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_k, \Phi, \sigma, x_{(k)}) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^k = +\infty.$$

Для функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет место Замечание 2 с заменой $b_1$ на $b_1^k$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(x)\|_{C_{[0,1]}} = \lim_{k\to\infty} b_1^k = 0. \tag{2.17}$$

Обозначая носитель функции $f_k(x)$ через $\Delta_{(k)}$ заключаем, что $\Delta_{(k+1)} \subset \Delta_{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Учитывая определение системы Фабера–Шаудера, (2.16) и метод построения последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ получим, что для любого натурального $K$, $f_K(x) > 0$ на $\Delta_{(i)}$ $(i = K+1, K+2, \ldots)$, а так же

$$S_K(x) = \sum_{k=1}^{K} f_k(x)$$

линейна и непрерывна на $\Delta_{(K+1)}$ и принимает значения из $(0, d_K)$, где $\{d_K\}_{K=1}^{\infty}$ есть следующая последовательность

$$d_1 = b_1^1 = 1, \quad d_{K+1} = \frac{d_K}{2} + b_1^{K+1} = \frac{d_K}{2} + \frac{1}{2K+1}.$$

Нетрудно показать, что $\lim_{K\to\infty} d_K = 0$. Учитывая (2.17) заключаем, что остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится к нулю, следовательно

$$\lim_{K\to\infty} S_K(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \equiv f(x)$$

является непрерывной функцией на $[0,1]$. Учитывая метод построения функции $f(x)$ заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f,\Phi,\sigma,x_{(k)}) = +\infty, \quad k=1,2,\ldots,$$

для любой $\sigma \in D(f,\Phi)$. Теорема 5 доказана.

Автор выражает благодарность профессору М. Г. Григоряну за руководство работой.

**Abstract.** The paper establishes some necessary and sufficient conditions under which subsystems of the Faber–Schauder system are quasigreedy or democratic systems in $C_{[0,1]}$. A continuous function is constructed, which possesses greedy algorithm in the Faber–Schauder system divergent on a countable set from [0.1].

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
2. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory, vol.107, pp. 293 – 314, 2000.
3. R. A. De Vore , V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Computational Math., no. 5, pp. 173 – 187, 1996.
4. M. G. Grigorian, "Greedy algorithms and applications", ISAAC International Conference, Abstract, 2002, p. 24, Yerevan, Armenia.
5. M. G. Grigoryan, "On the algorithm of greedy", Harmonic Analysis and Approximations, II, International conference, Abstracts, 2003.
6. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике $L^p$ гриди алгоритма по тригонометрической системе", Изв. НАН Армении, Серия Математика, том 39, № 5, стр. 35–48, 2004.
7. А. А. Саргсян, "О квазигриди базисности системы Фабера–Шаудера", Докл. НАН Армении, том 105, № 4, стр. 333 – 337, 2005.
8. S. A. Episkoposian, "On the systems is not quasigreedy basis", ISAAC International Conference, Abstract, 2002, p.17, Yerevan, Armenia.
9. С. Л. Гогян, "Подсистема Хаара как квазигриди базис", Доклады НАН Армении, том 105, № 1, стр. 5 – 9, 2005.
10. S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Mathematica, vol.159, no. 1, pp. 67 – 101, 2003.
11. J. Schauder, "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen", Math. Zeit., Bd. 26, S. 47 – 65, 1927.

Поступила 25 сентября 2005

*Известия НАН Армении. Математика, 41, № 2, 2006, 75–86*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

**Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян**

*Государственный инженерный университет Армении*
*E-mail : armenak@web.am*

**Резюме.** В работе изучаются линейные дифференциальные уравнения в классе аналитических функций в многосвязных областях. Получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование решения неоднородного уравнения, а также определено количество линейно независимых решений однородного уравнения. Отдельно рассмотрены дифференциальные уравнения с полиномиальными коэффициентами. В этом случае определены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости данного уравнения.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D^+$ – конечная, $(m+1)$–связная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$ а $D^- = \mathbb{C} \backslash (D^+ \cup \Gamma)$, где $\Gamma_j$, $j = 0, \ldots, m$ – простые, гладкие, замкнутые контуры, не имеющие общих точек, причём $\Gamma_0$ охватывает все остальные контуры $\Gamma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$.

