ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сборник статей

Редакторы серии :

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Гармонический анализ и приближения имеют сильные традиции в Армении и являются одними из самых интенсивно прогрессирующих ветвей. Первые две международные конференции по этой тематике проходили в Нор Амберде (Армения), сентябрь 18 – 24, 1998 и сентябрь 11 – 18, 2001.

Настоящий номер журнала продолжает публикацию оригинальных статей, представленных на конференции "Гармонический Анализ и Приближения, III", проведённой в Цахкадзоре (Армения), 20 - 27 сентября 2005.

Организаторами третьей конференции были Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный комитет:

Н. Аракелян (Армения), З. Чисельский (Польша), П. Готье (Канада), Б. С. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), А. М. Олевский (Израиль), В. Н. Темляков (США), А. А. Талалян (Армения), П. Л. Ульянов (Россия).

Организационный комитет:

Г. Геворкян, А. Саакян, А. Акопян, М. Погосян.

Около 100 математиков из 13 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочитаны следующими математиками:

Н. Аракелян (Армения) "О задачах Дирихле и Неймана", Б. Боянов (Болгария) "Интерполяция двумерными полиномами основанная на проекциях Радона", К. Де Бур (США) "Что являются пределами проекторов Лагранжа?", Н. Дин (Израиль) "Метрическое приближение одномерных множествозначных функций", П. Готье (Канада) "Приближение Дзета функции Римана и с помощью этой функции", А. Акопян (Армения) "О Теореме Безу и Nullstellensatz", К. Казарян (Испания) "А-множества и всплески", С. Конягин (Россия) "Сходимость подпоследовательности частичных сумм ряда Фурье интегрируемых функций", М. Лейси (США) "Теорема Нехари в полидиске", В. Лу (Германия) "Лакунарная суммируемость", К. Осколков (США) "Частица Шрёдингера как полифрактал", В. Темляков (США) "О гриди алгоритмах с ограниченной глубиной поиска", Туан Ву Ким (США) "Выборка сигналов ограниченного диапазона", П. Войтащик (Польша) "Анизотропные пространства и множества уровня".

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 5–14

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Ереванский государственный университет
E-mail : hartigr@yahoo.co.uk

Резюме. В работе даётся описание случаев, когда обратная задача для канонической системы Дирака решается по меньшему набору спектральных данных чем тот, который требуется для решения обратной задачи в общем случае. Получены некоторые аналоги известной теоремы Амбарцумяна (в обратной задаче Штурма-Лиувилля) для случая системы Дирака.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Если через $\lambda_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, обозначить собственные значения краевой задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & x \in (0,\pi), \quad q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 & \alpha \in (0,\pi], \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 & \beta \in [0,\pi), \end{cases}$$

то известная теорема В. А. Амбарцумяна [1] (см. также [2], [3]) гласит :
если $\lambda_n(q,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = n^2$, $n = 0,1,2,\ldots$, то $q(x) = 0$ почти всюду.
Один из вопросов, на которые мы хотели ответить в этой статье, формулируется следующим образом : "**Имеет ли место аналог теоремы Амбарцумяна в случае краевой задачи для канонической системы Дирака ?**", т.е. для задачи на собственные значения ($p, q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, $\lambda \in \mathbb{C}$) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \right\} y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1.2}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1.3}$$

которую будем называть “задача $L(p,q,\alpha,\beta)$”. Известно [4], что собственные значения $\lambda_n = \lambda_n(p,q,\alpha,\beta)$, $n \in \mathbb{Z}$, этой задачи все простые и образуют действительную последовательность, неограниченную ни снизу, ни сверху и имеющую асимптотику ([5]) :

$$\lambda_n(p,q,\alpha,\beta) = n + \frac{\beta-\alpha}{\pi} + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \pm\infty. \tag{1.4}$$

При $p(x) = q(x) \equiv 0$ имеем явный вид собственных значений :

$$\lambda_n(0,0,\alpha,\beta) = n + \frac{\beta-\alpha}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Сразу скажем, что “в общем случае” ответ на вопрос об аналоге теоремы В. А. Амбарцумяна отрицательный, т.е. не существует α_0 и β_0 таких, чтобы из равенств

$$\lambda_n(p,q,\alpha_0,\beta_0) = n + \frac{\beta_0-\alpha_0}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

следовало бы, что $p(x) = q(x) = 0$ почти всюду. Точнее, имеется бесконечное множество “канонических потенциалов”, т.е. матриц вида $\Omega = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, для которых множество собственных значений задач $L(p,q,\alpha_0,\beta_0)$ совпадает с множеством (1.6) при любых α_0 и β_0. Описание множества этих “изоспектральных” потенциалов приведено в работе [6].

В то же время, имеется “бесконечное множество частных случаев”, для которых имеют место аналоги теоремы В. А. Амбарцумяна. Например, в конце этой статьи доказано, что :

1) если

$$\lambda_n(0,q,\alpha,0) = n - \frac{\alpha}{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

для некоторого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $q(x) = 0$ почти всюду.

2) если

$$\lambda_n\left(p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = n + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

для некоторого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, то $p(x) = 0$ почти всюду.

Мы говорим здесь о “бесконечном множестве частных случаев”, ибо если в случае задачи Штурма–Лиувилля утверждение имеет место только при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, то здесь утверждения верны для некоторых “интервалов значений α”.

С другой стороны это “существенно” частные случаи, ибо если в случае задачи Штурма–Лиувилля утверждается, что “потенциал” $q(x) \equiv 0$, то здесь только часть "потенциальной матрицы" $\Omega(x) = \sigma_2\, p(x) + \sigma_3\, q(x)$ (см. ниже §2) обращается в нуль, при условии, что другая часть заранее предполагается "нулевой". Другой более общий вопрос, который рассматривается в этой статье, можно сформулировать следующим образом : "Имеются ли случаи, когда обратную задачу для канонической системы Дирака можно решить меньшим набором спектральных данных, чем тем набором, который требуется в общем случае ?" (см. [5] и [8]). Более строгая формулировка вопроса и ответ на него будут даны в §2.

§2. ФОРМУЛИРОВКИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

обладают следующими свойствами :

$\sigma_k^* = \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3$ (самосопряженность)
$\sigma_k \sigma_j = -\sigma_j \sigma_k, \quad k \neq j$ (антикоммутируемость)
$\sigma_k^2 = E, \quad k = 1, 2, 3$ (E – единичная матрица).

В терминах матриц Паули дифференциальное выражение ℓ, порождающее оператор Дирака, принимает вид

$$\ell = \sigma_1 \frac{1}{i}\frac{d}{dx} + \sigma_2 \cdot p(x) + \sigma_3 \cdot q(x) = B\frac{d}{dx} + \Omega(x),$$

где $B = \frac{1}{i}\sigma_1$, а матрицу-функцию $\Omega(x) = \sigma_2 \cdot p(x) + \sigma_3 \cdot q(x)$ называют потенциалом. Оператор Дирака называют каноническим, если выполняется свойство $B\Omega(x) = -\Omega(x)B$ (см. [7], стр. 30).

Пусть $y = \varphi(x, \lambda, \alpha)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ell y = \lambda y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что вектор-функции $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \lambda_n, \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$, суть собственные функции задачи $\mathrm{L}(p, q, \alpha, \beta)$. Квадраты L^2-норм этих собственных функций, т.е. величины

$$a_n = a_n(p, q, \alpha, \beta) = ||\varphi_n||^2 = \int_0^\pi |\varphi_n(x)|^2 dx = \int_0^\pi \left(|\varphi_{n1}(x)|^2 + |\varphi_{n2}(x)|^2\right) dx$$

принято называть нормировочными постоянными [5] (по аналогии со случаем задачи Штурма–Лиувилля, [2]). Множество собственных значений $\lambda_n(p, q, \alpha, \beta) =$

$\lambda_n(\Omega, \alpha, \beta)$ и нормировочных постоянных данной задачи называют также её спектральными данными. Спектральной функцией задачи $L(p, q, \alpha, \beta)$ называется (см. [5], [8]) определённая на действительной оси λ ступенчатая, возрастающая, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, имеющая скачки в точках $\lambda = \lambda_n$, равные $\dfrac{1}{a_n}$ (и нормированная условием $\rho(\lambda_0) = 0$). Спектральная функция для регулярной задачи Штурма–Лиувилля определяется аналогично (см. [2]). В случае регулярных задач, знание спектральной функции равнозначно знанию двух последовательностей : последовательности собственных значений и последовательности нормировочных постоянных.

Известно, что в случае задачи Штурма–Лиувилля по спектральной функции можно однозначно и конструктивно восстановить потенциал $q(x)$ и числа α и β, определяющие краевые условия (см. [9] и [2]). В случае задачи Дирака это не так, [8]. Если $\omega(x)$ – абсолютно непрерывная функция, то замена $\psi(x, \lambda) = A(x)\varphi(x, \lambda, \alpha)$, где унитарная матрица

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos\omega(x) & \sin\omega(x) \\ -\sin\omega(x) & \cos\omega(x) \end{pmatrix}$$

сводит систему (1.1) к системе

$$\left\{B\frac{d}{dx} + \tilde{\Omega}(x)\right\}\psi = \lambda\psi,$$

где $\tilde{\Omega}(x) = A^{-1}(x)B\cdot A'(x) + A^{-1}(x)\Omega(x)A(x)$, но оставляет неизменной спектральную функцию, т.е. собственные значения и нормированные постоянные. Условие каноничности, т.е. вид $\tilde{\Omega}(x) = \sigma_2\cdot\tilde{p}(x) + \sigma_3\cdot\tilde{q}(x)$, требует, чтобы $\omega(x) = \text{const} = \omega_0$. Но уже постоянная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

преобразует задачу $L(\Omega, \alpha, \beta)$ в задачу $L\left(A^{-1}\Omega A, \alpha - \omega_0, \beta - \omega_0\right)$, и у этих двух различных задач одна и та же спектральная функция. Фиксация же одного из краевых условий требует, чтобы $\omega_0 = 0$, т.е. сводит множество унитарных преобразований вида (2.1) к тождественному преобразованию. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на следующую теорему, которая следует из [8] и [5].

Теорема 1.

1) *Если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$ и $a_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду и $\alpha_1 = \alpha_2$.*

2) *Потенциальная матрица $\Omega(x) = \sigma_2 p(x) + \sigma_3 q(x)$ однозначно и конструктивно восстанавливается по спектральной функции задачи $\mathrm{L}(p, q, \alpha, \beta_0) = \mathrm{L}(\Omega, \alpha, \beta_0)$ (т.е. при фиксированном $\beta = \beta_0$).*

В отличие от случая задачи Штурма–Лиувилля, из асимптотической формулы (1.4) для собственных значений задачи $\mathrm{L}(\Omega, \alpha, \beta)$ следует, что если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ даже если $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

В обратной задаче для системы Дирака известна теорема единственности по двум спектрам [5], [10], являющаяся аналогом теоремы Борга для регулярной задачи Штурма–Лиувилля [11 – 14]. Кроме того, известна процедура сведения обратной задачи по двум спектрам к обратной задаче по спектральной функции и, в частности, известны формулы (см. [5]), по которым нормировочные постоянные a_n выражаются по двум спектрам $\{\lambda_n(\alpha, \beta)\}$ и $\{\lambda_n(\gamma, \beta)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$. Сформулируем эти известные результаты в следующей теореме (см. [5]).

Теорема 2.

1) *(Единственность). Если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha, \beta)$ и $\lambda_n(\Omega_1, \gamma, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \gamma, \beta)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$, то $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.*

2) *(Выражение нормировочных постоянных через два спектра). Для любого $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$,*

$$a_n(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\lambda_n(\alpha, \beta) - \lambda_n(\gamma, \beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha, \beta) - \lambda_n(\alpha, \beta)}{\lambda_k(\gamma, \beta) - \lambda_n(\alpha, \beta)}. \tag{2.2}$$

Обозначим $\Omega^*(x) = -\Omega(\pi - x)$. Если $\Omega(x) = \Omega^*(x)$, то такую потенциальную матрицу мы будем называть нечётной.

Теорема 3.

1. *Для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{-n}(\Omega^*, \alpha, \beta) = -\lambda_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.3}$$

$$a_{-n}(\Omega^*, \alpha, \beta) = a_n(\Omega, \beta, \alpha). \tag{2.4}$$

2. *(Единственность) Если для всех $n \in \mathbb{Z}$*

$$\lambda_{-n}(\tilde{\Omega}, \alpha, \beta) = -\lambda_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.5}$$

$$a_{-n}(\tilde{\Omega}, \alpha, \beta) = a_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.6}$$

то $\tilde{\Omega}(x) = \Omega^*(x) = -\Omega(\pi - x)$ почти всюду.

3. *"Нечётный" потенциал Ω однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам $\{\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha), n>0\}$ и $\{a(\Omega,\alpha,\alpha), n\geq 0\}$ (или $\{\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha), n<0\}$ и $\{a(\Omega,\alpha,\alpha), n\leq 0\}$), т.е. по "половине" спектральных данных.*

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что если $\varphi_n(x)$ есть собственная функция задачи $L(\Omega,\alpha,\beta)$, соответствующая собственному значению λ_n, то $\tilde{\varphi}_n(x)\equiv\varphi_n(\pi-x)$ есть собственная функция задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$, соответствующая собственному значению $-\lambda_n$, которое мы пронумеруем номером $-n$, т.е. $-\lambda_n(\Omega,\alpha,\beta)=\lambda_{-n}(\Omega^*,\beta,\alpha)$. То, что у задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$ нету других собственных значений, следует из того, что если μ есть собственное значение задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$, то $-\mu$ есть собственное значение задачи $L(\Omega,\alpha,\beta)$, что доказывается также, как и выше. Равенство $a_{-n}(\Omega^*,\beta,\alpha)=a_n(\Omega,\alpha,\beta)$ следует из того, что L^2-нормы функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_n(\pi-x)$ совпадают.
Для доказательства второй части теоремы заметим, что при условиях (2.5), (2.6) из (2.3) и (2.4) следует, что спектральные данные задач $L(\tilde{\Omega},\alpha,\beta)$ и $L(\Omega^*,\alpha,\beta)$ совпадают. Согласно Теореме 1 отсюда следует, что $\tilde{\Omega}(x)=\Omega^*(x)$ почти всюду. Если потенциал нечётный, т.е. $\Omega(x)=\Omega^*(x)$, то из уже доказанной первой части следует, что $\lambda_{-n}(\Omega,\alpha,\alpha)=-\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha)$ (в частности, $\lambda_0(\Omega,\alpha,\alpha)=0$) и $a_{-n}(\Omega,\alpha,\alpha)=a_n(\Omega,\alpha,\alpha)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, зная спектральные данные задачи $L(\Omega,\alpha,\alpha)$ только при положительных (отрицательных) индексах вместе с $a_0(\Omega,\alpha,\alpha)$), мы можем построить спектральную функцию, по которой, уже конструктивно, можно восстановить потенциал $\Omega(x)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4.

1. *Для всех $n\in\mathbb{Z}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta)=-\lambda_n(0,q,\alpha,\beta), \tag{2.7}$$

$$a_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta)=a_n(0,q,\alpha,\beta). \tag{2.8}$$

2. *(Единственность по одному спектру) Если*

$$\lambda_n(0,q_1,\alpha,0)=\lambda_n(0,q_2,\alpha,0)\quad \textbf{для всех}\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

$0<|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$, *то $q_1(x)=q_2(x)$ почти всюду.*

3. *(Восстановление по одному спектру) Потенциал задачи $L(0,q,\alpha,0)$ при $0<|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$ однозначно и конструктивно восстанавливается по одному спектру $\{\lambda_n(0,q,\alpha,0),\ n\in\mathbb{Z}\}$. При этом,*

$$a_n(0,q,\alpha,0)=$$

$$= -\frac{\sin 2\alpha}{\lambda_n(0,q,\alpha,0) - \lambda_{-n}(0,q,\alpha,0)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(0,q,\alpha,0) - \lambda_k(0,q,\alpha,0)}{\lambda_n(0,q,\alpha,0) + \lambda_{-k}(0,q,\alpha,0)}. \quad (2.10)$$

4. *Потенциал задачи* $\mathrm{L}(0,q,0,0)$ *однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам :*
$\{\lambda_n(0,q,0,0),\ n>0\}$ *и* $\{a_n(0,q,0,0),\ n\geq 0\}$ *или* $\{\lambda_n(0,q,0,0),\ n<0\}$ *и* $\{a_n(0,q,0,0),\ n\leq 0\}$.

Доказательство. Пусть φ_n – собственная функция задачи $\mathrm{L}(0,q,\alpha,0)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n{=}\lambda_n(0,q,\alpha,0)$. Тогда вектор-функция $\tilde{\varphi}_n = \sigma_2\varphi_n$ удовлетворяет уравнению

$$\ell\tilde{\varphi}_n = \left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + \sigma_3\cdot q(x)\right\}\sigma_2\varphi_n(x) = -\sigma_2\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + \sigma_3\cdot q(x)\right\}\varphi_n(x)$$
$$= -\sigma_2\ell\varphi_n = -\sigma_2\lambda_n\varphi_n = -\lambda_n\tilde{\varphi}_n$$

и краевым условиям $(-\alpha,-\beta)$. Отсюда следует (как и при доказательстве Теоремы 3), что $\lambda_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta) = -\lambda_n(0,q,\alpha,\beta)$, $n\in\mathbb{Z}$. Равенство $a_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta) = a_n(0,q,\alpha,\beta)$ следует из того, что L^2-нормы φ_n и $\sigma_2\varphi_n$ равны. Для доказательства второй части заметим, что согласно (2.7) и (2.9)

$$\lambda_n(0,q_1,-\alpha,0) = -\lambda_{-n}(0,q_1,\alpha,0) = -\lambda_{-n}(0,q_2,\alpha,0) = \lambda_n(0,q_2,-\alpha,0),\ n\in\mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Таким образом, из совпадения спектров задач $\mathrm{L}(0,q_1,\alpha,0)$ и $\mathrm{L}(0,q_2,\alpha,0)$ следует совпадение спектров задач $\mathrm{L}(0,q_1,-\alpha,0)$ и $\mathrm{L}(0,q_2,-\alpha,0)$. Так как из условия $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$ вытекает $\alpha\neq-\alpha$, то согласно Теореме 2, $q_1(x)=q_2(x)$ почти всюду. Для доказательства третьей части достаточно в формуле (2.2) взять $\gamma=-\alpha$ и, учитывая равенства (2.7), из (2.2) получить (2.10). Таким образом, зная (один) спектр задачи $\mathrm{L}(0,q,\alpha,0)$ при $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$, мы знаем и нормировочные постоянные $a_n(0,q,\alpha,0)$, $n\in\mathbb{Z}$, этой задачи и, согласно Теореме 1, можем однозначно и конструктивно восстановить потенциал $\Omega(x)=\sigma_3{\cdot}q(x)$ этой задачи. Для доказательства четвёртой части заметим, что спектр задачи $\mathrm{L}(0,q,0,0)$ симметричен относительно начала координат, т.е.

$$\lambda_0(0,q,0,0)=0 \quad \text{и} \quad \lambda_{-n}(0,q,0,0) = -\lambda_n(0,q,0,0), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Кроме того, из (2.8) следует, что $a_{-n}(0,q,0,0) = a_n(0,q,0,0)$, $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, зная указанную в формулировке "половину" спектральных данных задачи $\mathrm{L}(0,q,0,0)$, мы знаем и другую "половину", т.е. знаем спектральную функцию, что достаточно для конструктивного восстановления потенциала.

Теорема 5.

1. *Для всех* $n \in \mathbb{Z}$ *имеют место равенства*

$$\lambda_n(p,0,\alpha,\beta) = -\lambda_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right),$$
$$a_n(p,0,\alpha,\beta) = a_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right).$$

2. *(Единственность по одному спектру) Если для всех* $n \in \mathbb{Z}$

$$\lambda_n\left(p_1,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = \lambda_n\left(p_2,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4}\right), \tag{2.12}$$

то $p_1(x) = p_2(x)$ *почти всюду.*

3. *(Восстановление по одному спектру) При* $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ *потенциал задачи* $\mathrm{L}\left(p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right)$ *однозначно и конструктивно восстанавливается по одному спектру* $\left\{\lambda_n\left((p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right),\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. *При этом (полагаем* $\mathrm{sign}\ 0 = 1$*)*

$$a_n\left(p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = (\mathrm{sign}\ \alpha)\frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)+\lambda_{-n}\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)-\lambda_k\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)+\lambda_{-k}\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{2.13}$$

4. *Потенциал задачи* $\mathrm{L}\left(p,0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ *(или* $\mathrm{L}\left(p,0,-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$*) однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам* $\left\{\lambda_n\left(p,0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), n>0\right\}$ *и* $\left\{a_n\left(p,0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), n\geq 0\right\}$ *или* $\left\{\lambda_n\left(p,0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), n<0\right\}$ *и* $\left\{a_n\left(p,0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), n\leq 0\right\}$ *соответственно. Случай* $\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ *аналогичен.*

Доказательство. Во-первых заметим, что вектор-функция $\tilde{\varphi}_n = \sigma_3\varphi_n$ удовлетворяет тождеству

$$\ell\tilde{\varphi}_n = \left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2\cdot p(x)\right\}\sigma_3\varphi_n \equiv -\sigma_3\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2\cdot p(x)\right\}\varphi_n$$
$$\equiv -\sigma_3\ell\varphi_n \equiv -\sigma_3\lambda_n\varphi_n = -\lambda_n\tilde{\varphi}_n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

и краевым условиям $\left(\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha, \frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right)$, т.е.

$$\lambda_{-n}(p,0,\alpha,\beta) = -\lambda_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

L^2-нормы φ_n и $\sigma_3\varphi_n$ равны ($\tilde{\varphi}_n = \varphi_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right)$). Для доказательства второй части заметим, что (пусть для простоты $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$) при любом $n\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\lambda_n\left(p_1,0,\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = -\lambda_{-n}\left(p_1,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = -\lambda_{-n}\left(p_2,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \lambda_n \left(p_2, 0, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{4}\right),$$

и согласно условию $\frac{\pi}{2} - \alpha \neq \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, т.е. мы имеем совпадение уже двух спектров, откуда, согласно Теореме 2 следует, что $p_1(x) = p_2(x)$ почти всюду. Таким образом, в изучаемом случае задачи $L\left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right)$ знание одного спектра $\left\{\lambda_n \left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ (при $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$) приводит к знанию второго спектра : $\left\{\lambda_n \left(p, 0, \frac{\pi}{2}(\text{sign } \alpha) - \alpha, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Поэтому, подставляя в формуле (2.2) $\gamma = \frac{\pi}{2}(\text{sign } \alpha) - \alpha$, получаем выражение (2.13) для нормировочных постоянных, т.е. знаем спектральную функцию, при помощи которой конструктивно восстанавливаем потенциал.

