ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

И

ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сборник статей

Редакторы серии :

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Гармонический анализ и приближения имеют сильные традиции в Армении и являются одними из самых интенсивно прогрессирующих ветвей. Первые две международные конференции по этой тематике проходили в Нор Амберде (Армения), сентябрь 18 – 24, 1998 и сентябрь 11 – 18, 2001.

Настоящий и последующие два номера журнала содержат оригинальные статьи, представленные на конференции "Гармонический Анализ и Приближения, III", проведённой в Цахкадзоре (Армения), 20 - 27 сентября 2005.

Организаторами третьей конференции были Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный комитет:

Н. Аракелян (Армения), З. Чисельский (Польша), П. Готье (Канада), Б. С. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), А. М. Олевский (Израиль), В. Н. Темляков (США), А. А. Талалян (Армения), П. Л. Ульянов (Россия).

Организационный комитет:

Г. Геворкян, А. Саакян, А. Акопян, М. Погосян.

Около 100 математиков из 13 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочитаны следующими математиками:

Н. Аракелян (Армения) "О задачах Дирихле и Неймана", Б. Боянов (Болгария) "Интерполяция двумерными полиномами основанная на проекциях Радона", К. Де Бур (США) "Что являются пределами проекторов Лагранжа?", Н. Дин (Израиль) "Метрическое приближение одномерных множествозначных функций", П. Готье (Канада) "Приближение Дзета функции Римана и с помощью этой функции", А. Акопян (Армения) "О Теореме Безу и Nullstellensatz", К. Казарян (Испания) "А-множества и всплески", С. Конягин (Россия) "Сходимость подпоследовательности частичных сумм ряда Фурье интегрируемых функций", М. Лейси (США) "Теорема Нехари в полидиске", В. Лу (Германия) "Лакунарная суммируемость", К. Осколков (США) "Частица Шрёдингера как полифрактал", В. Темляков (США) "О гриди алгоритмах с ограниченной глубиной поиска", Туан Ву Ким (США) "Выборка сигналов ограниченного диапазона", П. Войтащик (Польша) "Анизотропные пространства и множества уровня".

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 5-19

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО СРЕДНЕГО КОЛЕБАНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. Н. Карапетянц

Ростовский государственный университет, Ростов, Россия
E-mail : alexeyk@stipendia.ru

Резюме. В работе вводятся и изучаются с помощью преобразования Березина весовые $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ пространства функций ограниченного среднего колебания в единичном круге. С помощью преобразования Березина дано описание пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и показано, что эти пространства совпадают с известными пространствами, определёнными в терминах средних по гиперболическим кругам в метрике Бергмана.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Весовое пространство $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $1 \le p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$, состоит из функций φ, измеримых в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\varphi \circ \alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty. \tag{1.1}$$

Здесь $\|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}$ является полунормой в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $w \to \alpha_z(w)$ – преобразование Мёбиуса единичного круга в себя, которое переводит $w = 0$ в $w = z$, а $\widetilde{\varphi}_\lambda(z)$ – преобразование Березина функции φ (см. ниже) и

$$L^p_\lambda(\mathbb{D}) = \left\{ f : \|f\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Грант # 06-01-00297-А

где $d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\mu(z)$, $\quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$.

Это пространство, кажется, впервые было изучено в работе [3], а затем в [1]. Основные результаты в этом направлении представлены в [2] (см. также литературу и дальнейшие детали в [4] – [6]). Определение пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ было дано в терминах средних (см. (2.5) ниже), и было доказано, что это пространство можно эквивалентным образом описать в терминах преобразования Березина как и выше. Отметим, что все эти исследования соответствуют случаю $\lambda = 0$, $p = 2$ (т.е. норма в (1.1) берётся в $L^2(\mathbb{D})$), т.е. в наших обозначениях это пространство имеет вид $\mathrm{BMO}^2_0(\mathbb{D})$.

Для исследования пространств, определённых в терминах средних для $p \geq 1$, $\lambda > -1$ мы отсылаем к работе [6]. В качестве одного из основных результатов мы покажем, что эти пространства эквивалентным образом могут быть описаны в терминах преобразования Березина.

В недавно опубликованной статье [7], невесовое пространство $\mathrm{BMO}^1_0(\mathbb{D})$ было изучено в связи со следующей проблемой : **предположим, что преобразование Березина равно нулю на границе круга ; Вытекает ли отсюда компактность соответствующего теплицевого оператора ?** В работе [7] дан положительный ответ для класса теплицевых операторов на невесовом пространстве Джрбашяна-Бергмана с символами в $\mathrm{BMO}^1_0(\mathbb{D})$.

Мы изучаем пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ с целью рассмотрения аналогичной проблемы для теплицевых операторов на весовых пространствах Джрбашяна–Бергмана $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ с символами в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ (эти результаты вскоре будут опубликованы). Однако, пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и их описание представляют самостоятельный интерес.

Мы дадим описание пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ в терминах преобразования Березина, являющегося естественным аппаратом в теории операторов в пространствах аналитических функций. Оно играет ту же роль в теории функций комплексного переменного, как и интеграл Пуассона в теории функций действительного переменного. Применение преобразования Березина для определения и описания пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ естественно с точки зрения комплексного анализа.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В параграфе приведены некоторые определения и вспомогательные результаты в основном из [2]. Всюду в этой статье p $(1 \leq p < \infty)$ произвольно. Весовое пространство Джрбашяна-Бергмана $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ содержит аналитические функции из $L^2_\lambda(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$, а $\langle f, g\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}d\mu_\lambda(z)$. Преобразование Березина функции φ (связанное с $A^2_\lambda(\mathbb{D})$) задаётся по формуле

$$\tilde{\varphi}_\lambda(z) = \langle \varphi k^\lambda_z, k^\lambda_z\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w)|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

где так называемое когерентное состояние в $A^2_\lambda(\mathbb{D})$ определяется как

$$k^\lambda_z(w) = \frac{(1-|z|^2)^{1+\lambda/2}}{(1-\bar{z}w)^{2+\lambda}} = (1-|z|^2)^{1+\lambda/2}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{e^\lambda_n(z)}e^\lambda_n(w).$$

Заметим, что это определение не зависит от ортонормального базиса $\{e^\lambda_n(z)\}$ в $A^2_\lambda(\mathbb{D})$, и, например, можно взять

$$e^\lambda_n(z) = d_{n,\lambda}z^n, \quad d_{n,\lambda} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+2)n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Преобразование Мёбиуса $w \to \alpha_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, $z \in \mathbb{D}$, единичного круга обладает следующими свойствами : $\alpha^2_z(w) = w$, действительный якобиан отображения $w \to \alpha_z(w)$ имеет следующий вид $|\alpha'_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\bar{w}|^4}$, а $1-|\alpha_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2}$. Гиперболическая метрика Бергмана в единичном круге определяется следующим образом :

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\alpha_z(w)|}{1-|\alpha_z(w)|} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Поскольку $|\alpha_z(w)| = \tanh\beta(z,w)$, то гиперболический круг

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z,w) < r\} \subset \mathbb{D}$$

имеет евклидовый радиус $\frac{(1-|z|^2)\tanh r}{1-|z|^2\tanh^2 r}$ и его евклидовым центром является точка $\frac{(1-\tanh^2 r)z}{(1-z\tanh^2 r)}$. Полагая

$$|D(z,r)|_\lambda = \int_{D(z,r)} d\mu_\lambda(w),$$

отметим, что для любого фиксированного $r > 0$ имеет место эквивалентность : $|D(z,r)|_\lambda \sim |D(z,r)|_0^{1+\frac{\lambda}{2}}$, где

$$|D(z,r)|_0 = \int_{D(z,r)} d\mu(w) = \left(\frac{(1-|z|^2)\tanh r}{1-|z|^2\tanh^2 r}\right)^2.$$

Предложение 2.1. *Для любого $z \in \mathbb{D}$ и $r > 0$ имеем*

$$C^{-1} < |k^\lambda_z(w)|^2|D(z,r)|_\lambda < C, \quad w \in D(z,r). \qquad (2.1)$$

Предложение 2.2. *([2], Лемма 2.12). Для заданных положительных чисел r, s, R, существует $C > 0$ такое, что для всех $z, w \in \mathbb{D}$ имеем*

$$C^{-1}(1-|z|^2) \le |1-z\overline{w}| \le C(1-|z|^2), \quad \beta(z,w) \le r,$$
$$C^{-1}|D(z,r)|_\lambda \le |D(w,s)|_\lambda \le C|D(z,r)|_\lambda, \quad \beta(z,w) \le R.$$

Как следствие, для любой функции φ, аналитической в $\mathbb{D}$ и любых чисел $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \le p < \infty$, $0 < r < \infty$, имеет место следующая оценка :

$$(1-|z|^2)^\beta |\varphi(z)|^p \le C \int_{D(z,r)} (1-|z|^2)^{\beta-2} |\varphi(w)|^p d\mu(w), \tag{2.2}$$

где постоянное C зависит только от p, r, β и не зависит от φ и $z \in \mathbb{D}$.

Предложение 2.3. *([2], Лемма 2.17). Для любой функции φ, определённой в $\mathbb{D}$, следующие утверждения эквивалентны :*

1. $\sup\{|\varphi(z) - \varphi(w)| : \beta(z,w) < s\} < \infty$,
2. $|\varphi(z) - \varphi(w)| \le C(\beta(z,w) + 1)$, $z, w \in \mathbb{D}$.

Предложение 2.4. *Если $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ и $\lambda > -1$, то*

$$J^\lambda_{\nu,\tau} = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(u,v)+1)^\nu d\mu_\lambda(v) \right)^\tau d\mu_\lambda(u) < \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для $\lambda = 0$, $\tau = 1$, $\nu = 2$, доказательство дано в [2], а для $\nu \le 0$ условие (2.3) очевидно. Если $\nu > 0$, тогда положим $v = \alpha_u(w)$. Вспоминая, что $\alpha_u(\alpha_u(w)) = w$ и

$$|k^\lambda_z(\alpha_z(\omega))|^2 d\mu_\lambda(\alpha_z(\omega)) = d\mu_\lambda(\omega), \tag{2.4}$$

получаем

$$\begin{aligned} J^\lambda_{\nu,\tau} &= \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\alpha_u(v)|}{1-|\alpha_u(v)|}\right)^\nu d\mu_\lambda(v)\right)^\tau = \\ &= \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+|w|}{1-|w|}\right)^\nu |k^\lambda_u(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^\tau \le \\ &\le C \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|w|)^{-\nu\varepsilon} |k^\lambda_u(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^\tau = \\ &= C(\lambda+1) \int_{\mathbb{D}} (1-|u|^2)^{\tau(\lambda+2)} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{\lambda-\nu\varepsilon}}{|1-\overline{u}w|^{4+2\lambda}} d\mu(w)\right)^\tau. \end{aligned}$$

Теперь, выбирая ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon\nu\tau > -1$ и используя оценку

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{-\nu\varepsilon}}{|1-\overline{u}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(w) \le C_1(1-|u|^2)^{-2-\lambda-\varepsilon\nu}$$

(см. [2], Теорема 1.7), получаем $J^{\lambda}_{\nu,r} \le C_2 \int_{\mathbb{D}} (1-|u|^2)^{-\epsilon\nu r} d\mu_\lambda(u) < \infty$.

Предложение 2.3 *([2], Лемма 2.13). Для любого $0 < r < \infty$ существуют положительное целое число N и последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{D}$ такие, что*

1. *круг $\mathbb{D}$ покрывается $\{D(a_n, r)\}_{n=0}^{\infty}$,*
2. *каждая точка $z \in \mathbb{D}$ принадлежит не более чем N множествам из $\{D(a_n, 2r)\}_{n=0}^{\infty}$,*
3. *если $n \neq m$, то $\beta(a_n, a_m) \ge r/2$.*

Для функций φ, локально интегрируемых в $\mathbb{D}$ и для $0 < r < \infty$ рассмотрим среднее

$$\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda} \int_{D(z,r)} \varphi(w) d\mu_\lambda(w),$$

и p-среднее колебание в метрике Бергмана :

$$\Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r) = \left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda} \int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

§ 3. ПРОСТРАНСТВО $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$

По определению, из $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ вытекает

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(0)|^p d\mu_\lambda(w) < \infty,$$

т.е. $\varphi \in L^p_\lambda(\mathbb{D})$, и следовательно $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) \subset L^p_\lambda(\mathbb{D})$. Норма в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ определяется как

$$\|\varphi\|_{BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(0)|,$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(0) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) d\mu_\lambda(w).$$

Используя (2.4), приходим к другому полезному представлению для полунормы :

$$\|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p \, |k^\lambda_z(w)|^2 \, d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}.$$

Лемма 3.1. *Пусть ψ – измеримая функция на $\mathbb{D}$. Тогда*

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2 \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \psi(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|\varphi(w)-\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le |\varphi(w)-\psi(z)| + |\psi(z)-\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|$$
$$= |\varphi(w)-\psi(z)| + \left|\int_{\mathbb{D}} (\varphi(u)-\psi(z))|k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|.$$

Для завершения доказательства достаточно применить неравенство Минковского, так как $|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$ является вероятностной мерой.

Следствие 3.2. Пространство $\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$ можно задавать эквивалентной нормой :

$$\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \inf_{\delta\in\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)-\delta|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(0)|,$$

и

$$\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} \le \|\varphi\|_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} \le 2\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})}.$$

Следствие 3.3. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, то $|\varphi| \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, и обратное утверждение в общем не верно.

Доказательство. Чтобы доказать неравенство

$$\|\,|\varphi|\,\|_{\#.\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})} \le \|\varphi\|_{\#.\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})},$$

отметим, что

$$\||\varphi|\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)\|^p_{L_\lambda^p(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} ||\varphi(w)| - \widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)\,|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$\le \int_{\mathbb{D}} ||\varphi(w)| - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\,|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$\le \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \le \|\varphi\|^p_{\#.BMO_\lambda^p(\mathbb{D})}.$$

Из этого результата вытекает более общий результат.

Следствие 3.4. Если $g(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера для $t \ge 0$ и $\varphi \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, то $g(|\varphi(z)|) \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$.

Пример 3.5. Если $\omega_\beta(z) = \ln^\beta \frac{1}{1-|z|^2}$, $0 \le \beta \le 1$, то $\omega_\beta(z) \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$. Действительно, если ψ измерима на $\mathbb{D}$, то

$$\|\omega_1\|_{\#.BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega_1(w) - \widetilde{\omega_1}_\lambda(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le 2\sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega_1(w) - \psi(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}.$$

Поэтому для $\psi(z) = \ln \frac{1}{1-|z|^2}$ заменой переменного $w = \alpha_z(u)$, получим

$$\|\omega_1\|^p_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} \le 2^p \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \ln \frac{1}{1-|w|^2} - \ln \frac{1}{1-|z|^2} \right|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$= 2^p \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \ln \frac{|1-\bar{z}u|^2}{(1-|u|^2)} \right|^p d\mu_\lambda(u) \le 2^p \int_{\mathbb{D}} \ln^p \frac{4}{1-|u|^2} d\mu_\lambda(u) < \infty.$$

Таким образом, $\ln^\beta \frac{1}{1-|z|^2} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $0 \le \beta \le 1$, так как $g(t) = t^\beta$, $0 \le \beta \le 1$, является функцией Гёлдера для $t \ge 0$.

§ 4. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЕРЕЗИНА

Прежде всего дадим несколько определений из [2]. Пусть $\gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{D}$ и $s(t)$ – длина $\gamma(t)$ в метрике Бергмана. Тогда $\frac{ds}{dt} = \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}$. Далее, пусть Π_z^λ означает ортогональную проекцию пространства Джрбашяна–Бергмана $A^2_\lambda(\mathbb{D})$ на подпространство, порождённое $k_z^\lambda(w)$:

$$\Pi_z^\lambda f(w) = \langle f, k_z^\lambda\rangle_\lambda k_z^\lambda(w) = (1-|z|^2)^{1+\frac{\lambda}{2}} f(z) k_z^\lambda(w).$$

Теорема 4.1. *Если* $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, *то функция* $\widetilde{\varphi}_\lambda$ *является липшицевой в метрике Бергмана*

$$|\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w)| \le C\beta(z,w).$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ – геодезическая в метрике Бергмана, связывающая $z = \gamma(0)$ и $w = \gamma(1)$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))dt, \tag{4.1}$$

и достаточно оценить $|\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|$. Прямыми вычислениями имеем

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t)) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) \left[\frac{d}{dt} k^\lambda_{\gamma(t)}(w) \overline{k^\lambda_{\gamma(t)}(w)} \right] d\mu_\lambda(w) =$$
$$= 2\int_{\mathbb{D}} \varphi(w) \mathrm{Re} \left[\left(\frac{d}{dt} k^\lambda_{\gamma(t)}(w) \right) \overline{k^\lambda_{\gamma(t)}(w)} \right] d\mu_\lambda(w).$$

Далее, дифференцируя тождество $\langle k^\lambda_{\gamma(t)}, k^\lambda_{\gamma(t)}\rangle_\lambda = 1$ по t, получаем

$$\mathrm{Re} \left\langle \frac{d}{dt} k^\lambda_{\gamma(t)}(w), k^\lambda_{\gamma(t)}(w) \right\rangle_\lambda = 0.$$

Следовательно
$$\mathrm{Re}\ \left[\left(\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]=0,$$
согласно определению $\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}$. Кроме того,
$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))=2\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)\mathrm{Re}\ \left[\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]d\mu_{\lambda}(w).$$
С другой стороны,
$$\int_{\mathbb{D}}\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}d\mu_{\lambda}(w)=0,$$
откуда вытекает
$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))=$$
$$=2\int_{\mathbb{D}}[\varphi(w)-\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))]\,\mathrm{Re}\ \left[\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]d\mu_{\lambda}(w).$$
Теперь, чтобы вычислить $\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)$, заметим, что
$$\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)=-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{(1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)})^{\frac{\lambda}{2}}(\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}+\gamma(t)\overline{\gamma'(t)})}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{2+\lambda}}$$
$$+(2+\lambda)\frac{(1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)})^{1+\frac{\lambda}{2}}}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{3+\lambda}}w\overline{\gamma'(t)}.$$
Следовательно,
$$\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)=(1-|\gamma(t)|^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\Big|_{w=\gamma(t)}\cdot k^{\lambda}_{\gamma(t)}(z)$$
$$=(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{-\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}+\gamma(t)\overline{\gamma'(t)}}{(1-\overline{\gamma(t)}z)^{2+\lambda}}$$
и поэтому
$$\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)=(2+\lambda)(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\overline{\gamma'(t)}(z-\gamma(t))}{(1-\overline{\gamma(t)}z)^{3+\lambda}}.$$
Заметим, что
$$\left|(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\overline{\gamma'(t)}(w-\gamma(t))}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{3+\lambda}}\right|\le\frac{ds}{dt}|k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)|,$$
поскольку
$$\frac{ds}{dt}=\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\quad\text{and}\quad\frac{w-\gamma(t)}{1-\overline{\gamma(t)}w}=\alpha_{\gamma(t)}(w).$$

Возвращаясь к (4.1), можно видеть, что

$$\left|\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))\right| \le 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|\, |k^\lambda_{\gamma(t)}(w)|^2 d\mu_\lambda(w) =$$
$$= 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\int_{\mathbb{D}} |\varphi\circ\alpha_{\gamma(t)}(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|\, d\mu_\lambda(w) \le$$
$$\le 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}.$$

Следовательно

$$|\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w)| \le 2(2+\lambda)\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}\int_0^1 \frac{ds}{dt}dt = 2(2+\lambda)\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}\beta(z,w).$$

Теорема 4.2. *Условие*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\{[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{\frac{1}{p}} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\} < \infty. \tag{4.2}$$

является необходимым для включения $\varphi\in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$. Если $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена, то (4.2) также является и достаточным условием.