В $D^+$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(\varphi)(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(z)\varphi^{(k)}(z) = f(z), \quad z \in D^+, \tag{1}$$

где $a_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ и $f$ – заданные аналитические функции в $D^+$, а решение $\varphi$ – искомая аналитическая функция в области $D^+$, принадлежащая классу $C^{(n,\alpha)}(\overline{D}^+)$. Предположим, что $a_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ достаточно гладкие функции в замкнутой области $\overline{D}^+$, $f \in C^{(\alpha)}(\overline{D}^+)$ и выполняется условие нормальности

$$a_n(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{2}$$

Уравнение (1) называется **однородным**, если $f \equiv 0$. Через $q$ обозначим число нулей функции $a_n$ в области $D^+$, а через $L^*$ – дифференциальный оператор, сопряженный к оператору $L$ :

$$L^*(\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(z)\varphi(z))^{(k)}. \tag{3}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим однородную задачу сопряжения

$$\Phi(z) = L^*(\Psi)(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{4}$$

где $\Phi \in C^{(\alpha)}(\overline{D^+})$ и $\Psi \in C^{(n,\alpha)}(\overline{D^-})$ – искомые аналитические функции в областях $D^+$ и $D^-$, соответственно, и $\Psi(\infty) = 0$.

В работе доказаны следующие основные теоремы.

**Теорема 1.** *Уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f$ удовлетворяет условиям*

$$\int_\Gamma f(z)\Psi_k(z)dz = 0, \quad k = 1, \ldots, K_0', \tag{5}$$

*где $(\Phi_k, \Psi_k)$, $k = 1, \ldots, K_0'$, – полная система линейно независимых решений однородной задачи (4).*

Заметим, что в (5) и в дальнейшем интегрирование по $\Gamma$ производится в положительном направлении (положительным считаем такое направление обхода $\Gamma$, при котором область $D^+$ остоется слева).

Пусть $K_0$ – число линейно независимых решений однородного уравнения (1).

**Теорема 2.**

$$K_0 - K_0' = (1 - m)n - q. \tag{6}$$

Из (4) следует, что в (5) функции $\Psi_k$ $(k = 1, \ldots, K_0')$ также линейно независимы и поэтому левые части (5) являются линейно независимыми функционалами над классом аналитических функций в области $D^+$. Следовательно, $K_0$ и $K_0'$ суть дефектные числа уравнения (1), а их разность – индекс уравнения (1).

**Следствие 1.** Уравнение (1) фредгольмово тогда и только тогда, когда область $D^+$ односвязна и $q = n$ или область $D^+$ двусвязна и $q = 0$.

Теоремы 1 и 2 доказаны в §2. В §3 исследуется уравнение (1) в случае, когда $a_k$ – полиномы. В §4 уравнение (1) сводится к интегральному уравнению Фредгольма на контуре Γ. В §5 полученные результаты применяются для исследования некоторых краевых задач для эллиптических уравнений.

## §2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Для доказательства Теорем 1 и 2, рассмотрим задачу сопряжения

$$L(\varphi)(z) = \omega(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{7}$$

где $\varphi \in C^{(n,\alpha)}(\overline{D}^+)$ и $\omega \in C^{(\alpha)}(\overline{D}^-)$ – искомые аналитические функции в областях $D^+$ и $D^-$, соответственно, $\omega(\infty) = 0$ и $g$ - функция из класса $C^{(\alpha)}(\Gamma)$. При $g \equiv 0$ задачу (7) будем называть однородной. В частности, если $g = f$, где $f$ - правая часть (1), то из (7) следует, что $\omega$ является аналитическим продолжением $L(\varphi) - f$ из области $D^+$ в область $D^-$. Так как $\omega(\infty) = 0$, то в силу теоремы Лиувилля ([4], стр. 64) $L(\varphi) - f \equiv 0$ в $D^+$ и $\omega \equiv 0$ в $D^-$. Это означает, что при $g = f$ уравнение (1) эквивалентно задаче (7) и числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) и однородной задачи (7) совпадают и равны $K_0$.