Относительно четвёртой части теоремы 5 достаточно отметить, что спектр $\left\{\lambda_n \left(p, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ симметричен относительно начала координат. Остальное также, как и в случае доказательства Теоремы 4.

Замечание. Имеется несколько очевидных аналогов теоремы 5, а именно, если условие (2.12) поменять на одно из следующих условий :

$$\lambda_n \left(p_1, 0, \frac{\pi}{4}, \beta\right) = \lambda_n \left(p_2, 0, \frac{\pi}{4}, \beta\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_n \left(p_1, 0, -\frac{\pi}{4}, \beta\right) = \lambda_n \left(p_2, 0, -\frac{\pi}{4}, \beta\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_n \left(p_1, 0, \alpha, -\frac{\pi}{4}\right) = \lambda_n \left(p_2, 0, \alpha, -\frac{\pi}{4}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и соответственно поменять пункт 3, то теорема опять верна.

Аналогично, условие (2.9) Теоремы 4 можно заменить на

$$\lambda_n(0, q_1, 0, \beta) = \lambda_n(0, q_2, 0, \beta), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |\beta| < \frac{\pi}{2},$$

и соответственно поменять пункт 3.

Наконец обратимся к аналогам теоремы Амбарцумяна, о которых говорилось во введении и которые оказываются следствиями теорем 4 и 5.

Следствие А. Если $\lambda_n(0, q, \alpha, 0) = n - \frac{\alpha}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$ или $\lambda_n(0, q, 0, \beta) = n + \frac{\beta}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}$, то $q(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. С учетом равенства (1.5), достаточно взять $q_2(x) \equiv 0$ в пункте 2 Теоремы 4.

Следствие Б. *Если* $\lambda_n \left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right) = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, *то* $p(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. С учетом равенства (1.5), достаточно взять $p_2(x) \equiv 0$ в пункте 2 Теоремы 5.

Из вышеприведенного Замечания следует, что имеют место три других аналога теоремы Амбарцумяна для системы Дирака в соответствующих частных случаях.

Abstract. The paper gives a description of the cases where the inverse problem for Dirac's canonical system is solvable by spectral data less than required for the solvability in the general case. Some analogs of Ambartsumian's well-known theorem (in the inverse Sturm-Liouville problem) are obtained for Dirac's system case.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Ambartzumian, "Über eine Frage der Eigenwerttheorie", Z. Physik, vol. 53, pp. 690 – 695, 1929.
2. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 – 63, 1964.
3. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem. II", Comm. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 1–11, 1984.
4. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию, Москва, 1970.
5. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов, Баку, Элм., стр. 46–71, 1975.
6. Т. Н. Арутюнян, "Изоспектральные операторы Дирака", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 2, стр. 1 – 10, 1994.
7. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и Их Приложения, Киев, 1977.
8. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, том 167, № 5, стр. 967 – 970, 1966.
9. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории дифференциальных операторов второго порядка. I", Труды ММО, том I, стр. 327–420, 1952.
10. М. М. Маламуд, "О теоремах типа Борга для систем первого порядка на конечном интервале", Функц. анализ и его приложения, том 33, вып. 1, стр. 75 – 80, 1999.
11. G. Borg, "Eine Umkerhung der Sturm-Liouvillsche Eigenwertaufgabe", Acta Math., vol. 78, no. 1, pp. 1 – 96, 1946.
12. N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", Math. Tidsskr., B, pp. 25–30, 1949.
13. Л. А. Чудов, "Обратная задача Штурма–Лиувилля", Мат. сборник, том 25 (67), № 3, стр. 451 – 454, 1949.
14. O. H. Hald, "The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials", Acta Math., vol. 141, no. 3 - 4, pp. 263 – 291, 1978.

Поступила 21 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 15–26

О "В–ПРОИЗВЕДЕНИЯХ" ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

А. Г. Багдасарян

Ереванский государственный университет
E-mail : angen@arminco.com

Резюме. Для исследуемых пространств функций обобщённой гладкости типа Бесова вводится и разрабатывается исчисление так называемых, "В-произведений". В терминах введённой "операции" находят своё решение некоторые задачи теории функциональных пространств. В статье, в терминах "В-произведений" даётся характеризация интерполяционных пространств "вещественного" метода для пар пространств типа Бесова с разными анизотропиями.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи для определённого класса функциональных пространств не находят своего окончательного решения в терминах исследуемого класса. Появляется необходимость введения и рассмотрения функциональных пространств принципиально иного типа. Так, исследование следов функций из классических пространств Соболева привело к необходимости введения пространств Бесова (см. [1], [2]). Такая же особенность просматривается при описании интерполяцио0нных пространств "вещественного" метода для пар соболевских пространств (см. [3], [4]).

Результаты статьи [5] указывают на необходимость рассмотрения пространств функций, для характеризации гладкости которых приходится рассматривать и смешанные производные. Задача описания суммы анизотропных пространств Соболева с разными анизотропиями приводит к соболевским пространствам функций обобщённой гладкости (см. [6]). Гладкость функций из этих пространств не характеризуется в терминах производных (даже дробных), а описывается соответствующими "порождающими" функциями.

В монографии [7] Х. Трибель предложил задачу характеризации интерполяционных пространств "вещественного" метода для пары классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями. Оказалось, что и для этой цели необходимо ввести и рассмотреть новый класс функциональных пространств.

В настоящей работе, для описания соответствующих интерполяционных пространств, вводятся и исследуются, так называемые "B-произведения" пространств типа Бесова и в терминах введённой операции даётся характеризация интерполяционных пространств "вещественного" метода для пары классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями.

Оказывается, что "B-произведения" обладают рядом интересных свойств и имеют непосредственную связь с другими известными функциональными пространствами (например с пространствами "с доминирующей смешанной производной" (см. [8], [9])).

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{R}_n$ – – n-мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_n^+$ – – множество мультииндексов, т.е. векторов с неотрицательными целыми компонентами,

F – – преобразование Фурье и F^{-1} – – обратное преобразование Фурье,

$C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}_n)$ – – множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_n$,

$S = S(\mathbb{R}_n)$ – – класс Шварца быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_n$,

$S' = S'(\mathbb{R}_n)$ – – пространство медленно растущих обобщённых функций,

M_p – – пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p),

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$ – – интерполяционное пространство, полученное методом "вещественной" интерполяции.

Далее, знак "$\sim$" означает двустороннюю оценку, а c означает разные постоянные.

Будем говорить, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ полиномиального роста принадлежит классу G^+ (см. [5]), если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi), \quad c > 0, \tag{1}$$

для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$ с компонентами из множества $\{0; 1\}$ и любого $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0$. Наконец, G_∞^+ будет означать множество функций $\mu \in G^+$, для которых

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \mu(\xi) = \infty. \tag{2}$$

Замечание 1. Основным свойством функций из G^+ является тот факт, что из ограниченности функции $\mu \in G^+$ следует включение $\mu \in M_p$. Это свойство непосредственно следует из теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [10]).

Определение 1. Для любых $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и любой функции $\mu \in G^+$ положим

$$H^p_s(\mu,\mathbb{R}_n) \equiv H^p_s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_H = \left\|F^{-1}\{\mu^s F f\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)} < \infty \right\}.$$

Для положительных функций μ, непрерывных в $\mathbb{R}_n$ и бесконечно дифференцируемых вне координатных осей и удовлетворяющих оценке (1), H-пространства понимаются как пополнение класса Шварца S относительно определенной выше нормы.

Пространства $H^p_s(\mu,\mathbb{R}_n)$ рассмотрены в [5] и [11]. При $\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ они совпадают с классическими пространствами Соболева–Лиувилля. Если положить

$$I_{\mu^s} = F^{-1}\{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty,$$

то определение пространств типа Соболева–Лиувилля принимает вид

$$H^p_s(\mu) = I_{\mu^s} L_p.$$

Для определения обобщённых пространств типа Бесова обычно применяется так называемый метод покрытий (см. [12, 13]).

Условие (2) показывает, что для функций μ из G^+_∞ евклидово пространство $\mathbb{R}_n$ покрывается системой соответствующих множеств $\{\Omega_k\}_{k=0}^\infty$ (см. [14], [15]).

Пусть $\mathfrak{R}$ – полный многогранник с вершинами $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+_n$, $j = 1,\dots,N$ (т.е. начало координат является вершиной $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$ имеет вершины на каждой оси координат, отличные от начала координат). Сопоставим многограннику $\mathfrak{R}$ функции :

$$\mu_0(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N} \xi^{2\alpha^j}\right)^{1/2} \qquad \mu(\xi) = \left(1+\mu_0^2(\xi)\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Ясно, что $\mu \in G^+_\infty$.

Определение 2. Для любого $1 < p < \infty$ через $\Phi(\mu, \mathbb{R}_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающих следующими свойствами :

а) $\varphi_k \in S(\mathbb{R}_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$,

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \Omega_k \equiv \left\{\xi \in \mathbb{R}_n : 2^{k-1} \leq \mu_0(\xi) \leq 2^{k+1}\right\}$, $k = 1, \ldots$, и $\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \Omega_0 \equiv \{\xi \in \mathbb{R}_n : \mu_0(\xi) \leq 2\}$,

в) существует $c_1 > 0$ такое, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \geq c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}_n$,

г) существует $c_2 > 0$ такое, что $|\xi^{\gamma} D^{\gamma}(F\varphi_k)(\xi)| \leq c_2$, $k = 1, \ldots$, $\prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i \neq 0, \quad \gamma_i = 0, 1, \quad i = 1, \ldots, n$.

Пример системы из $\Phi(\mu, \mathbb{R}_n)$ приведен в [14].

Теперь B-пространства определяются обычным путем.

Определение 3. Для любых $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и любой системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu, \mathbb{R}_n)$ положим

$$B_{p,q}^{s}(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|_{B_{p,q}^{s}(\mu)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}^{q} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Иначе обстоит дело для функций $\mu \in G^+$, для которых условие (2) не выполняется. В этом случае метод покрытий не применим, и поэтому, как и в случае классических пространств, пространства типа Никольского–Бесова определяются посредством "вещественной" интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля (см. [16], [17]).

Определение 4. Для любых $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s < \infty$, и любой функции $\mu \in G^+$, положим

$$B_{p,q}^{0}(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv B_{p,q}^{0}(\mu) = \left(H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu)\right)_{1/2,q} \quad \text{и} \quad B_{p,q}^{s}(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^{0}(\mu).$$

Замечание 2. По Теореме 13.1 из [11] следует, что H-пространства, порождённые эквивалентными функциями совпадают. Определение 4 показывает, что аналогичное утверждение верно и для B-пространств (т.е. если $\mu, \nu \in G^+$ и $\mu \sim \nu$, то $B_{p,q}^{s}(\mu) = B_{p,q}^{s}(\nu)$ для любых $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s < \infty$).

Пространства $B_{p,q}^{s}(\mu)$ и $B_{p,q}^{0}(\mu)$ были введены и рассмотрены в [16] и [17].

Для рассматриваемых пространств имеет место аналог известной формулы "вещественной" интерполяции (см. [17]) :

$$B_{p,q}^{s}(\mu) = \left(H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\vartheta,q}, \quad -\infty < s_0 \neq s_1 < \infty, \quad s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1, \quad (4)$$

где $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$ и $\mu \in G^+$.

Там же в [17] доказана следующая теорема о представлении пространств типа Бесова.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$ и $\mu \in G^+$. Тогда*

$$a)\; B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|^{(1)}_B = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

$$б)\; B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|^{(2)}_B = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{2^{k/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Заметим, что при $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ пространства $B^s_{p,q}(\mu, \mathbb{R}_n)$ совпадают с классическими пространствами Бесова (см. [16], [17]). Кроме того, некоторые другие частные реализации B-пространств рассмотрены в [9] и [18]. Полагая в Определении 2 $\mu(\xi) = 1$, для произвольного $1 \leq q \leq \infty$ получаем $B^0_{p,q}(1) = L_p$. Множество B-пространств, в частности, содержит пространства L_p, $1 < p < \infty$.

Замечание 3. Если $B^0_{p,q}(\mu) = B^0_{p,q}(\nu)$, то $B^0_{p,q}(\mu) = B^0_{p,q}(\nu) = B^0_{p,q}(\mu + \nu)$. Действительно, из утверждения а) Теоремы 1 имеем :

$$\|f\|_{B^0_{p,q}(\mu+\nu)} \sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}(\mu + \nu)}{\mu^2 + \nu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + \nu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} +$$

$$+ c \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{\mu^2 + \nu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} +$$

$$+ c_1 \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \|f\|_{B^0_{p,q}(\mu)} + \|f\|_{B^0_{p,q}(\nu)} \sim \|f\|_{B^0_{p,q}(\mu)}.$$

Обратную оценку получаем из соображений двойственности (Теорема 6 из [17]).

§3. "В–ПРОИЗВЕДЕНИЯ" ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

Определение 5. Для любых $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s, m < \infty$ определим B-произведение пространств $B^s_{p,q}(\mu)$ и $B^m_{p,q}(\nu)$ следующим образом :

$$B^s_{p,q}(\mu) \cdot B^m_{p,q}(\nu) = I_{\mu^s \nu^m} \left(B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu) \right),$$

где

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)=\Big\{f\in S'(\mathbb{R}_n):\|f\|_{B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)}=$$

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left\|F^{-1}\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\cdot\frac{u^{1/2}\nu}{\nu^2+u}Ff\right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)}\frac{dt}{t}\frac{du}{u}\right)^{1/q}<\infty\Big\},$$

с обычными видоизменениями при $q=\infty$.

Можно заметить, что общий случай B-произведения получается из произведения нулевых пространств применением оператора "поднятия". Следовательно, дальнейшие рассмотрения посвящены именно этому случаю. Заметим также, что рассматриваемая "операция" действительно обладает некоторыми свойствами умножения действительных чисел :

а) $B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)=B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}(\mu)$ (коммутативность),

б) $\left[B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)\right]\cdot B^0_{p,q}(\lambda)=B^0_{p,q}(\mu)\cdot\left[B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\lambda)\right]$ (ассоциативность),

в) $B^0_{p,q}(\lambda)\cdot\left[B^0_{p,q}(\mu)\cap B^0_{p,q}(\nu)\right]=B^0_{p,q}(\lambda)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\cap B^0_{p,q}(\lambda)\cdot B^0_{p,q}(\nu)$ (дистрибутивность),

г) $B^0_{p,q}(\mu)\cdot L_p=B^0_{p,q}(\mu)$ (существование единичного элемента).

Заметим также, что в силу Следствия 1 имеем

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\mu)=B^0_{p,q}(\mu).$$

Замечание 4. Ясно, что норма "B-произведения" пространств $B^0_{p,q}(\mu)$ и $B^0_{p,q}(\nu)$ эквивалентна каждому из следующих двух выражений :

$$\left(\int_0^\infty\left\|F^{-1}\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}Ff\right\|^q_{B^0_{p,q}(\nu)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

$$\left(\int_0^\infty\left\|F^{-1}\frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t}Ff\right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

В следующей теореме описывается основное свойство B-произведений.

Теорема 2. *Пусть $\mu,\nu\in G^+$ и $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$. Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)=B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Доказательство : Из Определения 3 имеем

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)}=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\|F^{-1}\frac{(ut)^{1/2}\mu\nu}{(\mu\nu)^2+ut+t\nu^2+u\mu^2}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}\frac{du}{u}. \qquad (5)$$

Обозначим $k = (ut)^{1/2}\mu\nu$, $l = (\mu\nu)^2 + ut$, $m = t\nu^2 + u\mu^2$. Тогда используя следующее простое неравенство

$$\frac{k}{l+m} = \frac{\frac{k}{l}\cdot\frac{k}{m}}{\frac{k}{l}+\frac{k}{m}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{k}{l}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}, \quad k,l,m>0,$$

из формулы (5) и Замечания 1, получаем

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)} \le$$

$$\le c\int_0^\infty\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left(\frac{(ut)^{1/2}\mu\nu}{(\mu\nu)^2+ut}\right)^{1/2}\left(\frac{(ut)^{1/2}\mu\nu}{t\nu^2+u\mu^2}\right)^{1/2} Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}\frac{du}{u} =$$

$$= c\int_0^\infty\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left(\frac{(ut)^{1/2}\mu\nu}{(\mu\nu)^2+ut}\right)^{1/2}\left(\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{1/2}\frac{\mu}{\nu}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2+\frac{t}{u}}\right)^{1/2} Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}\frac{du}{u}. \tag{6}$$

Тогда, используя Теорему 1 из [16] (т.е. равенство $B^0_{p,q}(\mu^a) = B^0_{p,q}(\mu)$, $a \ne 0$) и формулу (6), и делая замену переменных $x = (ut)^{1/2}$, $y = (t/u)^{1/2}$, получаем

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)} \le$$

$$\le c\int_0^\infty\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left(\frac{x\mu\nu}{(\mu\nu)^2+x^2}\right)^{1/2}\left(\frac{y\frac{\mu}{\nu}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2+y^2}\right)^{1/2} Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty\int_0^\infty \left\| F^{-1}\frac{x^{1/2}\mu\nu}{(\mu\nu)^2+x}\cdot\frac{y^{1/2}\frac{\mu}{\nu}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2+y} Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}. \tag{7}$$

Неравенство (7) означает вложение

$$B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \subset B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu). \tag{8}$$

Обратное вложение получаем из соображений двойственности (см. Теорему 6 из [17]), с помощью (7) и Теоремы 1 из [16] :

$$B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \supset B^0_{p,q}(\mu^2)\cdot B^0_{p,q}(\nu^2) = B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu).$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\mu) = B^0_{p,q}(\mu).$$

Доказательство : Из Теоремы 2, Теоремы 1 из [16], Замечания 3 и Определения 1 имеем

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\mu) = B^0_{p,q}(\mu^2) \cdot B^0_{p,q}(1) = B^0_{p,q}(\mu^2) \cdot L_p = B^0_{p,q}(\mu).$$

§4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА "B–ПРОИЗВЕДЕНИЙ"

Теорема 3. *Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu) = B^0_{p,q}(\mu+\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right). \tag{9}$$

Доказательство : По Теореме 1 из [16] и Замечаний 1 и 2 получаем

$$B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = B^0_{p,q}\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu\nu}\right) = B^0_{p,q}\left(\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}\right). \tag{10}$$

Используя Теорему 2 и Теорему 1 из [16], получаем

$$B^0_{p,q}(\mu\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}\right) = B^0_{p,q}\left(\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right)^2\right) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{1}{(\mu+\nu)^2}\right) =$$

$$= B^0_{p,q}\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right) \cdot B^0_{p,q}(\mu+\nu). \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) и Теоремы 2 получаем (9) :

$$B^0_{p,q}\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right) \cdot B^0_{p,q}(\mu+\nu) = B^0_{p,q}(\mu\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{1}{(\mu+\nu)^2}\right) =$$

$$= B^0_{p,q}(\mu\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = B^0_{p,q}(\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \tag{12а}$$

$$= B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\mu\nu) = B^0_{p,q}(\nu) \cdot B^0_{p,q}(\mu\nu) = \tag{12б}$$

$$= B^0_{p,q}(\mu\nu) \cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = B^0_{p,q}(\mu) \cdot B^0_{p,q}(\nu). \tag{12в}$$

Доказательство : Шаг 1. Имеем (объяснения ниже)

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu^2)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=$$

$$=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^3}{\nu}\right)=B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^3}{\nu}\right)=$$

$$=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^3}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right). \tag{13}$$

Первое равенство в (13) написано на основании Следствия 1 и свойств B-произведений. Второе равенство написано на основании Теоремы 1 из [16]. Третье и четвертое равенства следуют из Теоремы 2. Аналогично первым трём шагам в (13) можно доказать, что

$$B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\nu^3}{\mu}\right). \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), получаем

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^3}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\nu^3}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\nu^3}{\nu}\right)=$$

$$=B^0_{p,q}\left(\frac{\mu^3}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\nu^3}{\mu}\right)B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu).$$

Полученное выражение симметрично относительно функций μ и ν. То же самое выражение можно получить и для $B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$, т.е. имеет место (12а).

Шаг 2. Используя (12а) для функций μ и $1/\nu$, из Теоремы 2 получаем

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\mu\nu)=B^0_{p,q}\left(\frac{1}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu\nu)=B^0_{p,q}(\nu)\cdot B^0_{p,q}(\mu\nu).$$

Это доказывает (12б).

Шаг 3. Для того, чтобы доказать равенство между (12а) и (12в) используем Теорему 2, Следствие 1 и равенства (12а) и (12б). Имеем

$$B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=$$

$$=B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}(\mu\nu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Аналогично доказываем равенство между (12б) и (12в). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\mu,\nu\in G^+$ *и* $1<p<\infty$, $\leq q\leq\infty$, $-\infty<s,r<\infty$, $s+r\neq 0$. *Тогда*

$$B^0_{p,q}\left(\mu^s\nu^r\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu).$$

Доказательство : Если $s=0$ или $r=0$, то требуемое равенство вытекает из Теорем 2 и 3. Если $r\neq 0$, то

$$B^0_{p,q}\left(\mu^s\nu^r\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}\left(\mu^s\nu^r\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^r\right)=B^0_{p,q}\left(\mu^{s+r}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^r\right)=$$
$$=B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu), \qquad (15)$$

где первое и третье равенства являются следствиями Теоремы 1 из [16], а второе и четвёртое равенства следуют из Теоремы 2. Теорема 5 доказана.

§5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

Теорема 6. *Пусть* $\mu,\nu\in G^+$ *и* $1<p<\infty$, $1\leq q\leq\infty$. *Тогда* $0<\vartheta<1$

$$a)\quad \left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=B^{1-\vartheta}_{p,q}(\mu)\cdot B^{\vartheta}_{p,q}(\nu), \qquad (16)$$
$$b)\quad \left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=B^1_{p,q}\left(\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Доказательство : Согласно Теореме 3 из [15] имеем :

$$\left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=\left\{f\in S' : \|f\|^{(1)}_{\left(B^1_{p,q}(\mu),\,B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}}=\right.$$
$$\left.=\left(\int_0^\infty\left\|F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu\nu}{\mu^2+t\nu^2}\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}Ff\right\}\right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)\cap B^0_{p,q}(\nu)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\}. \qquad (17)$$

В терминах B-произведений это равенство можно переписать в виде :

$$\left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=$$
$$=I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}}\left(B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}(\mu)\right)\bigcap I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}}\left(B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^1_{p,q}(\nu)\right). \qquad (18)$$

На основании Теоремы 4 убеждаемся, что B-произведения в (18) совпадают. Тогда из (18), Теоремы 4 и Определения 5 получаем :

$$\left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}}\left(B^0_{p,q}(\mu)\cdot B^0_{p,q}(\nu)\right)=B^{1-\vartheta}_{p,q}(\mu)\cdot B^{\vartheta}_{p,q}(\nu).$$

Итак, утверждение а), т.е. равенство (16) доказано. Чтобы доказать равенство b), достаточно заметить (см. Теорему 5), что

$$\left(B^1_{p,q}(\mu),\, B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}=I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}}\left(B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}\right)=B^1_{p,q}\left(\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}\right)\cdot B^0_{p,q}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right).$$

Теорема 6 доказана.

