

ЕРЕВАН

Выходит с 1965г.
на русском и английском языках

Խմբագրական կոլեգիա

Գլխավոր խմբագիր՝ Ա.Գ.Նիկողոսյան (Հայաստան)
Գլխավոր խմբագրի տեղակալներ՝ Վ.Պ.Գրինին (Ռուսաստան), Հ.Ա.Հարությունյան (Հայաստան)
Պատասխանատու քարտուղար՝ Ա.Ա.Հակոբյան (Հայաստան)
Ժ.Ալեյան (Ֆրանսիա), Գ.Ս.Բխնովատի-Կոզան (Ռուսաստան), Ի.Դ.Կարաչենցև (Ռուսաստան),
Տ.Յու.Մադաթյան (Հայաստան), Ա.Մ.Սիբայելյան (Հայաստան), Բ.Մ.Շուստով (Ռուսաստան),
Յու.Ա.Շչեկինով (Ռուսաստան), Ա.Մ.Չերեպաշչով (Ռուսաստան), Ե.Պ.Պավլենկո (Ռուսաստան),
Է.Ս.Պարսամյան (Հայաստան), Վ.Պ.Ռեշետնիկով (Ռուսաստան), Գ.Ն.Սալուկվաձե (Վրաստան),
Ա.Ա.Սահարյան (Հայաստան), Գ.Տ.Տեր-Ղազարյան (Հայաստան), Մ.Տուրատտո (Իտալիա),
Ս.Դ.Օդինցով (Իսպանիա)

Редакционная коллегия

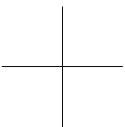
Главный редактор: А.Г.Никогосян (Армения)
Заместители главного редактора: Г.А.Арутюнян (Армения), В.П.Гринин (Россия)
Ответственный секретарь: А.А.Акопян (Армения)
Ж.Алесян (Франция), Г.С.Бисноватый-Коган (Россия), И.Д.Караченцев (Россия),
Т.Ю.Магакян (Армения), А.М.Микаелян (Армения), С.Д.Одинцов (Испания),
Е.П.Павленко (Россия), Э.С.Парсаян (Армения), В.П.Решетников (Россия),
А.А.Саарян (Армения), Г.Н.Салуквадзе (Грузия), Г.Т.Тер-Казарян (Армения),
М.Туратто (Италия), А.М.Черепашук (Россия), Б.М.Шустов (Россия), Ю.А.Щекинов (Россия)

"АСТРОФИЗИКА" - научный журнал, издаваемый Национальной академией наук Республики Армения. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой. Журнал предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

"ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ"-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակում է Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային Ակադեմիան: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների և միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով: Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Адрес редакции: Республика Армения, Ереван 19, пр. Маршала Баграмяна 24^Г
Редакция ж. "Астрофизика", тел. 56 81 38
e—mail: astrofiz@sci.am

© Издательство "Гитутюн" НАН Республики Армения, Астрофизика, 2024



ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ТОМ 67

НОЯБРЬ, 2024

ВЫПУСК 4

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ГАЛАКТИК В МЕСТНОМ ОБЪЕМЕ	<i>И.Д.Караченцев, А.А.Попова</i>	435
О РАСШИРЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БЛАЗАРОВ ДЛЯ АКТИВНЫХ ГАЛАКТИК С ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕМ	<i>А.И.Ауду, Ф.С.Одо, А.А.Убачукву</i>	443
ЦИКЛЫ АКТИВНОСТИ КАРЛИКА СПЕКТРАЛЬНОГО КЛАССА dM4e GJ 1243	<i>Е.С.Дмитриенко, И.С.Саванов</i>	459
КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ЗВЕЗД CQ Tau И UX Ori ВНЕ ЗАТМЕНИЙ ПО ДАННЫМ NORDIC OPTICAL TELESCOPE	<i>П.Димитриева, О.В.Козлова</i>	469
АКТИВНОСТЬ ЗВЕЗДЫ TOI-6255 И ПОТЕРЯ МАССЫ АТМОСФЕРЫ ЕЕ ПЛАНЕТЫ	<i>И.С.Саванов</i>	485
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧАСТОТЫ ВСПЫШЕК И ЗАПЯТЕННОСТИ АКТИВНЫХ ВСПЫХИВАЮЩИХ ЗВЕЗД, ОБНАРУЖЕННЫХ "КЕПЛЕР"	<i>А.А.Акпоян</i>	495

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

CONTENTS

Kinematic distances of galaxies in the Local Volume	
<i>I.D.Karachentsev, A.A.Popova</i>	435
On the extended blazar sequence for γ -ray emitting active galactic nuclei	
<i>A.I.Audu, F.C.Odo, A.A.Ubachukwu</i>	443
Activity cycles of dM4e dwarf GJ 1243	
<i>E.S.Dmitrienko, I.S.Savanov</i>	459
Quantitative analysis of the spectra of CQ Tau and UX Ori stars outside eclipses according to the Nordic Optical Telescope	
<i>P.Dimitrieva, O.V.Kozlova</i>	469
Activity of TOI-6255 and mass loss of its planet atmosphere	
<i>I.S.Savanov</i>	485
Determining the frequency function of flares and starspot coverage in active flare stars discovered by "Kepler"	
<i>A.A.Akopian</i>	495
Topological Casimir effect in models with helical compact dimensions	
<i>R.M.Avagyan, A.A.Saharian, D.H.Simonyan, G.H.Harutyunyan</i>	515
The presence of dark energy and dark matter	
<i>H.A.Harutyunian</i>	531
Domain wall Bianchi type VI ₀ universe in $f(R, T)$ gravity	
<i>S.P.Hatkar, D.P.Tadas, S.D.Katore</i>	549
Thermodynamics and its quantum correction of vacuum nonsingular black hole	
<i>D.Ma, T.Huo, C.Liu</i>	567
Modified Finch and Skea stellar model in higher dimensions	
<i>A.Jangid, S.Das, B.S.Ratanpal, K.K.Venkataratnam</i>	581

СОДЕРЖАНИЕ (продолжение)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ КАЗИМИРА В МОДЕЛЯХ СО
СПИРАЛЬНЫМИ КОМПАКТНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Р.М.Авакян, А.А.Саарян, Д.А.Симонян, Г.Г.Арутюнян 515

НАЛИЧИЕ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Г.А.Арутюнян 531

ВСЕЛЕННАЯ ТИПА БЬЯНКИ VI_0 С ДОМЕННЫМИ СТЕНКАМИ
В РАМКАХ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ $f(R, T)$

С.П.Хаткар, Д.П.Тадас, С.Д.Каторе 549

ТЕРМОДИНАМИКА И ЕЕ КВАНТОВАЯ КОРРЕКЦИЯ ВАКУУМ-
НОЙ НЕСИНГУЛЯРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Д.Ма, Т.Хо, Ч.Лю 567

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗВЕЗДНАЯ МОДЕЛЬ ФИНЧА И СКЕА
В ВЫСШИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

А.Джангид, Ш.Дас, Б.С.Ратанпал, К.К.Венкатаратнам 581

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-435

KINEMATIC DISTANCES OF GALAXIES IN
THE LOCAL VOLUMEI.D.KARACHENTSEV¹, A.A.POPOVA²

Received 20 September 2024

We consider the kinematic distances to nearby galaxies obtained by the Numerical Action Method (NAM) based on the Cosmic-flow-3 survey data. NAM-distances are compared with 418 high-precision distances measured by the Tip of the Red Giant Branch (TRGB) method using the Hubble Space Telescope. We estimated the average difference $\langle D_{\text{NAM}} - D_{\text{TRGB}} \rangle = -0.30 \pm 0.08$ Mpc and the standard deviation of 1.57 Mpc. Approximately the same difference in the distance scale is obtained in comparison with less accurate distance estimates through the membership of galaxies in known groups or from the Tully-Fisher relation. We conclude that the NAM method provides distance estimates with an accuracy of 20% within the Local Volume, which is valid for ~90% of the sky, except for the regions of the Virgo cluster and the Coma-I group.

Keywords: *galaxies: kinematic distances: Local Volume*

1. *Introduction.* Constructing a representative sample of nearby galaxies, limited by a fixed volume, is a necessary observational basis for cosmology on small scales. Efforts to create such a sample have been made repeatedly [1,2]. Currently, the catalog of candidates for the population of the Local Volume (LV) contains about 1500 galaxies with expected distances D within 11 Mpc [3]. The on-line version of this Local Volume galaxy data base (LVGDB) [4], supplemented by recently discovered objects, is available at <http://www.sao.ru/lv/lvgdb>.

With an ideal unperturbed Hubble flow with a Hubble parameter $H_0 = 73$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, galaxies with radial velocities relative to the centroid of the Local Group $V_{LG} < 800$ km s⁻¹ would fall into the designated LV. The presence of inhomogeneities in the distribution of matter introduces anisotropy into the local Hubble flow. According to [5], our Galaxy and its neighbors are participating in the motion towards the nearby Virgo cluster ($D = 16.5$ Mpc) with an amplitude of ~180 km s⁻¹ and in the expansion of the Local Void with a characteristic velocity of ~260 km s⁻¹. The directions of these local flows are approximately mutually perpendicular.

To construct a more detailed map of the local field of radial velocities, the Numerical Action Method (NAM) [6,7] was proposed, which takes into account the location and masses of nearby attractors (groups of galaxies), as well as the

most significant neighboring clusters and voids outside the L.V. Kourkchi et al. [8] developed a convenient scheme for determining the kinematic NAM-distances of LV galaxies from their coordinates and radial velocity V_g relative to the center of our Galaxy. In this case, estimates of the distance of galaxies made by various methods were used. The main array consisted of high-precision measurements of distances by the luminosity of the Tip of the Red Giant Branch (TRGB) with a total number of about 400. The accuracy of this method reaches $\sim 5\%$. Actually, the radius of the LV, 11 Mpc, was determined just by the ability to measure the TRGB-distance of a galaxy from its images obtained with the Hubble Space Telescope (HST) during one orbital period. In addition to this universal method, applicable to galaxies of any morphological type, a small number of distance estimates were used from Cepheids, supernovae, and surface brightness fluctuations.

It should be noted that measuring the distances of galaxies with an accuracy of $\sim 5\%$ is a laborious, expensive procedure, unlike measuring radial velocities. Mass surveys of radial velocities in the optical and radio ranges [9-12] have significantly enriched our data on the field of radial velocities of galaxies in the LV. This growth continues with the introduction of ever larger telescopes into observations. On the other hand, episodic programs for measuring TRGB-distances on the aging HST make an increasingly smaller contribution to the overall panorama of galaxy distances beyond $D \sim 3$ Mpc. Therefore, estimates of kinematic NAM-distances, which allow us to determine the absolute luminosity and other important parameters of nearby galaxies, are becoming more relevant.

The purpose of this work is to estimate the accuracy of kinematic distances of galaxies in the Local Volume, using observational data from the LVGDB.

2. Observational data. The LVGDB contains TRGB-distance values for 473 LV galaxies with measured radial velocities. We excluded from them 43 members of the Local Group with distances $D < 1$ Mpc, whose virial motions are not related to the general pattern of the peculiar velocity field of the LV. For the remaining 430 galaxies, kinematic NAM-distances were determined according to the diagram [8]. For most of these galaxies, their radial velocities are measured with an error of less than 8 km s^{-1} , corresponding to an error in D_{NAM} of less than 0.1 Mpc, which we neglected. A machine-readable list of these galaxies with D_{TRGB} and D_{NAM} values can be provided upon individual request.

3. The local kinematic distances. The top panel of Fig.1 reproduces the distribution of 430 LV galaxies according to the difference in distance estimates $\Delta = D_{NAM} - D_{TRGB}$ in equatorial coordinates. The color scale on the right reflects the magnitude of Δ in Mpc. Over the predominant area of the sky, galaxies, denoted by circles, have a yellow-green color, corresponding to the difference in distance estimates within 1 - 2 Mpc. The left side of the sky map is characterized

by a vast emptiness, due to the fact that the Local Void extends almost to the border of the Local Group of galaxies.

The bottom panel of Fig.1 shows the distribution on the sky of LV galaxies according to the magnitude of the distance ratio D_{NAM}/D_{TRGB} in the same coordinates. This diagram complements the previous one, since the error $\sigma(D_{TRGB}) \sim 5\%$ affects the value of $(D_{NAM} - D_{TRGB})$ differently for nearby and distant galaxies. Typical

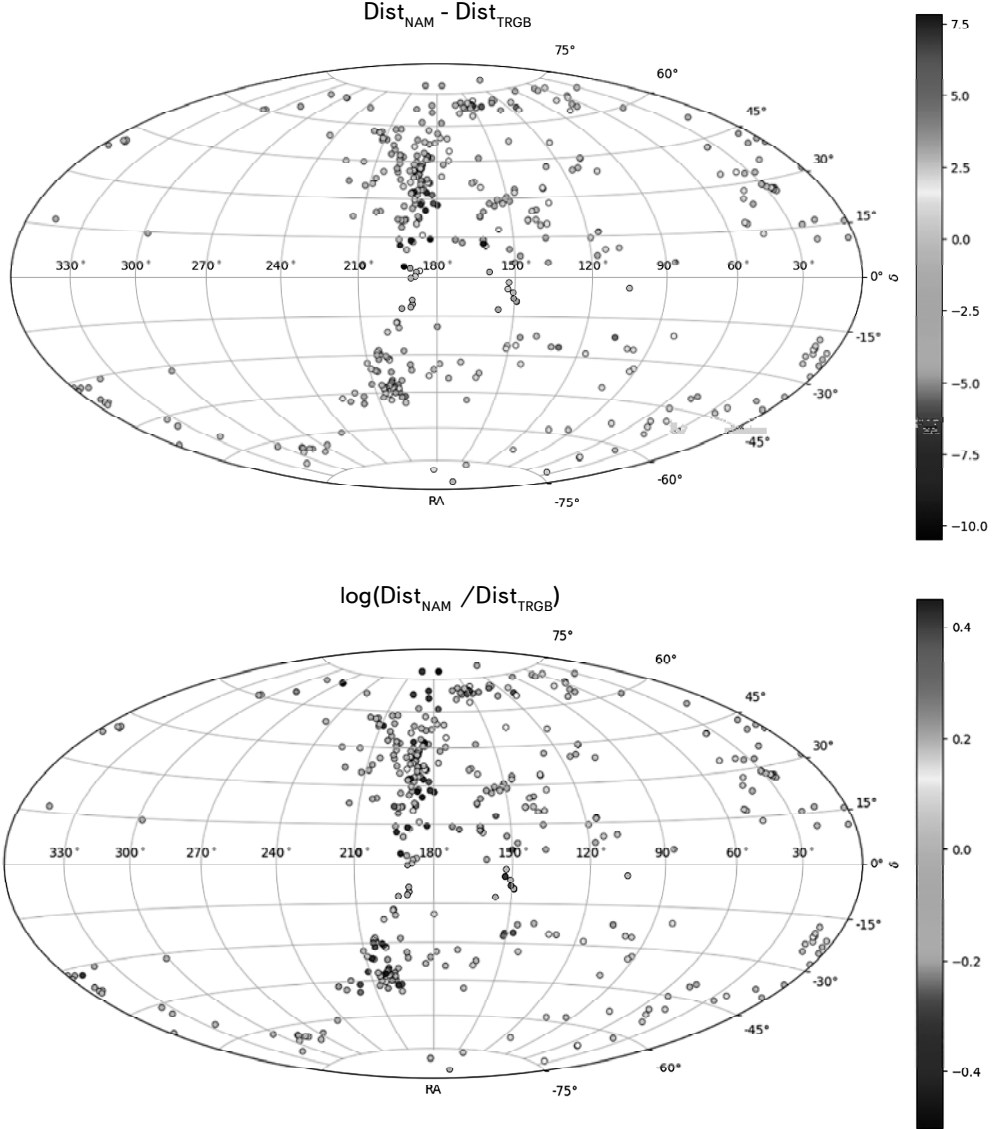


Fig.1. Distribution of galaxies in the Local Volume by the difference (top) and ratio (bottom) of the distances D_{NAM} and D_{TRGB} .

virial velocities in groups, $\sigma_v \sim (70-100) \text{ km s}^{-1}$, are also the reason for the scatter of galaxies in terms of the value of D_{NAM}/D_{TRGB} , especially in nearby groups around M81 and CenA = NGC5128.

The distribution of the number of LV galaxies according to the magnitude of the difference in distance estimates $\Delta = D_{NAM} - D_{TRGB}$ is shown in Fig.2. We excluded 12 strongly deviating galaxies with $|\Delta| > 5.0$, their relative number does not exceed 3%. The histogram $N(\Delta)$ fits well with the Gaussian function having parameters $\langle \Delta \rangle = -0.3 \pm 0.08 \text{ Mpc}$ and $\sigma_\Delta = 1.57 \text{ Mpc}$.

Table 1 presents a list of 12 "outlier" galaxies with $|\Delta| > 5 \text{ Mpc}$. Its first column lists the names of galaxies as they are designated in LVGB; columns (2, 3) give the equatorial coordinates of the galaxies; column (4) contains radial velocities relative to the center of the Galaxy; the distances of galaxies and their difference in Mpc are given in the last three columns. Analysis of these data reveals several reasons for the large deviations Δ . For the galaxy UGC4998, an erroneous determination of the D_{TRGB} distance was made on the "color-magnitude" diagram [13] due to confusion between the *RGB* and *AGB* sequence stars. The galaxies IC3023, KDG177, UGC7983, and UGC8061 are located inside the virial zone of the Virgo cluster, where NAM-distance estimates are distorted by virial motions. The galaxies BTS76, LVJ1205+28, LVJ1207+31, LVJ1217+32, AGC229053, and IC3341 belong to members of the specific Coma I group, around NGC4278 [14], which is located at the border of the zero-velocity radius of the Virgo cluster, $R_0 \simeq 23^\circ$. The galaxies of this group have negative peculiar velocities $V_{pec} \sim -800 \text{ km s}^{-1}$. The nature of this anomaly remains a mystery.

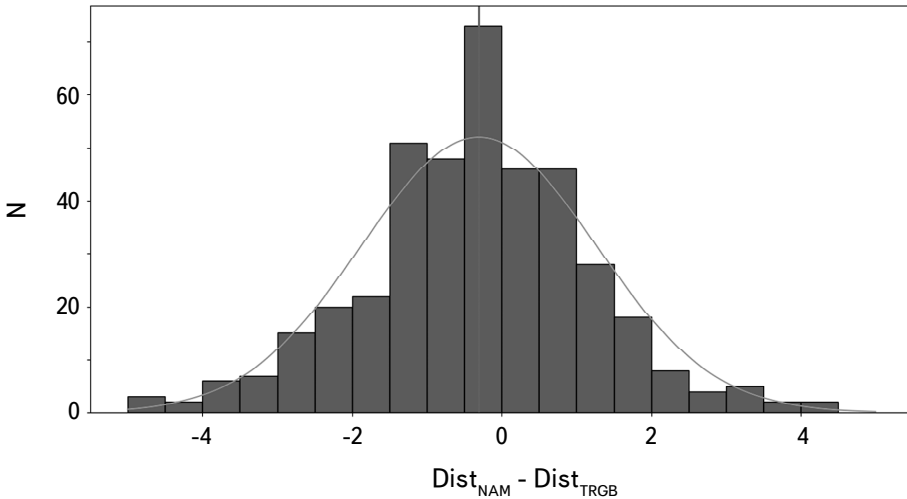


Fig.2. Distribution of number of galaxies in the Local Volume by the magnitude of difference in their distance estimates $\Delta = D_{NAM} - D_{TRGB}$.

Table 1

A LIST OF 12 "TRGB - NAM" OUTLIERS

Name	RA deg	Dec deg	V km s^{-1}	D_{TRGB} Mpc	D_{NAM} Mpc	Δ_D Mpc
UGC04998	141.30	68.38	742	8.24	13.69	5.45
NGC3379	161.96	12.58	818	11.32	19.13	7.81
BTS76	179.68	27.58	436	12.59	5.17	-7.42
LV J1205+28	181.39	28.23	491	11.53	5.65	-5.88
LV J1207+31	181.96	31.55	559	12.02	6.64	-5.38
IC3023	182.51	14.37	755	17.0	6.73	-10.27
LV J1217+32	184.38	32.53	456	12.59	5.32	-7.27
AGC229053	184.56	25.57	409	12.47	4.45	-8.02
IC3341	186.60	27.75	368	11.64	3.94	-7.70
KDG177	189.99	13.78	958	17.0	7.74	-9.26
UGC07983	192.45	03.84	619	16.52	6.06	-10.46
UGC08061	194.18	11.93	520	12.59	5.21	-7.38

At an average distance of LV galaxies of 8.0 Mpc and a standard deviation $\sigma_\Delta = 1.57$ Mpc, the relative error in estimating the NAM-distance is 19%. Here we made a quadratic subtraction of the relative error of 5% caused by errors in measuring TRGB distances.

For dwarf galaxies in the Local Volume groups, virial velocities of $\sim 80 \text{ km s}^{-1}$ introduce a relative error in the NAM-distance estimate of about 12%. Therefore, when using the average radial velocity in a sufficiently populated group, one can expect a typical error in the average NAM-distance of $\sim 15\%$.

To test this assumption, we listed in Table 2 all 22 major LV galaxies with

Table 2

THE MAJOR LOCAL VOLUME GALAXIES

Name	D_{TRGB}	D_{NAM}	Δ_D	Name	D_{TRGB}	D_{NAM}	Δ_D
NGC 253	3.70	3.83	0.13	NGC4594	9.55	8.71	-0.84
NGC 628	10.19	9.58	-0.61	NGC4736	4.41	4.03	-0.38
NGC 891	9.95	10.39	0.44	NGC5055	9.04	7.18	-1.86
NGC1291	9.08	9.16	0.08	NGC5128	3.68	3.46	-0.22
IC 342	3.28	3.70	0.42	M 51	8.40	7.13	-1.27
NGC2683	9.82	10.51	0.69	NGC5236	4.90	2.97	-1.93
NGC2903	9.15	10.86	1.71	M 101	6.95	4.85	-2.10
M 81	3.70	1.84	-1.86	NGC6744	9.51	8.63	-0.88
NGC3115	9.68	10.39	0.71	NGC6946	7.73	5.41	-2.32
NGC3184	11.12	11.42	0.30	NGC3379	11.32	19.13	7.81
NGC4258	7.66	7.33	-0.33	NGC3627	11.12	6.72	-4.40

the Milky Way - like luminosity and accurate distance estimates. These galaxies dominate in mass in their groups, and it can be expected that their peculiar velocities are small. As follows from these data, the average difference in distance estimates for them is $\langle D_{NAM} - D_{TRGB} \rangle = -0.51 \pm 0.27$ Mpc, and the relative standard deviation of the difference is 15%. Note that the following galaxies were added to the 16 galaxies in the table with TRGB distances: IC342 with a distance estimate from Cepheids, NGC3115 with a distance estimate from surface brightness fluctuations, and NGC3184, M51, whose distances are determined by the luminosity of supernovae. The bottom two lines of Table 2 show the galaxies NGC3379 and NGC3627, which are massive but not dominant in their groups in the Leo Spur region [15]. According to [7], this region has a complex structure of the peculiar velocity field due to the projection onto the line of sight of two structures: the Leo Spur and the Leo cloud [16] and the presence of a void behind the Leo cloud.

4. *Comparison with other distance estimates.* The LVGDB database contains 94 galaxies with measured radial velocities, whose distances are estimated by the assumed membership (mem) in nearby groups. Of these, we excluded 9 galaxies with deviations $|D_{NAM} - D_{mem}| > 5.0$ Mpc. They are located in the Leo I (NGC3379) and Sombrero (NGC4594) groups with large virial velocities. For the remaining 85 galaxies, we obtained the values $\langle D_{NAM} - D_{mem} \rangle = -0.23$ Mpc and $\sigma_{\Delta} = 1.97$ Mpc. The relative error of the difference Δ for them is 21%. Assuming that the relative error of NAM distances is 15%, we find approximately the same value for the error of mem-distances, 15%.

The LVGDB database also contains 159 galaxies with distance estimates based on the Tully-Fisher method [17], using the relationship between the luminosity of a galaxy and the width of the 21-cm HI line. We excluded from consideration 16 galaxies with a large difference $|D_{NAM} - D_{TF}| > 16$ Mpc, which make up 10% of this sample. All of them, except for one, are located inside the virial zone of the Virgo cluster ($n=9$) or the Coma I group ($n=6$) with anomalous peculiar velocities. Among these excluded objects, the galaxy UGC7774 (RA = 189°.03, Dec = +40°.00) has estimates $D_{TF} = 22.6$ Mpc and $D_{NAM} = 7.2$ Mpc, but is not in any known group. For the remaining 143 galaxies, we obtained the values $\langle D_{NAM} - D_{TF} \rangle = -0.76 \pm 0.35$ Mpc and $\sigma(D_{NAM} - D_{TF}) = 4.19$ Mpc. Given the average distance of the galaxies in this sample, $\langle D_{TF} \rangle = 11.1$ Mpc, we obtain a relative error in the TF distance estimate of 31%. This value is noticeably larger than the typical error of the TF method, 20%, obtained for spiral galaxies. This difference is quite understandable, since dwarf galaxies dominate in the LV, and their irregular shape makes the correction for the inclination of their axis of rotation to the line of sight uncertain.

5. *Concluding remark.* A comparison of kinematic distance estimates made in the NAM model with distance measurements using the TRGB method and other methods shows a small but systematic shift in the NAM scale, $\langle D_{NAM} - D_{TRGB} \rangle = -0.30 \pm 0.08$ Mpc. The relative error in determining the kinematic distance is $\sim 20\%$ for individual galaxies in the Local Volume. If there are several members in the group with measured radial velocities, the error of the NAM method can be improved to 15%. This makes the NAM method more preferable compared to the Tully-Fisher method, the relative error of which for the LV population we estimated as 31%.

However, there are two adjacent areas in the sky: the zone of galaxies falling onto the Virgo cluster with a radius of $\sim 23^\circ$ and the zone of large negative peculiar velocities in the Coma I group north of the Virgo cluster, where the kinematic method gives large errors and is practically inapplicable. The total area of these anomalous regions occupies only 10% of the sky. Taking into account this caveat, the kinematic method in the NAM model is quite suitable for the mass determination of distances for nearby galaxies with an error of 15-20%.

The study was carried out with the support of a grant from the Russian Science Foundation No. 24-12-00277.

¹ Special Astrophysical Observatory, Nizhnij Arkhyz, Zelenchukskiy region, Karachai-Cherkessian Republic, 369167, Russia, e-mail: idkarach@gmail.com

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251 Russia

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ГАЛАКТИК В МЕСТНОМ ОБЪЕМЕ

И.Д.КАРАЧЕНЦЕВ¹, А.А.ПОПОВА²

Рассмотрены кинематические расстояния до близких галактик, полученные методом численного действия (NAM), основанным на данных обзора Cosmic-flow-3. Расстояния NAM сравниваются с 418 высокоточными расстояниями, измеренными методом вершины ветви красных гигантов (TRGB) с помощью космического телескопа Хаббла. Мы оценили среднюю разницу $\langle D_{NAM} - D_{TRGB} \rangle = -0.30 \pm 0.08$ Мпк и стандартный разброс в 1.57 Мпк. Примерно такая же разница в масштабе расстояний получается по сравнению с менее точными оценками расстояний через принадлежность галактик к известным группам

или из соотношения Талли-Фишера. Мы пришли к выводу, что NAM-метод дает оценки расстояний с погрешностью 20% в пределах Местного объема, что справедливо для ~90% неба, за исключением областей скопления Virgo и группы Coma-I.

Ключевые слова: *галактики: кинематические расстояния: Местный объем*

REFERENCES

1. *R.C.Kraan-Korteweg, G.A.Tammann*, Astron. Nachr., **300**, 181, 1979.
2. *I.D.Karachentsev, V.E.Karachentseva, W.K.Huchtmeier et al.*, Astron. J., **127**, 2031, 2004.
3. *I.D.Karachentsev, D.I.Makarov, E.I.Kaisina*, Astron. J., **145**, 101, 2013.
4. *E.I.Kaisina, D.I.Makarov, I.D.Karachentsev et al.*, Astrophys. Bull., **67**, 115, 2012.
5. *R.B.Tully, E.J.Shaya, I.D.Karachentsev et al.*, Astrophys. J., **676**, 184, 2008.
6. *P.J.E.Peebles, S.D.Phelps, E.J.Shaya et al.*, Astrophys. J., **554**, 104, 2001.
7. *E.J.Shaya, R.B.Tully, Y.Hoffman et al.*, Astrophys. J., **850**, 207, 2017.
8. *E.Kourkchi, H.M.Courtois, R.Graziani et al.*, Astron. J., **159**, 67, 2020.
9. *K.N.Abazajian, J.K.Adelman-McCarthy, M.A.Agüeros et al.*, Astrophys. J. Suppl., **182**, 543, 2009.
10. *B.S.Koribalski, L.Staveley-Smith, V.A.Kilborn et al.*, Astron. J., **128**, 16, 2004.
11. *M.P.Haynes, R.Giovanelli, A.M.Martin et al.*, Astron. J., **142**, 170, 2011.
12. *C.-P.Zhang, M.Zhu, P.Jiang et al.*, Science China Physics, Mechanics and Astronomy, **67**, 219511, 2024.
13. *J.Alonso-Garcia, M.Mateo, A.Aparicio*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **118**, 580, 2006.
14. *I.D.Karachentsev, O.G.Nasonova, H.M.Courtois*, Astrophys. J., **743**, 123, 2011.
15. *I.D.Karachentsev, E.I.Kaisina, V.E.Karachentseva*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **521**, 840, 2023.
16. *R.B.Tully*, Nearby Galaxies Catalog (Cambridge: Cambridge University Press), 1988.
17. *R.B.Tully, J.R.Fisher*, Astron. Astrophys., **54**, 661, 1977.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-443

ON THE EXTENDED BLAZAR SEQUENCE FOR γ -RAY EMITTING ACTIVE GALACTIC NUCLEI

A.I.AUDU^{1,2}, F.C.ODO¹, A.A.UBACHUKWU¹

Received 30 June 2024

Accepted 6 December 2024

In this paper, we use the distributions of observed γ -ray properties, as well as orientation parameters of a sample of Fermi-LAT AGNs to investigate the hypothesis that γ -NLS1 objects are beamed sources with γ -ray emitting axes inclined at close angles to the line of sight. Based on these parameters we investigate the relationship between γ -NLS1s and other subclasses of γ -ray emitting jetted AGNs. Results show that γ -NLS1s are more highly beamed than both FSRQs and BL Lacs with mean value of core-dominance parameter $R_g \sim 9507$. γ -NLS1s and jetted Seyfert galaxies are continuous in distribution of the orientation parameter with average cone angles $\Phi_m \sim 8^\circ$ and 44° respectively. Furthermore, the spectral energy distribution of γ -NLS1 is comparable to those of FSRQs and BL Lacs suggestive that γ -NLS1s and blazars form a continuous spectral sequence. There is a significant anti-correlation ($r \sim -0.9$) between the γ -ray dominance D_g and γ -ray luminosity. There is a strong dependence of D_g on redshift ($r \sim -0.7$) suggestive that D_g is more sensitive to environmental factors than intrinsic γ -ray luminosity. The results suggest that γ -NLS1s are highly beamed γ -ray sources whose de-beamed counterparts can be found among Seyfert galaxy populations.

Keywords: *galaxies: active galaxies: Seyferts: jets*

1. Introduction. Seyfert galaxies are traditionally classified as radio-quiet class of active galactic nuclei (AGNs), with radio-loudness parameter defined in terms of the ratio of 5 GHz radio to optical blue-band flux densities, $f_{5\text{GHz}}/f_{b\text{-band}} < 10$ [1]. Based on the width of nuclear emission lines, two broad categories of Seyfert galaxies are distinguished, namely, Seyfert 1 and Seyfert 2. While Seyfert 1 galaxies have a set of broad emission lines, Seyfert 2 galaxies have narrow emission lines. However, a minority class of radio-loud Seyfert 1 galaxies with narrow emission lines, which have been detected in recent observations [2] pointed to a considerable overlap in spectral properties of the two classes of Seyfert galaxies [3]. In general, without ruling out the possibility of relativistic jets in radio-quiet sources [4], radio-loud Seyfert galaxies are believed to harbor powerful relativistic jets, with extended radio structures [5-8].

The discovery of powerful γ -ray emitting narrow-line Seyfert 1 (NLS1) galaxies [9,2,10] has provided substantial evidence that jets are not formed by massive black hole AGNs alone [11], as there are evidence of relativistic jets in low-mass and

low jet-power AGNs [9,12]. The lack of small-mass jetted AGN in the traditional radio-loud/radio-quiet dichotomy has been attributed to bright-source selection bias [13]. Interestingly, [14] identified low-mass sources among Flat Spectrum Radio Quasar (FSRQ) population and argued that NLS1 galaxies are the most prominent AGNs in the low-mass class using $\text{FWHM}(\text{H}\beta) < 2000 \text{ km s}^{-1}$, and the ratio between $[\text{OIII}]/\text{H}\beta < 3$, which along with high Eddington ratio, appears to fit the characteristics of NLS1s [15,16]. These results have been explained as consequences of the presence of a relatively low-mass black hole ($10^6 - 10^8 M$) and fast accretion, suggestive of young age of these objects [17].

There are several arguments in literatures about the true nature of/or the parent sources of NLS1s. Several characteristics have been adduced by authors to connect NLS1 with Compact Steep Spectrum (CSS) sources, such as signs of young age in terms of development of radio-lobes of not more than 10^5 years [17], small linear size and very fast flux variability [18]. Therefore, even though the true nature of these NLS1s is still an ongoing debate in literatures, several results suggest that they might represent young radio sources that are still growing and evolving [17,19], and might be extreme objects on the evolutionary path from radio-quiet Seyfert galaxies to radio-loud quasars [20] and as such, may be low-mass analogues of high-redshift quasars [3,15,21-23]. Furthermore, similarities between the nuclei of jetted Seyfert galaxies and radio-loud AGNs have often been pointed out [24-26] and numerous efforts have been made to demonstrate a continuity in overall distributions of observed properties of the jetted Seyfert galaxies and traditional radio-loud AGNs [22,27-30]. In this regard, several authors [30,22] argued that in general, jetted Seyfert galaxies, BL Lac objects and radio galaxies could share similar characteristics in terms of jet luminosity-redshift ($P-z$) relation, suggestive of similar underlying environment.

Similarities in the distributions of black hole mass and High Eddington ratio of source samples [31] appear to connect the misaligned Steep-spectrum NLS1s to their beamed flat-spectrum NLS1s counterparts. However, discrepancies in mass distribution reveal [15] that disk-hosted radio galaxies could form a link connecting low-mass, high-accretion NLS1s and high-mass, low-accretion BL Lac-like elliptical radio galaxies. In fact, it has been argued [15] that some of these "bridge objects" might simply be genuine type 1 or 2 Seyfert galaxies with their jets oriented at large inclination angles. These different manifestations of NLS1s have been attributed to orientation effects [32,15], suggestive that when the beamed jet is observed at different angles to the line of sight, it could appear as a regular Seyfert galaxy of type 1 or 2 depending on obscuration. In fact, several authors [32,15] posited that at different larger observing angles, Doppler broadening of the permitted lines can cause the NLS1 to be classified as broad- or narrow-line radio

galaxies depending on the level of obscuration of the nuclear region. In these contexts, therefore, a young jetted AGNs with a strong accretion disk and photon rich environment that is observed along its relativistic jet might appears as NLS1, and when the nuclear region is obscured, the object might also appear as a type-2 AGN in optical band, and as a CSS in radio band [15,8]. The scheme appears to fit nicely with the usual unified model for older jetted-AGNs, in which high-excitation radio galaxies (HERGs) form the parent population of FSRQs [33].

NLS1s are a recently discovered class of γ -ray emitting AGN, that exhibit some blazar-like properties, namely: flat-spectrum radio spectra, superluminal motion and strong radiation with fast variability [34], which are explained with the presence of a relativistic jet viewed at small angles. Several authors strongly posited that the different blazar subclasses are just a different manifestation of the same physical process that differ only in bolometric luminosity [35,36], which led to the popular blazar sequence - a scheme that is recently argued to extend to all jetted AGNs [37]. The two known subclasses of blazars, namely BL Lacs and FSRQs, are believed to be the beamed counterparts of high- and low-luminosity radio galaxies, respectively with their jets inclined at close angles to the line of sight [34]. When blazars are observed at larger angles, they appear as radio-galaxies, and we expect to observe an analogue parent population for beamed γ -ray emitting NLS1s (γ -NLS1s). Thus, following our earlier work [38], in this paper we examine the observed gamma ray properties of a sample of blazars and γ -NLS1s in order to study the relationship between these subclasses of γ -ray emitting AGNs.

2. Theoretical framework. Orientation based unified scheme (OUS) for active galactic nuclei is often studied at any frequency band ν using an important orientation parameters, namely, the core-to-extended luminosity ratio R_ν expressed as a function of the viewing angle ϕ in the form [39,40]:

$$R_\nu = \frac{L_C}{L_E} = \frac{R_T}{2} \left[(1 - \beta \cos \phi)^{-n+\alpha} + (1 + \beta \cos \phi)^{-n+\alpha} \right], \quad (1)$$

where L_C and L_E are the core and extended luminosities respectively, $R_T = R$ ($\phi = 90^\circ$), n is a jet model dependent parameter ($n=2$ for continuous jet model and $n=3$ for blob model) while α is the spectral index ($S_\nu \sim \nu^{\pm\alpha}$). The distributions of observed R_ν for various samples have been shown by several authors in the past to be quite consistent with the OUS for both high-luminosity and low luminosity sources [41,42].

A coarse treatment of Eq. (1) suggests that once R_T is known, the mean value of the distribution of core-dominance parameter R_m can be used to estimate the mean viewing angle ϕ_m of a sample in the form [43]:

$$\phi_m \approx \cos^{-1} \left[1 - \left(\frac{2R_m}{R_T} \right)^{-1/(n+\alpha)} \right]. \quad (2)$$

In a two-component beaming model, the total spectral luminosity L_v may be expressed as a sum of the core- and extended components: $L_v = L_C + L_E$. While L_C is assumed to be relativistically beamed, L_γ is assumed to be isotropic [44]. Thus, following [56], the γ -ray core-dominance parameter R_γ defined as the ratio of the beamed to unbeamed luminosities can be expressed through equation (1) as

$$R_\gamma + 1 = \frac{L_\gamma}{L_E}. \quad (3)$$

Equation (3) above suggests that if L_E is isotropic, a correlation between R_γ and L_γ is envisaged in γ -ray emitting AGNs

However, the observed spectral luminosity L_v of AGN is expected to depend on its redshift z , due to luminosity selection effect/evolution and is related to its spectral flux density S_v according to the relation:

$$L_v = S_v d_L^2 (1+z)^{\alpha-1}, \quad (4)$$

where d_L is the luminosity distance which depends on the present Hubble constant H_0 and the present density parameter Ω_0 according to the relation [45]:

$$d_L = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2} \left\{ \Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) \left[(\Omega_0 z + 1)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \quad (5)$$

In previous papers [41,42] these effects were studied for various samples in the radio band. In this paper, we extend the investigation to the γ -ray band, including NLS1s whose place in the revised unification scheme is gaining attention of authors.

However, with current extension of blazar sequence, to include other jetted AGNs [37], it has become increasingly important to study the position of γ -NLS1s in the extended scheme. Nevertheless, an important aspect of the blazar sequence that has gained attention [46,47], is the relationship between low-energy and high-energy components of the spectral energy distribution (SED). In fact, [35] introduced a broad-band parameter, namely, γ -ray dominance D_g , defined as the ratio of γ -ray luminosity L_g to the peak radio luminosity L_R ($D_g = L_g/L_R$), which the authors used to study blazar sequence for the energetic γ -ray experiment telescope (EGRET) blazars. Actually, D_g is expected to show a sequence of decrease from low-synchrotron luminosity end to high-synchrotron luminosity end of the sequence [48]. This sequence obviously suggests that the SED of FSRQs would be less dominated by γ -ray emission than the BL Lacs. However, this parameter seems to have been somewhat overlooked in earlier studies, partly due to insufficient γ -ray data for a large number of blazars known at that time.

3. *Description of source sample.* The current analysis is based on a recent compilation of γ -ray emitting AGNs taken from the 4th Fermi-LAT AGN catalogue. From the 4th Fermi-LAT AGN catalogue, [49] has made a new sample of 1559 bona-fide γ -ray emitting jetted AGN, which include 12 γ -NLS1s. These objects were cross-correlated with the compilation by [50], where relevant derived radio data of a large number of objects in the catalogue are readily available. Furthermore, [51] also derived the γ -ray core dominance parameters R_g of a large number of blazars in the catalogue, which the authors used to argue for relativistic beaming of γ -ray emission in blazars. Three of the 12 γ -NLS1 do not overlap with these earlier compilations by [50,51] and hence, do not have complete data and were excluded in current investigation. Altogether, there are 697 γ -ray emitting jetted AGN with complete relevant data for our investigation, namely 238 BL Lacs, 18 FRI radio galaxies, 34 FRII radio galaxies, 270 FSRQs, 9 γ -NLS1s and 128 other Seyfert galaxies. This represents $\sim 45\%$ of the bona-fide γ -ray emitting jetted AGN and 76% of γ -NLS1s from the 4th Fermi-LAT catalogue. Although the FRIs, FRIIs, γ -NLS1s and other Seyfert galaxies in the sample are strong γ -ray emitters detected by the Fermi-LAT, their γ -ray core dominance parameters were yet to be comprehensively determined. Thus, we derive their γ -ray core dominance parameter based on empirical relations between R_g and radio core-dominance parameter R_R for γ -ray loud sources given by [51]. However, the regression constants derived by the authors are slightly different for BL Lacs and FSRQs in their data. Thus, for calculation of R_g in this paper, we use the average values of the constants for the two sub-classes and the relation yields:

$$\log R_g = 2.07 \log R_R + 1.32. \quad (6)$$

For investigation of extended blazar sequence in the sample, we calculated the γ -ray dominance D_g for all objects in our sample. Throughout the paper, we have adopted the cosmology with $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ and $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ($\Omega_m = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.7$). For analyses in this paper, the degree of relationship between source parameters is deduced by Pearson Product moment correlation coefficient r using PYTHON.

4. *Analyses and results.* We show the distribution of FSRQs, BL Lacs and γ -NLS1s sub-sample in γ -ray dominance D_g in Fig.1. Obviously, the three subsamples are almost indistinguishable in the plot as they occupy the same range of D_g values. However, the distribution gives a mean value of 3.25 ± 0.43 , on logarithmic scale, for the sub-samples taken together. This is consistent with γ -ray emission of blazars and γ -NLS1s being several orders of magnitude more prominent than radio emission [52,53,47], which shows that blazars and γ -NLS1s are strong γ -ray emitters. We interpret this result to mean that similar physical processes lead to variations in γ -ray dominance of blazars and γ -NLS1s.

However, the mean values for individual sub-samples on logarithmic scales are 3.1 ± 0.8 , 2.7 ± 0.5 and 2.7 ± 0.2 , respectively for BL Lacs, FSRQs and γ -NLS1s. Simple K-S test carried out on the data shows that at 5% significance, the underlying distributions of D_g for FSRQ and γ -NLS1 subclasses are same; the hypothesis that the distributions are same is not rejected, with $\rho \sim 0.1$. The cumulative distributions of D_g for the different subclasses are also shown in Fig.1b. Apparently, the SED parameter of γ -NLS1s is quite similar to that of FSRQs. Nevertheless, the cumulative distribution of BL Lac is different from those of FSRQ and γ -NLS1s: the SED of BL Lacs appears to be more γ -ray dominant than FSRQs and γ -NLS1s. Simple K-S test carried out on the data shows that at 5% significance, the underlying distributions of D_g for BL Lacs and other subclasses are significantly different; the hypothesis that the distributions are same is rejected, with $\rho < 10^{-5}$ in each case. The results suggest that although FSRQs are more luminous than BL Lacs and γ -NLS1s, the γ -ray luminosity may not be the leading driver of γ -ray dominance, suggestive that γ -ray dominance may be more sensitive to synchrotron activities in the jets [48]. Fig.1 shows an interesting feature that can be considered relevant for extended blazar sequence: there is similarity in distributions of γ -ray dominance of blazars and γ -NLS1s which supports the proposition that blazar sequence scheme can be extended to γ -NLS1s.

We show the scatter plot of γ -ray dominance D_g as a function of γ -ray luminosity L_g for blazars and γ -NLS1s in Fig.2. There is a clear trend in which D_g decreases with increasing luminosity. Regression analysis on the data yields $\log D_g = (0.42 \pm 0.02)\log L_g + (15.38 \pm 0.04)$, with a correlation coefficient $r = 0.98$ and chance probability $\rho \sim 10^{-9}$. The tight anti-correlation can be interpreted to mean that γ -ray dominance may be more sensitive to synchrotron activities in the jets than γ -ray emission. Apparently, a vast majority of FSRQs occupy high

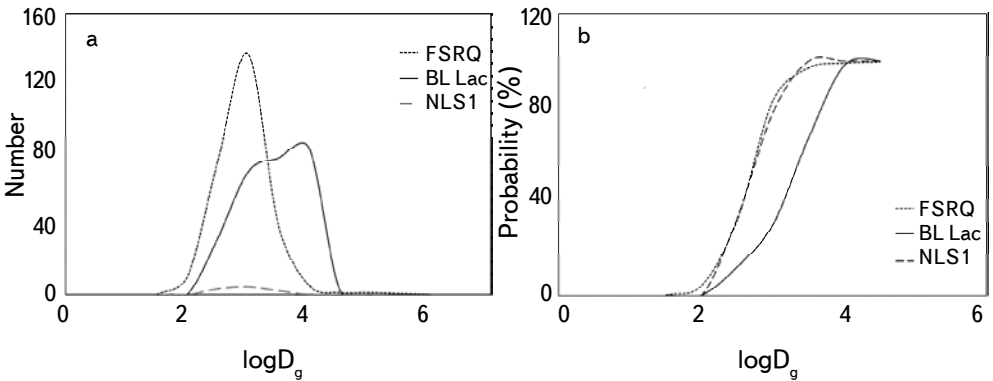


Fig.1. Distribution of blazars and NLS1s in γ -ray Dominance D_g .

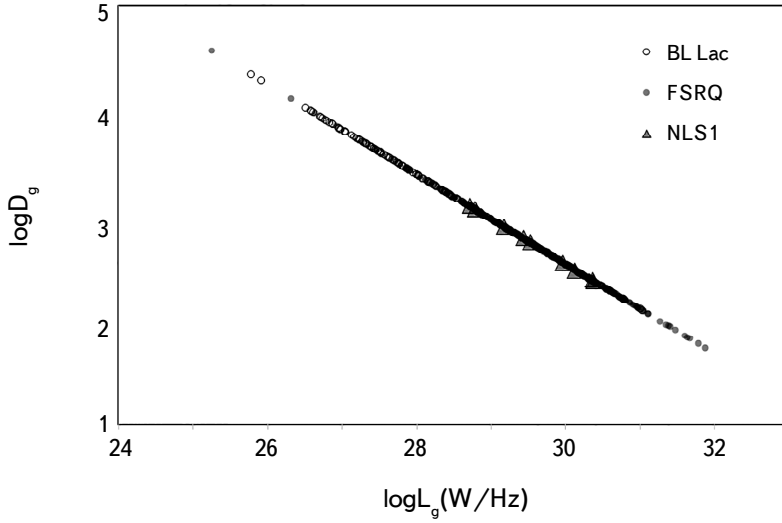


Fig.2. Scatter plot of D_g against γ -ray luminosity for blazars and NLS1s.

L_g - low D_g end of the distribution, with BL Lacs stretching over a wider range to high D_g - low L_g end, NLS1s appear to form a bridge-connector between BL Lacs and majority of the FSRQs. The distribution of the objects on D_g - L_g plane shows that there is a sequence of the SED from FSRQs to BL Lacs through NLS1s. Nevertheless, the presence of few extreme FSRQs with BL Lac-like SED appears to break the sequence.

To investigate the effect of evolution and environment on the parameters, we show the scatter plots of D_g and L_g against redshift z in Fig.3. Analysis of the data in Fig.3a shows that D_g - z scatter best fits into a power-law function given by: $D_g \approx 2.0(1+z)^{-0.2}$, with a correlation coefficient $r \sim -0.8$. The strong dependence of D_g on z suggests that environmental effect is playing a significant role in the variation of D_g in the sample. Nevertheless, it could be observed in Fig.3a that D_g decreases steeply with redshift at low redshift ($z \leq 0.1$) corresponding to $D_g = 4.0$ and remains fairly constant at high redshift ($z \geq 0.3$), shown with a broken vertical line, corresponding to $D_g = 3.0$. Apparently, the figure reveals a transition region in the range: $0.1 \leq z \leq 0.3$. On the other hand, the L_g - z scatter in Fig.3b yields a strong positive correlation with $r \sim 0.7$, which can naturally be attributed to luminosity selection effect in the sample. Fig.3b is more or less a mirror image of Fig.3a and strongly suggests that intrinsic γ -ray luminosity is not the major determinant of D_g . It is obvious from Fig.3 that NLS1s form part of the continuous distribution from FSRQs to BL Lacs in both parameters, suggesting that NLS1s can be accommodated in the blazar sequence.

Since the community consensus appears to favour FR I/BL Lac and FR II/

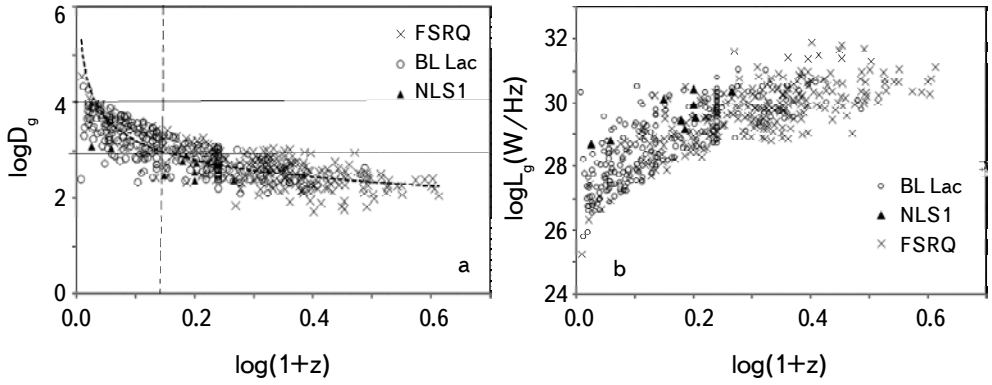


Fig.3. Variation of (a) γ -ray dominance (b) γ -ray luminosity with redshift.

FSRQ unification, we compare the γ -ray core-dominance parameter R_g of NLS1s and Seyfert galaxies to find a possible connection between them via orientation. We show the distributions of R_g of different sub-groups in Fig.4, using Seyfert galaxies as the parent objects of NLS1s. Apparently, while the distributions are consistent with a scheme in which FSRQs and BL Lacs are more core-dominated than FR IIs and FR Is respectively, the scenario is somewhat different for NLS1s and Seyfert galaxies. In fact, NLS1s and Seyfert galaxies occupy the same range of R_g . Nevertheless, the distributions yield mean values R_m of 2.5 ± 0.9 and 0.7 ± 0.2 , for BL Lacs and FR Is, respectively, $R_m \sim 3.5 \pm 1.0$ and 0.4 ± 0.3 , for FSRQs and FR IIs, respectively, while $R_m \sim 9507.4 \pm 13.2$ for NLS1s and 1.4 ± 0.2 , for Seyfert galaxies. For each group of sources, there is a clear continuity in distribution of the parameter. In general NLS1s are more core-dominated than FSRQs and BL Lacs. Two samples K-S test carried out on each distribution shows that at 5% significance, the null hypothesis that the fundamental distributions of each two categories of objects are same is not rejected, with $p > 0.05$ in each case.