Доказательство. Так как $|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$ является вероятностной мерой, то

$$\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|.$$

Кроме того,

$$0 \le \left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le \|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}$$

поскольку $|\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le [\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{1/p}$. Поэтому, для любой функции $\varphi\in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\right\} \le \|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty.$$

Это доказывает необходимость условия (4.2).

Чтобы доказать достаточность условия (4.2) в предположении, что $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена, заметим, что

$$\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} \le \|\varphi\circ\alpha_z(\cdot)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| = [\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|.$$

Следовательно, если $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и имеет место (4.2), то $\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda\right]^{1/p}$ также ограничена, и поэтому, $\|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty$. Доказательство завершено.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из Теоремы 4.2.

Теорема 4.3. *Для любой функции φ, локально интегрируемой на $\mathbb{D}$, следующие условия эквивалентны :*

1. *функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.*
2. *функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}\left\{\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\right\} < \infty$.*
3. *функция $\widetilde{\varphi^p}_\lambda$ ограничена и $\varphi \geq 0$.*
4. *функция $\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda$ ограничена.*

Лемма 4.4. *Пусть φ – локально интегрируемая функция на $\mathbb{D}$ и пусть $0 < r < \infty$. Тогда имеют место следующие неравенства :*

1. $|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \leq C\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}$,
2. $|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)| \leq C\widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)$.

В частности, если $\varphi \geq 0$, то $\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) \leq C\widetilde{\varphi}_\lambda(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Используя (2.1), получим

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \leq \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|d\mu_\lambda(w) \leq \\
&\leq C\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)||k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \\
&\leq C\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)||k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq C\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Применив (2.1) для функции $\varphi \geq 0$, получим

$$\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} \varphi(w)d\mu_\lambda(w) \leq C\int_{D(z,r)} \varphi(w)|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq C\widetilde{\varphi}_\lambda(z).$$

Свойство 4.5. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, то функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена тогда и только тогда, когда функция $\widehat{\varphi}_{r,\lambda}$ ограничена.

Заметим, что можно опустить предположение $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, если φ положительна (см. Теорему 5.3).

§ 5. ПРОСТРАНСТВА $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ И ОПИСАНИЕ $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ В ТЕРМИНАХ СРЕДНИХ

Будем использовать обозначение $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для пространства всех измеримых, p-интегрируемых на $\mathbb{D}$ функций с конечными полунормами

$$\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r).$$

Как мы уже отметили, для $p = 2$, $\lambda = 0$, это пространство изучалось в [3] и [1] (см. также [2]), а для произвольного p и $\lambda > -1$ такие пространства рассмотрены в [6], и мы существенно используем методы и результаты этих исследований. Напомним, что пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для всех r совпадают. Это замечено в работе [6] и опирается на результаты работы [5]. Для $p = 2$ равенство $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}) = \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ дано в [2], а в Теореме 5.2 мы обобщаем это утверждение на любое p.

Теорема 5.1 ([6]).*С точностью до эквивалентности норм, пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, $0 < r < \infty$, совпадают.*

Теорема 5.2. *С точностью эквивалентности норм имеем*

$$\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) = \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}), \quad 0 < r < \infty, \quad \lambda > -1.$$

Доказательство. Чтобы доказать вложение $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, $0 < r < \infty$, $\lambda > -1$, заметим, что в силу (2.1) имеем

$$\Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r) = \left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)|^p\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

$$\le 2\left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

$$\le 2C\left(\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

$$\le 2C\left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

для любого $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и любого $0 < r < \infty$. Поэтому, $\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})} \le 2C\|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}$. Обратное вложение

$$\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}), \quad 0 < r < \infty, \quad \lambda > -1. \tag{5.1}$$

следует из нижеследующих Лемм 5.6, 5.7, доказанных без использования (5.1).

Теорема 5.3. *Следующие условия эквивалентны для любой локально p-интегрируемой функции $\varphi \geq 0$:*

1. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z) < \infty, \quad 0 < s < \infty.$
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \widetilde{\varphi^p}_{\lambda}(z) < \infty.$

Каждое из этих условий влечёт $\varphi \in L^p_\lambda(\mathbb{D})$.

Доказательство. Утверждение 2) $\Rightarrow$ 1) следует из Леммы 4.4. Чтобы доказать 1) $\Rightarrow$ 2) будем рассуждать как в доказательстве Теоремы 2.15 работы [2]. Выбирая $\{D(z_n, s)\}_{n=0}^{\infty}$ так, чтобы удовлетворялись условия Предложения 2.5, получаем

$$\widetilde{\varphi^p}_{\lambda}(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi^p(w)|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(z_n,s)} \varphi^p(w)|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w).$$

Используя Предложение 2.2 и применяя (2.2) для функции $w \in D(z_n, s)$ и фиксированного s, получаем

$$|k_z^\lambda(w)|^2 \leq \frac{C_1}{|D(w,s)|_\lambda} \int_{D(w,s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq \frac{C_2}{|D(z_n,s)|_\lambda} \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u),$$

поскольку $k_z^\lambda(w)$ аналитична в $w \in \mathbb{D}$. Следовательно

$$\widetilde{\varphi^p}_{\lambda}(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_3}{|D(z_n,s)|_\lambda} \int_{D(z_n,s)} \varphi^p(w) d\mu_\lambda(w) \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq$$

$$\leq C_3 \sup_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq C_3 N \sup_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z).$$

Этим доказывается 1) $\Rightarrow$ 2). Для завершения доказательства заметим, что если $\varphi \geq 0$, то

$$\widetilde{\varphi^p}_{\lambda}(0) = \int_{\mathbb{D}} \varphi^p(w) d\mu_\lambda(w) = ||\varphi||_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}.$$

Лемма 5.4. *Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для некоторого $0 < r < \infty$, то для любого $z, w \in \mathbb{D}$ и любого $0 < s < \infty$ имеем*

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq C[\beta(z,w) + 1]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ совпадают для $0 < r < \infty$. Следовательно можно зафиксировать $r = 2s$. Для того, чтобы оценить $|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)|$ в предположении $\beta(z,w) \leq s$, отметим, что для $\delta \in \mathbb{C}$ имеем

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \delta| + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \delta|$$

$$\leq \frac{1}{|D(z,s)|_\lambda} \int_{D(z,s)} |\varphi(u) - \delta| d\mu_\lambda(u) + \frac{1}{|D(w,s)|_\lambda} \int_{D(w,s)} |\varphi(v) - \delta| \, d\mu_\lambda(v).$$

Если $\beta(z,w) < s$, то $D(z,s) \subset D(z,2s)$, $D(w,s) \subset D(z,2s)$ и согласно Предложению 2.2, $|D(z,s)|_\lambda \sim |D(w,s)|_\lambda \sim |D(z,2s)|_\lambda$. Поэтому

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \le \frac{2C_s}{|D(z,2s)|_\lambda} \int_{D(z,2s)} |\varphi(u) - \delta| d\mu_\lambda(u)$$

для любого δ. Выбирая $\delta = \widehat{\varphi}_{2s,\lambda}(z)$, получим

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \le 2C_s\Omega_1(\varphi; z, 2s) \le 2C_s\|\varphi\|_{*,BMO^q_{\lambda,2s}(\mathbb{D})} < \infty, \tag{5.3}$$

для $\beta(z,w) < s$ и любого $1 \le q \le p$. Теперь, (5.2) следует из Предложения 2.3.

Следствие 5.5. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, то $\widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in L^q_\lambda(\mathbb{D})$, $0 < r, s < \infty$, для любого $1 \le q \le p$.

Доказательство. Используя (5.2), а также (2.3), получаем

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}\|_{L^q_\lambda(\mathbb{D})} &\le \left(\int_{\mathbb{D}} |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)|^q d\mu_\lambda(z)\right)^{1/q} + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)| \\ &\le C\left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(z,0)+1)^q d\mu_\lambda(z)\right)^{1/q} + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)| < \infty.\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Теперь приступим к леммам, из которых будет непосредственно следовать вложение (5.1).

Лемма 5.6. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ *для фиксированного* $0 < r < \infty$. *Тогда* $\widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ *для любого* $0 < s < \infty$.

Доказательство. Обозначим

$$\omega_p(\varphi; z) = \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

и отметим, что

$$\begin{aligned}\omega_p(\widehat{\varphi}_{s,\lambda}; z) &= \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - (\widetilde{\widehat{\varphi}_{s,\lambda}})_\lambda(z)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \int_{\mathbb{D}} \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(u)|k^\lambda_z(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\int_{\mathbb{D}} [\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(u)]\,|k^\lambda_z(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Следовательно, применяя (5.2) и неравенство Минковского, получаем

$$\omega_p(\widehat{\varphi}_{s,\lambda}; z) \le \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\int_{\mathbb{D}} (\beta(w,u)+1)|k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

$$\le \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(w,u)+1)^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} d\mu_\lambda(u),$$

где подставили $w = \alpha_z(\xi)$, $u = \alpha_z(\eta)$ и использовали инвариантность относительно преобразования Мёбиуса метрики Бергмана : $\beta(\alpha_z(\xi), \alpha_z(\eta)) = \beta(\xi, \eta)$. Наконец, используя (2.3) получим

$$\|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}\|_{\#, BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} \le \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(w,u)+1)^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} d\mu_\lambda(u) < \infty.$$

Лемма 5.7. *Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для некоторого фиксированного $0 < r < \infty$, то функция $\widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}$ ограничена в $\mathbb{D}$, и следовательно $\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Заметим, что $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для любого $0 < r < \infty$. Далее,

$$\left[\widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}(z)\right]^{1/p} = \left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)} |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}.$$

Очевидно, первое слагаемое совпадает с $\Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, s)$ и меньше, чем $C_s\|\varphi\|_{\#, BMO^p_{\lambda,s}(\mathbb{D})}$. Для оценки второго слагаемого применим (5.3), означающее, что $\beta(z, w) < s$ при $w \in D(z, s)$. Получаем

$$\left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)} |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \le 2C_s\|\varphi\|_{\#, BMO^p_{\lambda,2s}(\mathbb{D})} < \infty,$$

и следовательно

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}(z) < \infty.$$

Поэтому, по Теореме 5.3 функция $\widetilde{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_\lambda$ ограничена, и остается применить Теорему 4.3, чтобы получить $\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.

БЛАГОДАРНОСТЬ. Автор глубоко признателен профессору Кехе Жу за его полезные комментарии и замечания.

Abstract. We introduce and study in terms of Beresin transform weighted $BMO^p_\lambda(\mathbb{D})$ spaces of functions of bounded mean oscillation in the Bergman metric on the unit disc. We give description of the spaces $BMO^p_\lambda(\mathbb{D})$ in terms of Beresin transform and also show coincidence of these spaces with known spaces defined in terms of averages over hyperbolic discs in the Bergman metric.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bekolle, C. A. Berger, L. A. Coburn, K. Zhu, "BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains", J. Funct. Anal. vol. 93, pp. 310–350, 1990.
2. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. Theory of Bergman spaces. New York : Springer-Verlag, 2000. http ://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/020.pdf.
3. K. Zhu, "VMO, ESV and Toeplitz operators on the Bergman space", Trans. Amer. Math. vol. 302, pp. 617-646, 1987.
4. K. Zhu. Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. New York : Marcel Dekker, 1990.
5. K. Zhu, "BMO and Hankel operators on Bergman spaces", Pacific J. of Math. vol. 155, pp. 377–395, 1992.
6. K. Zhu, "Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball". Graduate texts in Mathematics, Springer, 2004.
7. N. Zorboska, "Toeplitz operators with BMO symbols and the Beresin transform", IJMMS. vol. 46, pp. 2929–2945, 2003.

Поступила 7 октября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 20-36

STABILITY PRINCIPLES AND APPROXIMATION PROBLEMS IN VARIATIONAL CALCULUS

Peter Kosmol, Dieter Müller-Wichards

Universität Kiel, Germany, Hamburg University of Applied Sciences, Hamburg

The problem of pointwise minimization of the Lagrangian is approached by a simultaneous optimization with respect to both state and control variables. The Legendre-Riccati condition ensures the existence of an equivalent convex variational problem, making possible application of the corresponding stability principles. This approach also provides an elementary access to the fundamental theorems of variational calculus, without employing the theory of fields of extremals. Applications are in the problems of modular and parameter-free approximation of time-series data by monotone functions. We present a method, based on variational calculus, to determine a smooth monotone function that approximates a given time-series data in the least squares sense.

§ 1. INTRODUCTION

An important field for the application of stability principles of optimization theory is the calculus of variations. In the context of control theory, the problem of establishing the continuity of the control by using Pontrjagin's maximum principle - leading to a value of the control for fixed t - reduces to a stability question for finite-dimensional optimization. In our approach of pointwise minimization of the Lagrangian, we employ a simultaneous optimization with respect to both state and control variables. If in addition the Legendre-Riccati condition is satisfied, a condition that allows us to ensure the existence of an equivalent convex variational problem, we can apply corresponding stability principles, whose results carry over to the solution of the original problem. This approach also provides an elementary access to the fundamental theorems of variational calculus, without employing the theory of fields of extremals.

In the sequel we shall consider **variational problems** in the following setting : let $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ be continuous. The restriction set S for given $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ is a set of functions that is described by

$$[S \subset \{x \in C^1[a,b]^n \mid x(a) = \alpha, x(b) = \beta\}.$$

The function $f : S \to \mathbb{R}$ to be minimized is defined by

$$f(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

The variational problem with fixed endpoints is then given by

$$\text{Minimize} \quad f \quad \text{on} \quad S.$$

The function f is also referred to as the variational functional.

In the subsequent discussion we introduce a supplement in integral form that is constant on the restriction set. This leads to new variational problem with a modified Lagrangian. The solutions of the original variational problem can now be found as minimal solutions of the modified variational functional. Because of the monotonicity of the integral, the variational problem is now solved by pointwise minimization of the Lagrangian with respect to the x- and $\dot{x}$-variables for every fixed t, employing the methods of finite-dimensional optimization.

This leads to sufficient conditions for a solution of the variational problem. This general approach does not even require differentiability of the integrand. Solutions of the pointwise minimization can even lie at the boundary of the restriction set so that the Euler-Lagrange equations do not have to be satisfied. For interior points the Euler-Lagrange equations will naturally appear by setting the partial derivatives to zero, using a linear supplement potential.

§2. EQUIVALENT VARIATIONAL PROBLEMS

We now attempt to describe an approach to variational problems that uses the idea of the Equivalent Problems of Caratheodory (see [5], also compare Krotov [15] and Klötzler [?]) employing suitable supplements to the original minimization problem. Caratheodory constructs equivalent problems by use of solutions of the Hamilton-Jacobi partial differential equations, in connection to the corresponding field of extremals, which are not needed in Klotzler's approach. In the context of Bellman's

Dynamic Programming (see [1]) the supplement can be interpreted as the so-called value function. The technique to modify the integrand of the variational problem already appears in the works of Legendre in the context of the second variation (accessory problem). For further reference also see [?].

The principal idea in this treatise is, to specify conditions that guarantee the existence of equivalent convex problems. As equivalent problems have identical extremals, the results obtained in the presence of convexity carry over to the solutions of the original problem. In this paper we shall demonstrate that explicitly given quadratic supplements are sufficient to yield the main results (in particular the Fundamental Theorems).

Definition 2.1. Let $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ with $(t,x) \mapsto F(t,x)$ be continuously differentiable, and let F_{xx}, F_{xt}, F_{tx} exist and be continuous. Then we call F a **supplement potential**.

Lemma 2.2. *Let $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a supplement potential. Then the integral over the supplement*

$$\int_a^b [\langle F_x(t,x(t)), \dot{x}(t)\rangle + F_t(t,x(t))]\, dt$$

is constant on S.

Proof : It suffices to see that

$$\int_a^b [\langle F_x(t,x(t)), \dot{x}(t)\rangle + F_t(t,x(t))]\, dt = F(b,\beta) - F(a,\alpha).$$

An **equivalent problem** is then given through the supplemented Lagrangian $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} := L - \langle F_x, \dot{x}\rangle - F_t$$

§ 3. PRINCIPLE OF POINTWISE MINIMIZATION

The aim is to develop sufficient criteria for minimal solutions of the variational problem by replacing the minimization of the variational functional on subsets of a function space by finite dimensional minimization. This can be accomplished by point-wise minimization of an explicitly given supplemented integrand for fixed t using the monotonicity of the integral (application of this method to general control problems was treated in [14]) The minimization is done simultaneously, with respect to the x- and the $\dot{x}$-variables in $\mathbb{R}^{2n}$. This is the main difference as compared to Hamilton/Pontrjagin where minimization is done solely with respect to the $\dot{x}$-variables, methods, which lead to necessary conditions in the first place.

Theorem 3.1 *(Principle of Pointwise Minimization). Let a variational problem with Lagrangian L and restriction set S be given. If for an equivalent variational problem*

$$\text{Minimize} \quad g(x) := \int_a^b \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt,$$

where

$$\tilde{L} = L - \langle F_x, \dot{x} \rangle - F_t,$$

an $x^* \in S$ can be found, such that for all $t \in [a,b]$ the point $(p_t, q_t) := (x^*(t), \dot{x}^*(t))$ is a minimal solution of the function $(p,q) \mapsto \tilde{L}(p,q,t) =: \varphi_t(p,q)$ on $\mathbb{R}^{2n}$.
Then x^* is a solution of the original variational problem.

Proof : According to Lemma 1.5, the integral over the supplement is constant.
It turns out (see below) that the straight forward approach of a linear (with respect to x) supplement already leads to the Euler-Lagrange equation by setting the partial derivatives of $\tilde{L}$ (with respect to p and q) to zero.