Возвращаясь к B-пространствам, допускающим представления посредством метода покрытий (т.е. порождённым функциями из G^*_∞), можно переформулировать Теорему 6 в классических терминах.

Теорема 7. *Пусть функции μ, μ_0, ν, ν_0 такие, как в (3), $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu_0, \mathbb{R}_n)$ и $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\nu_0, \mathbb{R}_n)$ (см. Определение 2), и пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $1 < \vartheta < 1$ – произвольные числа. Тогда*

$$\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|^{(2)}_{\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}} = \right.$$

$$\left. = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(1-\vartheta)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq\vartheta} \|\varphi_k * \psi_j * f\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Доказательство : Из Определения 3 и равенства (4) имеем

$$\|f\|^{(2)}_{\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(1-\vartheta)} \|\varphi_k * f\|^q_{B^{\vartheta}_{p,q}(\nu)} \right)^{1/q}. \qquad (19)$$

С другой стороны, B-пространство в правой части (19) можно описать с помощью Теоремы 1. Тогда из Теоремы 1 и Определения 5 имеем

$$\|f\|^{(2)}_{\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(1-\vartheta)} \int_0^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu^{1+\vartheta}}{\nu^2 + t} F\varphi_k F f \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\int_0^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu^{1+\vartheta}}{\nu^2 + t} F f \right\|^q_{B^{1-\vartheta}_{p,q}(\mu)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{u^{1/2}\mu^{2-\vartheta}}{\mu^2 + u} \cdot \frac{t^{1/2}\nu^{1+\vartheta}}{\nu^2 + t} F f \right\|^q_{L_p(\mathbb{R}_n)} \frac{dt}{t} \frac{du}{u} \right)^{1/q} = \|f\|_{B^{1-\vartheta}_{p,q}(\mu) \cdot B^{\vartheta}_{p,q}(\nu)}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из Теоремы 6. Теорема 7 доказана.

Abstract. "B-products" calculus is proposed that can be used to study Besov type function spaces of generalized smoothness. The real interpolation spaces of pairs of Besov spaces with different anisotropies are characterized in terms of B-products.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Бесов, "О некотором семействе функциональных пространств", ДАН СССР, том 126, стр. 1163 – 1165, 1956.
2. О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР, том 60, стр. 42 – 81, 1961.

3. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
4. Х. Трибель, Теория интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
5. H. Triebel, "General function spaces III (spaces $B^{g(x)}_{p,q}$ and $F^{g(x)}_{p,q}$, $1 < p < \infty$: basic properties)", Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
6. A. G. Baghdasaryan, "On intermediate spaces and on quasilinearability of a pair of Sobolev–Liouville type spaces", Analysis Mathematica, vol. 24, pp. 3 – 14, 1998.
7. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.
8. H.-J. Schmeisser, H. Triebel, Topic in Fourier Analysis and Function Spaces, Chichester, Wiley, 1987.
9. H.-J. Schmeisser, W. Sickel, "Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses", Jenaer Schriften zur Math. und Inform., 2002.
10. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.
11. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения", УМН, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
12. М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 47 – 81, 1980.
13. B. Stockert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B^s_{p,q}$ type and $F^s_{p,q}$ type", Math. Nach., vol. 89, pp. 247 – 267, 1979.
14. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН АрмССР, Серия Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
15. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяционных свойствах обобщенных пространств типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля", ДАН России, том 394, том 1, стр. 1 – 3, 2004.
16. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых пространств типа Соболева–Лиувилля", Изв. АН Армении. Серия Математика, том 36, № 5, стр. 14 – 22, 2001.
17. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщённых пространств типа Бесова", Изв. АН Армении, Серия Математика, том 38, № 6, стр. 49 – 62, 2003.
18. R. A. DeVore, S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Hyperbolic wavelet approximation", Constr. Approx., vol. 14, pp. 1 – 26, 1998.

Поступила 21 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 27–40

LACUNARY NON–CONTINUABLE BOUNDARY–REGULAR HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH UNIVERSAL PROPERTIES

L. Bernal–González, M. C. Calderón–Moreno[1] and W. Luh[2]

Facultad De Matemáticas, Avenida Reina Mercedes, 41080 Sevilla, Spain
Fachbereich Mathematik Universität Trier, D-54286 Trier, Germany
E–mails : lbernal@us.es, mccm@us.es, luh@uni-trier.de

Abstract. A holomorphic function φ in a Jordan domain G in the complex plane is constructed with all its derivatives extending continuously up to the boundary ∂G that happens to be a natural boundary of φ. In addition, the action of a certain class of operators on φ presents some universal properties related to the overconvergence phenomenon.

§ 1. INTRODUCTION AND NOTATION

In this paper, we are concerned with the problem of the existence of holomorphic functions defined on a Jordan domain G of the complex plane that enjoy simultaneously several properties, namely :

- The boundary of G is the natural boundary of those functions.
- They are boundary-regular, that is, their derivatives of all orders extend continuously up to the boundary of G.
- The power series expansion of each such a function around a prefixed point of G presents gaps outside a prescribed sequence S of integers with upper density $\overline{d}(S) = 1$.
- The action of a certain class of operators –including, for instance, the identity and the differentiation operators of all orders– on the partial sums of their Taylor

[1]The first two authors have been partially supported by Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía FQM-127 and by Ministerio de Ciencia y Tecnología Grant BFM2003-03893-C02-01.
[2]Corresponding author.

expansions satisfy some kind of "external universality" which is, in fact, a strong version of overconvergence.

The aim of this note is the construction of a function with all above properties. The precise statement together with its proof will be postponed till Section 3. In the remainder of this section, the pertinent terminology will be fixed, and some historical or bibliographical notes will be pointed out. A number of preparatory results will be stated in Section 2, where we also introduce a new class of operators, which are rather "natural" to our goal.

As usual, by $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ we denote the complex plane, the open unit disk, the set of rational numbers, the set of positive integers and $\mathbb{N}\cup\{0\}$, respectively. A subsequence $\{n_j\}_{j\geq 1}$ in $\mathbb{N}$ or $\mathbb{N}_0$ will always mean a strictly increasing sequence $n_1 < n_2 < \cdots$. If $M \subset \mathbb{C}$ then $M^0, \overline{M}, \partial M$ will stand for the interior, the closure and the boundary, respectively, of M in $\mathbb{C}$. If G is a domain (i.e. a nonempty, connected open subset) of $\mathbb{C}$, then $H(G)$ represents the set of holomorphic functions on G. Let be given a function $f \in H(G)$, then we say that f is holomorphic exactly on G (or G is the domain of holomorphy of f, or ∂G is the natural boundary of f) if f is analytically noncontinuable across any point of ∂G or, more precisely, for every $a \in G$, the radius of convergence of the Taylor series of f with center at a equals the Euclidean distance between a and ∂G. By $H_e(G)$ we abbreviate the class of all functions which are exactly holomorphic on G. Mittag-Leffler discovered in 1884 that $H_e(G) \neq \emptyset$ for all domains G, see [15, Chapter 10]. It is clear that if $f \in H_e(G)$ then f has no holomorphic extension to any domain containing G strictly.

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a domain. Then $A^\infty(G)$ denotes the class of holomorphic functions in G with very regular behavior at the boundary, that is,

$$A^\infty(G) = \{f \in H(G) : f^{(\ell)} \textbf{ has a continuous extension to } \overline{G} \quad \textbf{for all } \ell \in \mathbb{N}_0\}.$$

Notice that while $H(G)$ is a Fréchet space (i.e. a completely metrizable locally convex space) when endowed with the topology of uniform convergence on compacta. In the case that G is boundes then the class $A^\infty(G)$ also becomes a Fréchet space under the metric topology defined by $f_n \to f$ in $A^\infty(G)$ if and only if $f_n^{(\ell)} \to f^{(\ell)}$ uniformly in $\overline{G}$ for every $\ell \in \mathbb{N}_0$.

For a domain $G \subset \mathbb{C}$ (a compact set $L \subset \mathbb{C}$, respectively) we denote by $\mathcal{M}(G)$ ($\mathcal{M}(L)$, respectively) the collection of all compact sets $K \subset \overline{G}^c$ ($K \subset L^c$, respectively) with connected complement in $\mathbb{C}$. If $K \subset \mathbb{C}$ is compact, then by $A(K)$ we mean the family of all functions which are continuous on K and holomorphic in its interior K^0. The class $A(K)$ becomes a Banach space under the maximun norm.

Note that $A^\infty(G) \cap H_e(G)$ may well be empty or not. For instance, the function φ with $\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-2^{n/2}) z^{2^n}$ belongs to $A^\infty(\mathbb{D}) \cap H_e(\mathbb{D})$ (see [30, Chapter 16]), but $A(\overline{G}) \cap H_e(G) = \emptyset$ if $G := \mathbb{D} \setminus [0,1)$. Another interesting example of a function $\varphi \in A^\infty(\mathbb{D}) \cap H_e(\mathbb{D})$ is given by

$$\varphi(z) := 2z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^{n^2}}.$$

It turns out that φ is one-to-one on $\overline{\mathbb{D}}$ and hence mapping $\mathbb{D}$ conformally onto a Jordan domain G whose boundary ∂G is a C^∞-curve which is nowhere analytic.
Let us recall that J. Siciak proved in [31] a strong statement about noncontinuability in a N-dimensional setting (his proof leans on typical methods of several complex variables) whose one-dimensional instance asserts that if $G \subset \mathbb{C}$ is a bounded domain such that $G = \overline{G}^0$ and $\overline{G}^c$ is connected then $H_e(G) \cap A^\infty(G) \neq \emptyset$.
Suppose that $S = \{s_j\}_{j\geq 1}$ be a subsequence of $\mathbb{N}_0$ and let $\nu_S(n)$ be the number of $m \in S$ with $m \leq n$. Then the upper and lower density of S are defined as

$$\overline{d}(S) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu_S(n)}{n}, \qquad \underline{d}(S) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\nu_S(n)}{n}.$$

If $\overline{d}(S) = \underline{d}(S) =: d(S)$ then S is said to have the density $d(S)$.
If now $G \subset \mathbb{C}$ is a domain and $z_0 \in G$ then by $H_{S,z_0}(G)$ we mean the class of holomorphic functions in G whose power series expansion around z_0 presents gaps outside S or, equivalently,

$$H_{S,z_0}(G) = \{f \in H(G) : \ f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{for all} \quad n \notin S\}.$$

Therefore if $f \in H_{S,z_0}(G)$ we have in a neighborhood of z_0 that

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad \text{with} \quad a_\nu = 0 \quad \text{for all} \quad \nu \notin S.$$

For the sake of simplicity, we set $H_{S,0}(G) = H_S(G)$. Moreover, $\mathcal{P}_S$ will stand for the family of lacunary polynomials $P(z) = \sum_{\nu=0,\ \nu\in S}^{\infty} c_\nu z^\nu$ with gaps outside S.
If $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ and $n \in \mathbb{N}_0$, then we denote by $S(f, z_0, n)$ the partial sum of order n of the Taylor expansion $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu$ of f around z_0, that is, $S(f, z_0, n)(z) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu$.
A century ago Porter discovered that certain Taylor series with radius of convergence 1 enjoy the property that some subsequences of their sequences of partial sums (with

$z_0 = 0$) converge at some points outside the closed unit disk $\overline{\mathbb{D}}$. This phenomenon is called overconvergence. Starting from 1970, this idea has been largely developed and strengthened along various ways, as for instance : the partial sums have been replaced by the action of certain infinite matrices –with constant or non-constant entries– ; the overconvergence has been reinforced to the universal property of uniform approximation to any function $f \in A(K)$ for certain compact sets K –with $K \cap \overline{G} = \emptyset$ or even $K \cap G = \emptyset$, where G is a domain– ; the Taylor series have been generalized to Laurent series or Faber series ; and some properties have been shown to be generic in the space $X \subset H(G)$ where they are studied (that is, the subset of functions of X satisfying each of such properties is residual in X). These improvements are contained in a number of papers by Chui-Parnes, Melas, Nestoridis, Costakis, Katsoprinakis, Papadoperakis, Vlachou, Gehlen, Müller and the authors, among others (see [18, 7, 19, 27, 20, 13, 16, 24, 25, 32, 33, 2, 3, 28, 9, 4] and the references contained in them). Finally holomorphic functions satisfying both properties of universality-overconvergence and lacunarity have been found by Gharibyan, Müller and the third author in [14].

§ 2. PRELIMINARIES AND A NEW CLASS OF OPERATORS

This section is devoted to state several auxiliary results to be used later, and to consider certain classes of operators which are adequate for the statement of our main result.

Let be given a fixed $\alpha \in \mathbb{R}$ and consider the logarithmic α-spirals

$$L_\alpha := \{z = e^{(1+i\alpha)t},\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

Then a set $M \subset \mathbb{C}$ is called α-starlike with respect to $z_0 = 0$ if

$$M \cdot (L_\alpha \cap \overline{\mathbb{D}}) := \{z = \zeta w,\ \zeta \in M,\ w \in L_\alpha \cap \overline{\mathbb{D}}\} = M$$

and M is called α-starlike with respect to $z_0 \in M$ if $M_{z_0} := \{z = \zeta - z_0, \zeta \in M\}$ is α-starlike with respect to the origin. If $\alpha = 0$ then M is starlike in the traditional sense.

The content of the following lemma can be found in [13] and [20].

Lemma 2.1. *Let S be a subsequence of $\mathbb{N}_0$ with $\overline{d}(S) = 1$ and suppose that K is a compact set with connected complement and $0 \in K^0$. Assume that f is holomorphic on K with*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu \quad \text{where } f_\nu = 0 \text{ for all } \nu \notin S$$

near the origin. Suppose in addition that one of the two conditions is satisfied :

(a) $d(S) = 1$,

(b) $\overline{d}(S) = 1$ *and the component of K which contains the origin is α-starlike with respect to the origin.*

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists a lacunary polynomial $P \in \mathcal{P}_S$ such that

$$\max_{z \in K} |f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Recall that a power series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ is said to have Ostrowski gaps (p_k, q_k) $(k \in \mathbb{N})$ if p_k, q_k are positive integers such that

$$p_1 < q_1 \le p_2 < q_2 \le \cdots, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{q_k}{p_k} = \infty,$$

$$\text{and} \quad \lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \nu \in I}} |a_\nu|^{1/\nu} = 0, \quad \text{where} \quad I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (p_k, q_k).$$

Lemma 2.2. *Assume that G is a domain. Let $z_0 \in G$ and let $f \in H(G)$ such that the Taylor expansion of f around z_0 has Ostrowski gaps (p_k, q_k) $(k \in \mathbb{N})$. Then*

$$\sup_{\zeta \in L} \sup_{z \in K} |S(f, z_0, p_k)(z) - S(f, \zeta, p_k)(z)| \to 0 \qquad (k \to \infty) \tag{1}$$

for every pair K, L of compact sets with $K \subset \mathbb{C}$, $L \subset G$.

Proof : In [19, Theorem 1] it is shown that the expression in (1) without "$\sup_{\zeta \in L}$" tends to zero for each compact set K. But its proof reveals in fact that such convergence to zero holds uniformly with respect to ζ whenever ζ belongs to a compact subset of G.

Next we are going to consider two kinds of operators (i.e. continuous linear self-mappings) on the space $\mathcal{E} := H(\mathbb{C})$ of entire functions. This first kind is that of operators $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ having dense range. For instance, if $T(\mathcal{E}) \supset \{\text{polynomials}\}$ then T has dense range. Trivially, T has dense range if it is surjective. The second kind of operators is less usual, and it is fixed in the following definition.

Definition 2.1. Let $L \subset \mathbb{C}$ be a compact set and T be an operator on $\mathcal{E}$. Then we say that T is **compactly L-externally controlled** if the following property is satisfied :

Given $\varepsilon > 0$ and a compact set $K \subset \mathcal{M}(L)$, there are $\delta > 0$ and $M \in \mathcal{M}(L)$ such that

$$\left[h \in \mathcal{E} \text{ and } \sup_{z \in K} |h(z)| < \delta \right] \quad \textbf{implies} \quad \sup_{z \in K} |(Th)(z)| < \varepsilon.$$

Examples 2.3. 1. Let $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be an entire function. Then Φ is said to be of exponential type provided that there are positive constants A, B such that $|\Phi(z)| \leq A \exp(B|z|)$ for all $z \in \mathbb{C}$. Consider its associated formal linear (in general, infinite order) differential operator $\Phi(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ defined as $\Phi(D)f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}$ $(f \in \mathcal{E})$. Then $\Phi(D)$ is in fact a well-defined operator on $\mathcal{E}$. This is easy to see just by taking into account the Cauchy estimates as well as the fact that Φ is of exponential type if and only if the sequence $\{(n!|a_n|)^{1/n}\}_{n\geq 1}$ is bounded. By the Malgrange-Ehrenpreis theorem (see [11] or [23]) we have that $\Phi(D)$ is surjective (so it has dense range) as soon as $\Phi \not\equiv 0$.

Assume now that Φ is of subexponential type, that is, for given $\varepsilon > 0$ there is a positive constant A such that $|\Phi(z)| \leq A \exp(\varepsilon|z|)$ for all $z \in \mathbb{C}$; equivalently, $\lim_{n\to\infty}(n!|a_n|)^{1/n} = 0$ (see for instance [6]; see also [1] for a good exposition about the corresponding operators $\Phi(D)$). Then $\Phi(D) := T$ is compactly L-externally controlled for every compact set $L \subset \mathbb{C}$. Indeed, if $\varepsilon > 0$ and $K \in \mathcal{M}(L)$ are fixed, we can choose a Jordan domain J such that $K \subset J^0$, $L \cap \overline{J} = \emptyset$ and $\gamma := \partial J$ is rectifiable. Recall that $(n!|a_n|)^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Therefore given $\widetilde{\varepsilon} := \frac{\text{dist}(K,\gamma)}{2}$ there is a constant $A \in (0, +\infty)$ such that $n!|a_n| \leq A\widetilde{\varepsilon}^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Let us define

$$M := \overline{J} \qquad \text{and} \qquad \delta := \frac{\varepsilon \cdot \text{dist}(K,\gamma)}{A \cdot \text{length}(\gamma)}.$$

Then $M \in \mathcal{M}(L)$ and $\delta > 0$. Now, if we make γ oriented counterclockwise, we get from the Cauchy integral formula for derivatives that for every $z \in K$ and every $h \in \mathcal{E}$ one has

$$|(Th)(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^{(n)}(z)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{h(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A\widetilde{\varepsilon}^n}{2\pi} \cdot \frac{\sup_{t\in\gamma}|h(t)| \cdot \text{length}(\gamma)}{(\text{dist}(K,\gamma)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{A \cdot \text{length}(\gamma) \sup_{z\in\gamma}|h(t)|}{2 \cdot \text{dist}(K,\gamma)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{A \cdot \text{length}(\gamma)}{\text{dist}(K,\gamma)} \cdot \sup_{w\in M} |h(w)|.$$

Hence $\sup_{z\in K}|(Th)(z)| < \varepsilon$ whenever $\sup_{z\in M}|h(z)| < \delta$, as required.

2. The second part of the above example covers the cases $T = D^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, where $D^0 := I =$ the identity operator. Indeed, just take $\Phi(z) := z^n$. However, if Φ is of exponential type then $\Phi(D)$ is not always controlled in the sense of Definition 2.1. For instance, if we take $\Phi(z) := e^z$ then $\Phi(D)$ is the translation operator that takes a function $h \in \mathcal{E}$ to the function $z \mapsto h(z+1)$, which is not controlled for some compact set $L \subset \mathbb{C}$. In fact, more is true : If $\varphi \in \mathcal{E}$ is not the identity then the

composition operator $C_\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ defined as $C_\varphi h = h \circ \varphi$ is not compactly L-externally controlled for some compact set L. Indeed, fix $\alpha \in \mathbb{C}$ such that $\beta := \varphi(\alpha) \neq \alpha$ and choose $L := \{\beta\}$, $\varepsilon_0 := 1$, $K = \{\alpha\}$. Observe that $K \in \mathcal{M}(L)$. Now fix $\delta > 0$ and $M \in \mathcal{M}(L)$. By the Runge approximation theorem (see [12]) -applied to the compact set $M \cup \{\beta\}$- we can find a polynomial h such that $|h(z) - 0| < \delta$ $(z \in M)$ and $|h(\beta) - 2| < 1$. Hence $\sup_{z \in M} |h(z)| < \delta$ but $\sup_{z \in K} |(C_\varphi h)(z)| = |h(\beta)| > \varepsilon_0$, as required. It is clear that C_φ is L-controlled for all compact sets if φ is the identity. If φ is not the identity but it is a nonexpansive similarity -that is, $\varphi(z) \equiv a(z-b) + b$, where $|a| \leq 1$ and b is the (unique) finite fixed point of φ- then C_φ is compactly L-externally controlled, where L is any closed ball with center at b.

As for the density of the range, we claim that if $\varphi \in \mathcal{E}$ then C_φ has dense range if and only if φ is a similarity $\varphi(z) \equiv az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$ with $a \neq 0$). Indeed, the part "if" is evident because C_φ would be surjective. Finally, suppose that C_φ has dense range and that, by the way of contradiction, φ is not one-to-one. Then there are points $a, b \in \mathbb{C}$ with $a \neq b$ such that $\varphi(a) = \varphi(b)$. By density, there is sequence $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ for which $f_n \circ \varphi \to g$ $(n \to \infty)$ in $\mathcal{E}$, where $g(z) \equiv z$. In particular, $\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi(a)) = a$ and $\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi(b)) = b$, which is absurd because $\varphi(a) = \varphi(b)$. Therefore φ is an injective entire function, so it is a similarity, which proves the claim.

3. Let $\alpha \in \mathcal{E}$ and consider the multiplication operator $M_\alpha : f \in \mathcal{E} \mapsto \alpha f \in \mathcal{E}$. It is easy to see that M_α is always compactly L-externally controlled for all compact sets $L \subset \mathbb{C}$ and that, in addition, M_α has dense range if and only if α has no zeros.