To derive the mean cone angle for observing γ -ray emission in different

Table 1

DISTRIBUTIONS OF DERIVED γ -RAY PARAMETERS OF
CURRENT SAMPLE OF γ -RAY AGN

Objects	Number	Z	D_g	L_g (W/Hz)	R_g	ϕ_g°
BL Lacs	238	0.46 ± 0.18	3.1 ± 0.8	28.69 ± 1.77	2.5 ± 0.9	33.7 ± 1.6
FRI	18	0.44 ± 0.14	3.7 ± 0.4	27.25 ± 1.82	0.7 ± 0.2	63.6 ± 2.1
FR II	34	0.82 ± 0.17	3.4 ± 0.9	27.88 ± 2.27	0.4 ± 0.3	72.9 ± 4.1
FSRQS	270	1.13 ± 0.42	2.7 ± 0.5	29.71 ± 2.11	3.2 ± 0.8	22.3 ± 1.4
Seyferts	128	0.15 ± 0.08	4.1 ± 0.7	26.43 ± 1.95	1.4 ± 0.2	44.2 ± 23
γ -NLS1s	9	0.47 ± 0.21	2.7 ± 0.2	28.69 ± 2.23	9507.4 ± 13.2	8.1 ± 0.6

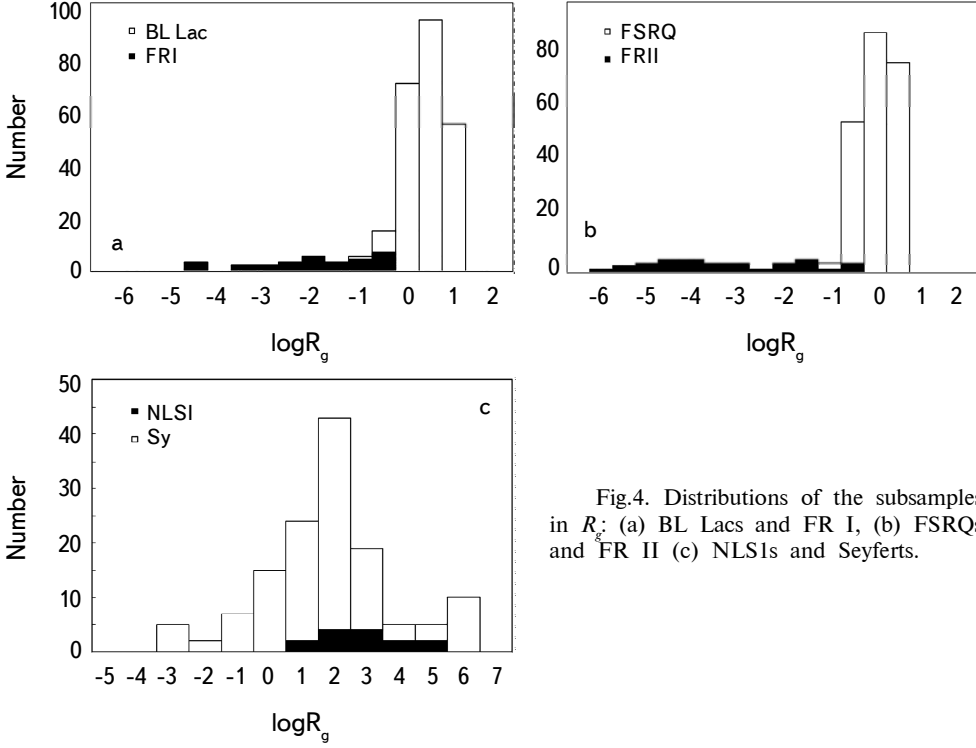


Fig.4. Distributions of the subsamples in R_g : (a) BL Lacs and FR I, (b) FSRQs and FR II (c) NLS1s and Seyferts.

subclasses of the AGNs, the choice of R_T plays a key role [41,42]. In fact, several authors [54] have argued that $R_T < 0.1$ is satisfied by most AGN samples. Hence, using $R_T = 0.024$, which appears to be consistent with the general unification of radio loud AGNs across different frequency bands [44,54,40], we estimated the mean cone angles for γ -ray and radio emissions of each subsample using equation (2). A summary of the results is also shown in Table 1.

5. Discussion. Narrow line Seyfert 1 objects (NLS1s) are a new class of γ -ray emitting AGN, with blazar-like properties, which are explained with the presence of a relativistic jet viewed at small angles to the line of sight [20]. The two classes of blazars, namely, FSRQs and BL Lac objects have been remarkably unified with their de-beamed parent populations of FR II and FR I radio galaxies [41,42]. It therefore becomes important to search for de-beamed parent population of the γ -NLS1s, whose position in the revised unification scheme has gained the attention of authors [49].

Our results have shown that there is a close connection between γ -ray spectral energy distribution (SED) of FSRQs, γ -NLS1s and BL Lac objects, which can be understood in the framework of blazar sequence. The blazar sequence posits that subclasses of blazars are different manifestations of the same physical process

that differ only by bolometric luminosity [35,36]. The simple implication of this is that there should be continuity in spectral energy distribution of different subclasses of blazars. Distribution of the objects in γ -ray dominance is apparently in agreement with the scheme and suggests that similar physical mechanisms give rise to the observed SEDs of γ -NLS1s, BL Lacs and FSRQs. The result is quite consistent with recent results obtained from different source catalogues of γ -ray emitting AGNs [55] in which γ -NLS1s share similar physical properties with blazars once normalized for black hole mass.

However, the distribution of the objects in γ -ray dominance does not evidently show that FSRQs are more γ -ray dominant than BL Lacs and γ -NLS1s. It is an indication that more efficient γ -ray emitters are not the more γ -ray dominant sources [48]. However, in Fig.1b, there appears to be a general trend in variation of γ -ray dominance from FSRQs to BL Lacs, through γ -NLS1s.

We have also shown in the results that there is a tight correlation ($r > 0.9$) between D_g and L_g for blazars and γ -NLS1s. Typical SED of blazars from which the blazar sequence scheme was proposed shows that the luminosity at synchrotron peak (usually in the radio band) is systematically displaced from low frequency at high luminosity end to high frequency at low luminosity end [35,36,56], which suggests an anti-correlation between spectral luminosity and frequency peak. The tight anti-correlation between D_g and L_g in this paper not only suggests that current data is consistent with a blazar sequence, but that γ -NLS1s can also be accommodated in the sequence. Nevertheless, [57,58] argued that although the distributions of spectral properties of γ -NLS1s and blazars support the supposition of an extended blazar sequence, the physical mechanism responsible for spectral curvatures of γ -NLS1s is quite different from those of other subclasses of blazars. Actually, [50] argued that in the radio band, spectral indices are fundamentally different for different subclasses of blazars.

Another important result of present analysis is the tight dependence of γ -ray dominance on redshift. We have shown that there is a significant anti-correlation between D_g and redshift z ($r > 0.7$). Hence, it can be argued that at constant beam power, low redshift sources would have higher γ -ray dominance as γ -ray emission from such sources may suffer less scattering in the intergalactic medium. Actually, [59] obtained a similar result using composite spectral indices as SED parameter, which the authors used to argue for an evolutionary link between Seyfert galaxies and blazars. Perhaps the low D_g observed among FSRQs could have arisen from their location at high redshift, suggestive that the variation in D_g among different subclasses of AGN may be environmental rather than intrinsic effect. This supports an earlier finding that the jets in FSRQs are embedded in complex external physical environment, which may lead to their complex physical properties [60]. For BL Lacs, the high D_g is as expected since they are mostly

located at low redshift. We have shown in Table 1 that distribution of the sample in redshift yields mean values of 1.13 ± 0.42 , 0.46 ± 0.18 and 0.47 ± 0.21 respectively for FSRQs, BL Lacs and NLSIs. Thus, while NLSIs and BL Lacs are similar in redshift distribution, FSRQ seem to be more distant. This has a heavy consequence on the completeness of the samples. Nevertheless, it can be observed from Fig.3 that only 2 NLSIs are located at low ($z < 0.3$) redshift, representing $\sim 16\%$ of the NLSI population in the 4th Fermi-LAT catalogue. Thus, a vast majority of NLSIs ($\sim 84\%$) reside in similar environment with FSRQs.

It is evident from the distributions of the objects in Fig.3b that some FSRQs are located at extremely low redshift. Actually, these anomalous FSRQs were observed to possess high D_g . Perhaps the low D_g of γ -NLSIs compared to FSRQs arises from the supposition that γ -NLSIs possess intrinsically lower γ -ray luminosities than FSRQs. If this is actually the case, then the result is in good agreement with an earlier supposition that γ -NLSIs are low luminosity/low redshift analogues of FSRQs [20].

It is arguable that the tight $D_g - L_g$ anti-correlation may have arisen from the strong redshift effects on the parameters. Thus we subtracted out the common dependence of D_g and L_g on redshift from the $D_g - L_g$ anti-correlation using Spearman's partial correlation statistic given [48] by:

$$r_{DL,z} = \frac{r_{DL} - r_{Dz}r_{Lz}}{\left[(1 - r_{Dz}^2)(1 - r_{Lz}^2) \right]^{1/2}}. \quad (7)$$

The result yields $r_{DL,z} \approx 0.96$ as the $D_g - L_g$ correlation coefficient independent of redshift. Hence, there is an intrinsic $D_g - L_g$ anti-correlation, which is quite consistent with a prediction of the blazar sequence.

Distribution of γ -ray core dominance parameter reveals high γ -ray core-dominance exhibited by γ -NLSIs in the sample. In fact, it has been argued that the detection of extended radio emissions in γ -NLSIs is of primary importance for understanding the jet activities of the NLS1 class in the framework of the unified scheme of jetted AGN since NLSIs with kpc-scale radio structures exhibit a core with significantly higher luminosity than that of extended emissions [6]. Nevertheless, three of the nine γ -NLSIs, namely: PMN J0948+0022, FBQS J1644+2619 and 1H 0323+342 are known to exhibit two-sided radio structures at kpc scales with high radio-core dominance parameter [6] comparable to those of radio quasars. The popular physical explanation to the origin of the high core dominance is relativistic Doppler boosting of the cores [44] and this suggests that relativistic beaming is playing a significant role in γ -NLSIs. In a similar way, we tested for the effect of redshift on R_g . The results as shown in Table 2 show that the dependence of R_g on redshift is not significant with $r \leq 0.2$ in each case.

It is obvious from Table 1 that on average, γ -NLSIs are viewed at closer

Table 2

CORRELATIONS AMONG PARAMETERS OF γ -RAY EMITTING AGNs

Objects	Parameters				
	$D_g - L_g$	$L_g - z$	$R_g - z$	$D_g - R_g$	$D_g - z$
All objects	0.9	0.6	-0.1	-0.2	-0.7
BL Lacs	0.7	0.8	-0.2	0.1	-0.8
FSRQs	0.7	0.7	0.1	-0.1	-0.7
γ -NLS1s	0.8	0.8	0.2	-0.6	-0.8

inclination than jetted Seyfert galaxies, which is somewhat consistent with an orientation scenario between the two subclasses of jetted AGN [38]. This observation appears to suggest that the parent population of beamed γ -NLS1s can be found among Seyfert galaxies [31]. The scenario fits nicely with FSRQ/FR II and BL Lac/FR I orientation-based unified schemes. Although orientation scenario provides a natural explanation for the more extreme R_g properties of γ -NLS1s than Seyfert galaxies, the fact that at sharper inclination, γ -NLS1s possess lower black hole mass than Seyfert galaxies, as reported by several authors [57,58,61] does not support the proposition that Seyfert galaxies form the de-beamed parent population of γ -NLS1s. Actually, our result (c.f. Fig.4) shows that γ -NLS1s occupy similar range of R_g as Seyfert galaxies suggestive that the fundamental difference between the two subclasses of objects may not be orientation. Perhaps, the inconsistency observed with the distributions of R_g for the two groups of objects may have arisen from small number statistics of the γ -NLS1s.

6. Conclusion. We have investigated the relationship between γ -NLS1s and other subclasses of γ -ray emitting AGNs using observed γ -ray properties of a sample. We showed from the distributions of γ -ray dominance that the spectral energy distribution of γ -NLS1s is comparable to those of BL Lacs and FSRQs in a manner that is consistent with blazar sequence. Distribution of γ -ray dominance indicates that the parameter is redshift dependent, which we have interpreted to mean that variations in γ -ray dominance is more sensitive to environmental effects rather than intrinsic γ -ray luminosity. In the γ -ray band, γ -NLS1s are strongly beamed with average cone angle of 8° compared to Seyfert galaxies that have average cone angle of 44° . All these results suggest that γ -NLS1s form a peculiar class of highly beamed γ -ray sources with some form of orientation connection with Seyfert galaxies. Nevertheless, the sample size is small and larger samples of γ -NLS1s would be required to confirm the results.

Acknowledgements. All co-authors contributed actively right from the

research conceptualization, initial manuscript preparation, review and editing, and up until the final manuscript.

¹ Department of Physics and Astronomy, University of Nigeria, Nsukka, Nigeria

² Department of Physics, Federal College of Education, Katsina, Katsina State, Nigeria, e-mail: ismihudu@gmail.com

О РАСШИРЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БЛАЗАРОВ ДЛЯ АКТИВНЫХ ГАЛАКТИК С ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕМ

А.И.АУДУ^{1,2}, Ф.С.ОДО¹, А.А.УБАЧУКВУ¹

В данной работе используется распределение наблюдаемых свойств γ -излучения, а также параметры ориентации для выборки AGN, зарегистрированных с помощью Fermi-LAT, чтобы исследовать гипотезу о том, что объекты γ -NLS1 являются источниками излучения, направленными с осями γ -излучения, наклоненными под малым углом к лучу зрения. Основываясь на этих параметрах, исследована взаимосвязь между γ -NLS1 и другими подтипами активных галактик с релятивистскими джетами, испускающих γ -излучение. Результаты показывают, что γ -NLS1 более сфокусированы, чем FSRQ и BL Lac с средним значением параметра доминирования ядра $R_g \sim 9507$. γ -NLS1 и сейфертовские галактики с джетами образуют непрерывное распределение по параметру ориентации, со средними углами конусов $\Phi_m \sim 8^\circ$ и 44° , соответственно. Кроме того, спектральное распределение энергии γ -NLS1 сопоставимо с распределением для FSRQ и BL Lac, что указывает на то, что γ -NLS1 и блазары образуют непрерывную спектральную последовательность. Наблюдается значительная антикорреляция ($r \sim -0.9$) между доминированием γ -излучения D_g и гамма-лучевой светимостью. Также обнаружена сильная зависимость D_g от красного смещения ($r \sim -0.7$), что указывает на большую чувствительность D_g к факторам окружающей среды, чем к собственной светимости γ -излучения. Результаты предполагают, что γ -NLS1 являются сильно сфокусированными источниками γ -излучения, де-фокусированные аналоги которых можно найти среди популяций сейфертовских галактик.

Ключевые слова: *галактики: активные галактики: сейфертовские галактики: джеты*

REFERENCES

1. *K.I.Kellermann, R.Sramek, M.Schmidt et al.*, *Astron. J.*, **98**, 4, 1989.
2. *M.Ackermann, M.Ajello, W.B.Atwood et al.*, *Astrophys. J.*, **810**, 14, 2015.
3. *D.V.Lal, P.Shastri, D.C.Gabuzda*, *Astrophys. J.*, **731**, 68, 2011.
4. *L.C.Ho, C.Y.Peng*, *Astrophys. J.*, **555**, 650, 2001.
5. *F.K.Liu, Y.H.Zhang*, *Astron. Astrophys.*, **381**, 757, 2002.
6. *A.Doi, H.Nagira, N.Kawakatu et al.*, *Astrophys. J.*, **760**, 41, 2012.
7. *S.Mathur, D.Fields, B.M.Peterson et al.*, *Astrophys. J.*, **754**, 146, 2012.
8. *M.Berton, L.Foschini, A.Caccianiga et al.*, *Front. Astron. Space Sci.*, **4**, 8, 2017.
9. *L.Foschini*, *Astron. Astrophys.*, **11**, 1266, 2011.
10. *F.D'Ammando*, arXiv: 1911.03500v1, 2019.
11. *J.Zhang, H.-M.Zhang, Y.-Y.Gan et al.*, arXiv:2005.11535, 2020.
12. *S.Heinz, R.A.Sunyaev*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **343**, 59, 2003.
13. *P.Marziani, A. Del Olmo, M.D'onofrio et al.*, *Astron. Space Sci.*, **5**, 29, 2018.
14. *L.Foschini*, in: Conference series of American Institute of Physics, **1505**, 574, 2012.
15. *M.Berton, L.Foschini, S.Ciroi et al.*, arXiv: 1603.00492, 2016.
16. *L.Foschini, M.Berton, A.Caccianiga et al.*, In: proceedings of 28th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Geneva. arXiv:1602.08227, 2016.
17. *C.Fanti, R.Fanti, C.P.O'Dea et al.*, *Astron. Astrophys.*, **231**, 333, 1990.
18. *J.C.Ezeugo, A.A.Ubachukwu*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **408**, 228, 2010.
19. *C.P.O'Dea, S.A.Baum, C.Stanghellini*, *Astrophys. J.*, **380**, 660, 1991.
20. *A.Doi, M.Kino, N.Kawakatu et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **496**, 1757, 2020.
21. *S.Mathur*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **314**, 17, 2000.
22. *L.Foschini, M.Berton, A.Caccianiga et al.*, *Astron. Astrophys.*, **575**, A13, 2015.
23. *L.Foschini*, *Universe*, **66**, 136, 2020.
24. *O.Dahari, M.M. De Robertis*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **67**, 249, 1988.
25. *L.C.Ho, J.S.Ulvestad*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **133**, 77, 2001.
26. *H.Falcke, N.M.Nagar, A.S.Wilson et al.*, *Astrophys. J.*, **542**, 197, 2000.
27. *S.Komossa*, In: Proceeding of Revisiting NLS1-2018, 15, 2018.
28. *N.M.Nagar, H.Falcke, A.S.Wilson et al.*, *Astrophys. J.*, **542**, 186, 2000.
29. *S.N.Zhang, G.J.Fishman, B.A.Harmon et al.*, *Nature*, **366**, 245, 1993.
30. *L.C.Ho, A.V.Filippenko, W.L.W.Sargent et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **112**, 391, 1997.
31. *M.Berton, L.Foschini, S.Ciroi et al.*, *Astron. Astrophys.*, **578**, A28, 2015.
32. *Y.Shen, Ho*, *Nature*, **513**, 210, 2014.
33. *T.M.Heckman, P.N.Best*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **52**, 589, 2014.
34. *C.M.Urry, P.Padovani*, *Astron. Soc. Pacif.*, **107**, 803, 1985.
35. *G.Fossati, L.Maraschi, A.Celotti et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **299**, 433, 1998.

36. *G.Ghisellini, A.Celotti, G.Fossati et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **301**, 451, 1998.
37. *E.U.Iyida, F.C.Odo, A.E.Chukwude*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **366**, 40, 2021.
38. *A.I.Audu, F.C.Odo, E.U.Iyida et al.*, Astrophysics, **66**, 159, 2023.
39. *J.H.Fan, J.S.Zhang*, Astron. Astrophys., **407**, 899, 2003.
40. *Z.Pei, J.Fan, D.Bastier et al.*, Science China Physics, Mechanics and Astronomy, **63**, 25911, 2020a.
41. *A.A.Ubachukwu, A.E.Chukwude*, Astron. Astrophys., **23**, 235, 2002.
42. *F.C.Odo, A.A.Ubachukwu, A.E.Chukwude*, Astron. Astrophys., **33**, 279, 2012.
43. *F.C.Odo, A.A.Ubachukwu, A.E.Chukwude*, Astrophys. Space. Sci., **357**, 1, 2015.
44. *M.J.Orr, I.W.A.Browne*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **200**, 1067, 1982.
45. *S.E.Okoye, L.I.Onuora*, Astrophys. J., **260**, 37, 1982.
46. *J.D.Finke*, Astrophys. J., **763**, 134, 2013.
47. *K.Nalewajko, M.Gupta*, Astron. Astrophys., **606**, A44, 2017.
48. *F.C.Odo, B.E.Aroh*, Astron. Astrophys., **41**, 9, 2020.
49. *L.Foschini, M.Lister, S.Antyn et al.*, Universe, **7**, 37, 2021.
50. *Z.Y.Pei, J.H.Fan, D.Bastieri et al.*, Res. Astron. Astrophys., **19**, 70, 2019.
51. *Z.Pei, J.Fan, J.Yang et al.*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **132**, 114102, 2020b.
52. *A.A.Abdo, M.Ackermann, M.Ajello et al.*, Astrophys. J. Lett., **733**, LL26, 2011.
53. *C.D.Dermer, B.Giebels*, Com. Rend. Physique, **17**, 594, 2016.
54. *J.-H.Fan, G.E.Romero, Y.-X.Wang et al.*, ChJA&A, **5**, 457, 2005.
55. *V.S.Paliya, M.Ajello, D.S.Rakshit et al.*, Astrophys. J. Lett., **853**, L2, 2018.
56. *D.Donato, G.Ghisellini, G.Tagliaferri et al.*, Astron. Astrophys., **375**, 739, 2001.
57. *Y.Chen, Q.Gu, J.Fan et al.*, Astrophys. J., **944**, 157, 2023.
58. *Y.Chen, Q.Gu, J.Fan et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **265**, 60, 2023.
59. *E.U.Iyida, C.I.Eze, F.C.Odo*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **367**, 11, 2022.
60. *S.J.Kang, J.H.Fan, W.Mao et al.*, Astrophys. J., **872**, 189, 2019.
61. *Y.Chen, Q.Gu, J.Fan et al.*, Res. Astron. Astrophys., **22**, 095006, 2022.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-459

ЦИКЛЫ АКТИВНОСТИ КАРЛИКА СПЕКТРАЛЬНОГО КЛАССА dM4e GJ 1243

Е.С.ДМИТРИЕНКО¹, И.С.САВАНОВ²

Поступила 29 июля 2024

Принята к печати 6 декабря 2024

Карлик спектрального класса dM4e GJ 1243 (KIC 9726699) является предметом многочисленных исследований, связанных с изучением его уникальной вспышечной активности и эволюции пятен на его поверхности. В статье представлены результаты анализа проявлений долговременной активности, найденные по архивным данным фотометрических наблюдений. Установлено, что данные, полученные независимо в трех обзорах в различных фотометрических фильтрах, указывают на долговременную переменность блеска GJ 1243 с четырьмя характерными величинами длительности циклов (мы будем их нумеровать от 1 до 4), группирующимися около значений P_{cyc1} (1 - 3): 1.5 лет, 2.6 года и 6.3 года, соответственно, а также около P_{cyc1} (4) порядка 12.3 - 12.6 лет. Выполнен анализ положения данных GJ 1243 на диаграмме зависимости $P_{\text{cyc1}}/Prot$ от $1/Prot$ в логарифмических координатах и проведено сопоставление с результатами исследований других М-карликов, что привело к выводу о единой общей зависимости для коротких циклов у всех рассматриваемых объектов.

Ключевые слова: *звезды: пятна: фотометрия: переменность: циклы активности*

1. Введение. В настоящем исследовании [1] мы выполнили анализ данных наблюдений полностью конвективного карлика спектрального класса dM4e GJ 1243 (KIC 9726699), полученных с космическим телескопом Кеплер. В [1] были рассмотрены только два сета наблюдений звезды, доступные в то время из архива космического телескопа Кеплер. В дальнейшем GJ 1243 стал предметом многочисленных исследований, связанных прежде всего с изучением его уникальной вспышечной активности, а также эволюции пятен на его поверхности (см. [2], цикл из публикаций Давенпорта и др. - ссылки в [3-6]).

Основные данные о GJ 1243 содержатся в цитируемых выше литературных источниках. Блеск звезды составляет 12.83 зв. вел. в фильтре V и 7.79 зв. вел. в фильтре K. Масса GJ 1243 равна 0.24 массы Солнца, а радиус - 0.26 радиуса Солнца. Период осевого вращения звезды $Prot$ составляет 0.593 сут. Результаты детального анализа вспышечной активности GJ 1243 по наблюдениям космического телескопа Кеплер и миссии TESS можно найти в [3-6]. Звезда GJ 1243 является близко расположенным к нам dM4e карликом, расстояние до него составляет 13.48 ± 0.42 пк. Звезда обладает сильной эмиссионной линией $H\alpha$ (величина эквивалентной ширины линии более $1 \text{ \AA}$), ее

возраст составляет около 30-50 млн лет.

Результаты нашего детального анализа пятенной активности, представленные в [2], были основаны примерно на 49500 единичных измерениях блеска GJ 1243 в интервале наблюдений в 1460 сут. Периодичность изменений кривой блеска звезды составляет $P_{\text{phot}} = 0.59261 \pm 0.00060$ сут, что полностью совпадает с ранее полученным нами результатом и оценками других авторов (см. [4]). Весь наблюдательный материал был разделен на 1775 сетов, каждый из которых последовательно охватывает один период вращения звезды. Для каждого сета наблюдений космического телескопа Кеплер из решения обратной задачи восстановления температурных неоднородностей звезды были получены карты поверхностных температурных неоднородностей (факторы заполнения f) и определены положения активных областей. Анализ построенных карт привел нас к выводу о значительной эволюции положения пятен на поверхности звезды в течение анализируемого нами длительного промежутка времени. Мы выполнили оценки параметра дифференциального вращения $\Delta\Omega$ и установили, что максимальное значение нижней границы оценки его величины равно 0.0022 рад/сут. Наша более точная оценка параметра $\Delta\Omega$ меньше величин, приводимых в [3,4] (0.0058 и 0.0036 рад/сут) и вероятно связана с более точным учетом изменений положений наиболее активной долготы. Однако, полученная в [3] оценка параметра дифференциального вращения методом, использующим описание эволюции пятен двумерными Гауссовыми функциями, практически совпадает с нашей. Вопрос о присутствии у звезды полярного или приполярного пятна (области) (см. [2,5]) остается актуальным, поскольку анализ фотометрических данных не исключает его наличия, как не проявляющегося при вращательной модуляции звезды. При угле наклона оси вращения порядка 30° к лучу зрения приполярная область GJ 1243 вплоть до широт 30° видна постоянно и вносит лишь малый вклад в переменность блеска в течение одного оборота звезды вокруг оси, наибольший вклад в ее фотометрическую переменность, достигающую 0.02 зв. вел., должны вносить пятна, расположенные в зоне от -30° до 30° широты. Величина S отношения площади полной запятненной поверхности звезды к площади ее видимой поверхности за период наблюдений изменялась в пределах от 7% до 2%, с возможным характерным временем порядка 1000 сут. В [2] нами было показано, что в целом для GJ 1243 положение на диаграммах запятненность - возраст, запятненность - период вращения и запятненность - число Россби хорошо соответствует общему характеру зависимости для ранее исследованных нами карликов спектрального класса M.

Несмотря на высокую востребованность сведений о циклах активности GJ 1243 (см. обсуждение в [5]), информация о них в литературе отсутствует. В настоящей статье будут представлены результаты анализа проявлений

долговременной активности этого объекта, найденные по архивным данным фотометрических наблюдений.

2. Циклы активности. Наше исследование циклов активности звезды GJ 1243 было начато с данных отсканированных фотопластинок проекта Digital Access to a Sky Century@Harvard (DASCH) [7], которые предоставляют широкие возможности анализа долговременной активности звезды на продолжительном временном интервале. Имеющиеся в архиве данные для GJ 1243 охватывают интервал наблюдений длительностью в 94 года (с 1894.6 по 1988.7гг.) (рис.1). Всего нами было рассмотрено 222 измерения блеска звезды в системе, близкой к фотометрической в фильтре В. К сожалению, данные достаточно немногочисленны, кроме того, имеется пробел в данных в интервале с 1952 по 1967гг. Тем не менее, можно предположить, что блеск звезды характеризуется долговременной переменностью, а после пробела в данных, начиная с 1967г. - небольшим поярчением. На основе построенного спектра мощности для блеска GJ 1243 можно предположить существование длительного цикла активности $P_{\text{сул}}$ порядка 4500 сут (рис.1, нижняя диаграмма). На этом рисунке вертикальной линией (светлой) также отмечен пик, соответствующий годовичному периоду.

Еще одна попытка проведения анализа переменности блеска GJ 1243 была выполнена нами по данным многолетнего обзора Kamogata Wide-field

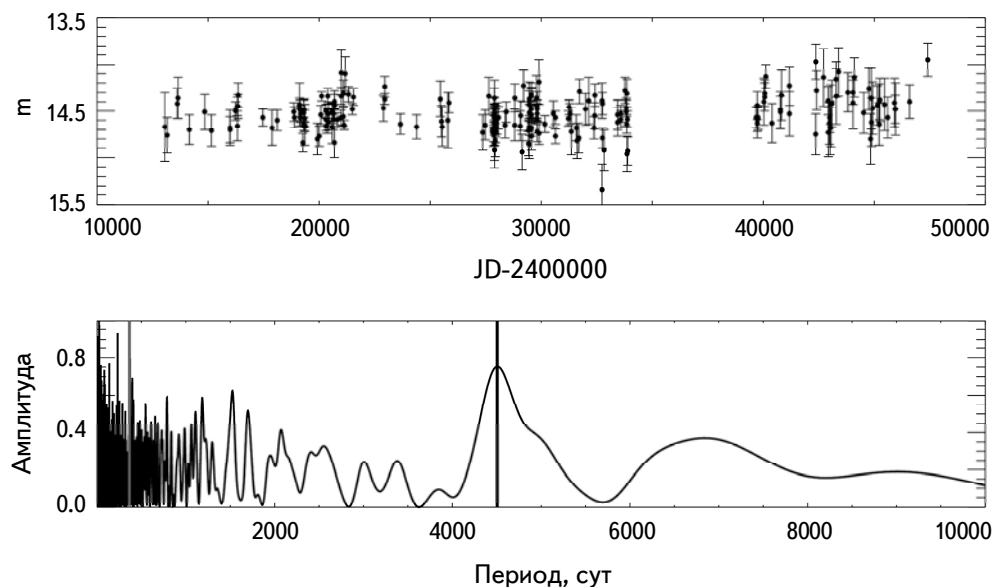


Рис.1. Вверху - кривая блеска GJ 1243 в фильтре В по данным проекта DASCH с 1894.60 по 1988.68гг. Внизу - спектр мощности для диапазона периодов 1-10000 сут. Вертикальными линиями отмечены циклы продолжительностью 365 сут (1 год) (светлая) и 4500 сут (12.3 года) (темная) (см. текст).

Survey (KWS) [8] (<http://kws.cetus-net.org>). В обзоре представлены наблюдения звезды в фильтрах V и Ic, они охватывают длительный интервал наблюдений с 2012г. по настоящее время (июль 2024г.), общей продолжительностью (4371 сут, 12 лет) (HJD 2456127-2460498).

Всего было рассмотрено 474 оценки блеска звезды в фильтре V. Представленные на рис.2 (верхняя диаграмма) данные свидетельствуют о присутствии возможной цикличности в изменении ее блеска. На основе построенного спектра мощности для блеска GJ 1243 можно предположить существование возможных циклов активности около 600 сут и 955 сут (вероятно, более значимого) (рис.2, нижняя диаграмма). Светлая линия на графике соответствует 365 сут сезонной переменности, присутствующей в данных. К сожалению, продолжительность наблюдений не позволяет делать заключение о наличии переменности на шкале времени порядка 4500 сут, найденной по данным проекта DASCH.

Более многочисленными являются данные о блеске объекта в фильтре Ic. В этом фильтре имеется всего 776 оценок блеска звезды. Представленные на

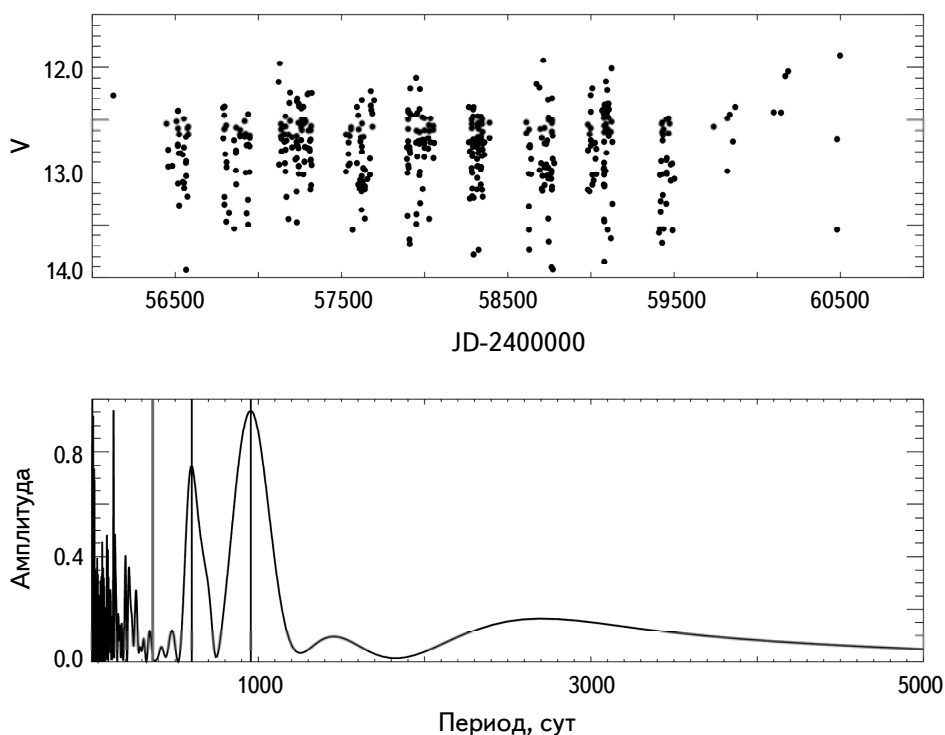


Рис.2. Вверху - блеск GJ 1243 в фильтре V по данным обзора; внизу - спектр мощности для интервала 1 - 5000 сут. Вертикальными линиями отмечены циклы продолжительностью 365 сут (светлая) и 600 сут и 955 сут (темные) (см. текст).

рис.3 (верхняя диаграмма), данные, несомненно, свидетельствуют о присутствии изменения ее блеска в рассматриваемом интервале времени. Можно предположить наличие возможных циклов активности около 1100 сут и 2200 сут (возможно, кратные циклы). Из рис.2 и 3 следует, что общим свойством переменности блеска звезды является возможная цикличность с характерным временем порядка 1000 сут, присутствующая в данных фильтров V и Ic.

Наконец, для GJ 1243 имеются 1129 измерений блеска в фильтрах V и g в архиве проекта ASAS-SN SkyPatrol (ID: 111670491484) [9]. Наблюдения выполнялись в интервале времени HJD 2456694-2460501, их длительность составляет 3807 сут. Наиболее многочисленными оказались наблюдения в фильтре g - 769 измерений (рис.4). Величины возможных циклов активности равны 720 сут и 2470 сут. Кроме того, в [9] представлены данные о блеске GJ 1243 в фильтре V - 360 измерений (рис.5), которые с меньшей достоверностью указывают на величины $P_{\text{сycl}}$ в 530 сут и 950 сут. И в том и в другом случаях имеются указания на возможные долговременные циклы, сопоставимые по величине с длительностью интервала наблюдений или превосходящие его.

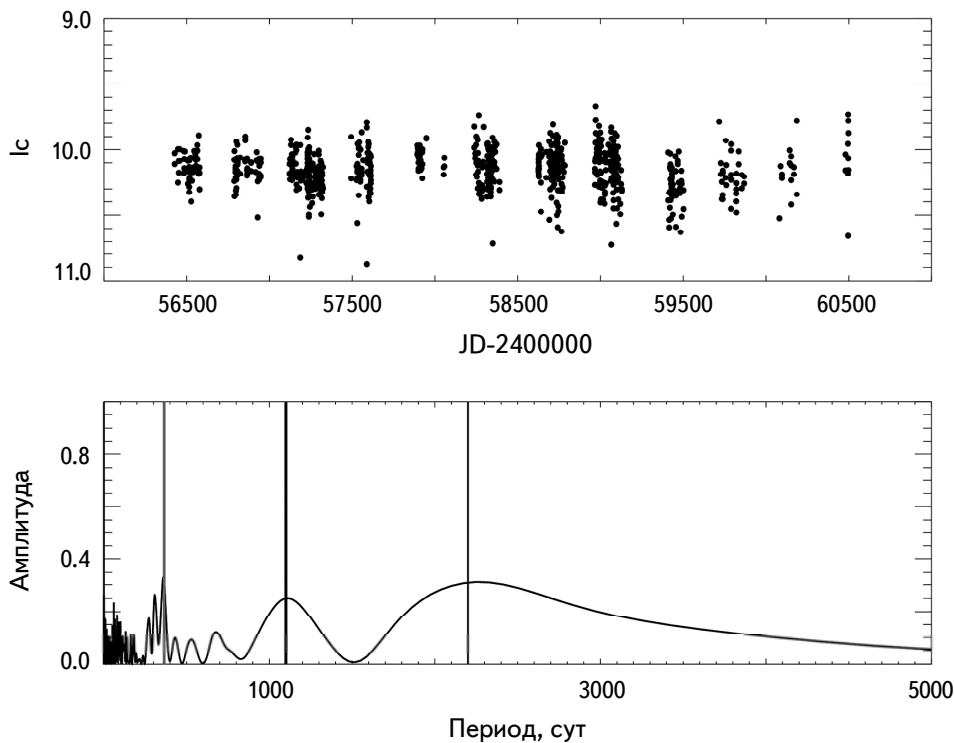


Рис.3. Вверху - блеск GJ 1243 в фильтре Ic по данным обзора KWS; внизу - спектр мощности для интервала 1 - 5000 сут. Вертикальными линиями отмечены циклы продолжительностью 365 сут (светлая) и 1100 сут и 2200 сут (темные) (см. текст).

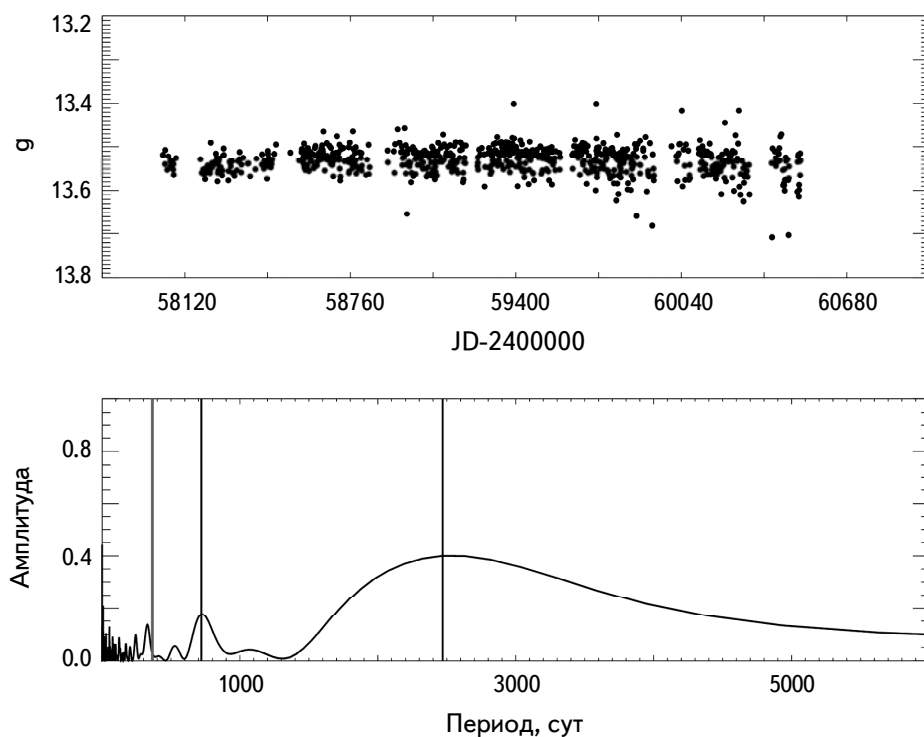


Рис.4. Вверху - блеск GJ 1243 в фильтре g по данным обзора ASAS-SN; внизу - спектр мощности для интервала 1 - 6000 сут. Вертикальными линиями отмечены циклы продолжительностью 365 сут (светлая) и 720 сут и 2470 сут (темные) (см. текст).

Таблица 1

Архив данных	Фильтр	Рсycl
DASCH	B	4500 сут
KWS	V	600 сут и 955 сут
KWS	Ic	1100 сут и 2200 сут
ASAS-SN	g	720 сут и 2470 сут
ASAS-SN	V	530 сут и 950 сут

В табл.1 собраны найденные нами оценки величин $P_{\text{сycl}}$ для GJ 1243.

3. *Заключение.* В статье представлены результаты анализа проявлений активности карлика спектрального класса dM4e GJ 1243. Из рис.1-5 и табл.1 можно заключить, что данные, полученные независимо в трех обзорах в различных фотометрических фильтрах, указывают на долговременную переменность блеска GJ 1243 с четырьмя характерными величинами циклов (от 1 до 4), группирующимися около значений $P_{\text{сycl}}$ (1-3): 1.5 лет (1.4-1.6 года),

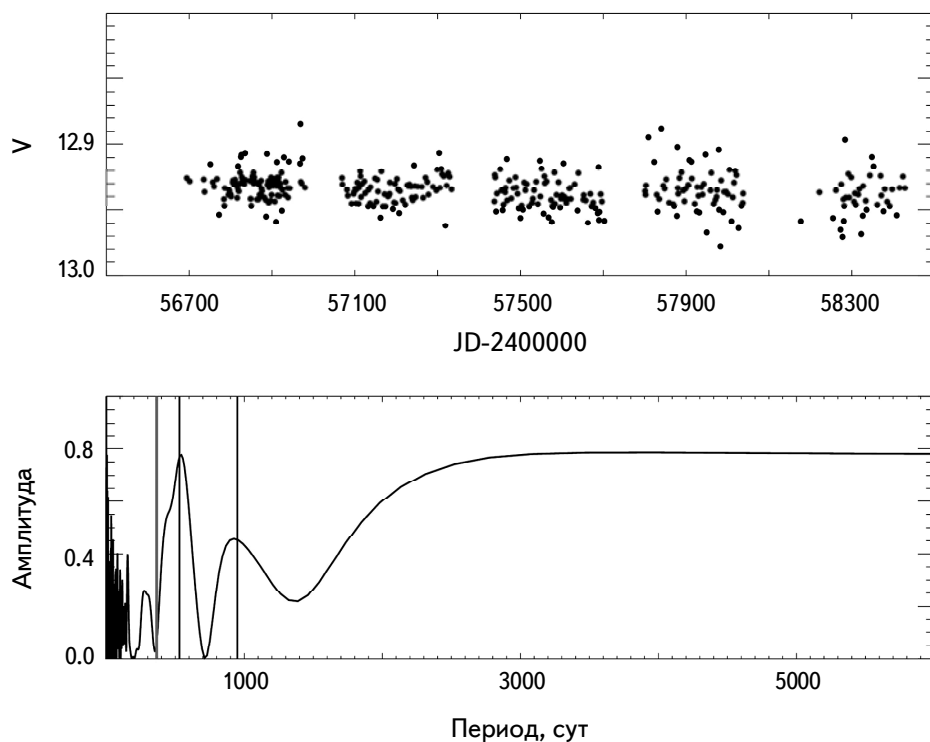


Рис.5. Вверху - блеск GJ 1243 в фильтре V по данным обзора ASAS-SN; внизу - спектр мощности для интервала 1 - 6000 сут. Вертикальными линиями отмечены циклы продолжительностью 365 сут (светлая) и 530 сут и 950 сут (темные) (см. текст).

2.6 года (2-3 года) и 6.3 года (6-6.7 года), а также около P_{cycl} (4) порядка 4500-4600 сут (12.3-12.6 лет).

Ранее в [10] мы выполнили определение циклов активности наиболее холодных карликов спектрального класса M на основе фотометрических данных из обзора ASAS и установили, что большинство из изученных звезд обладают периодичностью изменений кривых блеска на интервалах времени сотни суток - годы. Анализ диаграмм, представленных в виде зависимости $P_{\text{cycl}}/Prot$ от $1/Prot$ в логарифмических координатах, привел к выводу о единой общей зависимости для всех рассматриваемых объектов, как с конвективной оболочкой, так и полностью конвективных. Анализ данных позволил заключить, что величина i - коэффициента наклона на рассматриваемой диаграмме близка к единице, как по всем данным, так и по самым коротким или длинным циклам. Установленное значение i отличается от значений, приведенных в литературных источниках для звезд других спектральных классов. В итоге был сделан вывод о том, что, вероятно, рассматриваемые карлики спектрального класса M образуют еще одну "ветвь" маломассивных

звезд, обладающих более случайной и иррегулярной магнитной активностью на своей поверхности (см. также обсуждения в [8]).

Для GJ 1243 величина $\log(1/Prot)$ составляет 0.2269. Согласно рис.3 из [10], соответствующие ей величины $\log(P_{cycl}/Prot)$ для М-карликов обзора [10] лежат в диапазоне от 2.7 до 3.2 (штрихпунктирные линии). Очевидно, что величины $\log(P_{cycl}/Prot)$ у наиболее коротких циклов 1 и 2 лежат в этом интервале и согласуются с данными о коротких периодах для других М-карликов из [10], в то время как в случае цикла 3 величина $\log(P_{cycl}/Prot) = 3.59$ и находится вне его (аналогичное поведение может быть отмечено и для ряда других М-карликов из [10]). Для цикла 4 соответствующее значение $\log(P_{cycl}/Prot) = 3.88$ - существенно больше полученных в [10] величин, однако следует отметить, что в [10] нами рассматривались только сравнительно короткие циклы (сопоставимые с длительностью наблюдений из архива обзора ASAS).

Кроме того, как и в [11], можно предположить, что наличие P_{cycl} 3 и 4 в области длительных циклов (вплоть до 10 лет) указывает на присутствие структурированности временных проявлений активности (см. рис.2 в [10] и пунктирные линии на нем). Для Солнца возможным аналогом структурированности являются циклы активности Ригера, Швабе, Хейла, Глейсберга, де Врис и Холлштатта [12].

Подавляющее большинство из исследованных нами в [10] М-карликов имеют массу более $0.35 M_{\odot}$ (граница перехода к полностью конвективным М звездам). В [10] были исследованы всего лишь две полностью конвективные звезды - GJ 551 и GJ 729. Периоды вращения этих звезд существенно различаются - GJ 551 имеет максимальное значение $Prot$ для выборки [10] (82.53 сут), период вращения второго карлика составляет 2.869 сут. И в том и в другом случаях результаты для этих объектов хорошо согласуются с общей зависимостью, и в [10] нами было сделано предположение (хотя использовались данные всего для двух маломассивных объектов) об отсутствии различий в циклах активности звезд разных масс для рассматриваемой выборки (и соответственно звезд, различающихся по внутреннему строению - с конвективной оболочкой и полностью конвективных). Результаты выполненного анализа для еще одной полностью конвективной звезды GJ 1243 также согласуются с указанным предположением.

¹ Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга,
Москва, Россия, e-mail: issesd@rambler.ru

² Учреждение Российской академии наук, Институт астрономии РАН,
Москва, Россия, e-mail: igs231@mail.ru

ACTIVITY CYCLES OF dM4e DWARF GJ 1243

E.S.DMITRIENKO¹, I.S.SAVANOV²

The dM4e dwarf GJ 1243 (KIC 9726699) is the subject of numerous studies related to the study of its unique flare activity and the evolution of spots on its surface. The article presents the results of the analysis of manifestations of long-term activity found from archival data of photometric observations. It was found that the data obtained independently in three archives in various photometric filters indicate a long-term variability of the brightness of GJ 1243 with four characteristic cycle values (we number them from 1 to 4) grouped around the values of P_{cycle} (1-3): 1.5 years, 2.6 years and 6.3 years, respectively, as well as around P_{cycle} (4) of the order of 12.3 - 12.6 years. The analysis of the position of the GJ 1243 data on the diagram of the P_{cycle}/Prot - 1/Prot in logarithmic coordinates was performed and a comparison was made with the results of studies of other M dwarfs which led to the conclusion of a single general dependence for short cycles for all the objects under consideration.

Keywords: *stars:spots:photometry:variability:activity cycles*

ЛИТЕРАТУРА

1. *I.S.Savanov, E.S.Dmitrienko*, Astron. Rep., **55**, 890, 2011.
2. *I.S.Savanov, E.S.Dmitrienko*, Astron. Rep., **62**, 273, 2018.
3. *J.R.A.Davenport, L.Hebb, S.L.Hawley*, Astrophys. J., **806**, 212, 2015.
4. *S.M.Silverberg, A.F.Kowalski, J.R.A.Davenport et al.*, Astrophys. J., **829**, 129, 2016.
5. *J.R.A.Davenport, G.T.Mendoza, S.L.Hawley*, Astron. J., **160**, 36, 2020.
6. *G. Tovar Mendoza, J.R.A.Davenport, E.Agol et al.*, Astron. J., **164**, 17, 2022.
7. *J.Grindlay, S.Tang, R.Simcoe et al.*, Preserving Astronomy's Photographic Legacy: Current State and the Future of North American Astronomical Plates, **410**, 101, 2009.
8. *H.Maehara*, JAXA - RR - 13 -010, 119, 2014.
9. *K.Hart, B.J.Shappee, D.Hey et al.*, arXiv:2304.03791, 2023. doi:10.48550/arXiv.2304.03791.
10. *I.S.Savanov*, Astron. Rep., **56**, 716, 2012.
11. *I.S.Savanov, E.S.Dmitrienko*, INASAN Science Rep., **3**, 173, 2019.
12. *J.Beer, S.M.Tobias, N.O.Weiss*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **473**, 1596, 2018.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-469

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ЗВЕЗД CQ Tau И UX Ori ВНЕ ЗАТМЕНИЙ ПО ДАННЫМ NORDIC OPTICAL TELESCOPE

П.ДИМИТРИЕВА¹, О.В.КОЗЛОВА²

Поступила 20 августа 2024

Принята к печати 6 декабря 2024

Выполнен количественный анализ спектров звезд CQ Tau и UX Ori, принадлежащих семейству молодых неправильных переменных звезд с алголеподобными ослаблениями блеска. Спектры получены в обсерватории Nordic Optical Telescope (NOT) в моменты времени, когда обе звезды находились в ярком состоянии. На их основе определены эквивалентные ширины фотосферных линий поглощения и эмиссионной линии $H\alpha$. По эквивалентной ширине эмиссионной линии сделаны оценки темпа аккреции газа на звезды.

Ключевые слова: *переменные звезды: спектры: CQ Tau, UX Ori*

1. *Введение.* Звезды типа UX Ori - это молодые звезды преимущественно спектральных классов A-F, демонстрирующие глубокие ($\Delta V = 2 - 3^m$) непериодические ослабления блеска продолжительностью от нескольких дней до нескольких недель. К числу их важных наблюдательных особенностей относится необычное поведение цветовых треков на диаграммах цвет-величина. Впервые этот эффект наблюдали в 1968г. Гетц и Венцель [1] во время минимумов CQ Tau. Падение блеска звезды вначале сопровождалось покраснением, однако вблизи минимума цветовой трек поворачивал в голубую сторону. Вскоре "эффект поголубения" был обнаружен у других звезд этого типа. Первоначально этот эффект объясняли усилением вклада эмиссионного спектра звезд при ослаблениях блеска (см., например, [2,3]). Позже выяснилось, что его происхождение связано с усилением вклада рассеянного излучения околозвездных дисков. Доказательства этого были получены в ходе много-летнего фотополариметрического мониторинга звезд этого семейства [4]. У всех исследованных звезд наблюдалась высокая линейная поляризация в минимумах блеска, достигающая 5-8%. На основании этого в цитированной выше работе было высказано предположение, что околозвездные диски звезд типа UX Ori наклонены под небольшим углом к лучу зрения, что и является главной причиной их сильной переменности. Это предположение в целом подтвердилось при интерферометрических наблюдениях околозвездных дисков

(см., например, [5]).

В данной работе представлены результаты количественного анализа спектров двух звезд типа UX Ori: CQ Tau и самой UX Ori, полученных в статье [6]. Спектры получены с помощью эшелювого спектрографа на 2.56-м телескопе обсерватории NOT (Nordic Optical Telescope) с высоким спектральным разрешением ($R=25000$). Спектральные наблюдения сопровождались фотометрическими наблюдениями в Крымской астрофизической обсерватории, которые показали, что обе звезды находились в ярком состоянии блеска (вне затмений).

В табл.1 приведены параметры звезд UX Ori и CQ Tau согласно данным Ростопчиной [7]. Заметим, что в ее работе для этой цели использовались самые яркие состояния звезд типа UX Ori, в которых влияние переменной околосветной экстинкции на распределение энергии в спектре звезд минимально, что очень важно при изучении звезд этого семейства. Мы скорректировали результаты ее работы для UX Ori с учетом данных о расстоянии до этой звезды по наблюдениям GAIA [8].

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ ЗВЕЗД

Звезда	Sp	d (пк)	M ($M_{\odot}$)	Возраст (10^6 г.)	R ($R_{\odot}$)	ΔV	$v \sin i$ (км/с)
UX Ori	A3III	325	1.9	4	1.9	3.9	140
CQ Tau	F2IV	140	1.5	10	1.9	2.2	90

Комментарий: Расстояние для UX Ori взято из статьи [8], скорости для UX Ori и CQ Tau из статьи [6], остальные параметры из статьи [7].

2. Общее описание спектров. В оптических спектрах исследуемых звезд присутствуют многочисленные линии поглощения нейтральных и ионизованных металлов (рис.1-6), а также эмиссионные линии водорода Бальмеровской и Пашеновской серий. Большинство фотосферных линий типичны для нормальных звезд близких спектральных классов, но такие как HeI 5876, NaI D или триплет OI 7774, не наблюдаются с такой же интенсивностью у нормальных A-звезд. Многие фотосферные линии блендированы околосветными линиями поглощения, так называемыми shell компонентами. Как показал наш анализ, наиболее стабильными оказались линии MgII 4481 и SiII 6347.

В резонансных линиях NaI наблюдаются спектральные компоненты поглощения, смещенные в красную сторону. Эти компоненты могут появляться и исчезать в течение нескольких дней, указывая на падение газовых сгустков на звезду. Похожая картина падения вещества наблюдается в спектре

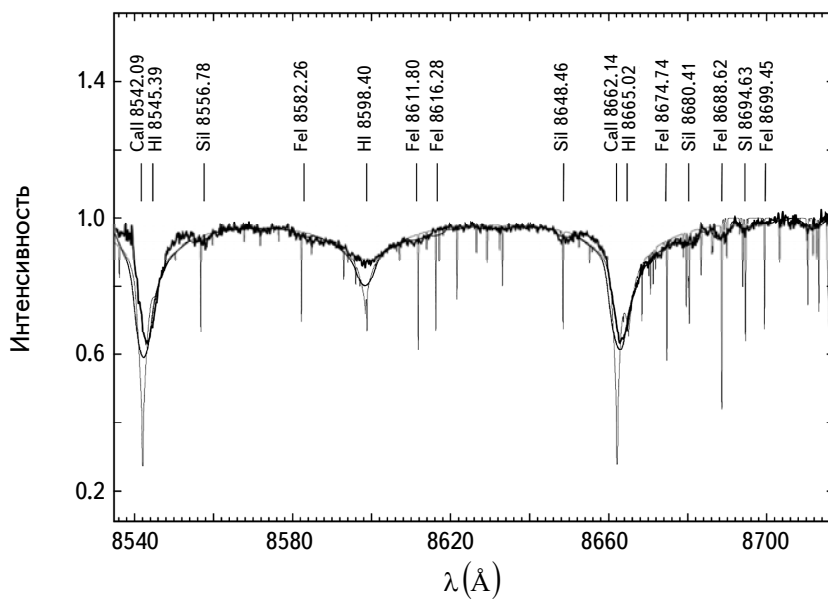


Рис.1. Участок спектра CQ Tau, соответствующий 26 порядку эшелювого спектра звезды. Спектр получен суммированием трех спектров, наблюдавшихся в течение трех ночей 1996г., когда звезда имела максимальный блеск. Серой линией показан синтетический спектр для $T_{\text{eff}} = 7000$ К и $\log g = 3.5$. Тонкая черная линия показывает тот же спектр после свертки со скоростью вращения звезды $v = 90$ км/с. Выделены наиболее сильные линии.