§ 4. LINEAR AND QUADRATIC SUPPLEMENTS

Certain results of the classical theory are related to a linear supplement, where the supplement potential F has the structure

$$(t,x) \mapsto F(t,x) = \langle \lambda(t), x \rangle \tag{1}$$

and $\lambda \in C^1[a,b]^n$ is a function that has to be determined in a suitable way.
As $F_x(t,x) = \lambda(t)$ and $F_t(t,x) = \langle \dot{\lambda}(t), x \rangle$ we obtain for the equivalent problem :

$$\text{Minimize} \quad g(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) - \langle \lambda(t), \dot{x}(t) \rangle - \langle \dot{\lambda}(t), x(t) \rangle dt \quad \text{on} \quad S \tag{2}$$

Let $L : \mathbb{R}^{3n+1} \to \mathbb{R}$ be continuous and continuously partially differentiable with respect to p and q. If for fixed $t \in [a,b]$ a point $(p_t, q_t) \in \mathbb{R}^{2n}$ is a corresponding minimal solution, then the partial derivatives of ℓ_t have to be equal to zero at this point. This leads to the equations :

$$L_p(p_t, q_t, t) = \dot{\lambda}(t) \tag{3}$$

$$L_q(p_t, q_t, t) = \lambda(t). \tag{4}$$

The pointwise minimum (p_t, q_t) yields a function $t \mapsto (p_t, q_t)$. It is our aim to show that this pair provides a solution x^* of the variational problem where $x^*(t) := p_t$ and $\dot{x}^*(t) = q_t$. In the spirit of the supplement method this means that the global minimum is an element of the restriction set S. The freedom of choosing a suitable function λ is exploited to achieve this goal.

Definition 4.1. A function $x^* \in C^1[a,b]^n$ is called an **extremal**, if it satisfies the Euler-Lagrange equation :

$$L_x(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) = \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \quad \forall t \in (a, b]$$

An extremal x^* is called admissible if $x^* \in S$.
It is our primary aim to specify, under what conditions an extremal is a solution of the variational problem. This is the case for convex problems, i.e. for Lagrangians where $L(\cdot,\cdot,t)$ is convex for all $t \in [a,b]$. Obviously, then also linearly supplemented problems are convex, and vanishing of the partial derivatives of the Lagrangian is sufficient for a minimum. As equivalent problems have identical extremals it suffices for a positive answer to the above question to identify an equivalent convex problem.

Theorem 4.2. *Every extremal for the Lagrangian L is an extremal for the supplemented Lagrangian*

$$\tilde{L} := L - \langle F_x, \dot{x} \rangle - F_t$$

and vice versa, where F is a supplement potential.

Proof : We have :

$$\tilde{L}_{\dot{x}} = L_{\dot{x}} - F_x \quad \text{and} \quad \tilde{L}_x = L_x - \dot{x}^T F_{xx} - F_{tx}.$$

Moreover,

$$\frac{d}{dt} F_x(t, x(t)) = F_{xt}(t, x(t)) + \dot{x}(t)^T F_{xx}(t, x(t)).$$

If x satisfies the Euler-Lagrange equation in integral form with respect to L, i.e.

$$L_{\dot{x}} = \int_a^t L_x d\tau + c,$$

then there is a constant $\tilde{c}$ such that

$$\tilde{L}_{\dot{x}} = \int_a^t \tilde{L}_x d\tau + \tilde{c},$$

which we show using the continuity of F_x :

$$\int_a^t \tilde{L}_x d\tau = \int_a^t (L_x - \dot{x}^T F_{xx} - F_{tx}) d\tau = L_{\dot{x}} - c - \int_a^t (\dot{x}^T F_{xx} + F_{xt}) d\tau$$
$$= L_{\dot{x}} - F_x + F_x(x(a), a) - c = \tilde{L}_{\dot{x}} - \tilde{c}$$

Historically speaking, one would be satisfied to be able to answer the above fundamental question at least in a local sense. It turns out that such a convexification can already be realized through quadratic supplements in order to obtain the classical fundamental theorems of variational calculus.

Definition 4.3. A point $x^* \in S$ is called a strong local minimal solution if there is an $\epsilon > 0$ such that for all $x \in S$ with $\|x(t) - x^*(t)\| < \epsilon$ for all $t \in [a, b]$ we have for the variational functional $f(x^*) \leq f(x)$.
A point $x^* \in S$ is called a weak local minimal solution if there is an $\epsilon > 0$ such that for all $x \in S$ with $\|x(t) - x^*(t)\| + \|\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)\| < \epsilon$ for all $t \in [a, b]$ we have for the variational functional $f(x^*) \leq f(x)$.
For $T = [a, b]$ the subsequent Lemma leads to conditions on the Lagrangian for obtaining a weak local minimum.

Lemma 4.4. *Let T be a compact subset of $\mathbb{R}^m$ and let $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times T \to \mathbb{R}$ and let $\phi_t := L(\cdot, \cdot, t)$ be twice continuously differentiable, and let $\zeta : T \to \mathbb{R}^{2n}$ with $t \mapsto (p_t, q_t)$ be continuous, where (p_t, q_t) are such that for all $t \in T$*

1. *$L_p(p_t, q_t, t) = L_q(p_t, q_t, t) = 0$*
2. *the Hessian $\phi_t''(p_t, q_t)$ positive definite*

Then there is a $\delta > 0$ such that

1. *(p_t, q_t) is minimum of $L(\cdot, \cdot, t)$ on $K_\delta(t) := (p_t, q_t) + K_\delta(0, 0)$ for all $t \in T$*
2. *L is uniformly strongly convex on $K := \bigcup_{t \in T} \{(p, q, t) | (p, q) \in K_\delta(t)\}$.*

Proof : As the set $S_1 := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} | \|p\|^2 + \|q\|^2 = 1\}$ is compact and as $t \mapsto \phi_t''(p_t, q_t)$ is continuous on T there is a positive $c \in \mathbb{R}$ such that for all $t \in T$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^T \phi_t''(p_t, q_t) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \geq c \tag{5}$$

on S_1, i.e. $t \mapsto \phi_t''(p_t, q_t)$ is uniformly positive definite on T.
Let $\rho > 0$, then on the compact set in $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\overline{\bigcup_{t \in T} K_\rho(p_t, q_t, t)}$$

we have uniform continuity of $(p, q, t) \mapsto \phi_t''(p, q, t)$. Hence there is a $\delta > 0$ such that for all $(u, v) \in K_\delta(t)$ we have

$$\|\phi_t''(u, v) - \phi_t''(p_t, q_t)\| \leq \frac{c}{2}$$

and hence on that set

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^T \phi_t''(u, v) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \geq \frac{c}{2}.$$

Thus we obtain that $(p, q) \mapsto L(p, q, t)$ is uniformly strongly convex on K for all $t \in T$, i.e.

$$L(\frac{p+u}{2}, \frac{q+v}{2}, t) \leq \frac{1}{2} L(p, q, t) + \frac{1}{2} L(u, v, t) - \frac{c}{8}(\|p-u\|^2 + \|q-v\|^2)$$

for all $(p, q), (u, v) \in K$ and all $t \in T$ (see [9], p. 39, Satz 4).

The above lemma assumes the perspective of pointwise minimization. If $L(\cdot, \cdot, t)$ is convex and the minima (p_t, q_t) exist for every $t \in T$ and are unique, then, according to stability considerations, the mapping ζ is continuous (provided that L is continuous) :

Theorem 4.5. *Let the Lagrangian L be continuous, let $L(\cdot, \cdot, t)$ be convex for all $t \in [a, b]$, and let (p_t, q_t) be the unique pointwise minimum for all $t \in [a, b]$. Then $\zeta : T \to \mathbb{R}^{2n}$ with $t \mapsto (p_t, q_t)$ is continuous.*

Proof : This is an immediate application of Stabilitätssatz 2 [8], p. 225.

Remark 4.6. If, in addition, the Lagrangian is twice continuously differentiable and the Hessian (for fixed t) is positive definite, then the implicit function theorem yields that ζ is already continuously differentiable.

The following example shows that the convexity condition in the above theorem cannot be omitted :

Example 4.7. Let $z : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with

$$z(t, s) := \begin{cases} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \left(s - \frac{1}{t}\right)^2 - \left(\frac{1}{t}\right)^2 & \text{for } \quad t > 0 \quad \text{and} \quad \left|s - \frac{1}{t}\right| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Apparently, z is continuous, in particular for $t = 0$: let $\delta > 0$ and $s_0 \in \mathbb{R}$. Let $|s - s_0| < \delta$ and $0 < t < \frac{1}{1+|s_0|+\delta}$, then $|s - \frac{1}{t}| > 1$ and hence $z(t, s) = 0 = z(0, s_0)$. Let further $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $g(t, s) := s^2 + z(t, s)$. The function g is differentiable for $t > 0$ and $|s - \frac{1}{t}| < 1$ and we obtain as a necessary condition for a minimum of the convex function $g(t, \cdot)$ restricted to the interval $I_t := (\frac{1}{t} - 1, \frac{1}{t} + 1)$:

$$g_s(t, s) = 2s + 2(\frac{1}{t})^2(s - \frac{1}{t}) = 0.$$

We obtain for the minima $s(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} \in (\frac{1}{t} - 1, \frac{1}{t} + 1)$ for $t > 0$ and $s(0) = 0$. For the function value we obtain for $t > 0$:

$$g(t, s(t)) = -\frac{2}{(1+t^2)^2}$$

and for $t = 0$ we have $g(0, s(0)) = 0$. As $g(t, \cdot)$ is nonnegative outside of I_t, the minimal solution $s(t)$ is also a global solution of $g(t, \cdot)$ for $t > 0$. Apparently neither the minimal solutions nor the minimal values converge to those of $g(0, \cdot)$.
If we define the Lagrangian in the following way : $L(p, q, t) := g(p, t) + g(q, t)$ then $p_t = s(t)$ and $q_t = s(t)$ for $t \in [0, 1]$ and are hence discontinuous at $t = 0$.

Remark 4.8. Below we will discuss the question, under what conditions a C^1-solution x^* of the Euler-Lagrange equations is a weak (or strong) local minimum of the variational problem. In that context the continuity of $t \mapsto (x^*(t), \dot{x}^*(t))$ is already implied. The positive definiteness of the Hessian will be guaranteed by the Legendre-Riccati condition. Finally, the necessary condition (gradient equal to zero) for a pointwise minimum of the Lagrangian, equipped with a linear supplement, leads to the Euler-Lagrange equation.

Definition 4.9. Let $x^* \in C^1[a, b]^n$ be an extremal, and let

$$L^0_{\dot{x}\dot{x}}(t) := L_{\dot{x}\dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)$$

satisfy the **strong Legendre-Clebsch condition**, i.e. $L^0_{\dot{x}\dot{x}}$ is positive definite on $[a, b]$, then x^* is called a **regular extremal**.

Remark 4.10. The Legendre-Clebsch condition, i.e. $L^0_{\dot{x}\dot{x}}$ positive semi-definite on $[a, b]$, is a classical necessary condition for a minimal solution of the variational problem (see [6]).
The subsequent Lemma provides a tool to relate the Legendre–Riccati condition (see below) to the positive definiteness of the Hessian of the Lagrangian (compare with Lemma 4.4).

Lemma 4.11. *Let $M \in L(\mathbb{R}^{2n})$ be a matrix of the structure*

$$M = \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & D \end{pmatrix},$$

where $A, C, D \in L(\mathbb{R}^n)$ and D positive definite and symmetric. Then M is positive (semi-) definite if and only if $A - C^T D^{-1} C$ is positive (semi-)definite.

Proof : Let $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(p,q) := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = p^T Ap + 2q^T Cp + q^T Dq.$$

Minimization of the convex function $f(p,\cdot)$ yields : $2Dq = -2Cp$ and hence

$$q(p) = -D^{-1}Cp.$$

By inserting this result into f we obtain :

$$f(p,q(p)) = p^T Ap - 2p^T C^T D^{-1} Cp + p^T C^T D^{-1} Cp = p^T (A - C^T D^{-1} C)p.$$

Using our assumption $A - C^T D^{-1} C$ positive (semi-) definite it follows that $f(p,q) \geq f(p,q(p)) > 0$ for $p \neq 0$ ($f(p,q(p)) \geq 0$ in the semi-definite case). For $p = 0$ and $q \neq 0$ obviously $f(p,q) > 0$.
On the other hand, let M be positive (semi-)definite. Then $(0,0)$ is the only (a) minimal solution of f. Hence the function $p \mapsto f(p,q(p))$ has 0 as the (a) minimal solution, i.e. $A - C^T D^{-1} C$ is positive (semi-)definite.

Definition 4.12. We say that the **Legendre–Riccati condition** is satisfied, if there exists a continuously differentiable symmetrical matrix-function $W : [a,b] \to L(\mathbb{R}^n)$ such that for all $t \in [a,b]$ the expression

$$L^0_{xx} + \dot{W} - (L^0_{x\dot{x}} + W)(L^0_{\dot{x}\dot{x}})^{-1}(L^0_{\dot{x}x} + W) \tag{6}$$

is positive definite.
If the Legendre-Riccati condition is satisfied, we introduce a **quadratic supplement potential**

$$F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

with $F(t,p) = -\frac{1}{2}p^T W(t)p$ based on the corresponding matrix W such that the supplemented Lagrangian is strictly convex (see [13]).

Theorem 4.13 *(Fundamental Theorem). Let $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}$ be continuous and $L(\cdot,\cdot,t)$ twice continuously differentiable. Then an admissible regular extremal x^* is a weak local minimal solution of the given variational problem if the Legendre-Riccati condition is satisfied.*

Proof : Let $F(t,p) = -\frac{1}{2}p^T W(t)p$ and let

$$\hat{L}(p,q,t) := L(p,q,t) - \langle q, F_p(t,p)\rangle - F_t(t,p) = L(p,q,t) - \langle q, Wp\rangle - \frac{1}{2}\langle p, \dot{W}p\rangle$$

and let $\tilde{L}(p,q,t) := \hat{L}(p,q,t) - \langle\dot{\lambda}, p\rangle - \langle\lambda, p\rangle$. Setting the partial derivatives of $\tilde{L}(\cdot,\cdot,t)$ to zero, yields the Euler-Lagrange equations (see (4) and (5)) for $\hat{L}$. If x^* is an admissible extremal for L then also for $\hat{L}$ and vice versa (Theorem 4.2). Because of the Legendre-Riccati condition and Lemma 4.11 the Hessian of $\hat{L}$ (and hence also of $\tilde{L}$) is positive definite. Lemma 4.4 then implies that x^* is a weak local minimum of the variational functional for $\hat{L}$ and hence also for that of L, as the supplement is constant on S (see Lemma 2.2).

Using the subsequent

Lemma 4.14. *Let $A : U \to \mathbb{R}^n$ be continuous. If there is $r > 0$ and a ball $\overline{K}(x_0, r) \subset U$ such that $\langle Ax, x - x_0\rangle \geq 0$ for all $x \in S(x_0, r)$, then the nonlinear equation $Ax = 0$ has a solution in $\overline{K}(x_0, r)$.*

Proof : Otherwise Brouwer's fixed point theorem applied to the mapping

$$x \mapsto g(x) := -r\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) + x_0$$

would lead to a contradiction.

we will be able to establish that a weak local minimum is already a strong local minimum if the Lagrangian is uniformly convex with respect to the q-variable. This is due to

Lemma 4.15. *Let T be a compact subset of $\mathbb{R}^m$ and let $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times T \to \mathbb{R}$ and let L be continuously partially differentiable with respect to q.*
Let $\zeta : T \to \mathbb{R}^{2n}$ with $t \mapsto (p_t, q_t, t)$ be continuous with the following properties : there exists a $\delta > 0$ such that for all $t \in T$

1. *(p_t, q_t) is a minimum of $L(\cdot,\cdot,t)$ on $K_\delta(t) := (p_t, q_t) + K_\delta(0,0)$,*
2. (a) *$L(p,\cdot,t)$ is convex for $\|p - p_t\| < \delta$*

   (b) *$L(p_t,\cdot,t)$ is locally uniformly convex for $\|q - q_t\| < \delta$ in the following sense there is a module-function, independent of t such that*

$$L_q(p_t, q, t) - L_q(p_t, q_t, t) \geq \tau(\|q - q_t\|).$$

Then there is a $d > 0$ such that for all $p \in \mathbb{R}^n$ with $\|p - p_t\| < d$, for all $q \in \mathbb{R}^n$, and for all $t \in T$ we have

$$L(p_t, q_t, t) < L(p, q, t).$$

Proof : As the set $K := \bigcup_{t\in T}\{(p,q,t) | t \in K_\delta(t)\}$ is bounded in $\mathbb{R}^{2n+m}$, L_q is uniformly continuous on $\overline{K}$, i.e. there is a $0 < d < \delta$ such that for all $\|p - p_t\| < d$ and all $(p,q) \in K_\delta$ we have :

$$|L_q(p_t,q,t) - L_q(p,q,t)| < \epsilon < \frac{\tau(\delta/2)}{\delta/2}$$

Let $\rho := \delta/2$ and $S_\rho := \{q \in \mathbb{R}^n \,|\, \|q - q_t\| = \rho\}$. Then for all $p \in K(p_t, d)$ and $q \in S_\rho$ we obtain :

$$\begin{aligned}
&\langle L_q(p,q,t), q - q_t\rangle = \langle L_q(p,q,t) - L_q(p_t,q,t), q - q_t\rangle + \langle L_q(p_t,q,t), q - q_t\rangle \geq \\
&\geq \tau(\|q - q_t\|) - |\langle L_q(p,q,t) - L_q(p_t,q,t), q - q_t\rangle| \geq \\
&\geq \tau(\|q - q_t\|) - \|L_q(p,q,t) - L_q(p_t,q,t)\|\|q - q_t\| > \tau(\|q - q_t\|) - \epsilon\|q - q_t\| = \\
&= \tau(\rho) - \epsilon \cdot \rho > 0.
\end{aligned}$$

Then, according to Lemma 4.14 there is a $q(p,t) \in K(q_t, \rho)$ with the property $L_q(p, q(p,t), t) = 0$, hence $q(p,t)$ is minimum of $L(p, \cdot, t)$. Suppose now there exists a (p,q) such that $\|p - p_t\| < d$ where $L(p_t, q_t, t) > L(p,q,t)$. Then, because of $(p, q(p,t)) \in K_\delta(t)$:

$$L(p_t, q_t, t) \leq L(p, q(p,t), t) \leq L(p,q,t) < L(p_t, q_t, t),$$

which is a contradiction.