4. Given a compact set $L \subset \mathbb{C}$, the family $\mathcal{A}$ of compactly L-externally controlled operators is a vector algebra in the space of all operators on $\mathcal{E}$, that is, if α, β are complex numbers and T_1, T_2 are in $\mathcal{A}$, then the operators $\alpha T_1 + \beta T_2$ and $T_1 \circ T_2$ are in $\mathcal{A}$ too. Indeed, this is evident for $\alpha T_1 + \beta T_2$. As for the composition $T_1 \circ T_2$, fix a number $\varepsilon > 0$ together with a compact set $K \in \mathcal{M}(L)$. Then there are $\delta_1 > 0$ and $M_1 \in \mathcal{M}(L)$ such that $||T_1 f||_K < \varepsilon$ whenever $f \in \mathcal{E}$ and $||f||_{M_1} < \delta_1$. By using now that T_2 is controlled, there are $\delta > 0$ and $M \in \mathcal{M}(L)$ such that $[h \in \mathcal{E}$ and $||h||_S < \delta]$ implies $||T_2 h||_{M_1} < \delta_1$. Then if $||h||_M < \delta$ we obtain $||T_1 T_2 h||_K < \varepsilon$, and we are done.

§ 3. CONSTRUCTION OF A UNIVERSAL FUNCTION

We are now ready to construct the promised universal function with respect to overconvergence having moreover additional properties of lacunarity, boundary-regular behavior and non-continuability.

Theorem 3.1. *Suppose that G is a Jordan domain, that $z_0 \in G$ and that S is a subsequence of $\mathbb{N}_0$ satisfying at least one of the following conditions :*

(a) $\underline{d}(S) = 1$,
(b) $\overline{d}(S) = 1$ *and* G *is* α*-starlike with respect to* $z_0 \in G$.

Then there exist a function $\varphi \in A^\infty(G) \cap H_e(G) \cap H_{S,z_0}(G)$ *and a subsequence* $\{p_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}_0$ *for which the following properties hold :*

(A) *For each compact set* $L \subset G$ *we have* $S(\varphi, \zeta, p_k) \to \varphi$ $(k \to \infty)$ *in* $A^\infty(G)$ *uniformly for all* $\zeta \in L$.

(B) *For each compact set* $K \in \mathcal{M}(\overline{G})$, *each compactly* $\overline{G}$*-externally controlled operator* T *on* $\mathcal{E}$ *with dense range, and each* $f \in A(K)$, *there exists a subsequence* $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_0$ *such that*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\zeta\in L} \sup_{z\in K} |(TS(\varphi,\zeta,p_{k_j}))(z) - f(z)| = 0$$

for every compact set $L \subset G$.

Proof : 1. Without loss of generality, we can assume that $z_0 = 0$. Let $\{K_\nu^*\}_{\nu\geq 1}$ be an exhausting sequence for $\mathcal{M}(G)$, that is, $K_\nu^* \in \mathcal{M}(G)$ for each ν and, given $K \in \mathcal{M}(G)$, there is $\nu \in \mathbb{N}$ depending on K such that $K \subset K_\nu$ (see for instance [Lemma 2.9][5]). Let $\{\Pi_\nu^*\}_{\nu\geq 1}$ be an enumeration of all polynomials with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.
Suppose that $\{(K_n, \Pi_n)\}_{n\geq 1}$ is an arrangement of all K_ν^* and Π_ν^* in which any combination (K_ν^*, Π_μ^*) occurs infinitely many often.
We choose a sequence of Jordan domains G_n with rectifiable boundary satisfying

$$\overline{G} \subset G_{n+1} \subset \overline{G_{n+1}} \subset G_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{G_n} \cap K_n = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{and} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \overline{G}.$$

In the case that G is α-starlike with respect to $z_0 = 0$ then we assume in addition that all G_n are α-starlike also (see for instance Duren [10], Theorem 2.19).

2. We construct sequences $\{p_n\}_{n\geq 1}$, $\{q_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}_0$ and a sequence $\{P_n\}_{n\geq 1}$ of polynomials by induction. First, we define

$$\delta_n := \operatorname{dist}(\overline{G}, \partial G_n), \quad \lambda_n := \text{length } (\partial G_n), \quad \varepsilon_n := \frac{\delta_n^n}{n!n^2\lambda_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Without loss of generality we may assume $\delta_n < 1$ $(n \in \mathbb{N})$.
By Lemma 2.1 there exists a polynomial

$$P_1(z) = \sum_{\nu=0}^{p_1} a_\nu z^\nu \quad \text{with} \quad a_\nu = 0 \quad \text{for} \quad \nu \notin S$$

which satisfies

$$\max_{z\in\overline{G_1}}|P_1(z)|<\varepsilon_1 \quad \text{and} \quad \max_{z\in K_1}|P_1(z)-\Pi_1(z)|<1.$$

We assume that $P_1,\dots,P_n$ have already been determined and that P_n has the form

$$P_n(z)=\sum_{\nu=q_{n-1}}^{p_n} a_\nu z^\nu \qquad \text{with} \quad a_\nu=0 \quad \text{for} \quad \nu\notin S.$$

We have set $q_0:=0$. Choose $q_n\in\mathbb{N}$ with $q_n>np_n$. Observing that $S_n:=\{t\in S: t\geq q_n\}$ also satisfies $d(S_n)=1$ if (a) holds and $\overline{d}(S_n)=1$ if (b) holds we can find by Lemma 2.1 again a polynomial

$$P_{n+1}(z)=\sum_{\nu=q_n}^{p_{n+1}} a_\nu z^\nu \qquad \text{with} \quad a_\nu=0 \quad \text{for} \quad \nu\notin S \tag{1}$$

which satisfies

$$\max_{z\in\overline{G_{n+1}}}|P_{n+1}(z)|<\varepsilon_{n+1} \tag{2}$$

and

$$\max_{z\in K_{n+1}}\left|P_{n+1}(z)-\left\{\Pi_{n+1}(z)-\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu(z)\right\}\right|<\frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

By induction we get $\{p_n\}_{n\geq1}$, $\{q_n\}_{n\geq1}$ and $\{P_n\}_{n\geq1}$.

3. For fixed $l\in\mathbb{N}_0$ and $n>l$ we obtain from the Cauchy integral formula for derivatives (we can assume that ∂G_n is oriented counterclockwise) that

$$\max_{z\in\overline{G}}|P_n^{(l)}(z)|=\max_{z\in\overline{G}}\left|\frac{l!}{2\pi i}\oint_{\partial G_n}\frac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{l+1}}\,d\zeta\right|\leq\frac{l!}{2\pi}\cdot\lambda_n\cdot\frac{\varepsilon_n}{(\delta_n)^{l+1}}<n!\lambda_n\cdot\frac{\varepsilon_n}{\delta_n^n}=\frac{1}{n^2}.$$

Therefore the series $\sum_{n=1}^\infty P_n^{(l)}(z)$ converges for each $l\in\mathbb{N}_0$ uniformly on $\overline{G}$, and it follows that the function φ, which is defined by

$$\varphi(z):=\sum_{n=1}^\infty P_n(z),$$

is holomorphic on G and that each derivative $\varphi^{(l)}$ has a continuous extension to $\overline{G}$. In other words, $\varphi\in A^\infty(G)$.

4. We consider the power series of φ around the origin. By the special form (1) of the polynomials P_n and by the property $q_n>np_n$ $(n\in\mathbb{N})$, the powers in P_n and P_m do not overlap if $n\neq m$ and therefore the power series of φ is given by

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu z^\nu \qquad \text{with} \quad a_\nu=0 \quad \text{for} \quad \nu\notin S. \tag{4}$$

Thus, $\varphi \in H_S(G)$. For its partial sums $S(\varphi, 0, n)$ we obtain especially

$$S(\varphi, 0, p_k)(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=1}^{k} P_\nu(z),$$

and we get for each $l \in \mathbb{N}_0$

$$(S(\varphi, 0, p_k))^{(l)}(z) = \sum_{\nu=1}^{k} P_\nu^{(l)}(z) \to \varphi^{(l)}(z) \qquad (k \to \infty)$$

uniformly on $\overline{G}$. Hence

$$S(\varphi, 0, p_k) \to \varphi \qquad \text{in} \quad A^\infty(G). \tag{5}$$

Let us define the functions of two complex variables $F_k : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ by

$$F_k(\zeta, z) := S(\varphi, \zeta, p_k)(z) - S(\varphi, 0, p_k)(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k} \left\{ \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu - \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu \right\}.$$

Then every F_k is separately analytic with respect to ζ, z; whence it is analytic in $G \times \mathbb{C}$ by Hartog's theorem [pages 25 and 93–95][17]. Note that, due to Lemma 2.2, F_k tends to zero compactly in $G \times \mathbb{C}$. Therefore the Weierstrass convergence theorem for several variables (see [page 154][26]) guarantees that $\partial^l F_k / \partial z^l \to 0$ $(k \to \infty)$ uniformly on compacta in $G \times \mathbb{C}$ for each $l \in \mathbb{N}_0$. Finally, this combined with (5) shows that, for every compact set $L \subset G$, one has $S(\varphi, \zeta, p_k) \to \varphi$ $(k \to \infty)$ in $A^\infty(G)$ uniformly in $\zeta \in L$. This concludes the proof of (A).

5. It remains to prove (B) and that $\varphi \in H_e(G)$. With this aim, fix any $K \in \mathcal{M}(\overline{G})$ and any $f \in A(K)$. By Mergelyan's theorem (see [12]) there exists a sequence of polynomials $\{\Pi^*_{m_j}\}_{j \geq 1}$ with

$$\Pi^*_{m_j} \to f \quad (k \to \infty) \quad \text{uniformly on} \quad K. \tag{6}$$

The set K is contained in some K^*_ν and by our construction there exists a sequence $\{k_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbb{N}$ with $K^*_\nu = K_{k_j}$, $\Pi^*_{m_j} = \Pi_{k_j}$ $(j \in \mathbb{N})$.
From (3) we obtain

$$\max_{z \in K} \left| \sum_{\nu=1}^{k_j} P_\nu(z) - \Pi_{k_j}(z) \right| < \frac{1}{k_j},$$

and together with (6) we get

$$S(\varphi, 0, p_{k_j})(z) = \sum_{\nu=0}^{p_{k_j}} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=1}^{k_j} P_\nu(z) \to f(z) \quad (k \to \infty) \quad \text{uniformly on} \quad K.$$

6. The power series (4) has Ostrowski gaps (p_k, q_k) $(k \in \mathbb{N})$ with $q_k/p_k \to \infty$. By the universal properties established in step (5), the sequence $\{S(\varphi, 0, p_{k_j})\}_{j \geq 1}$ cannot converge at any point of $\overline{G}^c$. It therefore follows from Ostrowski's theorem on overconvergence (see for instance [page 314][15]) that $\varphi \in H_e(G)$.

7. Finally, fix again a set $K \in \mathcal{M}(\overline{G})$ and a function $f \in A(K)$. Fix also a compactly $\overline{G}$-externally controlled operator $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ with dense range. Let $\varepsilon > 0$. Then there exists $g \in \mathcal{E}$ such that

$$\sup_{z \in K} |(Tg)(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

By the control property, we can find a number $\delta > 0$ and a set $M \in \mathcal{M}(\overline{G})$ such that

$$\left[h \in \mathcal{E} \quad \textbf{and} \quad \sup_{z \in M} |h(z)| < \delta \right] \qquad \textbf{implies} \qquad \sup_{z \in K} |(Th)(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

By step 5 (with K, f replaced by M, g, respectively) we can get a number $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ satisfying

$$\sup_{z \in M} |S(\varphi, 0, p_k)(z) - g(z)| < \delta.$$

Hence (8) tells us that

$$\sup_{z \in K} |(TS(\varphi, 0, p_k))(z) - (Tg)(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

where we have used the linearity of T. Therefore, (7), (9) and the triangle inequality yield

$$\sup_{z \in K} |(TS(\varphi, 0, p_k))(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

By choosing $\varepsilon = 1/j$ $(j \in \mathbb{N})$, it is evident that there is a sequence $\{k(1) < k(2) < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ for which

$$\sup_{z \in K} |(TS(\varphi, 0, p_{k(j)}))(z) - f(z)| \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{10}$$

In order to prove (B) it is enough –thanks to (10) and the linearity of T– to select a sequence $\{j(\nu)\}_{\nu \geq 1} \subset \mathbb{N}$ such that

$$\sup_{\zeta \in L} \sup_{z \in K} |(T(S(\varphi, \zeta, p_{k(j(\nu))}) - S(\varphi, 0, p_{k(j(\nu))})))(z)| \to 0 \qquad (j \to \infty) \tag{11}$$

for all compact sets $L \subset G$. Finally, we would re-label $p_{k(j)} \equiv p_{k(j(\nu))}$ and this would conclude the proof. With this aim, the control property of T comes anew to our help.

Fix an increasing sequence of comact sets $L_\nu \subset G$ ($\nu \in \mathbb{N}$) with the property that every compact set $L \subset G$ is included in some L_ν (see for instance [30, Chapter 13]). By Lemma 2.2, we have for all compact sets $L \subset G$, $M \subset \mathbb{C}$ that

$$\sup_{\zeta \in L} \sup_{z \in M} |S(\varphi, \zeta, p_{k(j)})(z) - S(\varphi, 0, p_{k(j)})(z)| \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{12}$$

Given $\nu \in \mathbb{N}$, there exist $\delta_\nu > 0$ and $M_\nu \in \mathcal{M}(\overline{G})$ such that $\sup_{z \in K} |(Th)(z)| < 1/\nu$ for every $h \in \mathcal{E}$ with $\sup_{z \in M_\nu} |h(z)| < \delta_\nu$. From (12), there is $j(\nu) \in \mathbb{N}$ (by induction, it can be obtained $j(1) < j(2) < \cdots$) with

$$\sup_{z \in M_\nu} |S(\varphi, \zeta, p_{k(j(\nu))})(z) - S(\varphi, 0, p_{k(j(\nu))})(z)| < \delta_\nu \qquad (\zeta \in L_\nu). \tag{13}$$

Let us prescribe a compact set $L \subset G$. Then there is $\nu_0 \in \mathbb{N}$ such that $L \subset L_\nu$ for all $\nu \geq \nu_0$. Consequently, (13) and the control property give us for all $\nu \geq \nu_0$ that

$$\begin{aligned} &\sup_{\zeta \in L} \sup_{z \in K} |(T(S(\varphi, \zeta, p_{k(j(\nu))}) - S(\varphi, 0, p_{k(j(\nu))})))(z)| \\ &\leq \sup_{\zeta \in L_\nu} \sup_{z \in K} |(T(S(\varphi, \zeta, p_{k(j(\nu))}) - S(\varphi, 0, p_{k(j(\nu))})))(z)| \leq \frac{1}{\nu} \to 0 \qquad (\nu \to \infty). \end{aligned}$$

Thus, (11) is derived, as required, and the proof is complete.
We conclude the paper by gathering a number of comments concerning Theorem 3.1 and its proof.

Remarks 3.2. 1. Observe that the proof of the last theorem is rather constructive, in the sense that it is not based on Baire-category arguments.

2. A closer look at the proof reveals that one can weaken slightly the hypothesis of denseness of the range of T. In fact, it is enough to assume that $T(\mathcal{E})$ is dense for the topology on $\mathcal{E}$ defined by the uniform convergence on all sets in $\mathcal{M}(\overline{G})$. For instance, if $\alpha \in \mathcal{E}$ and $\emptyset \neq \alpha^{-1}(\{0\}) \subset \overline{G}$, then the multiplication operator M_α has not dense range but it still satisfies the conclusion of Theorem 3.1.

3. In the case that $d(S) = 1$ our theorem remains valid if the Jordan domain G is replaced by, more generally, a bounded domain G with $G = \overline{G}^0$ and $\overline{G}^c$ connected. Indeed, in step 1 we still can find Jordan domains G_n with $\overline{G} \subset G_n$ and $\overline{G_n} \cap K_n = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$); then one would take $\delta_n := \min\{1, \operatorname{dist}(\overline{G}, \partial G_n)\}$ to make the adequate estimations. Finally, in step 6, from the application of Ostrowski's theorem it follows that the largest domain contained in $\overline{G}$ –that is, $\overline{G}^0$– is the domain of holomorphy of φ. But $G = \overline{G}^0$, so $\varphi \in H_e(G)$. The remaining steps of the proof may stay unchanged. Consequently, we have obtained the one-dimensional case of

Siciak's theorem mentioned in Section 1, but enriched with lacunarity and universality properties.

4. Concerning (A), even in the familiar case $G = \mathbb{D}$, $\zeta = 0$ one may well have for a function $\varphi \in A^\infty(\mathbb{D})$ that $S(\varphi, 0, n) \not\to \varphi$ $(n \to \infty)$ in $A^\infty(\mathbb{D})$. In fact, there are functions $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$ such that its sequence of Taylor polynomials at the origin does not converge to φ in $A(\overline{\mathbb{D}})$ (that is, uniformly on $\overline{\mathbb{D}}$). Only it is true that $\varphi(rz) \to \varphi(z)$ $(r \to 1^-)$ in $A(\overline{\mathbb{D}})$ for all $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$, see [8, p. 286]).

5. Concerning (B), we may wonder whether the compact sets K might be allowed to satisfy merely $K \cap G = \emptyset$ instead of the stronger condition $K \cap \overline{G} = \emptyset$. The answer is negative. In fact, we cannot even construct a universal function $\varphi \in A(\overline{G})$, see [25, Proposition 5.6].

Резюме. В работе рассматривается голоморфная функция φ в жордановой области G комплексной плоскости, все производные которой непрерывно продолжены до границы ∂G, являющейся естественной границей функции φ. Далее, определяется действие некоторого класса операторов на функцию φ и исследуются некоторые универсальные свойства явления сверхсходимости.

REFERENCES

1. C. A. Berenstein and R. Gay. Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis. Springer-Verlag, New York, 1995.
2. L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno and W. Luh, "Universality and summability of trigonometric polynomials and trigonometric series", Periodica Math. Hungar., vol. 46, pp. 119–133, 2003.
3. L. Bernal-González, M.C. Calderón-Moreno and W. Luh, "Universal transforms of the geometric series under generalized Riesz methods", Comp. Meth. Funct. Theory, vol. 3 pp. 285–297, 2003.
4. L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno and W. Luh, "Universal matrix transforms of holomorphic functions", Houston J. Math., to appear.
5. L. Bernal-González and A. Montes-Rodríguez, "Universal functions for composition operators", Complex Variables, vol. 27, pp. 47–56, 1995.
6. R. P. Boas, Entire functions, Academic Press, New York, 1954.
7. C. Chui and M. N. Parnes, "Approximation by overconvergence of power series", J. Math. Anal. Appl., vol. 36, pp. 693–696, 1971.
8. J. B. Conway. Functions of one complex variable, II. Springer-Verlag, New York, 1995.
9. G. Costakis and V. Vlachou, "Identical approximative sequence for various notions of universality", J. Approx. Theory, vol. 132, pp.15–24, 2005.
10. P. L. Duren. Univalent Functions. Springer-Verlag, New York, 1983.
11. L. Ehrenpreis, "Mean periodic functions I", Amer. J. Math., vol. 77, pp. 293–328, 1955.
12. D. Gaier, Lectures on Complex Approximation. Birkhäuser, Basel-London-Stuttgart, 1987.

13. W. Gehlen, W. Luh and J. Müller, "On the existence of O-universal functions", Complex Variables, vol. 41, pp. 81–90, 2000.
14. T. Gharibyan, W. Luh and J. Müller, "Lacunary summability and analytic continuation of power series", Analysis, vol. 24, pp. 255–271, 2004.
15. E. Hille, Analytic Function Theory, II. Chelsea Publishing Company, New York, 1987.
16. E. Katsoprinakis, V. Nestoridis and I. Papadoperakis, "Universal Faber Series", Analysis, vol. 21, pp. 339–363, 2001.
17. S. Krantz, Function theory of several complex variables. John Wiley, New York, 1982.
18. W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 88, 1970.
19. W. Luh, "Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets", Analysis, vol. 6, pp. 191–207, 1986.
20. W. Luh, "Multiply universal functions holomorphic functions", J. Approx. Theory, vol. 89, pp. 135–155, 1997.
21. W. Luh, V. A. Martirosian and J. Müller, "Universal entire functions with gap power series", Indag. Mathem., N.S., vol. 9(4), pp. 529–536, 1998.
22. W. Luh, V. A. Martirosian and J. Müller, "Restricted T-universal functions", J. Approx. Theory, vol. 114, pp. 201–213, 2002.
23. B. Malgrange, "Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 6, pp. 271–355, 955/1956.
24. A. Melas and V. Nestoridis, "On various types of universal Taylor series", Complex Variables, vol. 44, pp. 245–258, 2001.
25. A. Melas and V. Nestoridis, "Universality of Taylor series as a generic property of holomorphic functions", Adv. Math., vol. 157, pp. 138–176, 2001.
26. R. Narasimhan and Y. Nievergelt, Complex Analysis in One Variable. 2nd ed., Birkhäuser, Boston, 2001.
27. V. Nestoridis, "Universal Taylor Series", Ann. Inst. Fourier, vol. 46, pp. 1293–1306, 1996.
28. V. Nestoridis, "A strong notion of universal Taylor series", J. London Math. Soc., vol. 68, pp. 712–724, 2003.
29 A. Ostrowski, "Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen", Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ., vol. 1, pp. 327–350, 1922.
30. W. Rudin, Real and Complex Analysis. 3rd edition, McGraw-Hill, New York-St. Louis-San Francisco, 1987.
31. J. Siciak, "Highly noncontinuable functions on polynomially convex sets", Univ. Iag. Acta Math., vol. 25, pp. 97–107, (1985).
32. V. Vlachou, "On some classes of universal functions", Analysis, vol. 22, pp. 149–161, 2002.
33. V. Vlachou, "Coincidence of two classes of universal Laurent series", Complex Variables, vol. 47, pp. 1045–1053, 2002.

Поступила 27 августа 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 41–48

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛИЗИРОВАННОГО ЧИСЛОВОГО ОБРАЗА

Л. З. Геворгян

Государственный инженерный университет Армении
E-mail : levgev@hotmail.com

Резюме. В первой части настоящей заметки мы исследуем вопрос когда число, принадлежащее границе числового образа является нормальным собственным значением. Во второй части рассматриваются условия, при которых начало координат принадлежит числовому образу оператора. В последней части устанавливаются некоторые связи между спектром и нормализированным числовым образом оператора.

Пусть A – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H, \langle\cdot,\cdot\rangle$, $N(A) = \{x : Ax = \theta\}$ – его ядро, $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ – числовой образ, а

$$W_n(A) = \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} : \|Ax\| \neq \theta \right\}$$

нормализированный числовой образ оператора A. Напомним, что комплексное число λ называется нормальным собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент $x \in H$, такой что $Ax = \lambda x$ и $A^* x = \overline{\lambda} x$.

1. Следующее утверждение (см. [5], Лемма 5.2.2) играет важную роль при доказательстве существования квадратного корня для любого положительного оператора. Так как приведённое там доказательство содержит неточности, мы приводим элементарные выкладки.