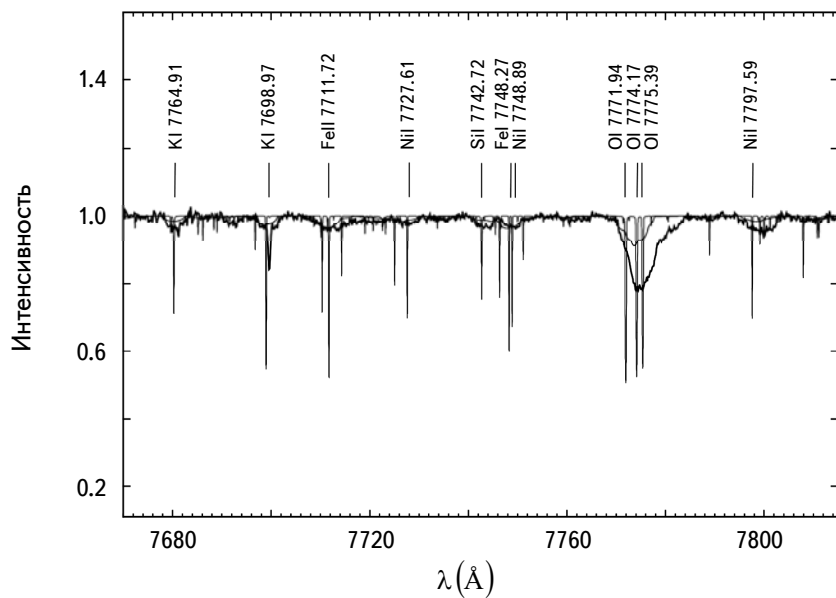


Рис.2. То же самое, что на рис.1 для 29 порядка.

β Pictoris в линиях резонансного дублета CaII [9].

На рис.1-6 показаны выборочные порядки полного спектра CQ Тау, полученного путем усреднения спектров, наблюдавшихся в течение трех ночей 1996г. На рисунках показаны также соответствующие участки

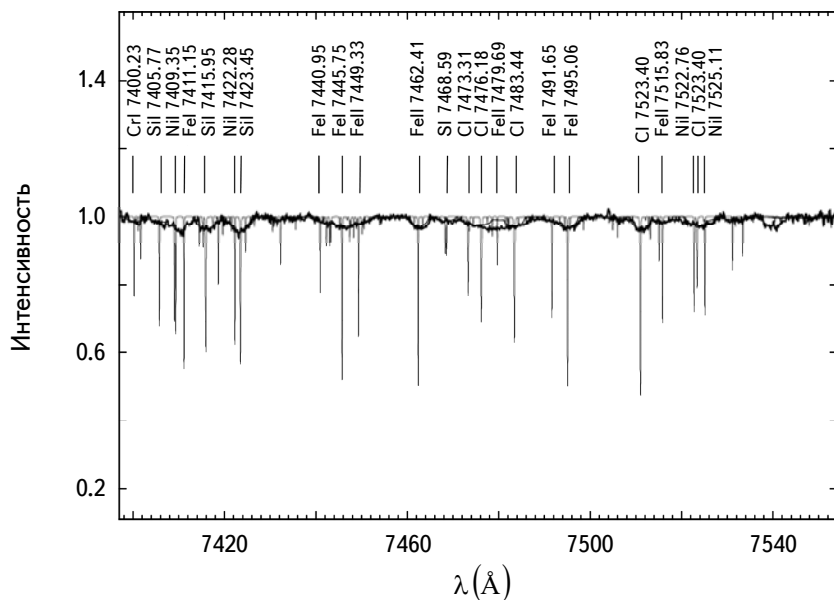


Рис.3. То же самое, что на рис.1 для 30 порядка.

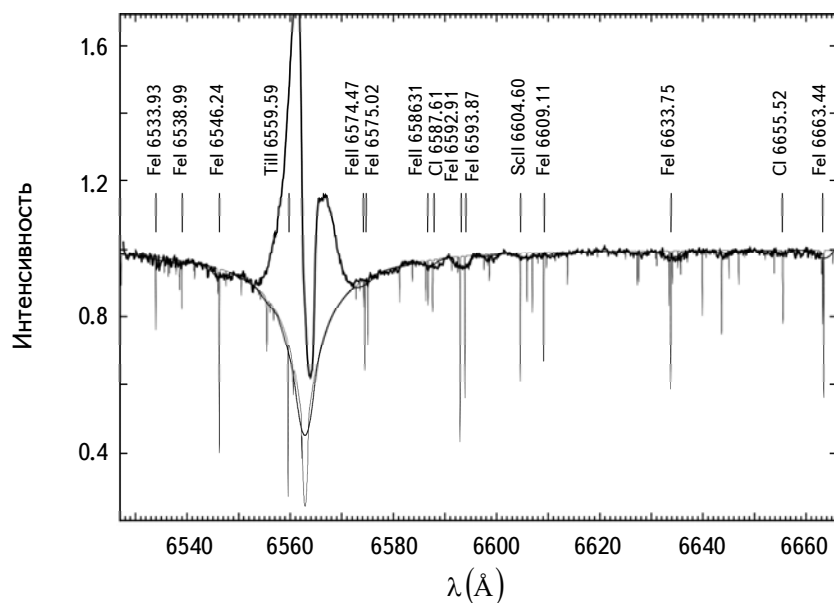


Рис.4. То же самое, что на рис.1 для 34 порядка.

синтетического спектра этой звезды ($T_{eff} = 7000$ К и $\log g = 3.5$) до и после свертки с проекционной скоростью вращения ($v \sin i = 90$ км/с [6]). Выборочные порядки полного спектра UX Ori, совмещенные с синтетическим спектром,

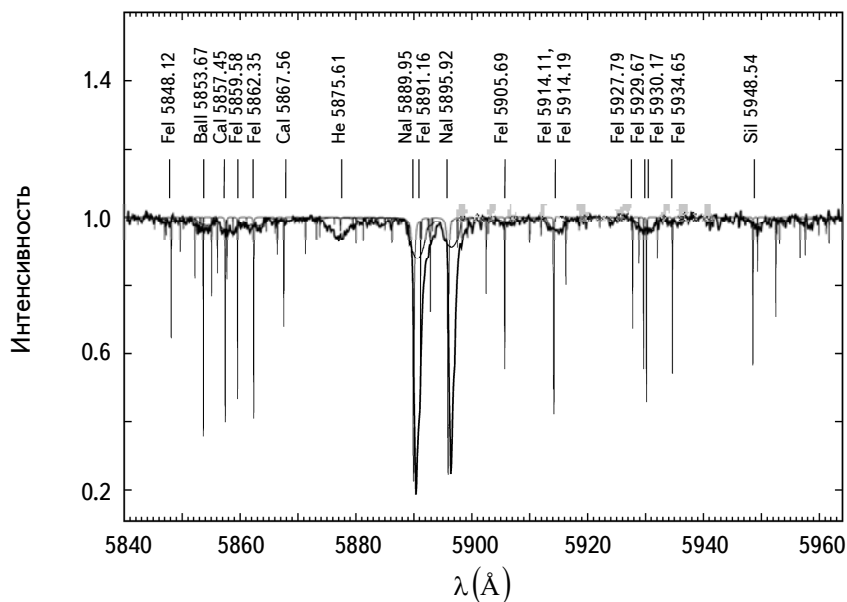


Рис.5. То же самое, что на рис.1 для 39 порядка.

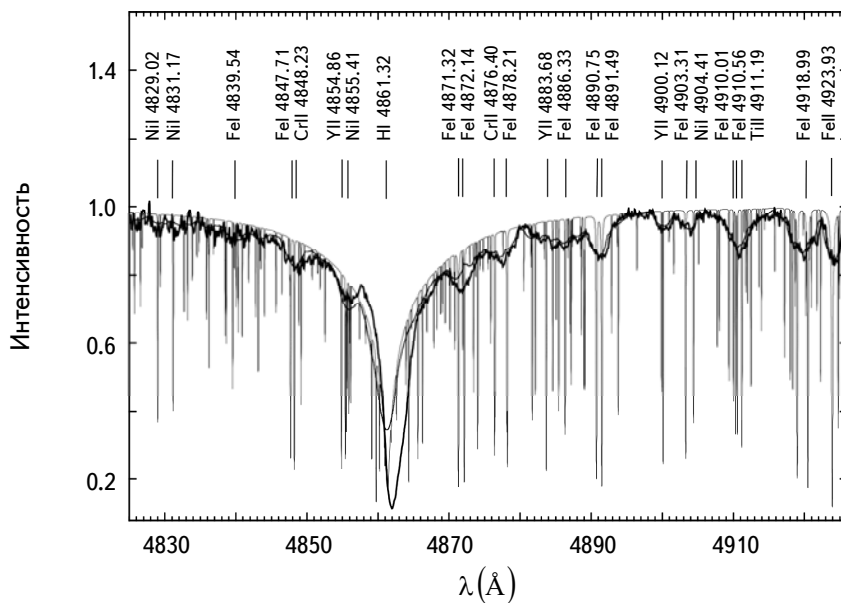


Рис.6. То же самое, что на рис.1 для 46 порядка.

приведены в цитированной выше статье, но показаны в ней небольшими фрагментами.

3. *Спектральная переменность исследуемых звезд в ярком состоянии.* В статье [10] авторы исследовали статистику профилей линии $H\alpha$ в спектрах звезд типа UX Ori и показали, что двухкомпонентный профиль линии является характерным для звезд этого семейства. Недавно этот вывод был подтвержден в статье [11] на более широком статистическом материале. Линия $H\alpha$ имеет широкие, почти симметричные крылья в эмиссии, простирающейся до ± 400 км/с. Типичные лучевые скорости на половинной интенсивности составляют $\pm 200 - 300$ км/с. При затмении звезды эквивалентная ширина $EW(H\alpha)$ увеличивается, при этом поток в линии уменьшается. Такая переменность этой линии в спектрах звезд типа UX Ori впервые наблюдалась Колотилковым [12]. В моменты наиболее глубоких минимумов двухкомпонентный профиль линии $H\alpha$ в спектре CQ Tau трансформируется в однокомпонентный профиль [13]. Такая же трансформация наблюдалась во время глубокого минимума UX Ori [14].

Относительная интенсивность двух эмиссионных пиков $H\alpha$ со временем меняется. Однако, несмотря на большие временные вариации, для каждой звезды существует общая закономерность, характеризующая профиль $H\alpha$. А именно, в UX Ori и CQ Tau синий пик систематически сильнее красного (обратный профиль P Cygni типа III).

Согласно интерпретации Тамбовцевой и др. [15], такие профили ожидаются, если линия $H\alpha$ формируется в аккреционном диске, видимом почти с ребра. Относительная интенсивность синего и красного пиков определяется комбинацией вращения и движения. Если это так, то профиль обратный P Cygni III у звезд UX Ori и CQ Tau указывает на ситуацию, когда важную роль в формировании линии играет аккреция.

Для звезд этого типа возможны два разных источника спектральной переменности [6]. Один из них характерен для многих молодых звезд с газовыми оболочками. В этом случае переменность эмиссионного спектра связана с вариациями температуры и плотности в излучающей области и на луче зрения. Наблюдения показывают, что такие вариации могут быть достаточно сильными и могут приводить к сильной переменности спектральных линий.

Другой механизм спектральной переменности характерен только для звезд типа UX Ori. Он связан с коронографическим эффектом, создаваемым непрозрачными газопылевыми структурами (облаками) протопланетного диска, которые закрывают звезду от наблюдателя и вызывают глубокие минимумы, характерные для этих звезд. Непрозрачные фрагменты диска экранируют от

Таблица 2

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ШИРИН ДЛЯ UX Ori

Порядок	Элемент	$\lambda(\text{\AA})$	EW ($\text{\AA}$)
UX Ori 1994			
26	HI (emission)	8598.40	-1.66 (19/11/94)
	HI (emission)	8665.02	-1.85 (19/11/94)
34	H α (emission)	6562.80	-7.61 (19/11/94)
UX Ori 1995			
26	HI (emission)	8598.40	-1.60 (02/12/95)
	HI (emission)	8598.40	-1.61 (04/12/95)
	HI (emission)	8598.40	-1.76 (06/12/95)
	HI+CaII (emission)	8665.02	-2.50 (02/12/95)
	H+CaII (emission)	8665.02	-3.09 (04/12/95)
	HI+CaII (emission)	8665.02	-2.11 (06/12/95)
34	H α (emission)	6562.80	-13.15 (02/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-12.77 (04/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-12.72 (06/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-10.56 (02/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-10.50 (04/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-10.08 (06/12/95)
46	H β (emission)	4861.32	-1.29 (02/12/95)
	H β (emission)	4861.32	-1.12 (04/12/95)
	H β (emission)	4861.32	-1.30 (06/12/95)
49	TiII	4563.76	0.12
50	MgII	4481.33	0.59
54	TiII	4163.65	0.11
55	H γ (emission)	4101.73	-0.29 (02/12/95)
57	CaII	3933.66	2.18
UX Ori 1996			
26	HI (emission)	8598.40	-1.68 (25/11/96)
	HI (emission)	8598.40	-1.86 (28/11/96)
	HI+CaII (emission)	8665.02	-1.43 (25/11/96)
	HI+CaII (emission)	8665.02	-1.40 (28/11/96)
34	H α (emission)	6562.80	-8.46 (25/11/96)
	H α (emission)	6562.80	-5.67 (28/11/96)
35(1)	H α (emission)	6562.80	-5.52 (28/11/96)
	H α (emission)	6562.80	-5.23 (02/12/96)
35(2)	SiII	6347.11	0.34
	SiII	6371.37	0.22
36	SiII	6347.11	0.33
	SiII	6371.37	0.26
39	HeI	5875.61	0.48
	NaI	5889.95	0.70
	NaI	5895.92	0.54
47	H β (emission)	4861.32	-0.31 (28/11/96)
	H β (emission)	4861.32	-0.35 (02/12/96)

Таблица 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ШИРИН
ДЛЯ CQ Tau, 1995

Порядок	Элемент	$\lambda(\text{\AA})$	EW ($\text{\AA}$)
1	2	3	4
CQ Tau 1995			
26	H I (emission)	8598.40	-0.38 (03/12/95)
	H I (emission)	8598.40	-0.35 (05/12/95)
30	Fe II	7415.95	0.12
34	H α (emission)	6562.80	-8.45 (03/12/95)
	H α (emission)	6562.80	-5.16 (05/12/95)
35	Fe I	6393.60	0.12
	Fe I	6400.00	0.14
	Ca I	6439.07	0.16
	Ca I	6449.81	0.16
	Fe II	6456.38	0.29
	Ca I	6462.57	0.22
36	Ni I, Fe I	6191.17, 6191.56	0.10
37	Fe I	6065.48	0.14
	Fe I	6078.49	0.11
39	Si I	5747.67	0.04
	Fe I, Si I	5753.12, 5753.62	0.15
	Fe I	5762.99	0.12
	Ca I	5581.96	0.11
40	Ca I, Fe I	5594.46, 5594.65	0.20
	Fe I	5624.54	0.16
41	Fe I	5429.70	0.20
	Fe I, Fe I	5455.44, 5455.61	0.25
	Si I	5494.24	0.04
	Fe I	5497.52	0.07
	Fe I	5501.46	0.17
42	Fe I	5302.30	0.10
	Fe I	5307.36	0.12
43	Mg I	5172.68	0.39
	Mg I	5183.60	0.56
	Ti II	5188.68	0.08
	Fe I, Fe I	5191.45, 5192.34	0.17
	Ti II, Fe I	5226.54, 5226.86	0.55
44	Ni I	5115.39	0.05
45	Fe I	4957.60	0.36
	Fe I	5027.12	0.14
46	H β (emission)	4861.32	-0.20 (03/12/95)
	H β (emission)	4861.32	-0.26 (05/12/95)
	Fe I, Fe I	4871.32, 4872.14	1.10
47	Ti II	4779.98	0.09
	Mn I	4783.43	0.09
	Ni I, Fe I	4786.53, 4786.81	0.08

Таблица 3 (Окончание)

1	2	3	4
48	FeI	4673.16	0.14
	MgI	4702.99	0.22
49	TiII	4563.76	0.34
	TiII	4571.97	0.26
50	FeI, FeI	4476.02, 4476.08	0.12
	TiII	4501.27	0.28
	FeII	4508.29	0.23
	FeII	4515.34	0.27
52	ScII, TiII	4314.08, 4314.97	1.02
	ScII, TiII	4325.00, 4325.76	1.17
	H δ (emission)	4340.46	-0.05 (03/12/95)
	H δ (emission)	4340.46	-0.01 (05/12/95)
53	FeI	4260.47	1.07
	FeI	4271.15	0.66
54	FeI, FeI	4143.41, 4143.87	1.03
	TiII	4161.53	0.32
	TiII	4163.65	0.21
	MgI	4167.27	0.47
55	FeI	4063.59	1.04
	FeI, FeI	4071.52, 4071.74	0.85
	H γ (emission)	4101.73	-0.05 (05/12/95)

наблюдателя не только звезду, но и ту часть газовой оболочки перед звездой, которая отвечает за абсорбционную составляющую профиля линии. В результате центральное поглощение снижается и может полностью исчезнуть [16]. Этот эффект наблюдается также в изменениях эквивалентных ширин эмиссионных линий, таких как линия H α , образующихся в протяженной области, которая только частично экранируется околосветными облаками.

4. Результаты. Результаты измерений эквивалентных ширин звезд UX Ori и CQ Tau приведены в табл.2-4, где в столбце 1 указан порядок эшелювого спектра, в столбце 2 - химический элемент, принадлежащий линии, в столбце 3 - длина волны спектральной линии (в ангстремах) и в столбце 4 - значение эквивалентной ширины EW (в ангстремах).

Следует отметить, что эквивалентные ширины измерялись по усредненному спектру, но для эмиссионных водородных линий измерения проводились для каждого момента времени отдельно, поэтому в таблицах указывалась дата наблюдения рядом со значением EW. Отрицательные значения EW указывают на эмиссионные линии. Определение эквивалентных ширин эмиссионных линий проводилось с помощью синтетических спектров: эмиссией считалось все, что лежит выше синтетических профилей линий, расширенных вращением

Таблица 4

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ШИРИН
ДЛЯ CQ Tau, 1996

Порядок	Элемент	$\lambda(\text{\AA})$	EW ($\text{\AA}$)
1	2	3	4
CQ Tau 1996			
29	KI	7664.91	0.96
	KI	7698.97	0.38
	OI, OI, OI	7771.94, 7774.17, 7775.39	1.17
30	FeII	7462.41	0.18
	SI	7468.59	0.04
	FeI	7495.06	0.18
34	H α (emission)	6562.80	-11.99 (21/11/96)
	H α (emission)	6562.80	-8.57 (26/11/96)
	H α (emission)	6562.80	-7.46 (29/11/96)
35(1)	FeII, FeI	6393.60	0.16
	FeI	6400.00	0.14
	CaI	6439.07	0.21
	CaI	6449.81	0.15
	CaI	6462.57	0.18
35(2)	H α (emission)	6562.80	-7.65 (29/11/96)
	H α (emission)	6562.80	-5.97 (02/12/96)
36	FeI	6200.31	0.11
	FeI	6219.28	0.12
	FeI, FeI	6230.73, 6232.64	0.21
37	FeI	6008.55	0.20
	MnI, MnI	6013.51, 6016.67	0.21
	FeI	6065.48	0.12
	FeI	6078.49	0.13
39	SiI	5747.67	0.11
	FeI, SiI	5753.12, 5753.62	0.16
	FeI	5762.99	0.16
40	CaI	5581.96	0.12
	FeI, FeI, FeI	5615.30, 5615.64, 5618.63	0.32
41	TiII	5418.12	0.18
	FeI, FeII	5424.64, 5425.26	0.28
	FeI	5429.70	0.22
	FeII, FeI	5432.97, 5434.52	0.40
	FeI, FeI	5445.04, 5446.92	0.40
	FeI, FeI	5455.44, 5455.61	0.26
	FeI	5497.52	0.19
43	MgI	5183.60	0.79
	TiII	5188.68	0.21
	FeI, FeI	5191.45, 5192.34	0.39
	CrI, CrI, CrI	5204.51, 5206.04, 5208.42	0.91
	FeI, FeI, FeI	5215.18, 5216.27, 5217.39	0.43
	TiII, FeI	5226.54, 5226.86	0.70

Таблица 4 (Окончание)

1	2	3	4
44	FeI, FeI	5049.82, 5051.63	0.51
	FeI	5065.01	0.56
	FeI	5068.76	0.41
	TiII, FeI	5072.28, 5074.75	0.64
	FeI, FeI	5107.64, 5110.41	0.42
	NiI	5115.39	0.12
45	FeI	4957.60	0.37
46	H β (emission)	4861.32	-0.67 (21/11/96)
	H β (emission)	4861.32	-0.53 (26/11/96)
	H β (emission)	4861.32	-0.26 (29/11/96)
47	H β (emission)	4861.32	-0.29 (29/11/96)
52	H δ (emission)	4340.46	-0.14 (21/11/96)
	TiII, H δ (emission)	4340.46	-0.14 (26/11/96)
55	H γ (emission)	4101.73	-0.08 (21/11/96)
	H γ (emission)	4101.73	-0.08 (26/11/96)
	H γ (emission)	4101.73	-0.02 (29/11/96)

звезды и смещенных в систему координат звезды. Точность измерения EW можно оценить по уровню шумов в континууме, определяемых отношением S/N. Вблизи линии H α $S/N \approx 100$ [6], что обеспечивает точность определения EW(H α) в несколько процентов.

Следующий важный параметр, который мы определили, это темп аккреции. Он представлен в табл.5. Звезды аккрецируют околозвездное вещество в соответствии с магнитосферной моделью аккреции (см. например, Натта и др. [17]), которая объясняет наблюдаемые избыточные потоки в спектрах звезд Хербига. Падающий материал, находящийся в окружении звезды, взаимодействуя с фотосферой, вызывает избыточное УФ-излучение, светимость которого зависит от параметров звезды и темпа аккреции. Знание аккреционной светимости позволяет определить темп аккреции (см. ниже). Таким образом, темп аккреции является важным параметром молодых звезд, показывающим количество вещества (в единицах масс Солнца в год) перетекающего из околозвездного диска на поверхность звезды. У молодых звезд важную роль в процессе аккреции играет взаимодействие вещества протопланетного диска с магнитосферой звезды.

Для определения аккреционной светимости мы выбрали эмиссионную линию H α , так как эта линия является наиболее сильной из присутствующих в оптических спектрах молодых звезд. Светимость звезды в этой линии вычислялась с использованием звездного потока f_λ на длине волны линии, рассчитанного по моделям Куруча [18] с учетом расстояния до звезды (1).

Таблица 5

ОЦЕНКИ ТЕМПА АККРЕЦИИ ДЛЯ ЗВЕЗД UX Ori И
CQ Tau ПО ЛИНИИ H α

Звезда	EW (Å)	Дата	$L_{acc} (L_{\odot})$	$\dot{M} \cdot 10^{-7} (M_{\odot}/\text{г.})$	$\dot{\bar{M}} \cdot 10^{-7} (M_{\odot}/\text{г.})$
UX Ori	7.610	19/11/94	1.33	0.75	0.93 ± 0.11
	13.150	02/12/95	2.41	1.36	
	12.772	04/12/95	2.33	1.32	
	12.719	06/12/95	2.32	1.31	
	10.555	02/12/95	1.89	1.07	
	10.502	04/12/95	1.88	1.06	
	10.084	06/12/95	1.80	1.02	
	8.457	25/11/96	1.49	0.84	
	5.672	28/11/96	0.96	0.54	
	5.524	28/11/96	0.93	0.53	
	5.229	02/12/96	0.88	0.50	
CQ Tau	8.445	03/12/95	0.67	0.42	0.39 ± 0.01
	5.161	05/12/95	0.40	0.24	
	11.992	21/11/96	0.99	0.61	
	8.566	26/11/96	0.68	0.42	
	7.459	29/11/96	0.59	0.37	
	7.649	29/11/96	0.60	0.37	
	5.971	02/12/96	0.46	0.28	

$$L_{H\alpha} = 4\pi d^2 f_{\lambda} \text{EW}_{H\alpha} \cdot \quad (1)$$

Использовалось следующее соотношение между аккреционной светимостью и светимостью в линии [8]:

$$\log \frac{L_{acc}}{L_{\odot}} = A + B \log \frac{L_{line}}{L_{\odot}}, \quad (2)$$

где A и B - коэффициенты, соответствующие точке пересечения и градиенту соотношения между $\log(L_{acc}/L_{\odot})$ и $\log(L_{line}/L_{\odot})$, соответственно.

Следуя [8], мы использовали следующие значения: $A = 2.09 \pm 0.06$ и $B = 1.00 \pm 0.05$. Темп аккреции определялся из аккреционной светимости, звездного радиуса и звездной массы по формуле [19]:

$$\dot{M} = \frac{L_{acc} R_*}{GM_* (1 - R_*/r_c)}, \quad (3)$$

где радиус коротации

$$\frac{r_c}{R_*} = \left(\frac{GM}{R_* v_*^2} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Для UX Ori $r_c = 2.17 R_*$, для CQ Tau $r_c = 2.69 R_*$. В табл.5 занесены значения темпа аккреции, рассчитанные по формулам 2, 3. В столбце 1 указано название звезды, в столбце 2 - эквивалентная ширина линии H α , в столбце 3 - дата наблюдения, в столбце 4 - аккреционная светимость, в столбце 5 - темп аккреции, в столбце 6 - среднее значение темпа аккреции.

Как видно, при одном и том же уровне блеска звезды прослеживается нестабильность темпа аккреции, значения которого могут отличаться в 2 раза. Неоднородность аккрецирующего материала является одним из источников как фотометрической, так и спектральной переменности исследуемых звезд [20].

Согласно Гузман-Диаз и др. [21], темп аккреции исследуемых звезд составляет $\log \dot{M}_{acc} = -7.00$ для UX Ori и $\log \dot{M}_{acc} = -7.18$ для CQ Tau, что в целом согласуется с нашими результатами и показывает правильность метода расчета темпа аккреции и возможности его применения для исследований других звезд типа UX Ori.

5. Обсуждение и заключение. В работе были определены эквивалентные ширины ряда индивидуальных линий по спектрам звезд UX Ori и CQ Tau, полученным в моменты времени, когда оба объекта находились в ярком состоянии (вне затмений). Значения эквивалентных ширин отражают спектральные характеристики звезд и могут использоваться в качестве опорных линий, характеризующих состояние звездных атмосфер. В спектрах звезд UX Ori и CQ Tau наблюдаются многочисленные фотосферные линии металлов (MgI, FeI, Ti, SiI и др.), дублет натрия и сильная эмиссия в водородных линиях.

По эквивалентной ширине эмиссионной линии H α сделаны оценки темпа аккреции на звезды UX Ori и CQ Tau. Для звезды UX Ori средний темп аккреции составил $0.93 \cdot 10^{-7} (M_\odot/\text{год})$, для звезды CQ Tau - $0.39 \cdot 10^{-7} (M_\odot/\text{год})$. Следует подчеркнуть, что для определения темпа аккреции на исследуемые звезды была использована аналогия с магнитосферной моделью аккреции, разработанной для звезд типа Т Тельца. Эмиссионные спектры звезд этого типа образуются преимущественно в магнитосферах звезд. Вклад дискового ветра в эмиссию в линии H α в спектрах этих звезд незначителен (за исключением звезд с интенсивной аккрецией). В случае звезд типа UX Ori, большинство которых относится к семейству звезд AeBe Херbiga, вклад магнитосферы значительно меньше, чем у звезд Т Тельца. Основной вклад в эмиссию у них дает дисковый ветер [22]. Кроме того, звезды типа UX Ori вращаются значительно быстрее по сравнению со звездами Т Тельца, что также затрудняет применение к ним магнитосферной модели аккреции. Учитывая это, полученные выше оценки темпа аккреции следует рассматривать

скорее как верхние пределы.

Следует отметить, что темп аккреции для исследуемых звезд определялся в последнее время рядом авторов [8,20,23]. Наши результаты лучше всего согласуются с результатами Гузман-Диаз и др. [21], полученными на основе новой эмпирической корреляции между светимостью и массой звезды.

В результатах прослеживается нестабильность темпа аккреции, значения которого могут отличаться в 2 раза при одном и том же уровне блеска звезды. Эта нестабильность аккреции наблюдалась по спектрам, полученным вне затмений, и свидетельствует о сильных флуктуациях плотности газа во внутренних областях околос звездных дисков исследуемых звезд. Учитывая их молодость, причиной таких флуктуаций могут быть возмущения в дисках, вызванные формированием планетных систем.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.П.Гринину за помощь в подготовке и написании статьи, а также рецензенту Л.В.Тамбовцевой за полезные замечания.

¹ СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, e-mail: st110648@student.spbu.ru

² Крымская Астрофизическая Обсерватория, Крым, Научный, Россия

QUANTITATIVE ANALYSIS OF THE SPECTRA OF CQ Tau AND UX Ori STARS OUTSIDE ECLIPSES ACCORDING TO THE NORDIC OPTICAL TELESCOPE

P.DIMITRIEVA¹, O.V.KOZLOVA²

A quantitative analysis of the spectra of CQ Tau and UX Ori stars belonging to the family of young irregular variable stars with Algol-like decrease in brightness has been performed. The spectra were obtained at the Nordic Optical Telescope (NOT) observatory at times when the stars were in a bright state. On their basis, the equivalent widths of the photospheric absorption lines, as well as the emission line $H\alpha$, are determined. The equivalent width of the latter is used to estimate the gas accretion rate on the stars.

Keywords: *variable stars: spectra: CQ Tau, UX Ori*

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. von Gotz, W.Wenzel*, Mitt. Vernd. Sterne, **5**, 2, 1968.
2. *W.Herbst, J.A.Holtzman, R.S.Klasky*, Astron. J., **88**, 1648, 1983.
3. *Г.В.Зайцева*, Variable Stars, **19**, 63, 1973.
4. *V.P.Grinin, N.N.Kiselev, N.K.Minikulov et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **186**, 283, 1991.
5. *A.Kreplin, G.Weigelt, Kraus et al.*, Astron. Astrophys., **551**, A21, 2013.
6. *V.P.Grinin, O.V.Kozlova, A.Natta et al.*, Astron. Astrophys., **379**, 482, 2001.
7. *A.N.Rostopchina*, Astron. Rep., **43**, 113, 1999.
8. *C.Wichittanakom, R.D.Oudmaijer, J.R.Fairlamb et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **493**, 234, 2020.
9. *A.M.Lagrange-Henri, A.Vidal-Madjar, R.Ferlet*, Astron. Astrophys., **190**, 275, 1988.
10. *V.P.Grinin, A.N.Rostopchina*, Astron. Rep., **40**, 171, 1996.
11. *M.Vioque, R.D.Oudmaijer, D.Baines et al.*, Astron. Astrophys., **620**, A128, 2018.
12. *E.A.Kolotilov*, Astrofizika, **13**, 33, 1977.
13. *O.V.Kozlova, V.P.Grinin, A.N.Rostopchina*, Astron. Rep., **44**, 36, 2000.
14. *V.P.Grinin, P.S.Thé, D. de Winter et al.*, Astron. Astrophys., **292**, 165, 1994.
15. *L.V.Tambovtseva, V.P.Grinin, O.V.Kozlova*, Astrophysics, **42**, 54, 1999.
16. *V.P.Grinin, L.V.Tambovtseva*, Astron. Astrophys., **293**, 396, 1995.
17. *A.Natta, L.Testi, J.Muzerolle et al.*, Astron. Astrophys., **424**, 603, 2004.
18. *R.L.Kurucz*, Astrophys. J. Suppl., **40**, 1, 1979.
19. *E.Gullbring, L.Hartmann, C.Bricco et al.*, Astrophys. J., **492**, 323, 1998.
20. *O.V.Kozlova, D.N.Shakhovskoi, A.N.Rostopchina et al.*, Astrophysics, **50**, 26, 2007.
21. *J.Guzmán-Díaz, I.Mendigutía, B.Montesinos et al.*, Astron. Astrophys., **650**, A182, 2021.
22. *V.P.Grinin, L.V.Tambovtseva*, Astron. Rep., **55**, 704, 2011.
23. *B.Donehew, S.Brittain*, Astron. J., **141**, 46, 2011.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-485

АКТИВНОСТЬ ЗВЕЗДЫ TOI-6255 И ПОТЕРЯ МАССЫ АТМОСФЕРЫ ЕЕ ПЛАНЕТЫ

И.С.САВАНОВ

Поступила 23 августа 2024

Принята к печати 6 декабря 2024

Рассмотрены свойства планетной системы TOI-6255, в которой землеподобная планета с ультракоротким орбитальным периодом (5.7 часов) обращается вокруг карлика спектрального класса М. По архивным измерениям блеска TOI-6255 сделаны выводы о переменности блеска вследствие вращения, а также циклической долговременной переменности объекта. Установлены возможные величины периода вращения P звезды, которые лежат в интервалах 64–74 сут и 78–92 сут и которые были сопоставлены с результатами литературных данных. Для двух значений параметра $\log R'_{HK}$ (–5.15 и –4.66), соответствующих максимумам бимодального распределения этого параметра для малоактивных и активных М карликов, вычислены величины оттока вещества из атмосферы планеты TOI-6255 b. Потеря вещества атмосферы планеты составляет $9.4 \cdot 10^9$ г/с для величины $\log R'_{HK} = -4.65$ и $1.1 \cdot 10^9$ г/с для величины $\log R'_{HK} = -5.15$. Оценены перспективы TOI-6255 b, как приоритетного объекта для будущих наблюдений и исследований.

Ключевые слова: *звезды: активность: пятна: фотометрия: переменность: планетные системы: атмосферы экзопланет*

1. *Введение.* Авторы [1] информировали об обнаружении землеподобной планеты TOI-6255 b с ультракоротким орбитальным периодом (5.7 час). По измерениям лучевой скорости (RV) было установлено, что ее масса составляет $1.44 \pm 0.14 M_{\oplus}$. Согласно [1], ультра-короткопериодические планеты (USP) являются планетами земной группы (численностью порядка сотни) с радиусами $R < 2 R_{\oplus}$, которые обращаются вокруг своих звезд менее чем за сутки. Чаше они встречаются у холодных звезд карликов, а частота их наличия у звезд солнечного типа мала (около 0.5%), но это обстоятельство, возможно, носит наблюдательный характер. По мнению авторов [1], сильное приливное воздействие возможно деформирует планету TOI-6255 b, приводя ее форму в трехосный эллипсоид с длинной осью, которая примерно на 10% длиннее короткой оси. Близкое расположение планеты также может являться аргументом для поиска магнитных взаимодействий звезды и планеты.

В данной статье исследованы проявления активности звезды TOI-6255, а также получены оценки величины возможного оттока вещества из атмосферы планеты.

2. *Проявления активности TOI-6255.* Согласно [1], эффективная температура TOI-6255 (GJ 4256, LHS 6394, TIC 261135533) равна 3421 ± 70 K, ускорение силы тяжести $\log g = 4.850 \pm 0.044$, радиус $R/R_{\odot} = 0.370 \pm 0.011$ и масса $M/M_{\odot} = 0.353 \pm 0.015$. Объект TOI-6255 отождествлен с источником Gaia EDR3 1956328333130770048, его параллакс составляет π (mas) = 49.0544 ± 0.0236 .

В данной статье как и в [1], рассмотрены наблюдения TOI-6255 из архива космической миссии TESS. Данные были получены для двух секторов - 16 и 56 (рис.1). Не было отмечено никаких проявлений переменности блеска, вызванных вращательной модуляцией. Имеющиеся пики на спектрах мощности вероятнее всего имеют либо инструментальное происхождение, либо являются артефактами. Диаграммы для фазовых кривых, построенные для периодов в 68 или 85 сут (см. ниже), представлены на правых панелях рисунка. Можно заключить, что данные наблюдений миссии TESS не позволяют сделать каких-либо предположений о величине периода вращения звезды P .

Авторы [1] отметили, что по данным анализа обзора WASP [2] было сделано заключение о присутствии на спектре мощности переменности блеска двух пиков, указывающих на медленное вращение звезды, возможно с периодом 68 или 85 сут.

Нами проведена независимая попытка определения периода вращения звезды по данным многолетнего обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS) (<http://kws.cetus-net.org>). В обзоре представлены наблюдения звезды в фильтрах V и Ic в интервале наблюдений с августа 2012г. по август 2024г. Вначале

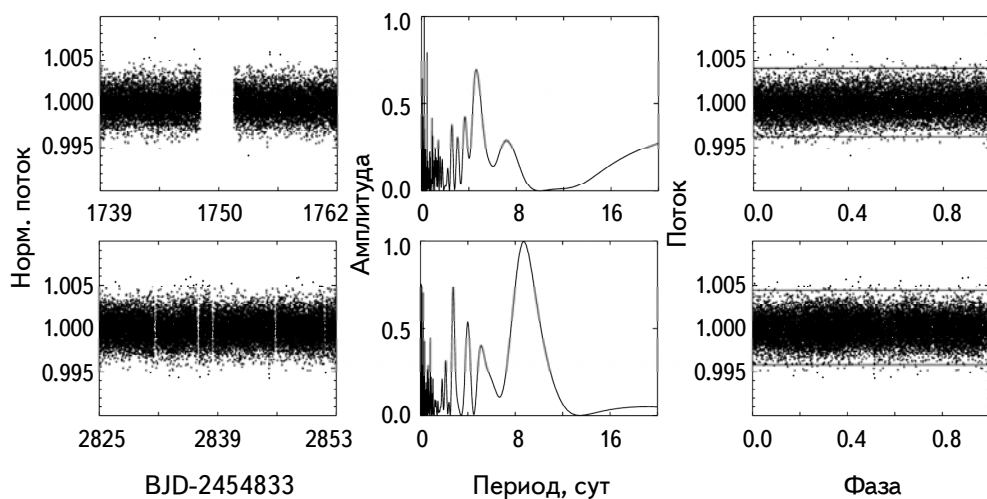


Рис.1. Слева - кривые блеска TOI-6255, в центре - спектры мощности переменности блеска, справа - фазовые диаграммы переменности блеска (горизонтальные линии характеризуют величину амплитуды переменности блеска). Данные приведены для наблюдений в секторах 16 и 56.

проведен анализ данных для фильтра V, всего было рассмотрено 997 оценок блеска. Представленные на рис.2 (вверху) данные несомненно свидетельствуют о присутствии цикличности в изменении блеска. На основе построенного спектра мощности можно предположить существование возможных циклов активности 530 сут, 1000 сут и 2200 сут (возможно, они являются кратными,

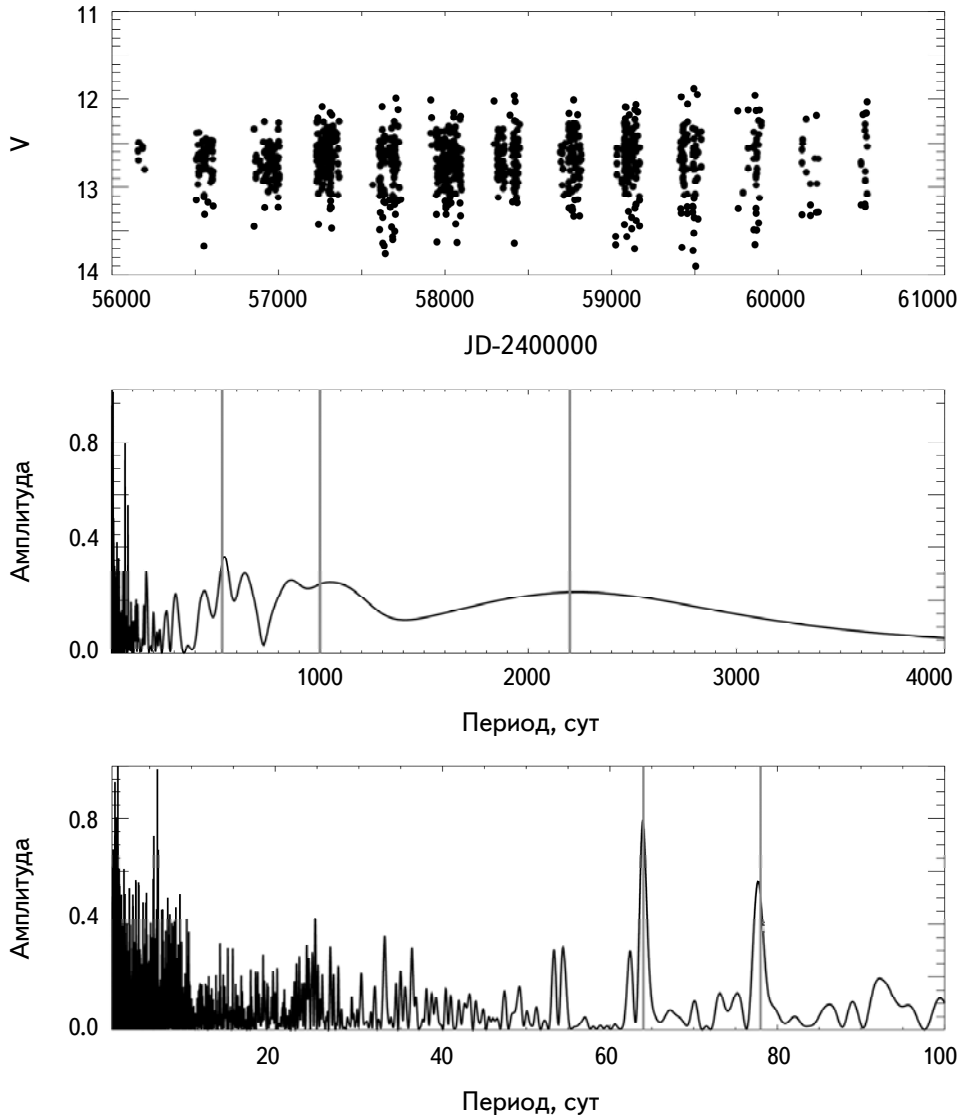


Рис.2. Верхняя панель - фотометрические наблюдения TOI-6255 в фильтре V по данным обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS). Средняя панель - спектр мощности для этих данных, вертикальные светлые линии относятся к циклам активности 530 сут и 2200 сут и 2200 сут. Внизу - спектр мощности для интервала периодов 1 - 100 сут. Вертикальные светлые линии соответствуют возможным величинам периода вращения P 64 сут и 78 сут.

средняя диаграмма). На нижней диаграмме рис.2 приведен спектр мощности для интервала периодов 1 - 100 сут, включающего величину вероятного периода вращения P звезды. Наше внимание привлекли два пика, соответствующие величинам P 64 сут и 78 сут. Как и в [1], остаются неизвестными причины появления и природа двух указанных пиков, точно не совпадающих с

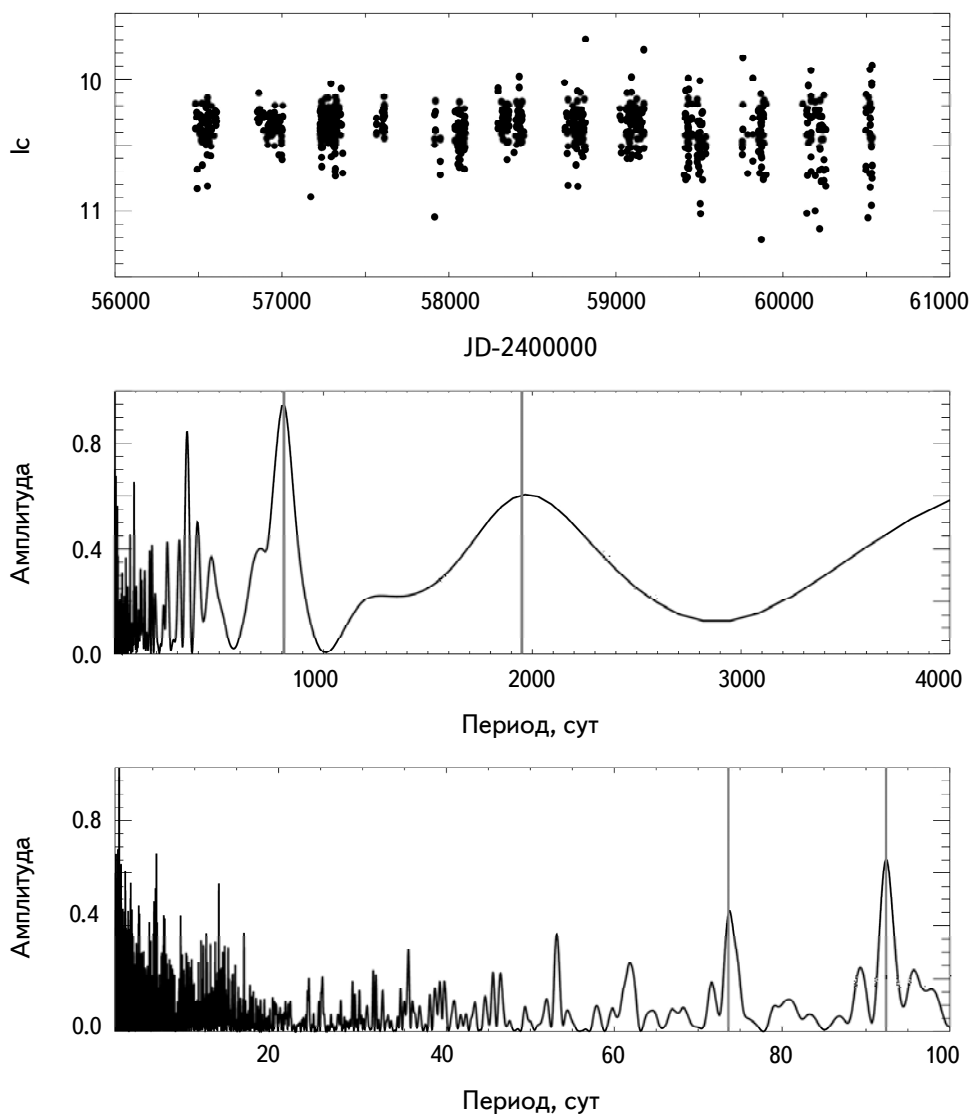


Рис.3. Верхняя панель - фотометрические наблюдения TOI-6255 в фильтре I_c по данным обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS). Средняя панель - спектр мощности для этих данных, вертикальные светлые линии относятся к циклам активности 810 сут и 1950 сут. Внизу - спектр мощности для интервала периодов 1 - 100 сут. Вертикальные светлые линии соответствуют возможным величинам периода вращения 74 сут и 92 сут.

результатами из 2, но близких к ним.

Проанализированы данные о блеске объекта в фильтре Ic. Всего имеется 924 оценки блеска звезды в этом фильтре. Представленные на рис.3 (вверху) данные могут дать возможность предположить наличие возможных циклов активности порядка 810 сут и 1950 сут (рис.3, средняя диаграмма) и переменности на шкале времени порядка 1 - 100 сут (рис.3, нижняя диаграмма). В интервале времени, характеризующем вероятный период вращения звезды, как и при анализе данных о блеске звезды в фильтре V, также можно указать на наличие двух пиков, соответствующих 74 сут и 92 сут.

Возраст системы был оценен в [1] с помощью эмпирических гирохронологических соотношений и составил 6 ± 2 млрд лет для принятых авторами величин P . С учетом всех неопределенностей, можно сделать заключение, что, скорее всего, TOI-6255 принадлежит к числу старых и малоактивных звезд.

К сожалению, авторы [1] не приводят информацию об уровне хромосферной активности TOI-6255. Оценка величины индекса $\log R'_{HK}$, необходимого нам в дальнейшем для определения величины оттока вещества из атмосферы экзопланеты, была выполнена косвенным образом. На основе данных для

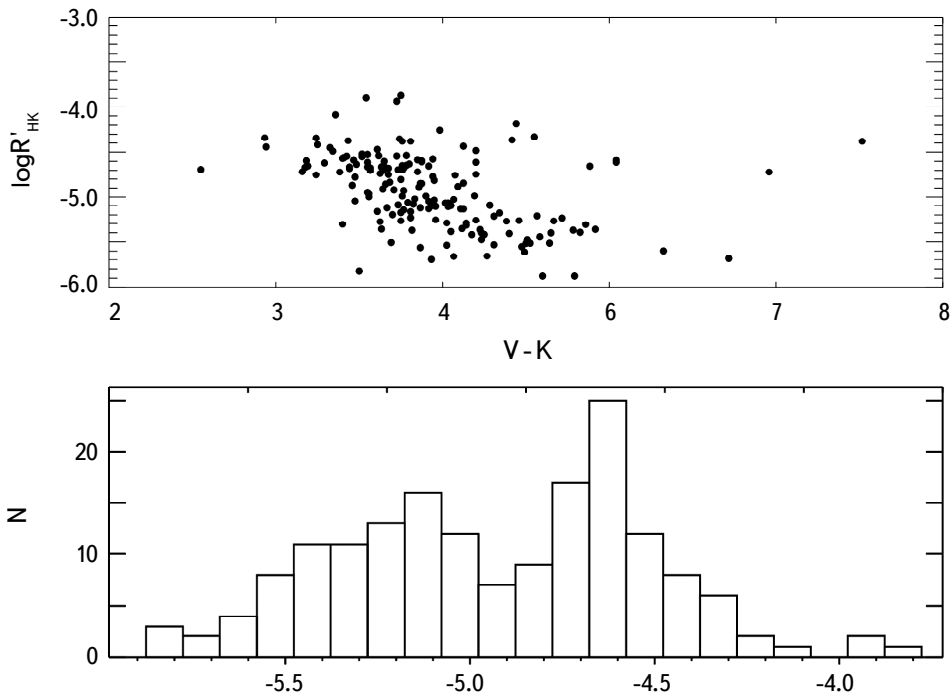


Рис.4. Вверху - зависимость параметра $\log R'_{HK}$ от показателя цвета ($V-K$), внизу - гистограмма распределений параметра $\log R'_{HK}$.

177 карликов спектрального класса М [3] была построена зависимость параметра $\log R'_{HK}$ от показателя цвета (V-K) (рис.4, вверх). Диаграмма указывает на возможное бимодальное распределение параметра (гистограмма приводится на том же рисунке внизу), а также на небольшую зависимость $\log R'_{HK}$ от (V-K) для каждой группы объектов. Для TOI-6255 показатель цвета (V-K) равен 4.^m68, и звезда, скорее всего, принадлежит к группе малоактивных М карликов, для которых индекс $\log R'_{HK}$ менее -5.00. Но вследствие неоднозначности, в принципе, звезда может обладать и более высокой активностью, попадая в группу активных звезд. С учетом этого, дальнейшие вычисления проводились, принимая два значения параметра $\log R'_{HK}$ (-5.15 и -4.66), соответствующих максимумам распределений для малоактивных и активных М карликов.

Отметим, что согласно результатам из [4], распределения величин параметра хромосферной активности для звезд спектрального класса G - K также могут иметь два или, даже возможно, три пика для G звезд.

Результаты о величине параметра $\log R'_{HK}$ TOI-6255 требуют дальнейшего уточнения, возможно звезда является либо действительно крайне малоактивной, либо находится в состоянии своей пониженной активности. Сведения о циклической переменности хромосферной активности звезды отсутствуют.

3. *Потеря вещества атмосферы TOI-784 b.* Как указывалось выше [1], TOI-6255 b является планетой типа суперземля с массой $M = 1.44 M_{\oplus}$ и большой полуосью орбиты 0.0017 а.е. Равновесная температура экзопланеты равна 1340 ± 60 К. Имея в своем распоряжении точные измерения массы и радиуса, авторы [1] высказали предположения о структуре и возможном составе TOI-6255 b. Вероятно, ультракороткопериодические планеты (USP) настолько сильно облучаются своими звездами, что их первичная H/He оболочка должна была быть полностью уничтожена интенсивной потерей вещества. Измеренные массы и радиусы USP планет (см., например, рис.4 в [1]) соответствуют предположению о том, что они лишены атмосфер и являются скалистыми планетами с землеподобным составом (примерно 30% Fe и 70% силикатных пород). Более детальное обсуждение возможных моделей применительно к TOI-6255 b можно найти в [1].

В [1] также было показано, что при величине периода вращения 5.7 ч, TOI-6255 b может быть подвержена существенной деформации. В принципе, при определенных условиях это может привести к форме транзита, отличающейся от стандартной для планеты сферической формы. Поскольку никакой асимметрии в транзитном сигнале в наблюдениях TESS не было обнаружено [1], планета TOI-6255 b, вероятно, не подвергается катастрофическому распаду. Процессы деформации не исключают возможности возникновения или поддержания вторичной атмосферы, о существовании которой могли бы

свидетельствовать дополнительные специальные наблюдения. В этом случае можно было бы выполнить оценки темпа оттока вещества из такой атмосферы (если она существует).

Для подсчета такой потери без детального моделирования системы можно попробовать использовать аппроксимационную формулу (см., например, [5,6]), обычно называемую моделью потери атмосферы с ограничением по энергии. В этой модели предполагается, что поток жесткого УФ-излучения поглощается в тонком слое радиуса R_{XUV} , где оптическая толщина для звездных XUV-фотонов равна единице и включен учет приливного эффекта:

$$\frac{dM_p}{dt} \approx \frac{\varepsilon_{XUV} \pi F_{XUV} R_p R_{XUV}^2}{GM_p K_{tide}(\xi)}, \quad (1)$$

где ε_{XUV} - параметр эффективности нагрева ($\varepsilon_{XUV} = 0.2 \pm 0.1$ для мини-нептунов и супер-земель); G - гравитационная постоянная; F_{XUV} - поток XUV-фотонов; R_p - радиус планеты; M_p - масса планеты; R_{XUV} - радиус поглощения XUV-фотонов; $K_{tide}(\xi)$ - приливный параметр. Подробности использования соотношения (1) можно найти во многих литературных источниках, в том числе в [5-7].