It appears that local uniform convexity of the Lagrangian in a C^1-neighborhood of an extremal is guaranteed through the Legendre–Riccati condition (see [13]). Namely, the following theorem is true.

Theorem 4.16 *(Uniform Strong Convexity of the Lagrangian) Let x^* be an extremal and let the Legendre–Riccati condition be satisfied, then there is a $\delta > 0$ and a $c > 0$ such that for all $(p,q), (u,v) \in K_t := K((x^*(t), \dot{x}^*(t)), \delta)$ and for all $t \in [a,b]$ we have*

$$\tilde{L}(\frac{p+u}{2}, \frac{q+v}{2}, t) \leq \frac{1}{2}\tilde{L}(p,q,t) + \frac{1}{2}\tilde{L}(u,v,t) - \frac{c}{8}(\|p - u\|^2 + \|q - v\|^2)$$

Theorem 4.17 *(Strong Local Minimum). Let x^* be an admissible, regular extremal and let the Legendre-Riccati condition be satisfied. Besides, let there exist a $\kappa > 0$ such that for all $t \in [a,b]$ and all p with $\|p - x^*(t)\| < \kappa$ the function $L(p, \cdot, t)$ is convex.*

Then x^* is a locally strong minimal solution of the variational problem, i.e. there is a positive d, such that for all $x \in K := \{x \in S | \, \|x - x^*\|_\infty < d\}$ we have :

$$\int_a^b L(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)dt \leq \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

§ 5. APPROXIMATION PROBLEMS

As an application we consider a class of **modular approximation problems** in the following sense : Let $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a twice differentiable convex function with positive definite Hessian, let $x \in C^2[a, b]$ be given and $S := \{v \in C^2[a, b] | v(a) = v(b) = 0\}$. We consider the approximation problem :

$$\text{minimize} \quad \int_a^b \Phi(x - v, \dot{x} - \dot{v})dt \ , v \in S.$$

Then every admissible solution of the Euler–Lagrange equation

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}}(x - v, \dot{x} - \dot{v}) = \Phi_x(x - v, \dot{x} - \dot{v})$$

is a strong solution of the approximation problem, in particular uniquely determined.

Example 5.1. Let $a = 0$ and $b > 0$ and let $\Phi(p, q) := p^2 + q^2$ then for the Euler-Lagrange equation we obtain the linear second order ODE :

$$\ddot{v} - v = \ddot{x} - x =: f$$

with the solution

$$v(t) = \int_0^t \sinh(t - \tau) \cdot f(\tau)d\tau + v'(0) \sinh t,$$

where

$$v'(0) = -\frac{\int_0^b \sinh(b - \tau) \cdot f(\tau)d\tau}{\sinh b}$$

5.1. Parameter-free Approximation of Time-Series Data by Monotone Functions. In this subsection we treat a problem that occurs in the analysis of Time Series : we determine a parameter-free approximation of given data by a smooth monotone function in order to eliminate a monotone trend function from the data. In this way, investigations of cyclic behaviour of difference data ("Fourier-analysis") can be facilitated. In the discrete case, this type of approximation is known as monotone regression (see [3], p. 28 f).

In addition to the data themselves, our approximation also takes derivatives into account, employing the mechanism of variational calculus :

$$\text{minimize} \quad \int_a^b (v - x)^2 + (\dot{v} - \dot{x})^2 dt \quad \text{on} \quad S.$$

where $S := \{v \in RCS^1[a, b] | \dot{v} \geq 0\}$.

Remark 5.2. The problem under consideration is related to Example 5.1. However, on the one hand, the class of functions is larger (piecewise smooth), but on the other hand we impose the additional restriction that the approximating function is increasing.
We also have the transversality conditions : $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ (see the existence discussion in subsection 5.2).

Linear supplement : $F(t,p) = \eta(t) \cdot p$, then

$$\frac{d}{dt} F(\cdot, v(\cdot)) = F_t + F_p \cdot \dot{v} = \dot{\eta} v + \eta \dot{v}.$$

Using $\eta(a) = \eta(b) = 0$ we obtain that the supplement is constant on S :

$$\int_a^b \dot{\eta} v + \eta \dot{v} dt = [\eta(t) v(t)]_a^b = 0.$$

Let $\tilde{L}(p,q) := L(p,q) - \dot{\eta} p - \eta q = \frac{1}{2}(x-p)^2 - \dot{\eta} p + \frac{1}{2}(\dot{x}-q)^2 - \eta q$. Pointwise minimization of $\tilde{L}$ with respect to p and q is broken down into two separate parts :

1. $\min\{\frac{1}{2}(x-p)^2 - \dot{\eta} p \mid p \in \mathbb{R}\}$ with the result : $\dot{\eta} = p - x$,
2. $\min\{\frac{1}{2}(\dot{x}-q)^2 - \eta q \mid q \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

In order to perform the minimization in 2, we consider the function $\psi(q) := \frac{1}{2}(\dot{x}-q)^2 - \eta q$. Setting the derivative equal to zero, we obtain for $c := \dot{x} + \eta$:

$$\psi_q = q - \dot{x} - \eta = q - c = 0.$$

For $c \geq 0$ we obtain c as the minimal solution of the parabola ψ. For $c < 0$ we have $q = 0$ as the minimum of ψ on $\mathbb{R}_{\geq 0}$ because of the strict monotonicity of the parabola to the right of the global minimum. For $c \geq 0$ we obtain the linear inhomogeneous system of linear differential equations

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

For $c(t) = \dot{x}(t) + \eta(t) < 0$, this inequality holds, because of the continuity of c, on an interval I, i.e. $\dot{v}(t) = 0$ on I, i.e. $v(t) = \gamma$ there. Hence $\dot{\eta}(t) = \gamma - x(t)$ on I, i.e.

$$\eta(t) - \eta(t_1) = \int_{t_1}^{t} (\gamma - x(\tau)) d\tau = \gamma(t - t_1) - \int_{t_1}^{t} x(\tau) d\tau$$

Algorithm (shooting procedure) : Choose $\gamma = v(a)$, notation : $c(t) = \dot{x}(t) + \eta(t)$, note : $\eta(a) = 0$.

Start : $c(a) = \dot{x}(a)$

if $\dot{x}(a) \geq 0$ then set $t_1 = a$. **goto 1.**

if $\dot{x}(a) < 0$ then set $t_0 = a$. **goto 2.**

1. solve initial value problem

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

with the initial values $\eta(t_1), v(t_1)$, for which we have the following explicit solutions (see below)

$$\eta(t) = = (v(t_1) - x(t_1)) \sinh(t - t_1) + \eta(t_1) \cosh(t - t_1) \vdash$$
$$v(t) = = x(t) + (v(t_1) - x(t_1)) \cosh(t - t_1) + \eta(t_1) \sinh(t - t_1)$$

Let t_0 be the first root with change of sign of $c(t)$ such that $t_0 < b$. **goto 2**

2. $\eta(t) = v(t_0)(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau + \eta(t_0)$. Let t_1 be the first root with change of sign of $c(t)$ such that $t_1 < b$. **goto 1.**

For given $\gamma = v(a)$, this algorithm yields a pair of functions (η_γ, v_γ). Our aim is, to determine a γ such that $\eta_\gamma(b) = 0$. In other words : let $\gamma \mapsto f(\gamma) := \eta_\gamma(b)$, then we have to solve the (1-D)- equation $f(\gamma) = 0$.

Solution of Differential equation in 2 : Let $\Phi(t)$ be a fundamental system then the solution of the (inhomogeneous) system is given by

$$\Psi(t) = \Phi(t) \int_{t_1}^{t} \Phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau + \Phi(t) D,$$

where $D = \Phi^{-1}(t_1)\Psi(t_1)$. In our case we have the fundamental system

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

and hence

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

which yields (using corresponding addition theorems) :

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh(t-\tau) & \sinh(t-\tau) \\ \sinh(t-\tau) & \cosh(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

We obtain

$$\Psi(t) = \int_{t_1}^{t} \begin{pmatrix} \cosh(t-\tau) & \sinh(t-\tau) \\ \sinh(t-\tau) & \cosh(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{pmatrix} d\tau +$$

$$+\begin{pmatrix} \cosh(t-t_1) & \sinh(t-t_1) \\ \sinh(t-t_1) & \cosh(t-t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t_1) \\ v(t_1) \end{pmatrix}.$$

i.e.

$$\eta(t) = \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\sinh(t-\tau) - x(\tau)\cosh(t-\tau)d\tau +$$

$$+\eta(t_1)\cosh(t-t_1) + v(t_1)\sinh(t-t_1),$$

$$v(t) = \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\cosh(t-\tau) - x(\tau)\sinh(t-\tau)d\tau +$$

$$+\eta(t_1)\sinh(t-t_1) + v(t_1)\cosh(t-t_1)$$

The integrals can be readily solved using the product rule :

$$\eta(t) = [x(\tau)\sinh(t-\tau)]_{t_1}^{t} + \eta(t_1)\cosh(t-t_1) + v(t_1)\sinh(t-t_1),$$

$$v(t) = [x(\tau)\cosh(t-\tau)]_{t_1}^{t} + \eta(t_1)\sinh(t-t_1) + v(t_1)\cosh(t-t_1).$$

We finally obtain the following explicit solutions

$$\eta(t) == (v(t_1) - x(t_1))\sinh(t-t_1) + \eta(t_1)\cosh(t-t_1),$$

$$v(t) == x(t) + (v(t_1) - x(t_1))\cosh(t-t_1) + \eta(t_1)\sinh(t-t_1).$$

5.2. Existence. If we minimize the strongly convex functional $f(v) := \int_a^b (v-x)^2 + (\dot{v}-\dot{x})^2 dt$ on the closed and convex subset S of the Sobolev Space $W_{2,1}^1[a,b]$, where $S := \{v \in W_{2,1}^1[a,b] | \dot{v} \geq 0\}$, then, according to [8], p. 289, Satz 2, f has a unique minimal solution, which is in particular absolutely continuous (see [7], p. 35). In order to establish the existence of the function η we make use of Pontryagin's Maximum Principle (see [7], p. 126 ff, compare also p. 208, Satz 1). Let

$$\min J(v,u) := \int_a^b L(v,u)dt, \quad \dot{v} = u,$$

such that $u(t) \in U := \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h_0 = h_1 = 0$. We consider Pontryagin's function

$$H(v,u,\eta,\lambda_0) = \eta \cdot u - \lambda_0 \cdot L(v,u).$$

Let (v_*, u_*) be a minimal solution of J, then there is a number $\lambda_0 \geq 0$ and an absolutely continuous function η (not both identical to zero), such that the so-called adjoint equation :

$$\dot{\eta} = -H_v = \lambda_0 L_v(v_*, u_*) = \lambda_0(v_* - x)$$

is satisfied, together with the transversality conditions

$$\eta(a) = \eta(b) = 0.$$

It turns out that in our situation $\lambda_0 > 0$, for suppose $\lambda_0 = 0$, then $\eta = 0$ and $\eta(a) = 0$, i.e. $\eta = 0$, a contradiction to the above cited theorem.

5.3. Smoothness Considerations. The adjoint equation now assumes the form :

$$\dot{\eta} = v_* - x$$

which implies that $\eta \in C^1[a,b]$ and $c \in C[a,b]$. If $x \in C^3[a,b]$ then $c \in C^1[a,b]$. According to Pontryagin's Principle, $\dot{v}_*$ is pointwise maximum almost everywhere of the function H. As we have performed the pointwise minimization for all $t \in [a,b]$, according to the stability principle of convex optimization (see [8]), the resulting solution function v_* is in $C^1[a,b]$ ($\tilde{L}$ is continuous with respect to t).·

Резюме. Задача поточечной минимизации лагранжиана решается одновременной оптимизацией относительно обеих переменных — состояния и контроля. Условие Лежандра-Рикатти гарантирует существование эквивалентной выпуклой вариационной задачи, делающей возможным применение соответствующих принципов стабильности. Этот подход также допускает элементарное применение фундаментальных теорем вариационного исчисления, не используя теорию экстремальных полей. Этот подход применяется в задачах модулярного и непараметрического приближения временных рядов монотонными функциями. В статье предлагается метод, опирающийся на вариационное исчисление, для определения гладкой монотонной функции, которая аппроксимирует заданный временной ряд в смысле наименьших квадратов.

REFERENCES

1. R. E. Bellmann. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N.J.,1957.
2. E. Blum, W. Oettli. Mathematische Optimierung. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
3. I. Borg, J. Lingoes. Multidimensional Similarity Structure Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
4. F. Browder. Problèmes Nonlinéaires. Univ. of Montreal Press, 1966.
5. C. Caratheodory. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner, Leipzig u. Berlin,1935.
6. C. Caratheodory. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung : Variationsrechnung. Herausgegeben, kommentiert und mit Erweiterungen zur Steuerungs-u. Dualittstheorie versehen von R. Klötzler, B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig ,1994.
7. M. Giaquinta, S. Hildebrand. Calculus of Variations I and II. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

8. Ph. Hartmann. Ordinary Differential Equations, Wiley and Sons, New York, 1964.

9. M. R. Hestenes. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, J. Wiley and Sons, New York, 1966.

10. A. D. Ioffe, V. M. Tichomirov. Theorie der Extremalaufgabe, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

11. P. Kosmol. Optimierung und Approximation, de Gruyter Lehrbuch, Berlin, New York, 1991.

12. P. Kosmol. Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben. B.G. Teubner Studienbücher, Stuttgart, zweite Auflage, 1993.

13. P. Kosmol, D. Müller-Wichards. Optimierung in Orlicz-Räumen (Monography, in preparation).

14. P. Kosmol, D. Müller-Wichards, "Homotopy Methods for Optimization in Orlicz Space", in : Proceedings of the 12-th Baikal Int. Conf., vol 1, pp. 224-230, June 24-July 1, 2001.

15. P. Kosmol, D. Müller-Wichards, "Homotopic Methods for Semi-infinite Optimization", J. of Contemporary Mathematical Analysis, National academy of Sciences of Armenia, vol. 36,XXXVI, no. 5, pp. 35-51, 2001.

16. P. Kosmol, P., D. Müller-Wichards, "Point-wise Minimization of Supplemented Variational Problems", Colloquium Mathematicum, vol. 101, no. 1, pp. 25-49, 2004.

17. P. Kosmol, M. Pavon, "Solving optimal control problems by means of general Lagrange functionals", Automatica, vol. 37, pp. 907-913, 2001.

18. W. F. Krotov, W.J. Gurman. Methoden und Aufgaben der optimalen Steuerung (russ.), Moskau, Nauka, 1973.

Поступила 7 октября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 37–42

UNIVERSAL ENTIRE FUNCTIONS WITH ADDITIONAL PROPERTIES

M. Niess

University of Trier, Trier, Germany
E-mail : m.niess@arcor.de

The aim of this note is the construction of universal entire functions of a new type. In particular, these functions are universal under translations and are bounded on each line and have zeros at certain prescribed points.

§1. OVERVIEW AND NOTATIONS

Throughout this paper we use the following abbreviations : $\mathfrak{M}$ is the collection of all compact subsets $K \subset \mathbb{C}$ with connected complement. By $A(K)$ we denote the set of all functions which are continuous on K and holomorphic in the interior of K. Finally let $H(\mathbb{C})$ be as usual the set of all entire functions.

It is our aim to construct entire functions which have a *universal* and also another *non-universal* property. The first results dealing with universal properties were proved by Birkhoff [2] and MacLane [7], which slightly modified state as follows.

Theorem 1 *(Birkhoff, 1929). Let $b = \{b_n\} \subset \mathbb{C}$ be a sequence with $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Then there exists an entire function φ with the property that for every compact set $K \in \mathfrak{M}$ and for every function $f \in A(K)$ there exists a sequence $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ with*

$$\varphi(z + b_{n_k}) \to f(z) \quad \textit{uniformly on} \quad K.$$

Theorem 2 *(MacLane, 1952). There exists an entire function φ with the property that for every compact set $K \in \mathfrak{M}$ and for every function $f \in A(K)$ there exists a sequence $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ with*

$$\varphi^{(n_k)}(z) \to f(z) \quad \textit{uniformly on} \quad K.$$

In the sequel we will call such functions "Birkhoff-universal" with respect to b and "MacLane-universal" respectively. As mentioned above we are going to construct similar functions which in addition are bounded on each line, tend to zero on each line, or have zeros at certain prescribed points.

§2. A BIRKHOFF–UNIVERSAL FUNCTION WHICH IS BOUNDED ON EACH LINE

Theorem 3. *There exists an entire function φ and a sequence $b = \{b_n\}$ of complex numbers with $b_n \to \infty$, such that the function φ and all its derivatives $\varphi^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$*

1) are bounded on each line,

2) are Birkhoff-universal with respect to b.

Sketch of Proof. 1. We dispense with showing that the derivatives of φ have the same properties as φ. Let us consider the set

$$S = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \quad \sqrt{\operatorname{Re} z} < \operatorname{Im} z < 2\sqrt{\operatorname{Re} z}\}^c$$

and pairwise disjoint circles B_n with center b_n, such that

$$B_n = \{z : |z - b_n| \le n\} \subset S^c.$$

Then

$$E := S \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

is an Arakelian set.

Let $\{Q_n\}$ be any enumeration of all polynomials with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. The functions

$$\delta(z) = \begin{cases} -\ln n & \text{if} \quad z \in B_n, \\ Q_n(z - b_n) & \text{if} \quad z \in S, \end{cases}$$

$$q(z) = \begin{cases} Q_n(z - b_n) & \text{if} \quad z \in B_n, \\ 0 & \text{if} \quad z \in S \end{cases}$$

are holomorphic on E. According to Arakelian's approximation theorem [1] we first can choose an entire function g with

$$|\delta(z) - g(z)| < 1 \quad (z \in E)$$

and then an entire function h with

$$\left| \frac{q(z)}{e^{g(z)-1}} - h(z) \right| < 1 \quad (z \in E).$$

The entire function $\varphi(z) = h(z) \cdot e^{g(z)-1}$ satisfies for all $z \in E$

$$|q(z) - \varphi(z)| < e^{Re(g(z)-1)} \leq e^{|g(z)-\delta(z)|-1+\delta(z)} < e^{\delta(z)}. \tag{2}$$

It follows that for all $z \in S$

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z) - q(z)| < e^{\delta(z)} = 1.$$

The set S has the property that the intersection of any line with the complement of S is either empty or contained in a compact set. So, we get that φ is bounded on each line.

Furthermore, it follows from (2) that

$$\max_{|z-b_n|\leq n} |\varphi(z) - Q_n(z - b_n)| = \max_{z\in B_n} |\varphi(z) - q(z)| < \frac{1}{n},$$

which is equivalent to

$$\max_{|z|\leq n} |\varphi(z + b_n) - Q_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

By the choice of Q_n and Mergelian's approximation theorem [8], we obtain that φ is universal under translations.