**Утверждение 1.** *Задача (7) разрешима тогда и только тогда, когда функция $g$ удовлетворяет следующему конечному числу условий :*

$$\int_\Gamma g(z)\mu_k(z)dz = 0, \quad k = 1, \ldots, p_0, \tag{8}$$

*где $\mu_k$ – некоторые достаточно гладкие, линейно независимые функции на $\Gamma$, не зависящие от $g$. Кроме того,*

$$K_0 - p_0 = (1-m)n - q. \tag{9}$$

При $m = 0$ это утверждение доказано в [1], стр. 332, с использованием интегрального представления кусочно аналитических функций (см. [1], стр. 337, формулы (89.1) и (89.2)). Основываясь на том же представлении, аналогично можно доказать Утверждение 1 при $m \geq 1$.

**Теорема 3.** *Задача (7) разрешима тогда и только тогда, когда функция $g$ удовлетворяет условиям (5).*

**Доказательство.** Если $(\Phi_k, \Psi_k)$ – решение задачи (4) и $(\varphi, \omega)$ – решение задачи (7), то

$$\int_\Gamma g(z)\Psi_k(z)\,dz = \int_\Gamma (L(\varphi)(z) - \omega(z))\Psi_k(z)\,dz = \int_\Gamma (\varphi(z)L^*(\Psi_k)(z) - \omega(z)\Psi_k(z))dz =$$

$$= \int_\Gamma (\varphi(z)\Phi_k(z) - \omega(z)\Psi_k(z))dz = 0,$$

где последнее равенство следует из теоремы Коши.

Пусть теперь выполнены условия (5). Докажем, что задача (7) разрешима. В силу Утверждения 1 достаточно доказать, что $\mu_k = \Psi_k$, где $(\Phi_k, \Psi_k)$ – решение задачи (4). Задача (7) разрешима при $g(z) = (z - z_0)^{-1}$, где $z_0$ – произвольная фиксированная точка в $D^+$, а этим решением является $\varphi = 0, \omega(z) = -(z - z_0)^{-1}$. Следовательно, из (8) имеем

$$\int_\Gamma \frac{\mu_k(z)dz}{z - z_0} = 0, \quad z \in D^+,$$

т.е. $\mu_k = \Psi_k$, где $\Psi_k$ – некоторая аналитическая функция в $D^-$ и $\Psi_k(\infty) = 0$ (см. [2], стр. 131). Задача (7) разрешима также при $g(z) = L((z - z_1)^{-1})$, где $z_1$ – произвольная фиксированная точка в $D^-$. Поэтому, при $z_1 \in D^-$ имеем

$$0 = \int_\Gamma L\left(\frac{1}{z - z_1}\right) \mu_k(z)\, dz = \int_\Gamma L\left(\frac{1}{z - z_1}\right) \Psi_k(z)\, dz = \int_\Gamma \frac{L^*(\Psi_k)(z)dz}{z - z_1}.$$

Из этого соотношения следует, что $L^*(\Psi_k) = \Phi_k$, где $\Phi_k$ – некоторая аналитическая функция в $D^+$ (см. [2], стр. 131). Таким образом, $\mu_k = \Psi_k$, где $(\Phi_k, \Psi_k)$ – решение задачи (4). Теорема 3 доказана.

**Доказательства Теорем 1 и 2.** Для завершения доказательств Теорем 1 и 2 отметим, что в силу Теоремы 3 и (8), $p_0 = K'_0$. Следовательно, равенство (9) примет вид (6) и из Теоремы 3 следуют утверждения Теорем 1 и 2.

## §3. УРАВНЕНИЕ (1) С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе рассмотрим уравнение (1), когда $a_k$ – полиномы порядка не выше $k$

$$a_k(z) = \sum_{l=0}^{k} c_{kl} z^l, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{10}$$

Будем предполагать, что имеет место условие нормальности (2).