Основные данные о планете TOI-6255 b были взяты из [1]. Для вычислений по формуле (1) оценки величины F_{XUV} (потока XUV-фотонов) были использованы аналитические зависимости, полученные в [8] и связывающие величину F_{XUV} потока и параметр $\log R'_{HK}$ для звезд спектральных классов от F до M.

Расчеты по соотношению (1) показали, что потеря вещества атмосферы составляет $9.4 \cdot 10^9$ г/с для $\log R'_{HK} = -4.65$ и $1.1 \cdot 10^9$ г/с для $\log R'_{HK} = -5.15$, а величины потока XUV-фотонов равны $7.5 \cdot 10^{26}$ эрг/с и $8.45 \cdot 10^{25}$ эрг/с, соответственно.

Сравнительно высокая величина потери вещества атмосферы планеты, несмотря на низкую эффективную температуру (3421 К) атмосферы звезды спектрального класса M, обусловлена чрезвычайной близостью планеты к звезде (планета находится на расстоянии равном всего 3.1 радиусов звезды).

4. Заключение. Рассмотрены свойства планетной системы TOI-6255, в которой земледобная планета с ультракоротким орбитальным периодом обращается вокруг карлика спектрального класса M. По архивным измерениям блеска TOI-6255 сделаны выводы о циклической долговременной переменности объекта. Возможные величины периода вращения P звезды лежат в интервалах 64 - 74 сут и 78 - 92 сут. Ранее в [1] также было сделано заключение о присутствии на спектре мощности переменности блеска двух пиков, указывающих на медленное вращение звезды, возможно с периодом 68 или 85 сут. Причина наличия двух пиков остается необъясненной, тем не менее,

вероятно, TOI-6255 относится к числу медленновращающихся карликов. Оценены величины долговременных циклов активности звезды. Возраст системы был найден в [1] с помощью эмпирических гирохронологических соотношений и составил около 6 млрд лет.

Вычисления величины оттока вещества из атмосферы планеты были проведены для двух значений параметра $\log R'_{HK}$ (-5.15 и -4.66), соответствующих максимумам бимодального распределения этого параметра (для малоактивных и активных М карликов, соответственно). Потеря вещества атмосферы планеты составляет $9.4 \cdot 10^9$ г/с для величины $\log R'_{HK} = -4.65$ и $1.1 \cdot 10^9$ г/с для величины $\log R'_{HK} = -5.15$. Высокая величина оттока вещества в значительной мере обусловлена чрезвычайной близостью планеты к звезде.

Авторы [1] выполнили детальное исследование изменений фазовых кривых и вторичного затмения на кривой блеска по данным архива TESS. Несомненно, TOI-6255 b является приоритетным объектом для будущих исследований фазовой кривой с помощью телескопа JWST в ближнем и среднем инфракрасном диапазоне, поскольку любое изменение фазовой кривой звезды будет гораздо более заметным в инфракрасном диапазоне. Кроме того, требуются новые фотометрические наблюдения для уточнения формы транзитов, периода вращения звезды, а также изучения проявлений хромосферной активности звезды, включая установление ее цикличности. Учитывая значительную величину возможного оттока вещества из атмосферы планеты, TOI-6255 может быть включена в число приоритетных объектов для наблюдений с УФ космическим телескопом Спектр-УФ [9].

Исследование выполнено в рамках проекта "Исследование звезд с экзопланетами" по гранту Правительства РФ для проведения научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (соглашение N 075-15-2019-1875, 075-15-2022-1109).

Учреждение Российской академии наук, Институт астрономии РАН,
Москва, Россия, e-mail: igs231@mail.ru

ACTIVITY OF TOI-6255 AND MASS LOSS OF ITS PLANET ATMOSPHERE

I.S.SAVANOV

The properties of the TOI-6255 planetary system are considered, in which an Earth-like planet with an ultrashort orbital period (5.7 hours) orbits a dwarf star

of spectral class M. Based on archival measurements of TOI-6255 brightness variability due to rotation as well as the cyclic long-term variability of the object were established. The possible values of the rotation period P of the star lie in the intervals of 64-74 days and 78-92 days and were compared with the results of the literature data. For two values of the $\log R'_{HK}$ parameter (-5.15 and -4.66) corresponding to the maxima of the bimodal distribution of this parameter for low-activity and active M dwarfs the values of mass loss from the planet's atmosphere are calculated. Mass loss is $9.4 \cdot 10^9$ g/sec for $\log R'_{HK} = -4.65$ and $1.1 \cdot 10^9$ g/sec for $\log R'_{HK} = -5.15$. The prospects of TOI-6255 b as a priority object for future observations and research are assessed.

Keywords: *stars: activity: spots: photometry: variability: planetary systems: exoplanet atmospheres*

ЛИТЕРАТУРА

1. *F.Dai, A.W.Howard, S.Halverson et al.*, Astron. J., **168**, 101, 2024.
2. *D.L.Pollacco, I.Skillen, A.Collier Cameron et al.*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **118**, 1407, 2006.
3. *N.Meunier, L.Mignon, M.Kretzschmar et al.*, Astron. Astrophys., **684**, A106, 2024.
4. *J.Gomes da Silva, N.C.Santos, V.Adibekyan et al.*, Astron. Astrophys., **646**, A77, 2021.
5. *T.T.Koskinen, P.Lavvas, M.Huang et al.*, Astrophys. J., **929**, 52, 2022.
6. *N.V.Erkaev, Yu.N.Kulikov, H.Lammer et al.*, Astron. Astrophys., **472**, 329, 2007.
7. *E.S.Kalinicheva, V.I.Shematovich, I.S.Savanov*, Astron. Rep., **66**, 1319, 2022.
8. *A.G.Sreejith, L.Fossati, A.Youngblood et al.*, Astron. Astrophys., **644**, A67, 2020.
9. *B.Shustov, A.I.G'omez de Castro, M.Sachkov et al.*, Astrophys. Space Sci., **363**, 62, 2018.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-495

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧАСТОТЫ ВСПЫШЕК И ЗАПЯТНЕННОСТИ АКТИВНЫХ ВСПЫХИВАЮЩИХ ЗВЕЗД, ОБНАРУЖЕННЫХ "КЕПЛЕР"

А.А.АКОПЯН

Поступила 6 ноября 2024

По данным орбитальной обсерватории "Кеплер" проведено исследование наиболее активных вспыхивающих звезд, показавших по 250 и более вспышек за период функционирования "Кеплер". Основными направлениями исследования были: а) анализ кривых блеска, выявление физических особенностей у отдельных звезд, б) определение периодической/циклической функции частоты вспышек (ПФЧВ) вспыхивающих звезд, обусловленной осевыми/орбитальными вращениями, в) представление нового способа определения запятненности звезд с помощью ПФЧВ и его применение. Получены соответствующие ПФЧВ с периодичностью близкой к периоду вращения звезды. Построены ожидаемые распределения вспышек по фазам, которые сравнены с аналогичным наблюдаемым распределением вспышек при данном значении периода вращения. Для всех без исключения звезд это сравнение (с помощью критерия χ^2) свидетельствует в пользу периодичности частоты вспышек. Показано, что распределение пятен вспыхивающих звезд можно представить круговым распределением фон Мизеса, параметры которого определяются через соответствующие параметры функции частоты вспышек. Получены оценки запятненности исследованных звезд.

Ключевые слова: *вспыхивающие звезды; частота вспышек; периодическая переменность; звездные пятна; распределение фон Мизеса*

1. *Введение.* Изучение звездных пятен имеет давнюю историю, восходящую к наблюдениям солнечных пятен, зафиксированных и зарисованных в древних хрониках различных народов - от Китая до цивилизации Майя (например, [1-7] и ссылки в них). Первое известное на данный момент упоминание о пятнах на Солнце приводится на найденной в Китае гадальной кости, которой около 3000 лет [1,3,4]. К далекой древности относятся также первые сообщения о возможном влиянии солнечных пятен на земные явления. Однако их целенаправленное и систематическое исследование стало возможным после изобретения телескопа и сразу же привело к очень важным открытиям. Галилей, Шайнер, Йоханнес Фабрициус и др. [8] обнаружили пятна на Солнце и с их помощью показали, что Солнце обладает осевым вращением и вычислили его период. Далее, Шайнер обнаружил, что скорость вращения разная для пятен на разных широтах Солнца. После этих работ исследование

солнечных пятен стало одним из главных направлений астрономии на несколько столетий. Идея же о существовании пятен на звездах принадлежит французскому астроному Исмаэлу Буйо (Ismaël Bouillaud, латинизированный - Bullialdus). В 1667г. он предположил [9], что переменность звезды Мира Кита, обнаруженная Давидом Фабрициусом в 1596г., можно объяснить наличием холодных темных пятен на поверхности звезды. Логически безупречная версия Буйо, хоть и оказалась неверной применительно к звезде Мира Кита, не могла не найти свое применение, но для этого понадобилось около 300 лет.

В 1947г. Крон [10] сообщил о возможной регистрации пятен на поверхности звезды AR Lacertae B. Последующие работы Крона и других авторов послужили основанием для введения нового, сравнительно малочисленного типа переменных звезд - вращательные переменные - с восьмью подтипами (ACV-Alpha2 Canum Venaticorum, ACVO-Rapidly oscillating Alpha2 CVn, BY-BY Draconis-type variables, ELL-Rotating ellipsoidal variables (b Per, Alpha Vir), FKCOM- FK Comae Berenices-variables, PSR-Optically variable pulsars (CM Tau), R-R Close binary systems, Prototype: AU Ari, SXARI-SX Arietis-type variables), астрофизические параметры которых существенно отличаются друг от друга [11]. Из них наиболее близкими к вспыхивающим звездам являются звезды типа BY Dra.

В работе Осканяна и др. [12] было высказано предположение, что наблюдаемую переменность звезды BY Dra можно объяснить появлением и исчезновением звездных пятен, которые, в отличие от солнечных могут возникать в полярных областях звезды. Звездам этого типа присуща также переменная вспышечная активность [13]. Близкими к вспыхивающим звездам являются также звезды типа RS CVn (в каталоге переменных звезд они причислены одновременно к эруптивным и затменным переменным [11]). В 1976г. Халл [14] у звезд типа RS CVn среди прочих выделил и группу вспыхивающих звезд. В 1979г. Итон и Халл [15] объяснили присутствие плато в кривых блеска звезд RS CVn наличием звездных пятен. Звезды типа RS CVn и BY Dra являются тесными двойными звездами, и кроме упомянутой выше вспышечной активности, они обладают характерной для тесных двойных звезд усиленной активностью, тесно связанную с магнитным полем звезд.

Благодаря наблюдениям космических телескопов "Кеплер" и TESS, исследование вспыхивающих звезд и тесно связанных с ними вращательно-переменных звезд типа BY Dra, RS CVn вышло на совершенно новый уровень по своим возможностям, по качеству и количеству доступных данных. Эти данные позволяют: а) получить кривую блеска на протяжении достаточно долгого времени и исследовать циклы звездной активности (аналогично циклу солнечной активности), б) оценить период вращения, запятненность звезд и, соответственно, размеры и энергетические характеристики активных

областей, в) обнаружить дифференциальное вращение, миграцию активных областей и исследовать их взаимосвязь со вспышечной активностью, г) исследовать периодическую/циклическую переменность наблюдаемой частоты вспышек активных вспыхивающих звезд, обусловленную осевым вращением звезд и неравномерным распределением яркости на поверхности звезды. В частности, результаты, полученные автором в предыдущих работах [16-18], не противоречат предположению о том, что осевое вращение звезды модулирует наблюдаемую частоту вспышек.

Переменность наблюдаемой частоты вспышек может быть вызвана также реальным изменением вспышечной активности звезды в течение цикла звездной активности и другими эффектами, которые отражаются в нерегулярном поведении кривой блеска и в отдельных случаях серьезно осложняют наблюдаемую картину. В таких случаях независимый от вида кривой способ определения периода вращения, в данном случае через определение периодической переменности наблюдаемой частоты вспышек, может существенно облегчить интерпретацию наблюдаемой кривой.

Работы, выполненные с использованием данных наблюдений космических телескопов "Кеплер" и TESS, почти не оставляют сомнений, что вспышечно-активные области звезд тесно связаны со звездными пятнами. Следовательно, можно ожидать существование тесных связей между качественными/количественными характеристиками звездных пятен и вспышечной активностью звезд.

В данной работе предлагается способ определения запятненности вспыхивающих звезд (в том числе для звезд типа BY Dra, RS CVn) через определение периодической функции частоты вспышек (ПФЧВ). В разделе 2 приводится постановка задачи, в разделе 3 - описание исходных данных, в разделе 4 - полученные результаты. Заключительные замечания приводятся в разделе 5.

2. Постановка задачи. В представленной работе поставлена задача определения запятненности вращательно-переменных и вспыхивающих звезд через определение ПФЧВ этих звезд. В основе работы лежат следующие предположения и предпосылки:

- Из данных "Кеплер" и TESS следует, что вспыхивающие звезды, помимо прочего, обладают также вращательной переменностью, обусловленной их вращением и неравномерным распределением пятен по поверхности звезды.

- Базовым является предположение о случайном и независимом характере вспышек, что позволяет рассмотреть последовательность вспышек звезды как случайный пуассоновский процесс [19]. Из тесной связи вспышечной активности звезд с пятнами неизбежно следует, что частота регистрируемых вспышек модулируется вращением. Следовательно, в данном случае необходимо рассмотреть последовательность вспышек звезды как случайный пуассоновский

процесс с циклическим/периодическим параметром. В предыдущих работах в качестве параметра пуассоновского распределения использовалась функция

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \exp[k \sin(\omega_0 t + \vartheta)]}{I_0(t)} \quad (k \geq 0, \omega_0 \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \lambda > 0), \quad (1)$$

где k , ω_0 , ϑ , λ - постоянные, а $I_0(k) = \int_0^{2\pi} \exp[k \sin(u)] du$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Выбор этой функции был обусловлен тем, что в зависимости от значения параметра k обеспечивается разнообразие видов периодической функции.

- Согласно работе [20], вспышечная активность положительно коррелирует с размерами пятен (см. рис.10 в [20]), из чего следует, что такая же корреляция имеет место между размерами пятен и числом вспышек. Поскольку параметр пуассоновского процесса $\lambda(t)$ это среднее число событий, в данном случае вспышек за единицу времени, то из этого следует принципиальная возможность определения параметра запятненности звезд путем определения параметра $\lambda(t)$.

- Учитывая известные свойства тригонометрических функций, можно сказать, что функция $\lambda(t)$ по существу совпадает с функцией плотности распределения фон Мизеса:

$$M(x|\mu, k) = \frac{\exp[k \cos(x - \mu)]}{2\pi I_0(k)}, \quad (2)$$

где μ - среднее (одновременно мода и медиана) распределения, k - мера концентрации, $1/k$ - дисперсия, $1 - I_1(k)/I_0(k)$ - круговая дисперсия. К сожалению, это обстоятельство было упущено из виду в первых работах [16-17]. На сходство перечисленных выше функций впервые было обращено внимание в работе [18]. Распределение фон Мизеса известно также как круговое нормальное распределение или распределение Тихонова. Оно широко применяется при статистической обработке угловых (круговых) данных и является хорошим приближением к намотанному нормальному распределению (круговой аналог нормального распределения).

Отсюда следует, что для определения распределения запятненности обращенной к наблюдателю полусферы звезды, необходимо, во-первых, определить ПФЧВ звезды и представить его в виде функции плотности распределения фон Мизеса, которая, учитывая положительную корреляцию вспышечной активности с размерами пятен [20], одновременно будет функцией распределения эффективной площади пятен на обращенной к наблюдателю полусферы звезды.

Во-вторых, необходимо полученные ПФЧВ как-то соотнести к наблюдаемым кривым блеска (потока). В данной работе предложено это сделать при помощи крайних значений (экстремумов) ПФЧВ и кривой блеска. Естественно, что при максимуме кривой блеска наблюдается минимально запятненная (из

всех возможных) полусфера с минимальной вспышечной активностью и, наоборот, при минимуме блеска наблюдается максимально запятненная полусфера с максимальной вспышечной активностью. Из (1) следует, что отношение максимума наблюдаемой вспышечной активности к минимальному равно $\lambda_{max}/\lambda_{min} = \exp(2k)$ и легко догадаться, что отношение потоков в максимуме и минимуме можно выразить через это отношение.

При больших угловых наклонах оси ($60^\circ \div 90^\circ$) вращения звезды к лучу зрения эти полусферы, учитывая симметричность вышеприведенных функций, можно считать диаметрально противоположными, что дает возможность оценить запятненность звезды в целом.

3. *Использованные данные.* Для выполнения поставленной задачи были отобраны наиболее активные вспыхивающие звезды (88 звезд) из обновленного списка вспыхивающих звезд по данным наблюдения космической обсерватории "Кеплер" [21], у которых обнаружено по 250 вспышек и более. Ранее аналогичная работа была выполнена для 74-х вспыхивающих звезд по данным старого списка [20], который существенно отличается от нового обилием вспышек у отдельно взятых звезд. В работе [17] из списка [20] были отобраны звезды, показавшие по 400 и более вспышек, значительная часть которых оказалась ложными вспышками, согласно [21]. Выборки звезд, использованные в данной работе и в [17], частично (36 звезд) перекрываются, что позволяет провести не только сравнение полученных результатов, но и оценить влияние исключения ложных вспышек на результаты, полученные в представленной работе. Несмотря на существенное уменьшение количества вспышек на одну звезду, исключение вероятных ложных вспышек в подавляющем большинстве случаев привело к тому, что полученные ПФЧВ оказались статистически более достоверными в рамках использованных статистических критериев. Это скорее всего свидетельствует о том, что исключенные вспышки в основном были действительно ложными и, наверняка, были распределены более или менее равномерно во времени.

В табл.1 представлен неполный список вспыхивающих звезд использованных в данной работе, где приведены номера звезд в каталоге KIC, число вспышек, период переменности кривой блеска, тип переменности звезды в базе данных SIMBAD. В таблицу включены только те звезды, у которых периоды вращения и ПФЧВ отличаются друг от друга менее чем на 1% (см. табл.2). Распределения числа вспышек n и периодов P_r для полной выборки звезд приведены на рис.1 и рис.2 (см. в разделе 4).

Значения максимального и минимального потоков извлечены из кривых потоков звезд, скаченных с помощью программных средств Python [25]. Эти кривые использовались также для проверки значений периодов P_r , приведенных

Таблица 1

ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫБОРКИ ВСПЫХИВАЮЩИХ ЗВЕЗД

KIC	n	P_r	Тип пере- менности, SIMBAD	KIC	n	P_r	Тип пере- менности, SIMBAD
2968811	291	14.80 [21]	RS V	9267818	354	10.66 [22]	ROT
4758595	325	20.00 [23]	ROT	9349698	346	1.36 [22]	ROT
5351320	254	0.91 [23]	ROT	9456920	303	1.78 [22]	ROT, E?
6117602	286	0.6047 [24]	ROT	9540467	332	8.56 [23]	ROT
6187639	325	2.98 [21]	ROT	9941718	292	3.7 [22]	ROT
6675714	252	6.76 [22]	ROT	10146539	271	5.17 [22]	ROT
7131515	401	3.86 [22]	ROT	10355809	381	1.52 [21]	ROT
7664485	279	3.16 [22]	ROT	10865206	260	2.42 [22]	BY Dra
7905458	265	17.98 [22]	ROT	10909367	280	2.98 [22]	BY Dra
8093473	438	6.04 [22]	BY Dra	10975238	310	1.95 [22]	BY Dra
8292758	286	2.88 [22]	ROT	11342883	288	3.64 [23]	ROT
8481420	296	2.04 [21]	CEP, LPV??	11515713	254	21.45 [23]	ROT
8507979	318	1.22 [22]	ROT	12258055	261	2.75 [22]	ROT
8811811	258	1.55 [22]	BY Dra	12314646	387	2.72 [22]	BY Dra
9116222	318	7.41 [21]	ROT	12646841	309	3.25 [23]	ROT
9201463	489	5.55 [21]	ROT				

в табл.1, с помощью двух взаимодополняющих алгоритмов - BLS (Box Least Square) [26] и Ломба-Скаргла [27,28]. Полученные значения незначительно отличаются от табличных и, во избежание субъективности, в табл.1 приведены уже опубликованные значения.

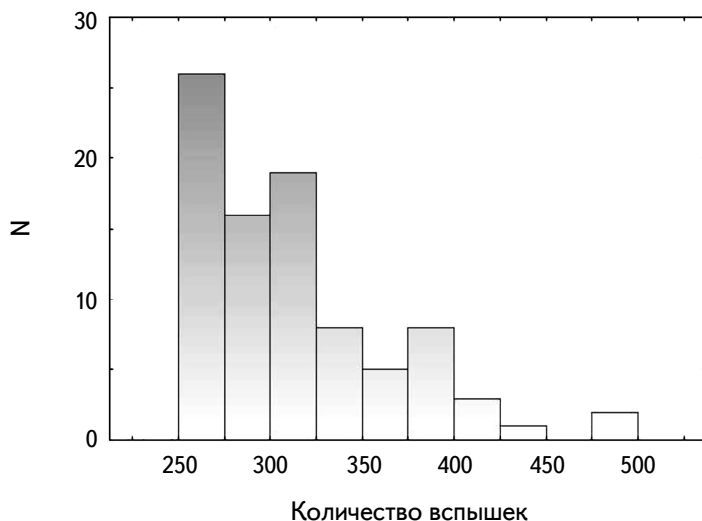


Рис.1. Распределение количества вспышек для полной выборки звезд.

Алгоритм BLS предназначен для обработки сигналов, характеризующихся периодическим чередованием двух дискретных уровней и широко используется для обнаружения и описания периодических транзитов внесолнечных планет. Использование алгоритма BLS применительно к вращательно-переменным звездам оправдано сходством транзита планет с перемещением звездных пятен в поле зрения наблюдателя. С помощью BLS можно определить продолжительность "плато" глубокого минимума, которая содержит определенную информацию о компактности распределения звездных пятен [18].

4. Результаты.

4.1. *Определение ПФЧВ.* Как было указано выше, в качестве периодической функции частоты вспышек-параметра пуассоновского распределения выбрана функция (1), предложенная Кутоянцом [29] для описания пуассоновского процесса с периодическим параметром. Применительно к нашей задаче, если рассмотреть в качестве статистического события реализацию n вспышек в интервале времени $(0, T)$, то функция правдоподобия такого события имеет вид:

$$e^{-\lambda T/2\pi} \left(\frac{\lambda}{I_0(k)} \right)^n \exp \left[k \sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i + \vartheta) \right],$$

где t_i - моменты вспышек.

Из постановки задачи следует, что величина ω_0 должна быть равна или близка к значению циклической частоты осевого вращения звезды, т.е. $\omega_0 \cong 2\pi/P_r$. В качестве исходных данных используются значения P_r (табл.1).

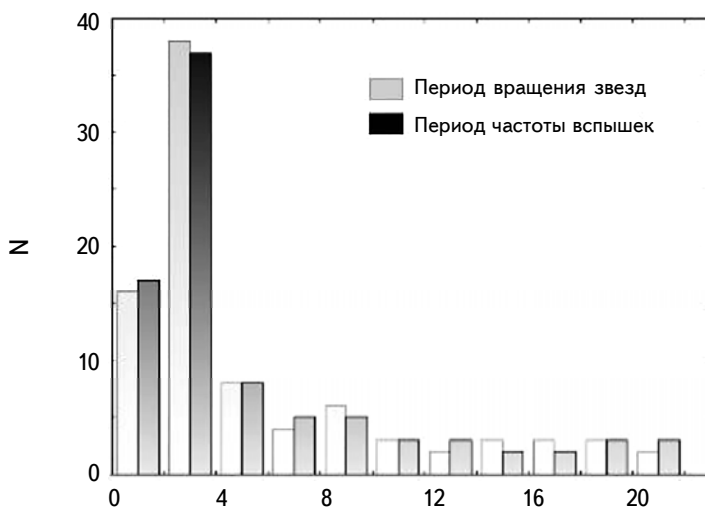


Рис.2. Распределение периодов вращения и частоты вспышек для полной выборки звезд.

Для оценок максимального правдоподобия остальных параметров имеем:

$$\hat{\lambda} = \frac{2\pi n}{T}, \quad \tan(\hat{\vartheta}) = \frac{\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)}{\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{d \log I_0(k)}{dk} \right|_{k=\hat{k}} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right)^2}}{n}.$$

При этом интервал времени T должен быть кратным периоду $2\pi/\omega_0$, а из множества корней второго уравнения (3) $\hat{\vartheta}$ выбирается по следующему правилу:

$$\hat{\vartheta} = \begin{cases} \hat{\vartheta}, & \text{если } \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)\right) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right) \\ \hat{\vartheta} + 2\pi, & \text{если } \hat{\vartheta} < 0 \text{ и } \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)\right) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right) \\ \hat{\vartheta} + \pi, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Заданием ω_0 и определением параметров $\hat{\lambda}$, $\hat{\vartheta}$, $\hat{k}$ функция $\lambda(t)$ определяется полностью. Из-за неизбежных ошибок при обработке данных и неопределенностей, связанных со статистическим характером задачи, необходимо варьировать значение ω_0 в узком интервале значений циклических частот вокруг первоначального значения, чтобы получить правдоподобную ПФЧВ, которая обеспечит лучшее согласие с наблюдательными данными. Мерой правдоподобности является логарифм отношения функций правдоподобий двух пуассоновских процессов: с периодическим параметром (гипотеза H_1) и стационарным (гипотеза H_0), соответственно:

$$\ln L_{H_1/H_0} = k \sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i + \vartheta) - n \ln(I_0(k)). \quad (5)$$

В работе [17] было установлено, что гипотезу о стационарности можно уверенно отвергнуть, если логарифм отношения правдоподобий $\ln L_{H_1/H_0} > 3^1$. К этому результату привело применение критерия сравнения двух пуассоновских процессов - периодического и стационарного, приведенного в работе [30], согласно которому стационарность не отвергается, если

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i) \right)^2 \right] / 3n \leq 1.$$

Согласие с наблюдательными данными проверено сравнением ожидаемого распределения всплесков по фазам с соответствующим наблюдаемым распределением с помощью критерия согласия χ^2 (критерий согласия Пирсона). Более подробное описание метода приведено в работах [17,18].

¹ В работе автора [18] в этой формуле есть опечатка. Вместо знака ">" поставлен знак "<".

Таблица 2

ВЫЧИСЛЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ВЫБОРКИ ЗВЕЗД

KIC	P_f	P_r/P_f	$\hat{k}$	$\hat{\theta}$	$\ln L_{H_1/H_0}$	χ^2	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu}_0$
2968811	14.722	0.995	0.17919	1.36459	2.32193	1.51178	0.5888	1.9969
4758595	20.130	1.007	0.23903	0.62775	4.59307	6.51034	0.6631	6.0032
5351320	0.901	0.990	0.25657	2.67321	4.12922	3.11193	3.1996	4.3020
6117602	0.604	0.998	0.21010	2.25872	3.13033	3.20167	2.0145	2.7024
6187639	2.992	1.004	0.25170	3.31417	5.08692	3.92036	0.0152	1.7586
6675714	6.760	1.000	0.24390	0.7625	3.70643	2.04663	0.7049	6.1798
7131515	3.854	0.999	0.17312	4.83821	2.98765	6.14257	5.2973	2.2816
7664485	3.153	0.998	0.25856	1.90688	4.60534	7.15711	1.8924	2.2285
7905458	18.045	1.004	0.20617	1.04902	2.79388	2.04278	4.5869	4.0651
8093473	6.058	1.003	0.19305	5.85648	4.05237	2.82382	4.1663	2.1688
8292758	2.873	0.997	0.29767	3.75708	6.23185	7.32981	5.5450	1.4481
8481420	2.047	1.003	0.24367	3.99111	4.34532	2.38966	1.4298	3.8501
8507979	1.226	1.005	0.21083	5.99714	3.50467	0.70206	3.6537	1.7968
8811811	1.553	1.002	0.29200	0.46721	5.41296	0.94671	1.2602	0.1566
9116222	7.415	1.001	0.22043	1.69782	3.82788	4.82591	1.4942	1.6212
9201463	5.581	1.006	0.18942	2.81767	4.35719	6.27405	5.2266	0.1594
9267818	10.569	0.992	0.16437	4.30767	2.37902	0.77738	4.5762	1.0299
9349698	1.349	0.992	0.21651	2.10742	4.01951	1.67937	0.3499	0.8866
9456920	1.791	1.006	0.22950	2.86364	3.95087	3.73247	5.6753	0.6850
9540467	8.640	1.009	0.20029	3.30475	3.30475	1.94747	0.7916	1.7024
9941718	3.702	1.001	0.25150	1.63789	4.56316	6.63292	2.3410	2.4081
10146539	5.118	0.990	0.21967	5.79978	3.23999	2.09252	1.9662	6.1952
10355809	1.534	1.009	0.24430	2.93176	5.62162	1.72234	1.5056	2.8665
10865206	2.442	1.009	0.22080	0.44784	3.14016	1.27875	4.3605	3.2376
10909367	2.952	0.991	0.24685	1.09566	4.21737	5.86557	0.3025	6.1106
10975238	1.940	0.995	0.23798	0.02141	4.34297	5.97322	2.6149	1.0656
11342883	3.636	0.999	0.20199	4.54076	2.91536	3.91743	5.7226	2.4093
11515713	21.282	0.992	0.14529	2.99114	1.33517	5.64332	2.1447	3.5650
12258055	2.737	0.995	0.19036	3.60906	2.34856	1.84612	1.7013	3.7395
12314646	2.719	1.000	0.20984	1.11513	4.22532	3.65024	0.5259	0.0703
12646841	3.275	1.008	0.21694	3.77042	3.6038	1.28178	3.8791	6.0787

В табл.2 представлены вычисленные параметры для выборки звезд, представленной в табл.1, где последовательно приведены номера звезд в каталоге KIC, период ПФЧВ P_f , отношение P_r/P_f , коэффициент концентрации $\hat{k}$, начальная фаза $\hat{\theta}$ (для чисто технического удобства вычислений принято, что начальный момент $t=0$ наблюдений для каждой звезды совпадает с моментом первой ее вспышки), логарифм отношения правдоподобий, значение критерия согласия χ^2 . Для полной выборки звезд на рис.2-4 приведены распределения P_f , P_r/P_f и $\hat{k}$.

На рис.5 приведены примеры определения ПФЧВ и соответствующих фазовых распределений вспышек для звезд KIC 8811811, 2968811, 6675714.

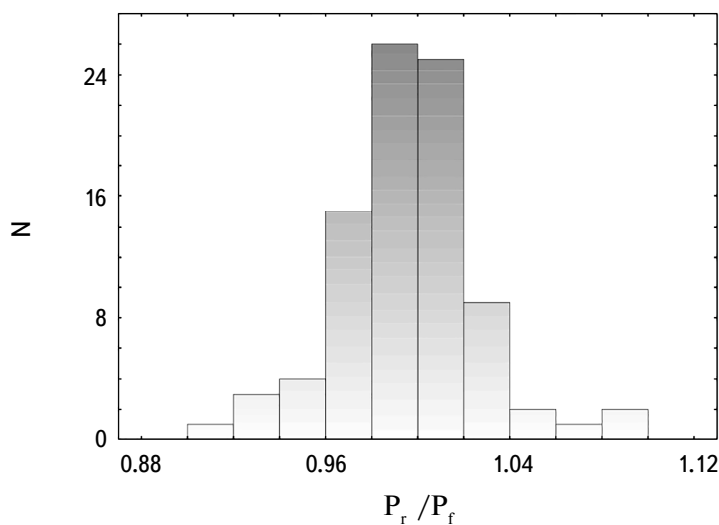


Рис.3. Распределение отношения P_r/P_f для полной выборки звезд.

Звезда KIC 8811811 одна из шести вероятных звезд типа BY Dra, представленных в табл.1. К тому же она представляет условную группу звезд, для которых статистическая достоверность высокая.

Другой тип тесных двойных систем со вспышечной активностью RS CVn представлен на рис.5 звездой KIC 2968811. Она представляет также сравнительно небольшую группу звезд, у которых значение логарифма отношения правдоподобий $\ln L_{H_1/H_0}$ меньше трех (рис.6), т.е. нельзя уверенно отвергнуть

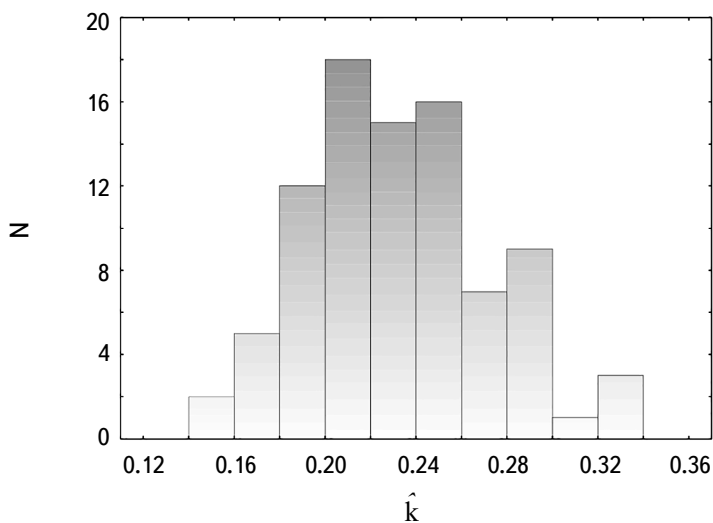


Рис.4. Распределение коэффициента концентрации $\hat{k}$ для полной выборки звезд.

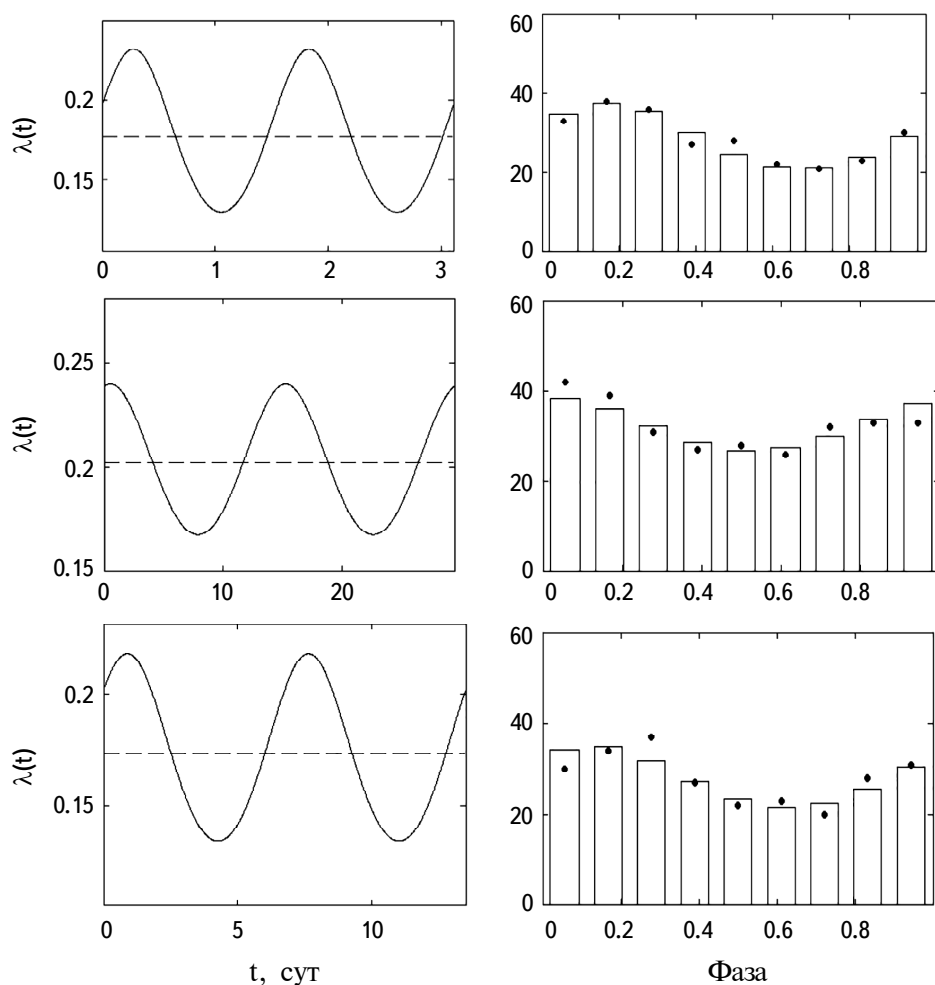
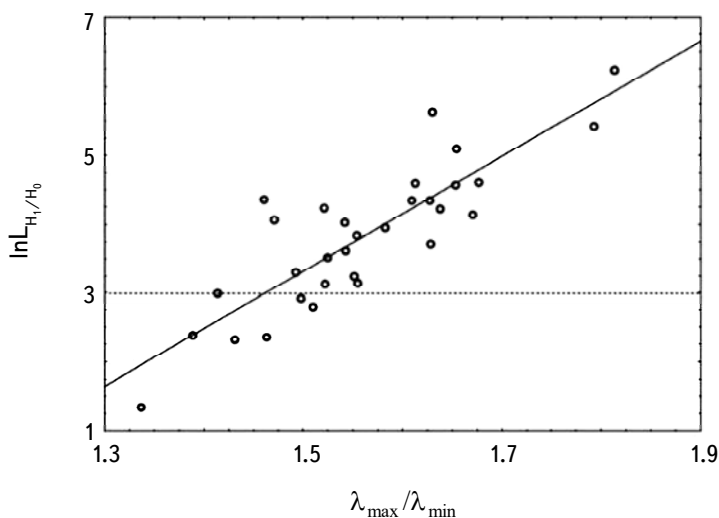


Рис.5. Функция частоты вспышки $\lambda(t)$ в условных единицах (левая панель), ожидаемые (бары) и наблюдаемые (точки) фазовые распределения вспышек звезд KIC 8811811, KIC 2968811, KIC 6675714 (правая панель, сверху вниз).

гипотезу о стационарности пуассоновского процесса. Как видно из рис.6 у таких звезд отношение $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ маленькое, что в рамках принятого в данной работе подхода можно интерпретировать как следствие более и менее равномерного распределения вспышечно-активных областей/пятен по долготе.

Звезда KIC 6675714 представляет "среднестатистическое" большинство звезд, входящих в табл.1.

Из рис.6 и табл.2 следует, что для подавляющего большинства звезд гипотеза о циклическом/периодическом характере изменения частоты вспышек не отвергается по критерию $\ln L_{H_1/H_0} > 3$. Критерий согласия χ^2 хорошо согласуется с этим выводом для всех звезд без исключения.

Рис.6. Зависимость $\ln L_{H_1/H_0} - \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

4.2. Представление в виде кругового распределения фон Мизеса.

Для представления полученных в подразделе 4.1 результатов в виде кругового распределения фон Мизеса, необходимо иметь в виду, что среднее распределения $\hat{\mu}$ оценивается следующим образом:

$$\tan(\hat{\mu}) = \frac{\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)}, \quad (6)$$

т.е. учитывая (3) $\tan(\hat{\vartheta}) = 1/\tan(\hat{\mu})$.

Из множества корней (6) $\hat{\mu}$ выбирается по следующему правилу:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \hat{\mu}, & \text{если } \left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right) > 0 \\ \hat{\mu} + \pi, & \text{если } \left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)\right) \geq 0 \text{ и } \left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right) < 0 \\ \hat{\mu} - \pi, & \text{если } \left(\sum_{i=1}^n \sin(\omega_0 t_i)\right) < 0 \text{ и } \left(\sum_{i=1}^n \cos(\omega_0 t_i)\right) < 0. \end{cases} \quad (7)$$

С учетом соотношений (3), (4), (6), (7) можно установить связь между параметрами $\hat{\mu}$ и $\hat{\vartheta}$, которая для полной выборки звезд приведена на рис.7. Для неполной выборки в последних двух столбцах табл.2 приводятся значения $\hat{\mu}$, $\hat{\mu}_0$. Величина $\hat{\mu}_0$ имеет чисто техническое происхождение и обусловлена, как отмечено выше, тем, что при определении ПФЧВ за начальный момент времени для удобства вычислений был принят момент первой зарегистрированной вспышки звезды, т.е. $t_1 \rightarrow 0$. Соответственно, моменты всех вспышек приняли отличные от каталожных значения $t_i \rightarrow (t_i - t_1)$. При определении же параметров

распределения фон Мизеса начальный момент совпадает с начальным моментом наблюдения за звездой. Это и приводит к появлению $\hat{\mu}_0$ равной

$$\hat{\mu}_0 = 2\pi \bmod(t_1, P_f) / P_f.$$

Другой основной параметр k остается общим для обоих распределений. Переход к распределению фон Мизеса существенно может облегчить дальнейшие статистические исследования, поскольку оно хорошо исследовано и представлено во многих программных пакетах, таких как R, Mathlab, NCSS и др. В данной работе использован пакет NCSS. Кроме того, распределение фон Мизеса привлекательно тем, что оно является аналогом нормального распределения для угловых данных.

На рис.8 приведены распределение фон Мизеса в виде диаграммы "роза ветров" и фазовое распределение вспышек для звезды KIC 8811811. Началом первого бина кругового распределения в данном случае является $\hat{\mu}_0 = 0.1566$ (соответствует углу $\sim 9^\circ$). Первый бин кругового распределения соответствует первому бину фазового распределения слева. Следующие бины по направлению против часовой стрелки совпадают с бинами фазового распределения слева направо. Точка рядом со вторым бином круговой диаграммы - это среднее (среднее направление) распределения фон Мизеса $\hat{\mu}$.

Эта же диаграмма, учитывая положительную корреляцию вспышечной активности с размерами пятен [20], по существу представляет угловое распределение эффективной площади покрытия пятен на обращенной к наблюдателю полусфере звезды, в виде кругового распределения фон Мизеса.

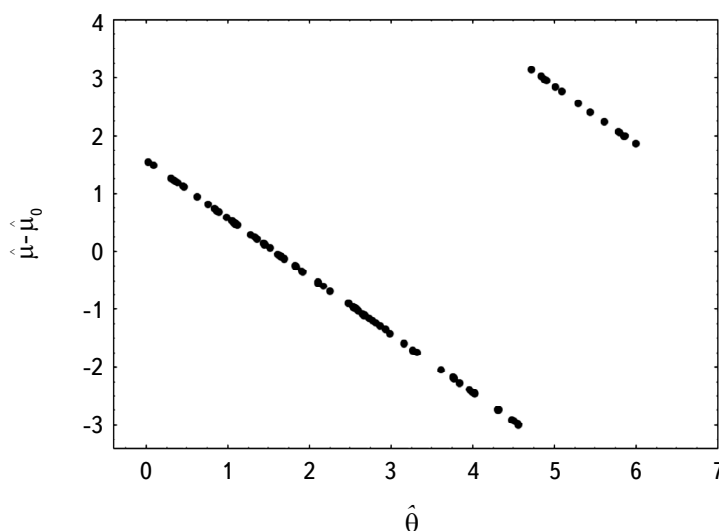


Рис.7. Связь между параметрами $\hat{\mu}$ и $\hat{\theta}$.

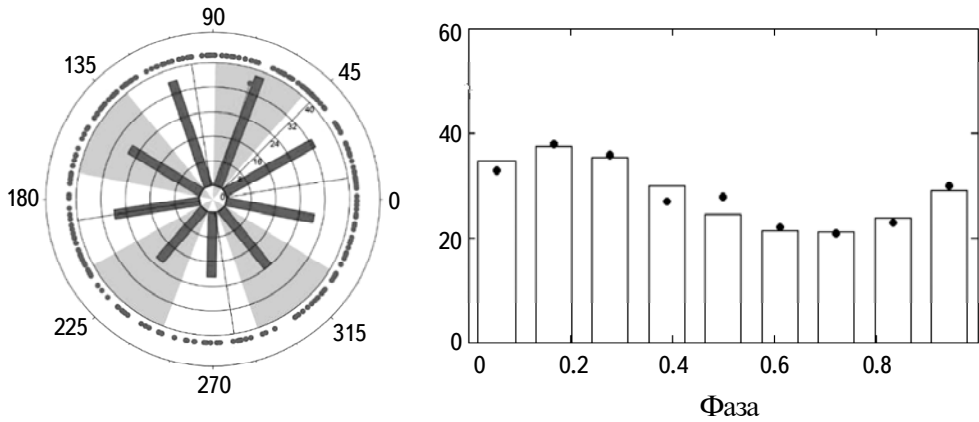


Рис.8. Распределение фон Мизеса в виде диаграммы "роза ветров" и фазовое распределение вспышек для звезды KIC 8811811.

4.3. *Определение запятненности.* В разделе 2 было уже отмечено, что отношение зарегистрированного потока в минимуме к максимальному потоку можно выразить через параметры ПФЧВ и определить запятненность звезды, которая также связана с этим отношением следующим образом:

$$\frac{F_{min}}{F_{max}} = \frac{L_{st}S_{st} - S_{spmin}(L_{st} - L_{sp})}{L_{st}S_{st} - S_{spmax}(L_{st} - L_{sp})},$$

где F_{min} , F_{max} - регистрируемые потоки, L_{st} , L_{sp} - средние поверхностные яркости незапятненной поверхности звезды и звездных пятен, соответственно, S_{st} - площадь поверхности полусферы звезды в проекции, а S_{spmin} , S_{spmax} - площади, занимаемые пятнами на этой же поверхности при минимальном и максимальном потоках.

Вышеупомянутую связь между размерами пятен и вспышечной активностью [20] можно представить в виде равенства

$$\frac{S_{spmin}}{S_{spmax}} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = e^{2k}.$$

Вводя обозначения $F_{min}/F_{max} \equiv F_r$, $S_{spmax}/S_{st} \equiv A$, $L_{sp}/L_{st} \equiv L_r$, после несложных преобразований можно получить следующее выражение для параметра запятненности звезды A :

$$A = \frac{1 - F_r}{(e^{2k} - F_r)(1 - L_r)}.$$

В случае пренебрежения излучением пятен $L_r = 0$, соответственно

$$A = \frac{1 - F_r}{e^{2k} - F_r}. \quad (8)$$

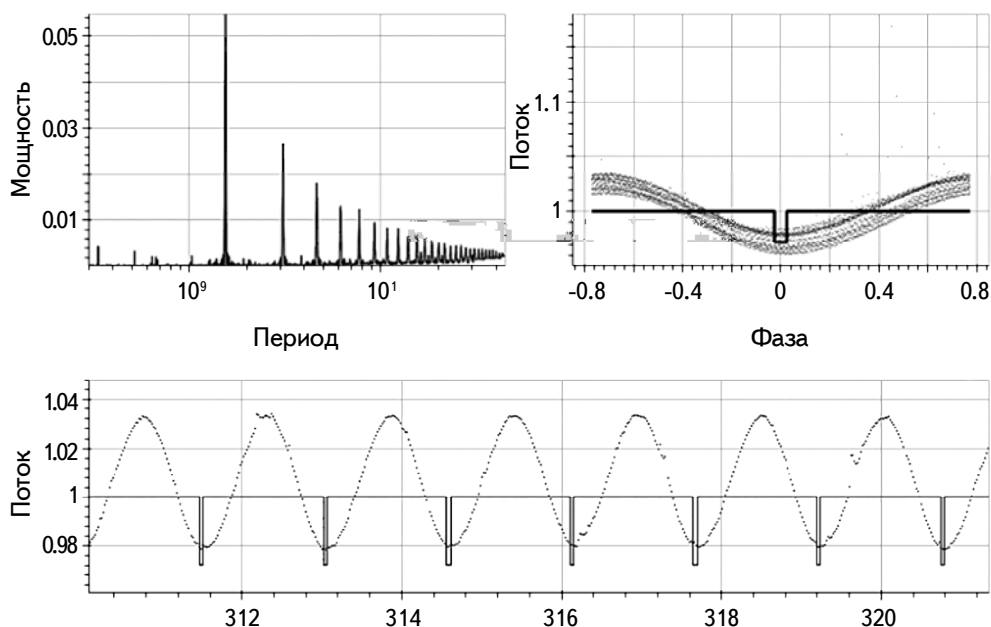


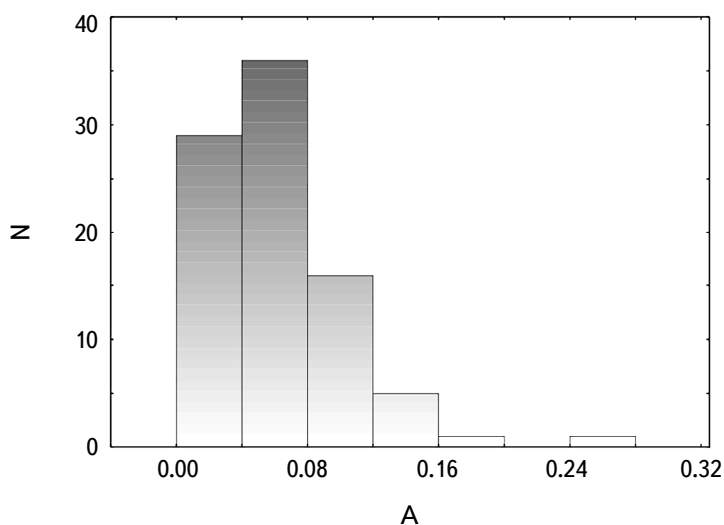
Рис.9. BLS периодограмма звезды типа BY Dra KIC 8811811.

В этом случае для параметра запятненности можно получить только оценку снизу. В приближении чернотельного излучения по аналогии с Солнцем можно принять $L_p = 0.2 \div 0.3$, что приводит к увеличению оценки на $25 \div 40\%$. К некоторому увеличению может привести также учет краевых эффектов, в частности, потемнение звезды к краю. По определению величина A является отношением площади поверхности пятен к площади поверхности минимально запятненной полусферы звезды в проекции. Для максимально запятненной полусферы оно больше на e^{2k} раза. Запятненность звезды в целом можно оценить только в том случае, если эти полусферы противоположны друг другу, что имеет место при наклоне оси вращения звезды на $\sim 90^\circ$. В этом случае параметр запятненности A_{total} равен:

$$A_{total} = \frac{A(1 + e^{2k})}{2}.$$

Необходимые для вычисления запятненности данные F_{min} , F_{max} были извлечены из кривых потоков звезд по данным космической обсерватории "Кеплер" с помощью программных средств Python. Для этого были отобраны участки с регулярным поведением кривой потока. Для примера на рис.9 приведена BLS периодограмма с таким участком для звезды типа BY Dra KIC 8811811, откуда видно что искомая величина $F_{min}/F_{max} \equiv F \approx 0.95$.

Применяя полученное выше выражение (8), можно оценить меру запятнен-

Рис.10. Распределение параметра запятненности A для полной выборки.

ности A . В табл.3 приведены итоговые результаты: запятненность минимально запятненной полусферы A , то же самое для максимально запятненной, и запятненность для звезды в целом, при предположении, что наклон оси вращения звезды близок к 90° . Среди представленных звезд наибольшие запятненности встречаются среди тесных двойных звезд типов BY Dra, RS CVn. Распределение параметра A для полной выборки представлено на рис.10.

Таблица 3

ЗАПЯТНЕННОСТЬ ЗВЕЗД

KIC	A	$A_{\text{exp}(2k)}$	A_{total}	KIC	A	$A_{\text{exp}(2k)}$	A_{total}
2968811	0.264	0.378	0.321	9267818	0.101	0.141	0.121
4758595	0.022	0.038	0.029	9349698	0.018	0.028	0.023
5351320	0.051	0.085	0.068	9456920	0.086	0.136	0.111
6117602	0.008	0.012	0.010	9540467	0.050	0.074	0.062
6187639	0.042	0.070	0.056	9941718	0.041	0.067	0.054
6675714	0.022	0.035	0.028	10146539	0.019	0.030	0.024
7131515	0.061	0.086	0.073	10355809	0.019	0.030	0.024
7664485	0.032	0.054	0.043	10865206	0.129	0.200	0.165
7905458	0.087	0.132	0.110	10909367	0.057	0.094	0.075
8093473	0.127	0.187	0.157	10975238	0.106	0.171	0.139
8292758	0.036	0.066	0.051	11342883	0.116	0.174	0.145
8481420	0.060	0.098	0.079	11515713	0.093	0.124	0.108
8507979	0.074	0.113	0.094	12258055	0.087	0.127	0.107
8811811	0.058	0.103	0.081	12314646	0.078	0.118	0.098
9116222	0.043	0.066	0.054	12646841	0.016	0.025	0.021
9201463	0.020	0.030	0.025	-	-	-	-

5. *Заключение.* На основе данных орбитальной обсерватории "Кеплер" изучены наиболее активные вспыхивающие звезды, которые продемонстрировали 250 или более вспышек в период миссии "Кеплер". Определены периодические функции частоты вспышек вспыхивающих звезд с периодичностью, близкой к периоду вращения звезды. Построены ожидаемые фазовые распределения вспышек, которые сравнены с наблюдаемыми распределениями вспышек за данный период. Для всех исследованных звезд это сравнение (с использованием критерия χ^2) подтверждает периодичность частоты вспышек.