Remark 4. If we replace the function δ on the set S in the proof of Theorem 3 in (2) by a suitable holomorphic branch of a logarithm, we obtain an entire function φ with the same universal properties as in Theorem 3, which in addition tends to zero on each line.

Next we discuss two subsequent questions

- Under which conditions on the sequence b may such an entire function φ as in Theorem 3 be constructed ?
- How "big" is the set $\mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ of all the entire functions φ with the above explained properties ?

For this we define

$$B_n^R(b) := \{z : |z - b_n| \leq R\}.$$

We say that the sequence b *has the property* **(G)** if there exists a subsequence $\{b_{n_k}\}$ of $\{b_n\}$, such that for every $R > 0$ and every line Γ in $\mathbb{C}$

$$\Gamma \cap B_{n_k}^R(b) \neq \emptyset \qquad \textbf{only for finitely many} \quad k \in \mathbb{N}.$$

With these notations the following result holds.

Theorem 5. *Suppose that $H(\mathbb{C})$ is endowed with the compact-open topology.*

1. *If the sequence b has not the property (G), then $\mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ is empty.*
2. *If the sequence b has the property (G), then there exists a dense linear subspace L of $H(\mathbb{C})$, such that*
$$L \setminus \{0\} \subset \mathfrak{U}_b(\mathbb{C}).$$

However $\mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ is **not** *a residual subset of $H(\mathbb{C})$.*

Proof. We concentrate on showing, that $\mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ is **not** a residual subset of $H(\mathbb{C})$. It is well-known (see, for instance, Grosse–Erdmann [5]) that the set

$$\mathfrak{T}(\mathbb{C}) := \{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \textbf{ For every } K \in \mathfrak{M}, \textbf{ every } f \in A(K), \textbf{ there exists a sequence } \{n_k\} \subset \mathbb{N} \textbf{ with } \varphi(z+n_k) \to f(z) \textbf{ uniformly on } K\,(k \to \infty)\}.$$

(in other words :

$$\mathfrak{T}(\mathbb{C}) = \{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \varphi \textbf{ is hypercyclic for the translation operator } T_1 \textbf{ by } 1\})$$

is a dense G_δ-subset in $H(\mathbb{C})$.

Suppose that the dense set $\mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ contains a dense and G_δ-subset in $H(\mathbb{C})$. By Baire's category theorem it follows that the intersection $\mathfrak{T}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$ is also dense in $H(\mathbb{C})$, in particular not empty.

Assume $\varphi_0 \in \mathfrak{T}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$, i.e. $|\varphi_0(z)|$ is bounded on $z_0 + \mathbb{R}$ for some $z_0 \in \mathbb{C}$ by a suitable constant c_0,

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi_0(z_0 + z)| \leq c_0. \tag{3}$$

Let $K = \{z_0\}$ and $f(z) \equiv c_0 + 1$. Then there exists a subsequence $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ with

$$\varphi_0(z_0 + n_k) \to f(z) \equiv c_0 + 1 \quad (k \to \infty)$$

in contradiction to (3). So φ_0 is not bounded on each line, i.e. $\varphi_0 \notin \mathfrak{U}_b(\mathbb{C})$, and the proof is complete.

One should notice that so far only very few cases of a universality have come up in the literature where the set of universal elements turned out to be non-residual, cf. Grosse–Erdmann [5].

§3. BIRKHOFF-UNIVERSAL FUNCTIONS WITH PRESCRIBED ZEROS

Next we construct a Birkhoff-universal function φ, which in addition has zeros at certain prescribed points w_n of order ρ_n. Moreover, all the other zeros of φ are known.

Theorem 6. *Let $\{w_n\}$ be a sequence of prescribed complex numbers and let $\{\rho_n\}$ be a sequence of natural numbers, where $\{w_n\}$ is supposed to have the following property :*

The set $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ does not have any cluster point in $\mathbb{C}$ and there exists an unbounded sequence $\{z_n\}$ of complex numbers with :

1. *The closed discs $F_n := \{z : |z - z_n| \leq n\}$ satisfy $F_n \cap F_m = \emptyset$ for $n \neq m$. Choose (arbitrarily small but fixed) open sets $F_n \supset F_n$ such that $F_n \cap F_m = \emptyset$ for $n \neq m$.*
2. *The set $F := \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ satisfies : $w_n \notin F$ for all $n \in \mathbb{N}$.*

$$\text{Let } \{Q_n\} \text{ be any enumeration of all the polynomials with coefficients in } \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}. \tag{4}$$

Then there exists an entire function φ with the following properties :

1. *$\varphi(w_n) = 0$ of order ρ_n.*
2. *For all $n \in \mathbb{N}$ the zeros of $Q_n(\cdot - z_n)$ on the set F_n are also zeros of φ with the same order.*
3. *φ has no other zeros.*
4. *φ is a Birkhoff-universal function with respect to $\{z_n\}$.*

Remark 7. • It is possible to choose only a finite number of points w_n.

- Instead of the set of all polynomials with coefficients in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ we may use in (4) any other countable dense subset of the set $H(\mathbb{C})$, endowed with the compact-open topology.
- The additional zeros which are mentioned in the second statement of Theorem 6 arise from the construction in the proof of this theorem, in which we once again apply Arakelian's approximation theorem. But they are also necessary in a sense. Let φ be a Birkhoff-universal function and let $\{z_n\}$ be the sequence of translation points. By a simple application of Rouche's theorem, we obtain that for every $z_0 \in \mathbb{C}$ and every neighbourhood $U(z_0)$ of z_0, there exists a subsequence $\{n_k\}$ in $\mathbb{N}$, such that $\varphi(\zeta_0 + z_{n_k}) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ with $\zeta_0 \in U(z_0)$.

By an application of a slighty modified version of Theorem 6, it can be easily shown that there exist Birkhoff-universal functions, which have a regular distribution of its zeros. Therefore we denote by $n_\varphi(r)$ the number of zeros (counted according to multiplicity) of the function φ on the set $\{z : |z| \leq r\}$.

Theorem 8. *Suppose that there are given $c, q \in (0, \infty)$. Then there exists an entire function φ with the following properties :*

1. $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n_\varphi(r)}{r^q} = c.$
2. φ *is a Birkhoff-universal function with respect to a prescribed sequence* $\{z_n\}$.

§4. MACLANE–UNIVERSAL FUNCTIONS WITH PRESCRIBED ZEROS

Now we discuss the same problem of prescribing the zeros of MacLane-universal functions. Herzog [6] showed the existence of a zero-free entire function, which is universal in the sense of MacLane. Moreover, it is obvious that there exist MacLane-universal functions with finitely many prescribed zeros.

Theorem 9. *Let* $\{z_n\}$ *be any sequence in* $\mathbb{C}$, *which has no cluster point in* $\mathbb{C}$. *Then there exists a MacLane-universal function* φ *with* $\varphi(z_n) = 0$ *for all* $n \in \mathbb{N}$.

Proofs, that are not given here, are already published or will be published elsewhere soon. For proving the last theorem a power series needs to be constructed. Furthermore, we need interpolation by Lagrange polynomials, basic properties of the Weierstrass elementary factor and Walsh's theorem on simultaneous approximation and interpolation to get the zeros as desired.

Резюме. Цель данной заметки – построение универсальных целых функций нового типа. В частности, эти функции универсальны относительно переносов, ограничены на каждой прямой и имеют нули в заранее определенных точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 3, стр. 273 – 286, 1968.
2. G. D. Birkhoff, "Démonstratin d'une théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 189, pp. 473 – 475, 1929.
3. D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, Basel/London/Stuttgart, 1987.
4. T. Gharibyan, W. Luh, M. Niess, "Birkhoff-functions that are bounded on prescribed sets", accepted for publication in Archiv der Mathematik.
5. K. G. Grosse–Erdmann, "Universal families and hypercyclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 – 381, 1999.
6. G. Herzog, "On zero-free universal entire functions", Arch. Math. (Basel), vol. 63, no. 4, pp. 329 – 332, 1994.
7. G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. Analyse Math., vol. 2, pp. 72 - 87, 1952.
8. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексной переменной", Успехи мат. наук, том 7, стр. 31–122, 1952.

Поступила 1 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 43–53

Dedicated to the memory of Walter Hengartner[1]

SHIFT GENERATED HAAR SPACES ON TRACK FIELDS

G. Opfer

University of Hamburg, Hamburg, Germany
E-mail : opfer@math.uni-hamburg.deG

The paper shows for several cases of compact, convex sets K that $G(z) = 1/z^2$ is not a 2-dimensional Haar space generator for K, implying that it is not a universal Haar space generator for K. The above G is not a 3-dimensional Haar space generator for all regular polygons with smoothed vertices. The paper contains an overview of the joint work of Walter Hengartner and the present author.

§1. INTRODUCTION

We start by explaining what a Haar space is and mention some of its properties. Let $\mathbb{C}$ denote the field of all complex numbers and let $K \subset \mathbb{C}$ be a non empty, compact subset of $\mathbb{C}$ and $X = C(K)$ the space of all continuous, complex valued functions equipped with the uniform norm $\|f\| = \max_{z \in K} |f(z)|$.

Definition 1.1. With the above terminology let $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ be fixed and

$$t_j, t_k \in K, \quad t_j \neq t_k, \ j \neq k, \quad \eta_j \in \mathbb{C}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Any n-dimensional linear subspace V of $C(K)$ will be called a *Haar space* (Alfred Haar, Hungarian mathematician, 1885–1933) for K if the interpolation problem

$$h(t_j) = \eta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

[1] An obituary including a photograph has been published by Bshouty & Fournier [1].

has a unique solution $h \in V$.

Let $W \subset X$ be a non empty but otherwise arbitrary set and $f \in X$. An *approximation problem* consists in finding all $\hat{w} \in W$ with $\hat{w} \in P_W(f)$ where

$$P_W(f) = \{\hat{w} : \|f - \hat{w}\| = \inf_{w \in W} \|f - w\|\}. \tag{1.2}$$

The set $P_W(f)$ may be empty or contain several elements. All elements $\hat{w} \in P_W(f)$ will be called *best (uniform) approximations of f with respect to W*. We are mainly interested in the case where $P_W(f)$ contains exactly one element for all f, which means that the approximation problem is uniquely solvable for all $f \in X$. In this case $P_W : X \longmapsto W$ is a mapping, called a *projection* or a *projection map*. The approximation problem will be called *linear* if W is a linear subspace of X with finite dimension. The importance of Haar spaces is expressed in the following theorem.

Theorem 1.2. Let $V \subset X = C(K)$ be an n-dimensional linear subspace of X. Then the following statements are equivalent :

(a) V is a Haar space for K.

(b) Let $h_1, h_2, \ldots, h_n$ be a basis for V. Then the matrix

$$M = (h_j(t_k)), \quad j, k = 1, 2, \ldots, n$$

is non singular for all choices of $t_k \in K$, $k = 1, 2, \ldots, n$ which obey (1.1).

(c) All elements $v \in V\{0\}$ have at most $n - 1$ zeros in K.

(d) Each element $f \in X$ has a unique best (uniform) approximation in V.

Proof : Meinardus [7], 1967, pp. 1 – 19, Haar [4], 1918.

Example 1.3. (a) Let $K \subset \mathbb{C}$ and let Π_{n-1} be the n-dimensional linear space of all polynomials of degree at most $n - 1$ with complex coefficients. Then, Π_{n-1} is a Haar space of dimension n for all K with sufficiently many points.

(b) Let $K \subset \mathbb{C}$ and $0 \in K$. Then $V = \langle z, z^3, \ldots, z^{2n-1} \rangle$ is an n-dimensional linear space which is not a Haar space for K. By $\langle \ldots \rangle$ we understand the linear hull (also called *the span*) of the elements ... between the brackets.

§2. SHIFT GENERATED HAAR SPACES

Let $K \subset \mathbb{C}$ be non empty and compact and let $t_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ be mutually distinct.

Example 2.1. In this example we define two shift generated linear spaces of dimension n :

$$V = \langle \frac{1}{z - t_1}, \frac{1}{z - t_2}, \ldots, \frac{1}{z - t_n} \rangle, \quad z \in K,$$

$$W = \langle \exp(-(z-t_1)^2), \exp(-(z-t_2)^2), \ldots, \exp(-(z-t_n)^2) \rangle, \quad z \in K.$$

It is easy to see that V is a Haar space if we choose all $t_j \notin K$, regardless of the definition of K. The only restriction on K is that it contains sufficiently many points. The second space W is a Haar space in case $K \subset \mathbb{R}$ and it is in general not a Haar space if $K \subset \mathbb{C}$. This is implied by the periodicity $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$ for all $z \in \mathbb{C}$ and all $k \in \mathbb{Z}$. Both spaces, V, W are shift generated, V by $G(z) = \frac{1}{z}$ and W by $G(z) = \exp(-z^2)$ in the sense that they coincide with

$$V_n = \langle G(z-t_1), G(z-t_2), \ldots, G(z-t_n) \rangle, \quad z \in K, \tag{2.1}$$

where in the case of W the multipliers of the span have to be restricted to $\mathbb{R}$.
The question which functions G generate (real) Haar spaces by applying (2.1) was posed by Cheney and Light [2], p. 76.

Definition 2.2. Let $K \subset \mathbb{C}$ be non empty and compact and let $G : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ be a function defined on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with values in $\mathbb{C}$.

1. Let $n \in \mathbb{N}$ be fixed. The function G will be called an **n-dimensional Haar space generator for K** if for each set of n pairwise distinct points $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{C} \setminus K$ (i.e. outside of K) the functions h_j defined by $h_j(z) = G(z - t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ span an n-dimensional Haar space for K.
2. The function G is called a *universal Haar space generator for K* if G is an n-dimensional Haar space generator for K for all $n \in \mathbb{N}$.

The set of universal Haar space generators is not empty. Take $G(z) = \frac{1}{z}$ and refer to V of Example 2.1. Slightly more general is the following example of a universal Haar space generator G :

$$G(z) = \frac{\exp(az+b)}{z}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

It is easy to show, that the space defined in (2.1) for this G is a Haar space for all n and all K (non empty, compact, sufficiently many points).

§3. SHIFT GENERATED HAAR SPACES ON DISKS

In our first paper Hengartner and the present author [5] investigated the case where $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ is the closed unit disk and $G \in H(\mathbb{C}\{0\})$, which means that G is holomorphic on $\mathbb{C}$ with the possible exception of the origin. We also say that G is an *analytic Haar space generator*, tacitly assuming that G is defined on $\mathbb{C}$ with the exception of the origin. We obtained the following main result.

Theorem 3.1. *Let K be the unit disk and $G \in H(\mathbb{C}\{0\})$. Then, G is a universal Haar space generator if and only if G is of the form(2.2).*

For the proof we proceeded stepwise. First we assumed that G is a one dimensional Haar space generator which is equivalent to the fact that $G(z-t)$ has no zeros in K for all $t \notin K$. Then we assumed that G is a one and two dimensional Haar space generator, etc. In this way we found the following surprising result.

Theorem 3.2. *Let $G \in H(\mathbb{C}\{0\})$ be an n-dimensional Haar space generator for the unit disk for $n = 1, 2, 3, 4$. Then G is a universal Haar space generator. This result is best possible in the sense that 4 cannot be replaced by a smaller number.*

We have always assumed that G is holomorphic on $\mathbb{C}\{0\}$. If we would admit entire functions for G (i.e. holomorphic on the whole of $\mathbb{C}$), then our proofs show that we would not find any universal Haar space generator. Thus, the hole in the domain of definition for G is essential.

§4. SHIFT GENERATED HAAR SPACES ON GENERAL COMPACT SETS

In a second paper Hengartner and the present author [6] investigated the case of a general compact set $K \in \mathbb{C}$. We found the following main result.

Theorem 4.1. An analytic universal Haar space generator G for an arbitrary, non empty, compact set K (with sufficiently many points) must be necessarily of one of the two forms :

$$G(z) = \frac{\exp(az + b)}{z} \quad \text{or} \tag{4.1}$$

$$G(z) = \frac{\exp(az + b)}{z^2}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

By K° we denote the interior of K, by $\overline{K^\circ}$ we denote the closure of K°. In order to prove Theorem 4.1 we had to distinguish between the following two cases : $K \setminus \overline{K^\circ} \neq \emptyset$ and $K = \overline{K^\circ}$.

The first case would apply if K° is empty. An example is a **segment** S in $\mathbb{C}$:

$$S = [z_1, z_2] = \{z : z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2,\ \lambda \in [0, 1]\}.$$

We have found an important additional information for the case (4.2) of Theorem 4.1.

Theorem 4.2. An analytic universal Haar space generator G of the form (4.2) in Theorem 4.1 is possible only under the following additional conditions for K :

(i) $K = \overline{K^\circ}$,

(ii) K is convex,

(iii) the boundary ∂K of K has no corner.
(iv) K is not an ellipse (including disks).

Actually, the authors conjectured that case (4.2) will never happen. It was already shown by Hengartner and the present author [6], Lemma 1.6, part 1, that case (4.2) can be reduced to the simpler case

$$G(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \neq 0. \tag{4.3}$$

Conjecture 4.3. Let K have the properties mentioned in Theorem 4.2. Then G defined by $G(z) = \frac{1}{z^2}$ is never a universal Haar space generator.

It should be repeated that the conjecture is true in case K does not have the properties mentioned in Theorem 4.2. In order to prove the conjecture it is sufficient to prove, that G is not an n-dimensional Haar space generator for one specific $n > 1$ since G is always a one dimensional Haar space generator (G is non vanishing for all $z \neq 0$). So it might be of interest to study some special cases, e. g. a track field.

§5. TRACK FIELDS

A track field is a sort of oval which in our model will consist of a rectangle adjoined by two halfdisks. For two given positive reals $c, d \in \mathbb{R}$ let

$$R(c,d) = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| \leq c, \ |\Im z| \leq d\}$$

be a rectangle, where $\Re, \Im$ stand for real part, imaginary part, respectively. Now define two halfdisks

$$D_l = \{z \in \mathbb{C} : |z + c| \leq d, \ \Re z \leq -c\}, \quad D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq d, \ \Re z \geq c\}.$$

Then, a **track field** is defined by

$$T(c,d) = R(c,d) \cup D_l \cup D_r, \quad c > 0, \ d > 0. \tag{5.1}$$

Apparently, $T(c,d)$ is the closure of its interior points, is convex, is not an ellipse and the boundary has no corner. All conditions of Theorem 4.2 are satisfied. One example of a track field is shown in Figure 1.