Лемма 1. *Пусть оператор A неотрицателен, т.е. $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для любого $x \in H$. Тогда условие $\langle Ax, x\rangle = 0$ влечет $Ax = \theta$.*

Доказательство. Посчитаем

$$\left\langle A\left(x-\frac{Ax}{\|A\|}\right), x-\frac{Ax}{\|A\|}\right\rangle = -2\frac{\|Ax\|^2}{\|A\|}+\frac{1}{\|A\|^2}\left\langle A^2x, Ax\right\rangle.$$

Следовательно

$$\left\langle A\left(x-\frac{Ax}{\|A\|}\right), x-\frac{Ax}{\|A\|}\right\rangle \le -\frac{1}{\|A\|}\|Ax\|^2 \le 0.$$

Очевидно, что утверждения $\langle Ax, x\rangle = 0 \Rightarrow Ax = \theta$ и $\langle Ax, x\rangle = 0 \Leftrightarrow Ax = \theta$ эквивалентны. Сдвигом на скаляр можно это утверждение переформулировать следующим образом : если числовой образ самосопряженного оператора A содержит наибольшее (наименьшее) значение μ, то μ является собственным значением оператора A. Развивая эту идею, М. Эмбри [1] показала, что если $\mu \in W(A)$ является граничной точкой и $\mu = \langle Ax, x\rangle / \|x\|^2$, то существует действительное число ω такое, что

$$\exp(i\omega)(A-\mu I)x = \exp(-i\omega)\left(A^* - \overline{\mu} I\right)x.$$

Как установлено Гильдебрандтом в [3], $(A-\mu I)\,x = \theta$ влечет $(A^* - \overline{\mu} I)\,x = \theta$, т.е. собственное значение μ, принадлежащее границе числового образа, является нормальным собственным значением. Стампфли в [8] доказал, что если A есть гипонормальный оператор (т.е. $A^*A - AA^* \ge 0$), то любая крайняя точка из $W(A)$ является нормальным собственным значением оператора A.

В работе автора [2] такое же утверждение доказывается для более обширного класса операторов, но для некоторого подмножества крайних точек. В известной монографии [7] приведено аналогичное утверждение (Гл. IV, Лемма 5.2)

Пусть A - аккретивный оператор (т.е. $\Re\langle Ax, x\rangle \ge 0$ для любого $x \in H$). Тогда

$$|\langle Af, g\rangle|^2 \le \Re\langle Af, f\rangle \cdot \Re\langle Ag, g\rangle$$

и, следовательно, из $\Re\langle Af, f\rangle = 0$ следует $Af = \theta$. К сожалению, не только доказательство, но и само утверждение ошибочны. Действительно, полагая $f = g$, получим

$$|\langle Af, f\rangle|^2 \le \Re^2\langle Af, f\rangle.$$

В силу аккретивности оператора A имеем $|\langle Af, f\rangle| \le \Re\langle Af, f\rangle$. Так как противоположное неравенство справедливо для любого комплексного числа, то $\langle Af, f\rangle = \Re\langle Af, f\rangle$, что неверно в общем случае. В качестве конкретного опровергающего примера можно взять вольтерровский оператор интегрирования в $L^2(0,1)$:

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Очевидно

$$\left(\frac{V+V^*}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|^2 \geq 0,$$

так что оператор V аккретивен. При $f(x) \equiv 1$ и $g(x) \equiv x$ получим $\langle Vf, g\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle Vf, f\rangle = \frac{1}{3}$ и $\langle Vf, g\rangle = \frac{1}{8}$. Таким образом, требуемое неравенство неверно даже в ослабленном виде

$$|\langle Vf, g\rangle|^2 \leq |\langle Vf, f\rangle| \cdot |\langle Vg, g\rangle|.$$

Этот пример является крайним в некотором смысле, поскольку $N(V) = \{\theta\}$, а $N(\Re V)$ совпадает с ортогональным дополнением к подпространству констант, т.е. имеет коразмерность 1.

2. Введём обозначение $M_\lambda(A) = \left\{x : \langle Ax, x\rangle = \lambda\,\|x\|^2\right\}$. Очевидно, что $M_\lambda(A) \neq \{\theta\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in W(A)$. В [1] М. Эмбри доказала, что $M_\lambda(A)$ является нетривиальным подпространством пространства H тогда и только тогда, когда λ есть крайняя точка множества $W(A)$.

Предложение 1. *Условия $0 \notin W_n(A)$ и $M_0(A) = N(A)$ эквивалентны.*

Доказательство. Переходя к отрицанию обоих частей, получим, очевидно, эквивалентные (в силу включения $N(A) \subset M_0(A)$) утверждения

$$0 \in W_n(A) \Leftrightarrow \{\exists\, x \text{ st } \langle Ax, x\rangle = 0 \,\&\, Ax \neq \theta\}.$$

Предложение 2. *Условия $0 \in W_n(A)$ и $0 \in W_n(A^*)$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть наоборот $0 \notin W_n(A^*)$. По Предложению 1, это условие означает $N(A^*) = M_0(A^*) = M_0(A)$, и согласно результату М. Эмбри, 0 является крайней точкой $W(A)$. Следовательно, 0 принадлежит границе множества $W(A)$, и из равенства $A^*x = \theta$ следует $Ax = \theta$, т.е. $0 \notin W_n(A)$.

Следствие 1. Условия $0 \notin W_n(A)$ и $N(A^*) = N(A) = M_0(A)$ эквивалентны. Отсюда заключаем, что при выполнении указанного условия оператор A представляется в виде ортогональной суммы

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 \notin W(B)$, причем одно из слагаемых может отсутствовать. Нетрудно заметить, что второе слагаемое отсутствует тогда и только тогда, когда $0 \notin W(A)$.

Замечание 1. Если существует ненулевой элемент $x \in H$ такой, что $A^*x = Ax = \theta$, то для любых y, $Ay \neq \theta$ и $t \in \mathbb{C}$ получаем

$$\frac{\langle A(y+tx), y+tx\rangle}{\|A(y+tx)\| \cdot \|y+tx\|} = \frac{\langle Ay, y\rangle}{\|Ay\| \cdot \|y+tx\|}.$$

Это означает, что $W_n(A)$ содержит любой интервал, соединяющий точку 0 с произвольной точкой $W_n(A)$. В частности, если $0 \in W(A) \& 0 \notin W_n(A)$, то $W_n(A)$ звездообразно относительно начала координат.

Пример 1. Пусть A – оператор усреднения

$$(Af)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt, \quad f \in L^2(-1;1).$$

Пространство $L^2(-1;1)$ представимо в виде ортогональной суммы $L^2(0;1) \oplus L^2(0;1)$ (см. [9], Решение 149). Первое слагаемое в ней соответствует чётной, а второе - нечётной компоненте функции f. Тогда оператор A расщепляется в ортогональную сумму

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

где C – оператор Харди-Литлвуда

$$(Cf)(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt, \quad f \in L^2(0;1).$$

Нетрудно проверить, что $C = I + S^*$, где S – оператор простого одностороннего сдвига. Кроме того, имеем $W(S^*) = \{z : |z| < 1\}$ и

$$W(C) = \{z : |z-1| < 1\}, \quad W(A) = W(C) \cup \{0\}, \quad W_n(A) = \{z : |z| \leq 1, \Re z > 0\}.$$

Если $0 \notin W_n(A)$, то множество $W(A)$ (а также $W_n(A)$) целиком лежит в некоторой полуплоскости, граница которой содержит начало координат. Таким образом, если $z = 0$ является внутренней точкой $W(A)$, то $0 \in W_n(A)$. Кроме того, можно отметить, что если $D_\varepsilon = \{z : |z| \leq \varepsilon\}$ – некоторый круг, лежащий целиком в $W(A)$, $\langle Ax, x\rangle / \|x\|^2 \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$ и $\langle Ay, y\rangle = 0$, $Ay \neq \theta$, то множество

$$\left\{ \frac{\langle A((1-t)x+ty)\rangle, (1-t)x+ty}{\|A((1-t)x+ty)\| \cdot \|A((1-t)x+ty)\|} : 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

содержит отрезок, соединяющий точку $\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|}$ с началом координат. Следовательно, в силу неравенства

$$\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \cdot \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2},$$

круг $D = \left\{z : |z| \le \frac{\varepsilon}{\|A\|}\right\}$ целиком лежит в $W_n(A)$. Таким образом, если 0 является внутренней точкой $W(A)$, то она является внутренней также для $W_n(A)$. Обратное утверждение легко следует из выпуклости $W(A)$.
Случай $0 \notin W(A)$ также представляет определенный интерес. Он характеризуется следующим образом.

Предложение 3. *Точка 0 не принадлежит множеству $W(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ существует постоянная $c(x) > 0$ такая, что*

$$\|x\| \le c(x) \cdot \|x + y\| \tag{1}$$

для любого $y \in H$, удовлетворяющего $\langle Ax, y\rangle = 0$.

Доказательство. Обозначим $\delta = \inf_y \|x + y\|$. Если $\delta > 0$, то неравенство (1) уже установлено. В противном случае существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n \to -x$ и $\langle Ax, y_n\rangle = 0$. Следовательно, в силу непрерывности имеем $\langle Ax, x\rangle = 0$, откуда $x = \theta$. В этом случае выше приведенное неравенство верно для любой положительной постоянной. С другой стороны, если $\langle Ax, x\rangle = 0$ для некоторого элемента $x \ne \theta$, то полагая $y = -x$, получим $\|x\| \le c(x) \cdot 0$.

Замечание 2. Величина c может зависеть от x. Действительно, если

$$x_n = \sin 2\pi nt, \quad y_n = \frac{3}{2\pi n} - \sin 2\pi nt,$$

и $A = V^*V$, то некоторые элементарные вычисления дают

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \|x_n + y_n\| = \frac{3}{2\pi n} \to 0,$$

$$\langle x_n, V^*Vy_n\rangle = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi nt}{2\pi n} \cdot \frac{3t - 1 + \cos 2\pi nt}{2\pi n}\, dt = 0,$$

и, следовательно, неравенство (1) невозможно ни при каком положительном c.

Замечание 3. Согласно результату Ли и Шоу [4], если 0 не является внутренней точкой $W(A)$, то для всех $x, y \in H$ имеет место неравенство

$$\|x\| \le \|x + Ay\| + 2\sqrt{\|Ax\| \cdot \|y\|}.$$

Предложение 4. *Начало координат не принадлежит $W_n(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in M_0(A)$ существует постоянная t (зависящая, вообще говоря, от x) такая, что*

$$\|tAx - x\| \le \|x\|.$$

Доказательство. Заметим, что элементы x и Ax ортогональны тогда и только тогда, когда для любого $t \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство $\|tAx - x\| \geq \|x\|$. Следовательно,

$$\|x\|^2 = \|tAx - x\|^2 = |t|^2 \cdot \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

и $Ax = \theta$. Необходимость указанного условия очевидна.

Следующее предложение является непосредственным следствием результатов работы [3], Предложения 4 и Теоремы 5 из [4].

Предложение 5. *Имеют место утверждения*

$$0 \in \overline{W}_n(A) \Longleftrightarrow 0 \in \overline{W}(A) \Longleftrightarrow |\lambda| \leq \|A - \lambda I\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

3. Исследуем теперь связь между нормализированным числовым образом и спектром оператора. Покажем, что каждая точка из спектра оставляет след в нормализированном числовом образе. Известно, что если точка λ принадлежит SpA, то либо $A - \lambda I$ имеет в H неплотный образ $R(A)$, тогда ядро $A^* - \overline{\lambda} I$ нетривиально, либо оператор $A - \lambda I$ не ограничен снизу, т.е. существует последовательность единичных элементов $\{x_n\}$ такая, что

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0 \tag{2}$$

(в этом случае λ принадлежит предельному спектру оператора A). Пусть $\overline{\lambda} \neq 0$ – собственное значение оператора A^*, $A^*x = \overline{\lambda}x$ (собственное значение 0 играет особую роль и будет рассмотрено далее). В силу соотношений

$$\|Ax\| \cdot \|x\| \geq |\langle Ax, x\rangle| = |\langle x, A^*x\rangle| = |\lambda| \cdot \|x\|^2,$$

имеем также

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \lambda \cdot \frac{\|x\|}{\|Ax\|}.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что любому ненулевому собственному значению λ оператора A соответствует точка $sgn\ \lambda = \exp(i \arg \lambda)$ из $W_n(A)$.

Пусть теперь λ – ненулевая точка из предельного спектра и $\{x_n\}$ – последовательность единичных элементов, удовлетворяющая (2). Тогда

$$|\lambda - \langle Ax_n, x_n\rangle| = |\langle (A - \lambda I)\, x_n, x_n\rangle| = \|(A - \lambda I)\, x_n\| \to 0,$$

$$\big||\lambda| - \|Ax_n\|\big| \leq \|(A - \lambda I)\, x_n\| \to 0,$$

т.е.

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda, \quad \|Ax_n\| \to |\lambda|,$$

$$\frac{\langle Ax_n, x_n\rangle}{\|Ax_n\|} \to sgn\ \lambda,$$

откуда получаем $sgn\ \lambda \in \overline{W}_n(A)$.

Предложение 6. *Условие* $0 \in SpA$ *влечёт* $0 \in \overline{W}_n(A)$.

Доказательство. Согласно Предложению 5, имеет место эквивалентность

$$0 \in \overline{W}_n(A) \Leftrightarrow 0 \in \overline{W}(A).$$

Так как $SpA \subset \overline{W}(A)$, то $0 \in \overline{W}_n(A)$.

Пример оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(0;\ 1)$ показывает, что из условия $0 \in SpA$, вообще говоря, не следует, что $0 \in W_n(A)$. Что же касается нулевого собственного значения оператора A^* очевидно, что если $A^*x = \theta$ и $Ax \neq \theta$, то

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \frac{\langle x, A^*x\rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = 0,$$

и поэтому $0 \in W_n(A)$.

Точки из $\overline{W}_n(A) \backslash W_n(A)$, лежащие на единичной окружности, тесным образом связаны с предельным спектром оператора A.

Предложение 7. *Если* $e^{i\phi} \in \overline{W}_n(A) \backslash W_n(A)$, *то некоторая точка* $ae^{i\phi}$ $(a \geq 0)$ *принадлежит предельному спектру оператора* A.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность единичных элементов, такая что

$$\frac{\langle Ax_n, x_n\rangle}{\|Ax_n\|} \to e^{i\phi}.$$

Последовательность $\{\|Ax_n\|\}$ ограничена, и следовательно

$$\langle Ax_n, x_n\rangle e^{-i\phi} - \|Ax_n\| \to 0.$$

Если последовательность $\{\|Ax_n\|\}$ сходится к некоторому числу a, то

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \to ae^{i\phi}$$

и

$$\left\|\left(A - ae^{i\phi}I\right)x_n\right\|^2 = \left|ae^{i\phi} - \langle Ax_n, x_n\rangle\right|^2 - |\langle Ax_n, x_n\rangle|^2 + \|Ax_n\|^2 \to 0.$$

Случай двумерной клетки Жордана

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что единственная точка спектра $0 \in SpJ_2$ может порождать все множество

$$\{z : |z| = 1\} = \overline{W}_n(J_2) \backslash W_n(J_2).$$

Резюме. The note points at some conditions when a boundary point of the numerical range of a bounded operator in a Hilbert space is a normal eigenvalue of the operator, as well as at the conditions, for the origin to belongs to the normalized numerical range of the operator. Connections between the spectrum and the normalized numerical range of an operator are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Embry, "The numerical range of an operator", Pacific J. Math., vol. 32, pp. 647 – 650, 1970.
2. Л. З. Геворгян, "О выдающихся точках числового образа оператора", Электронный журнал "Исследовано в России", 020, стр. 191-200, 2003, http ://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/020.pdf.
3. L. Z. Gevorgyan, "On the convergence rate of iterations and the normalized numerical range of an operator", Math. Sci. Res. J. vol. 8, no. 1, pp. 16 – 26, 2004.
4. S. Hildebrandt, "Ueber den numerischen Wertebereich eines Operators", Math. Ann., vol. 163, pp. 415 – 421, 1966.
5. Li Yuan-Chuan, Shaw Sen-Yen, "An abstract ergodic theorem and some inequalities for operators on Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 125, pp. 111 – 119, 1997.
6. А. И. Плеснер, Спектральная Теория Линейных Операторов, Москва, Наука, 1965.
7. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический Анализ Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Мир, 1970.
8. J. G. Stampfli, "Extreme points of the numerical range of hyponormal operators", Michigan Math. J., vol. 13, pp. 87 – 89, 1966.
9. П. Халмош, Гильбертово Пространство в Задачах, Москва, Мир, 1970.

Поступила 7 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 49-58

STABILITY FOR FAMILIES OF NONLINEAR EQUATIONS

Peter Kosmol and Dieter Müller-Wichards

Universität Kiel, Kiel, Germany
Hamburg University of Applied Sciences, Hamburg, Germany

Abstract. A stability principle concerning solutions of sequences of nonlinear equations for continuous operators on $\mathbb{R}^n$ is described that can be applied to a wide class of operators for which point-wise convergence already implies continuous convergence, in particular to sequences of monotone operators.

§1. INTRODUCTION

The following theorem is of central significance for stability investigations :

Theorem 1.1 (see [4]). *Let X and Y be metric spaces and let $(f_n : X \longmapsto Y)$ be a sequence of continuous functions that converges point-wise to a function $f : X \longmapsto Y$. Then the following statements are equivalent :*

1. *$\{f_n\}$ is equicontinuous,*
2. *f is continuous and (f_n) converges continuously to f,*
3. *(f_n) converges uniformly on compact subsets to f.*

If continuous convergence of a sequence has been established for a certain class of functions then this property is inherited by compositions (even though these compositions may not belong to the original class) in the following sense :

Theorem 1.2. *Let X,Y, and Z be metric spaces, $(f_n : X \longmapsto Y)$ be a sequence of functions that converges continuously to a function $f : X \longmapsto Y$, and $(g_n : Y \longmapsto Z)$ be a sequence of functions that converges continuously to a function $g : Y \longmapsto Z$. Then $(g_n \circ f_n : X \longmapsto Z)$ converges continuously to $g \circ f$. In particular, if*

- *f is continuous then $f \circ g_n \longmapsto f \circ g$ continuously,*
- *if g continuous then $g \circ f_n \longmapsto g \circ f$ continuously.*

For sequences of convex functions, equicontinuity and hence continuous convergence already follows from pointwise convergence ([4], Satz 3, p. 219). Subsequently we will show that a similar statement holds for sequences of monotone operators. Continuous convergence in turn implies stability of solutions under certain conditions on the limiting problem.

Both, solutions of equations and optimization problems, can be treated in the framework of variational inequalities. In fact, sequences of variational inequalities show a similar stable behavior, where again continuous convergence is of central significance ([4], Satz 1, p. 245). We employ this scheme in the context of two-stage solutions (Section 4).

Stability questions for minimal solutions of point-wise convergent sequences of convex functions have been treated in a number of publications. It turns out that stability can be guaranteed if the set of minimal solutions of the limit problem is bounded (see [4]). As an application, ill posed optimization problems are replaced by sequences of (numerically) well posed problems (see [9, 10]). The question arises, whether a corresponding statement holds on the equation level for certain classes of mappings that are not necessarily potential operators. Questions of this type arise e.g. in the context of smooth projection methods for semi-infinite optimization (see [6]).

A general framework for treating stability questions involving nonlinear equations for sequences of continuous operators on $\mathbb{R}^n$ is given by the following scheme (see [6]) :

Theorem 1.3. *Let $U \subset \mathbb{R}^n$ and $A_k : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ be a sequence of continuous operators that converges continuously on U to a continuous operator $A : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ with the property :*

there exists a ball $\overline{K}(x_0, r) \subset U$, $r > 0$ such that

$$\langle Ax, x - x_0 \rangle > 0 \tag{1}$$

for all x in the sphere $S(x_0, r)$.

Then there exists some $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for any $k \geq k_0$ each equation $A_k x = 0$ has a solution x_k in $K(x_0, r)$. Furthermore, every point of accumulation of (x_k) is a solution of $Ax = 0$.

The above theorem is a consequence of the following well known lemma.

Lemma 1.4. *Let $A : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ be continuous. If there is $r > 0$ and a ball $\overline{K}(x_0, r) \subset U$ such that $\langle Ax, x - x_0 \rangle \geq 0$ for all $x \in S(x_0, r)$, then the nonlinear equation $Ax = 0$ has a solution in $\overline{K}(x_0, r)$.*

Proof : Otherwise Browder's fixed point theorem applied to the mapping

$$x \longmapsto g(x) = -r\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) + x_0$$

would lead to a contradiction.

§2. STABILITY FOR MONOTONE OPERATORS

A large class of operators can be treated using the above stability principle, where point-wise convergence already implies uniform convergence on compact subsets. Among them are the monotone operators according to :

Definition 2.1. Let X be a normed space and let U be a subset of X. A mapping $A : U \longmapsto X^*$ is called monotone on U if for all $x, y \in U$,

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0.$$

Lemma 2.2 (see [13]). *Let U be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and let $A_k : U \to \mathbb{R}^n$ be a sequence of continuous monotone operators that converges point-wise on U to an operator $A : U \to \mathbb{R}^n$. Then for every sequence $(x_k) \subset U$ that converges in U it follows that the sequence $(A_k x_k)$ is bounded.*

Proof : Assume that there is a sequence (x_k) in U with $\lim x_k = x_0 \in U$ such that $(A_k x_k)$ is unbounded. Then there is a subsequence $(A_{k_i} x_{k_i})$ with the property $||A_{k_i} x_{k_i}|| \geq i$ for all $i \in \mathbb{N}$. As A_{k_i} is monotone we obtain for all $z \in U$:

$$\langle A_{k_i} x_{k_i} - A_{k_i} z, x_{k_i} - z \rangle \geq 0.$$

If now $y_{k_i} = \frac{A_{k_i} x_{k_i}}{||A_{k_i} x_{k_i}||}$, then we can w.l.g. assume that the sequence (y_{k_i}) converges to some y in the unit sphere. If the above inequality is divided by $||A_{k_i} x_{k_i}||$ we obtain for all $z \in U$:

$$\left\langle y_{k_i} - \frac{A_{k_i} z}{||A_{k_i} x_{k_i}||}, x_{k_i} - z \right\rangle \geq 0$$

Point-wise convergence implies $A_{k_i} z \to Az$ and hence

$$\lim_{i \to \infty} \left\langle y_{k_i} - \frac{A_{k_i} z}{||A_{k_i} x_{k_i}||}, x_{k_i} - z \right\rangle = \langle y, x_0 - z \rangle \geq 0, \quad z \in U.$$

As U is open, it follows that $y = 0$, a contradiction completing the proof.

The following theorem states that point-wise convergence of continuous monotone operators already implies continuous convergence.