Предложен новый способ определения запятненности звездных пятен с использованием ПФЧВ. Распределение пятен вспыхивающих звезд представлено угловым распределением фон Мизеса с параметрами, полученными из соответствующей функции частоты вспышек. Получены оценки запятненности исследуемых звезд. Представленный способ может служить хорошим дополнением к уже существующим методам (как напр. [31,32]). Особенно привлекательным представляется его применение к кратным системам со вспыхивающей звездой. Определение и выделение периода вспыхивающей звезды с помощью вспышек может существенно облегчить интерпретацию сложных кривых кратных систем.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.Амбарцумяна НАН,
Армении, e-mail: aakopian57@gmail.com

DETERMINING THE FREQUENCY FUNCTION OF FLARES AND STARSPOT COVERAGE IN ACTIVE FLARE STARS DISCOVERED BY "KEPLER"

A.A.AKOPIAN

Based on data from the "Kepler" orbital observatory, this study investigates the most active flare stars, which exhibited 250 or more flares during the "Kepler" mission period. The main research objectives were: (a) analyzing light curves to identify unique physical characteristics of individual stars; (b) defining the periodic/cyclic flare frequency function (PFFF) of flare stars, associated with axial/orbital rotations; and (c) presenting a novel method for determining starspot coverage using the PFFF and applying this method. The study produced corresponding PFFF values with periodicities close to the stars rotation periods. Expected phase

distributions of flares were constructed and compared with observed flare distributions for the given rotation period. For all stars examined, this comparison (using the χ^2 criterion) supports the periodicity of flare frequency. It is hypothesized that the starspot distribution of flare stars can be represented by the von Mises circular distribution, with parameters derived from the respective flare frequency function. Estimates of the starspot coverage for the stars studied were obtained.

Keywords: *flare stars: flare frequency: periodic variability: starspots: von Mises distribution*

ЛИТЕРАТУРА

1. *M.Vázquez, J.M.Vaquero* - The Sun Recorded Through History_ Scientific Data Extracted from Historical Documents, 2009.
2. *J.M.Vaquero*, Historical sunspot observations: A review. *Advances in Space Research*, **40**, 929, 2007.
3. *D.J.Schove*, Sunspot Cycles (Benchmark Papers in Geology, vol. 68). Stroudsburg: Hutchinson Ross. 1983, p.26.
4. *W.Wei-Hock Soon, S.H.Yaskell*, The Maunder Minimum And the Variable Sun-Earth Connection-World Scientific Publishing Company, 2003.
5. *R.W.Noyes*, The Sun, Our Star-Harvard University Press, 1982.
6. *F.R.Stephenson, D.M.Willis*, *Astronomy & Geophysics*, **40**, 6.21, 1999, <https://doi.org/10.1093/astrog/40.6.6.21>.
7. *R.Arlt, J.M.Vaquero*, *Living Reviews in Solar Physics*, **17**, 1, id.1, 2020.
8. *J.Casanovas*, Early observations of sunspots: Scheiner and Galileo, 1st Advances in Solar Physics Euroconference. *Advances in Physics of Sunspots*, **118**, 3, 1997.
9. *I.Bullialdi*, *Ad astronomos monita duo*, 1667.
10. *G.E.Kron*, *Publ. Astron. Soc. Pacif.*, **59**, 261, 1947. doi:10.1086/125964.
11. *N.N.Samus, E.V.Kazarovets, O.V.Durlevich et al.*, General Catalogue of Variable Stars: Version GCVS 5.1, *Astron. Rep.*, **61**, 80, 2017.
12. *V.S.Oskanyan, D.S.Evans, C.Lacy et al.*, An analysis of the slow light variability of BY Draconis, *Astrophys. J.*, **214**, 430, 1977. doi:10.1086/155268.
13. *А.Мелконян, К.Ола, А.В.Осканян и др.*, *Астрофизика*, **16**, 107, 1979.
14. *D.S.Hall*, IAU Colloquium, Multiple Periodic Variable Stars, **29**, 287, 1976, doi: <https://doi.org/10.1017/S0252921100062011>.
15. *J.A.Eaton, D.S.Hall*, *Astrophys. J.*, **227**, 907, 1979.
16. *A.A.Akopian*, *Astrophysics*, **58**, 62, 2015.

17. *A.A.Akopian*, *Astrophysics*, **62**, 518, 2019.
18. *A.A.Akopian*, *Astrophysics*, **66**, 516, 2023.
19. *В.А.Амбарцумян*, "Звезды, Туманности, Галактики", Изд. АН Арм ССР, 1969, с.283.
20. *H.Yang, J.Liu, Q.Gao et al.*, *Astrophys. J.*, **849**, 36, 2017.
21. *H.Yang, J.Liu*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **241**, 29, 2019.
22. *A.McQuillan, T.Mazeh, S.Aigrain*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **211**, 24, 2014.
23. *T.Reinhold, A.Reiners, G.Basri*, *Astron. Astrophys.*, **560**, A4, 2013.
24. *S.Rappaport, J.Swift, A.Levine et al.*, *Astrophys. J.*, **788**, 114, 2014.
25. Lightkurve Collaboration, J.V. de M.Cardoso, C.Hedges, M.Gully-Santiago et al., *Astrophysics Source Code Library*. ascl:1812.013, 2018.
26. *G.Kovacs, S.Zucker, T.Mazeh*, *Astron. Astrophys.*, **391**, 369, 2022.
27. *N.R.Lomb*, *Astrophys. Space Sci.*, **39**, 447, 1976.
28. *J.D.Scargle*, *Astrophys. J.*, **263**, 835, 1982.
29. *Ю.А.Кутоянц*, Оценивание параметров случайных процессов, Изд-во АН Армянской ССР, 1980.
30. *P.A.W.Lewis*, *J. Sound Vib.*, **12**(3), 353, 1970.
31. *S.Aigrain, F.Pont, S.Zucker*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **419**, 3147, 2012.
32. *I.S.Savanov, K.G.Strassmeier*, *Astron. Nachr.*, **329**, 364, 2008.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-515

TOPOLOGICAL CASIMIR EFFECT IN MODELS WITH
HELICAL COMPACT DIMENSIONSR.M.AVAGYAN^{1,2}, A.A.SAHARIAN^{1,2}, D.H.SIMONYAN¹,
G.H.HARUTYUNYAN¹

Received 5 August 2024

We investigate the influence of the helical compactification of spatial dimension on the local properties of the vacuum state for a charged scalar field with general curvature coupling parameter. A general background geometry is considered with rotational symmetry in the subspace with the coordinates appearing in the helical periodicity condition. It is shown that by a coordinate transformation the problem is reduced to the problem with standard quasiperiodicity condition in the same local geometry and with the effective compactification radius determined by the length of the compact dimension and the helicity parameter. As an application of the general procedure we have considered locally de Sitter spacetime with a helical compact dimension. By using the Hadamard function for the Bunch-Davies vacuum state, the vacuum expectation values of the field squared, current density, and energy-momentum tensor are studied. The topological contributions are explicitly separated and their asymptotics are described at early and late stages of cosmological expansion. An important difference, compared to the problem with quasiperiodic conditions, is the appearance of the nonzero off-diagonal component of the energy-momentum tensor and of the component of the current density along the uncompact dimension.

Keywords: topological Casimir effect: vacuum polarization: helical periodicity conditions: de Sitter spacetime

1. *Introduction.* The topological effects play an important role in various fields of physics. The latter include high-energy models with compact extra dimensions and different types of condensed matter systems. As examples we mention here the Kaluza-Klein type theories in supergravity and in string theories and different types of topological structures of 2D materials. In field theories formulated on background of spacetimes with nontrivial topology, in addition to the field equations, periodicity conditions have to be imposed on the fields along compact dimensions. As a consequence, the local physical characteristics of fields depend on the global properties of the background geometry. In particular, that is the case for the vacuum state of quantum fields. In models with compact dimensions the influence of the periodicity conditions on the properties of quantum vacuum is similar to that induced by boundary conditions on the field operator in the Casimir effect and is known as the topological Casimir effect (for reviews see [1-7]). It has been investigated for different topological classes and

background geometries. The interest is motivated by applications in theories with extra dimensions as a stabilization mechanism for moduli fields, in cosmology as a possible source of dark energy driving the accelerated expansion of the Universe, and in condensed matter physics as a source of generation of ground state stresses and currents. Among other implications of compact dimensions we can mention here new mechanisms for symmetry breaking, the generation of topological mass in field theories and different types of instabilities (see, for example, references [8-24]).

An interesting feature in theories with compact dimensions is the possibility of inequivalent field configurations with different periodicity conditions [1,25,26]. The different conditions lead to different physical consequences. Among the interesting directions in the studies of the topological Casimir effect is the dependence of the physical characteristics of the vacuum state on the periodicity conditions in the compact subspace. The most popular conditions in the literature correspond to periodic and antiperiodic fields (untwisted and twisted fields). They are special cases of more general periodicity conditions for charged fields with general phases. For the values of the phase different from 0 and π vacuum currents appear along compact dimensions. Those currents have been studied in [27-37] for locally Minkowski, de Sitter (dS) and anti-de Sitter (AdS) spacetimes (for a review see [38]). More general helical conditions include an additional shift along uncompact dimensions [39,40]. The vacuum energy in models with helical conditions along compact dimensions with zero value of the phase has been studied in [41-47]. The current density in the case of general phase is discussed in [48,49].

In the present paper we show that the characteristics of the vacuum in problems with helical periodicity conditions can be generated by using the corresponding results for standard quasiperiodicity conditions by a coordinate transformation depending on the length of compact dimension and the helicity parameter. The organization of the paper is as follows. In the next section the problem setup is presented. The coordinate transformation is described and the connection between the vacuum expectation values (VEVs) is given. As an example of general procedure, in Section 3, a locally dS background geometry is considered. The expressions of the Hadamard function, for the VEVs of the field squared, current density and the energy-momentum tensor are presented. The main results of the paper are summarized in Section 4.

2. Problem setup and coordinate transformation. Let us consider the background geometry described by the $(D+1)$ -dimensional line element $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, where

$$g_{ik} = g_{ik}(x_\perp^l), \quad g_{l,D-1} = g_{l,D} = 0, \quad g_{D-1,D-1} = g_{D,D}, \quad x_\perp^l = (x^0, x^1, \dots, x^{D-2}), \quad (1)$$

with $l = 0, 1, \dots, D-2$. It will be assumed that the spatial coordinate x^D is

compactified to a circle with the length a , $0 \leq x^D \leq a$ and for the coordinate x^{D-1} one has $-\infty < x^{D-1} < +\infty$. No specific conditions will be imposed on the geometry and topology of the subspace covered by the coordinates $x_\perp^l$. We discuss the dynamics of a scalar field $\varphi(x)$ with curvature coupling parameter ξ , governed by the equation

$$(g^{ik} D_i D_k + \xi R + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (2)$$

where $D_i = \nabla_i + ieA_i$ is the gauge-covariant derivative and e is the coupling between the scalar and gauge fields. Since the background space has non-trivial topology, in addition to the field equation one should specify the periodicity conditions along compact dimensions. In the subspace (x^{D-1}, x^D) we impose helical periodicity condition

$$\varphi(x_\perp^l, x^{D-1}, x^D + a) = e^{i\alpha_p} \varphi(x_\perp^l, x^{D-1} + h, x^D), \quad (3)$$

with the helicity parameter h and constant phase α_p . In the special case $h=0$ the relation (3) reduces to a generic quasiperiodicity condition.

Here we consider a simple configuration of the gauge field with $A_{D-1}, A_D = \text{const.}$ These constant components of the gauge field can be excluded from the field equation by the gauge transformation

$$A_i = A'_i + \partial_i \omega, \quad \varphi(x) = e^{-ie\omega} \varphi'(x), \quad \omega = A_{D-1} x^{D-1} + A_D x^D. \quad (4)$$

In the new gauge one has $A'_i = 0$ and $D'_i = \nabla_i$ for $l = D-1, D$. Now the condition (3) takes the form

$$\varphi'(x_\perp^l, x^{D-1}, x^D + a) = e^{i\tilde{\alpha}_p} \varphi'(x_\perp^l, x^{D-1} + h, x^D), \quad (5)$$

with the new phase

$$\tilde{\alpha}_p = \alpha_p - eA_{D-1}h + A_D a. \quad (6)$$

The physical characteristics will depend on the quantities α_p, A_{D-1}, A_D in the form of the combination.

In quantum field theory the periodicity conditions imposed on the field operator modify the spectrum of vacuum fluctuations and the vacuum expectation values of physical observables are shifted by amount that depends on the parameters of the compactification (the topological Casimir effect [1-7]). These effects for the quasiperiodicity conditions, corresponding to the zero value of the helicity parameter, $h=0$, have been widely investigated in the literature for different local geometries. Simple geometries with helical conditions in the case of zero phase were discussed in [41-47]. In the discussion below we will show that the results for the helical conditions can be obtained by an appropriate coordinate transformations from the formulas for quasiperiodicity conditions.

The helical condition identifies the spacetime points with the coordinates

$P_{(0,a)} = (x_\perp^l, x^{D-1}, x^D + a)$ and $P_{(h,0)} = (x_\perp^l, x^{D-1} + h, x^D)$. Let us introduce new coordinates $\bar{x}^i$ in accordance with $\bar{x}^l = x^l$ for $l = 0, 1, \dots, D-2$, and

$$\bar{x}^{D-1} = \frac{a}{\bar{a}} x^{D-1} + \frac{h}{\bar{a}} x^D + \frac{a}{\bar{a}} h, \quad \bar{x}^D = -\frac{h}{\bar{a}} x^{D-1} + \frac{a}{\bar{a}} x^D - \frac{h^2}{\bar{a}}, \quad (7)$$

where

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 + h^2}. \quad (8)$$

The inverse transformation reads

$$x^{D-1} = \frac{a}{\bar{a}} \bar{x}^{D-1} - \frac{h}{\bar{a}} \bar{x}^D - h, \quad x^D = \frac{h}{\bar{a}} \bar{x}^{D-1} + \frac{a}{\bar{a}} \bar{x}^D \quad (9)$$

For the identification points in the coordinates $\bar{x}^i$ one has

$$P_{(0,a)} = (\bar{x}_\perp^l, \bar{x}^{D-1}, \bar{x}^D + \bar{a}), \quad P_{(h,0)} = (\bar{x}_\perp^l, \bar{x}^{D-1}, \bar{x}^D). \quad (10)$$

The coordinate transformation (7) is a combination of the rotation by angle $\theta = \arctan(h/a)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, and the shift of the origin to the point $x^i = (x_\perp^l, -h, 0)$. The metric tensor is form-invariant under the transformation (7).

Now we can reformulate the problem of the investigation of the VEVs for the field $\phi(x)$ with helical condition (3) in the coordinate system $\bar{x}^i$. For the corresponding metric tensor we still have

$$\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ik}(\bar{x}_\perp^l), \quad \bar{g}_{l,D-1} = \bar{g}_{l,D} = 0, \quad \bar{g}_{D-1,D-1} = \bar{g}_{D,D}, \quad (11)$$

with $\bar{x}_\perp^l = x_\perp^l$. The field equation has the form (2) with the replacements $g_{ik} \rightarrow \bar{g}^{ik}$ for the metric tensor and $D_i \rightarrow \bar{D}_i = \bar{\nabla}_i + ieA_i$ for the covariant derivative, where $\bar{A}_i = A_i$ for $i = 0, 1, \dots, D-2$, and

$$\bar{A}_{D-1} = \frac{a}{\bar{a}} A_{D-1} + \frac{h}{\bar{a}} A_D, \quad \bar{A}_D = -\frac{h}{\bar{a}} A_{D-1} + \frac{a}{\bar{a}} A_D. \quad (12)$$

In the new coordinates the periodicity condition takes the form

$$\bar{\varphi}(\bar{x}_\perp^l, \bar{x}^{D-1}, \bar{x}^D + \bar{a}) = e^{i\alpha_p} \bar{\varphi}(\bar{x}_\perp^l, \bar{x}^{D-1}, \bar{x}^D), \quad (13)$$

which is a standard quasiperiodicity condition. This shows that we can use the results for the VEVs in problems with quasiperiodicity condition (13) in order to find the expectation values in problems with helical conditions. Let us specify this procedure for the current density and the energy-momentum tensor. The renormalized VEVs in the coordinate system $\bar{x}^i$ we denote by $\langle \bar{j}^i \rangle = \langle \bar{j}^i(\alpha_p, \bar{A}_l) \rangle$ and $\langle \bar{T}^{ik} \rangle = \langle \bar{T}^{ik}(\alpha_p, \bar{A}_l) \rangle$ for the current density and the energy-momentum tensor, respectively. The corresponding expectation values $\langle j^i \rangle = \langle j^i(\alpha_p, A_l) \rangle$ and $\langle T^{ik} \rangle = \langle T^{ik}(\alpha_p, A_l) \rangle$ in the original problem with helical periodicity condition (3) are obtained by the coordinate transformation $\bar{x}^i \rightarrow x^i$.

We start with the current density. Note that in the coordinate system $\bar{x}^i$ we

can make a gauge transformation $\bar{A}_i = \bar{A}'_i + \bar{\partial}_i \bar{\omega}$, $\bar{\phi}(\bar{x}) = e^{-ie\bar{\omega}} \bar{\phi}'(\bar{x})$ with the function $\bar{\omega} = \bar{A}_{D-1} \bar{x}^{D-1}$. In the new gauge one gets $\bar{A}'_{D-1} = 0$. Both the field equation and the periodicity condition (13) are invariant under this gauge transformation and the physical results do not depend on $\bar{A}_{D-1}$. In the gauge $\bar{A}_{D-1} = 0$ the metric tensor, the field equation and the periodicity condition in the coordinate system $\bar{x}^i$ are symmetric under the reflection $\bar{x}^{D-1} \rightarrow -\bar{x}^{D-1}$. Assuming that the vacuum state is also symmetric under this reflection, we conclude that the component of the current density along the coordinate direction $\bar{x}^{D-1}$ vanishes by the symmetry, $\langle \bar{j}^{D-1} \rangle = 0$. In this case the components of the current density in the coordinates x^i are expressed as

$$\langle j^i \rangle = \langle \bar{j}^i \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, D-2, \quad \langle j^{D-1} \rangle = -\frac{h \langle \bar{j}^D \rangle}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \langle j^D \rangle = \frac{a \langle \bar{j}^D \rangle}{\sqrt{a^2 + h^2}}. \quad (14)$$

and the vacuum current density has a nonzero component along the uncompact dimension x^{D-1} as well. The components along compact and uncompact dimensions related by the helical condition are connected by the formula

$$\langle j^{D-1} \rangle = -\frac{h}{a} \langle j^D \rangle. \quad (15)$$

This relation for the locally Minkowski bulk was obtained in [48] by direct evaluation of the VEV using the corresponding mode functions.

Another important characteristic of the vacuum state is the expectation value of the energy-momentum tensor. Again, assuming that the vacuum is symmetric with respect to the reflection $\bar{x}^{D-1} \rightarrow -\bar{x}^{D-1}$, we conclude that $\langle \bar{T}^{i,D-1} \rangle = 0$ for $i \neq D-1$. By using the transformation rule for the second rank tensor, for the components of the energy-momentum tensor we get ($i, k = 0, 1, \dots, D-2$)

$$\langle T^{ik} \rangle = \langle \bar{T}^{ik} \rangle, \quad i, k = 0, 1, \dots, D-2, \quad \langle T^{iD} \rangle = -\frac{a}{h} \langle \bar{T}^{i,D-1} \rangle = \frac{a \langle \bar{T}^{iD} \rangle}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad (16)$$

for the components with one or two indices in the subspace $(x^0, x^1, \dots, x^{D-2})$ and

$$\begin{aligned} \langle T^{D-1,D-1} \rangle &= \frac{a^2 \langle \bar{T}^{D-1,D-1} \rangle}{a^2 + h^2} + \frac{h^2 \langle \bar{T}^{DD} \rangle}{a^2 + h^2}, \\ \langle T^{D-1,D} \rangle &= \frac{ah}{a^2 + h^2} [\langle \bar{T}^{D-1,D-1} \rangle - \langle \bar{T}^{DD} \rangle], \quad \langle T^{DD} \rangle = \frac{h^2 \langle \bar{T}^{D-1,D-1} \rangle}{a^2 + h^2} + \frac{a^2 \langle \bar{T}^{DD} \rangle}{a^2 + h^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

for the components in the subspace (x^{D-1}, x^D) .

Note that the condition (3) can also be interpreted as a helical periodicity condition along the compact dimension x^{D-1} with the length h , with the helicity parameter a along the uncompact direction x^D , and with the phase $-\alpha_p$. This

shows that there is a duality between the models with the sets (a, h, α_p) and $(h, a, -\alpha_p)$. In the dual models the roles of the dimensions x^{D-1} and x^D are interchanged. The duality is also seen in the VEVs (14), (16), and (17).

3. Models with locally dS spacetime. As an application of the general procedure described above let us consider a background spacetime with local dS geometry. The dS spacetime is among the most popular geometries in quantum field theory in curved spacetime. In particular, that is motivated by important applications in inflationary models of the early Universe and in models of accelerating expansion at recent epoch. In inflationary coordinates the corresponding line element reads

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\alpha} \sum_{i=1}^D (dx^i)^2, \quad (18)$$

where the constant α determines the curvature radius of the spacetime. It is expressed in terms of the cosmological constant Λ by the formula $\alpha^2 = D(D-1)/2\Lambda$. For the remaining spatial dimensions we take $-\infty < x^i < +\infty$, $i = 1, \dots, D-1$. Introducing a conformal time τ in accordance with $\tau = -\alpha e^{-t/\alpha}$, the line element is written in a conformally flat form

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \frac{\alpha^2}{\eta^2} \left[d\tau^2 - \sum_{i=1}^D (dx^i)^2 \right], \quad (19)$$

where $\eta = |\tau|$. For the scalar curvature in the field equation (2) one has $R = D(D-1)/\alpha^2$. The VEVs of the field squared and energy-momentum tensor in the model with a single compact dimension and periodic condition along it were studied in [50]. The general case of spatial topology $R^p \times (S^1)^q$, $p+q=D$, has been discussed in [51,52]. The vacuum currents for quasiperiodic conditions with general phases are investigated in [30]. For simplicity here we consider the special case $p = D-1$ and $q = 1$, assuming that the only compact dimension corresponds to the coordinate x^D along which the quantum scalar field obeys the condition (3). In the discussion below we will work in the coordinate system (19).

3.1. Hadamard function and the VEVs of the field squared and current density. The local characteristics of the vacuum state $|0\rangle$ for a quantum scalar field $\varphi(x)$ are obtained from the two-point functions. They describe the correlations of zero-point fluctuations at different spacetime points x and x' . As a two-point function we will take the Hadamard function defined as the VEV

$$G(x, x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi^\dagger(x') + \varphi^\dagger(x') \varphi(x) | 0 \rangle. \quad (20)$$

For dS spacetime different vacuum states have been considered in the literature. Among them the Bunch-Davies vacuum is distinguished by the following two properties: it is maximally symmetric and is reduced to the Minkowski vacuum

in flat spacetime in the slow expansion limit. Here we assume that the field $\phi(x)$ is prepared in the Bunch-Davies vacuum state. The Hadamard function $\overline{G}(\bar{x}, \bar{x}')$ in the problem at hand for the coordinates $\bar{x}^i$ is obtained from the expression in [30] as a special case. Transforming to the coordinates x^i we get

$$G(x, x') = \frac{4(\eta\eta')^{D/2}}{(2\pi)^{D/2+1}\alpha^{D-1}} \int_0^\infty dz z [I_{-\nu}(\eta z) K_\nu(\eta' z) + K_\nu(\eta z) I_\nu(\eta' z)] \times \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-in\tilde{\alpha}_p} \frac{f_{D/2-1}\left(z \sqrt{|\Delta x_D|^2 + n^2(a^2 + h^2)} + 2n(a\Delta x^D - h\Delta x^{D-1})\right)}{\left[|\Delta x_D|^2 + n^2(a^2 + h^2) + 2n(a\Delta x^D - h\Delta x^{D-1})\right]^{D/2-1}}. \quad (21)$$

where $x_D = (x^1, \dots, x^D)$, $\Delta x_D = x_D - x'_D$, $\Delta x^i = x^i - x'^i$, $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$ are the modified Bessel functions [53] with the order

$$\nu = [D^2/4 - D(D+1)\xi - m^2\alpha^2]^{1/2}. \quad (22)$$

The function $f_\mu(y)$ in (21) is defined by $f_\mu(y) = y^\mu K_\mu(y)$. The $n=0$ term in (21) corresponds to the Hadamard function $G_{dS}(x, x')$ in the dS spacetime without compactification and the remaining part is induced by the helical compactification. The expression for $G_{dS}(x, x')$ in terms of the hypergeometric function is well known from the literature.

Given the Hadamard function, the VEVs of physical observables are obtained taking the coincidence limit of the arguments of the Hadamard function or its derivatives. We start with the VEV of the field squared $\langle \phi\phi^\dagger \rangle = \langle 0|\phi\phi^\dagger|0 \rangle$. It is obtained in the limit $\langle \phi\phi^\dagger \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} G(x, x')/2$. This limit is divergent and a renormalization is required. The compactification scheme under consideration does not change the local geometry and the divergences are the same as in the dS spacetime without compactification. The corresponding part in the Hadamard function (21) is presented by the $n=0$ term. Separating the topological contribution and taking the coincidence limit the VEV is decomposed as

$$\langle \phi\phi^\dagger \rangle = \langle \phi\phi^\dagger \rangle_{dS} + \langle \phi\phi^\dagger \rangle_c, \quad (23)$$

where the renormalized VEV $\langle \phi\phi^\dagger \rangle_{dS}$ in dS spacetime has been already studied in the literature. By the maximal symmetry of the Bunch-Davies vacuum state, it does not depend on spacetime coordinates. The topological contribution $\langle \phi\phi^\dagger \rangle_c$ is directly obtained from the part in (21) with $n \neq 0$ in the coincidence limit:

$$\langle \phi\phi^\dagger \rangle_c = \frac{4\alpha^{1-D}\eta^{D-2}}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2 + h^2)^{D/2-1}} \int_0^\infty dz z F_\nu(z) \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-2}} f_{D/2-1}(y_n), \quad (24)$$

with the notations

$$y_n = \frac{nz}{\eta} \sqrt{a^2 + h^2}, \quad (25)$$

and

$$F_v(z) = [I_{-v}(z) + I_v(z)] K_v(z). \quad (26)$$

The VEV (24) is an even function of the phase $\tilde{\alpha}_p$. This corresponds to the periodicity with respect to the magnetic flux enclosed by the compact dimension, with the period equal to the flux quantum. In addition, the mean field squared $\langle \varphi^2 \rangle_c$ is invariant under the change $(a, h, \alpha_p) \rightarrow (h, a, -\alpha_p)$. This is a manifestation of the duality mentioned above.

For a charged scalar field the operator of the current density is given by

$$j_l = ie[\varphi^\dagger D_l \varphi - (D_l \varphi)^\dagger \varphi]. \quad (27)$$

The corresponding VEV can be obtained in two different ways. The first one corresponds to the limiting transition (in the gauge where $A_i = 0$)

$$j_l = \frac{i}{2} e \lim_{x' \rightarrow x} (\partial_l - \partial'_l) G(x, x'), \quad (28)$$

by using the Hadamard function (21). Note that the limit in the right-hand side of (28) with the dS Hadamard function vanishes and the renormalization for the current density is not required. In the second way, the vacuum current density is obtained from the corresponding result for quasiperiodic condition, given in [30], by the coordinate transformation (14). For the nonzero components we get

$$\langle j^D \rangle = \frac{8e\alpha^{-D-1}a\eta^D}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2}} \int_0^\infty dz z F_v(z) \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-1}} f_{D/2}(y_n), \quad (29)$$

and $\langle j^{D-1} \rangle = -h \langle j^D \rangle / a$. Here, y_n is defined by (25). The physical components of the current density, denoted here by $\langle j_p^l \rangle$, are connected to the contravariant components by the relation $\langle j_{(p)}^l \rangle = (\alpha/\eta) \langle j^l \rangle$. The components $\langle j^D \rangle$ and $\langle j^{D-1} \rangle$ are odd functions of the phase $\tilde{\alpha}_p$. In particular, the current density vanishes for half-integer values of the parameter $\tilde{\alpha}_p$. In agreement with the duality mentioned at the end of the previous section, the current densities are invariant under the change $(a, h, \alpha_p) \rightarrow (h, a, -\alpha_p)$ with the change of the roles of the coordinates $(x^{D-1}, x^D) \rightarrow (x^D, x^{D-1})$.

3.2. Vacuum energy-momentum tensor. Finally, we turn to the VEV of the energy-momentum tensor. In the gauge with $A_i = 0$ it is obtained from the Hadamard function (21) with the help of the formula (again, in the gauge with zero gauge potential)

$$\langle T_{ik} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \partial_i \partial'_k G(x, x') + \left[\left(\xi - \frac{1}{4} \right) g_{ik} \nabla_l \nabla^l - \xi \nabla_i \nabla_k - \xi R_{ik} \right] \langle \varphi^2 \rangle, \quad (30)$$

where $R_{ik} = Dg_{ik}/\alpha^2$ is the Ricci tensor for the dS spacetime. Alternatively, the VEV is derived by the coordinate transformation from the results in the coordinate system $\bar{x}^i$ with standard periodicity condition. The corresponding formulas in the special case $\tilde{\alpha}_p = 0$ are obtained from the results of [51]. Generalizing for $\tilde{\alpha}_p \neq 0$ and using the transformation rules (16) and (17) one finds

$$\langle T_i^k \rangle = \langle T_i^k \rangle_{dS} + \langle T_i^k \rangle_c, \quad (31)$$

where $\langle T_i^k \rangle_{dS} = \text{const} \delta_i^k$ is the corresponding VEV in the dS spacetime without compactification. The topological contribution for the vacuum energy density reads

$$\langle T_0^0 \rangle_c = \frac{2\alpha^{-1-D}\eta^{D-2}}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-2}} \int_0^{\infty} dz z F^{(0)}(z) f_{D/2-1}(y_n), \quad (32)$$

with the notation

$$F^{(0)}(z) = \frac{1}{2} z [z F'_v(z)]' + D \left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) z F'_v(z) + 2(m^2 \alpha^2 - z^2) F_v(z), \quad (33)$$

where the prime stands for the derivative with respect to z . For the vacuum stresses along the directions x^i , with $i = 1, 2, \dots, D-2$, one gets (no summation over i)

$$\begin{aligned} \langle T_i^i \rangle_c &= \frac{2\alpha^{-1-D}\eta^{D-2}}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2-1}} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-2}} \int_0^{\infty} dz z \left[F(z) f_{D/2-1}(y_n) - \frac{2\eta^2 F_v(z)}{n^2(a^2+h^2)} f_{D/2}(y_n) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

where

$$F(z) = \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) z [z F'_v(z)]' + \left[2(D+1)\xi - \frac{D}{2} \right] z F'_v(z). \quad (35)$$

Now we turn to the components of the topological part in the vacuum energy-momentum tensor with one or two indices in the subspace (x^{D-1}, x^D) . The off-diagonal components $\langle T_D^i \rangle_c$, with $i = 1, 2, \dots, D-2$, vanish: $\langle T_D^i \rangle_c = 0$. For the diagonal components in the subspace (x^{D-1}, x^D) we find

$$\begin{aligned} \langle T_{D-1}^{D-1} \rangle_c &= \frac{2\alpha^{-1-D}\eta^{D-2}}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-2}} \int_0^{\infty} dz z \left\{ F(z) f_{D/2-1}(y_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\eta^2 F_v(z)}{n^2(a^2+h^2)} \left[\left(1 - \frac{Dh^2}{a^2+h^2} \right) f_{D/2}(y_n) - h^2 \frac{y_n^2 f_{D/2-1}(y_n)}{a^2+h^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

and

$$\begin{aligned} \langle T_D^D \rangle_c &= \frac{2\alpha^{-1-D}\eta^{D-2}}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-2}} \int_0^{\infty} dz z \{F(z)f_{D/2-1}(y_n) \\ &\quad - \frac{2\eta^2 F_v(z)}{n^2(a^2+h^2)} \left[\left(1 - \frac{Da^2}{a^2+h^2}\right) f_{D/2}(y_n) - a^2 y_n^2 \frac{f_{D/2-1}(y_n)}{a^2+h^2} \right] \}, \end{aligned} \quad (37)$$

with y_n from (25). In addition to the diagonal components, the helical periodicity condition induces a nonzero off-diagonal component $\langle T_D^{D-1} \rangle_c$. It is obtained from the diagonal components in the coordinate system $\bar{x}^i$ by the transformation given by (17):

$$\langle T_D^{D-1} \rangle_c = \frac{-4\alpha^{-1-D}\eta^D ah}{(2\pi)^{D/2+1}(a^2+h^2)^{D/2+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^D} \int_0^{\infty} dz z F_v(z) [y_n^2 f_{D/2-1}(y_n) + D f_{D/2}(y_n)]. \quad (38)$$

All the components of the vacuum energy-momentum tensor are even functions of $\tilde{\alpha}_p$. Note that the parameter v defined by (22) can be either nonnegative real number or purely imaginary. The integral representations given above are valid in the range $\text{Re} v < 1$. This restriction follows from the condition of the convergence of the integrals over z in the lower limit. Note that off-diagonal components of the vacuum energy-momentum tensor may arise also in models with quasiperiodic conditions (see [54]).

It can be explicitly checked that the topological part of the vacuum energy-momentum tensor obeys the trace relation

$$\langle T_i^i \rangle_c = [D(\xi - \xi_D) \nabla_i \nabla^i + m^2] \langle \phi^2 \rangle_c, \quad (39)$$

where $\xi_D = (D-1)/4D$ is the value of the curvature coupling parameter for a conformally coupled scalar field. For a conformally coupled massless field the topological contribution $\langle T_i^k \rangle_c$ is traceless. The anomaly in the trace is contained in the pure dS part $\langle T_D^i \rangle_{dS}$.

Note that the parameters a and h are the coordinate lengths. The corresponding physical (proper) lengths measured by an observer at rest in the coordinates x^i are given by $a_{(p)} = \alpha a / \eta$ and $h_{(p)} = \alpha h / \eta$. The VEVs $\langle \phi \phi^\dagger \rangle_c$, $\langle j_{(p)}^l \rangle$, and $\langle T_i^k \rangle_c$ depend on a , h , and η in the form of the ratios a/η and h/η . The latter are the proper lengths measured in units of the curvature radius α .

3.3. Conformally coupled massless field and the asymptotics. For a conformally coupled massless field one has $v=1/2$ and $F_v(z)=1/z$. The integrals are evaluated by using the formulae [55]

$$\int_0^\infty dy f_{D/2}(y) = \int_0^\infty dy y^2 f_{D/2-1}(y) = (D-1) \int_0^\infty dy f_{D/2-1}(y) = 2^{D/2-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right). \quad (40)$$

For the VEVs of the field squared and physical component of the current density one gets

$$\begin{aligned} \langle \phi \phi^\dagger \rangle_c &= \frac{\Gamma((D-1)/2)(\eta/\alpha)^{D-1}}{2\pi^{(D+1)/2}(a^2+h^2)^{(D-1)/2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D-1}}, \\ \langle j_{(p)}^D \rangle_c &= \frac{2e\Gamma((D+1)/2)(\eta/\alpha)^D a}{\pi^{(D+1)/2}(a^2+h^2)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\tilde{\alpha}_p)}{n^D}, \quad \langle j_{(p)}^{D-1} \rangle_c = -\frac{h}{a} \langle j_{(p)}^D \rangle_c. \end{aligned} \quad (41)$$

The expressions for the energy density and stresses along the directions x^i , $i = 1, 2, \dots, D-2$, are simplified to (no summation over $i = 0, 1, \dots, D-2$)

$$\langle T_i^i \rangle_c = -\frac{\Gamma((D+1)/2)(\eta/\alpha)^{D+1}}{\pi^{(D+1)/2}(a^2+h^2)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\tilde{\alpha}_p)}{n^{D+1}}. \quad (42)$$

For the diagonal components of the energy-momentum tensor in the subspace (x^{D-1}, x^D) we find

$$\langle T_{D-1}^{D-1} \rangle_c = \left[1 - \frac{(D+1)h^2}{a^2+h^2} \right] \langle T_0^0 \rangle_c, \quad \langle T_D^D \rangle_c = \left[1 - \frac{(D+1)a^2}{a^2+h^2} \right] \langle T_0^0 \rangle_c. \quad (43)$$

Finally, the expression for the off-diagonal component is reduced to

$$\langle T_D^{D-1} \rangle_c = \frac{(D+1)ah}{a^2+h^2} \langle T_0^0 \rangle_c. \quad (44)$$

For a conformally coupled massless field the problem on the dS bulk is conformally related to the corresponding problem in the locally Minkowski spacetime, with the same parameters a , h , α_p , and the VEVs are connected by the standard formulae

$$\langle \phi \phi^\dagger \rangle_c = \frac{\langle \phi \phi^\dagger \rangle_c^{(M)}}{(\alpha/\eta)^{D-1}}, \quad \langle j_{(p)}^D \rangle_c = \frac{\langle j_{(p)}^D \rangle_c^{(M)}}{(\alpha/\eta)^D}, \quad \langle T_i^i \rangle_c = \frac{\langle T_i^i \rangle_c^{(M)}}{(\alpha/\eta)^{D+1}}. \quad (45)$$

In the special cases $\tilde{\alpha}_p = 0$ and $\tilde{\alpha}_p = \pi$ the current density vanishes and the series in the expressions for the field squared and energy-momentum tensor are expressed in terms of the Riemann zeta function. Depending on the values of the parameter $\tilde{\alpha}_p$, the VEVs can be either positive or negative. In particular, the topological contribution to the energy density is negative for an untwisted field ($\tilde{\alpha}_p = 0$) and positive for twisted field ($\tilde{\alpha}_p = \pi$). For some intermediate value of $\tilde{\alpha}_p$ the VEVs become zero. The vacuum pressure along the direction x^i , $i = 0, 1, \dots, D-2$, is given by $-\langle T_i^i \rangle_c$ and it is equal to the energy density with an opposite sign.

This corresponds to the equation of state of the cosmological constant type in the subspace $(x^0, x^1, \dots, x^{D-2})$. That is not the case for general conformal coupling and for massive fields.

At the early stages of the cosmological expansion one has $\tau \rightarrow -\infty$ and η is large. In order to find the asymptotics of the VEVs in that limit it is convenient to introduce a new integration variable $u = z/\eta$ in the expressions for the VEVs. The function $F_v(z)$ becomes $F_v(u\eta)$ and its argument is large. By using the asymptotic of the modified Bessel functions for large argument it can be shown that $F_v(z) \approx 1/z$ for $z \gg 1$. This asymptotic coincides with the exact expression for a conformally coupled massless scalar field. Replacing $F_v(z) = 1/z$ in the expressions for the field squared, current density, and off-diagonal component $\langle T_D^{D-1} \rangle_c$, we see that the leading terms in the expansion over $1/\eta$ coincide with the corresponding expressions for a conformally coupled massless field, given by (41) and (44). In the expression (32) for the energy density, in the leading order, one has $F^{(0)}(z) \approx -2z$ and the corresponding asymptotic, again, coincides with the result (42) for $i=0$. In the components (36) and (17) we have $F(z) \approx -2D(\xi - \xi_D)/z$ and the terms involving the function $F_v(z) \approx 1/z$ contain additional factor η^2 . Hence, the latter term dominates in the asymptotic and the leading terms coincide with (43). We conclude that in the limit $\tau \rightarrow -\infty$, corresponding to $t \rightarrow -\infty$, the leading asymptotics of the topological contributions of the VEVs coincide with the corresponding result for a conformally coupled massless field and the effects of gravity on those contributions are weak. In the limit under consideration the dominant contribution to the total VEV (31) comes from the topological part.

The late stages of the expansion correspond to $t \rightarrow +\infty$ and $\eta \rightarrow 0$. Again, introducing a new integration variable $u = z/\eta$, we expand the function $F_v(u\eta)$ for small values of the argument. For $v > 0$ one has $F_v(u\eta) \propto (u\eta)^{-2v}$ and the topological terms in the VEVs tend to zero monotonically, like η^{D-2v} for the VEVs of the field squared and energy-momentum tensor and like η^{D+2-2v} for the current density. For purely imaginary v , $v = i|v|$, and for small η we have $F_v(u\eta) \approx \text{Re}[(2/u\eta)^{2v} \Gamma(v)/\Gamma(1-v)]$. In this case the topological VEVs tend to zero with oscillating behavior. The amplitudes of the oscillations decay as η^D for the field squared and energy-momentum tensor and as η^{D+2} in the case of the current density.

4. Conclusion. We have studied the topological Casimir effect in models with compact dimension along which the field operator obeys helical periodicity condition given by (3). A general background is considered with the metric tensor invariant under the rotations in the plane (x^{D-1}, x^D) . In addition, the presence of a gauge field is assumed with constant covariant components A_{D-1} and A_D . We can pass to the new gauge with zero values of those components. In that gauge

the field operator obeys the helical condition (5) with the new phase (6) depending on the components A_{D-1} and A_D . The corresponding contribution can be interpreted in terms of the magnetic flux enclosed by the compact dimension. We have shown that by the coordinate transformation (7) the problem with helical periodicity condition is reduced to the problem with standard quasiperiodicity condition (13) with the same phase. The length of the corresponding compact dimension is expressed as $\sqrt{a^2 + h^2}$.

The procedure we have described allows to find the VEVs of physical observables in the topological Casimir effect for helical periodicity conditions by using the corresponding results for quasiperiodic conditions. That is done by the standard transformation of the tensors under the coordinate transformation (9). As important local characteristics of the vacuum state we have considered the VEVs of the current density and energy-momentum tensor. Their transformation laws are given by (14), (16), and (17). As an example of general prescription the locally dS spacetime is considered with a single compact dimension x^D and helicity shift along the direction x^{D-1} . The geometry is described by the line element (19). The corresponding problem with general number of toroidally compactified dimensions has been considered in [30,51]. In [51] the VEVs of the field squared and energy-momentum tensor were studied for periodic and antiperiodic conditions. The VEV of the current density in the case of quasiperiodic conditions with general phases is considered in [30].

In the problem at hand the properties of the vacuum state are encoded in two-point functions describing the correlations of the vacuum fluctuations in different spacetime points. As a two-point function we have taken the Hadamard function. In the problem with helical condition in locally dS spacetime that function is expressed as (21). As local characteristics of the scalar vacuum we have considered the expectation values of the field squared, current density and energy-momentum tensor. In the corresponding expressions the parts induced by the compactification are explicitly separated. The field squared and energy-momentum tensor are even functions of the phase $\tilde{\alpha}_p$ in the periodicity condition, whereas the current density is an odd function. An important difference of the helical compactification is the presence of nonzero off-diagonal component $\langle T_D^{D-1} \rangle_c$ of the energy-momentum tensor. At the early stages of the dS expansion the VEVs are dominated by the topological contribution and at those stages the influence of gravity on the local characteristics is weak. The corresponding asymptotics are conformally related to the VEVs on the locally Minkowski bulk. At late stages, depending on the parameter ν , the topological parts in the VEVs decay monotonically or oscillatory and the pure dS contributions dominate.

Acknowledgments. The work was supported by the grant No. 21AG-1C047

of the Higher Education and Science Committee of the Ministry of Education, Science, Culture and Sport RA.

¹ Institute of Physics, Yerevan State University,
Armenia, e-mail: saharian@ysu.am

² Institute of Applied Problems of Physics NAS RA, Yerevan, Armenia

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ КАЗИМИРА В МОДЕЛЯХ СО СПИРАЛЬНЫМИ КОМПАКТНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Р.М.АВАКЯН^{1,2}, А.А.СААРЯН^{1,2}, Д.А.СИМОНЯН¹, Г.Г.АРУТЮНЯН¹

Исследовано влияние спиральной компактификации пространственной размерности на локальные свойства вакуумного состояния для заряженного скалярного поля с общим параметром связи с кривизной. Рассматривается общая фоновая геометрия с вращательной симметрией в подпространстве с координатами, появляющимися в условии спиральной периодичности. Показано, что с преобразованием координат задача сводится к задаче со стандартным условием квазипериодичности в той же локальной геометрии и с эффективным радиусом компактификации, определяемым длиной компактной размерности и параметром спиральности. В качестве применения общей процедуры рассмотрено локально де Ситтеровское пространство-время со спиральной компактной размерностью. Используя функцию Адамара для вакуумного состояния Банча-Дэвиса, изучаются вакуумные средние квадрата поля, плотности тока и тензора энергии-импульса. Явно выделены топологические вклады, и описаны их асимптотики на ранних и поздних стадиях космологического расширения. Важным отличием по сравнению с задачей с квазипериодическими условиями является появление ненулевой недиагональной компоненты тензора энергии-импульса и компоненты плотности тока вдоль некомпактного измерения.

Ключевые слова: *топологический Казимир эффект: поляризация вакуума: условие спиральной периодичности: время-пространство де Ситтера*

REFERENCES

1. *V.M.Mostepanenko, N.N.Trunov*, The Casimir Effect and Its Applications (Clarendon, Oxford, 1997).
2. *E.Elizalde, S.D.Odintsov, A.Romeo et al.*, Zeta Regularization Techniques with Applications (World Scientific, Singapore, 1994).
3. *K.A.Milton*, The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy (World Scientific, Singapore, 2002).
4. *A.A.Bytsenko, G.Cognola, E.Elizalde et al.*, Analytic Aspects of Quantum Fields (World Scientific, Singapore, 2003).
5. *M.Bordag, G.L.Klimchitskaya, U.Mohideen et al.*, Advances in the Casimir Effect (Oxford University Press, Oxford, 2009).
6. Lecture Notes in Physics: Casimir Physics, edited by D.Dalvit, P.Milonni, D.Roberts, F. da Rosa (Springer, Berlin, 2011), Vol. 834.
7. *F.C.Khanna, A.P.C.Malbouisson, J.M.C.Malbouisson et al.*, Phys. Rep., **539**, 135, 2014.
8. *M.J.Duff, B.E.W.Nilsson, C.N.Pope*, Phys. Rep., **130**, 1, 1986.
9. *R.Camporesi*, Phys. Rep., **196**, 1, 1990.
10. *A.A.Bytsenko, G.Cognola, L.Vanzo et al.*, Phys. Rep., **266**, 1, 1996.
11. *L.H.Ford, T.Yoshimura*, Phys. Lett. A, **70**, 89, 1979.
12. *J.Scherk, J.H.Schwarz*, Nucl. Phys. B, **153**, 61, 1979.
13. *L.H.Ford*, Phys. Rev. D, **22**, 3003, 1980.
14. *D.J.Toms*, Phys. Rev. D, **21**, 928, 1980.
15. *D.J.Toms*, Phys. Rev. D, **21**, 2805, 1980.
16. *P.Candelas, S.Weinberg*, Nucl. Phys. B, **237**, 397, 1984.
17. *S.D.Odintsov*, Sov. J. Nucl. Phys., **48**, 1148, 1988.
18. *Y.Hosotani*, Annals Phys., **190**, 233, 1989.
19. *I.L.Buchbinder, S.D.Odintsov*, Int. J. Mod. Phys. A, **04**, 4337, 1989.
20. *I.L.Buchbinder, S.D.Odintsov*, Fortschr. Phys., **37**, 225, 1989.
21. *M.Quiros*, arXiv:hep-ph/0302189.
22. *A.Linde*, J. Cosmol. Astropart. Phys., **10**, 004, 2004.
23. *C.J.Cao, M. van Caspel, A.R.Zhitnitsky*, Phys. Rev. D, **87**, 105012, 2013.
24. *L.M.Abreu, C.A.Linhares, A.P.C.Malbouisson et al.*, Phys. Rev. D, **88**, 107701, 2013.
25. *C.J.Isham*, Proc. R. Soc. Lond. A, **362**, 383, 1978; Proc. R. Soc. Lond. A, **364**, 591, 1978.
26. *R.Banach, J.S.Dowker*, J. Phys. A, **12**, 2527, 1979; J. Phys. A, **12**, 2545, 1979.
27. *S.Bellucci, A.A.Saharian, V.M.Bardeghyan*, Phys. Rev. D, **82**, 065011, 2010.
28. *S.Bellucci, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **87**, 025005, 2013.
29. *E.R.Bezerra de Mello, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **87**, 045015, 2013.
30. *S.Bellucci, A.A.Saharian, H.A.Nersisyan*, Phys. Rev. D, **88**, 2013.
31. *S.Bellucci, A.A.Saharian, N.A.Saharyan*, Eur. Phys. J. C, **75**, 378, 2015.

32. *E.R.Bezerra de Mello, A.A.Saharian, V.Vardanyan*, Phys. Lett. B, **741**, 155, 2015.
33. *S.Bellucci, A.A.Saharian, V.Vardanyan*, Phys. Rev. D, **96**, 065025, 2017.
34. *S.Bellucci, A.A.Saharian, V.Vardanyan*, JHEP, **11**, 092, 2015.
35. *S.Bellucci, A.A.Saharian, V.Vardanyan*, Phys. Rev. D, **93**, 084011, 2016.
36. *S.Bellucci, A.A.Saharian, D.H.Simonyan et al.*, Phys. Rev. D, **98**, 085020, 2018.
37. *S.Bellucci, A.A.Saharian, H.G.Sargsyan et al.*, Phys. Rev. D, **101**, 045020, 2020.
38. *A.A.Saharian*, Symmetry, **16**, 92, 2024.
39. *K.R.Dienes*, Phys. Rev. Lett., **88**, 011601, 2001.
40. *K.R.Dienes, A.Mafi*, Phys. Rev. Lett., **88**, 111602, 2002.
41. *C.-J.Feng, X.-Z.Li*, Phys. Lett. B, **691**, 167, 2010.
42. *X.-H.Zhai, X.-Z.Li, C.-J.Feng*, Mod. Phys. Lett. A, **26**, 669, 2011.
43. *V.K.Oikonomou*, Commun. Theor. Phys., **55**, 101, 2011.
44. *X.-H.Zhai, X.-Z.Li, C.-J.Feng*, Mod. Phys. Lett. A, **26**, 1953, 2011.
45. *X.-H.Zhai, X.-Z.Li, C.-J.Feng*, Eur. Phys. J. C, **71**, 1654, 2011.
46. *G.Aleixo, H.F.Santana Mota*, Phys. Rev. D, **104**, 045012, 2021.
47. *A.J.D.Farias Junior, H.F.Santana Mota*, Int. J. Mod. Phys. D, **31**, 2250126, 2022.
48. *A.A.Saharian, D.H.Simonyan, H.H.Mikayelyan et al.*, J. Contemp. Phys., **58**, 341, 2023.
49. *S.Bellucci, E.R.Bezerra de Mello, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **89**, 085002, 2014.
50. *A.A.Saharian, M.R.Setare*, Phys. Lett. B, **659**, 367, 2008.
51. *S.Bellucci, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **77**, 124010, 2008.
52. *A.A.Saharian*, Int. J. Mod. Phys. A, **24**, 1813, 2009.
53. Handbook of Mathematical Functions, edited by M.Abramowitz and I.A.Stegun (Dover, New York, 1972).
54. *A.A.Saharian, R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan et al.*, Astrophysics, **67**, 231, 2024.
55. *A.P.Prudnikov, Y.A.Brychkov, O.I.Marichev*, Integrals and Series (Gordon and Breach, New York, NY, USA, 1986), Volume 2.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-531

НАЛИЧИЕ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Г.А.АРУТЮНЯН

Поступила 7 октября 2024

Рассматривается вопрос изменения полной энергии барионных объектов и их систем при наличии темной энергии (ТЭ), носитель которого, по определению, взаимодействует со всеми барионными объектами. Подчеркивается факт, что темная энергия была открыта благодаря результату такого взаимодействия, за счет чего ускоряется расширение Вселенной. Ввиду того, что темная энергия (носитель темной энергии-НТЭ) имеет однородное распределение, обсуждаются физические следствия взаимодействия НТЭ с барионной материей на всех иерархических уровнях барионных структур. На основе второго закона термодинамики делается заключение, что под влиянием ТЭ постепенно увеличивается энергия всех барионных систем и уменьшается их стабильность, а значение вириала становится положительной и продолжает расти для любых структур, считавшихся до этого стабильными. Аналогичный анализ для атомных ядер приводит к выводу, что со временем уменьшается энергия ядерной связи, снижается стабильность ядер и увеличивается масса ядра. Этот эффект позволяет по-новому рассмотреть гипотезу Амбарцумяна о существовании сгустков сверхплотной материи в ядрах звезд и галактик, и предложить ее новую интерпретацию.

Ключевые слова: *темная энергия; взаимодействие; барионная материя; второй закон термодинамики; передача энергии; теорема вириала; увеличение энергии; увеличение массы*

1. Введение. В космологии сегодня фигурируют два понятия, *темная материя* и *темная энергия*, которые, по современным представлениям, содержат 95% всей массы/энергии Вселенной. Сходство названий порой приводит к путанице даже у специалистов, которые, являясь астрономами или физиками, тем не менее, никогда не занимались данными вопросами профессионально.

Кельвин был одним из первых, кто пытался оценить количество темных тел в нашей галактике. Для этой цели он использовал скорости вращения звезд вокруг ядра галактики. Эти скорости позволили ему оценить массу галактики, исходя из условия, что *значение вириала для галактики равна нулю*. Он оценил разницу между полученной массой и массой звезд, которые видны благодаря их излучению, и пришел к выводу, что *"многие из звезд, возможно, их подавляющее большинство, могут быть темными телами"* [1].

В 1906г. к его впечатляющим результатам обратился Пуанкаре, но он не был до конца согласен с выводами Кельвина. По этому поводу он писал, что *"поскольку его (Келвина) число сопоставимо с тем, что дает телескоп,*

то темной материи нет, или, по крайней мере, ее не так много, как светящейся материи" [2]. В своей работе именно он впервые явно использовал термин "темная материя" или "*matière obscure*" в оригинальном французском тексте. Однако, как Кельвин, так и Анри Пуанкаре, говоря о темных телах или темной материи, имели в виду обычное вещество, которое просто не обладает заметным электромагнитным излучением.