Instead of putting the half disks on the left and right side of the rectangle $R(c,d)$ we could have put half disks on top and on the bottom of the rectangle. However, n-dimensional Haar space generators G of the form (4.3) are invariant under transformations of K of the type $\alpha K + \beta$ where $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $\beta \in \mathbb{C}$, [6], Lemma1.6, part 2. We want to show that G, defined in (4.3) is not a universal Haar

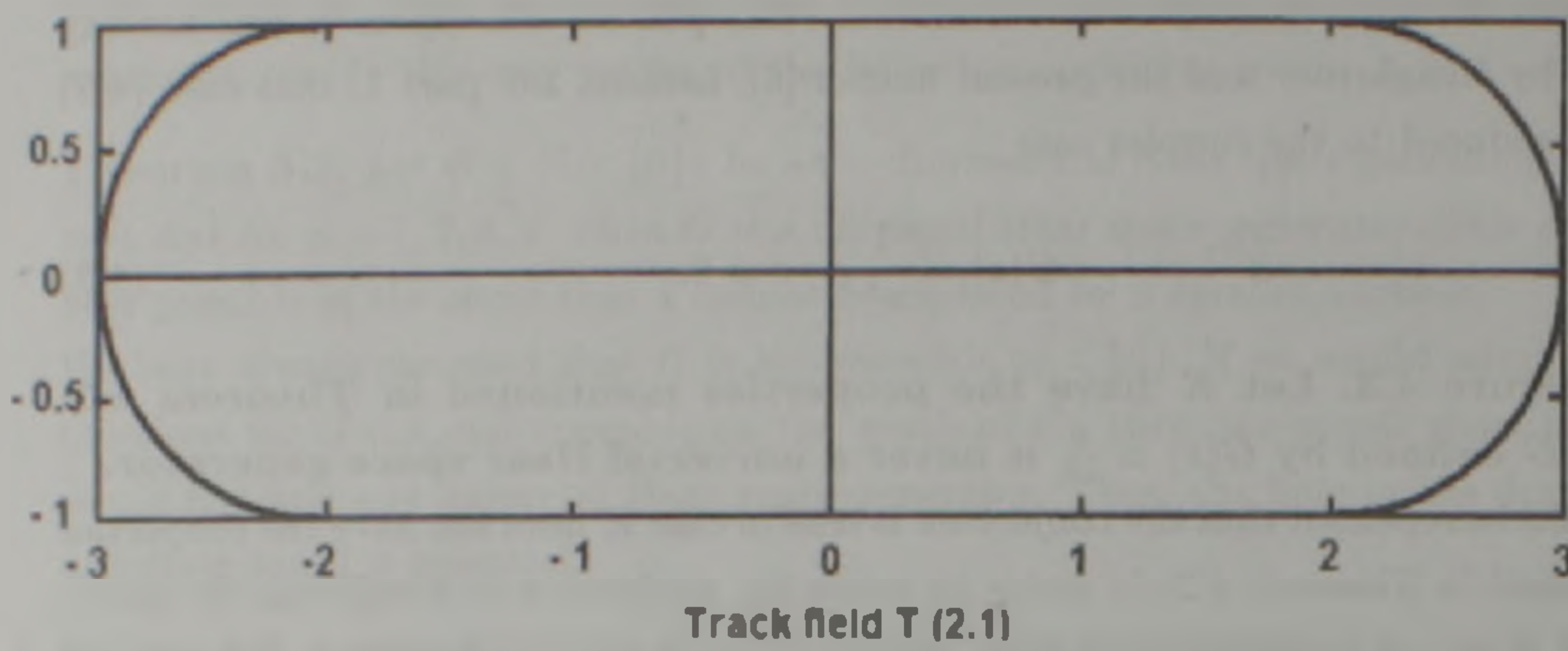

Figure 1. Example of track field for $c = 2$, $d = 1$.

space generator for $T = T(c,d)$. For this it is sufficient to show that G is not a 2-dimensional Haar space generator. We repeat three lemmata (Lemma 2.3, Lemma 2.4, Lemma 4.10) from [6] which are valid for all compact sets K.

Lemma 5.2. *Let G defined by $G(z) = \frac{1}{z^2}$, $s,t \notin K$, $s \neq t$ and let $v_1(z) = G(z-s)$, $v_2(z) = G(z-t)$. Then $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ is a Haar space of dimension two if and only if*

$$\mu(z;s,t) = \frac{G(z-s)}{G(z-t)} = \left(\frac{z-t}{z-s}\right)^2, \quad z \in K, \quad s,t \in \mathbb{C} \setminus K, \quad s \neq t \qquad (5.2)$$

is injective on K which means $\mu(u;s,t) = \mu(v;s,t)$ implies $u = v$.

Lemma 5.3. *Let $G(z) = \frac{1}{z^2}$ be a two dimensional Haar space generator for any compact K. Then the function*

$$F(t;u,v) = \left(\frac{t-u}{t-v}\right)^2, \quad t \in \mathbb{C} \setminus K, \quad u,v \in K, \quad u \neq v \qquad (5.3)$$

is injective in $\mathbb{C} \setminus K$.

Lemma 5.4. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact set containing the two distinct points $z_1, z_2 \in K$. If both points $u_{1,2} = 0.5(z_1 + z_2 \pm i(z_1 - z_2))$ do not belong to K, then $G(z) = 1/z^2$ is not a two dimensional Haar space generator for K.*

This lemma is good enough to solve the track field problem.

Theorem 5.5. *Let $K = T(c,d)$ be a given track field, defined in (5.1). Then $G(z) = 1/z^2$ is not a 2-dimensional Haar space generator for $T(c,d)$.*

Proof : Define $z_{1,2} = \pm(c+d)$ which are both in K. Then, $u_{1,2} = 0.5(z_1 + z_2 \pm i(z_1 - z_2)) = \pm i(c+d) \notin K$. Lemma 5.4 proves the theorem.

We see that in the limit case $c = 0$ the track field $T(c,d)$ degenerates to a disk with radius d and the above proof would not work. In this case, $G(z) = 1/z^2$ is indeed a 2-dimensional Haar space generator for the disk. See [6], Lemma 4.12. This is another proof for the fact that the dimension n is not continuous with respect to the monotone convergence of compact sets ([6], Lemma 1.6, part 5). But we have also shown in [5], Lemma 19 that $G(z) = 1/z^2$ is not a 3-dimensional Haar space generator for any disk with positive radius.

§6. ADMISSIBLE CONVEX SETS

The proof for the above case (Theorem 5.5) can be transferred to all convex sets for which Lemma 5.4 is applicable. In that lemma two points $u_{1,2} = 0.5(z_1+z_2 \pm i(z_1 - z_2))$ are computed from two given, distinct points $z_1, z_2 \in K$. Define the two segments $S_1 = [z_1, z_2]$, $S_2 = [u_1, u_2]$. It is easy to see that $u_1 - u_2 = i(z_1 - z_2)$ and $(u_1 + u_2)/2 = (z_1 + z_2)/2$. For the segments that means that they are diagonals of a square.

Let us denote this square by $Q(z_1, z_2)$. It is that square whose one diagonal is the segment $S_1 = [z_1, z_2]$. Lemma 5.4 now says that $G(z) = 1/z^2$ is not a 2-dimensional Haar space generator for a compact, convex set K if there are two distinct points $z_1, z_2 \in K$ such that the other two corners of the square $Q(z_1, z_2)$ are outside of K.

Definiton 6.1. Let $K \subset \mathbb{C}$ be a non empty convex set. We call K *admissible* if there are two points $z_1, z_2 \in K$ such that the square $Q(z_1, z_2)$ defined above has the property that the two other corners of $Q(z_1, z_2)$ are outside of K.

An example of an admissible set (an ellipse) is sketched in Figure 2. Let Δ be the regular (equilateral) triangle with the corners $(-1,0), (1,0), (0,\sqrt{3})$. Then, Δ is admissible. To see this, choose $z_1 = 0 \in \Delta$, $z_2 = \sqrt{3}i \in \Delta$. Then, $u_1 = 0.5\sqrt{3}(-1+i)$, $u_2 = 0.5\sqrt{3}(1+i)$ are both outside of Δ.

Theorem 6.2. *Let P_n be a regular polygon with $n \geq 3$ vertices. (i) If n is odd, then P_n is admissible. (ii) If n is even, then (a) P_n is admissible if n is not divisible by four. (b) Otherwise (i.e. n is divisible by four) P_n is not admissible.*

Proof : Assume that the vertices of P_n are represented by $v_j = \exp(\frac{2j\pi i}{n})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Let n be odd and let $n_1 = (n-1)/2$, $n_2 = (n+1)/2$. Then $n_2 - n_1 = 1$. Let $z_1 = v_0$, and $z_2 = 0.5(v_{n_1} + v_{n_2})$. Clearly, $z_1 \in P_n$ and the convexity of P_n implies $z_2 \in P_n$. The two other corners of $Q(z_1, z_2)$ are $u_{1,2} = 0.5(z_1 + z_2 \pm i(z_1 - z_2))$ and they are outside of P_n. Let n be even. We use mainly the same construction.

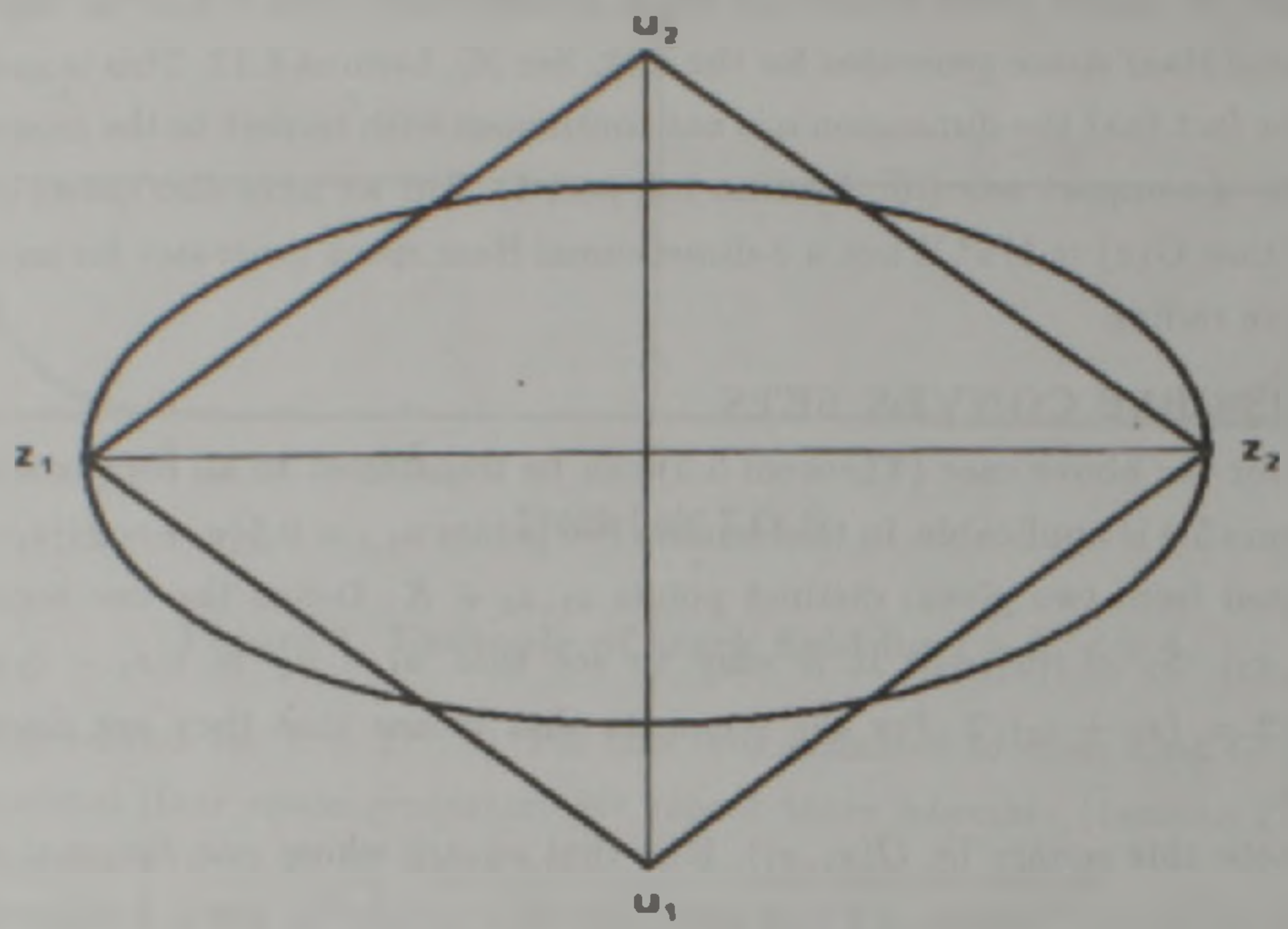

Figure 2. Example of an admissible set (ellipse).

Let $z_1 = v_0, z_2 = v_{n/2}$. Since z_1, z_2 are both vertices located on the x-axis, we have $u_{1,2} = \pm i$. In case n is divisible by four, u_1 coincides with vertex $v_{n/4}$ and u_2 coincides with vertex $v_{n/4+n/2}$. In case n is not divisible by four, the two points u_1, u_2 are different from vertices and are therefore necessarily outside of P_n.

The general theory says that convex sets K with corners never have $G(z) = 1/z^2$ as universal Haar space generators. So polygons are actually not of interest. However, we may think of slightly perturbed polygons where the corners have been smoothed. The problem could be solved if one could prove the following conjecture.

Conjecture 6.3. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact convex set with the following properties:*

(i) $K = \overline{K^\circ}$.

(ii) the boundary ∂K of K is smooth,

(iii) K is not admissible.

Then, $G(z) = 1/z^2$ is not a 3-dimensional Haar space generator for K and thus, not a universal Haar space generator for K.

Examples different from a disk, satisfying (i) to (iii) are according to our Theorem 6.2 regular polygons with $n = 4k$, $k = 1, 2, \ldots$ vertices with (slightly) rounded corners. We will show that $G(z) = 1/z^2$ is not a 3-dimensional Haar space generator for all such regular polygons. We start with the following theorem.

Theorem 6.5. *Let $Q = \{z : |\Re z| \le 1, |\Im z| \le 1\}$ be a square and $\tilde{Q}$ the same square with rounded corners (e.g. by using small circular arcs near the corners). Then $G(z) = 1/z^2$ is not a 3-dimensional Haar space generator for $\tilde{Q}$ and thus, not a universal Haar space generator for $\tilde{Q}$.*

Proof : We show that $V_3 = \langle G(z-t_1), G(z-t_2), G(z-t_3)\rangle$ is not a Haar space for suitable shifts t_1, t_2, t_3. We take $t_2 = \exp(-2\pi i/3)t_1 =: at_1, t_3 = \exp(2\pi i/3)t_1 =: bt_1$ and leave t_1 as a real parameter, to be suitably adjusted. One element in V_3 is

$$v(z) = \frac{1}{(z-t_1)^2} + \frac{a^2}{(z-t_2)^2} + \frac{b^2}{(z-t_3)^2} = \frac{1}{(z-t_1)^2} + \frac{a^2}{(z-at_1)^2} + \frac{b^2}{(z-bt_1)^2}.$$

Since $ab = 1$ we have

$$v(z) = \frac{1}{(z-t_1)^2} + \frac{1}{(bz-t_1)^2} + \frac{1}{(az-t_1)^2}.$$

Now, $v(z) = 0$ if and only if $z \in \{z_1, z_2, z_3\}$ where $z_j^3 = -1/2t_1^3$, $j = 1, 2, 3$. If we choose $t_1 = 1.2$, then $t_{2,3} = -0.6 \pm 1.0392i$. Thus, $t_{1,2,3} \notin \tilde{Q}$. For the zeros we obtain $z_1 = -0.9524$, $z_{2,3} = 0.4762 \pm 0.8248i$ which are all in $\tilde{Q}$.
It should be observed that the above proof will work also for values of t_1 which are slightly different from the given value 1.2. For $t_1 \in [1.16, 1.26]$ the proof still works, but for $t_1 \le 1.15$ and $t \ge 1.27$ the proof does not work. Nevertheless, the idea of the proof is good enough to settle the problem for all regular polygons. It should be noted that this proof is adapted from [5], Lemma 19.

Theorem 6.6. *Let P_n be a regular polygon with $n \ge 3$ vertices and $\tilde{P}_n$ the same polygon with slightly rounded vertices. Then, G defined by $G(z) = 1/z^2$ is not a universal Haar space generator for $\tilde{P}_n$.*

Proof : We only need to show, that $G(z) = 1/z^2$ is not a 3-dimensional Haar space generator for $\tilde{P}_{4k}$, $k \ge 2$. The case $\tilde{P}_4$ was already settled in Theorem 6.5. All other cases are settled by Theorem 6.2. We use the same proof as for Theorem 6.5 and assume that the vertices have the form $v_j = \sqrt{2}\exp\left(\frac{2j\pi i}{4k}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, 4k-1$. This form guarantees that the vertices of the square Q defined in Theorem 6.5 are included in that definition of the vertices. Also note that all polygons are included in the centered disk of radius $\sqrt{2}$. Now we refer to the proof of

Theorem 6.5 and put $t_1 = 3/2$. Then $t_{2,3} = 3/4(-1 \pm \sqrt{3}\,i)$ and $|t_{2,3}| = 3/2$. Hence, all shifts $t_{1,2,3}$ are outside the disk of radius $\sqrt{2}$ and thus, outside of all P_n. The zeros $z_1 = -3 \cdot 2^{-4/3} = -1.1906$, $z_{2,3} = 0.5953 \pm 1.0310i$ are inside P_8 and inside P_{12}. We have $P_4 \subset P_{12} \subset P_{20} \cdots$ and $P_8 \subset P_{16} \subset P_{24} \cdots$ and therefore, the zeros are all inside of P_{4k}, for all $k \geq 2$.

§7. EXTENSION TO UNBOUNDED SETS

It is interesting that even for non compact sets in $\mathbb{C}$ some analogue results can be derived. However, the class of continuous functions has to be restricted such that the uniform norm is still (finitely) defined. The results of this section are by Maude Giasson, Walter Hengartner and the present author, [3, 2003]. Let $F \subset \mathbb{C}$ be non empty and closed. We will restrict the continuous functions to the cases where

$$\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|$$

is still finite. For this purpose it is sufficient to require that

$$\lim_{z \in F,\ z \to \infty} f(z) = 0. \tag{7.1}$$

We will denote the class of continuous functions for which (7.1) is valid by $C^0(F)$. There is the following basic theorem.