Theorem 2.3 (see [13]). *Let U be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and let $A_k : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ be a sequence of continuous monotone operators that converges point-wise on U to a continuous operator $A : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ then (A_k) is equicontinuous on U.*

Proof : According to Theorem 1.1, it is sufficient to show the following : convergence of a sequence (x_k) in U to an element $x_0 \in U$ implies $\lim A_k x_k = Ax_0$.
Assume that there is a sequence (x_k) in U convergent to $x_0 \in U$ such that $(A_k x_k)$ does not converge to Ax_0, i.e. there is $\varepsilon > 0$ and a subsequence $(A_{k_i} x_{k_i})$ with the property

$$\|A_{k_i} x_{k_i} - Ax_0\| \geq \varepsilon$$

for all $i \in \mathbb{N}$. By Lemma 2.2 $(A_{k_i} x_{k_i})$ is bounded and w.l.g. we can assume that it converges to some $g \in \mathbb{R}^n$. Because of the previous inequality we have $\|g - Ax_0\| \geq \varepsilon$. On the other hand we obtain by the monotonicity of A_{k_i} for all $u \in U$:

$$\langle A_{k_i} x_{k_i} - A_{k_i} u, x_{k_i} - u\rangle \geq 0,$$

and hence, using point-wise convergence we get $\langle g - Au, x_0 - u\rangle \geq 0$ for all $u \in U$. By theorem 2.4 below it follows that $g = Ax_0$, a contradiction yielding the proof.

Theorem 2.4 (Browder and Minty [12]). *Let E be a Banach space, U an open subset of E and $A : U \longmapsto E^*$ a semi-continuous operator. If for a pair $u_0 \in U$ and $v_0 \in E^*$ and for all $u \in U$ the inequality :*

$$\langle Au - v_0, u - u_0\rangle \geq 0$$

holds, then $v_0 = Au_0$.
An immediate consequence of the theorem of Browder and Minty is the following characterization theorem for solutions of the equation $Ax = 0$, if A is a monotone operator.

Theorem 2.5 (see [12]). *Let E be a Banach space, U an open subset of E and $A : U \longmapsto E^*$ a continuous and monotone operator. Then $Au_0 = 0$ for $u_0 \in U$ if and only if for all $u \in U$*

$$\langle Au, u - u_0\rangle \geq 0.$$

Proof : the if-part follows from Theorem 2.4 for $v_0 = 0$. Let now $Au_0 = 0$ then, from the monotonicity of A, we obtain :

$$0 \leq \langle Au - Au_0, u - u_0\rangle = \langle Au, u - u_0\rangle.$$

Remark 2.6. If U is convex then the above theorem directly implies that the set $S_A := \{x \in U | Ax = 0\}$ is convex.
For monotone operators we obtain the following existence theorem which in a way is a stronger version of Lemma 1.4.

Theorem 2.7. *Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be convex and $A : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ be a continuous monotone operator. If there exists a ball $\overline{K}(x_0, r) \subset U$ and $r > 0$ such that $\langle Ax, x - x_0 \rangle > 0$ for all $x \in S(x_0, r)$, then $\emptyset \neq S_A \subset K(x_0, r)$, where S_A is the set of solutions of the nonlinear equation $Ax = 0$.*

Proof : The first part follows from Lemma 1.4. For the second part let $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ with $\lambda > \mu$ and let $x \in S(x_0, r)$. Then monotonicity of A yields

$$\langle A(\lambda(x - x_0) + x_0) - A(\mu(x - x_0) + x_0), (\lambda - \mu)(x - x_0) \rangle \geq 0.$$

Let I be the intersect of U with the straight line passing through x and x_0. From the above inequality it follows that $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ with $g(\lambda) := \langle A(\lambda(x - x_0) + x_0), x - x_0 \rangle$ is an increasing function. In particular $g(1) = \langle Ax, x - x_0 \rangle > 0$. Suppose there is a $1 < \lambda_* \in I$ such that $A(\lambda_*(x - x_0) + x_0) = 0$ then $g(\lambda_*) = 0$, a contradiction completing the proof.
We are now in the position to present a stronger version of Theorem 1.3 for sequences of monotone operators.

Theorem 2.8. *Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be open and convex and $A_k : U \to \mathbb{R}^n$ be a sequence of continuous monotone operators that converges point-wise on U to a continuous operator $A : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ with the property :*

there exists a ball $\overline{K}(x_0, r) \subset U, r > 0$ such that $\langle Ax, x - x_0 \rangle > 0$ for all x on the sphere $S(x_0, r)$.

Then there exists some $k_0 \in \mathbb{N}$ such that the set of the solutions of the equation $A_k x = 0$ is nonempty $\forall k \geq k_0$ and contained in $K(x_0, r)$. Furthermore, if $x_k \in \{x \in U | A_k x = 0\}$, $k \geq k_0$, then every point of accumulation of (x_k) is a solution of $Ax = 0$.
Property (1) is satisfied by various classes of operators, among them the derivatives of convex functions.

Lemma 2.9. *If a monotone operator A defined on $\mathbb{R}^n$ has a convex potential f with a bounded set of minimal solutions $M(f, \mathbb{R}^n)$ (which, of course, coincides with the set of solutions of $Ax = 0$), then A satisfies the property (1).*

Proof : Apparently for each $x_0 \in M(f, \mathbb{R}^n)$ there is a sphere $S(x_0, r)$ such that $f(x) - f(x_0) > 0$ for all $x \in S(x_0, r)$. As $A = f'$, the subgradient-inequality on that sphere yields :

$$0 < f(x) - f(x_0) \leq \langle Ax, x - x_0 \rangle$$

The proof is complete.

For general monotone operators such a statement is not available, i.e. the property (1) does not follow from the boundedness of the solutions of $Ax = 0$, as the following example shows.

Example 2.10. Let $A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ be a linear operator that represents a $\frac{\pi}{2}$-rotation. A is monotone as

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle = \langle A(x-y), x-y\rangle = 0,$$

but on any sphere around the origin we have $\langle Ax, x\rangle = 0$. Obviously, $\{x | Ax = 0\} = \{0\}$.

An important class of operators in this context are the Fejér-contractions.

Definition 2.11. An operator $P : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ is called **Fejér-contraction** w.r.t. x_0 (see [1]) or strictly quasi-non-expansive (see [3]) if x_0 is a fixed point of P and there is an $r > 0$ such that $\|P(x) - x_0\| < \|x - x_0\|$ for all $x \notin K(x_0, r)$.

Remark 2.12. The above definition of a Fejér-contraction differs somewhat from that given in [1].

Remark 2.13. It follows immediately from the definition that the set of fixed points of a Fejér-contraction w.r.t. x_0 is bounded.

If P is a Fejér-contraction w.r.t. x_0 then the operator $A := I - P$ has property (1) as the following lemma shows.

Lemma 2.14. *Let $P : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ be a Fejér-contraction w.r.t. x_0. Then for $A := I - P$*

$$\langle Ax, x - x_0\rangle > 0$$

for all $x \notin K(x_0, r)$.

Proof : If $x \notin K(x_0, r)$, then we obtain :

$$\langle Ax, x - x_0\rangle = \langle x - x_0 - (P(x) - x_0), x - x_0\rangle = \|x - x_0\|^2 - \langle P(x) - x_0, x - x_0\rangle \geq$$

$$\geq \|x - x_0\|^2 - \|P(x) - x_0\|\|x - x_0\| > 0.$$

Remark 2.15. If P is also non-expansive on $\mathbb{R}^n$ then $A = I - P$ is apparently monotone and continuous.

It is easily seen that a projection P onto a bounded convex set is a non-expansive Fejér-contraction. It can be shown that the same is true for certain compositions of projections (see [6]).

§3. STABILITY FOR WIDER CLASSES OF OPERATORS

A large class of operators can be treated using the above stability principle, where point-wise convergence already implies continuous convergence. To illustrate this, consider a continuous operator $A : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ satisfying property (1). Then it is easily seen that in the following situations continuous convergence, and hence stability of the solutions follows from Theorem 1.1 :

1. $A_k = \alpha_k P + A$, *where* (α_k) *be a sequence in* $\mathbb{R}_+$ *tending to 0, while* $P : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *be continuous.*

   Proof : let $x_k \to x_0$ then the sequence $(P(x_k))$ is bounded, hence $\alpha_k P(x_k) \to 0$ and $A_k(x_k) \to A(x_0)$ because of the continuity of A.

2. $A_k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *is continuous and* $A_k \longmapsto A$ *component-wise monotone, i.e. for* $A_k(x) = (f_k^{(i)}(x))_{i=1}^n$ *and* $A(x) = (f^{(i)}(x))_{i=1}^n$ *one has point-wise monotone convergence of* $f_k^{(i)} \to f^{(i)}$ *for* $i = 1, \ldots, n$ *on* $\mathbb{R}^n$.

   Proof : follows from the Theorem of Dini (see [4]) applied to the components of A_k and A respectively.

3. $A_k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *is continuous,* $A_k \longmapsto A$ *point-wise on* $\mathbb{R}^n$ *and* $A_k - A$ *is monotone for all* $k \in \mathbb{N}$.

   Proof : we have $A_k - A \to 0$ point-wise on $\mathbb{R}^n$ and from Theorem 2.3 continuous convergence follows.

4. *Compositions of continuously convergent sequences of functions preserves continuous convergence,*

   i.e. if $g_k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ is continuously convergent to $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ and $f_k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ is continuously convergent to $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ then $f_k \circ g_k$ converges continuously to $f \circ g$.

A special case is obtained if either (f_k) or (g_k) is a constant sequence of a continuous function, e.g. if $B : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ is linear, $A_k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ is continuous and monotone, and $A_k \to A$ point-wise on $\mathbb{R}^n$, then $B \circ A_k$ converges continuously to $B \circ A$.

§4. TWO–STAGE SOLUTIONS

Two-stage solutions have been studied in [4, 8, 9, 10] in particular for sequences of convex functions. The following theorem (see [4], p. 246) gives a framework for sequences of nonlinear equations, where the second stage is described in terms of a variational inequality.

Theorem 4.1. *Let* X, Y *be a normed spaces,* $(A : X \to Y)$ *continuous and for the sequence of continuous operators* $(A_k : X \to Y)$ *let* $L = \overline{\lim}_{k\to\infty}\{x | A_k x = 0\} \subset \{x | Ax = 0\} =: S_A$. *Let further* (a_k) *be a sequence of positive numbers and* $B : X \longmapsto X^*$ *a continuous mapping with* $B(0) = 0$ *such that*

1. $B \circ A : X \longmapsto X^*$ *is monotone,*
2. $a_k(B \circ A_k - B \circ A)$ *converges continuously to a mapping* $D : X \longmapsto X^*$.

If $\overline{x} \in L$ *then for all* $x \in S_A$ *the inequality* $\langle D\overline{x}, x - \overline{x}\rangle \geq 0$ *holds.*

Proof : Let $x_k \epsilon \{x | A_k x = 0\}$ such that (x_k) converges to an $\overline{x} \in X$, i.e. $\overline{x} \in L$. Let $x \in S_A$, i.e. $Ax = 0$. Since $B \circ A$ monotone and continuous it follows that

$$a_k \langle (B \circ A_k - B \circ A) x_k, x - x_k \rangle = a_k \langle B \circ A x_k, x_k - x \rangle \geq 0.$$

Since $a_k(B \circ A_k - B \circ A)$ converges continuously to D it follows that $a_k(B \circ A_k - B \circ A)x_k$ converges to $D\overline{x}$ in the norm, and hence inequality $\langle D\overline{x}, x - \overline{x} \rangle \geq 0$ follows.

Example 4.2. Let $A_k = \alpha_k P + A$, where A is monotone, P is a positive definite linear operator, and (α_k) is a sequence of positive numbers tending to 0 (compare with class 1. of previous section). Then, choosing $a_k = \frac{1}{\alpha_k}$, $D = P$ and the inequality $\langle P\overline{x}, x - \overline{x} \rangle \geq 0$ for all $x \in S_A$ is the characterization of a minimal solution of the strictly convex functional $x \mapsto \langle Px, x \rangle$ on the convex set S_A (compare with Remark 2.6). In this case, convergence of (x_k) to $\overline{x}$ follows.

Example 4.3. Let $A, C : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ be linear operators, $b \in \mathbb{R}^m$ and let $S_A := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ be nonempty. Let further (α_k) be a sequence in $\mathbb{R}_+$ tending to zero and let $A_k := \alpha_k C + A$. Then for $a_k = \frac{1}{\alpha_k}$ and $B = A^T$ it follows that

$$a_k(BA_k - BA) = \frac{1}{\alpha_k}(\alpha_k A^T C + A^T A - A^T A) = A^T C =: D$$

and hence $\langle A^T C\bar{x}, x - \bar{x} \rangle \geq 0$ for all x in the affine subspace S_A, in other words : $A^T C\bar{x}$ is orthogonal to kernel of A.

Example 4.4 (see [6]). $LP-$problem : for $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$ we consider the following problem

$$\min\{\langle c, x \rangle | Ax = b, x \geq 0\}$$

with bounded and nonempty set of solutions. We chose the mapping $P = P_m \circ P_{m-1} \circ \ldots \circ P_1$ of the successive projections P_i onto the hyperplanes

$$H_i = \{s \in \mathbb{R}^n | \langle a_i, s \rangle = b_i\} \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

where a_i denotes the i-th row of A, and the projection P_K onto the positive cone $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, given by

$$P_K(x) = ((x_1)_+, \ldots, (x_n)_+)).$$

As P_K is non differentiable, a smoothing of the projection P_K is obtained by replacing $s \longmapsto (s)_+$ by a smooth function $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ that approximates $(\cdot)_+$.

The projection P_K is then replaced by $P_\alpha = (\varphi_\alpha(x_1), \ldots, \varphi_\alpha(x_n))$. By use of the Newton-method the nonlinear equation

$$F_\alpha(x) := x - P_\alpha \circ P(x) + \alpha c = 0$$

can be solved very efficiently.

It can be shown that $P_K \circ P$ is a non-expansive Fejér-contraction w.r.t. any $\hat{x} \in S := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ and that $P_\alpha \circ P$ is non-expansive. Let (α_k) be a positive sequence tending to 0. Stability then follows from Theorem 2.8 for the sequence of monotone operators $A_k = F_{\alpha_k}$ converging point-wise to the monotone operator $A = I - P_K \circ P$ satisfying (1).

Application of Theorem 4.1 yields a condition upon φ_{α_k} that enforces continuous convergence. We have for $a_k = \frac{1}{\alpha_k}$:

$$a_k(A_k - A) = a_k(-P_{\alpha_k} \circ P + \alpha_k c + P_K \circ P) = \frac{1}{\alpha_k}(P_K \circ P - P_{\alpha_k} \circ P) + c.$$

It follows that if $\frac{1}{\alpha_k}(\varphi_{\alpha_k} - (\cdot)_+) \to 0$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}$, then $a_k(A_k - A)$ converges continuously to c. If $\overline{x}$ is any limit point of the sequence of solutions of the equations $(A_k x = 0)$ then for all $x \in S$ we obtain $\langle c, x - \overline{x}\rangle \geq 0$.

Remark 4.5. Convex optimization problems with linear constraints can be treated in the same manner. For convex and differentiable $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ consider

$$\min\{f(x) : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

The (monotone) operator F_α becomes

$$F_\alpha(x) := x - P_\alpha \circ P(x) + \alpha f'(x)$$

implying $\langle f'(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \geq 0$ for every point of accumulation $\overline{x}$ and all $x \in S$. According to the Characterization Theorem of convex optimization, $\overline{x}$ is a minimal solution of f on S.

Резюме. В работе описан принцип стабильности, касающийся решений последовательностей нелинейных уравнений для непрерывных операторов на $\mathbb{R}^n$, который можно применить к широкому классу операторов, для которых из поточечной сходимости всегда следует непрерывная сходимость. В частности, этот принцип применяется к последовательностям монотонных операторов.

REFERENCES

1. E. Blum, W. Oettli, Mathematische Optimierung, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
2. F. Browder, Problèmes Nonlinéaires. Univ. of Montreal Press, 1966.
3. J. B. Diaz, F. T. Metcalf, "On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, pp. 516 – 519, 1967.
4. P. Kosmol, Optimierung und Approximation, de Gruyter Lehrbuch, Berlin, New York, 1991.
5. P. Kosmol, Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben, Teubner Studienbücher, Stuttgart, zweite Auflage, 1993.
6. P. Kosmol, "Projection methods for linear optimization", J. of Contemporary Mathematical Analysis (National academy of Sciences of Armenia, vol. 36, no. 6, pp. 46 – 53, 2001.
7. P. Kosmol, "Nichtexpansive Abbildungen bei Optimierungsverfahren", First Symposium on Operations Research, University of Heidelberg, Sept. 1-3, 1976, in Operations Research Verfahren/ Methods of Operations Research XXV, pp. 88 – 92, R. Henn et al. (Ed.), Verlag Anton Hain, Meisenheim, 1976.
8. P. Kosmol, D. Müller-Wichards, Optimierung in Orlicz-Räumen (Monography, in preparation).
9. P. Kosmol, D. Müller-Wichards, "Homotopy methods for optimization in Orlicz space", Proceedings of the 12-th Baikal Int. Conf., vol. 1, pp. 224 – 230, 2001.
10. P. Kosmol, D. Müller-Wichards, "Homotopic methods for semi-infinite optimization", J. of Contemporary Mathematical Analysis, National Academy of Sciences of Armenia, vol. 36, no. 5, pp. 31 – 48, 2001.
11. P. Kosmol, "Ein Algorithmus für Variationsungleichungen und lineare Optimierungsaufgaben", Deutsch - französisches Treffen zur Optimierungstheorie, Hamburg, 1986.
12. M. M. Vainberg, Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, Wiley and Sons, 1973.
13. J. Völler, "Gleichgradige Stetigkeit von Folgen monotoner Operatoren", Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der Universität Kiel, 1978.

Поступила 22 июля 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 59–74

WAVELET REPRESENTATIONS OF COORBIT SPACES INVARIANT UNDER SYMMETRY GROUP

S. S. Pandey[1]

Department of Mathematics, R. D. University, Jabalpur, INDIA
E–mail : sheelpandey@hotmail.com

Abstract. The paper studies the atomic decompositions of coorbit spaces, which are invariant under symmetry groups based on the wavelet transforms associated with some irreducible unitary square-integrable representation of a locally compact group on a Hilbert space. The proved theorem provides an extension to the corresponding results of Feichtinger and Gröchenig (1989) and Rauhut (2003).

§ 1. INTRODUCTION

In a series of papers, Feichtinger and Gröchenig [2, 3, 4] gave a detailed study of the theory of coherent atomic decompositions and frames for coorbit spaces, which are related to an irreducible unitary square-integrable representation of a locally compact group. Their elegant result not only generalizes the Hilbert space theory of atomic decomposition and frames but also includes the corresponding results for Sobolev spaces, Besov-Triebel-Lizorkin spaces and modulation spaces as particular cases. In a very recent paper, Rauhut [7] has studied the problems of atomic decompositions and frames for coorbit spaces formed of invariant functions under a symmetric group, such that every element of the representation itself is invariant under the action of the group. The results of Rauhut (loc. cit) provide some extensions to the corresponding results of Feichtinger and Gröchenig [3] and Gröchenig [5].

The aim of the present paper is to study the wavelet representations of the invariant coorbit space under a symmetric group, which is associated with a Wiener amalgam $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, where Y is a translation invariant, solid Banach space of functions on a locally compact group $\mathcal{G}$ forming an $L^1_w(\mathcal{G})$-convolution module and w is a

[1]The author is thankful to DST for the financial support under the project DST/MS/150/2k.

moderate weight function on $\mathcal{G}$. As the Banach space Y, $1 \leq p \leq \infty$ is a subset of $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, the main result of this paper (Theorem 7.1) provides a generalization to the corresponding result of Rauhut. Of course, we follow the technique and procedures developed by Feichtinger and Gröchenig [3] and Rauhut [7].

In Section 2 we present the notation and basic concepts for using in the sequel. In Section 3, we define a Wiener amalgam space $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ on Feichtinger lines [1], where Y is some translation invariant solid Banach space of functions forming a convolution module over $L^1_w(\mathcal{G})$, w being a moderate weight function on $\mathcal{G}$, so that $L^1_w(\mathcal{G})$, $1 \leq p \leq \infty$, is a translation invariant. Section 4 deals with the properties of the restriction operator $\widetilde{V}_g$ to the Hilbert space $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, where $V_g f$ denotes the wavelet transform of functions f with respect to a window function g and $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ is a closed subspace of the Hilbert space $\mathcal{H}$, consisting of invariant elements in $\mathcal{H}$ under the action of a compact automorphic group $\mathcal{A}$ of $\mathcal{G}$ acting continuously on $\mathcal{G}$. In Section 5 we define the coorbit spaces $C_0 \;\, W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, $1 \leq p \leq \infty$, and mention some of its properties for using in subsequent sections.

In Section 6, following Rauhut ([7], p.10) we present the concept of $\mathcal{A}$-invariant bounded uniform partition of unity of the size U for using in Section 7 to define the sequence space of the Wiener amalgam $W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ and discretize the convolution operator.

Theorem 7.1 presents the main result of this paper, which provides an extension to the corresponding result of Rauhut (loc. cit). The proof of Theorem 7.1 is based on four lemmas, which are given in Section 8. The proofs of these lemmas follow on the lines of Feichtinger and Gröching [3] and Rauhut [7]. Since Wiener amalgams are involved in our analysis, we give short proofs of Lemmas 8.1 and 8.4 for the sake of completeness. The proof of Theorem 7.1 is given in Section 9. The problems of Banach frames and their stability will from the subject matter of a subsequent paper.