В настоящее время введение темной материи в науку обычно приписывается Цвикки [3] (см., также [4]), который позже пришел к аналогичному заключению, когда исследовал известное скопление галактик в созвездии Волосы Вероники и обратил внимание на чрезмерно большое значение дисперсии скоростей галактик. Было очевидно, что при такой дисперсии скоростей суммарная масса галактик недостаточна для обеспечения равновесного состояния скопления. Именно это стало причиной для возрождения гипотезы о существовании темной материи. В первой работе автор пишет: *"Таким образом, чтобы получить средний эффект Доплера 1000 км/с или более, как это наблюдалось, средняя плотность в системе Кома (Coma) должна быть как минимум в 400 раз выше, чем та, которая была получена на основе наблюдений светящейся материи. Если бы это было подтверждено, последовал бы неожиданный результат, что плотность темной материи гораздо больше, чем плотность светящейся материи"*.

Правда, полученная Цвикки оценка была завышена из-за принятого в то время значения постоянной Хаббла, но именно с того времени начинается история повсеместного применения этого, можно сказать свободного параметра, для подгонки наблюдательных данных в рамки господствующей гипотезы. С того же времени продолжается также безрезультатный поиск частиц темного вещества.

Напомним еще раз, что наблюдения показывают лишь то, что галактики данного скопления обладают очень большой дисперсией скоростей. В дальнейшем оказалось, что такая же картина наблюдается и у других скоплений. Если бы Цвикки не ввел в использование гипотетическую темную материю, вывод мог быть однозначным, а именно, что значение вириала для этих систем было бы положительным. Но при этом было бы неизбежным заключение о том, что все эти скопления расширяются. Поскольку расширение Вселенной тогда уже было открыто Хабблом [5], такой вывод, кстати, был бы более естественным и означал бы повторение данной закономерности для космических структур следующего иерархического уровня. Однако, к сожалению, убежденность в том, что все космические объекты и их системы образовались путем сжатия и являются гравитационно связанными равновесными системами, была сильнее очевидных наблюдательных фактов, свидетельствующих о расширении этих систем. Поэтому приходится констатировать, что *понятие*

темной материи было введено исключительно под давлением господствующих космогонических представлений.

Абсолютно иначе обстоит дело с темной энергией и ее открытием. Когда, так называемый, Большой взрыв стал общепринятой интерпретацией наблюдаемого расширения Вселенной, важнейшей проблемой стал поиск космологической модели, соответствующей наблюдаемой реальности. А для такого поиска ключевым моментом было определение темпа торможения скорости расширения. Поэтому, естественно, эта задача достаточно долгое время считалась одной из наиболее важных проблем астрофизики. В работе Аллана Сэндиджа [6] она указывается в числе 21-й наиболее важных задач астрофизики XXI в.

Открытие ускорения расширения Вселенной и, соответственно, введение понятия темной энергии в арсенал научных инструментов, произошли всего через год [7,8] после упомянутого доклада Сэндиджа [6]. Таким образом, доминирующая теория в рассматриваемом случае предсказывала совершенно другое поведение разлетающихся галактик, а наблюдательные данные просто опровергли прогноз теории. Исходя из этого можно заключить, что *если темная материя является следствием принятой a priori гипотезы, то темная энергия появилась как неизбежный результат интерпретации наблюдений.* В работе Хэтерера и Тэрнера [9] термин темная энергия был введен почти сразу после открытия ускоряющегося расширения Вселенной.

2. Темная энергия и барионная материя. Рассуждая о физических свойствах темной энергии, а точнее, ее носителе, с самого начала следует выделить одно очень важное обстоятельство. Имеется в виду открытие темной энергии и способ выявления этой энергии. Этот важнейший факт часто остается в тени, не упоминается в рассуждениях и не получает того значения, которого заслуживает. Речь идет о том, что она стала предметом исследований и ее воспринимали в качестве физической реальности благодаря открытию ускорения расширения Вселенной. Действительно, ускорение расширения объясняется тем, что носитель темной энергии (о которой до этого ничего не было известно) передает часть собственной энергии галактикам, которые состоят из барионной материи. То есть, с самого начала было безоговорочно принято, что *неизвестный носитель темной энергии взаимодействует с барионными объектами.*

Второе замечание касается пространственного распределения (носителя) темной энергии. Хотя пока нет приборов, которые могли бы напрямую регистрировать темную энергию, анализ общей картины явления позволяет сделать вывод, что она равномерно и с очень малой плотностью заполняет все пространство на всех масштабах. Образно говоря, она считается внутренним

свойством пространства и имеет постоянную плотность энергии, независимо от рассматриваемого объема. Таким образом, в отличие от обычной материи ее плотность не уменьшается из-за расширения пространства.

Однако другие обстоятельства не очень вписываются в представление о ее равномерном распределении на всех масштабах. В первую очередь это касается расширения пространства Вселенной. Несмотря на представление о равномерном распределении темной энергии, последняя считается прерогативой только космологических расстояний и масштабов. Не очень понятно и распространенное мнение, что темной энергии изначально не было и она появилась только недавно, через 9 млрд лет после большого взрыва. Это означает, что каким-то образом из ничего (как сама барионная Вселенная) появилась эта энергия, которая сегодня составляет, по крайней мере, 70% всей массы/энергии Вселенной. Более того, как уже было отмечено, с момента появления темной энергии ее плотность с расширением Вселенной не уменьшается.

Понятно, что при интерпретации данных наблюдений часто приходится вводить какие-то свободные параметры. Однако, если для согласования выводов модели с данными наблюдений каждый раз требуется подыскать свободные параметры заново, как это было, например, с геоцентрической моделью мира, то это должно настораживать. В таких случаях лучше еще тщательнее проанализировать предпосылки, которые легли в основу данной теоретической модели. Учитывая вышесказанное, обосновывая свои рассуждения исключительно с помощью данных наблюдений, можно опираться на законы физики, не вызывающие сомнений.

Таким образом, мы исходим из того, что две разные субстанции во Вселенной, одна из которых заключает в себе почти 70% всей массы/энергии Вселенной, а другая - лишь 5%, взаимодействуют. Взаимодействие происходит, естественно, согласно законам физики, из которых в данном случае самым важным является второй закон термодинамики, который определяет направление передачи энергии во время взаимодействия. Еще почти сто лет назад Артур Эддингтон [10] написал об этом законе: *"Если окажется, что ваша теория противоречит второму закону термодинамики, я не могу дать вам никакой надежды"*.

Возвращаясь к современным представлениям о барионной Вселенной, напомним одно любопытное обстоятельство. Вселенная, состоящая из барионных объектов, расширяется с ускорением. Однако все барионные объекты и их системы, согласно общепризнанным теориям их формирования, находятся в равновесном состоянии, для которых значение вириала равняется нулю:

$$2T + U = 0, \quad (1)$$

где T - кинетическая, а U - потенциальная энергия. Подчинение именно этому соотношению заставило Цвикки ввести в научный обиход понятие темной материи для обеспечения равновесного состояния скоплений галактик. Данное соотношение, с другой стороны, означает, что все равновесные системы обладают отрицательной полной энергией.

Темная энергия, наоборот, сугубо положительная. А это означает, что взаимодействующие две субстанции - барионная материя и носитель темной энергии обладают совершенно различными энергиями - отрицательной и положительной. И поэтому в соответствии со вторым законом термодинамики, вследствие любого их взаимодействия *барионная материя должна получить энергию*. Здесь не важно сколько энергии получает за единицу времени данный барионный объект, поскольку энергия кумулятивная и накапливается со временем. Подчеркнем еще раз, что именно результат такой передачи энергии галактикам был причиной ускорения расширения Вселенной и стал основой для открытия темной энергии.

Вышесказанное означает, что любая равновесная система, состоящая из барионной материи, во-первых, взаимодействует с носителем темной энергии, а во-вторых, в результате данного взаимодействия получает некоторое количество дополнительной энергии ΔE за каждый промежуток времени Δt . Это, в свою очередь, нарушает равенство (1) в сторону увеличения значения вириала. Такое изменение, продолжающееся непрерывно, как известно, приводит к расширению системы независимо от размеров последней. Иными словами, *тот же механизм, который ответствен за наблюдаемое расширение Вселенной и ускорение этого расширения, в равной степени действует и на барионные структуры малых масштабов*.

3. *Зависимость меры влияния темной энергии на космический объект от массы последнего*. Принимая на вооружение парадигму взаимодействия носителя темной энергии с барионной материей на всех масштабах, попытаемся здесь, по крайней мере на качественном уровне, анализировать поведение барионных структур, используя для этого лишь известные законы современной физики. Для гравитационно связанных конфигураций, как известно, энергия гравитационной связи пропорциональна квадрату массы и обратно пропорциональна размеру. Для простейшего случая шара с массой M и с радиусом R , в котором плотность имеет только радиальную зависимость, рассматриваемая энергия дается следующим соотношением:

$$E_g = -kG \frac{M^2}{R}. \quad (2)$$

где коэффициент k зависит от распределения плотности.

Как видно из соотношения (2), абсолютное значение гравитационной энергии данного объекта увеличивается с ростом массы и уменьшением радиуса. Из общезначимых соображений можно заключить, что при взаимодействии с носителем темной энергии в процессе обмена энергиями задействовано то количество темной энергии, которое заключено в объеме объекта. С другой стороны, исходя из общепринятого представления об однородном пространственном распределении темной энергии, количество этой энергии в любом пространственном объеме V будет иметь следующий вид:

$$E_{de} = V \rho_{de}, \quad (3)$$

где ρ_{de} - плотность темной энергии.

С точки зрения физики, кажется естественным, что не все объекты одинаково подвержены влиянию темной энергии. Чем больше энергии связи в одном и том же объеме, тем сильнее данный объект сопротивляется этому влиянию. Поэтому для дальнейшего применения рассмотрим величину

$$\eta = \left| \frac{E_g}{E_{de}} \right|, \quad (4)$$

которую назовем мерой устойчивости (МУ) барионных объектов или их систем к изменениям, которые могут быть внесены взаимодействием с носителем темной энергии. Для дальнейшего анализа еще раз отметим, что все барионные структуры существуют как целостные образования только за счет отрицательной полной энергии или, точнее, отсутствия энергии, необходимой для их распада.

Даже самый поверхностный анализ вопроса позволяет прийти к заключению, что чем больше значение отношения (4), тем труднее или медленнее происходят изменения данной барионной структуры. Имея это в виду, можно проанализировать величину МУ, например, для целого семейства объектов, которые отличаются друг от друга массой и размерами. Это позволит нам выявить те объекты и системы, которые больше других подвержены изменениям, и проверить этот вывод с помощью результатов наблюдений.

В простейшем случае однородного шара выражение для МУ получает следующую относительно явную форму:

$$\eta_{sp} \sim \frac{(R \rho_{bm})^2}{\rho_{de}}, \quad (5)$$

где ρ_{bm} - средняя плотность сферического объекта. Учтено, что взаимодействующие барионный объект и носитель темной энергии занимают один и тот же сферический объем с радиусом R . Также, учитывая тот факт, что совре-

менная наука считает распределение темной энергии однородным, мы в (5) можем пренебречь зависимостью от плотности темной энергии. Тогда вместо (5) будем иметь

$$\eta_{sp} \sim (M \rho_{bm}^2)^{2/3} \sim \left(\frac{M}{R^2}\right)^2. \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, величина МУ зависит лишь от физических характеристик барионного объекта. Если в данном семействе объектов масса растет быстрее, чем уменьшается квадрат его плотности, то мера устойчивости больше у массивных объектов и изменения в них вследствие влияния темной энергии происходят медленнее. В таком случае маломассивные объекты эволюционируют быстрее. В противном случае эволюция быстрее происходит у массивных объектов, которые обладают сравнительно низкой плотностью. Эволюцией в данном случае мы называем все изменения, которые происходят под влиянием темной энергии.

Если рассматривать расширение пространства как увеличение пространственного масштаба, то можно сказать, что объекты с большим значением МУ характеризуются замороженным в материю масштабным фактором. С одной стороны, взаимодействие с носителем темной энергии непрерывно передает некоторые порции энергии барионному веществу, тем самым увеличивая значение вириала, что, в свою очередь, означает увеличение размеров рассматриваемой барионной конфигурации. А, с другой стороны, ответственные за сохранение данной конфигурации гравитационные, ядерные и молекулярные силы сдерживают изменение масштабного фактора в том объеме пространства, где этот сгусток материи находится. Именно в данном объеме эволюция барионного вещества происходит тем медленнее, чем больше введенный фактор МУ.

Для выявления наблюдательных закономерностей, которые поддерживают ту или иную реализацию процесса, предсказуемую соотношением (6), следует детально исследовать соответствующие наблюдательные данные. На таких наблюдательных данных мы остановимся в следующих разделах. Несмотря на то, что обсуждаемый результат получен для шара, тем не менее он остается верным и для других геометрических форм рассматриваемых конфигураций.

В первом приближении этот подход можно применять при рассмотрении МУ вещества в различных глубинах барионного объекта с градиентом плотности в направлении к центру. Таким образом можно рассмотреть влияние взаимодействия темной энергии на слои массивного объекта, которые расположены на разных глубинах. Рассмотрим вышесказанное на примере общепринятой модели Солнца, где 94% полной массы находится внутри

сферы с радиусом $R = 0.5 R_{\odot}$. Отношение МУ внутренней сферы и полного Солнца составляет

$$\delta = \left(\frac{0.94M}{0.25R^2} \right)^2 \left(\frac{R^2}{M} \right)^2 \approx 14.1. \quad (7)$$

Полученная оценка означает, что мера устойчивости центральной сферической части с полурадиусом Солнца в 14 раз больше этого параметра, рассчитанного для Солнца в целом. Аналогичная оценка для центральной сферы с радиусом $R = 0.1 R_{\odot}$, дает $\delta \approx 70$. Таким образом, на примере Солнца можно утверждать, что в массивных объектах барионная материя тем труднее поддается влиянию темной энергии, чем ближе она находится к центру этого объекта, и чем больше в данной области ее плотность. А это, в свою очередь, означает, что *барионная материя, находящаяся в ядерных частях массивных объектов, таких как звезды или ядра галактик, дольше сохраняет свои первоначальные физические свойства.*

4. Влияние темной энергии на размеры барионных объектов и их систем. В предыдущем разделе был сделан вывод, что передача темной энергии системе объектов, которая первоначально считалась равновесной, приводит к ее расширению, что указывает на возникновение радиальных скоростей удаления объектов друг от друга. Такой вывод, естественно, верен статистически и означает, что среднее расстояние между объектами увеличивается.

Этот эффект легко можно выявить, используя хорошо известное выражение полной энергии для системы двух тел. В качестве такой системы можно рассматривать, например, систему, состоящую из звезды и планеты или планеты и спутника. Энергия такой системы задается выражением

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{R} = T + U < 0, \quad (8)$$

где введены общепринятые обозначения. При этом считается, что для реально существующих систем, как, например, Земля-Луна, Солнце-Земля, Солнце-планета, планета-спутник, верно соотношение:

$$W = 2T + U = 0, \quad (9)$$

что продиктовано априорным утверждением о равновесии указанных систем. А это, как было отмечено, является прямым следствием гипотезы Канта-Лапласа о формировании космических объектов и их систем.

Вернемся к нашему заключению о том, что вследствие взаимодействия с носителем темной энергии барионные конфигурации за промежуток времени Δt получают некоторое количество энергии ΔE . Тогда за этот промежуток времени энергия данной системы становится

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{R} + \Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} - G \frac{M_1 m_1}{R_1} > E, \quad (10)$$

где величины, снабженные индексом, относятся к концу рассматриваемого промежутка времени. Нетрудно видеть, что $E_1 > E$, если $v_1 > v$ и/или $M_1 < M$ и/или $R_1 > R$. Поскольку под влиянием темной энергии значение вириала становится положительным и, следовательно, система расширяется, то выполняется условие $R_1 > R$. Тогда никак не может выполняться неравенство $v_1 > v$, так как это противоречит закону сохранения углового момента. Как показывают исследования (см., например, [11,12], а также ниже), под воздействием темной энергии космические объекты, скорее всего, увеличивают массу.

Теперь обратимся к известным наблюдательным данным о расширении реальных систем. Здесь рассмотрим достаточно хорошо изученные системы, о которых имеются достоверные данные. Первая и наиболее подробно изученная система - пара Земля-Луна [13,14], о расширении которой имеются наиболее достоверные данные. К этой паре следует добавить также системы Солнце-Земля [15] и Сатурн-Титан [16], о расширении которых данные получены уже в новом столетии. Традиционная наука объясняет все эти наблюдательные данные одним физическим механизмом, а именно, приливными эффектами.

Луна, как известно, удаляется от Земли со скоростью 3.82 ± 0.07 см в год, что измерено с помощью лазерной локации [13]. Система Земля-Луна уникальна в том смысле, что все величины, имеющие отношение к процессу удаления Луны, измерены с достаточно высокой точностью. Поскольку традиционно это явление объясняется приливными эффектами, в качестве наиболее важного фактического данного здесь фигурирует темп замедления суточного вращения Земли, так как согласно данной интерпретации именно потерянное планетой количество углового момента передается Луне и обеспечивает ее удаление. Эта величина определяется на основе анализа исторических хронологий зарегистрированных солнечных и лунных затмений за последние два тысячелетия. Имеющиеся данные показывают, что замедление суточного вращения Земли может обеспечить лишь 3/4 требуемого углового момента [17,18].

Вопрос быстрого удаления Луны нами был рассмотрен еще до открытия темной энергии. Тогда нами было показано, что если учесть хаббловское расширение в масштабах системы Земля-Луна и меньше, то скорость удаления Луны от Земли легко можно объяснить совместным действием расширения пространства и приливных эффектов, причем второй эффект является более второстепенным [19]. В настоящее время приходим к выводу, что расширение

в малых масштабах следует из факта взаимодействия барионной материи с носителем темной энергии. Тем не менее, традиционная астрономия продолжает настаивать исключительно на приливном механизме, а для источника недостающего 25% углового момента предлагает различные экзотичные механизмы (см, например, [14]).

В случае пары Солнце-Земля ситуация гораздо сложнее. Наблюдения показывают, что Земля удаляется от Солнца со скоростью 14 см за год [15], что существенно для той модели солнечной системы, которая поддерживается традиционной астрономией. После попыток использования различных механизмов для интерпретации этой величины, исследователи снова обратились к приливному механизму (см. [20] и ссылки там). Но если в случае пары Земля-Луна исследователи располагают почти всем необходимым набором данных для оценки приливного механизма, то в случае системы Солнце-Земля никаких таких измерений вовсе нет. Поэтому в данном случае отсутствующие наблюдательные данные просто заменяются свободными параметрами, соответствующим подбором которых можно получить желаемый результат. Это, как отмечено выше, напоминает подбор нужных эпициклов и деферентов, а также соответствующих скоростей в птолемеевой геоцентрической системе мира.

Как и в случае системы Земля-Луна, предполагая, что пространство в пределах Солнечной системы расширяется согласно хаббловскому закону, авторы [12] для прироста астрономической единицы нашли величину примерно 10 м за год, что на два порядка больше наблюдаемой величины. Такое несоответствие может быть результатом либо неправильно выбранного механизма, либо недооценки некоторых сопутствующих эффектов. На наш взгляд таким эффектом может быть параллельное увеличение солнечной массы. Несложный расчет показывает, что такое может случиться, если масса Солнца за год увеличивается на $\sim 6.6 \cdot 10^{-11} M_{\odot}$ [12]. Интересно, что если примерно 0.1% этой массы преобразуется в лучистую энергию, она обеспечивает светимость Солнца. А на вопросе, каким образом может расти масса Солнца, остановимся в следующем разделе при рассмотрении влияния темной энергии на атомные ядра.

Третим примером системы космических объектов с измеренной скоростью расширения является Сатурн со своим спутником Титаном [16]. Расстояние от Титана до Сатурна составляет примерно 1.2 млн км. Титан удаляется от Сатурна примерно на 11.3 ± 2 см за земной год. В работе [21] авторы приходят к выводу, что основная часть этой скорости, а именно 8.15 см/год, обеспечивается хаббловским расширением, пересчитанным на расстояние Титана от Сатурна. Здесь интересно сравнение скоростей удаления Луны и Титана от своих материнских планет и соответствующих расстояний. Отношение радиусов орбит этих спутников составляет 0.32, а отношение скоростей - 0.34, т.е.,

скорость прироста радиуса орбиты действительно пропорциональна длине радиуса, как в случае расширения Вселенной.

5. *Эволюция атомных ядер под влиянием темной энергии.* То, что носитель темной энергии взаимодействует с барионным веществом, ставит много новых вопросов, которые так или иначе связаны и с космологией, и с космогонией объектов различных уровней космической иерархии. Все космические объекты, не считая самые экзотичные, состоят из атомов, масса которых сосредоточена в их ядрах. То есть, масса барионной Вселенной определяется суммарной массой всех атомных ядер, которые составляют космические объекты. И поэтому очень важно знать о физических последствиях взаимодействия барионной материи с носителем темной энергии на ядерном уровне.

Поскольку темная энергия (носитель темной энергии) на всех масштабах однородно заполняет все пространство, будем считать, что она взаимодействует с барионной материей на всех масштабах, в том числе, в масштабах атомных ядер и элементарных частиц. Уникальным свойством атомных ядер является дефект массы. Хорошо известно, что любое атомное ядро имеет массу, которая меньше суммарной массы его составных компонентов. Энергия связи ядра в данном случае представляет собой энергетический эквивалент недостающей массы. Именно благодаря этой недостающей энергии существует любое атомное ядро. Если каким-то образом впрыскивать это количество энергии в ядро, оно просто развалится на составные компоненты - протоны и нейтроны, причем последние очень быстро распадаются на протон, электрон и антинейтрино. Это все известно из общего курса ядерной физики.

Вторым важнейшим свойством атомных ядер, на наш взгляд, является то, что дефект массы, рассчитанный на один барион, имеет разное значение в разных ядрах. Это означает, что нейтрон и протон могут иметь разные массы, в зависимости от того, в каком ядре или в каких физических условиях они находятся в данный момент.

Теперь, учитывая сказанное, обсудим поведение атомных ядер, если они взаимодействуют с носителем темной энергии. В таком случае эти взаимодействующие субстанции разительно отличаются друг от друга в смысле энергетического баланса. Атомные ядра, как и гравитационно связанные конфигурации, также обладают "отрицательной энергией". А это означает, что если при взаимодействии с носителем темной энергии *происходит обмен энергиями*, то атомные ядра получают ненулевую порцию энергии. Полученная порция, если такое действительно происходит, уменьшает отрицательный баланс энергии ядра, т.е. энергию ядерной связи, и тем самым увеличивает его массу на ненулевую величину.

Приведенная цепочка рассуждений строится на двух предположениях. Первое является логическим продолжением нашего вывода о взаимодействии барионной материи с носителем темной энергии на уровне атомных ядер, но это предположение еще остается лишь гипотезой, пока этому нет веских доказательств. Более того, мы ничего не знаем о механизме "освоения" порций трансформируемой энергии атомным ядром. Поэтому ниже мы обсудим вопрос, к чему приведут такие изменения, *если они действительно будут иметь место*.

Таким образом, барионная материя и носитель темной энергии являются основными субстанциями нашей наблюдаемой Вселенной (пока забудем о гипотетической темной материи), которые находятся в непрерывном взаимодействии между собой. При этом вся масса находится в барионном веществе, а источником ресурсов сотворения массы является носитель темной энергии. Эти две компоненты устроены так, что темная энергия непрерывно расширяет барионный мир, и при этом частично преобразуется в массу барионного вещества, увеличивая массу наблюдаемой Вселенной.

То, что масса атомных ядер и космических объектов увеличивается со временем, нами уже было отмечено при рассмотрении скорости удаления Земли от Солнца [11] и об этом упомянуто в предыдущем разделе. Более того, этот механизм позволяет естественным образом объяснить парадоксальную ситуацию хаббловского напряжения [22]. Также, исходя из соотношений (5)-(6), которые показывают, что из объектов одного и того же семейства быстрее эволюционируют те, у которых масса меньше, мы исследовали галактики в скоплениях и пришли к выводу, что наблюдательные данные и в этом случае подтверждают наши выводы [23].

Следует отметить еще одно важное следствие данного, пока еще гипотетического процесса. Оно связано с уменьшением энергии связи в атомном ядре, что рано или поздно приводит данное ядро в нестабильное состояние и, следовательно, к неизбежному распаду по одной из схем известных ядерных реакций. Тем самым в данном сгустке барионного вещества увеличивается относительное количество легких ядер и легких элементов, в том числе водорода, что является конечным продуктом нейтронных выбросов. Понятно, что одним из важных результатов этого процесса является уменьшение металличности во всех космических объектах, из чего следует, что металличность должна быть ниже в объектах, которые легче и дольше поддаются влиянию темной энергии.

Помимо этого вывод о росте массы Вселенной решает еще один парадокс, который обычно замалчивается традиционной космологией или для его решения придумываются различные замысловатые сценарии. Речь идет о

массе барионной Вселенной в ранних этапах ее расширения. Дело в том, что согласно современным теориям уже через 10^{-43} с после, так называемого, Большого взрыва все законы природы работали. А через 380000 лет все барионы уже были созданы. Тогда понятно, что масса Вселенной достаточно долго находилась внутри сферы Шварцшильда и, тем не менее, продолжала расширяться. То, что масса Вселенной увеличивается со временем, снимает этот парадокс независимо от того, был Большой взрыв или нет.

Еще одно важное замечание здесь было бы не лишним. Из всего сказанного следует, что причина тщетности поиска темной материи кроется не в несовершенстве методов поиска. *Темной материи просто не существует. Она была изобретена для согласования наблюдательных данных с господствующей космогонической теорией*, которая требует образования космических объектов и их систем путем сжатия разреженной материи до достижения равновесного состояния. И поэтому везде, где наблюдения показывают большие дисперсии скоростей, современная наука помещает темную материю только для одной цели, чтобы не было речи о расширении. А возможность возникновения больших дисперсий скоростей под воздействием темной энергии вообще не рассматривается.

6. Космогоническая концепция Амбарцумяна и дозвездная сверхплотная материя. Классические труды Амбарцумяна по звездной и внегалактической космогонии предопределили некоторые направления развития астрофизики второй половины XX века. Причем для доказательства рождения новых звезд в нашу эпоху, а также явления активности ядер галактик его основные аргументы базировались на том, что как звездные ассоциации, так и кратные системы галактик типа трапеции являются динамически неустойчивыми, расширяющимися системами [24-26]. Таким образом, Амбарцумян сделал вывод о расширении систем космических объектов за полвека до открытия ускорения расширения Вселенной.

Кроме указанных космогонических выводов Амбарцумян пришел еще к одному важному заключению, которое касается свойств дозвездного вещества. Учитывая тот факт, что наблюдаемые в настоящее время системы расширяются, Амбарцумян предположил, что началось это расширение с такого состояния, когда вещество имела плотность атомного ядра. Он назвал такое состояние материи *сверхплотным дозвездным веществом*.

Основной причиной отклонения этой части концепции Амбарцумяна явилось то, что современная физика не позволяет стабильное существование больших масс с требуемой плотностью. Ситуация казалась парадоксальной, поскольку, с другой стороны, все рассуждения и оценки Амбарцумяна без сомнения были безупречными. Поэтому у исследователя, который занимался

этим вопросом, создавалось впечатление, что *современная физика владеет не всем исследовательским инструментарием, который необходим для полного анализа физической картины.*

В настоящее время, когда открыта темная энергия, ситуация другая. Можно достаточно твердо утверждать, что для гипотезы Амбарцумяна не хватало именно механизма влияния темной энергии на барионную материю. То, что происходит с атомными ядрами в этом процессе (если представленное здесь соответствует действительности), можно охарактеризовать как фазовый переход массы на квантовом уровне. Действительно, взаимодействие атомных ядер с носителем темной энергии приводит к увеличению их массы за счет темной энергии - т.е. энергия преобразуется в массу, используя при этом универсальный механизм, созданный природой.

Теперь легко представить себе как может идти обратный процесс, когда, образно говоря, время идет вспять. Понятно, что в этом случае мы должны наблюдать уменьшение массы атомных ядер и увеличение энергии связи, что создает хорошие условия для существования неизвестных нам ядер, состоящих из гораздо большего числа барионов, чем в случае известных ядер из таблицы Менделеева. Так можно дойти до таких времен, когда барионы в ядрах имели ничтожную массу и представлялись эмбрионами барионов.

Если сказанное верно для сложных ядер, состоящих из более чем одного бариона, то же самое должно быть верно также и для свободных барионов: они всегда, в любую эпоху обладали большей массой, чем связанные в ядре одноименные частицы, но были гораздо легче, чем их современные аналоги. В противном случае, если отдельные барионы не изменялись бы со временем или следовали бы другому закону трансформации, чем сложные ядра, то частоты спектральных линий водорода и других элементов менялись бы с расстоянием по разным законам. То есть, если изменение атомного ядра для какого-то элемента происходит согласно какому-то сценарию, то этот сценарий должен быть общим для всех ядер. Еще раз отметим, что все это верно, если верна сама физическая картина трансформации атомного ядра под влиянием темной энергии.

Та особенность, что, входя в состав сложных ядер, барионы обладают свойством уменьшать свою массу, является регулятором для барионной материи, что позволяет ей адаптироваться к любым физическим условиям и поддерживать устойчивость тех объектов, которые состоят из этих частиц. Более того, именно это свойство является регулятором устойчивого существования всех объектов более высоких иерархических уровней.

Таким образом, если наши рассуждения и выводы правильны, то в прошлом количество многобарионных ядер (атомов) было больше, а общая масса барионов - меньше. В нашу эпоху атомные ядра с большим количеством

барионов меньших (ничтожных) масс могут быть сохранены в недрах звезд и в ядрах галактик, которые обладают большим значением μ . Если звезда или галактическое ядро будет выбрасывать сгусток такого вещества, то он, попадая в новые условия "более расширенного" пространства, должен быстро адаптироваться к этим условиям. При этом выброшенный сгусток набирает массу и излучает огромное количество энергии.

Генерацию излучательной энергии можно объяснить следующим феноменологическим сценарием. Атомные ядра или сгустки эмбриобарионов (если их можно так называть), попадая в новые физические условия, начинают стремительно набирать массу. В результате этого уменьшается их энергия связи, и многобарионные сгустки, которые были устойчивыми до выброса, в новых условиях быстро становятся радиоактивными. Различные типы распада, от бета-распада до кластерного распада и деления, производят новые ядра, а этот процесс, как известно, всегда сопровождается гамма излучением.

7. Заключение. Две "темные" субстанции - темная материя и темная энергия, введенные в науку космологией, не имеют ничего общего. Темная материя, которая была введена в науку в рамках господствующей космологической гипотезы, на наш взгляд, стала ненужной после открытия темной энергии которое радикально изменило всю физическую картину реального мира. Однако по сей день изучены не все физические последствия ее существования.

Здесь показано к чему приводит взаимодействие барионного мира с носителем темной энергии, используя при этом наблюдательные данные и последовательно применяя известные законы физики. А то, что они взаимодействуют, было очевидно с того самого момента, как эта энергия была введена в научный инструментарий физики, поскольку наблюдательной основой для этого стало открытие ускорения расширения Вселенной, которое, по определению, происходит именно за счет этого взаимодействия. Именно тот факт, что *в результате этого взаимодействия носитель темной энергии постоянно передает порции энергии барионной материи*, и стал причиной ее открытия.

Передача энергии барионным объектам и их системам непрерывно увеличивает их энергию, и значение вириала становится положительной, в результате чего любая система объектов становится расширяющейся. Поэтому при наличии темной энергии не имеет смысла говорить о равновесных системах, они все становятся расширяющимися, независимо от механизма их образования. *Этот вывод сразу делает темную материю*, за открытием которой исследователи бьются почти столетие, *ненужной фикцией*.

Важным выводом данных исследований является и то, что, помимо прочих барионных объектов, эволюционируют также и объекты микромира,

и отпечатки их эволюции четко видны в физических свойствах космических объектов всех иерархических уровней. Такой отпечаткой должно быть увеличение массы космических объектов.

Далее, чем дольше продолжалась эволюция под влиянием взаимодействия с носителем темной энергии, тем ниже должна быть металличность объектов, причем этот процесс, *при прочих равных условиях, быстрее происходит у маломассивных объектов*. Эта закономерность для галактик известна и хорошо освещена в научной литературе за последние 50 лет.

Другим очевидным результатом эволюции барионной материи на уровне атомных ядер и элементарных частиц должно быть увеличение массы, что в глобальном смысле постоянно увеличивает массу всех объектов и Вселенной, с другой стороны, постепенно *смещает спектральные линии всех элементов в синюю сторону спектра*.

Автор выражает свою искреннюю признательность А.Г.Никогосяну за критические замечания, которые, несомненно, улучшили рукопись этой работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория, им. В.А.Амбарцумяна,
e-mail: hhayk@bao.sci.am

THE PRESENCE OF DARK ENERGY DARK MATTER

H.A.HARUTYUNIAN

We consider here the issue of changing the total energy of baryon objects and their systems in the presence of dark energy (DE), the carrier of which, by definition, interacts with all baryon objects. The very fact that dark energy was discovered as the result of such interaction, due to which the expansion of the Universe accelerates is emphasized. Since dark energy (the carrier of dark energy - CDE) is distributed homogeneously, the physical consequences of the interaction of CDE with baryon matter at all hierarchical levels of baryon structures are discussed. Based on the second law of thermodynamics, it is concluded that under the influence of CDE, the energy of all baryon systems gradually increases, which, on the other hand, decreases their stability, and the positive value of the virial grows for any structures that considered to be stable. A similar analysis for atomic nuclei leads to the conclusion that over time, the nuclear binding energy and the stability decrease, and the mass of the nuclei increases. This effect allows one to re-examine

Ambartsumian's hypothesis on the existence of clots of superdense matter in the nuclei of stars and galaxies and to propose its new interpretation.

Keywords: *dark energy: interaction: baryon matter: second law of thermodynamics: energy transfer: virial theorem: energy increase: mass increase*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lord Kelvin*, Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light, C.J.Clay and Sons, London, 1904.
2. *H.Poincaré*, Bulletin de la Société astronomique de France, **20**, 153, 1906.
3. *F.Zwicky*, Helvetica Physica Acta, **6**, 110, 1933.
4. *F.Zwicky*, Astrophys. J., **86**, 217, 1937.
5. *E.Hubble*, Proc. Nat. Acad. Sci., **15**, 168, 1929.
6. *A.Sandage*, in "The Universe at Large", eds. G.Munch, A.Mampaso, F.Sanches, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
7. *A.G.Riess, A.V.Filippenko, P.Challis et al.*, Astron. J., **116**, 1009, 1998.
8. *S.Perlmutter, G.Aldering, G.Goldhaber et al.*, Astrophys. J., **517**, 565, 1999.
9. *D.Huterer, M.S.Turner*, Phys. Rev. D, **60**, 081301, 1999.
10. *A.S.Eddington*, The Nature of the Physical World, Cambridge University Press, Cambridge, ch. IV., 1928.
11. *H.A.Harutyunian*, Astrophysics, **54**, 290, 2011.
12. *H.A.Harutyunian, A.M.Grigoryan*, ComBAO, **65**, 268, 2018.
13. *J.O.Dickey, P.L.Bender, J.E.Faller et al.*, Science, 265, 482, 1994.
14. *J.W.Williams, S.G.Turyshv, D.H.Boggs*, Planetary Science, **3**, 1, 2014.
15. *G.A.Krasinsky, V.A.Brumberg*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **90**, 267, 2004.
16. *V.Lainey, L.G.Casajus, J.Fuller et al.*, Nature Astron., **4**, 1053, 2020.
17. *F.R.Stephenson, L.V.Morrison*, Philos. Trans. R. Soc., **351**, 165, 1995.
18. *L.V.Morrison, F.R.Stephenson*, in "Highlights of Astronomy", ed. H.Rickman, **12**, 338, 2002.
19. *H.A.Harutyunian*, Astrophysics, **38**, 374, 1995.
20. *T.Miura, H.Arakida, M.Kasai et al.*, Publ. Astron. Soc. of Japan, **61**, 1247, 2009.
21. *M.Křížek, V.G.Gueorguiev, A.Maeder*, Gravit. Cosmol., **28**, 122, 2022.
22. *H.A.Harutyunian*, Astrophysics, **64**, 435, 2021.
23. *H.A.Harutyunian, A.M.Grigoryan, A.Khasawneh*, ComBAO, **66**, 25, 2019.
24. *В.А.Амбарцумян*, Эволюция звезд и Астрофизика, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1947.
25. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, физ.-мат., естеств. и техн науки, **9**, 23, 1956.
26. *V.A.Ambartsumian*, In Proc. 11th Solvay Conference on Physics: Structure of the Universe, ed. R.Stoops, University of Brussels, Brussels, 1958.

DOMAIN WALL BIANCHI TYPE VI_0 UNIVERSE IN $f(R, T)$ GRAVITY

S.P.HATKAR¹, D.P.TADAS², S.D.KATORE³

Received 19 January 2024

Accepted 6 December 2024

We consider the Bianchi type- VI_0 space time with domain walls in the framework of the modified $f(R, T)$ theory of gravitation. To solve the field equations, we assume that the shear scalar σ is proportional to the expansion scalar θ . We also consider the parametrization of the equation of the state parameter of barotropic fluid and discuss the effect on domain walls. It has been observed that the domain wall may behave like dark energy. Some physical parameters are also discussed in detail.

Keywords: *domain walls: Bianchi type- VI_0 space time: $f(R, T)$ gravity*

1. Introduction. Recent cosmological observation data indicate that the universe is undergoing an accelerated expansion phase. One of the possible solutions to explain the cosmic speed-up of the universe is the modification of the general theory of relativity. The simplest class of modification is replacing $f(R)$, i.e., the function of Ricci scalar R , instead of R in Einstein-Hilbert action. One can achieve the dynamics of the universe without the need of dark energy in $f(R)$ gravity. The $f(R)$ theory of gravitation covers all domains from cosmological to the solar system scale. Moreover, no extra degree of freedom is required in $f(R)$ gravity. $f(R)$ gravity is equivalent with Brans-Dicke theory when coupling constant $\omega = 0$ [1]. Nojiri and Odintsov [2] obtained early time inflation and late time acceleration in the $f(R)$ theory of gravitation. Also, Nojiri et al. [3] presented a brief review on $f(R)$ theories of gravitation. However, the $f(R)$ theories have stability and viability issues [4-6].

Recently, Harko et al. [7] proposed a more general model of modified theory known as the $f(R, T)$ theory of gravity, in which $f(R, T)$ is an arbitrary function of the Ricci scalar R and the trace T of the energy momentum tensor. The coupling between matter and geometry leads to extra acceleration in $f(R, T)$ theory. There is a choice of the functions $f(R, T)$ depending on the nature of the matter field [8]. Harko et al. [7] also pointed out that the $f(R, T)$ gravity model depends on the source term, which represents the variation of the matter stress energy tensor with respect to the metric. The simplest model, $f(R, T) = R + \lambda T$, is equivalent

to a cosmological model with an effective cosmological constant. The term $f(T)$ in gravitational action modifies the gravitational interaction between matter and curvature. In $f(R, T)$ theory, cosmic acceleration comes not only from geometrical contribution but also from matter content [9]. The $f(R, T) = \mu R + \gamma T$ model shows quintessence-like behaviour of the equation of state (EoS) parameter [10]. Reddy et al. [11] investigated the Bianchi type-III space time in the $f(R, T)$ gravity and showed that the model does not have an initial singularity. Rao and Neelima [12] investigated Bianchi type-VI₀ cosmological models and discovered that $f(R, T)$ affects the matter distribution but has no effect on space-time geometry. Singh and Singh [13] discussed the behaviour of a scalar field in $f(R, T)$ gravity theory within the context of a flat FRW cosmological model that describes the early and late time evolution of the universe. Mishra et al. [14] investigated Bianchi type VIIh space-time in the presence of perfect fluid and discussed the dynamical feature of the models in $f(R, T)$ gravity. Recently, Chaubey and Shukla [15] have obtained the different cosmological solutions of Bianchi models in the framework of $f(R, T)$ gravity.

The first few minutes after the Big Bang are important in the history of the universe. When the temperature drops to some critical point, topological defects occur due to the phase transition of the universe. The idea of spontaneous symmetry breaking prompts that the topology of the vacuum manifold M is identified as domain walls. Topological defects are remnants of the phase transitions that may have occurred in the early universe [16-18]. Hill et al. [19] have proposed that domain walls are important in the formation of galaxies. Recently, Reddy and Naidu [20] have analyzed thick domain walls in scale-covariant theory of gravitation. Lazanu et al. [21] have studied the contribution of domain walls to the cosmic microwave background power spectrum. Adhav et al. [22] have investigated thick domain walls in the Brans-Dicke theory of gravitation. Further, Sahoo and Mishra [23] have studied string and domain walls for plane symmetric space times. Mahanta and Biswal [24] have studied string clouds and domain walls with quark matter in Lyra geometry. Maurya et al. [25] investigated domain walls and quark matter in Bianchi type-V universe with observational constraints in $f(R, T)$ gravity. The tension of domain walls plays an important role in the study of cosmological models. The effect of tension on domain walls in higher-dimensional space-times is also investigated by Rahaman and Kalam [26]. Biswal et al. [27] have studied Kaluza-Klein domain walls in $f(R, T)$ gravity. Negative tension of domain walls shows that they are invisible, which means that there is energy transfer from domain walls to other forms of matter [28]. Some authors [29,30] have investigated the domain walls cosmological models in different theories.

With the motivation of the above discussion, we aim to study Bianchi type-VI₀

domain wall cosmological models in the framework of the $f(R, T)$ theory of gravity. Section 2 is devoted to metric and $f(R, T)$ gravity. The field equations for the Bianchi type-VI₀ space-time in the presence of a domain wall are presented in section 3. The solutions of the field equations determined in section 4 for the case $C_1 \neq 0$. In section 5, the solution of the field equation is obtained for the case $C_1 = 0$. The conclusion is presented in section 6.

2. Metric and $f(R, T)$ gravity. The modified theories of gravitation are aimed to address the problem of gravitational interaction. Renormalizable theories of gravitation are based on the inclusion of higher order terms of curvature invariant in the Lagrangian. The action for $f(R, T)$ gravity theory is given as

$$S = \int \sqrt{-g} (f(R, T) + L_m) d^4x, \quad (1)$$

where L_m is the Lagrangian density of the matter. The field equations of the $f(R, T)$ theory of gravity are obtained by varying action S with respect to g_{ij} , which is given by

$$\begin{aligned} f_R(R, T)R_{ij} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{ij} + (g_{ij}\square - \nabla_i\nabla_j)f(R, T) \\ = 8\pi T_{ij} - f_T(R, T)T_{ij} - f_T(R, T)\Theta_{ij}, \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{ij}} L_m, \quad \Theta_{ij} = -2T_{ij} + g_{ij}L_m - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 L_m}{\delta g^{ij} \partial g^{\alpha\beta}}, \\ f_R = \frac{\partial f(R, T)}{\partial R}, \quad f_T = \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

We assume the function $f(R, T)$ in the following form:

$$f(R, T) = R + \mu T. \quad (3)$$

The late-time dominance of the domain wall network over the energy density provides a very small contribution to anomalies in the cosmic microwave background (CMB). The frozen domain wall is a proposed candidate of dark energy [31]. The energy momentum tensor for a thick domain wall [32] has a form

$$T_{ij} = \rho(g_{ij} + u_i u_j) + p u_i u_j, \quad (4)$$

where ρ and p stand for energy density and pressure of the domain wall, respectively, and u_i is the unit space-like vector in the same direction with $u_i u^i = -1$. Here $\rho = \rho_b + \sigma_d$ and $p = p_b - \sigma_d$, in which the quantities ρ_b and p_b stand for energy density and pressure of the barotropic fluid, and σ_d is the tension of the domain wall. It is believed that there is an anisotropic phase of evolution in the universe, i.e., the universe may be anisotropic in the early phase of evolution. Bianchi type I - XI space times are important in the study of the

anisotropic universe. We consider the Bianchi type VI_0 space time as

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 e^{-2\alpha x} dy^2 + C^2 e^{2\alpha x} dz^2, \quad (5)$$

where A, B, C are the functions of t and α is a non-zero constant.

Bianchi type VI_0 space-time is of particular interest since it is a simple generalization of Bianchi type space and, at the same time, is sufficiently complex. Primordial helium abundance and isotropization in a special sense are explained by Barrow [33] with the help of Bianchi type VI_0 space-time. Weaver [34] used magnetism to investigate the Bianchi type VI_0 metric. Recently, the Bianchi type VI_0 space-time has been studied by Pradhan and Bali [35] in general relativity, whereas Rao and Neelima [12] and Ram et al. [36] in $f(R, T)$ theory of gravity, by using different physical fluids.

3. *Field equations.* In the $f(R, T)$ theory, the coupling of matter and gravity contributes equally to cosmic acceleration. The field equations of $f(R, T)$ gravity are derived in metric formalism as

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{\alpha^2}{A^2} = (8\pi + 5\mu)\rho + \mu p \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\alpha^2}{A^2} = (8\pi + 5\mu)\rho + \mu p \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{BA} - \frac{\alpha^2}{A^2} = (8\pi + 5\mu)\rho + \mu p \quad (8)$$

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\alpha^2}{A^2} = -(8\pi + \mu)\rho + 3\mu p \quad (9)$$

$$\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B} = 0, \quad (10)$$

where the overhead dot represents the derivative with respect to cosmic time. From equation (10), we obtain

$$C = \beta B, \quad (11)$$

where β is an integrating constant. The expansion scalar θ and shear scalar σ are defined as

$$\theta = 3H = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} \quad (12)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 H_i^2 - \frac{1}{3} \theta^2 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right), \quad (13)$$

where $H = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right)$ is the Hubble parameter, and $H_i, i = 1, 2, 3$ are the

directional Hubble parameters in the directions of the x , y , z axes, respectively. As discussed above, the universe is expanding and accelerating. The expansion scalar is used to predict how fast the universe is expanding mathematically. The shear scalar is the rate of shear of the fluid congruence. According to the theorem, "For any space-time in which the matter content consists of a perfect fluid and whose flow vector field forms an expanding geodesic and hypersurface orthogonal congruence, if the cosmological constant is zero, $\rho \propto \theta^2$ implies $\sigma^2 \propto \theta^2$ and $R \propto \theta^2$ " [37].

Using equation (11), the system of field equations (6) to (10) reduces to three equations in four unknowns A , B , p and ρ . We require one more condition to solve the system. According to recent observations of the velocity-redshift relationship for extragalactic sources, the Hubble expansion of the universe is now isotropic to within ≈ 30 percent. The redshift studies suggest that $\sigma/H \leq 0.30$, where σ is shear scalar and H is Hubble parameter [38,39]. The importance of this physical condition is discussed by Collins and Ellis [40]. The CMB is the most accurate measure of anisotropy. The entire universe is almost uniform. Notwithstanding, perturbation in density causes small fluctuation at the level 10^5 in one part. The new limit of an isotropic expansion is $\sigma/H < 4.7 \cdot 10^{-11}$ (95% C. L.) [41]. It should be noted that we can assume a physical relationship or a mathematical condition. However, assuming a mathematical condition may lead to an unphysical solution, and assuming a physical condition may lead to an unsolvable equation. Therefore, even though recent observational data shows that the universe is isotropic, we follow the literature and assume that the expansion scalar θ is proportional to the shear scalar σ , i.e., $\theta \propto \sigma$, to avoid any unphysical situation. Using equations (11), (12) and (13), we get

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) = l \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{2\dot{B}}{B} \right), \quad (14)$$

where l is a constant. Equation (14) further reduces to

$$\frac{\dot{A}}{A} = n \frac{\dot{B}}{B}, \quad (15)$$

where $n = (1 + 2l\sqrt{3}) / (1 - l\sqrt{3})$. After integrating, equation (15) leads to

$$A = kB^n, \quad (16)$$

where k is a constant of integration. From equations (6)-(8) and (16), we get

$$2\ddot{B} + 2(n+1)\frac{\dot{B}^2}{B} = \frac{4\alpha^2}{(n-1)k^2 B^{2n-1}}. \quad (17)$$

Let $\dot{B} = L(B)$, then $\ddot{B} = LL'$ with $L' = dL/dB$ and we get the reduced equation (17) in the following form

$$L^2 B^{2(n+1)} = \frac{\alpha^2}{(n-1)k^2} B^4 + C_1^2, \quad (18)$$

where C_1^2 is the integration constant. We have two possibilities, depending on whether the value of the integration constant is zero or not. Note that the $f(R, T)$ gravity models depend on a source term, so each choice of L_m would generate a specific set of field equations. Particular cases of $f(R, T)$ functions, including $f(R, T) = R + \mu T$, are discussed by Harko et al. [7]. The importance of this model is that the coupling between matter and geometry becomes effective and time-dependent. We would like to mention that one may get different solutions by taking different values of constants and parameters. Consideration of all possibilities of $f(R, T)$ functions and other parameters is left as work for the future. Therefore, we consider the following two cases:

4. *Case I.* In this case, we have assumed that the non-zero integration constant i.e. $C_1 \neq 0$. The equation (18) is reduced to following equation:

$$\frac{B^{n+1} dB}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n-1)k^2} B^4 + C_1^2}} = dt. \quad (19)$$

For simplicity, we take a particular value of constant, $n=0$ and by solving equation (19), we arrive at,

$$\frac{du}{\sqrt{C_1^2 - \frac{\alpha^2}{k^2} u^2}} = 2 dt, \quad (20)$$

where $u = B^2$.

Simplifying and integrating, we get

$$B = \sqrt{\left(\frac{kC_1}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{2kt}{\alpha}\right)} \quad (21)$$

$$C = \beta \sqrt{\left(\frac{kC_1}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{2kt}{\alpha}\right)} \quad (22)$$

$$A = k. \quad (23)$$

The scale factors are oscillatory. The oscillatory models are physically important since they are alternatives to inflation. From equations (6)-(9), we obtain the expressions for energy density and pressure are as follows:

$$\rho = \frac{6\pi b^2 \cos^2(2kt/\alpha)}{l_1 \sin^2(2kt/\alpha)} - \frac{8\pi\alpha^2}{3l_1 k^2} \quad (24)$$

$$p = \frac{(-2\pi + \mu)b^2 \cos^2(2kt/\alpha)}{l_1 \sin^2(2kt/\alpha)} + \frac{(2\pi + \mu)\alpha^2}{3l_1 k^2}, \quad (25)$$

where $b = 2k/\alpha$ and $l_1 = 64\pi^2 + 48\pi\mu + 8\mu^2$. From Fig.1, it is clear that the energy density is negative for $\mu = -6.29$ and positive for $\mu = -6.28$, therefore we have a viable model for $\mu \geq -6.28$ with increasing time. The pressure of domain wall is negative throughout the evolution of the universe depicted in Fig.2. Thus, domain walls play a role in dark energy. Also, the energy density of barotropic fluid is found to be

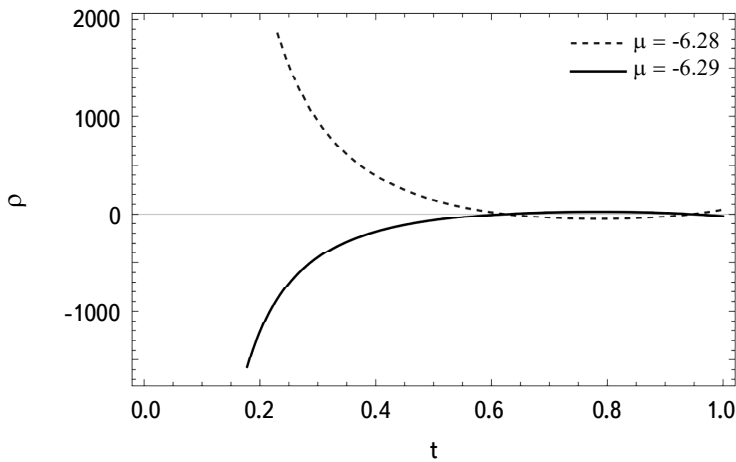


Fig.1. Plot of energy density ρ vs. cosmic time t for $\alpha = k = 0.1$.

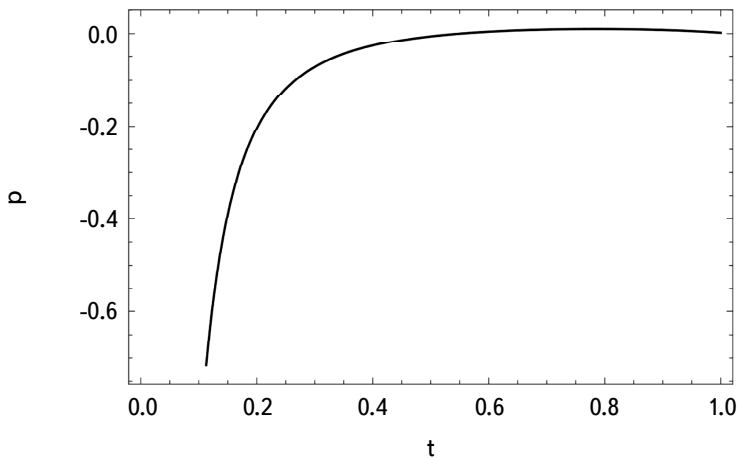


Fig.2. Plot of pressure p vs. cosmic time t for $\alpha = \mu = k = 0.1$.