Theorem 7.1. *Let $F \subset \mathbb{C}$ be non empty and closed and V an n-dimensional linear subspace of $C^0(F)$. The approximation problem has a unique solution in V for all $f \in C^0(F)$ if and only if V is a Haar space for F.*

Proof : [3], Theorem 1.2.

It should be noted that the above theorem is not valid for the larger class of continuous and bounded functions. There is a counterexample in [3], Example 1.3.

Theorem 7.2. *Let $F \subset \mathbb{C}$ be non empty and closed and*

$$G(z) = \frac{e^{az+b}}{z} \quad \text{and} \quad \|e^{az}\|_F < \infty \quad a, b \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

Then $G \in H(\mathbb{C}\{0\})$ and G is a universal Haar space generator for F.

Proof : [3], Example 1.5.

The proof is actually straightforward, and depending on F there is a table [3, Table1] showing the actual restriction of a induced by $\|e^{az}\|_F < \infty$. To mention two examples, let $F = \mathbb{R}_+$. Then $\Re(a) \leq 0$. In case $F = \{z : |z| \geq R\}$ for a positive R, we have $a = 0$.

There are several theorems in which universal Haar space generators are characterized for closed, but unbounded sets. Let e.g. F contain $\{z : |z| > R\}$, then under some additional conditions on F a universal analytic Haar space generator must necessarily have the form $G(z) = 1/z$ ([3], Theorem 4.5).

Acknowledgments. The author thanks Professor Ron B. Guenther, Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA for reading this manuscript and giving advice for improvements. Thanks go also to Dr. Hayk Mikayelyan, Max Planck Institut, Leipzig, Germany who provided the translation of the abstract into Armenian language.

Резюме. Для некоторых компактных, выпуклых множеств K показано, что $G(z) = 1/z^2$ не является образующей 2-мерного пространства Хаара для K, откуда следует, что $G(z)$ не является образующей универсального пространства Хаара для K. Выше приведённая G не является образующей 3-мерного пространства Хаара для всех правильных многоугольников с заглаженными вершинами. Статья содержит обзор совместной работы Уолтера Хенгартнера и автора статьи.

REFERENCES

1. D. Bshouty, R. Fournier, Editorial note (includes photograph), in : Computational Methods and Function Theory, vol. 4, pp. i – ix, 2004.
2. E. W. Cheney, W. Light, A Course in Approximation Theory, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2000.
3. M. Giasson, W. Hengartner, G. Opfer, "Shift generated Haar spaces on unbounded closed domains in the complex plane", Computational Methods and Function Theory, vol. 3, pp. 151 – 164, 2003. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Serie A, Preprint 175, August 2003, 14p.
4. A. Haar, "Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen", Math. Ann., vol. 78, pp. 294 – 311, 1918.
5. W. Hengartner, G. Opfer, "Complex Haar spaces generated by shifts applied to a single function", in : C.K.Chui, L.L.Schumaker, J.Stöckler (eds), Approximation Theory X : Abstract and Classical Analysis, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, pp. 223 – 238, 2002. Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik, Serie A, Preprint 167, November 2001, 14p.
6. W. Hengartner, G. Opfer, "Shift generated Haar spaces on compact domains in the complex plane", Constr. Approx., vol. 22, pp. 113 – 132, 2005. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Serie A, Preprint 174, July 2003, 18 p.
7. G. Meinardus, Approximation of Functions, Theory and Numerical Methods, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

Поступила 2 сентября 2005

Известия НАН Армении. Математика. 40. № 6. 2005. 54-69

Посвящается профессору Вен Гуо Чуну
в связи с его 75 летием

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

А. П. Солдатов

Белгородский государственный университет
E-mail : soldatov@bsu.edu.ru

Резюме. В статье рассмотрена задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка с постоянными главными коэффициентами на кусочно-гладких областях комплексной плоскости. Приведены критерий Фредгольма и формула индекса в пространствах Гельдера и некоторые примеры эллиптических систем, в которых индекс задачи Дирихле не обращается в ноль.

§1. ФОРМУЛА ИНДЕКСА

Рассмотрим эллиптическую систему

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $A_{ij} \in R^{l\times l}$ суть постоянные, а $u = (u_1, \cdots u_l) \in C^2$ - неизвестная векторнозначная функция. Для этой системы, задача Дирихле

$$u|_{\partial D} = f \tag{1.2}$$

для областей D с гладкой границей, впервые исследована Бицадзе в работе [1], где был введён класс так-называемых слабо связанных эллиптических систем. Задача (1.1), (1.2) является фредгольмовой тогда и только тогда, когда система (1.1) из этого класса, а индекс задачи есть ноль. Для эллиптических систем общего вида задача Дирихле исследовалась многими авторами (Товмасян [2, 3], Вольперт [4], Бегер и Уен [5], Сираждинов [6], Бурский [7]). Упомянутые слабо связанные системы могут быть описаны следующим образом (см. [8]). Пусть σ – множество корней характеристического уравнения

$$\det\ P(z) = 0, \quad P(z) = A_{11} + z(A_{12} + A_{21}) + z^2 A_{22},$$

в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Обозначая кратность корня $\nu \in \sigma$ через l_ν, получаем

$$\det\ P(z) = \det\ A_{22} \prod_{\nu \in \sigma} (z-\nu)^{l_\nu} (z-\overline{\nu})^{l_\nu}, \quad \sum_{\nu \in \sigma} l_\nu = l.$$

Существуют матрицы $B, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ такие, что

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{BJ} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det\ (z-J) = \prod_{\nu \in \sigma} (z-\nu)^{l_\nu}, \\ &A_{22}BJ^2 + (A_{12}+A_{21})BJ + A_{11}B = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

и матрица J может быть выбрана так, чтобы имела форму Жордана. В этих обозначениях следующие условия эквивалентны :

1) система (1.1) слабо связанная,
2) $\left(\det\ \int_{\mathbb{R}} P^{-1}(t)dt \neq 0\right)$,
3) $\det\ B \neq 0$.

В настоящей статье рассматривается задача Дирихле в области D с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$. Хотя работы [9 – 12] близки к тематике нашей статьи, тем не менее мы следуем работе [13], где изучалась более общая задача Бицадзе-Самарского, в частности, мы предполагаем, что (1.1) слабо связана. Напомним определения весовых пространств Гёльдера и некоторые результаты работы [13], которые важны для рассматриваемой задачи.

Пусть $F \subseteq \Gamma$ – конечное множество точек, содержащее все угловые точки, и пусть $\lambda = (\lambda_\tau,\ \tau \in F)$ – некоторое множество действительных чисел. Пусть $C^\mu_\lambda(\overline{D}, F)$, $0 < \mu < 1$ – пространство всех функций $\varphi \in C(\overline{D} \setminus F)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi_*(z) = \varphi(z) \prod_{\tau \in F} |z-\tau|^{\mu-\lambda_\tau} \in C^\mu(\overline{D}), \quad \varphi_*|_F = 0 :$$

оно является банаховым пространством с нормой $|\varphi| = |\varphi_*|_{C^\mu}$. Кроме того, это пространство является весовым в следующем смысле : элементы $\varphi \in C^\mu_0$ ограничены и умножение $\varphi \to \rho\varphi$ на весовую функцию $\rho(z) = \prod_F |z-\tau|^{\lambda_\tau}$ является изоморфизмом между C^μ_0 и C^μ_λ. Через $C^{1,\mu}_\lambda$ обозначим подпространство C^μ_λ функций $\varphi \in C^1(\overline{D} \setminus F)$ с частными производными $\varphi_x,\ \varphi_y \in C^\mu_{\lambda-1}(\overline{D}, F)$ и рассмотрим конечномерное разложение $C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F) \supseteq C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, F)$ полиномами $p(z)$ комплексного переменного z. Это разложение образует пространство Банаха относительно соответствующей нормы, а пространство $C^{1,\mu}_{(\lambda)}$ определяется аналогичным образом. Очевидно, что всякая функция $\varphi(z) \in C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F)$ непрерывна в $\overline{D} \setminus \{\tau \in F, \lambda_\tau > 0\}$ и при $z \to \tau$ либо $\varphi(z) = O(1)|z-\tau|^{\lambda_\tau}$, если $\lambda_\tau \leq 0$, либо $\varphi(z) = \varphi(\tau) + O(1)|z-\tau|^{\lambda_\tau}$ в противном случае. Например, функция $\varphi \in C^1(\overline{D} \setminus F)$ принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F)$, $\lambda < 1$, если её производные имеют порядок $O(1)|z-\tau|^{\lambda_\tau - 1}$ при $z \to \tau$. Вложения

$$C^{\mu}(\overline{D}) \subseteq C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F) \quad (\lambda \leq \mu) \quad \text{и} \quad C^{1,\mu}(\overline{D}) \subseteq C^{1,\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F) \quad (\lambda \leq 1 + \mu)$$

являются обратимыми для $\lambda = \mu$ и $\lambda = 1 + \mu$.

Аналогичные определения могут быть введены для функций, заданных на кусочно-гладких контурах Γ. Очевидно, сужение оператора $\varphi \to \varphi|_\Gamma$ является ограниченным отображением $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}, F) \to C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma, F)$, а аналогичное утверждение для пространств $C^{\mu}_{(\lambda)}$ и для пространств с символом $C^{1,\mu}$ верно, при некоторых дополнительных требованиях на Γ. Скажем, что пара (Γ, F) принадлежит классу $C^{1,\mu}$, если гладкая дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащая внутри себя точки $\tau \in F$, принадлежит $C^{1,\mu}$. Если $(\Gamma, F) \in C^{1,\mu}$, то сужение оператора $\varphi \to \varphi|_\Gamma$ является ограниченным отображением $C^{1,\mu}_{\lambda}(\overline{D}, F) \to C^{1,\mu}_{\lambda}(\Gamma, F)$, и аналог этого факта имеет место для пространств $C^{1,\mu}_{(\lambda)}$.

Всегда будем предполагать, что Γ не имеет точек возврата, а пара (Γ, F) принадлежит $C^{1,\mu+0}$ (т.е. пространству $C^{1,\mu+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$). Кроме того, рассмотрим задачу Дирихле в классе $u \in C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F)$, $0 < |\lambda| < 1$ (т.е. $0 < |\lambda_\tau| < 1$ для всех $\tau \in F$). Это означает, что общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$u = \operatorname{Re} B\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{1.4}$$

где $\phi \in C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F)$, а B, J – матрицы из (1.3) (см. [13]). В [14] решения ϕ эллиптической системы первого рода (1.4) называются J-аналитическими (или гипераналитическими) функциями.

При достаточно малых $r > 0$ область $D_\tau = D \cap \{|z-\tau| < r\}$ является криволинейным сектором с вершиной τ. Кроме того, при некоторых предположениях на Γ, угол θ_τ упомянутого сектора удовлетворяет неравенству $0 < \theta_\tau < 2\pi$, а кривая $\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{|z-\tau| < r\}$ содержит две гладкие дуги $\Gamma_{\tau\pm 0}$, которые являются боковыми сторонами области D_τ. Обозначим через $q_{\tau\pm 0} \in \mathbb{C}$ вектор, касающийся $\Gamma_{\tau\pm 0}$ в точке τ, для которого $\theta_\tau = \arg q_{\tau-0} - \arg q_{\tau+0}$ и

$$q_\tau = q_{\tau-0} q^{-1}_{\tau+0} = e^{i\theta_\tau}. \tag{1.5}$$

Будем писать

$$z_J = x1 + yJ, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \tag{1.6}$$

где 1 означает единичную $l \times l$ - матрицу, и в силу (1.3) число $z_\nu = x + \nu y$, $\nu \in \sigma$, является собственным значением матрицы z_J, с кратностью l_ν. Рассмотрим также матрицу

$$Q_\tau = q_{\tau-0,J} q^{-1}_{\tau+0,J} \tag{1.7}$$

с собственными значениями

$$q_{\tau(\nu)} = q_{\tau-0,\nu} q^{-1}_{\tau+0,\nu} = \rho_{\tau(\nu)} e^{i\theta_{\tau(\nu)}}, \quad \nu \in \sigma, \tag{1.8}$$

кратностей l_ν. Напомним, что $\operatorname{Im} \nu > 0$ и $\nu \in \sigma$, и поэтому, аффинное преобразование $z \to z_\nu$ инвариантно в верхней полуплоскости и следовательно оно не меняет направление плоскости. Следовательно, угол сектора $D_{\tau(\nu)} = \{z_\nu, z \in D_\tau\}$ равен аргументу $\theta_{\tau(\nu)}$ в (1.8). Дополнительно заметим, что неравенство $\theta_{\tau(\nu)} < \pi$ $(= \pi, > \pi)$ равносильно $\theta_\tau < \pi$ $(= \pi, > \pi)$.

С (1.7) связываем комплексные степени $Q^\zeta_\tau = e^{\zeta \ln Q_\tau}$, $\overline{Q}^\zeta_\tau = e^{\zeta \overline{\ln Q}_\tau}$, под которыми понимаем функции, зависящие от матриц, а также рассматриваем матричнозначные функции

$$X_\tau(\zeta) = \zeta^{-1}[Q^\zeta_\tau(B^{-1}\overline{B}) - (B^{-1}\overline{B})\overline{Q}^\zeta_\tau], \qquad Y_\tau(\zeta) = \zeta^{-1}(Q^\zeta_\tau - \overline{Q}^\zeta_\tau), \tag{1.9}$$

которые аналитичны на всей плоскости. Очевидно

$$\det Y_\tau(\zeta) = \zeta^{-l} \prod_{\nu\in\sigma} [q^\zeta_{\tau(\nu)} - \overline{q}^\zeta_{\tau(\nu)}]^{l_\nu} = (2i)^l \prod_{\nu\in\sigma} \left[\frac{\sin \theta_{\tau(\nu)}\zeta}{\zeta}\right]^{l_\nu}. \tag{1.10}$$

В частности, $\det Y_\tau(\zeta) \neq 0$ в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq \delta$ при достаточно малых $\delta > 0$.

На каждой полосе $\alpha_1 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \alpha_2$ матричнозначная функция $X_\tau(\zeta)Y^{-1}_\tau(\zeta) \to B^{-1}\overline{B}$ при $\operatorname{Im} \zeta \to \infty$ равномерно по $\operatorname{Re} \zeta$, и поэтому, число корней $\det X_\tau(\zeta)$ конечно в таких полосах. Через $n_\tau(\alpha)$ обозначим число корней (включая их кратности) упомянутой функции в открытой полосе между прямыми $\operatorname{Re} \zeta = 0$ и $\operatorname{Re} \zeta = \alpha$, $\alpha \neq 0$, и предположим, что n^0_τ имеет то же самое значение на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$. Предположим, что $\delta > 0$ достаточно мало, чтобы допускать $n_\tau(\delta) = n_\tau(-\delta) = 0$ для всех τ и положим

$$\Delta^\pm_\tau = \frac{1}{2\pi} \arg\left(\frac{\det X_\tau}{\det Y_\tau}\right)\Bigg|^{\pm\delta+i\infty}_{\pm\delta-i\infty}. \tag{1.11}$$

По теореме Руше, целые числа $\Delta_\tau^\pm$ связаны следующим равенством

$$\Delta_\tau^+ - \Delta_\tau^- = n_\tau^0. \tag{1.12}$$

Теорема 1.1. *Задача Дирихле (1.1), (1.2) фредгольмова в классе $C_{(\lambda)}^\mu$ $(0 < |\lambda| < 1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\det X_\tau(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \ \tau \in F. \tag{1.13}$$

а индекс задается формулой

$$\text{æ} = -\sum_{\tau\in F}[\Delta_\tau^\pm \pm n_\tau(\lambda_\tau)], \tag{1.14}$$

где знак $\pm$ совпадает с знаком $\operatorname{sgn}\lambda_\tau$. Кроме того, если (1.13) выполнено, то всякое решение $u \in C_{(\lambda)}^\mu(\overline{D}, F)$ задачи с правой частью $f \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\Gamma, F)$ принадлежит классу $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\overline{D}, F)$.

Доказательство. Задача Дирихле (1.1), (1.2) совпадает с частным случаем $b = 0$ задачи Бицадзе–Самарского, рассмотренной в работе [13]. Поэтому, конечный символ $X(\zeta)$ этой задачи является блок-диагональной матрицей

$$X(\zeta) = \operatorname{diag}(X(\zeta;\tau), \ \tau \in F), \quad X(\zeta;\tau) = \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BQ_\tau^\zeta & \overline{B}\,\overline{Q}_\tau^\zeta \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

По Теореме 3 из [13], задача фредгольмова тогда и только тогда, когда

$$\det X(\zeta;\tau) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \ \tau \in F, \tag{1.16}$$

а индекс задаётся формулой

$$\text{æ} = -\sum_{\tau\in F}[\tilde{\Delta}_\tau^\pm \pm \tilde{n}_\tau(\lambda_\tau)], \tag{1.17}$$

где $\tilde{\Delta}_\tau^\pm$ и $\tilde{n}_\tau(\alpha)$ определяются как и раньше для $X(\zeta;\tau)$. Этот результат исследован в [13] когда все компоненты λ_τ совпадают, и имеет аналогичное доказательство в общем случае.

Сравнивая (1.9) и (1.15), можно заметить, что

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Q_\tau^\zeta B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} X(\zeta;\tau) = \begin{pmatrix} 1 & B^{-1}\overline{B} \\ 0 & \zeta X_\tau(\zeta) \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

причём аналог этой формулы имеет место для Y_τ и $Y(\zeta;\tau)$. В силу этих формул условие (1.16) эквивалентно (1.13), а из (1.17) вытекает (1.14).

Следствие 1.1. Пусть Γ – гладкий контур. Тогда задача Дирихле (1.1), (1.2) фредгольмова в классах $C^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{D}, F)$ $(0 < |\lambda| < 1)$, а индекс этой задачи равен 0.

Доказательство. Если точка $\tau \in F$ регулярна, то $q_{\tau-0} = -q_{\tau+0}$, и поэтому матрица (1.7) является числом и равно -1. Следовательно, $Q^{\zeta}_{\tau} = e^{\pi i\zeta}$, $\overline{Q}^{\zeta}_{\tau} = e^{-\pi i\zeta}$ и (1.9) принимает вид $X_{\tau}(\zeta) = Y_{\tau}(\zeta)(B^{-1}\overline{B})$, $Y_{\tau}(\zeta) = e^{\pi i\zeta} - e^{-\pi i\zeta}$. Таким образом, условие (1.13) выполняется для всех $0 < |\lambda| < 1$, а из (1.14) следует $\varkappa = 0$.