Пусть $D^+$ – односвязная область с достаточно гладкой границей $\Gamma$, $0 \in D^+$ и $D^- = \mathbb{C} \backslash (D^+ \cup \Gamma)$. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Если $a_n(z) \neq 0$ в области $D^- \cup \Gamma$, то уравнение (1) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$c_{00} + \sum_{k=1}^{n} c_{kk} j(j-1)\ldots(j-k+1) \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

**Доказательство :** Так как в (1) коэффициенты $a_k$ являются многочленами порядка не выше $k$, то в (3) функция $L^*(\Psi)$ аналитична в $D^-$ и стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Поэтому, из (4), $\Phi(z) = 0$ при $z \in D^+$ и

$$L^*(\Psi)(z) = 0, \quad z \in D^-. \tag{12}$$

Следовательно, задача (1) в этом случае эквивалентна уравнению (12) в области $D^-$, где $\Psi$ – искомая аналитическая функция в $D^-$, и $\Psi(\infty) = 0$. В силу Теорем 1 и 2, (1) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда уравнение (12) имеет только нулевое решение.

Пусть $G$ – образ области $D^-$ при отображении $\zeta = z^{-1}$. Ясно, что $0 \in G$. Представим функцию $\Psi$ в виде $\Psi(z) = z^{-1}\omega(z^{-1})$, где $\omega$ – аналитическая функция в области $G$. Подставляя эту функцию в (12) и заменяя $z^{-1}$ на $\zeta$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(\zeta)\zeta^k\omega^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in G, \tag{13}$$

где $b_k$ – некоторые многочлены порядка не выше $k$, причем $b_n(\zeta) = \zeta^n a_n(\frac{1}{\zeta})$, $(\zeta \in G)$. Так как многочлен $a_n$ не имеет нулей в области $D^-$, то из последнего соотношения следует, что $b_n(0) = c_{nn}$ и $b_n(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in G$. Следующее утверждение доказано в [3] в случае, когда $G$ – единичный круг.

**Утверждение 2.** *Уравнение (13) не имеет нетривиальных решений тогда и только тогда, когда*

$$b_0(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k(0)j(j-1)\ldots(j-k+1) \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что аналогичное утверждение можно доказать для произвольной области $G$, используя конформное отображение. Можно убедиться, что величины $b_k(0)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ зависят только от коэффициентов $c_{ll}$, $l = 0, \ldots, n$. Следовательно, из Утверждения 2 следует, что уравнение (13) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_{kk} z^k \varphi^{(k)}(z) = 0, \quad z \in D^+,$$

однозначно разрешимо. Как доказано в [3], последнее уравнение однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия (11). Следовательно, эти условия необходимы и достаточны для однозначной разрешимости уравнений (12) и (1). Теорема 4 доказана.

Предположим, что $D^+$ – двусвязная область с гладкой границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ $(\Gamma_1 \subset int\Gamma_0)$ и $D_0^+$ – конечная, а $D_1^-$ – бесконечная области, ограниченные контурами $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$, соответственно. В области $D^+$ рассмотрим уравнение (1) с коэффициентами (10).

**Теорема 5.** *Пусть многочлен $a_n$ удовлетворяет условию $a_n(z) \neq 0$ при $z \in D_1^- \cup \Gamma_1$, $c_{nn} \neq 0$. Тогда уравнение (1) однозначно разрешимо в $D^+$ тогда и только тогда, когда*

$$c_{00} + \sum_{k=1}^{n} c_{kk} j(j-1)\ldots(j-k+1) \neq 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

**Доказательство.** Можно представить функции $\varphi$ и $f$ из (1) в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $f = f_0 + f_1$, где $\varphi_0$ и $\varphi_1$ аналитичны в $D_0^+$ и $D_1^-$ соответственно, и

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_0^+,$$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_1^-.$$

Тогда подставляя эти функции в (1), получим два уравнения для $\varphi_0$ и $\varphi_1$ :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\varphi_0^{(k)}(z) = f_0(z), \quad z \in D_0^+, \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\varphi_1^{(k)}(z) = f_1(z), \quad z \in D_1^-. \tag{15}$$

**Утверждение 3.** *Уравнение (15) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kk} j(j-1)\ldots(j-k+1) \neq 0, \quad j = -1, -2, \ldots.$$

Это утверждение доказывается или аналогично Утверждению 2, или заменой переменной $\zeta = (z - z_0)^{-1}$ в (15), используя Теорему 4 (здесь $z_0$ некоторая фиксированная точка внутри контура $\Gamma_1$).