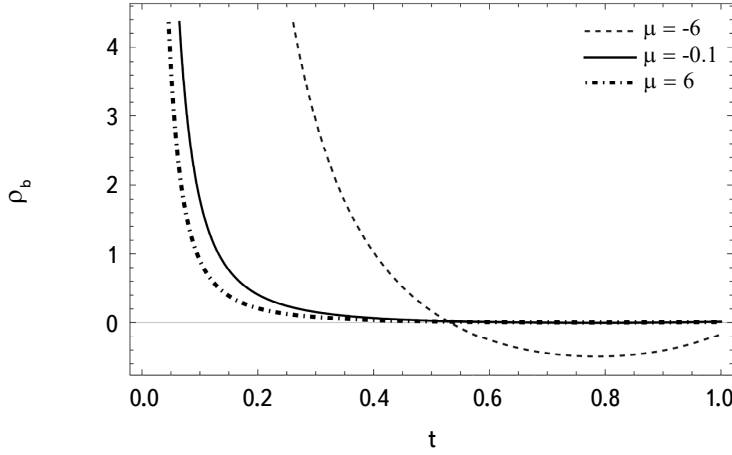


Fig.3. Plot of energy density of barotropic fluid ρ_b vs. cosmic time t for $\alpha = k = 0.1$.

$$\rho_b = \frac{(4\pi + \mu)b^2 \cos^2(2kt/\alpha)}{l_1(w+1)\sin^2(2kt/\alpha)} + \frac{(-2\pi + 3\mu)\alpha^2}{3l_1(w+1)k^2}. \quad (26)$$

Fig.3 depicts the behaviour of barotropic fluid energy density ρ_b for different values of parameter μ . It is clear that, for small values of μ , ρ_b is decreasing function of t . It is positive and large near $t=0$ and tends to zero with increasing time t . Furthermore, the tension of domain walls σ_d is obtained as

$$\sigma_d = \frac{(6\pi w + 2\pi - \mu)b^2 \cos^2(2kt/\alpha)}{l_1(w+1)\sin^2(2kt/\alpha)} - \frac{(8\pi w + 6\pi + 3\mu)\alpha^2}{3l_1(w+1)k^2}. \quad (27)$$

The Fig.4 shows the graphical behaviour of the tension of domain walls σ_d for $\mu = -6$, $\mu = -0.1$ and $\mu = 6$. It is observed that the tension of domain walls is positive decreasing function of time. Initially, it is very large and decays to zero with increasing time. The surface tension of domain walls control its motion. Zeldovich et al. [42] have discussed the properties of domain interfaces, cosmological expansion, and homogeneity of the universe. Domain walls must be disappear at a quite early stage of the evolution of the universe for isotropy and homogeneity. When domain walls disappear, the energy density transformed into energy of massive quanta or into equilibrium radiation. Here, $\sigma_d > 0$ near $t=0$, which means that domain walls exists in the early stage of the universe. They survive for a very small period of time and vanish, which is as per requirement stated by Zeldovich et al. [42]. This confirms our earlier work in $f(R, T)$ theory for FRW and axially symmetric space time [43]. The physical parameters such as expansion scalar θ , deceleration parameter q and shear scalar σ are obtained as

$$\theta = \frac{k \cos(2kt/\alpha)}{\alpha \sin(2kt/\alpha)} \quad (28)$$

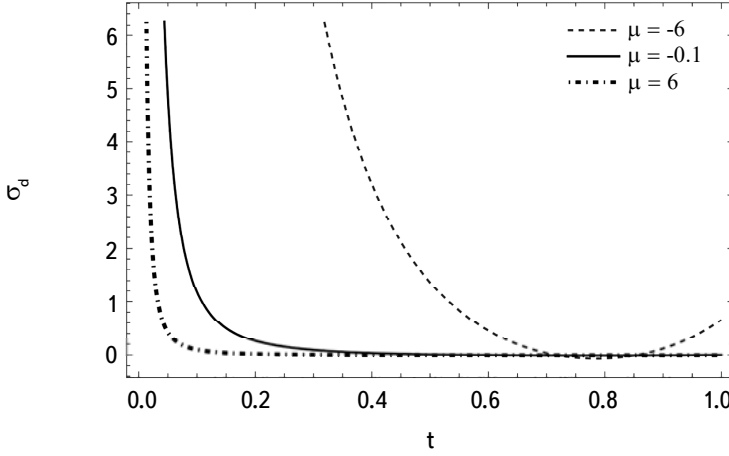


Fig.4. Plot of the tension of domain walls σ_d vs. cosmic time t for $\alpha = k = 0.1$.

$$q = -1 + 3\sec^2(2kt/\alpha) \quad (29)$$

$$\sigma = -\frac{k \cos(2kt/\alpha)}{\sqrt{3}\alpha \sin(2kt/\alpha)}. \quad (30)$$

The sign of deceleration parameter indicates whether the universe is accelerating or decelerating. The positive sign of q corresponds to decelerating universe, whereas the negative sign corresponds to an accelerating universe. Here, the deceleration parameter is positive i.e. the model indicates a decelerating universe. The expansion scalar θ and shear scalar σ are decreasing function of time; at $t=0$, θ and σ are infinite i.e. the rate of expansion of the universe was very high at the Big Bang. Also they are cyclic. It is noted that $\sigma/\theta \neq 0$ and σ/θ is constant, not depends on t , therefore the universe is anisotropic throughout the evolution. The volume of universe V , is found to be

$$V = \frac{\beta k^2 c_1}{\alpha} \sin(2kt/\alpha). \quad (31)$$

From equation (31), it is clear that the universe is cyclic which undergoes an endless sequence of cosmic epochs that begin with a bang and end in a crunch [44]. Basu [45] stated that when the galaxies are found to lie along the curve $q=1$ or above, the universe will expand to a maximum extension and then retrace back to its path in the contraction. The universe contracts to a state of high temperature and density, and at the end of contraction, it will vanish into singularity. The present observational status would suggest that the distance galaxies rather lie along the curve for $q=1$ i.e., the universe is expanding and decelerating.

Linder [46] has suggested novel models for parametrizing the equations of state

in the study of dark energy to extend the parametrization of dark energy to redshifts $z > 1$. Liu et al. [47] have studied the parametrized equation of the state of dark energy for a variety of models with identical parameters using SNIa data to determine the best way to parametrize it. The parametrized equation of state ω in term of average scale factor a is defined as

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \left(1 - \frac{a}{a_0} \right)^r, \quad (32)$$

where ω_0, ω_1 are two undefined parameter, a is average scale factor, a_0 is the present value of scale factor and $r = 1, 2, \dots$. Therefore, the new parametrized ω is obtained as

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \left[1 - \frac{\beta k^{2/3} c_1^{1/3}}{\alpha^{1/3}} (\sin(2kt/\alpha))^{1/3} \right]^r. \quad (33)$$

The graphical representation of parametrized w is shown in Fig.5. It is observed that the range of w is $-0.90 \leq w \leq -0.65$ for the particular values of the parameters $w_0 = 0.1$ and $w_1 = -1$. The observational data indicates the range of the EoS parameter w is $-1.013^{+0.068}_{-0.073}$ [48], whereas Liu et al. [47] obtained the

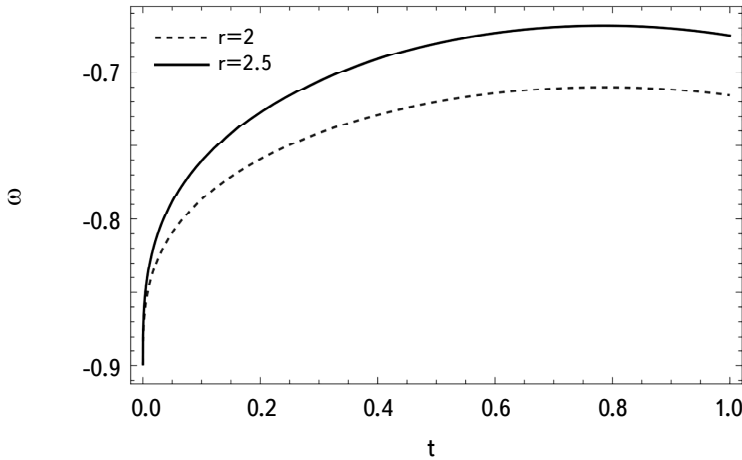


Fig.5. Plot of parametrized ω vs. cosmic time t for $\alpha = \beta = c_1 = k = 0.1$.

range of the EoS parameter as $-1.5 \leq w \leq 0.5$. Also, Scolnic et al. [49] obtained the range of the EoS parameter as $w = -1.026 \pm 0.041$. It is clearly found that the range of EoS parameters obtained in our model is consistent with values obtained by Suzuki et al. [48] and Scolnic et al. [49].

5. Case II. In this case, we consider that the constant of integration is zero i.e. $C_1 = 0$, then the equation (18) reduced to the following form

$$L^2 B^{2(n+1)} = \frac{\alpha^2}{(n-1)k^2} B^4. \quad (34)$$

Simplifying the above equation and integrating, we arrive at

$$B = E^{1/n} t^{1/n} \quad (35)$$

$$C = \beta E^{1/n} t^{1/n} \quad (36)$$

$$A = kEt, \quad (37)$$

where $E = n\alpha/\sqrt{n-1}k$. It is clear that metric potentials are real for $n > 1$ and imaginary for $n < 1$.

The expression of energy density and pressure are calculated as follows

$$\rho = \frac{n+2}{3\mu n^2 t^2} + \frac{(8\pi + \mu)[(2-n) - l_2(n+2)]}{l_1 n^2 t^2}, \quad (38)$$

where $l_2 = (8\pi + 5\mu)/3\mu$. From Fig.6, it is clear that the energy density is a decreasing function of time. It is large near $t=0$. A dark energy model for domain walls is also obtained by Caglar and Aygun [50] in case of a higher dimensional FRW universe.

$$p = \frac{3\mu[(n-2) - l_2(n+2)]}{l_1 n^2 t^2}. \quad (39)$$

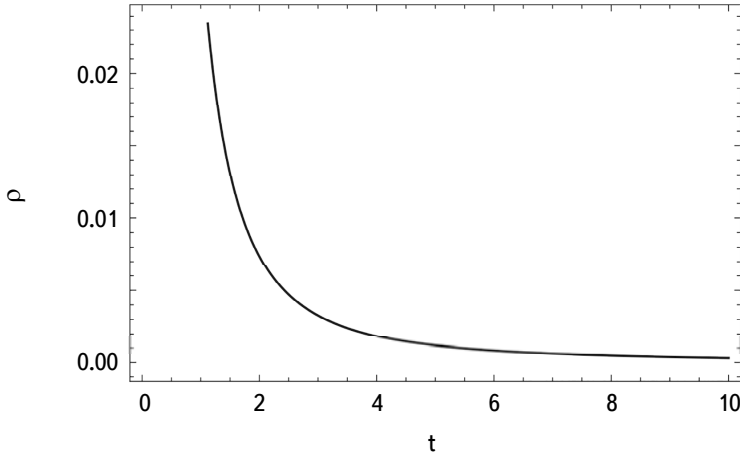


Fig.6. Plot of energy density ρ vs. cosmic time t for $\alpha = \mu = 0.1$ and $n = 1.1$.

Also, Fig.7 shows that the pressure is negative. Therefore, it is important to note that, we may say, the domain walls acts as dark energy candidates. The energy density of barotropic fluid is found to be

$$\rho_b = \frac{(2-n) - l_2(n+2)}{(8\pi + 2\mu)(w+1)n^2 t^2} + \frac{n+2}{3\mu(w+1)n^2 t^2}. \quad (40)$$

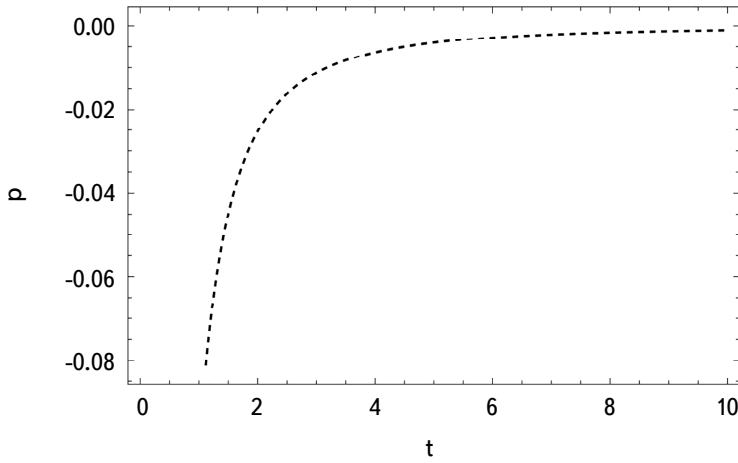


Fig.7. Plot of pressure p vs. cosmic time t for $\alpha = \mu = 0.1$ and $n = 1.1$.

Fig.8 shows that the plot of energy density of a barotropic fluid ρ_b is positive for $n=1.1$, $\mu = -25.133$ and it is negative for $n=1.1$, $\mu = -25.132$. We have a viable model for $\mu \leq -25.133$ and for other values of μ , the energy density is negative.

The tension of the domain walls is obtained as

$$\sigma_d = \frac{l_3[(2-n)-l_2(n+2)]}{l_1(w+1)n^2t^2} + \frac{(n+2)w}{3\mu(w+1)n^2t^2}, \quad (41)$$

where $l_3 = [(8\pi + \mu)w - 3\mu]$. Fig.9 shows that the graph of tension of domain walls σ_d is positive for $n=1.1$ and $\mu = -12.566$, but it is negative for $n=1.1$ and $\mu = -12.567$. The tension of domain walls is negative for a viable model, that is, for $\mu = -12.567$. It indicates that the domain wall transforms into another form

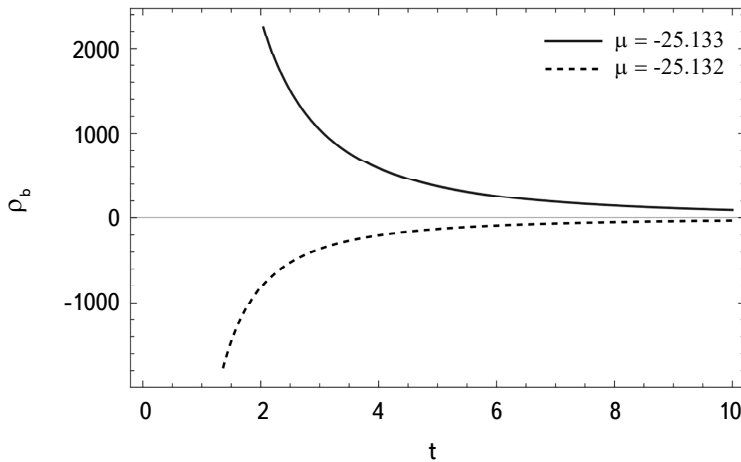


Fig.8. Plot of energy density of barotropic fluid ρ_b vs. cosmic time t for $\alpha = 0.1$ and $n = 1.1$.

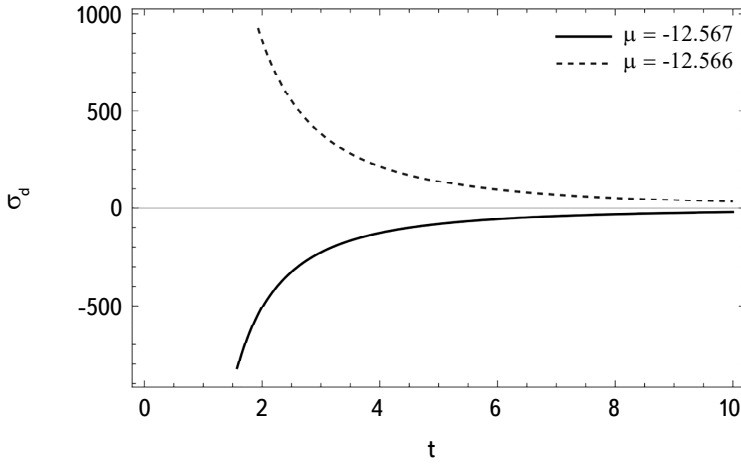


Fig.9. Plot of tension of the domain walls σ_d vs. cosmic time t for $\alpha = 0.1$ and $n = 1.1$.

of matter. The expansion scalar θ , deceleration parameter q and shear scalar σ is obtained as

$$\theta = \frac{n+2}{nt} \quad (42)$$

$$q = -1 + \frac{3n}{n+2} \quad (43)$$

$$\sigma = \frac{n-1}{\sqrt{3}nt}. \quad (44)$$

From expression (44), it is clear that the expansion rate of universe is decreasing with increasing time. It is highest near $t=0$. The shear scalar is also a decreasing function of time. At $n=1$, it is zero. Therefore, the model has isotropy at $n=1$ throughout the evolution. Also, $\sigma/\theta \neq 0$ for other values of n , $\sigma/\theta \neq 0$ i.e. the universe does not approach to isotropy at late time. Recently, Aluri et al. [51] studied consistency of isotropy with observational data and found that there is a deviation from isotropy in topological anomalies in CMB. In the present study, our model does not approach isotropy, and for consistency with the conclusion drawn by Aluri et al. [51], we will study this in the future work. The deceleration parameter is negative for $n < 1$ and positive for $n > 1$. As mentioned above, metric potentials A , B , C are real for $n > 1$. Therefore, q is positive in that case i.e. the universe is decelerating. The volume of universe V is found to be

$$V = \beta k \left[\frac{n \alpha t}{k \sqrt{n-1}} \right]^{(n+2)/n}. \quad (45)$$

From Fig.10, it is clear that the volume of universe is expanding with increasing time. The expansion of the universe is faster for $n = 1.1$ than $n = 2$. Also, the

parametrize equation of state ω is obtained as

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \left[1 - \beta^{1/3} k^{(n-6)/3n} \left(\frac{n\alpha t}{\sqrt{n-1}} \right)^{(n+2)/n} \right]^r. \quad (46)$$

Fig.11 shows that the graphical representation of parametrized w is an increasing function of cosmic time. For the particular values of the parameters $w_0 = 0.01$ and $w_1 = -1$, the range of the EoS parameter is $-1.0 \leq w \leq -0.1$, i.e., initially the model behaves like Λ CDM, and as time increases, it behaves like a quintessence dark energy model. In this case, the range of w is smaller than that obtained by Liu et al. [47], Suzuki et al. [48], and Scolnic et al. [49].

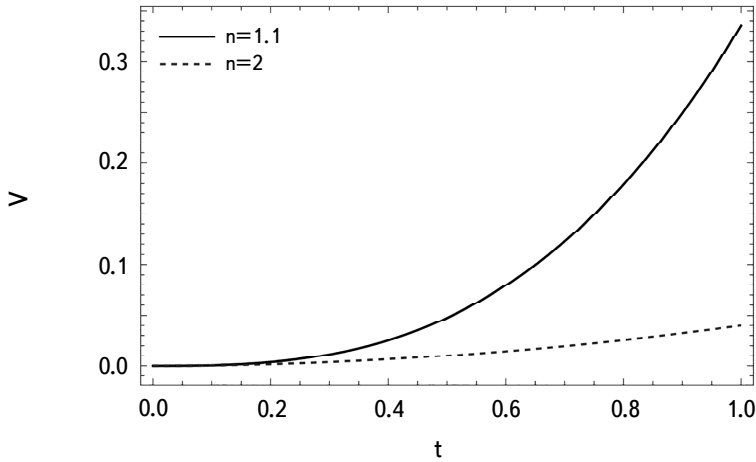


Fig.10. Plot of volume of universe V vs. cosmic time t for $\alpha = \beta = k = 0.1$.

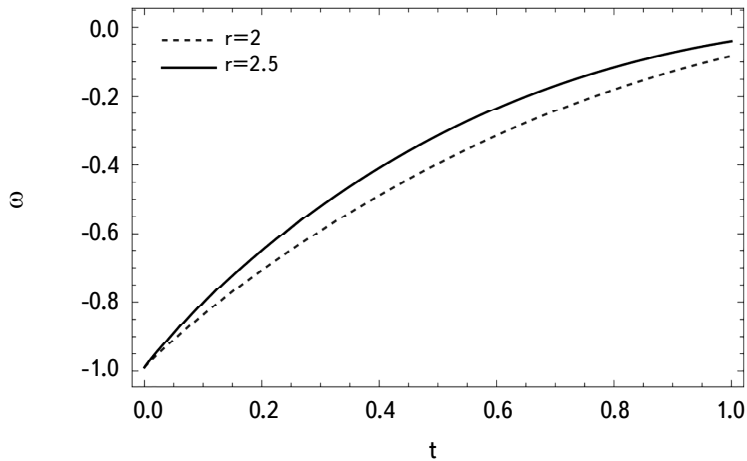


Fig.11. Plot of parametrize ω vs. cosmic time t for $\alpha = \beta = k = 0.1$ and $n = 1.1$.

6. *Conclusion.* In this paper, we have studied Bianchi type-VI₀ cosmological models in the presence of domain walls in $f(R, T)$ theory of gravity using the function $f(R, T) = R + 2f(T)$. The solutions of field equations are determined for the two cases such as $C_1 \neq 0$, $n = 0$ and $C_1 = 0$.

- In case I, the total energy density is positive for $\mu \geq -6.28$ with increasing time. The energy density of barotropic fluid is decreasing as a function of time. It is very large near $t=0$ and diminishes as t tends to infinity. As the tension of domain walls indicates the existence of domain wall, $\sigma_d > 0$, therefore domain walls exists in the early era of the universe and vanish with increasing time by transforming their energy into other forms of matter. In our case, q is positive, which indicates that the decelerating nature of the universe. Moreover, the expansion scalar and shear scalar are periodic functions and their ratio $\sigma/\theta \neq 0$, indicating that the universe is anisotropic. Similar results are also obtained by Adhav et al. [52] for domain walls. The novelty of work is that domain walls may behave like dark energy due to the negative pressure. The nature of the universe is cyclic, which begin with Big Bang and end in a Big Crunch.

- In case II, we observe that the sign of deceleration parameter is negative for $n < 1$, thus the universe is accelerating for $n < 1$. Also, q is positive for $n > 1$ and $q = 0$ for $n = 1$. As the metric potentials A , B , C are imaginary for $n < 1$ and infinite for $n = 1$, we discard these values of n and we consider $n > 1$, for which we get q positive. Therefore, the universe is decelerating. The total energy density is a decreasing function of time. It is large near $t=0$. We observe that the energy density of barotropic pressure ρ_b is negative, whereas tension of the domain walls σ_d is positive. The ratio $\sigma/\theta \neq 0$ i.e. the study indicates an anisotropic universe. The universe is expanding.

- The range of EoS parameters in cases I and II are $-0.90 \leq w \leq -0.65$ and $-1.0 \leq w \leq -0.1$, respectively, which resemble the findings of Suzuki et al. [48] and Scolnic et al. [49].

Acknowledgments. The authors are grateful to the anonymous reviewer for his constructive comments and suggestions to improve the manuscript.

¹ Department of Mathematics, A.E.S. Arts, Commerce and Science College, Hingoli-431513, India

² Department of Mathematics, Toshniwal Arts, Commerce and Science College, Sengaon-431542, India, e-mail: dtadas144@rediffmail.com

³ Department of Mathematics, Sant Gadge Baba Amravati University Amravati-444602, India

ВСЕЛЕННАЯ ТИПА БЬЯНКИ VI_0 С ДОМЕННЫМИ СТЕНКАМИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ $f(R, T)$

С.П.ХАТКАР¹, Д.П.ТАДАС², С.Д.КАТОРЕ³

Рассмотрено пространство-время типа Бьянки VI_0 с доменными стенками в рамках модифицированной теории гравитации $f(R, T)$. Для решения уравнений поля предполагается, что скаляр сдвига σ пропорционален скаляру расширения θ . Рассматривается также параметризация уравнения состояния баротропной жидкости и обсуждается влияние на доменные стенки. Было замечено, что доменные стенки могут вести себя как темная энергия. Также подробно обсуждаются некоторые физические параметры.

Ключевые слова: *доменные стенки: пространство-время типа Бьянки VI_0 ; гравитация $f(R, T)$*

REFERENCES

1. T.Chiba, Phys. Lett. B, **575**, 1-3, 2003.
2. S.Nojiri, S.D.Odintsov, Phys. Rep., **505**, 59, 2011.
3. S.Nojiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou, Phys. Rep., **692**, 1, 2017.
4. S.M.Carroll, V.Duvvuri, M.Trodden et al., Phys. Rev. D, **70**, 043528, 2004.
5. S.Nojiri, S.D.Odintsov, Phys. Rev. D, **68**, 123512, 2003.
6. S.Capozziello, S.Carloni, A.Troisi, Recent Res. Dev. Astron. Astrophys., **1**, 625, 2003.
7. T.Harko, F.S.N.Lobo, S.Nojiri et al., Phys. Rev. D, **84**, 024020, 2011.
8. P.K.Sahoo, B.Mishra, S.K.Tripathy, Indian J. Phys., **90**, 485, 2016.
9. C.P.Singh, V.Singh, Gen Relativ Gravity, **46**, 1696, 2014.
10. A.Pasqua, S.Chattopadhyay, I.Khomenko, Can. J. Phys., **91**(8), 632, 2013.
11. D.R.K.Reddy, R.Santikumar, R.L.Naidu, Astrophys Space Sci., **342**, 249, 2012.
12. V.U.M.Rao, D.Neelima, Astrophys Space Sci., **345**, 427, 2013.
13. V.Singh, C.P.Singh, Astrophys Space Sci., **356**, 153, 2015.
14. B.Mishra, S.Tarai, S.K.Tripathy, Adv. High Energy Phys., **2016**, 8543560, 2016.
15. R.Chaubey, A.K.Shukla, Pramana-J Phys., **88**, 65, 2017.
16. A.Vilenkin, Phys. Rep., **121**, 263, 1985.
17. R.Rajaraman, Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory, North Holland Pub, Amsterdam, 1987.
18. I.Yilmaz, Gen Relativ Gravity, **38**, 1397, 2006.

19. *C.T.Hill, D.N.Schramm, J.N.Fry*, Cosmological structure formation from soft topological defects The Big Bang and Other Explosions in Nuclear and Particle Astrophysics, p.407-421, 1996.
20. *D.R.K.Reddy, R.L.Naidu*, Int. J. Theor. Phys., **46**, 2788, 2007.
21. *A.Lazanu, C.J.A.P.Martins, E.P.S.Shellard*, Phys. Lett. B, **747**, 426, 2015.
22. *K.S.Adhav, A.S.Nimkar, R.L.Naidu*, Astrophys Space Sci., **312**, 165, 2007.
23. *P.K.Sahoo, B.Mishra*, J. Theor. Appl. Phys., **7**, 12, 2013.
24. *K.Mahanta, A.Biswal*, J. Mod. Phys., **3**(10), 1479, 2012.
25. *D.C.Maurya, A.Pradhan, A.Dixit*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **17**(1), 2050014, 2020.
26. *F.Rahaman, M.Kalam*, Pramana-J Phys., **58**, 127, 2002.
27. *A.K.Biswal, K.L.Mahanta, P.K.Sahoo*, Astrophys. Space Sci., **359**, 42, 2015.
28. *G.S.Khadekar, R.Wanjari, C.Ozel*, Int. J. Theor. Phys., **48**, 2550, 2009.
29. *A.Pradhan, K.K.Rai, A.K.Yadav*, Braz. J. Phys., **37**(3b), 2007.
30. *R.K.Tiwari, A.Beesham, A.Pradhan*, Gravit. Cosmol., **23**, 392, 2017.
31. *P.P.Avelino, L.Sousa*, Universe, **1**(1), 6, 2015.
32. *P.K.Sahoo, B.Mishra*, J. Theor. Appl. Phys., **7**, 62, 2013.
33. *J.D.Barrow*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **211**(2), 221, 1984.
34. *M.Weaver*, Class. Quantum Grav., **17**, 421, 2000.
35. *A.Pradhan, R.Bali*, Int. J. Theor. Phys., **48**, 1466, 2009.
36. *S.Ram, Priyanka, M.K.Singh*, Pramana-J Phys., **81**, 67, 2013.
37. *C.B.Collins*, Phys. Lett. A, **60**(5), 397, 1977.
38. *J.Kristian, R.K.Sachs*, Astrophys. J., **143**, 379, 1966.
39. *K.S.Thorne*, Astrophys. J., **148**, 51, 1967.
40. *C.B.Collins, G.F.R.Ellis*, Phys. Rep., **56**(2), 65, 1979.
41. *D.Saadeh et al.*, Phys. Rev. Lett., **117**, 131302, 2016.
42. *Y.B.Zeldovich, I.Y.Kobzarev, L.B.Okun*, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **67**, 3, 1974; Sov. Phys. JETP, **40**, 1, 1974.
43. *S.D.Katore, S.P.Hatkar, R.J.Baxi*, Chin. J. Phys., **54**(4), 563, 2016.
44. *P.J.Steinhardt, N.Turok*, Science, **296**(5572), 1436, 2002.
45. *B.Basu*, An Introduction to Astrophysics, PHI Learning Pvt. Ltd., p.472, 2008.
46. *E.V.Linder*, Phys. Rev. Lett., **90**, 091301, 2003.
47. *Dao-Jun Liu, Xin-Zhou Li, Jiangang Hao et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **388**, 275, 2008.
48. *N.Suzuki et al.*, Astrophys. J., **746**, 85, 2012.
49. *D.M.Scolnic et al.*, Astrophys. J., **859**, 101, 2018.
50. *H.Caglar, S.Aygun*, Chin. Phys. C, **40**(4), 045103, 2016.
51. *P.K.Aluri et al.*, Class. Quantum Grav., **40**, 094001, 2023.
52. *K.S.Adhav, V.B.Raut, M.V.Dawande*, Int. J. Theor. Phys., **48**, 1019, 2009.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-567

THERMODYNAMICS AND ITS QUANTUM CORRECTION OF VACUUM NONSINGULAR BLACK HOLE

D.MA, T.HUO, C.LIU

Recieved 23 July 2024

Accepted 6 December 2024

This paper investigates the thermodynamic properties of vacuum nonsingular black holes. Considering the energy characteristics of the regularity spacetime, we use the modified first law of black hole thermodynamics to calculate the black holes' Hawking temperature, entropy and heat capacity. The obtained temperature is the same as that obtained by the surface gravity and tunneling methods. Also, the entropy is satisfied with the Bekenstein-Hawking area law. Notably, the heat capacity of large-mass black holes diverges, while that of small-mass black holes tends to zero, with a phase transition point existing. Additionally, we consider the quantum gravity effect by using the generalized uncertainty principle to study the quantum corrections of the thermodynamic properties for the vacuum nonsingular black holes. The generalized uncertainty principle introduces a logarithmic correction term to the black hole entropy. Also, the temperature and heat capacity are modified.

Keywords: *thermodynamics of black holes; vacuum nonsingular black holes; generalized uncertainty principle; the modified first law of black hole thermodynamics*

1. Introduction. In general, black holes are characterized by the presence of singularities within their interiors, the existence of singularities seems to be unavoidable for almost all of the physically acceptable solutions of Einstein's equation. However, there are some attempts to remove these singularities. The idea of replacing a Schwarzschild singularity with a de Sitter vacuum goes back to the 1968 papers of Sakharov who considered $p_r = -\rho$ as the equation of state for super high density and of Gliner who interpreted $p_r = -\rho$ as corresponding to a vacuum [1,2]. In 1968 Bardeen presented the spherically symmetric metric of the same form as the Schwarzschild and Reisner-Nordstrom metric, describing a non-singular black hole [3]. "Non-singular" black holes refer to those where singularities are absent. Specifically, these black holes' metric and curvature invariants remain non-singular throughout spacetime. The regular black holes of Bardeen are spherically symmetric and violate the strong energy condition. The violation of an energy condition is the origin of the regularity of Bardeen's black hole [4]. With a de Sitter core, the internal region of regular geometries violates one

condition of Hawking-Penrose theorems of singularity. Then, with such a violation, the existence of a singular point is not a necessary consequence of the theorems of singularity. Later, other regular solutions with spherical symmetry were proposed by Dymnikova, Bronnikov, and Hayward [5-9]. Now, many regular black holes have been proposed and their intriguing properties including thermodynamics that are different from those of singular black holes were studied (see [10] as a review and references therein). The vacuum nonsingular black hole, provided by Dymnikova, is an important and feasible example of a black hole with a regular center, where the de Sitter core smoothly connects to the exterior geometry of Schwarzschild [5-7]. In the classical framework of general relativity, the vacuum nonsingular black hole provides an important new perspective for understanding static spherically symmetric black holes. This black hole's spacetime structure and thermodynamic properties have garnered attention [11-14].

The discovery of black hole thermodynamics has profoundly influenced our understanding of the relationship between general relativity and quantum field theory. The concept of Hawking radiation has changed our understanding of black holes [15]. It reveals that black holes are not just the result of gravity, but also have thermodynamic properties. Historically, black holes were considered completely irreversible systems without temperature or entropy. However, the theory of Hawking radiation suggests that black holes have a temperature and emit particles over time, gradually losing mass. This discovery links black holes to thermodynamics, indicating that they also follow the laws of thermodynamics [15,16]. In the thermodynamics of black holes, the temperature is obtained from the first law of black hole thermodynamics. The entropy for the black hole is given by Bekenstein's area law [17]. For the acquisition of Hawking radiation, in addition to Hawking's initial method, there is also the tunneling method that provides black hole radiation. A particle may cross the event horizon by quantum tunneling in the tunneling method. Two methods can be employed to derive the tunneling result: the first, pioneered by Parikh and Wilczek, is the null-geodesic method, and the WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) method is used [18,19]; the second, developed by Agheben et al., relies on the Hamilton-Jacobi ansatz [20]. In this paper, we will adopt the former approach to calculate Hawking temperatures for the vacuum nonsingular black holes. Then, based on the first thermodynamics law of the black hole, we calculate the temperature and derive the entropy and heat capacity of the regular black hole. The calculations reveal an inconsistency between the temperature derived from the first law of thermodynamics and that obtained through surface gravity and tunneling methods. In the lectures [21-25], by examining the internal energy characteristics of regular black holes, it is pointed out that the traditional first law of black hole thermodynamics is no longer used

and needs to be revised. The correction form of the first law of black hole thermodynamics was provided by Ma et al. [21,22]. The deviation relies on the general structure of the energy-momentum tensor of matter fields. When the black hole mass parameter M is included in the energy-momentum tensor, the traditional form of the first law is modified by an additional factor. Here, in the vacuum nonsingular spacetime, by utilizing the corrected first law of black hole thermodynamics, consistency was established for black hole temperature results obtained through surface gravity, tunneling, and the first law of thermodynamics. Additionally, the applicability of the Beckenstein-Hawking area law was verified.

The quantization of gravity poses a significant challenge in theoretical physics, and a quantum theory of gravity remains to be established. The existence of a minimum observable length scale at the Planck length level is a common prediction of various candidate theories of quantum gravity [26]. The concept of a minimum length has led to numerous quantum gravity effects, one of the most notable being the generalized uncertainty principle (GUP) [27-28], which suggests modifications to the semi-classical description of black holes from an extension of the Heisenberg uncertainty principle, which involves a deformation parameter related to a minimal fundamental length [29]. Introducing the GUP into black hole thermodynamics allows for studying quantum corrections to the thermodynamic properties of black holes [30-39]. The GUP offers high-energy corrections to black hole thermodynamics. Among these, the GUP can affect the quantum tunneling process of particles on the black hole horizon, increasing the probability of tunneling and giving quantum corrections to the thermodynamic quantities of the black hole [40-42]. For the vacuum nonsingular black holes, including the GUP effect in quantum tunneling calculations, reveal quantum corrections to the thermodynamic quantities of the black hole, wherein, the quantum correction to entropy is logarithmic.

The paper is organized as follows: Section 2 briefly introduces vacuum nonsingular black holes. Section 3 discusses the thermodynamic properties of regular black holes using the modified first law of black hole thermodynamics. Section 4 discusses the GUP effects on the black holes' temperature, entropy, and hot capacity. The last part is a summary and discussion. Where the speed of light c in vacuum, the gravitational constant G , the Boltzmann constant k_B , and the reduced Planck constant $\hbar$ are set to 1.

2. Vacuum non-singular black holes. The general form of a static spherically symmetric metric can be written as

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

In Dymnikova's work [5], the stress-energy-momentum tensor is assumed to have a specific form, which is given by

$$T_t^t(r) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g}\right), \quad (2)$$

where ε_0 represents the non-zero energy density of the vacuum, $r_g = 2M$ and M is the mass of the black hole as measured by a distant observer. r_0 is connected with ε_0 by the de Sitter relation

$$r_0^2 = \frac{3c^4}{8\pi G \varepsilon_0}. \quad (3)$$

Integrating the Einstein field equations with the assumed form of T_t^t , we obtain the following

$$f(r) = 1 - \frac{R_g(r)}{r}, \quad (4)$$

where

$$R_g(r) = r_g \left(1 - e^{-r^3/r_0^2 r_g}\right), \quad (5)$$

the mass term $m(r)$ given in [5] is of the form

$$m(r) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^r T_t^t r^2 dr. \quad (6)$$

The quadratic invariant of the Riemann tensor $\mathcal{R}^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ has the form [5]

$$\mathcal{R}^2 = 4 \frac{R_g^2(r)}{r^6} + 4 \left(\frac{3}{r_0^2} e^{-r^3/r_0^2 r_g} - \frac{R_g(r)}{r^3} \right) + \frac{2R_g(r)}{r^3} - \frac{9r^3}{r_0^4 r_g} e^{-r^3/r_0^2 r_g}, \quad (7)$$

when $r=0$, $\mathcal{R}^2$ does not diverge and remains finite, tending towards the de Sitter value $\mathcal{R}^2 = 24/r_0^4$, which should be the limit of spacetime curvature. All other invariants are also finite. So the Dymnikova solution describes a spherically symmetric black hole singularity-free everywhere, hence called a "non-singular black hole".

For $r \gg r_0^2 r_g$, the vacuum non-singular black hole (5) is actually consistent with the Schwarzschild solution. For $r \ll r_0^2 r_g$, it is consistent with the de Sitter solution. It provides an important new perspective for understanding static spherically symmetric black holes.

3. Thermodynamics of vacuum non-singular black holes. In this section, we discuss the thermodynamics of non-singular black holes. We calculate the temperature using the surface gravity method, the quantum tunneling method, and the first law of thermodynamics. One will observe discrepancies between the temperature obtained from the first law of thermodynamics and those derived

through two other methods. By employing the corrected first law of black hole thermodynamics as provided in reference [21], we obtain a black hole temperature consistent with surface gravity and quantum tunneling methods, yielding entropy by the Beckenstein-Hawking area law. Further computation of the black hole's heat capacity suggests the possibility of establishing thermodynamically stable vacuum nonsingular black holes, contrary to Schwarzschild black holes.

Firstly, we calculate the temperature using the surface gravity method. The temperature of a black hole is a characteristic quantity of its event horizon, which can be derived from the surface gravity on the event horizon. The surface gravity on the black hole horizon is a conserved quantity determined by the geometric structure of the horizon. The calculation is as follows [15]

$$T_{\kappa} = \frac{\kappa}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \bigg|_{r=r_h} = \frac{1}{4\pi} g'(r) \big|_{r=r_h}, \quad (8)$$

here, κ represents the surface gravity, r_h stands for the location of the event horizon. Making a simple change to equation (4) and calculating according to (8), we have

$$T_{\kappa} = \frac{3r_h^3 - 3r_h^2 + r_0^2 r_g}{4\pi r_h r_g r_0^2}. \quad (9)$$

Using (1) and (4) and setting $[g_{tt}]_{r=r_h} = 0$, we can obtain the black hole's horizon radius, which is

$$r_h = 2M \left(1 - e^{-r_h^3/2Mr_0^2} \right). \quad (10)$$

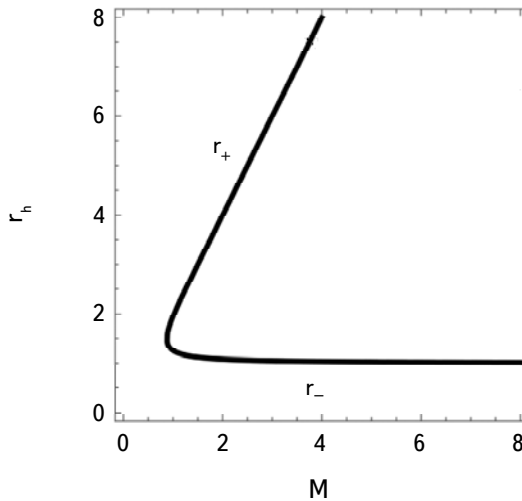


Fig.1. The metric (4) has two event horizons located for $r_0 = 1$.

Equation (10) does not have an analytical solution. Fig.1 shows that r_+ is the external event horizon, and r_- is related to the inner event horizon which is the Cauchy horizon. The metric (4) also showed that two horizons are movable. From equations (9) and (10), it can be seen that neglecting vacuum energy, letting $r_0^2 \rightarrow \infty$, one can respectively obtain the Schwarzschild cases of $r_h = 2M$ and $T_k = 1/8\pi M$.

The temperature of the black hole can also be determined using the quantum tunneling method of Hawking radiation [19,20]. For this, the metric is expressed in the Painlevé form to eliminate coordinate singularities, which can be achieved through a suitable transformation [43]

$$t \rightarrow t - \int \frac{\sqrt{1-f(r)}}{f(r)} dr, \quad (11)$$

this change (1) into

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + 2\sqrt{1-f(r)}dtdr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (12)$$

Form equation (12), the radial null geodesic equation of massless particles can be derived as

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{1-f(r)}, \quad (13)$$

the positive and negative signs in the equation describe the outgoing and ingoing, respectively.

The WKB approximation describes semi-classical approximate solutions to wave equations. For particle tunneling through a potential barrier, the WKB approximation expresses the tunneling probability related to the imaginary part of the tunneling action [19,20]. Specifically, the tunneling probability of a particle through a potential barrier under the WKB approximation is given by

$$\Gamma \propto e^{-2\text{Im}(S)/\hbar}, \quad (14)$$

where Γ is the tunneling probability, $\text{Im}(S)$ is the imaginary part of the action. In this expression, the negative exponent indicates the probability of exponential decline with increasing barrier width. The imaginary part of the action is typically expressed as

$$\text{Im}(S) = \text{Im} \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = \text{Im} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{p_r} dp_r' dr, \quad (15)$$

where $p(r)$ is the classical momentum of the particle at position r , and r_1 and r_2 are the positions on either side of the barrier.

Continuing the solution, we use the Hamiltonian canonical equation $\dot{r} = dH/dp_r = d\omega'/dp_r$, where ω' represents the energy of the tunneling particle.

Substituting this into equation (15) and changing the order of integration, we obtain

$$\text{Im}(S) = \text{Im} \int_0^\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{d\omega'}{\dot{r}} dr. \quad (16)$$

Expanding equation (13) in a Taylor series around the horizon and retaining only the leading order term, we can substitute this approximation into the radial motion equation (15) for the practice, leading to

$$\text{Im}(S) = \int_0^\omega \int_{r_i}^{r_f} \frac{2}{f'(r_h)(r - r_h)} dr d\omega'. \quad (17)$$

Using the Residue Theorem, we have the following integral concerning r

$$\text{Im}(S) = \text{Im} \int_0^\omega \frac{2\pi}{f'(r_h)} d\omega' = \frac{2\pi\omega}{f'(r_h)}. \quad (18)$$

In the limit of the WKB approximation, the tunneling probability will take the following form

$$\Gamma \propto \exp(-2\text{Im}(S)) = \exp(-\beta\omega). \quad (19)$$

Therefore, Hawking's temperature is

$$T_H = \frac{f'(r_h)}{4\pi} = T_\kappa. \quad (20)$$

In conclusion, the black hole temperature obtained through the quantum tunneling and surface gravity methods is the same.

The first law of thermodynamics provides another way to calculate the black hole temperature. For a vacuum spacetime with spherical symmetry, the first law of black hole thermodynamics can be expressed as

$$\delta M = T_H \delta S, \quad (21)$$

where S is the entropy of the black hole and T_H is the thermodynamic temperature of the black hole. Then, by utilizing the properties of the implicit function and equation (10), we have

$$F(M, r_h) = 2M \left(1 - e^{-r_h^3/2Mr_0^2} \right) - r_h = 0. \quad (22)$$

Using the derivative property of implicit functions, obtain dM/dr_h through equation (22). In this way we can obtain

$$T_H = \frac{dM}{dS} = \frac{1}{2\pi r_h} \frac{dM}{dr_h} = \frac{r_g (3r_h^3 - 3r_h^2 r_g + r_0^2 r_g)}{4\pi r_h^2 (r_h^3 - r_h^2 r_g + r_0^2 r_g)}. \quad (23)$$

It is seen that the temperature according to the first law of black hole

thermodynamics differs from the temperature obtained from the surface gravity method and the tunneling method. The Dymnikova black hole is not a vacuum solution of the Einstein field equations. The three methods yield two different temperatures for the black hole, while the surface gravity and tunneling effects give the same result.

Furthermore, if we require the vacuum non-singular black hole to satisfy the first law, then the entropy is not the Beckenstein-Hawking entropy. Resolving the contradiction between entropy and area requires considering the contribution of matter fields. Since the Dymnikova black hole is a solution of the Einstein equations, we tend to believe that the entropy of the black hole should follow the form of the Beckenstein-Hawking area law and that a modification of the black hole temperature obtained from the traditional laws of thermodynamics is necessary.

In [21], the authors studied the thermodynamics of the regular black hole and pointed out the existence of a correction factor in equation (21). Thus, the modified first law of black hole thermodynamics is [21]

$$C(M, r_h) \delta M = T_h \delta \frac{A}{4}, \quad (24)$$

where $C(M, r_h)$ is a corrected factor, and

$$C(M, r_h) = 1 + 4\pi \int_{r_h}^{\infty} r^2 \frac{\partial T_t^t}{\partial M} dr. \quad (25)$$

Then, for regular black holes, the first law of black hole thermodynamics has a correction term compared to the traditional first law of thermodynamics and the entropy satisfies the area law [23-25]. In the case of T_t^t being independent of mass, the correction term will vanish.

For vacuum non-singular black hole (1), substituting equation (2) into equation (25), the correction factor as

$$C(M, r_h) = \frac{r_h^4 + r_h r_g r_0^2 - r_h^3 r_g}{r_0^2 r_g^2}. \quad (26)$$

Thus, substituting the correction factor (26) into equation (24) directly gives the corrected form of the temperature as

$$T_h = C(M, r_h) T_H = \frac{3r_h^3 - 3r_h^2 2M + r_0^2 r_g}{4\pi r_h r_g r_0^2}. \quad (27)$$

This is consistent with the results obtained from the other two methods, that is

$$T_h = T_\kappa = T_t. \quad (28)$$

Furthermore, using the corrected first law of black hole thermodynamics and

substituting equations (26) and (27) into equation (29), we verify that the entropy of a vacuum non-singular black hole satisfies the area law

$$S = \int \frac{C(M, r_h)}{T_h} dM = \pi r_h^2 = \frac{A}{4}. \quad (29)$$

The heat capacity of a black hole provides information about the thermodynamic stability of the system. Next, we calculate the heat capacity of a vacuum nonsingular black hole to understand its local stability. The heat capacity of a black hole is defined as

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r_h} \left(\frac{\partial T}{\partial r_h} \right)^{-1}. \quad (30)$$

For a Schwarzschild black hole, substituting the temperature $(T_h)_{Sch} = 1/(8\pi M)$ and the equation (29) into the equation (30), we have

$$(C_v)_{Sch} = -2\pi r_h^2. \quad (31)$$

A negative heat capacity indicates that a Schwarzschild black hole's thermodynamic system is unstable [44]. When the black hole loses energy, its mass and surface area decrease, but its temperature increases. As a result, the increased temperature makes the black hole more prone to radiate energy. As the radiation rate is related to the temperature, the black hole losing energy will radiate faster, leading to instability. Eventually, a radiation explosion occurs as the black hole radius approaches zero.

Substituting the temperature (27) and the entropy (29) into equation (30), we get

$$C_v = -\frac{2\pi r_h^2 (r_g r_0^2 + r_h^2 (-r_g + r_h)) (r_g r_0^2 + 3r_h^2 (-r_g + r_h))}{r_0^4 r_g^2 + 2r_0^2 r_g r_h^2 (r_g - r_h) + 3r_h^4 (-r_g^2 + r_h^2)}. \quad (32)$$

We can see that when $r_0^2 \rightarrow \infty$ of without considering vacuum energy, this equation gives the result (31) of Schwarzschild black hole.

As shown in Fig.2 (black curve), the heat capacity will approach zero as the black hole tends to the external one and diverges at the point where the temperature of the black hole takes the maximum. In the study referenced as [45], which investigates Bardeen and Hayward geometries, the discontinuity in the heat capacity of rotating black holes (RBHs) indicates a phase transition. We can also observe that the phase transition of the vacuum non-singular black hole occurs at $r_h = 2.242$. For large black holes, the heat capacity is negative, indicating that the thermodynamic system is unstable. In contrast, the heat capacity for small black holes is positive, indicating that the black hole may reach thermodynamic equilibrium with the surroundings. At the critical point of $r_h = 2.242$, there may

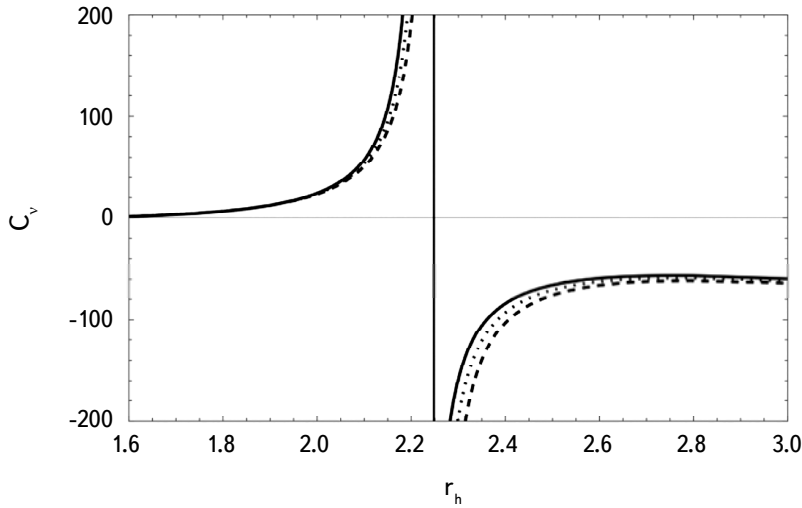


Fig.2. The black curve represents C_v , the black dashed curve represents $(C_v)_{GUP}$ for $\lambda = 0.4$, and the black dotted curve represents $(C_v)_{GUP}$ for $\lambda = 0.8$. Here $l = 1$, $M = 1$ and $r_0 = 1$.

exist a phase transition from a larger black hole to a smaller one, which is a second-order transition.

4. *Quantum corrections to black hole thermodynamics.* In this section, we will consider the GUP effect thermodynamic quantities related to vacuum non-singular black holes. The Heisenberg uncertainty principle can be extended to the GUP in the following form [26-28,30]

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + \frac{\lambda^2 l_p^2}{\hbar^2} \Delta p^2, \quad (33)$$

where λ is a dimensionless quantum gravity parameter, and $l_p \approx 10^{-35} m$ corresponds to the Planck length scale. When λ tends to zero, the GUP return to the standard uncertainty relation leads to the results of Hawking's semiclassical method. We can rewrite the GUP as

$$\Delta p \geq \frac{\Delta x}{2\lambda^2 l_p^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2 l_p^2}{\Delta x^2}} \right). \quad (34)$$

Considering $l_p \ll \Delta x$, we expand equation (34) using a Taylor series

$$\Delta p \geq \frac{1}{\Delta x} \left(1 + \frac{2\lambda^2 l_p^2}{\Delta x^2} + \dots \right). \quad (35)$$

Using the Heisenberg uncertainty principle, we have the particle energy $\omega \geq 1/\Delta x$.

Considering the GUP given by equation (35), the energy correction is

$$\omega_{GUP} \geq \omega \left(1 + \frac{2\lambda^2 l_p^2}{\Delta x^2} \right), \quad (36)$$

up to second order in l_p . Substituting equation (36) into equation (19), we obtain the particle tunneling probability corrected by the GUP as

$$\Gamma \simeq \exp \left[-\frac{4\pi\omega_{GUP}}{f'(r_h)} \right] = \exp \left[-\frac{4\pi\omega}{\hbar f'(r_h)} \left(1 + \frac{\lambda^2 l_p^2}{\Delta x^2} \right) \right]. \quad (37)$$

Comparing (37) with the Boltzmann factor $\exp(-\omega/T)$, we obtain the quantum-corrected Hawking temperature

$$T_{GUP} = T_h \left(1 + \frac{\lambda^2 l_p^2}{4r_h^2} \right)^{-1}, \quad (38)$$

where T_h is given by equation (27). It can be seen that GUP reduces the temperature of vacuum nonsingular black holes.

Using the modified first law of thermodynamics (24), the entropy of a vacuum non-singular black hole can be expressed as

$$S_{GUP} = \int \frac{C(M, r_h)}{T_{GUP}} dM, \quad (39)$$

ignoring the integration constant, the result can be expressed as

$$S_{GUP} = \pi \left(r_h^2 + \frac{\lambda^2 l_p^2}{2} \ln r_h \right) = \frac{A}{4} + \frac{\lambda^2}{4\pi} \ln A. \quad (40)$$

Where the first term is the contribution from the traditional black hole entropy, and the second term is the GUP correction term. The correction is the logarithm of the black hole's area, consistent with related research findings [46-49]. The correction term reflects the influence of the correlation between position and momentum on the black hole entropy when considering the GUP. Ignoring the GUP effect by letting $\lambda \rightarrow 0$, then the quantum-corrected entropy (40) reverts to the Beckenstein-Hawking area law (29).

Taking into account the GUP effects the formula (30) for the black hole's heat capacity can be written as

$$(C_v)_{GUP} = T_{GUP} \frac{\partial S_{GUP}}{\partial T_{GUP}}. \quad (41)$$

Substituting equations (40) and (38) into equations (41), we get

$$(C_v)_{GUP} = - \left\{ - \frac{2r_0^4 r_g^2 (4r_h^2 - l_p^2 \lambda^2)}{\pi(r_g r_0^2 + r_h^2(-r_g + r_h))(r_g r_0^2 + 3r_h^2(-r_g + r_h))(4r_h^2 + l_p^2 \lambda^2)^2} + \frac{4r_g r_0^2 (r_g - r_h^2) r_h^2 (4r_h^2 + 5l_p^2 \lambda^2)}{\pi(r_g r_0^2 + r_h^2(-r_g + r_h))(r_g r_0^2 + 3r_h^2(-r_g + r_h))(4r_h^2 + l_p^2 \lambda^2)^2} - \frac{6(r_g - r_h) r_h^4 (4r_g r_h^2 + 4r_h^3 + 3\lambda^2 l_p^2 - r_h \lambda^2 l_p^2)}{\pi(r_g r_0^2 + r_h^2(-r_g + r_h))(r_g r_0^2 + 3r_h^2(-r_g + r_h))(4r_h^2 + l_p^2 \lambda^2)^2} \right\}^{-1}. \quad (42)$$

This is the heat capacity of vacuum non-singular black holes under the influence of the GUP. It can be observed that when $\lambda \rightarrow 0$, $(C_v)_{GUP}$ can be restored to equation (32), which is consistent with the heat capacity results obtained without considering the GUP correction. Moreover, Fig.2 demonstrates that, in general, there is no significant distinction between $(C_v)_{GUP}$ and C_v .