§ 2. NOTATION AND BASIC CONCEPTS

We suppose that $\mathcal{G}$ is a locally compact group and $\mathcal{A}$ is a compact automorphic group of $\mathcal{G}$ acting continuously on $\mathcal{G}$, i.e. we assume that the mapping

$$\mathcal{G} \times \mathcal{A} \to \mathcal{G} \;\text{ such that }\; (x, A) \to A(x) \;\text{ is continuous } \forall \; A \in \mathcal{A}.$$

Further, we denote the left Haar measures on $\mathcal{G}$ and $\mathcal{A}$ by μ and ν respectively and assume that ν is normalized. Denoting the modular function on $\mathcal{G}$ by Δ, we denote, as usual, the left and right translation operators on $\mathcal{G}$ by

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) \;\text{ and }\; R_y f(x) = f(x, y).$$

Also, we write the involution $\vee$ and $\bigtriangledown$ in the forms

$$f^{\vee}(x) = f(x^{-1}) \quad \text{and} \quad f^{\bigtriangledown}(x) = \overline{f(x^{-1})}.$$

For a function f given on $\mathcal{G}$, we denote the action of $\mathcal{A}$ on f by

$$f_A(x) = f(A^{-1}x), \qquad \forall\, A \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad x \in \mathcal{G}.$$

A function f on $\mathcal{G}$ is called invariant under the action of $\mathcal{A}$ provided $f_A = f, \;\; \forall\, A \in \mathcal{A}$. Besides, it is well known that the Haar measure μ and the modular function $\triangle$ are invariant under any compact automorphic group. For a function space Y on $\mathcal{G}$, by $Y_{\mathcal{A}}$ we denote the subspace of invariant elements in Y such that

$$Y_{\mathcal{A}} = \{f \in Y, f_A = f \;\; \forall\, f \in Y\}.$$

Any involution function on $\mathcal{G}$ is expressed as a function on $K = \mathcal{A}(\mathcal{G})$, where the orbit space $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ is given by the equality

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \{Ax, A \in \mathcal{A} \;\text{ and }\; x \in \mathcal{G}\}$$

Rauhut ([6], p.7) has shown that the coorbit space K is a topological space in a natural way by defining a set $U \subset K$ open if and only if U considered as a subset of $\mathcal{G}$ satisfying the condition $U = \mathcal{A}(U)$ is open with respect to the topology of $\mathcal{G}$. The space K has canonical measure in inherited from the Haar measure of $\mathcal{G}$, i.e.

$$\int_K f(\mathcal{A}x)\, dm\,(\mathcal{A}x) = \int_{\mathcal{G}} f(x) d\mu(x)$$

for invariant functions in $L^1(\mathcal{G})$. The space $L^1(K) = L^1(K, m)$ is isomorphic to $L^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ which is the subspace of $L^1(\mathcal{G})$ consisting of invariant functions.

Throughout this paper we assume that Y is a Banach space of functions on $\mathcal{G}$ and satisfies the following conditions :

(i) Y is continuously embedded into $L^1_{loc}(\mathcal{G})$,the space of locally integrable functions on $\mathcal{G}$.

(ii) Y is solid, i.e. if $f \in L^1_{loc}(\mathcal{G}),\;\; g \in Y$ and $\mid f(x) \mid \leq \mid g(x) \mid$ *a.e.*, then $f \in Y$ and $\| f \mid Y \| \leq \| g \mid Y \|$.

(iii) Y is invariant under left and right translations. Hence there exist

$$u(x) = \| L_x : Y \to Y \| \quad \text{and} \quad v(x) = \triangle(x^{-1}) \, \| R_{x^{-1}} : Y \to Y \|,$$

such that u and v are submultiplicative functions.

(iv) $\mathcal{A}$ acts continuously on Y, so that

$$u(Ax) = u(x) \quad \text{and} \quad v(Ax) = v(x) \quad \text{for all} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Hence Y_A is a closed non-trivial subspace of Y. Besides, if w is a weight function associated with Y and such that

$$w(x) = \max\{w'(x), w'(x^{-1})\Delta(x^{-1})\},$$

where

$$w'(x) = \max\{u(x), u(x^{-1}), v(x), v(x^{-1})\Delta(x^{-1})\},$$

then one can see that the above assumptions ensure that w is a sub-multiplicative and $w(x) \geq 1$.

By $L^p_w(\mathcal{G})$, $1 \leq p < \infty$, we denote the Banach space of functions on $\mathcal{G}$ with the norm

$$\| f \mid L^p_w \| \equiv \| f \|_{p,w} = \left(\int_{\mathcal{G}} | f(x) |^p \ w^p(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty. \tag{2.1}$$

In the case $p = \infty$, we define the space $L^\infty_w(\mathcal{G})$ as the Banach space of all functions f on $\mathcal{G}$, which are measurable such that

$$\| f \|_{\infty,w} = \text{ess sup}\{| f(x) | \ w(x) : x \in \mathcal{G}\} < \infty. \tag{2.2}$$

The conjugate space of $L^p_w(\mathcal{G})$ is the space $L^{p'}_{w^{-1}}(\mathcal{G})$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Besides, it is well known that $L^p_w(\mathcal{G})$, $1 < p < \infty$, is a reflexive Banach space, $L^1_w(\mathcal{G})$ is a Banach algebra under convolution, usually known as Beurling algebra, and $L^p_w(\mathcal{G})$ is a convolution module over $L^1_w(\mathcal{G})$. We suppose that w is a moderate weight function, so that $L^p_w(\mathcal{G})$ is translation invariant. Also, we assume that Y is a convolution module over the Beurling algebra $L^1_w(\mathcal{G})$.

§ 3. WIENER AMALGAMS ON $\mathcal{G}$

Using Y as a local component and $L^p_w(\mathcal{G})$ as a global one, we define the Wiener amalgam space $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ as

$$W \equiv W(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) = \{f \in Y_{loc} : K(f, k, Y) \in L^p_w(\mathcal{G})\} \tag{3.1}$$

and endow it with the norm

$$\| f \mid W(B, L^p_w)(\mathcal{G}) \| = \| K(f, k, Y) \|_{p,w}, \tag{3.2}$$

where

$$K(f,k,Y)(x) = \| (L_x\, k) f \|_Y, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{3.3}$$

and k is a non-zero window function in $C_c(\mathcal{G})$, such that $0 \leq k(x) \leq 1$ and $k(x) = 1$ for all x in a compact neighborhood of the identity.

It is well known that $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is a Banach space under the norm (3.2), its definition is independent of Q and $Y \subseteq W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, $1 \leq p \leq \infty$. Since Y is a convolution module over $L^1_w(\mathcal{G})$, this ensures that $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is a convolution module over $L^1_w(\mathcal{G})$. Indeed,

$$K[(f * h), k, Y] = \|(L_x k)\ (f * h)\ \|_Y \leq \|h\|_{1,w}\ \|(L_x k) f\|_Y$$

for any $h \in L^1_w(\mathcal{G})$. Hence $\|\|\|(L_x f)\ (f * h) \mid Y\|\|\|_{p,w} \leq \|h\|_{1,w}\ \|f \mid W(Y, L^p_w)\|$, and consequently $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is a convolution module over the Beurling algebra $L^1_w(\mathcal{G})$. Besides, one can verify that $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is solid and invariant under left and right translations.

§ 4. WAVELET TRANSFORMS ON $\mathcal{G}$

We assume that there exists a unitary, irreducible and strongly continuous representation π of $\mathcal{G}$ on some Hilbert space $\mathcal{H}$, and a unitary, strongly continuous representation σ (not necessarily irreducible) on the same Hilbert space $\mathcal{H}$, such that

$$\Pi(A(x))\sigma(A) = \sigma(A)\, \Pi(x), \tag{4.1}$$

which implies that the representations $\pi_A = \pi \circ A$ are unitarily equivalent to π and the intertwining operators $\sigma(A)$ form a representation of $\mathcal{A}$ on $\mathcal{H}$ for all $A \in \mathcal{A}$. The above relation is non-trivial because if $\mathcal{A}$ is a compact subgroup of $\mathcal{G}$ acting by inner automorphisms and $\pi = \pi_{1,\mathcal{A}}$, then (4.1) holds true. We suppose that

$$f_A = \sigma(A) f$$

and define

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{H} : f_A = f, \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

as the closed subspace of $\mathcal{H}$ consisting of invariant elements. The wavelet transform of a function $f \in \mathcal{H}$ with respect to $g \in \mathcal{H}$ is defined as

$$V_g f(x) = \langle f, \pi(x) g \rangle.$$

It is clear that V_g maps $\mathcal{H}$ into $C^b(\mathcal{G})$ which is the space of bounded, continuous function on $\mathcal{G}$.

Let $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ and let $\widetilde{V}_g$ be the restriction of V_g to $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, then the following properties of $\widetilde{V}_g$ are known (cf. [7], p. 6) :

(i) If $f, g \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, then the function $\widetilde{V}_g f$ is invariant under $\mathcal{A}$, i.e. $\widetilde{V}_g$ maps $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ into $C^b_{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$, where

$$C^b_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}) = \{f \in C^b(\mathcal{G}), f_A = f, \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

(ii) If

$$\widetilde{\pi}(x) = \int_{\mathcal{A}} \pi(Ax)dA, \quad \forall\ x \in \mathcal{G} \text{ and } A \in \mathcal{A},$$

in a weak sense, then $\widetilde{\pi}$ maps $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ onto $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ and

$$\widetilde{\pi}(Bx) = \widetilde{\pi}(x) \quad \text{for all} \quad B \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \widetilde{V}_g f(x) = \langle f, \widetilde{\pi}(x) g\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}.$$

(iii) The operators $\widetilde{\pi}(x)$ form an irreducible representation of the orbit hypergroup K and the covariance principle

$$\widetilde{V}_g(\widetilde{\pi}(x)f) = \mathcal{L}_x \widetilde{V}_g f$$

holds true, where $K = \mathcal{A}(\mathcal{G})$ is the space of all orbits $\mathcal{A}(x) = \{A(x),\ A \in \mathcal{A}\}$ and $\mathcal{L}_x$ denotes the left translation on K.

The space K becomes a topological space with sets $U \subset K$ open if and only if U viewed as a subset of $\mathcal{G}$ implies that $U = \mathcal{A}(U)$ is open in the topology of $\mathcal{G}$.

Throughout this paper we assume that π is square integrable, which ensures (see [7], p.11) that :

(i) There exists a positive and densely defined operator K, such that the domain $D(K)$ consists of all admissible vectors satisfying the orthogonality property and if $\| Kg \| = 1$, then

$$V_g f * V_g g = V_g f$$

and

$$\widetilde{V}_g f * \widetilde{V}_g g = \widetilde{V}_g f. \tag{4.2}$$

(ii) The space $\{\pi(x)f,\ x \in \mathcal{G}\}$ is dense in $\mathcal{H}$ for any non-zero $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

(iii) The operator K commutes with the action of $\mathcal{A}$, i.e.

$$\sigma(A)K = K\sigma(A), \quad \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Also, the space $D_{\mathcal{A}}(K) = D(K) \cap \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ is dense in $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ and K maps $D_{\mathcal{A}}(K)$ into $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

In the rest of this paper we assume that all index sets and coverings of $\mathcal{G}$ are countable.

§ 5. COORBIT SPACES OF $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$

We define a set of analyzing vectors $\alpha^p_w(\mathcal{G})$ as

$$\alpha^p_w(\mathcal{G}) = \{g \in \mathcal{H},\ V_g g \in L^p_w(\mathcal{G})\}$$

and its subspace of invariant elements as

$$\alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \equiv \alpha^p_w \cap \mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{g \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}},\ \widetilde{V}_g g \in L^p_w(\mathcal{G})\}.$$

Since w is a moderate weight function, $L^p_w(\mathcal{G})$ $(1 \le p \le \infty)$ is translation invariant, and hence we infer that the inclusion $\pi(x)g \in \alpha^p_w(\mathcal{G})$ implies that $\alpha^p_w(\mathcal{G})$ is a dense subspace of $\mathcal{H}$ for $g \in \alpha^p_w(\mathcal{G})$ and $\alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ is a dense subspace of $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.
Now, assuming that g is any non-zero vector in $\alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ we define the space $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ as

$$\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) = \{f \in \mathcal{H},\ V_g f \in L^p_w(\mathcal{G})\},\quad 1 < p < \infty,$$

and endow it with the norm

$$\| f \mid \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) \| = \| V_g f \mid L^p_w(\mathcal{G}) \| .$$

A subspace of $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ with invariant elements is given by

$$\mathcal{H}^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) = \{f \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \widetilde{V}_g f \in L^p_w(\mathcal{G})\}$$

As in [2, p. 56], it can be verified that $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ is independent of the choice of $\alpha^{\mathcal{A}}_w(\mathcal{G})$ with equivalent norms for different g. In fact, we have the relations

$$\alpha^p_w(\mathcal{G}) \subset \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) \quad \text{and} \quad \alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{H}^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}),$$

which imply that $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ is dense in $\mathcal{H}, \mathcal{H}^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ is dense in $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{H}^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$.
By $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ we denote the space of all continuous conjugate linear functionals (anti-duals) on $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$, so that the inner product $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) \times \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ is extended to $\mathcal{H}^p_w \times \mathcal{H}^{p*}_w$ as a sesquilinear form. This insures that the extended wavelet transforms

$$V_g f(x) = \langle f, \pi(x) g \rangle$$

are well defined for all $g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ and $f \in \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G})$. Also, it is clear that the anti-dual can be identified with the dual by use of the mapping

$$J : (\mathcal{H}^p_w)' \to \mathcal{H}^{p*}_w,$$

so that $J(f)(h) = \overline{f(h)}$, $\forall\, h \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$. Besides, the above constructions imply that

$$\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G}).$$

We denote by $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ the anti-dual space of $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ and, on the Rauhut lines ([6], p. 8) we define the mapping

$$\tau : \mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \to \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G})$$

for which

$$f^\tau(g) = f\left(\int_{\mathcal{A}} g_A dA\right), \quad \forall\ g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}),$$

where $\int_{\mathcal{A}} g_A\, dA$ in a weak sense defines an element of $\mathcal{H}^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$. This mapping provides an isometric isomorphism between $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ and $(\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}))_{\mathcal{A}}$, the latter being the space of all functionals f in $\mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G})$ such that

$$f(g_A) = f(g) \quad \text{for all} \quad A \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}).$$

Next, $V_g(\pi(x)g) = L_x V_g g$ and $L^p_w(\mathcal{G})$ is translation invariant, and therefore

$$\pi(x)g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}), \quad \forall g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}) \quad \text{and} \quad x \in \mathcal{G}.$$

Thus, the action of π on $\mathcal{H}^p_w(\mathcal{G})$ can be extended to $\mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G})$ by the rule

$$(\pi(x)f)(g) = f(\pi(x^{-1})g) \quad \text{for all } f \in \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G}) \text{ for and } g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}).$$

Hence we get the extended wavelet transform

$$V_g f(x) = \langle f, \pi(x)g\rangle \text{ for all } f \in \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G}) \text{ andl } g \in \mathcal{H}^p_w(\mathcal{G}).$$

Proceeding as above, the extension of $\widetilde{V_g}$ to the space $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ can be achieved. It may be mentioned here that almost all results in [3] for the spaces $\mathcal{H}^1_w(\mathcal{G})$ and $(\mathcal{H}^1_w(\mathcal{G}))^\neg$ hold true for $\mathcal{H}^p_{w\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ and $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$.

Definition 5.1. Assuming that $g \in \alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ is a non-zero fixed function and if $J \equiv W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ with respect to the representation π, we define the coorbit space in the form

$$C_0W = C_0W(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) = \{f \in \mathcal{H}^{p*}_w(\mathcal{G}), V_g f \in W\} \tag{5.1}$$

and endow it with the norm

$$\| f \mid C_0W \| = \| V_g f \mid W \| . \tag{5.2}$$

Besides, we define the closed subspace of invariant elements in C_0W as

$$C_0W_{\mathcal{A}} = \mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) \cap C_0W(\mathcal{G}) = \{f \in \mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}),\ \widetilde{V_g}f \in W_{\mathcal{A}}\}. \tag{5.3}$$

Then the corresponding induced norm is

$$\| f \mid C_0W_{\mathcal{A}} \| = \| \widetilde{V_g}f \mid W_{\mathcal{A}} \|. \tag{5.4}$$

It can be verified that C_0W is a Banach space on the lines of Feichtinger and Gröchenig ([3], pp. 321-323), which is independent of g in $\alpha^p_w(\mathcal{G})$ and the weight function w. Similarly, the coorbit space $C_0W_{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ has the same properties. Also, one can verify as above the validity of the following properties associated with $C_0W_{\mathcal{A}}$, which will be used in the sequel :

(i) If $g \in \alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ with $\| Kg \| = 1$, then a function $F \in W_{\mathcal{A}}$ is of the form $\widetilde{V_g}f$ for some $f \in C_oW_{\mathcal{A}}$ if and only if F is representable in the form $F = F * \widetilde{V_g}g$, where the convolution is given by the formula

$$(F * G)(x) = \int_{\mathcal{G}} F(y)\mathcal{L}_yG(x)d_\mu(y) = \int_K F(\mathcal{A}y)\mathcal{L}_xG(\mathcal{A}y)dm(\mathcal{A}y).$$

(ii) The mapping $\widetilde{V_g} : C_0W_{\mathcal{A}} \to W_{\mathcal{A}}$ establishes an isometric isomorphism between C_0W and the closed subspace $W_{\mathcal{A}} * \widetilde{V_g}g$ of $W_{\mathcal{A}}$, and the mapping $F \to F * \widetilde{V_g}g$ defines a bounded projection from $W_{\mathcal{A}}$ onto the space $W_{\mathcal{A}} * \widetilde{V_g}g$.

§ 6. INVARIANT BOUNDED UNIFORM PARTITION OF UNITY

The concept of invariant bounded uniform partition of unity has been defined by Rauhut ([7], p.10) in the following form :

A collection of functions $\Psi = (\psi_i(x))_{i\in I}, \psi_i(x) \in C_0(\mathcal{G})$ is called $\mathcal{A}$- invariant bounded uniform partition of unity of size U (or U- $\mathcal{A}$- IBUPU) if the following conditions are satisfied :

(i) $0 \le \psi_i(x) \le 1, \quad \forall\, i \in I$ and $\quad x \in \mathcal{G}$.

(ii) $\sum_{i\in I} \psi_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathcal{G}$.

(iii) $\psi_i(Ax) = \psi_i(x), \quad \forall x \in \mathcal{G}, \quad A \in \mathcal{A}, \quad i \in I$.

(iv) There is a relatively compact neighborhood $U = \mathcal{A}(U)$ of the unite and there are elements $(x_i)_{i\in I} \in \mathcal{G}$ such that supp $\psi_i \subset \mathcal{A}(x_iU) = \cup_{A\in\mathcal{A}} A(x_iU)$.

(v) $\sup_{x\in\mathcal{G}} \#\{i \in I : z \in \mathcal{A}(x_iQ) \le c_Q\} < \infty$ for all compact sets $Q \subset \mathcal{G}$.

As remarked by Rauhut (loc. cit.), the condition (v) is equivalent to

$$\sup_{i\in I} \#\{i \in I : \text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j \ne \phi\} \le c < \infty.$$

The above construction of IBUPU is more general than that for BUPU used by Feichtinger and Gröchenig ([3], p. 314), in the sense that there may not exist an open, relatively compact set V and points y_i such that $\mathcal{A}(x_iU) \subset y_iV$. Besides, the Haar measure of the sets $\mathcal{A}(x_iU)$ is not necessarily bounded. Rauhut has demonstrated that on every locally compact group there exist arbitrarily fine IBUPU's.

If $\mathcal{A}$ is a compact automorphic group of a locally compact group $\mathcal{G}$ and $V = V^{-1} = \mathcal{A}(V)$ is a relatively compact neighborhood of $e \in \mathcal{G}$ with nonempty interior, then a countable subset $X \subset \mathcal{G}$ is called V-dense provided

$$U_{x\in X}\mathcal{A}(xV) = \mathcal{G}.$$

The set X is called relatively separated provided it is pairwise disjoint with respect to $\mathcal{A}$, which means that

$$\sup_{x\in X} \#\{y \in X : \mathcal{A}(xV) \cap \mathcal{A}(yV) \neq \phi\} \leq c_V < \infty.$$

If X is both V-dense and relatively separated (as defined above), then X is called well spread with respect to $\mathcal{A}$.

§ 7. DISCRETIZATION OF CONVOLUTION

We assume that $\mathcal{A}$ acts isometrically on Y and $L^p_w(\mathcal{G})$, which ensures that $\mathcal{A}$ isometrically acts on $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ too. Hence, we write

$$W_{\mathcal{A}} \equiv W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) = \{f \in W(Y, L^p_w); f_A = f, \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Next, let $X = (x_i)_{i\in I}$ be a well-spread family with respect to $\mathcal{A}$ and let U be a relatively compact set in $\mathcal{G}$ with non-void interior. As usual, we write the sequence space of $W^b_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ in the form

$$W^b_{\mathcal{A}}(X) = \{(\lambda_i)_{i\in I}, \sum_{i\in I} \mid \lambda_i \mid \chi_{\mathcal{A}(x_iU)} \in W(Y, L^p_w)\} \tag{7.1}$$

and equip it with the natural norm

$$\| (\lambda_i)_{i\in I} \mid W^b_{\mathcal{A}}(X) \| = \left\| \sum_{i\in I} \mid \lambda_i \mid \chi_{\mathcal{A}(x_iU)} \mid W(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) \right\|, \tag{7.2}$$

where $\chi_{\mathcal{A}(x_iU)}$ is the characteristic function of the set $\mathcal{A}(x_iU)$. Next, assuming that $a_i =\mid \mathcal{A}(x_iU) \mid$ we define the space

$$W^d_{\mathcal{A}}(X) = \{(\lambda_i)_{i\in I}, (a_i^{-1}, \lambda_i)_{i\in I} \in W^b_{\mathcal{A}}(X)\} \tag{7.3}$$

with the norm

$$\|(\lambda_i)_{i\in I} \mid W^d_{\mathcal{A}}(X)\| = \|(a_i^{-1}\,\lambda_i)_{i\in I} \mid W^b_{\mathcal{A}}(X)\|. \tag{7.4}$$

As in ([6], p. 20), we define a space of analyzing vectors $B^{\mathcal{A}}_w$ in the form

$$\beta^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}) = \{g \in \alpha^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G}),\ \widetilde{V}_g g \in W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G})\} \tag{7.5}$$

and note that one can easily see that $\beta^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ is dense in $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.
Now we now define a convolution operator

$$T : W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) \to W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$$

such that

$$TF = F * G = \int_K F(y)\ \mathcal{L}_y G\ dm(y),$$

where $G = V_g g \in W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G})$ and $F = V_g f \in W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$.
Assuming that $\Psi = (\psi_i)_{i\in I}$ is any $\mathcal{A}$-IBUPU and T_Ψ is an operator such that

$$T_\Psi F = \sum_{i\in I} \langle F, \psi_i\rangle\ \mathcal{L}_{x_i} G,$$

we prove the following theorem, which provides an atomic decomposition for the coorbit space $C_0 W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, $1 \le p \le \infty$.