Для завершения доказательства Теоремы 5, осталось применить Теорему 4 для уравнения (14) и Утверждение 3 для уравнения (15).

**Теорема 6.** *Пусть $D^+$ – $(m+1)$-связная область. Следующие условия необходимы для однозначной разрешимости уравнения (1) :*

*a) Для $m = 0$, $c_{nn} \neq 0$ и $a_n(z) \neq 0$ при $z \in D^- \cup \Gamma$;*

*b) Для $m = 1$, $c_{nn} \neq 0$ и $a_n(z) \neq 0$ при $z \in D_1^- \cup \Gamma_1$.*

*Если $m \geq 2$, то уравнение (1) не является однозначно разрешимым.*

**Доказательство :** Пусть уравнение (1) однозначно разрешимо. Тогда по формуле (6) $(1-m)n-q=0$, где $q \geq 0$ - число корней функции $a_n$ в $D^+$. Из этого равенства непосредственно следует требуемое утверждение при $m=0$ и $m \geq 2$. Если $m=1$, то $q=0$ т.е.

$$a_n(z) \neq 0, \quad z \in D^+. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) в односвязной области $D_0^+$. Если $L_0$ и $L_0'$ - дефектные числа этого уравнения в области $D_0^+$, то в силу (6) $L_0 - L_0' = n - q_0$, где $q_0$ - число нулей полинома $a_n$ в $D_0^+$. Кроме того, ясно, что $q_0 \leq n$. По предположению однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение в $D^+$, и поэтому $L_0 = 0$, т.е. $q_0 \geq n$. Таким образом, окончательно получаем $q_0 = n$, и следовательно из (16) следует требуемое утверждение при $m=1$. Теорема 6 доказана.

Из Теорем 4, 5 и 6 вытекает следующая теорема.

**Теорема 7.** *Пусть $D^+$ – $(m+1)$-связная область. Тогда при $m=0$ и $m=1$ соответственно, условия Теоремы 4 и 5 необходимы и достаточны для однозначной разрешимости уравнения (1) с полиномиальными коэффициентами. Для $m \geq 2$ уравнение (1) не является однозначно разрешимым.*

## §4. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1) К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

В §2 показали, что уравнение (1) эквивалентно задаче сопряжения (7) при $g=f$. В этом параграфе мы исследуем последнюю задачу. Для простоты изложения будем сначала предполагать, что $D^+$ - односвязная область и $0 \in D^+$. Заметим, что в [1] (стр. 332) задача (7) сводится к сингулярному интегральному уравнению. Здесь мы покажем, что эту задачу можно свести к интегральному уравнению Фредгольма. Для этого представим неизвестную функцию $\varphi$ в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{(n-1)!z^n} \int_0^z (z-t)^{n-1} \varphi_0(t)\, dt, \tag{17}$$

где $\varphi_0$ - аналитическая функция в $D^+$ и $\varphi_0(z) = (z^n \varphi(z))^{(n)}$. Теперь, подставляя функцию (17) в (7), при $g=f$ получаем

$$a_n(\zeta)\zeta^{-n}\varphi_0(\zeta) + \int_\Gamma M(\zeta,t)\varphi_0(t)\, dt = \omega(\zeta) + f(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{18}$$

где $M(\zeta,t)$ - ядро со слабой особенностью, т.е. $M(\zeta,t) = M_0(\zeta,t)|t-\zeta|^{-\alpha}$, где $0<\alpha<1$, а $M_0$ удовлетворяет условию Гёльдера по обеим переменным. Таким образом, задача сопряжения (7) с производными приводится к задаче сопряжения

(18) без производных. В [2] (стр. 146) доказано, что при $m = 0$ индекс задачи (18) равен $n - q$. В частности, при $m = 0$ следует формула (6). Кроме того, из условия нормальности (2) следует, что функция $a_n$ представима на $\Gamma$ в виде ([2], стр. 66)

$$a_n(\zeta) = \zeta^q F^+(\zeta)(F^-(\zeta))^{-1}, \quad \zeta \in \Gamma,$$

где $F^{\pm}(\zeta)$ - предельные значения функции

$$F(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln(a_n(t)t^{-q})\, dt}{t - z}$$