In addition, by directly setting $r_0^2 \rightarrow \infty$ in equation (42), we obtain

$$(C_v)_{GUP} = -2\pi \frac{(r_h^2 + \lambda^2 l_p^2 / 4)^2}{r_h^2 - \lambda^2 l_p^2 / 4}, \quad (43)$$

which corresponding to the Schwarzschild black hole heat capacity when considering the GUP effects. Then, setting $\lambda \rightarrow 0$, equation (43) can also be reduced to the heat capacity equation (31) of the Schwarzschild black hole.

5. Conclusion. This paper investigates the thermodynamic properties of vacuum non-singular black holes. We find that the temperature obtained using the traditional first law of thermodynamics is inconsistent with those obtained using the surface gravity and tunneling methods. By considering the modified form of the black hole thermodynamic given in the [21], we get consistent results and ensure the validity of the Beckenstein-Hawking area law. Furthermore, using the corrected thermodynamic first law, we derive the heat capacity of vacuum non-singular black holes, indicating that these black holes may exhibit thermodynamic behaviors different from traditional Schwarzschild black holes. Under certain conditions, the heat capacity of vacuum non-singular black holes can be positive and then the black hole may reach thermodynamic equilibrium with the surroundings. Finally, we consider the quantum gravity effects manifested by the GUP and study the thermodynamics of vacuum non-singular black holes using the modified first law of black hole thermodynamics. In particular, the GUP introduces a logarithmic correction term to the black hole entropy.

Acknowledgments. The work was supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (No.LY14A030001).

Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000,
China, e-mail: czlbj20@163.com

ТЕРМОДИНАМИКА И ЕЕ КВАНТОВАЯ КОРРЕКЦИЯ ВАКУУМНОЙ НЕСИНГУЛЯРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Д.МА, Т.ХО, Ч.ЛЮ

В данной статье исследуются термодинамические свойства вакуумных несингулярных черных дыр. Учитывая энергетические характеристики регулярного пространства-времени, использован модифицированный первый закон термодинамики черных дыр для расчета температуры Хокинга, энтропии и теплоемкости черных дыр. Полученная температура совпадает с температурой, полученной методами поверхностной гравитации и туннелирования. Кроме того, энтропия удовлетворяет закону площади Бекенштейна-Хокинга. Примечательно, что теплоемкость черных дыр большой массы расходится, в то время как теплоемкость черных дыр малой массы стремится к нулю, при этом существует точка фазового перехода. Кроме того, эффект квантовой гравитации рассмотрен использованием обобщенного принципа неопределенности для изучения квантовых поправок термодинамических свойств в случае вакуумных несингулярных черных дыр. Обобщенный принцип неопределенности вводит логарифмический поправочный член в энтропию черной дыры. Также модифицируются температура и теплоемкость.

Ключевые слова: *термодинамика черных дыр: вакуумные несингулярные черные дыры: обобщенный принцип неопределенности: модифицированный первый закон термодинамики черных дыр*

REFERENCES

1. *A.D.Sakharov*, Sov. Phys. JETP, **22**, 241, 1966.
2. *E.B.Gliner*, Sov. Phys. JETP, **22**, 378, 1966.
3. *J.C.S.Neves, S.Alberto*, Phys. Lett. B, **734**, 44, 2014.
4. *J.M.Bardeen*, in: GR-5 Book of Abstracts, Tbilisi, 1968.

5. *I.Dymnikova*, Gen. Relativ. Gravit., **24**, 235, 1992.
6. *I.G.Dymnikova*, Int. J. Mod. Phys. D, **5**, 529, 1996.
7. *I.Dymnikova*, Int. J. Mod. Phys. D, **12**, 1015, 2003.
8. *K.Bronnikov*, Phys. Rev. D., **63**, 044005, 2001.
9. *S.Hayward*, Phys. Rev. Lett., **96**, 031103, 2006.
10. *C.Lan et al.*, Int. J. Theor. Phys., **62**, 202, 2023.
11. *I.Dymnikova, K.Michal*, Entropy, **13**, 1967, 2011.
12. *G.Alencar et al.*, J. Cosmol. Astropart. Phys., **2023**, 100, 2023.
13. *M.H.Macêdo et al.*, arXiv preprint arXiv:2404.02818, 2024.
14. *T. De Lorenzo*, Investigating Static and Dynamic Non-Singular Black Holes., 2014.
15. *S.W.Hawking*, Math. Phys., **43**, 199, 1975.
16. *J.D.Bekenstein*, Phys. Rev. D, **7**, 2333, 1973.
17. *S.W.Hawking, N.P.Don*, Commun. Math. Phys., **87**, 577, 1983.
18. *M.K.Parikh, W.Frank*, Phys. Rev. Lett., **85**, 5042, 2000.
19. *M.Parikh*, Int. J. Mod. Phys. D, **13**, 2351, 2004.
20. *M.Angheben et al.*, JHEP, **2005**, 014, 2005.
21. *Meng-Sen Ma, Z.Ren*, Class. Quantum Gravity, **31**, 245014, 2014.
22. *D.V.Singh, S.Sanjay*, arXiv preprint arXiv:1909.11529, 2019.
23. *Zhong-Ying Fan, W.Xiaobao*, Phys. Rev. D, **94**, 124027, 2016.
24. *Zhong-Ying Fan*, Eur. Phys. J. C, **77**, 1, 2017.
25. *Y.Guo, M.Yan-Gang*, Nucl. Phys. B, **980**, 115839, 2022.
26. *L.J.Garay*, Int. J. Mod. Phys. A, **10**, 145, 1995.
27. *M.Maggiore*, Phys. Lett. B, **304**, 65, 1993.
28. *A.Kempf, M.Gianpiero, B.M.Robert*, Phys. Rev. D, **52**, 1108, 1995.
29. *E.C.Vagenas, M.A.Salwa, F.A.Ahmed*, EPL, **120**, 40001, 2018.
30. *L.N.Chang et al.*, Rev. D, **65**, 125028, 2002.
31. *Li Xiang*, Phys. Lett. B, **540**, 9, 2002.
32. *C.Z.Liu*, Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron., **51**, 113, 2008.
33. *S.Gangopadhyay, D.Abhijit, F.Mir*, EPL, **112**, 20006, 2015.
34. *Hui-Ling Li, Song De-Wen, Li Wei*, Gen. Relativ. Gravit., **51**, 1, 2019.
35. *R.Zhao, Z.Sheng-Li*, Phys. Lett. B, **641**, 318, 2006.
36. *B.Majumder*, Phys. Lett. B, **703**, 402, 2011.
37. *R.Banerjee, G.Sumit*, Phys. Lett. B, **688**, 224, 2010.
38. *R.Casadio, N.Piero, R. Da Roldão*, Class. Quantum Gravity, **35**, 185001, 2018.
39. *R.V.Maluf, C.S.N.Juliano*, Phys. Rev. D, **97**, 104015, 2018.
40. *B.Majumder*, Gen. Relativ. Gravity, **45**, 2403, 2013.
41. *D.Y.Chen, H.W.Wu, Y.Haitang*, JCAP, **2014**, 036, 2014.
42. *D.Chen, W.Houwen, Y.Haitang*, Adv. High Energy Phys., **2013**, 432412, 2013.
43. *P.Painlevé, C.R. Acad. Sci. (serie non specifiée)*, **173**, 677, 1921.
44. *R.M.Wald*, Living Rev. Relativ., **4**, 1, 2001.
45. *R.Tharanath, S.Jishnu, V.C.Kuriakos*, Gen. Relativ. Gravity, **47**, 1, 2015.
46. *R.V.Maluf, C.S.N.Juliano*, Phys. Rev. D, **97**, 104015, 2018.
47. *R.K.Kaul, M.Parthasarathi*, Phys. Rev. Lett., **84**, 5255, 2000.
48. *M.A.Anacleto, F.A.Brito, E.Passo*, Phys. Lett. B, **749**, 181, 2015.
49. *M.A.Anacleto et al.*, Adv. High Energy Phys., **2016**, 8465759, 2015.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.4-581

MODIFIED FINCH AND SKEA STELLAR MODEL IN
HIGHER DIMENSIONSA.JANGID¹, S.DAS², B.S.RATANPAL³, K.K.VENKATARATNAM¹

Received 10 August 2024

Accepted 6 December 2024

Within the framework of higher dimensions, we enhance the model of Pandya and Thomas and assume that the system is anisotropic in the Finch and Skea ansatz. Our model explores various physical parameters in higher dimensions, including mass, energy density, radial and transverse pressures, and the anisotropy factor. We have used graphical technique to analyse the energy conditions, equilibrium conditions, and stability across different dimensions. Furthermore, the mass of a particular compact object have shown to increase with radial parameter as space-time dimensions increase. Additionally, by generating a mass-radius (M - R) plot, we demonstrate the influence of dimensional factor on the maximum mass and radius allowed by our toy model.

Keywords: *modified Finch-Skea ansatz; higher dimensions; Einstein field equations; Ricci tensor*

1. *Introduction.* The space-time geometry of Finch and Skea [1], which Duorah and Ray [2] first created, has drawn a lot of interest in the modelling of relativistic compact stars since it produces a well-behaved solution that Delgaty and Lake [3] later demonstrated to meet all the physical conditions of an actual star assuming isotropy in pressure. Nevertheless, a number of theoretical studies have demonstrated that anisotropy may arise in the high density region of compact star objects. According to Ruderman [4] and Canuto [5], the radial pressure p_r and the transverse pressure p_t do not necessarily need to be equal in the high-density regime of compact stars is reason for anisotropy. The existence of type-3A superfluid, rotation, an electromagnetic field, and other factors are among the many circumstances that Bowers and Liang [6] discussed in detail about the possibility of anisotropy in stellar interiors. As a result, several researchers have looked into the Finch-Skea model in relation to matter anisotropy like Hansraj and Maharaj [7], Ratanpal [8], Pandya [9], Maharaj et al. [10]. In the last few decades, a significant amount of study has been done to comprehend problems in astrophysics and cosmology within the context of lower as well as higher dimensions. In (2+1) dimensions, the Finch-Skea stellar model has been examined by Benenergy [11], Bhar et al. [12]. Along with new physics, the results gained

in the standard four dimensions are particularly generalised in higher dimensions. Higher dimensions have their roots in the research conducted in the past by Kaluza and Klein [13,14]. In order to reconcile gravitational and electromagnetic interactions, Kaluza and Klein separately initially proposed the idea of an additional dimension in addition to the standard four dimensions. The model is basically a five-dimensional extension of Einstein's general theory of relativity, which is very relevant to both particle physics and cosmology. However, the first strategy is ineffective. After it was discovered that many intriguing ideas of particle interactions require more dimensions than four for their consistent formulation, research into higher dimensional theories was once again resurrected a few decades ago, and it was greatly expanded. The results of four-dimensional GTR needed to be generalised to a higher-dimensional setting in order to examine the consequences of adding one or more additional space-time dimensions to the theory. In order to address various issues not understood in the usual four dimensions, a number of cosmological models in higher dimensions have been discussed in the literature by Shafi [15], Wetterich [16], Wiltshire [17], Accetta et al. [18], Paul, Mukherjee [19]. Chodos and Detweiler [20,21] first obtained a higher dimensional cosmological model in this direction. It is conceivable to recover the standard four-dimensional Newtonian gravity from a five-dimensional anti-de Sitter space-time in the low energy limit, according to an intriguing description of gravity provided by Randall and Sundrum [22]. The extra dimensions are not compact.

Liddle et al. [23] examined the effects of extra dimensions on the Kaluza-Klein model's ability to explain the structure of neutron stars. As an expansion of the four dimensions, the mass to radius ratio in higher dimensions for a uniform density star is calculated, and new findings have been published in the literature by Paul [24].

With some hope for future experimental discoveries, dimensional physics is currently a busy field of study [25]. By including a dimensionless parameter D (>0) in the Finch and Skea ansatz, we have expanded the Pandya and Thomas [9] model in this work and generally assumed that the system is anisotropic. In the present work the solution of the Einstein field equation for static spherically symmetric anisotropic matter distribution in higher dimensions.

The paper has been organized as follows. In section 2, for the assumed form of the space-time metric, the relevant field equations in higher dimensions have been laid down. The modified Finch and Skea model and solution is discussed in section 3. In section 4, the exterior region which is the Schwarzschild metric is matched with the interior to obtain boundary conditions and the model parameters. In section 5, the physical viability of our model is shown in different dimensions. Finally, some concluding remarks have been made in section 6.

2. *Field equations in higher dimensions.* The Einstein field equation in higher dimensions is given by

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathbf{R} = 8\pi G_D T_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

where G_D is the fundamental parameter of interest defined as the gravitational constant in higher dimensions. In higher-dimensional theories, G_D is related to the standard four-dimensional gravitational constant G by the relation $G_D = GV_{D-4}$, where V_{D-4} is the volume of the extra dimensions, and D represents the total number of dimensions. The parameter G_D is inherently dependent on the dimensions. As the dimensionality D increases, the corresponding gravitational constant G_D also increases. This relationship highlights the influence of additional spatial dimensions on the gravitational interaction, making G_D a crucial aspect of the model's framework in higher-dimensional theories. $R_{\alpha\beta}$ is Ricci tensor, R is Ricci scalar, $g_{\alpha\beta}$ is metric tensor and $T_{\alpha\beta}$ is the energy momentum tensor in D dimensions.

The Einstein's field equations (EFE) describe how matter and energy influence the curvature of space-time. In vacuum regions, where no matter or energy is present, the stress-energy tensor $T_{\alpha\beta}$ is zero. The field equations then simplify to

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathbf{R} = 0.$$

We write the interior space-time metric in higher dimensions of a static spherically symmetric distribution of anisotropic matter in the form

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\mu} dr^2 + r^2 d\Omega_n, \quad (2)$$

where $\nu(r)$ and $\mu(r)$ are the two unknown metric functions, $n = D - 2$ and $d\Omega_n^2 = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 (d\theta_3^2 + \dots + \sin^2\theta_{n-1} d\theta_n^2)$ is a linear element on a n -dimensional unit sphere in polar coordinates parameterized by the angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. The dimension of the space-time is assumed as $D = n + 2$ so that for $n = 2$ it reduces to ordinary 4-dimensional space-time geometry. We follow the treatment of Maharaj and Maartens [26] and write the energy momentum tensor of the anisotropic matter in the most general form filling the interior of the star in the form

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

where ρ and p denote the energy-density and isotropic pressure of the fluid, respectively and u_α is the 4-velocity of the fluid. If the energy-momentum tensor $T_{\alpha\beta}$ is equal to zero, it implies the absence of matter, which in turn means there is no energy density or pressure. Since energy density and pressure are functions

of the metric potentials, their absence suggests that there is no mass, leading to a scenario where the space-time curvature for the particular metric in question would be non-existent.

The anisotropic stress-tensor $\Pi_{\alpha\beta}$ has the form

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sqrt{3} S \left[C_\alpha C_\beta - \frac{1}{3} (u_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \right], \quad (4)$$

where $C^\alpha = (0, -e^\mu, 0, 0)$. For a spherically symmetric anisotropic distribution, $S(r)$ denotes the magnitude of the anisotropic stress. The non-vanishing components of the energy-momentum tensor are the following:

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = -\left(p + \frac{2S}{\sqrt{3}}\right), \quad T_2^2 = T_3^3 = -\left(p - \frac{S}{\sqrt{3}}\right). \quad (5)$$

Consequently, radial and tangential pressures of the fluid can be obtained as

$$p_r = -T_1^1 = \left(p + \frac{2S}{\sqrt{3}}\right), \quad (6)$$

$$p_t = -T_2^2 = \left(p - \frac{2S}{\sqrt{3}}\right), \quad (7)$$

so that

$$S = \frac{p_r - p_t}{\sqrt{3}}. \quad (8)$$

Using the space-time metric (2) and energy-momentum tensor (3) of the distribution the Einstein field equations are subsequently obtained as

$$8\pi G_D \rho = \frac{n(n-1)(1-e^{-2\mu})}{2r^2} + \frac{n\mu' e^{-2\mu}}{r}, \quad (9)$$

$$8\pi G_D p_r = \frac{n v' e^{-2\mu}}{r} - \frac{n(n-1)(1-e^{-2\mu})}{2r^2}, \quad (10)$$

$$8\pi G_D p_t = e^{-2\mu} \left(v'' + v'^2 - v'\mu' + \frac{(n-1)(v' - \mu')}{r} \right) - \frac{(n-1)(n-2)(1-e^{-2\mu})}{2r^2}, \quad (11)$$

where, a prime (') denotes differentiation with respect to the radial parameter r .

By defining the mass $m(r)$ within a radius r as

$$m(r) = \int_0^r \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} u^n \rho(u) du, \quad (12)$$

we get an equivalent description of the system as

$$e^{-2\mu} = 1 - \frac{8\pi G_D \Gamma((n+1)/2) m(r)}{nr^{n-1} \pi^{3/2}}, \quad (13)$$

$$nr v'(r-2m) = 8\pi G_D p_r r^3 + n(n-1)m, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -\frac{4}{r}(8\pi G_D \sqrt{3} S) &= \frac{4}{r}(8\pi G_D p_r) \left[\frac{n-2}{n} + \frac{v'r}{n} \right] \\ &+ \frac{4}{n}(8\pi G_D p'_r) + \frac{4v'}{r^2}(n-2)e^{-2\mu} - \frac{2}{r^3}(n-1)(n-2)(e^{-2\mu}-1). \end{aligned} \quad (15)$$

The solution of field equations is discussed in the next section.

3. *Modified Finch and Skea model and solution.* We use the ansatz

$$e^{2\mu} = \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^s, \quad (16)$$

where $s > 0$ is a dimensionless parameter and R is the curvature parameter having the dimension of length. By introducing the parameter s , one can impose constraints on the radius to achieve the desired compactness M/R of the model. By appropriately setting the compactness parameter s for a given mass, it becomes feasible to tune and adjust the compactness of the system. Note that the ansatz (16) is a generalization of the Finch and Skea model which can be regained by setting $s = 1$.

Using Eq. (16) in Eqs. (9) and (12) we have the following

$$8\pi G_D \rho = \frac{(n(n-1)/2r^2)(1+r^2/R^2) \left[(1+r^2/R^2)^s - 1 \right] + ns/R^2}{(1+r^2/R^2)^{s+1}}, \quad (17)$$

$$m(r) = \frac{nr^{n-1} \pi^{(n+1)/2}}{8\pi G_D \Gamma((n+1)/2)} \left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-s} \right]. \quad (18)$$

To integrate Eq. (14), we use the prescription of Sharma and Ratanpal [27] by assuming the radial pressure in the form

$$8\pi G_D p_r = \frac{p_0(1-r^2/R^2)}{R^2(1+r^2/R^2)^{s+1}}, \quad (19)$$

which is a reasonable assumption since the radial pressure vanishes at $r = R$. Consequently, the curvature parameter R in our model turns out to be the boundary of the star.

Substituting Eq. (19) in Eq. (14) we have

$$v' = \frac{n-1}{2} \frac{\left[(1+r^2/R^2)^s - 1 \right]}{r} + \frac{p_0 r (1-r^2/R^2)}{nR^2(1+r^2/R^2)}, \quad (20)$$

and integrating, we get

$$e^{2v} = C \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{2p_0/n} \exp \left[-\frac{p_0 r^2}{nR^2} + (n-1) \int_0^r \left[\left(1 + \frac{u^2}{R^2} \right)^s - 1 \right] \frac{du}{u} \right], \quad (21)$$

where C is a constant of integration.

Finally, using Eq. (16), Eq. (19) and Eq. (15), the anisotropy is obtained as

$$\begin{aligned} 8\pi G_D \sqrt{3} S = & -\frac{r}{n} \left[\frac{n(n-2)}{2r^2} (1 - A_3(r)) + \frac{2nsA_3(r)}{(r^2 + R^2)} \right] A_2(r) + A_4(r) \left[\frac{n-2}{n} + \frac{r}{n} A_2(r) \right] \\ & + \frac{2r}{nR} A_1(r) + (n-2)A_4(r) + \frac{(n-1)(n-2)}{r^2} - \frac{A_3(r)}{4} \left[\frac{4(n-2)}{r} + \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$A_1(r) = \frac{p_0 r^2 \left[(s+2) - sr^2/R^2 \right]}{R^4 \left(1 + r^2/R^2 \right)^{s+2}}, \quad (23)$$

$$A_2(r) = \frac{(n-1)}{2r} \left[\left(1 + r^2/R^2 \right)^s - 1 \right] + \frac{p_0 r \left[1 - r^2/R^2 \right]}{nR^2 \left(1 + r^2/R^2 \right)}, \quad (24)$$

$$A_3(r) = \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-s}, \quad (25)$$

$$A_4(r) = \frac{p_0 \left(1 - r^2/R^2 \right)}{R^2 \left(1 + r^2/R^2 \right)^{s+1}}. \quad (26)$$

Subsequently, the tangential pressure can be obtained from the relation

$$8\pi G_D p_t = 8\pi G_D p_r - 8\pi \sqrt{3} S. \quad (27)$$

Using the above relations, we also obtain $dp_r/d\rho$ and $dp_t/d\rho$.

Thus, our model has five unknown parameters namely, C , p_0 , R , s and n which can be fixed by the appropriate boundary conditions as will be discussed in the following sections. To solve these equations, we must select two of the unknown model parameters independently (n , s). The remaining model parameters are then determined through boundary conditions. This approach allows us to solve Einstein's field equations and accurately model stellar configurations. Once the unknown model parameters are fully determined, we assess the physical plausibility of our model by evaluating whether the results align with known stellar properties. This validation process ensures that our model yields accurate and realistic results.

4. *Exterior space-time and matching conditions.* For spherically symmetric matter distributions, the vacuum solutions of Einstein's field equations are described by the Schwarzschild solution. This solution characterizes the space-time outside a non-rotating, spherically symmetric mass and is considered a vacuum solution because it applies in regions where the energy density is zero, i.e., outside the mass distribution. While modelling anisotropic compact stellar objects, the Schwarzschild vacuum solution is relevant only outside the star, where no matter is present. In the specific context of anisotropic compact stellar models, the vacuum solution would typically be considered outside the matter distribution, not within the star itself. To ensure physical consistency, the Schwarzschild exterior solution must match smoothly with the interior solution at the boundary of the stellar matter. The exterior region of the sphere is described by the Schwarzschild metric

$$ds_+^2 = -\left(1 - \frac{2M_h}{r^{n-1}}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M_h}{r^{n-1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_n, \quad (28)$$

where M_h is related to the mass M as $M_h = 16\pi G_D M / n\Omega_n$. The matching conditions across the boundary surface $r=R$ to be fulfilled are

$$e^{2\nu(R)} = \left(1 - \frac{2M_h}{r^{n-1}}\right), \quad (29)$$

$$e^{-2\mu(R)} = \left(1 - \frac{2M_h}{r^{n-1}}\right), \quad (30)$$

where $m(R) = M_h$ is the total mass enclosed within the radius R .

The above boundary conditions yield

$$R^{n-1} = \frac{2^{s+1} M_h}{2^s - 1}, \quad (31)$$

$$C = \exp\left[\frac{p_0}{n} - (n-1) \int_0^R \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^s - 1\right] \frac{dr}{r}\right] 2^{-(s+2p_0/n)}. \quad (32)$$

Eq. (31) clearly shows that the compactness of the stellar configuration M/R will depend on the parameters s and n . This contrasts with the earlier model developed by Sharma and Ratanpal [27], where s was set to 1, and thus did not account for this dependence.

5. *Physical conditions.* A physically acceptable stellar model must satisfy certain physical conditions

- (i) The pressures and density should be positive, $\rho, p_r, p_t > 0$.
- (ii) Radial pressure p_r should be zero at boundary $r=R$ i.e. $p_r(r=R)=0$.
- (iii) The density and pressures should be maximum at the centre and

monotonically decreasing towards the boundary of the sphere, which requires the following relations:

$(d\rho/dr)_{r=0} = 0$, $(dp_r/dr)_{r=0} = 0$, $(dp_t/dr)_{r=0} = 0$ and $(d^2\rho/dr^2)_{r=0} < 0$, $(d^2p_r/dr^2)_{r=0} < 0$, $(d^2p_t/dr^2)_{r=0} < 0$ so that the density gradients and pressure gradients $d\rho/dr < 0$, $dp_r/dr < 0$, $dp_t/dr < 0$ for $0 < r \leq R$.

(iv) The condition that the speed of the sound does not exceed light speed requires that, $0 \leq \sqrt{dp_r/d\rho} \leq 1$, $0 \leq \sqrt{dp_t/d\rho} \leq 1$.

(v) It must satisfy strong energy condition (SEC): $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$.

Also the trace energy condition (TEC), or $\rho - p_r - 2p_t \geq 0$, should be positive throughout the star's interior, as proposed by Bondi [28] and Tello-Ortiz et al. [29].

To show that the developed model is regular, well-behaved and capable of describing realistic stars, we have considered the data of the pulsar 4U1820-30 whose mass and radius have recently been estimated to be $M = 1.58M_\odot$ and $R = 9.1$ km, respectively [30].

For stability, in general, the adiabatic index

$$\Gamma = \frac{\rho + p_r}{p_r} \frac{dp_r}{d\rho}, \quad (33)$$

should be greater than 4/3 according [31].

5.1. Bound calculation. In order to examine the unknown parameter p_0 , we use boundary conditions.

(i) For $n = 2$ and $s = 1.1$

- The condition $p_t(r=R) > 0$ if $p_0 < 1.28$ and for $p_t(r=0) > 0$ if $p_0 > 0$.
- The expression $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r=R$), if $0 < p_0 < 3.5$ and $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r=0$) for $0 < p_0 < 1.86$.
- The expression $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r=R$), if $0.43 < p_0 < 5.1$ and $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r=0$) for $0.17 < p_0 < 1.41$.
- The expression of SEC ($r=R$) > 0 , if $0 < p_0 < 3.53$ and SEC ($r=0$) > 0 , if $p_0 > 0$.
- The expression of TEC ($r=R$) > 0 , if $p_0 > 0$ and TEC ($r=0$) > 0 , if $0 < p_0 < 1.104$. So for $n=2$ and $s=1.1$, our final bound is $0.43 < p_0 < 1.1$. In this work, we choose $p_0 = 0.44$ for $n=2$ and $s=1.1$.

(ii) For $n = 3$ and $s = 1.1$

- The condition $p_t(r=R) > 0$ if $p_0 < 5.8$ and for $p_t(r=0) > 0$ if $p_0 > 0$.
- The expression $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r=R$), if $0 < p_0 < 7.05$ and $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r=0$) for $0 < p_0 < 3.36$.
- The expression $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r=R$), if $1.08 < p_0 < 6.9$ and $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r=0$) for $0.60 < p_0 < 3.49$.
- The expression of SEC ($r=R$) > 0 , if $0 < p_0 < 13.4$ and SEC ($r=0$) > 0 ,

if $p_0 > 0$.

- The expression of TEC ($r = R$) > 0 , if $p_0 > 0$ and TEC ($r = 0$) > 0 , if $0 < p_0 < 2.2$.

So for $n = 3$ and $s = 1.1$, our final bound is $1.08 < p_0 < 2.2$. In this paper, we choose $p_0 = 1.5$ for $n = 3$ and $s = 1.1$.

(iii) For $n = 4$ and $s = 1.1$

- The condition $p_t(r = R) > 0$ if $p_0 < 15$ and for $p_t(r = 0) > 0$ if $p_0 > 0$.

- The expression $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r = R$), if $0 < p_0 < 11.7$ and $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r = 0$) for $0 < p_0 < 5.23$.

- The expression $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r = R$), if $2.05 < p_0 < 10.2$ and $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r = 0$) for $1.3 < p_0 < 6.6$.

- The expression of SEC ($r = R$) > 0 , if $0 < p_0 < 33.7$ and SEC ($r = 0$) > 0 , if $p_0 > 0$.

- The expression of TEC ($r = R$) > 0 , if $p_0 > 0$ and TEC ($r = 0$) > 0 , if $0 < p_0 < 3.68$.

So for $n = 4$ and $s = 1.1$, our final bound is $2.05 < p_0 < 3.68$. In this paper, we choose $p_0 = 2.5$ for $n = 4$ and $s = 1.1$.

(iv) For $n = 5$ and $s = 1.1$

- The condition $p_t(r = R) > 0$ if $p_0 < 32$ and for $p_t(r = 0) > 0$ if $p_0 > 0$.

- The expression $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r = R$), if $0 < p_0 < 17.7$ and $0 < dp_r/d\rho < 1$ ($r = 0$) for $0 < p_0 < 7.4$.

- The expression $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r = R$), if $3.3 < p_0 < 14.5$ and $0 < dp_t/d\rho < 1$ ($r = 0$) for $2.3 < p_0 < 10.8$.

- The expression of SEC ($r = R$) > 0 , if $0 < p_0 < 68.03$ and SEC ($r = 0$) > 0 , if $p_0 > 0$.

- The expression of TEC ($r = R$) > 0 , if $p_0 > 0$ and TEC ($r = 0$) > 0 , if $0 < p_0 < 5.52$.

So for $n = 5$ and $s = 1.1$, our final bound is $3.3 < p_0 < 5.52$. In this paper, we choose $p_0 = 3.5$ for $n = 5$ and $s = 1.1$.

We show that our suggested model is physically valid using a range of parameters and multiple physical tests. We presented graphical representations to aid in clarity for the pulsar 4U 1820 - 30. The matter density, transverse, and radial pressure inside the star object should all be positive for a physically plausible model. The radial pressure ought to disappear at the fluid sphere's surface. Additionally, there should be a negative gradients of pressure and density throughout the radius. We examine the impact of energy density and pressures for the anisotropic distribution of matter with increasing the dimensions of space-time. The curve of energy densities and pressures with different space-time dimensions is displayed in Fig.1. These figures demonstrate that pressures and energy density are both positive, reaching their maximum at the centres of stellar objects and

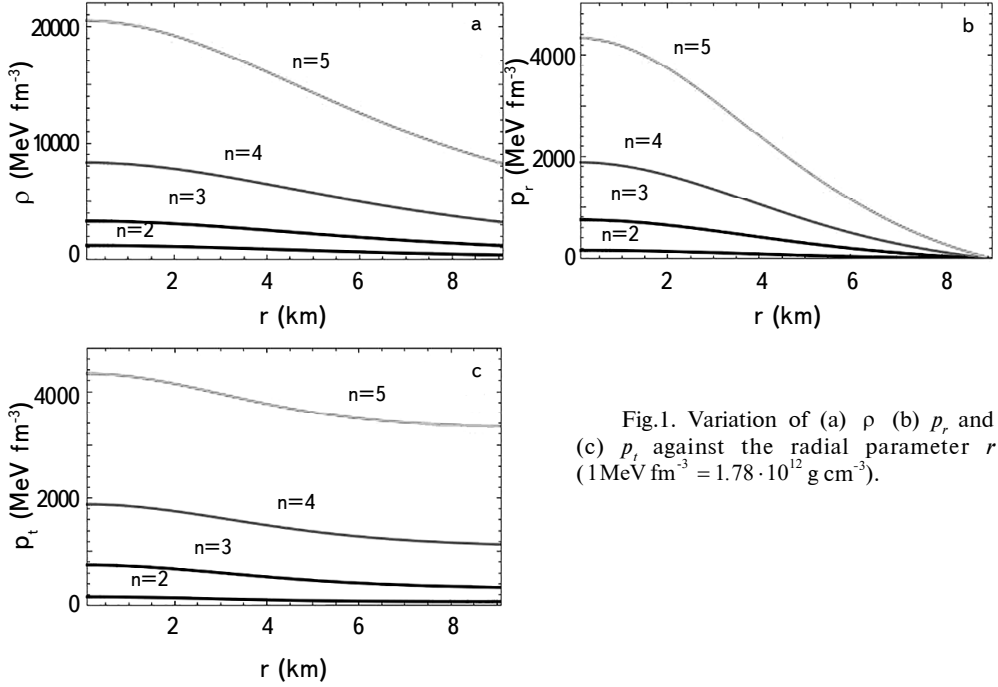


Fig.1. Variation of (a) ρ (b) p_r and (c) p_t against the radial parameter r ($1\text{MeV fm}^{-3} = 1.78 \cdot 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$).

monotonically declining towards their surfaces as needed. Whereas the radial pressure approaches zero at the star's border, ρ and p_r are both positive. In Fig.2 the profiles of density and pressure gradients are displayed. Plots demonstrate that these are all negative throughout the stellar interior, confirming the monotonically declining functions of ρ , p_r , and p_t . Here, we can observe that the energy density and pressure values increase as the dimensions increase and stay positive throughout the matter distribution. In contrast, it decreases as the radial coordinate r increases. To ensure the stability of the star, the model must adhere to the causality requirement. The radial and transverse sound velocities in our model, which are less than one with different dimensions as well, are represented by Fig.3. Understanding the nature of matter content in relativity requires that the model adheres to the strong energy requirement, which is $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$. Fig.4 displays the model's energy state and indicates that the model satisfies the energy criteria because the graph is positive across the matter distribution. The trace energy condition is also shown at Fig.4. As such, our energy-momentum tensor behaves nicely.

5.2. Stability criteria.

5.2.1. Adiabatic index. The adiabatic index is described as follows and given by [32]:

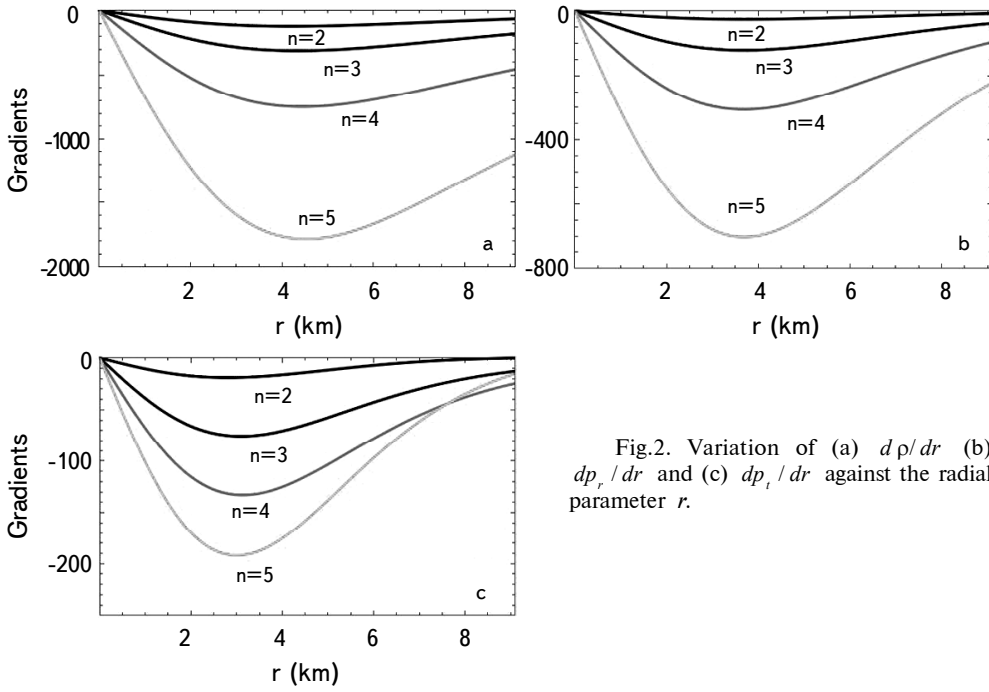


Fig.2. Variation of (a) $d\rho/dr$ (b) dp_r/dr and (c) dp_t/dr against the radial parameter r .

$$\Gamma = \frac{\rho + p_r}{p_r} \frac{dp_r}{d\rho}, \quad (34)$$

an anisotropic, relativistic star configuration's stability is correlated with its adiabatic index. Any star arrangement will remain stable if the adiabatic index is greater than $4/3$. Fig.6a shows the variation of adiabatic index variation, which makes it evident that the configurations are stable and the model met the requirements for every dimension.

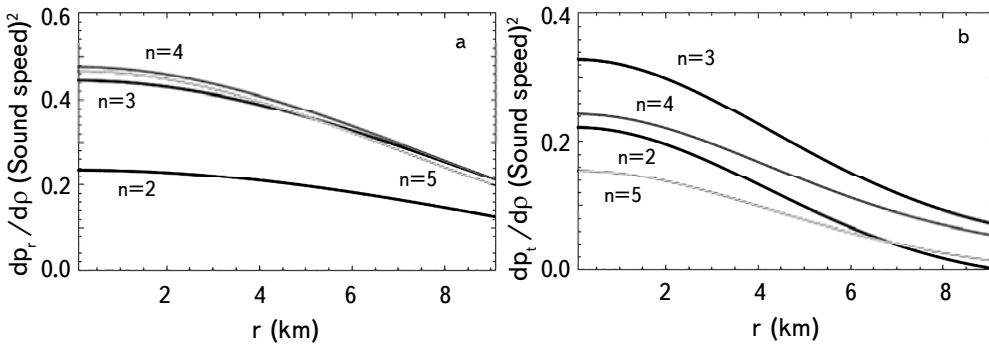


Fig.3. Variation of (a) $dp_r/d\rho$ and (b) $dp_t/d\rho$ against the radial parameter r .

5.2.2. *Cracking method.* Using Herrera's cracking idea [33], Abreu et al. [34] provides the following conditions for the model stability of an anisotropic matter distribution about the stability factor that if the model follows $-1 \leq v_{\perp}^2 - v_r^2 \leq 0$, then the model is a potentially stable model and model follows

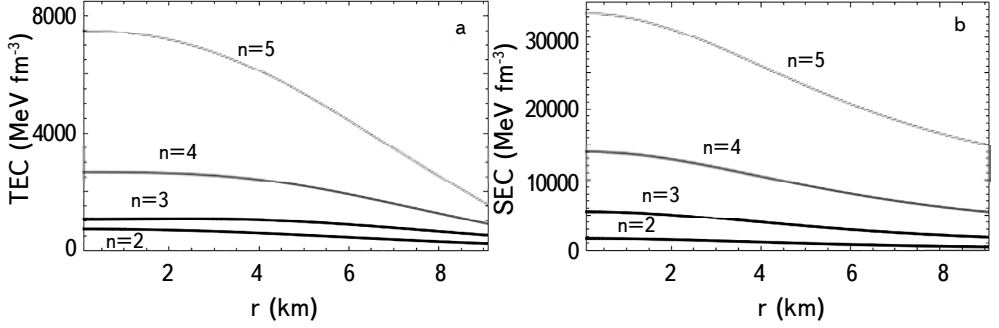


Fig.4. Variation of (a) $(\rho - p_r - 2p_t)$ and (b) $(\rho + p_r + 2p_t)$ against the radial parameter r .

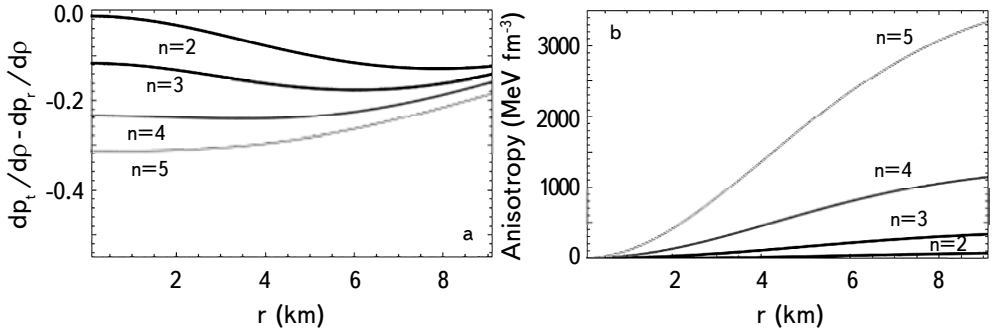


Fig.5. Variation of (a) $dp_t / d\rho - dp_r / d\rho$ and (b) Anisotropic parameter $S(r)$ against the radial parameter r .

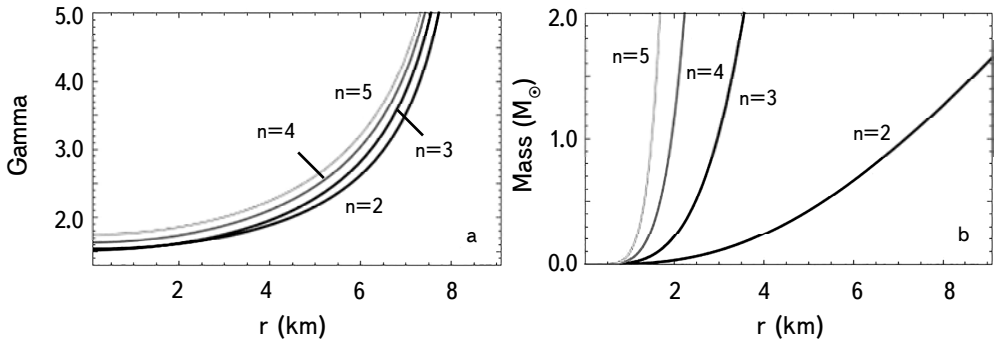
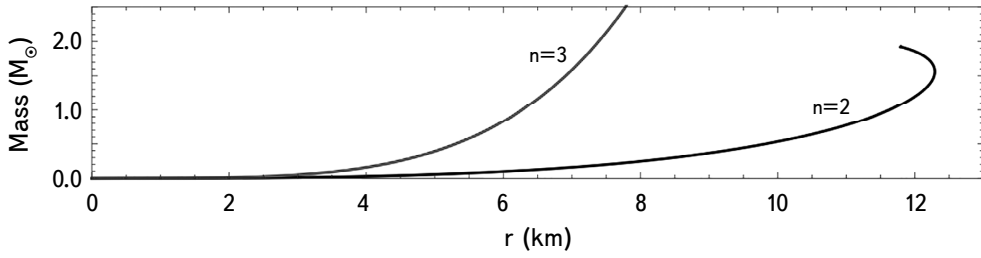


Fig.6. Variation of (a) Adiabatic index and (b) Mass against the radial parameter r .

Fig.7. $M - R$ plot.

$1 \leq v_{\perp}^2 - v_r^2 \leq 0$, then the model is potentially unstable. Given that the value of $-1 \leq v_{\perp}^2 - v_r^2 \leq 0$ in Fig.5a ranges between 0 and -1, we may conclude that this model has the potential stable in all dimensions.

6. Discussion. In this work, we have expanded the model originally proposed by Pandya and Thomas [9] by introducing a dimensionless parameter D (>0) into the modified Finch and Skea [1] ansatz and making the general assumption that the system is anisotropic. It is noteworthy that our modification of the Finch and Skea ansatz for the metric potential g_{rr} enables a fitting of the theoretically obtained compactness to the observed compactness of a given star. Additionally, an intriguing aspect of our approach is that, while it does not require a priori knowledge of the equation of state (EOS), we have successfully predicted the mass and radius of the pulsar 4U 1820-30 align well with observational data. We have demonstrated that these assumptions can yield physically viable solutions suitable for modelling realistic stars. Specifically, our results indicate that by systematically adjusting the parameter s , the predicted masses and radii for the pulsar 4U 1820-30 align well with observational data. This suggests that our toy model is physically feasible for describing relativistic anisotropic compact stars, especially since we tested the pulsar 4U 1820-30 for $D = 4$ and higher dimensions, based on our findings. Fig.1 shows that all three physical quantities, ρ , p_r and p_t are of decreasing nature from the centre to the surface of the star 4U 1820-30 in four and higher dimensions. The radial variation of anisotropy is depicted in Fig.5b for $n=2$ to $n=5$, respectively. From this fig, it was clear that the magnitude of anisotropy is maximum at the star's surface and zero at the star's centre for all four and higher dimensions. Fig.6b shows that as the number of space-time dimensions (D) increases, the mass of a compact object also increases. It may be noted that for usual 4-D ($n=2$) the mass is $1.58 M_{\odot}$ for radial parameter 9.8 km (radius). However, for the same star, the mass continues to increase as the number of dimensions rises. Thus, we infer that a compact object can accommodate more mass when observed in higher dimensions. We have also generated a mass-radius ($M - R$) plot for a fixed surface density of $4.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. The ($M - R$) curve is plotted with the inclusion of the

dimensional factor (n). This plot allows us to predict how the maximum mass of a compact object will change depending on dimension factor. As observed in Fig.7, the maximum mass increases as the number of space-time dimensions rises. Notably, for the usual 4 - D space-time (where $n=2$), the maximum mass predicted by our model is approximately $2 M_{\odot}$ and radius around 13 km, which is consistent with observational data. Therefore, by analyzing the ($M-R$) curve, the maximum allowed mass and radius of a compact star can be estimated across different space-time dimensions. In our present model by setting $n=2$, one can regain the modified Finch Skea model proposed earlier by Pandiya et al. [9]. Additionally, for $s=1$ the model reduces to the model mentioned in the work [35].

Acknowledgments. SD gratefully acknowledges support from the Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Pune, India, where part of this work was carried out under its Visiting Research Associateship Programme. BSR and AJ are thankful to IUCAA Pune for providing hospitality where part of this work was carried out.

¹ Department of Physics, Malaviya National Institute of Technology, Jaipur, 302017, India

² Department of Physics, Malda College, Malda 732101, India, e-mail: dasshyam321@gmail.com

³ Department of Applied Mathematics, Faculty of Technology & Engineering, The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Vadodara - 390 001, India

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗВЕЗДНАЯ МОДЕЛЬ ФИНЧА И СКЕА В ВЫСШИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

А.ДЖАНГИД¹, Ш.ДАС², Б.С.РАТАНПАЛ³, К.К.ВЕНКАТАРАТНАМ¹

В данном исследовании улучшена модель Пандьи и Томаса в рамках более высоких измерений и предположено, что система анизотропна в анзаце Финча и Скеа. Представленная модель исследует различные физические параметры в более высоких измерениях, включающих массу, плотность энергии, радиальное и поперечное давление и фактор анизотропии. Для анализа энергетических условий равновесия и устойчивости в различных измерениях используется графический метод. Кроме того, показано, что масса конкретного компактного объекта увеличивается с радиальными пара-

метрами по мере увеличения размерности пространства-времени. Кроме того, на графике масса-радиус (M - R) показано влияние размерностных факторов на максимальную массу и радиус, допустимые нашей моделью.

Ключевые слова: *модифицированный анзац Финча-Скеа: более высокие размерности: уравнения поля Эйнштейна: тензор Риччи*

REFERENCES

1. *M.R.Finch, J.E.Skea*, Classical and Quantum Gravity, **6**(4), 467, 1989.
2. *H.Duorah, R.Ray*, Classical and Quantum Gravity, **4**(6), 1691, 1987.
3. *M.Delgaty, K.Lake*, Computer Physics Communications, **115**(2-3), 395, 1998.
4. *M.Ruderman*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**(1), 427, 1972.
5. *V.Canuto*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **12**(1), 167, 1974.
6. *R.L.Bowers, E.Liang*, Astrophys. J., **188**, 657, 1974.
7. *S.Hansraj, S.Maharaj*, International Journal of Modern Physics D, **15**(08), 1311, 2006.
8. *B.Ratanpal, D.Pandya, R.Sharma et al.*, Astrophys. Space Sci., **362**(4), 82, 2017.
9. *D.Pandya, V.Thomas, R.Sharma*, Astrophys. Space Sci., **356**, 285, 2015.
10. *S.Maharaj, D.K.Matondo, P.M.Takisa*, International Journal of Modern Physics D, **26**(03), 1750014, 2017.
11. *A.Banerjee, F.Rahaman, K.Jotania et al.*, General Relativity and Gravitation, **45**(4), 717, 2013.
12. *P.Bhar, F.Rahaman, R.Biswas et al.*, Communications in Theoretical Physics, **62**(2), 221, 2014.
13. *T.Kaluza*, Zum unitätsproblem der physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**(arXiv: 1803.08616), 966, 1921.
14. *O.Klein*, Theory of relativity, Z. Phys., **37**, 895, 1926.
15. *Q.Shafi, C.Wetterich*, Nuclear Physics B, **289**, 787, 1987.
16. *C.Wetterich*, Phys. Lett. B, **113**(5), 377, 1982.
17. *D.L.Wiltshire*, Phys. Rev. D, **38**(8), 2445, 1988.
18. *F.S.Accetta, M.Gleiser, R.Holman et al.*, Nuclear Phys. B, **276**(3-4), 501, 1986.
19. *B.Paul, S.Mukherjee*, Phys. Rev. D, **42**(8), 2595, 1990.
20. *A.Chodos, S.Detweiler*, Phys. Rev. D, **21**(8), 2167, 1980.
21. *A.Chodos, S.Detweiler*, General Relativity and Gravitation, **14**, 879, 1982.
22. *J.Garriga, T.Tanaka*, Phys. Rev. Lett., **84**(13), 2778, 2000.
23. *A.R.Liddle, R.Moorhouse, A.Henriques*, Classical and Quantum Gravity, **7**(6), 1009, 1990.

24. *B.C.Paul*, Classical and Quantum Gravity, **18**(14), 2637, 2001.
25. *S.A.Abel*, Phys. World, **12**(6), 21, 1999.
26. *S.Maharaj, R.Maartens*, General Relativity and Gravitation, **21**, 899, 1989.
27. *R.Sharma, B.Ratanpal*, International Journal of Modern Physics D, **22**(13), 1350074, 2013.
28. *S.H.Bondi*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **302**(2), 337, 1999.
29. *F.Tello-Ortiz, S.Maurya, Y.Gomez-Leyton*, The European Physical Journal C, **80**(4), 324, 2020.
30. *T.Gangopadhyay, S.Ray, X.-D.Li et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **431**(4), 3216, 2013.
31. *H.Heintzmann, W.Hillebrandt*, Astron. Astrophys., **38**, 51, 1975.
32. *R.Chan, L.Herrera, N.Santos*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **265**(3), 533, 1993.
33. *L.Herrera*, Phys. Lett. A, **165**(3), 206, 1992.
34. *H.Abreu, H.Hernández, L.A.Núñez*, Classical and Quantum Gravity, **24**(18), 4631, 2007.
35. *S.Dey, B.Paul*, Classical and Quantum Gravity, **37**(7), 075017, 2020.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Рукописи могут быть представлены в печатном виде (hard copies) в двух экземплярах, отпечатанные на одной стороне листа формата А4, вместе с соответствующей электронной версией. Один из экземпляров должен быть подписан всеми авторами. Указываются сведения об авторах: фамилия, имя, отчество, название учреждения, электронный адрес.

2. *Рукопись* может быть набрана в виде файла с расширениями .doc, .docx, .rtf, через 1.5 интервала, используя Font 12pt.

3. *Рисунки* должны быть выполнены предельно аккуратно с разборчивыми надписями. Необходимые объяснения даются в подписях к рисункам, которые не должны повторяться в тексте. Рисунки необходимо отправить в виде .jpg, .bmp, .wmf, .eps файлов. С учетом формата журнала размеры рисунков редакцией могут быть изменены. В тексте рисунки нумеруются в порядке очередности (рис.1, рис.2, и т.д.). Если рисунок, состоит из двух или более панелей, то возможны обозначения типа рис.1a или рис.1a, b.

4. *Таблицы* должны иметь номера и информативные названия. Примечания должны быть сведены к минимуму и пронумерованы надстрочными арабскими цифрами.

5. *Цитирование литературы.* Цитируемая литература дается порядковым номером в строчку в квадратных скобках (например, [5]) и соответствует номеру в списке литературы. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) Для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов курсивным шрифтом (в оригинальной транскрипции), название журнала в принятом сокращении (сокращения для некоторых наиболее часто встречаемых журналов, применяемых в "Астрофизике", дается в сайте журнала), номер тома жирным шрифтом, номер первой страницы, год издания. Для русскоязычных журналов, которые переводятся на английский язык, в скобках приводятся соответствующее название журнала на английском, том, страница и год публикации.

б) Для книг следует указывать инициалы и фамилию автора курсивом, место и год издания.

6. *Оформление рукописи.* На первой странице дается название статьи (по возможности кратко и информативно), инициалы, фамилия каждого автора и аннотация на русском языке. На второй странице приводятся название статьи, инициалы, фамилия каждого автора и текст аннотации на английском языке, который должен полностью соответствовать русскому. В аннотации должны быть изложены главные результаты работы без ссылок на литературу. Максимальный объем аннотации не должен превышать 5% основного текста. Таблицы, список литературы, рисунки и надписи к рисункам печатаются на отдельных страницах. Расположение таблиц и рисунков отмечается на полях основного текста. Аннотации, основной текст, список литературы и таблицы должны иметь одну общую нумерацию страниц. Суммарный объем не должен превышать 16 стандартных страниц. Объем краткого сообщения - не более 4 страниц.

Статья состоит из пронумерованных разделов, начиная с "1. *Введение*". Названия разделов печатаются курсивом в строке, они должны быть краткими и содержательными. Подразделы могут быть пронумерованы как 2.1, 2.2 и т.д. Необходимые сокращения терминов или названий могут быть использованы во всей статье, однако их объяснение дается лишь один раз при первом упоминании.

7. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указать желательный порядок их публикации.

8. Рукописи авторам не возвращаются.

9. Авторам статьи (независимо от их количества) представляется 10 оттисков бесплатно.