Theorem 7.1. *If $g \in \beta^p_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ with $\|Kg\| = 1$, then there exists an open, relatively compact set $U = U^{-1} = \mathcal{A}U$ such that*

$$\|G^{\#}_U \mid L^p_w(\mathcal{G})| < 1, \tag{7.6}$$

and if $X = (x_i)_{i\in I}$ is any U-dense well spread family with respect to $\mathcal{A}$, then every $f \in C_0\ W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is representable in the form

$$f = \sum_{i\in I} \lambda_i(f)\widetilde{\pi}(x_i)g, \tag{7.7}$$

where $G^{\#}_U(x) = \sup_{u\in U} \mid G(ux) - G(x) \mid$ is the U-oscillation of G, the sequence of coefficients $\Lambda(f) = (\lambda_i(f))_{i\in I}$ depends linearly on f and

$$\|\Lambda(f) \mid W^d_{\mathcal{A}}(X)\| \le c_1 \|f \mid C_0 W_{\mathcal{A}}\|, \tag{7.8}$$

where c_1 is a constant depending only on g. Conversely, if $\Lambda(f) \in W^d_{\mathcal{A}}(X)$, then any f representable in the form (7.7) belongs to $C_0 W_{\mathcal{A}}$.

$$\|f \mid C_0 W_{\mathcal{A}}\| \le c_2 \|\Lambda \mid W^d_{\mathcal{A}}(X)\|, \tag{7.9}$$

and the right-hand side series in (7.5) is convergent in the norm topology of $C_0W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G}), 1 \leq p < \infty$, provided the finite sequences are dense in $W^d_{\mathcal{A}}(X)$ or in the weak-topology of $\mathcal{H}^{p*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$.*

As $Y \subseteq W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, $1 \leq p \leq \infty$, the assertion of Theorem 7.1 is extendable up to the corresponding result of Rauhut ([7], pp. 26-27). Besides, for $Y = L^p(\mathcal{G})$ Theorem 7.1 is reduced to that of Rauhut (loc . cit).

§ 8. NECESSARY LEMMAS

This section gives four lemmas necessary for proving Theorem 7.1.

Lemma 8.1. *If $U = U^{-1} = \mathcal{A}(U)$ is an open, relatively compact set in $\mathcal{G}$, $X = (x_i)_{i\in I}$ is any well-spread family and $\Psi = (\psi_i(x))_{i\in I}$ is the corresponding U-A-IBUPU, then the mapping $F \to \Lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ is a bounded operator from $W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ in to $W^d_{\mathcal{A}}(X)$, i.e.*

$$\|\Lambda \mid W^d_{\mathcal{A}}(X)\| \leq c\|F \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\|,$$

where $\lambda_i = \langle F, \psi_i\rangle$ and c is a positive generic constant.

Proof. follows on the lines of Rauhut ([7], Proposition 6.1). Nevertheless, we give a short proof since in our case the Wiener amalgam spaces are involved. We suppose that $F \in W_{\mathcal{A}}$ and χ_V is the window function for the definition of $W^d_{\mathcal{A}}$, where V is an open, relatively compact set, such that $V = V^{-1} = \mathcal{A}V$. Next, we assume that k is a positive window function invariant under $\mathcal{A}$ and define

$$m_k(x, y) = \int_{\mathcal{A}} k(y^{-1}A(x))dA = \mathcal{L}_y\, k(x) = \mathcal{L}_x\, k^V(y).$$

Since k is invariant, m_G is invariant in both variables and $m_k(x, y) = m_k(y, x)$ for $k = k^V$. If $k = \chi_V$, then $m_{\chi_V} = m_V$ and $supp\; m_V(\cdot, y) \subset \mathcal{A}(y, V)$. Hence, the function

$$K(F, y) = \sum_{i\in I} \langle| F |, \psi_i\rangle m_V(x_i, y)$$

is a finite sum over the index set $I_y = \{i,\; x_i \in \mathcal{A}(y, V)\}$, $\quad \forall\, y \in \mathcal{G}$. Consequently,

$$K(F, y) = \sum_{i\in I_y} \int_{\mathcal{G}} | F(x) | \psi_i(x)\, dx\; m_V(x, y) = \int_{\mathcal{A}(Y\ V\ U)} | F(x)| \sum_{i\in I_y} \psi_i(x) m_V(x_i, y)$$

$$\leq \int_{\mathcal{A}(Y\ V\ U)} | F(x) | \, m_{V*U}(x, y)\, dx \leq \int_{\mathcal{G}} | F(x) | \int_{\mathcal{A}} \chi_{V*}U(y^{-1}A(x))\, dA\, dx =$$

$$= \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{G}} L_y\chi_{V*U}(Ax) \mid F(Ax)|\; dx\, dA = \int_{\mathcal{G}} L_y\chi_{V*U}(x) \mid F(x) \mid\; dx \dashv F \mid * \chi_{V*U}(y).$$

Next, $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$ is solid and the definition of $W^d_{\mathcal{A}}(X)$ does not depend on the choice of U. Therefore, proceeding on the lines of Rauhut ([6], Lemma 5.3) we obtain

$$c_1\|(\lambda_i)_{i\in I} \mid W^d_{\mathcal{A}}\| \leq \left\|\sum_{i\in I} |\lambda_i| \, m_k(x_i,\cdot) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\right\| \leq c_2\|(\lambda_i)_{i\in I} \mid W^d_{\mathcal{A}}\|,$$

where c_1, c_2 are some positive constants. Hence

$$\|\Lambda \mid W^d_{\mathcal{A}}\| \leq c_1^{-1}\|K(F,\cdot) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \leq c_1^{-1}\| \, |F| * \chi^v_{V^* U} \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \leq$$

$$\leq c_1^{-1}\|F \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \, \|\chi_{V^* U} \mid L^1_w(\mathcal{G})\| \leq c_1^{-1}\|F \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \, \|\chi_{V^* U} \mid L^p_w(\mathcal{G})\|$$

as $L^p_w(\mathcal{G}) \hookrightarrow L^1_w(\mathcal{G})$.

Lemma 8.2. *If $X = (x_i)_{i\in I}$ is a well-spread set in $\mathcal{G}$, with respect to $\mathcal{A}$, and $G \in W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G})$, then the mapping*

$$\Lambda = (\lambda_i) \to \sum_{i\in I} \lambda_i \, \mathcal{L}_{x_i} G \tag{8.1}$$

is a bounded linear operator from $W^d_{\mathcal{A}}(X)$ into $W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, such that

$$\left\|\sum_{i\in I} \lambda_i \, \mathcal{L}_{x_i} G \mid W_{\mathcal{A}}\right\| \leq c\|G \mid W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G})\| \, \|\Lambda \mid W^d_{\mathcal{A}}(X)\|, \tag{8.2}$$

where c is a constant independent of Λ, and the series on the right-hand side of (8.1) pointwise converges in the norm topology of $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, provided the finite sequences are dense in $W^d_{\mathcal{A}}(X)$.

Proof. follows on the lines of Rauhut ([6], Proposition 6.2).

Lemma 8.3.

(a) *If bounded functions with compact support are dense in $W(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$, then finite sequences are dense in $W^d_{\mathcal{A}}(X)$.*

(b) *If w is a moderate weight function on $\mathcal{G}$, then $l^p_w(X) \subset W^d_{\mathcal{A}}(X) \subset l^{p'}_{1/w}$, where $1/p + 1/p' = 1$.*

Proof. holds as in ([7], p.17).

Lemma 8.4. *If $\Psi = (\psi_i)_{i\in I}$ is a $U - \mathcal{A}$-IBUPU for some set $U = \mathcal{A}U$ and $G \in W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G})$, then*

$$\|(T - T_\Psi) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G}) \to W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \leq c\|G^*_u \mid L^p_w(\mathcal{G})\|,$$

and by Lemma 8.1

$$\lim_{\Psi \to 0} \|(T - T_\Psi) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w(\mathcal{G})) \to W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| = 0.$$

Proof. will be based on the Wiener amalgam spaces. We have

$$\begin{aligned} \mid TF - T_\Psi F \mid &= \left| \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{G}} F(y)\psi_i(y)(\mathcal{L}_y G - \mathcal{L}_{x_i} G)dy \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{G}} \mid F(y) \mid \psi_i(y) \mid (\mathcal{L}_y G - \mathcal{L}_{x_i} G)dy. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Besides, supp $\psi_i \in \mathcal{A}(x_i U)$ and G is $\mathcal{A}$ -invariant. Consequently, for $y \in xU$

$$\begin{aligned} \mid \mathcal{L}_y G - \mathcal{L}_{x_i} G \mid (x) &= \left| \int_{\mathcal{A}} \mathcal{G}(y^{-1}Ax) - G(x_i^{-1}Ax)dA \right| \leq \int_{\mathcal{A}} |L_y G(Ax) - L_{x_i} G(Ax)| \lambda A \\ &\leq \int_{\mathcal{A}} L_y G^\#_U(Ax)dA = \mathcal{L}_y G^\#_u(x). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Combining (8.3) and (8.4), we obtain

$$\mid TF - T_\Psi F \mid \leq \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{G}} \mid F(y)\psi_i(y)\mathcal{L}_y G^\#_u dy = \mid F \mid * G^\#_u,$$

and hence

$$\begin{aligned} \|(TF - T_\Psi F) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| &\leq \|F \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})\| \, \|G^\#_U \mid L^1_w(\mathcal{G})\| \leq \\ &\leq c\|F \mid W_{\mathcal{A}}\| \, \|G^\#_U \mid L^p_w(\mathcal{G})\| \end{aligned} \tag{8.5}$$

which proves the first part of the lemma. The proof of the relation

$$\lim_{U \to \{e\}} \|G^\#_U \mid L^p_w(\mathcal{G})\| = 0$$

follows on the lines of Gröchenig ([5], Lemma 4.6). Nevertheless, below we give a short proof for the sake of completeness. Let $U \subseteq U_0$ and hence $G^\#_U \leq G_{U_0}$. Then there exist a compact set $K \subseteq \mathcal{G}$ and some $\epsilon > 0$, such that

$$\int_{\mathcal{G} \setminus K} \mathcal{G}^\#_{\mathcal{U}}(x)\, w(x) \leq \epsilon/2, \quad \forall\, U \subseteq U_0.$$

Besides, $\mathcal{G}$ is a uniformly continuous on K, and therefore there exists a neighborhood $U_1 \subset U_0$ such that

$$G^\#_{U_1}(x) < \frac{\epsilon}{2 \mid K \mid \sup_{x \in K} w(x)},$$

and hence

$$\int_K G_U^{\#}(x)\, w(x)\, dx < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, U \subseteq U_1.$$

Thus, $\|G_U^{\#} \mid L_w^1\| < \epsilon$ and $U \subseteq U_1$, and hence $\|G_U^{\#} \mid L_w^p(\mathcal{G})\| \leq C\epsilon$. Letting $\epsilon \to 0$, we get $\lim_{U\to\{e\}} \|G_U^{\#} \mid L_w^p(\mathcal{G})\| = 0$, and the proof of is complete by virtue of relations (8.5) and (8.6).

Proof of Theorem 7.1. Using the definitions of T and T_Ψ and proceeding as in the proof of Lemma 8.3, we obtain

$$\|(TF - T_\Psi F) \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G})\| \leq c\|F \mid W_{\mathcal{A}}\|\, \|G_U^{\#} \mid L_w^p(\mathcal{G})\|.$$

Thus, by the hypothesis (7.6) we have $|||T - T_\Psi \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G})||| < 1$. Now observe that T is a projection from $W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G})$ onto $W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G}) * \mathcal{G}$. Hence, T is the identity operator on $W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G}) * \mathcal{G}$. Thus, we can choose $a > 0$ so that

$$|||I_d - T_\Psi \mid W_{\mathcal{A}}||| < a < 1$$

in a sufficiently small neighborhood U of the identity e in $\mathcal{G}$. This implies that T_Ψ^{-1} can be expressed by the Neumann series, i.e.

$$T_\Psi^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I_d - T_\Psi)^n,$$

which ensures that $|||T_\Psi \mid W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G}) * (\mathcal{G})||| \leq (1-a)^{-1}$. Hence, for $\widetilde{V_g} f \in W_{\mathcal{A}} * \mathcal{G}$ and $f \in Co\, W_{\mathcal{A}}$

$$\widetilde{V_g} f = T_\Psi\, T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f = \sum_{i\in I} \langle T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f, \psi_i\rangle\, \mathcal{L}_{x_i}\, V_g g = \sum_{i\in I} \langle T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f, \psi_i\rangle\, \widetilde{V_g}(\widetilde{\pi}(x_i) g),$$

and hence

$$f = \sum_{i\in I} \langle T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f, \psi_i\rangle\, \widetilde{\pi}(x_i) g, \tag{9.1}$$

since $\widetilde{V_g}$ is an isometric isomorphism from $Co\ W_{\mathcal{A}}$ onto $W_{\mathcal{A}} * \mathcal{G}$. Now, putting $\lambda_i = \langle T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f, \psi_i\rangle$ and using Lemma 8.1, we obtain

$$\|(\lambda_i)_{i\in I} \mid Co\, W_{\mathcal{A}}^d(X)\| \leq c\|T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f \mid W_{\mathcal{A}}\| \leq c|||T_\Psi^{-1} \mid W_{\mathcal{A}} \to W_{\mathcal{A}}|||\ \|f \mid Co\, W_{\mathcal{A}}\|$$

for $T_\Psi^{-1}\, \widetilde{V_g} f \in W_{\mathcal{A}} * \mathcal{G} \subset W_{\mathcal{A}}(Y, L_w^p)(\mathcal{G})$. Finally, applying the mapping $\widetilde{V_g}$ to both sides of (9.1) we get

$$F(x) = \widetilde{V_g} f(x) = \widetilde{V_g}\left(\sum_{i\in I} \lambda_i\, \widetilde{\pi}(x_i) g\right)(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i\, \mathcal{L}_{x_i}\, G(x). \tag{9.2}$$

Since, by Lemma (8.3)(b),

$$W^d_{\mathcal{A}}(X) \in l^{p'}_{1/w}, \quad G \in W_{\mathcal{A}}(C_0, L^1_w)(\mathcal{G}),$$

the series on the right hand side of (9.2), is pointwise convergent to a function in $L^{p'}_{1/w}(\mathcal{G})$,which ensure the weak *-convergence in $\mathcal{H}^{p^*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$. At last, if $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ is a bounded net in $\mathcal{H}^{p^*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$, then $\widetilde{V_g}\ f_\alpha(x)$ pointwise convergence to $\widetilde{V_g}f(x), \forall\ x \in \mathcal{G}$. Hence $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ is w^*-convergence to an element $f \in \mathcal{H}^{p^*}_{w,\mathcal{A}}(\mathcal{G})$, and consequently $f \in C_0\ W_{\mathcal{A}}(Y, L^p_w)(\mathcal{G})$.

Резюме. В статье изучаются атомные разложения пространств Корбита, которые инвариантны относительно групп симметрий, порождённых всплесковыми преобразованиями, ассоциированными с некоторым неприводимым унитарным интегрируемым с квадратом представлением локально компактной группы на гильбертовом пространстве. Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты Фейхтингера и Грöхенига (1989) и Раута (2003).

REFERENCES

1. H. G. Feichtinger, "Banach convolution algebras of Weiner type". Coola. Math. Soc. Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam, 1983.
2. H. G. Feichtinger and K.Gröchenig, "A unified approach to atomic decompositions via integrable group representations", In : Proc. Conf. Function Spaces and Applications. Lecture Notes Math.1302, Springer Berlin-Heidelberg-New York, pp. 52-73, 1988.
3. H. G. Feichtinger and K.Gröchenig, "Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions", I. J. Funct. Anal., vol. 86, pp. 307–340, 1989.
4. H. G. Feichtinger and K.Gröchenig, "Banach space related to integrable group representations and their atomic decomposition II", Monatsh fur Mathematik, vol. 108, pp. 129–148, 1989.
5. K. Gröchenig, "Describing functions : Atomic decompositions versus frames", Monatsh. fur Mathematik, vol. 112, pp. 1–41, 1991.
6. H. Rauhut, Wavelet transforms associated to group representations and functions invariant under symmetry groups, Preprint, 2003.
7. H. Rauhut, Banach frames in coorbit spaces consisting of elements which are invariant under symmetry groups, Preprint, 2003.

Поступила 26 августа 2005

Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 75-79

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С "ПОЧТИ ТЁПЛИЦЕВЫМИ" МАТРИЦАМИ

А. С. Хачатрян

Армянский государственный педагогический университет
E-mail : anushavan@aport.ru

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$q_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k, \quad n \in Z, \tag{1}$$

относительно искомого вектора $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$, где компоненты данного вектора $\lambda = (\ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ и данной теплицевой матрицы $A = (a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям :

(a) $a_n \geq 0, \quad n \in Z$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |k| a_k < \infty$ и $\nu = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k \neq 0,$

(c) $0 \leq \lambda_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Эти условия могут быть дополнены еще одним из следующих условий :

(d) $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} (1 - \lambda_k) < +\infty,$ когда $\nu > 0,$

(d1) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (1 - \lambda_k) < +\infty,$ когда $\nu < 0.$

В [1] доказано, что условие (d) или (d1) совместно с условиями (a)-(c) обеспечивают существование ненулевого решения системы (1). Покажем, что условия (a)-(d) (или (a)-(d1)) являются не только достаточными, но и необходимыми для нетривиальной разрешимости системы (1). Для этого сперва докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\lambda = (\ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ *и* $A = (a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям (a) – (c), а система (1) обладает ограниченным решением* $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$, *то она имеет также неотрицательное решение* $\bar{q} = (\ldots, \bar{q}_{-1}, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots)$, *где* $\bar{q}_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$ – некоторое ограниченное решение системы (1). Тогда

$$|q_n| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} |q_k|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующие итерации

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)},\ n \in \mathbb{Z},\ q^0 = (\ldots, q^*, q^*, q^*, \ldots),\ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $q^* = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} |q_n| < \infty$. Для $m = 0$

$$q_n^{(1)} = q^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \leq q^* = q_n^{(0)}, \quad \text{т.е.} \quad q_n^{(1)} - q_n^{(0)} \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если для некоторого m имеет место неравенство $q_n^{(m)} - q_n^{(m-1)} \leq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда из (3) следует

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m-1)} = q_n^{(m)},$$

т.е.

$$q_n^{(m+1)} - q_n^{(m)} \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Докажем теперь, что неравенство $q_n^{(m)} \geq |q_n|$, $n \in \mathbb{Z}$, верно для любого $m \geq 0$. Действительно, для $m = 0$ имеем $q_n^{(0)} = q^* \geq |q_n|$. Если $q_n^m \geq |q_n|$ $(n \in \mathbb{Z})$ для некоторого m, то

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)} \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} |q_k| \geq |q_n|.$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $q_n^{(m)} \downarrow$ по m и $q_n^{(m)} \geq |q_n|$. Следовательно, существует $\lim_{m \to \infty} q_n = \bar{q}_n$. Кроме того, нетрудно доказать, что вектор $\bar{q} = (\ldots, \bar{q}_{-1}, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots)$ удовлетворяет системе (1).

Предположим, что $q = (\dots, q_{-1}, q_0, q_1, \dots)$ является положительным решением системы (1) (существование которого следует из Леммы 1). Из (1) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - q_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Выберем $r \in N$ так, чтобы $\rho \equiv \sum\limits_{k=-r}^{r} a_n > 0$, и некоторое чётное число S, удовлетворяющее условию $S > 2r$. Суммируя равенства (4) от 0 до S, получим

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n. \tag{5}$$

Оценим левую часть равенства (5). Имеем

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=0}^{S} a_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=-k}^{S-k} a_n \geq$$

$$\geq \sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=-r}^{S-k} a_n \geq \rho \sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) q_k.$$

Кроме того, для правой части (5) имеем

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \sum_{n=-k}^{S-k} a_n - \sum_{n=0}^{S} q_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{k=-n}^{S-n} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=-n}^{0} q_k + \sum_{k=0}^{S} q_k + \sum_{k=S}^{S-n} q_k \right) - \sum_{n=0}^{S} q_n \leq 2q^* \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n,$$

где

$$q^* = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |q_n| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} q_n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) a_k \leq \frac{2q^*}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n, \tag{6}$$

где правая часть не зависит от S.

Покажем теперь, что последовательность $q = (\dots, q_{-1}, q_0, q_1, \dots)$ монотонно возрастает, если возрастает последовательность λ_n. Действительно, согласно соотношениям (3) имеем

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \lambda_{n-k} q_{n-k}^{(m)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда вытекает монотонность последовательности $q_n^{(m+1)}$ по n, когда последовательность $q_n^{(m)}$ монотонно возрастает. В пределе при $m \to +\infty$, получим монотонную последовательность q_n, и, следовательно, величина $\widehat{q} = \inf_{n \geq p} q_n$ положительна при любом целом $p \in \mathbb{Z}$. Применяя это неравенство к сумме $\sum\limits_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k)q_k$, получаем

$$\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k)q_k \geq \widehat{q}\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k)$$

что совместно с (6) даёт

$$\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k) \leq \frac{2q^*}{\widehat{q}\,\rho}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|a_n, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=r}^{\infty}(1-\lambda_k) < +\infty.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть вектор λ и матрица A системы (1) удовлетворяют условиям (a) – (c) и пусть последовательность λ_n монотонно возрастает. Если, дополнительно предположить, что система (1) имеет ограниченное решение q, то*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\lambda_k) < +\infty.$$

Для $P_n = 1 - \lambda_n q_n$ в силу (1) имеем

$$P_n = (1-\lambda_n)q_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}P_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Если допустить, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(1-\lambda_k) < +\infty$, то последовательность $b_n = (1-\lambda_n)q_n$ будет удовлетворять условиям следующей теоремы (см. [2]).

Теорема (Карлин). *Пусть $(a_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $(u_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $(b_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ – числовые последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$a \geq 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|a_k < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ka_k > 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|b_n| < \infty,$$

и наибольший общий делитель индексов k, для которых $a_n > 0$, равен 1. Если уравнение

$$u_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}u_k = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

имеет своим решением ограниченную последовательность u_n *действительных чисел, то существуют пределы* $\lim_{n\to+\infty} u_n$ *и* $\lim_{n\to-\infty} u_n$, *и*

$$\text{если} \quad \lim_{n\to-\infty} u_n = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k}{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k}.$$

Из этой теоремы следует существование пределов $P_{\pm} = \lim_{n\to\pm\infty} P_n$ и выполнение соотношения

$$P_+ - P_- = \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) q_k}{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k},$$

что влечёт за собой существование пределов $q_{\pm} = \lim_{n\to\pm\infty} q_n$ и справедливость равенств (т.к. $\lambda_n \to 1$ при $n \to \pm\infty$ и $q_{\pm} = 1 - P_{\mp}$)

$$(q_- - q_+) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) q_k.$$

Заметим, что непрерывный аналог этого соотношения получен в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Хачатрян, "О разрешимости одной бесконечной системы алгебраических уравнений с матрицей, близкой к теплицевой матрице", Тезисы докладов юбилейной конференции посвящённой 70-летию акад. В. С. Захаряна, Ереван 2006.
2. С. Карлин, Основы Теории Случайных Процессов, Москва, Мир, 1971.
3. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа свертки" (в печати).

Поступила 29 ноября 2005

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 41, Номер 1, 2006

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сборник статей

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 41, No. 1, 2006

HARMONIC ANALYSIS AND APPROXIMATIONS

Collection of Papers

Contents