при $z \to \zeta$ и $z \in D^{\pm}$ соответственно. Подставляя это представление в (18), получаем

$$\psi(\zeta) + \int_\Gamma M_1(\zeta, t)\psi(t)\, dt = \chi(\zeta) + f_1(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{19}$$

где $\psi(z) = \varphi_0(z)F^+(z)z^{q-n}$ при $z \in D^+$, $\chi(z) = \omega(z)F^-(z)$ при $z \in D^-$, $f_1(\zeta) = f(\zeta)F^-(\zeta)$ и

$$M_1(\zeta, t) = F^-(\zeta)M(\zeta, t)(F^+(t))^{-1}t^{n-q}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Пусть $q = n$. Тогда функции $\psi$ и $\chi$ представимы в виде (см. [1], стр. 136)

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(t)dt}{t - z}, \quad z \in D^+, \quad \chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(t)dt}{t - z}, \quad z \in D^-, \tag{20}$$

где $\mu$ - функция из класса $C^{(\alpha)}(\Gamma)$, определяемая по $\psi$ и $\chi$ однозначно. Граничные значения интегралов (20) можно найти по формуле Сохоцкого–Племеля (см. [2], стр. 50). Подставляя их в (19), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода на контуре $\Gamma$, определяющее $\mu$. Если $q > n$, то из определения $\psi$ и (20) имеем

$$\int_\Gamma \mu(t)t^{-k}dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q - n - 1. \tag{21}$$

Следовательно, задача (19) приводится к интегральному уравнению Фредгольма с дополнительными условиями (21). При $q < n$ представляя $\varphi_0$ из (18) в виде $\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{n-q-1} d_k z^k + z^{n-q}\bar{\varphi}(z)$ (где $d_k$ - некоторые постоянные, а $\bar{\varphi}$ - аналитическая функция в $D^+$), приходим к уравнению (19). Это приводит к интегральному уравнению Фредгольма, содержащее $n-q$ произвольных постоянных $d_k$. Дополнительные условия вида (21) и произвольные постоянные не играют существенной роли при решении уравнений Фредгольма (см. [2], стр. 588).

Пусть теперь $D^+$ – двусвязная область, ограниченная контуром $\Gamma$, и пусть $D_j^\pm$, $j = 0, 1$, – области с общей границей $\Gamma_j$, где $D_j^-$ содержит окрестность бесконечно удалённой точки. Тогда очевидно, что $D^+ = D_0^+ \bigcap D_1^-$ и $D^- = D_1^+ \bigcup D_0^-$. Кроме того, не ограничивая общности, предположим, что $0 \in D_1^+$. Тогда из (6) следует, что уравнение (1) фредгольмово тогда и только тогда, когда $q = 0$, т.е. $a_n(z) \neq 0$ при $z \in D^+$. Если предположить, что выполнено это условие, то уравнение (1) можно представить в виде

$$z^n \varphi^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k(z)\varphi^{(k)}(z) = f_0(z), \quad z \in D^+,$$

где $b_k(z) = z^n a_k(z)(a_n(z))^{-1}$ и $f_0(z) = z^n f(z)(a_n(z))^{-1}$. Как доказано в §2, последнее уравнение эквивалентно задаче сопряжения

$$\zeta^n \varphi^{(n)}(\zeta) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k(\zeta)\varphi^{(k)}(\zeta) = \omega(\zeta) + f_0(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{22}$$

где $\omega$ – аналитическая функция в $D^-$ такая, что $\omega(\infty) = 0$. Представим функцию $\varphi$ в виде $\varphi = \Phi_0 + \Phi_1$, где $\Phi_0 \in C^{(n,\alpha)}(\overline{D_0^+})$ и $\Phi_1 \in C^{(n,\alpha)}(\overline{D_1^-})$ – некоторые аналитические функции в $D_0^+$ и $D_1^-$ соответственно, и $\Phi_1(\infty) = 0$. Далее, запишем представление

$$\Phi_0(z) = \frac{z^{-n}}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}\psi_0(t)\,dt, \quad z \in D_0^+,$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_z^\infty \frac{(z-t)^{n-1}}{t^n}\psi_1(t)\,dt, \quad z \in D_1^-,$$

где $\psi_0$ и $\psi_1$ – аналитические функции в $D_0^+$ и $D_1^-$ соответственно, удовлетворяющие условию Гёльдера вплоть до границы. Аналогично (20), функции $\psi_0$, $\psi_1$ и $\omega$ представляются интегралами типа Коши с плотностями $\mu \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$, однозначно определяемые по $\psi_0$, $\psi_1$ и $\omega$. Эти представления и в этом случае приводят задачу сопряжения (22) к интегральному уравнению Фредгольма относительно неизвестной функции $\mu$. И в заключение рассмотрим случаи $m = 1$, $q \geq 1$ и $m \geq 2$. Аналогично предыдущему, уравнение (1) в $(m+1)$–связной области $D^+$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма относительно плотности $\mu$ с $q + n(m-1)$ дополнительными условиями вида

$$\int_\Gamma G_k(t)\mu(t)\,dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q + n(m-1),$$

где $G_k$ – некоторые вполне определённые линейно независимые функции на $\Gamma$.

## §5. ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $D^+$ – двусвязная область с границей $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$ (см. § 3) и точка 0 находится внутри контура $\Gamma_1$. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре для уравнения Лапласа :

$$u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0, \quad z \in D^+, \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k \frac{\partial^k u}{\partial r^k}(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{24}$$

где $r = |z|$, $a_k$ – действительные постоянные, $\frac{\partial}{\partial r}$ – производная по направлению радиуса-вектора $\overrightarrow{Oz}$, $g$ – заданная действительная функция из класса $C^{(\alpha)}(\Gamma)$, $a_n \neq 0$, а $u$ – искомое действительное решение. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 9.** *Задача (23), (24) однозначно разрешима для любой функции $g$ тогда и только тогда, когда постоянные $a_k$ удовлетворяют условиям*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k j(j-1)\dots(j-k+1) \neq 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{25}$$

Так как $a_n \neq 0$, то левая часть (25) стремится к бесконечности при $|j| \to \infty$. Следовательно, неравенство (25) всегда выполняется при больших $j$.

**Доказательство.** Если выражение в (25) равно нулю при некотором целом $j$, то можно проверить, что $u(z) = \Re z^j$ и $u(z) = \Im z^j$ суть решения однородной задачи (23), (24). Следовательно, условия (25) необходимы для однозначной разрешимости задачи (23), (24).

Чтобы доказать достаточность условий (25) напомним, что (см. [5], стр. 109) решение уравнения (23) в двусвязной области $D^+$ представляется в виде

$$u(z) = \Re\varphi(z) + d\ln r, \tag{26}$$

где $\varphi$ – произвольная аналитическая функция в $D^+$, а $d$ – произвольная действительная постоянная. Заметим, что постоянная $d$ в (26) однозначно определяется функцией $u$, а $\varphi$ определяется по $u$ с точностью до чисто мнимого слагаемого. Подставляя $u$ из (26) в граничное условие (24), получим $w(z) = g(z)$, $z \in \Gamma$, где

$$w(z) = \Re\left(bd + \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \varphi^{(k)}(z)\right) + a_0 d\ln r, \quad b = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!a_k. \tag{27}$$

С учетом (27) и (26), $w$ является решением уравнения (23) и, следовательно, является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области $D^+$. Это решение определяется формулой ([2], стр. 255)

$$w(z) = \Re\Omega(z) + d_0 \ln r, \tag{28}$$

где $\Omega \in C^{(\alpha)}(\overline{D^+})$ – некоторая аналитическая функция в $D^+$, а $d_0$ – некоторая постоянная. Кроме того, $\Omega$ и $d_0$ однозначно определяются по $w$ с помощью решения интегрального уравнения Фредгольма на контуре $\Gamma$. Подставляя $w$ из (27) в (28) и учитывая неоднозначность в определении $\varphi$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \varphi^{(k)}(z) + bd = \Omega(z) + ic, \quad a_0 d = d_0. \tag{29}$$

Из условий (25) следует, что $a_0 \neq 0$ и поэтому $d = d_0(a_0)^{-1}$. Заменяя неизвестную функцию $\varphi$ на $\varphi(z) = \Phi(z) + ic(a_0)^{-1}$ и подставляя значение $d$ в (29) и (26), получаем

$$u(z) = \Re\Phi(z) + d_0(a_0)^{-1} \ln r, \tag{30}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Phi^{(k)}(z) = f(z), \tag{31}$$

где $f(z) = \Omega(z) - bd_0(a_0)^{-1}$. Следовательно, общее решение задачи (23), (24) определяется формулой (30), где $\Phi$ – решение уравнения (31) в классе аналитических функций. Из Теоремы 5 и условия (25) следует, что уравнение (31) однозначно разрешимо для любой функции $f \in C^{(\alpha)}(\overline{D})^+$, аналитической в области $D^+$. Теорема 9 доказана.

**Следствие 2.** При $n = 1$ задача (23), (24) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $a_0(a_1)^{-1}$ – не целое число.

Рассмотрим следующее уравнение в области $D^+$ с граничным условием (24) :

$$Au_{xx}(z) + Bu_{xy}(z) + Cu_{yy}(z) = 0, \quad z \in D^+. \tag{32}$$

где $A$, $B$ и $C$ – некоторые комплексные постоянные, $C \neq 0$, а $g$ и $u$ – комплекснозначные функции. Пусть уравнение (32) – правильно эллиптическое, т.е. $\Im\lambda_1 > 0$ и $\Im\lambda_2 < 0$, где $\lambda_j$, $j = 1, 2$ – корни характеристического уравнения $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$. Общее решение уравнения (32) в области $D^+$ определяется формулой (см. [5], стр. 109) :

$$u(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) - \varphi_2(x + \lambda_2 y) + d \ln((x + \lambda_1 y)(x + \lambda_2 y)), \tag{33}$$

где $\varphi_j$ $(j = 1, 2)$ – произвольные аналитические функции в областях

$$D^+_{\lambda_j} = \{(\xi, \theta) : \xi + i\theta = x + \lambda_j y, (x, y) \in D^+\}$$

соответственно. Если в (33) $u \equiv 0$, то $d = 0$ и $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv d_1$, где $d_1$ – произвольная комплексная постоянная.

Рассмотрим также в области $D^+$ задачу Дирихле для уравнения (32) с граничным условием $u(z) = g(z)$, $z \in \Gamma$. В работе [6] доказано, что эта задача имеет единственное решение и оно определяется формулой

$$w(x, y) = \Phi_1(x + \lambda_1 y) - \Phi_2(x + \lambda_2 y) + D_0 \ln((x + \lambda_1 y)(x + \lambda_2 y)), \qquad (34)$$

где $\Phi_j$ $(j = 1, 2)$ – некоторые аналитические функции в областях $D^+_{\lambda_j}$ соответственно, а $D_0$ – некоторая комплексная постоянная. Эти величины определяются по $w$ единственным образом при помощи решения некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма. Используя формулы (33) и (34), можно доказать следующую теорему.

**Теорема 10.** *Задача (32), (24) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда коэффициенты $a_k$, $k = 0, \ldots, n$, удовлетворяют условиям (25).*

**Abstract.** The paper studies linear differential equations whose solutions are analytic in multiply connected domains. Some necessary and sufficient conditions for existence of such solution for the non-homogeneous problem and a number of linearly independent solutions of the homogeneous problem are found. Separately, differential equations with polynomial coefficients are considered and some necessary and sufficient conditions for unique solvability are obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
3. Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева, "Дифференциальные и интегральные уравнения в классе аналитических функций", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 2, стр. 1 – 15, 1998.
4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
5. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
6. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 6, стр. 5 – 40, 2002.

Поступила 10 октября 2005

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 2, 2006

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

## Сборник статей

## Содержание



IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 2, 2006

# HARMONIC ANALYSIS AND APPROXIMATIONS

## Collection of Papers

## Contents