Используя равенство (1.18), можно переформулировать Теорему 4 из [13], касающуюся асимптотики решения u. Для этого, введем классы

$$C^{\mu}_{(\lambda+0)} = \cup_{\varepsilon>0} C^{\mu}_{(\lambda+\varepsilon)}, \quad C^{\mu}_{(\lambda-0)} = \cap_{\varepsilon>0} C^{\mu}_{(\lambda-\varepsilon)},$$

которые кратко будем обозначать $C^{\mu}_{(+0)}$ и $C^{\mu}_{(-0)} = C^{\mu}_{-0}$, если $\lambda = 0$. Например,

$$(z-\tau)^{\zeta_0}_J [\ln(z-\tau)_J]^j \in C^{\mu}_{(\alpha-0)}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta_0 = \alpha, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

для матричнозначных J–аналитических функций. Если функция $\det X_{\tau}(\zeta)$ имеет ноль в точке ζ_0, то матричнозначная функция $X^{-1}_{\tau}(\zeta)$ имеет полюс в точке ζ_0 некоторой степени $r(\zeta_0) \geq 1$. Чтобы описать асимптотическое поведение решений $u(z)$ в криволинейных секторах D_{τ} при $z \to \tau$, рассмотрим специальную J–аналитическую функцию $\phi_{\tau}(z;\alpha)$ для $\alpha \neq 0$, определенную формулой

$$\phi_{\tau}(z;\alpha) = \sum_{\mathrm{Re}\,\zeta_0=\alpha} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z-\tau)^{\zeta_0}_J [\ln(z-\tau)_J]^j c_j(\zeta_0), \quad c_j(\zeta_0) \in \mathbb{C}^l, \tag{1.19}$$

где сумма распространена по всем нулям ζ_0 функции $\det X_{\tau}(\zeta)$, лежащим на прямой $\mathrm{Re}\,\zeta_0 = \alpha$. Если $\alpha = 0$, то к точкам ζ_0 добавим начало координат $\zeta = 0$, и будем писать $r(0) = 0$ при $\det X_{\tau}(0) \neq 0$. Тогда мы получаем

$$\phi_{\tau}(z;0) = \sum_{\mathrm{Re}\,\zeta_0=0,\,\zeta_0\neq 0} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z-\tau)^{\zeta_0}_J [\ln(z-\tau)_J]^j c_j(\zeta_0) + \sum_{j=0}^{r(0)} [\ln(z-\tau)_J]^j c_j(0). \tag{1.19^0}$$

Заметим, что в обоих случаях $\phi'_{\tau}(z) \in C^{\mu}_{\alpha-1-0}(D_{\tau},\tau)$.

Теорема 1.2. *Пусть $u \in C^{\mu}_{(\lambda-0)}(\overline{D}, F)$ есть решение задачи Дирихле (1.1), (1.2) (или, более точно, $\phi \in C^{\mu}_{(\lambda-0)}(\overline{D}, F)$ в представлении (1.4) этого решения). Кроме того, пусть правая часть f принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda_*+0)}(\Gamma_{\tau},\tau)$ для некоторого $\tau \in F$. Тогда существует функция $\phi_{\tau}(z,\lambda_{\tau})$ вида (1.19) или (1.19^0) такая, что*

$$u_{\tau} = u - \mathrm{Re}\,B\phi_{\tau} \in C^{\mu}_{\lambda+0}(\overline{D}_{\tau},\tau). \tag{1.20}$$

Если, дополнительно, $f \in C^{1,\mu}_{(\lambda_r+0)}(\Gamma_r,\tau)$, *то* $u_r \in C^{1,\mu}_{(\lambda_r+0)}(\overline{D}_r,\tau)$.

Доказательство : Теорема 4 из [13] приводит к аналогичному результату для конечного символа (1.15). Действительно, степень $r(\zeta)$ в (1.19) должна меняться степенем $\tilde r(\zeta_0)$ полюса $X^{-1}(\zeta;\tau)$ в точке ζ_0. Следовательно, различие между случаями $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ исчезает. Соотношение (1.18) показывает, что

$$\tilde r(\zeta_0) = \begin{cases} r(\zeta_0), & \text{если} \quad \zeta_0 \neq 0, \\ r(\zeta_0) + 1, & \text{если} \quad \zeta_0 = 0, \end{cases}$$

откуда следует требуемое утверждение.

Следствие 1.2. Если $n^0_r = 0$, т.е. $\det X_r(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Re}\zeta = 0$, то всякое решение $u \in C^{\mu}_{-0}$ задачи Дирихле (1.1), (1.2) с правой частью $f \in C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_r,\tau)$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\overline{D}_r,\tau)$.

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Мы отметили, что если функция $\zeta^l \det X_r(\zeta)$ чётна, то целые числа $\Delta^{\pm}_r$ могут быть вычислены явно. В этом случае частное $\det X/\det Y$ чётно и поэтому целые числа (1.11) имеют противоположные знаки. Таким образом, в силу (1.12), получаем

$$\Delta^{\pm}_r = \pm\frac{1}{2}n^0_r. \tag{2.1}$$

Теми же рассуждениями можно доказать, что $n_r(\alpha) = -n_r(-\alpha)$, и следовательно индексы задачи Дирихле (1.1), (1.2) в классах $C^{\mu}_{(\pm\lambda)}$ являются противоположными числами.

Далее предположим, что система (1.1) сопряжённая в смысле Лагранжа :

$$A^{\top}_{ij} = A_{ji}, \tag{2.2}$$

где $^{\top}$ означает матричную транспозицию. Рассмотрим систему (1.1), (2.2) в классах $C^{\mu}_{-0} = C^{\mu}_{(-0)}$ и $C^{\mu}_{(+0)}$. В силу Теорем 1.1 и 1.2, класс $V^{\pm} \subseteq C^{\mu}_{(\pm0)}$ всех решений однородной задачи является пространствам конечной размерности, содержащийся в $C^{1,\mu}_{(\pm0)}$, в частности, для конормальной производной

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{2} n_i A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^{\mu}_{-1\pm0}(\Gamma,F), \quad v \in V^{\pm}, \tag{2.3}$$

где n_1 and n_2 суть компоненты внешней нормали. Поэтому произведение внешней нормали и произвольной функции $C^{\mu}_{(\mp0)}$ принадлежит $C^{\mu}_{-1+0}(\Gamma,F)$, и следовательно, является интегрируемой. Здесь произведение uv двух l-векторов u и v есть скалярное произведение $u_1v_1 + \ldots + u_lv_l$.

Теорема 2.1. *Пусть (1.1), (2.2) – слабо связанная система и пусть (2.1) верно для всех $\tau \in F$. Тогда условия*

$$\int_\Gamma f\,\frac{\partial v}{\partial \nu}ds = 0, \quad v \in V^{\mp}, \tag{2.4$^\pm$}$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости задачи Дирихле в классе $C^{\mu}_{(\pm 0)}$. Кроме того, индекс $\varkappa^{\pm}$ задачи задается формулой

$$\varkappa^{\pm} = \dim V^{\pm} - \dim V^{\mp} = \mp\frac{1}{2}\sum\nolimits_{\tau} n_{\tau}^{0}. \tag{2.5}$$

Доказательство : Согласно (2.2), тождество

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)v - u\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right] = 0\,.$$

выполняется для всех решений u, v системы (1.1). Поэтому, если $u \in C^{1,\mu}_{(\pm 0)}$, $v \in C^{1,\mu}_{(\mp 0)}$, то вышеприведённое выражение в квадратных скобках принадлежит C^{μ}_{-1+0}. Следовательно, по формуле Грина

$$\int_\Gamma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)v - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]ds = 0,$$

где использовано обозначение (2.3). В частности, условия (2.4$^\pm$) являются необходимыми для разрешимости этой задачи в классе $C^{1,\mu}_{(\pm 0)}$. Тот же самый факт верен также в классе $C^{\mu}_{(\pm 0)}$.

На следующем шаге покажем, что число линейно независимых условий (2.4$^\pm$) равно $\dim V^{\mp}$, т.е. линейная операция $v \to \partial v/\partial\nu$ является взаимно-однозначным соответствием в классе $V = V^-$. Если $\partial v/\partial \nu = 0$ на Γ для функции $v \in V$, то в силу (2.4) и равенства $v|_\Gamma = 0$, приходим к следующей системе линейных уравнений :

$$(n_1A_{11} + n_2A_{21})v_x + (n_1A_{12} + n_2A_{22})v_y = 0, \quad -n_2v_x + n_1v_y = 0 \tag{2.6}$$

где v_x и v_y принадлежат Γ. Матрица коэффициентов этой системы удовлетворяет равенству

$$\begin{pmatrix}\sum_i n_iA_{i1} & \sum_i n_iA_{i2}\\ -n_2 & n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & -n_2\\ n_2 & n_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где

$$Q_1 = \sum\nolimits_{i,j} n_in_jA_{ij}, \quad Q_2 = \sum\nolimits_i n_i(n_1A_{i2} - n_2A_{i1}).$$

Из эллиптичности и условия $\det Q_1 \neq 0$ для (1.1) следует, что система (2.6) имеет только тривиальное решение : $v_x = v_y = 0$ на Γ. Рассматривая теперь представление (1.4) для v, заметим, что обратная формула задается равенством

$$\phi' = 2\left(C_1\frac{\partial u}{\partial x} + C_2\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{BJ} \end{pmatrix}^{-1}$$

(см. [14]). Таким образом, производная ϕ' равна нулю на Γ, и оттуда по теореме Коши для J-аналитических функций (см. [14]) следует, что $\phi' \equiv 0$ в D, и поэтому $v \equiv 0$.

Формулы ($2.4^{\pm}$) определяют $\dim V^{\mp}$ линейно независимых условий ортогональности. Из (2.1) и Теоремы 1.1 следует, что в $C^{\mu}_{(\pm)}$ индекс $æ^{\pm} = \dim V^{\pm} - k^{\pm}$ задачи задается суммой в правой части (2.5). В частности, неравенство $k^{\pm} \geq \dim V^{\mp}$ верно для $k^{\pm}$ условий линейно независимой разрешимости. Следовательно, $0 = æ^+ - æ^- = (\dim V^+ - k^-) + (\dim V^- - k^+)$, что возможно только при $k^{\pm} = \dim V^{\mp}$. Поэтому, все утверждения теоремы доказаны.

Абсолютные значения индексов (2.5) совпадают с размерностью пространства V^0, участвующего в представлении $V^- = V^0 \oplus V^+$. По Теореме 1.2 каждая базисная функция этого пространства обладает асимптотикой (1.20) с функциями ϕ_τ вида (1.19^0) и $\phi_\tau \neq 0$ по крайней мере для одного $\tau \in F$. Поэтому, $2\dim V^0 = \sum_\tau n^0_\tau$.

§ 3. ДВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В случае $l = 2$ величину $\det X_\tau$ можно вычислить в явном виде. Для этого положим

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{21} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{pmatrix} = (\det B)B^{-1}. \tag{3.1}$$

В этом обозначении

$$B^*\overline{B} = \begin{pmatrix} r & -2ip_2 \\ 2ip_1 & \overline{r} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} r &= B_{22}\overline{B}_{11} - B_{12}\overline{B}_{21}, \\ p_j &= \mathrm{Im}\,(B_{1j}\overline{B}_{2j}),\ j = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.2}$$
$$|\det B|^2 = \det B^* \det \overline{B} = |r|^2 - 4p_1p_2.$$

Согласно (3.1), матрицу B^{-1} в определениях (1.9) функции X_τ можно заменить матрицей B^*. Следовательно

$$\zeta X_\tau(\zeta) = Q^\zeta_\tau(B^*\overline{B}) - (B^*\overline{B})\overline{Q}^\zeta_\tau. \tag{3.3}$$

Напомним теперь, что матрица J в (1.3) может быть выбрана так, чтобы имела жорданову форму, причём существуют только три возможных случая :

$$J_I = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \quad (\nu_1 \neq \nu_2), \qquad J_{II} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J_{III} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Если $J = J_{III}$, то матрицы Q^ζ и $\overline{Q}^\zeta$ скалярны и (3.3) приводит к равенству $X_r(\zeta) = \zeta^{-1}(Q^\zeta_r - \overline{Q}^\zeta_r)(B^*\overline{B}) = Y_r(\zeta)(B^*\overline{B})$. Поэтому $\det X_r$ и $\det Y_r$ отличаются постоянным множителем и следовательно $\Delta^\pm_r = 0$. Кроме того, если $J = J_{III}$, то система (1.1) приводит к единственному скалярному уравнению. Таким образом, достаточно рассмотреть только первые два случая в (3.4).

В случае $J = J_I$, Q_r из (1.7) является диагональной матрицей, а (1.8) суть диагональные элементы. Обозначая $q_{r(\nu_j)}$ через $q_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ $(j = 1, 2)$ для краткости, имеем $q^\zeta_j = \rho^\zeta_j e^{i\theta_j\zeta}$, $\overline{q}^\zeta_j = \rho^\zeta_j e^{-i\theta_j\zeta}$ и

$$Q^\zeta_r = \begin{pmatrix} q^\zeta_1 & 0 \\ 0 & q^\zeta_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{Q}^\zeta_r = \begin{pmatrix} \overline{q}^\zeta_1 & 0 \\ 0 & \overline{q}^\zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.2), (3.3),

$$\zeta X^\zeta_r = \begin{pmatrix} r(q^\zeta_1 - \overline{q}^\zeta_1) & -2ip_2(q^\zeta_1 - \overline{q}^\zeta_2) \\ 2ip_1(q^\zeta_2 - \overline{q}^\zeta_1) & \overline{r}(q^\zeta_2 - \overline{q}^\zeta_2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\zeta^2 \det X_r &= |r|^2(q^\zeta_1 - \overline{q}^\zeta_1)(q^\zeta_2 - \overline{q}^\zeta_2) - 4p_1p_2(q^\zeta_1 - \overline{q}^\zeta_2)(q^\zeta_2 - \overline{q}^\zeta_1) \\ &= |\det B|^2(q^\zeta_1 - \overline{q}^\zeta_1)(q^\zeta_2 - \overline{q}^\zeta_2) - 4p_1p_2(q^\zeta_1\overline{q}^\zeta_2 + q^\zeta_2\overline{q}^\zeta_1 - q^\zeta_1\overline{q}^\zeta_1 - q^\zeta_2\overline{q}^\zeta_2).\end{aligned}$$

и подобное выражение можно записать для Y_r с $r = \det B = 1$ и $p_j = 0$. Поэтому, некоторыми простыми преобразованиями получаем

$$-\frac{\zeta^2 \det X_r(\zeta)}{4|\det B|^2 \rho^\zeta_1 \rho^\zeta_2} = \sin\theta_1\zeta \sin\theta_2\zeta - \beta\left[\left(\frac{\rho^\zeta_1}{\rho^\zeta_2} - \frac{\rho^\zeta_2}{\rho^\zeta_1}\right)^2 + 4\sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\zeta\right], \tag{3.5$_I$}$$

$$\beta = \frac{p_1p_2}{|\det B|^2} = \frac{\operatorname{Im}(B_{11}\overline{B}_{21})\operatorname{Im}(B_{12}\overline{B}_{22})}{|\det B|^2}.$$

Величина $\beta = \beta(B)$ является инвариантом системы (1.1), т.е. она не зависит от выбора матрицы B в (1.3). Действительно, каждая другая матрица $\tilde{B}$ такого типа связана (см. [14]) с B равенствами $\tilde{B}_{ij} = \lambda_j B_{ij}$, $1 \le i, j \le 2$, для некоторого $\lambda_j \neq 0$. Следовательно, $\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2 p_1p_2$ и $|\det \tilde{B}|^2 = |\lambda_1|^2|\lambda_2|^2|\det B|^2$, и поэтому $\beta(\tilde{B}) = \beta(B)$. В предыдущих обозначениях (см. [14]) имеем

$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{B}\,\overline{J} \end{pmatrix} = |\nu_1 - \nu_2|^2 |\det B|^2 \left(\beta - \frac{\operatorname{Im}\nu_1 \operatorname{Im}\nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2}\right).$$

Следовательно, соответствующее условие (1.3) равносильно

$$\beta \neq \frac{\operatorname{Im}\nu_1 \operatorname{Im}\nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2}. \tag{3.6$_I$}$$

Можно убедиться, что для любого заданного числа $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего этому условию, обратимая матрица B может быть выбрана так, чтобы имело место (3.5). В силу результатов работы [14], эта матрица определяет единственную эллиптическую систему, удовлетворяющему (1.3), а коэффициенты $A_0 = -A_{22}^{-1}A_{11}$, $A_1 = -A_{22}^{-1}(A_{12} + A_{21})$ этой системы должны удовлетворять следующему соотношению

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BJ & \overline{B}\,\overline{J} \\ BJ^2 & \overline{B}\,\overline{J}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{B}\,\overline{J} \end{pmatrix}^{-1}, \quad J = J_I.$$

Наконец, если в (3.4) $J = J_{II}$, то приходим к следующим выражениям, где $q = q_{r\pm 0,J}$ (см. (1.7)) :

$$q_J = q_\nu \begin{pmatrix} 1 & q_\nu^{-1}\mathrm{Im}\, q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$Q_r = q_{r(\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \delta_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_r = \frac{\mathrm{Im}\, q_{r-0}}{q_{r-0}} - \frac{\mathrm{Im}\, q_{r+0}}{q_{r+0}}.$$

Ввиду (1.5), комплексное число δ_r можно записать в виде

$$\delta_r = \frac{\sin\theta_r}{q_{r-0}q_{r+0}}. \tag{3.7}$$

Таким образом,

$$Q_r^\zeta = q_{r(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \delta_r\zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{Q}_r^\zeta = \overline{q}_{r(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \overline{\delta}_r\zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому из (3.2), (3.3) имеем

$$\zeta X(\zeta) = \begin{pmatrix} r(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) + 2ip_1\delta\zeta q^\zeta & \vdots & -2ip_2(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) + \zeta(\overline{r}\delta q^\zeta - r\overline{\delta}\overline{q}^\zeta) \\ 2ip_1(q^\zeta - q^\zeta) & \vdots & \overline{r}(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) - 2ip_1\overline{\delta}\zeta\overline{q}^\zeta \end{pmatrix},$$

где для краткости $q = q_{r(\nu)}$ и $\delta = \delta_r$. Аналогичное выражение можно записать для Y с $r = 1$ и $p_j = 0$. Простым преобразованием получаем

$$-\frac{\zeta^2 \det\, X_r(\zeta)}{4|\det\, B|^2\rho^{2\zeta}} = \sin^2\theta\zeta - \beta|\delta|^2\zeta^2, \quad \beta = \frac{p_1^2}{|\det\, B|^2}. \tag{3.5$_{II}$}$$

Далее, согласно результатам из [14], матрицы $\tilde{B}$ и B из (1.3) связаны равенствами $\tilde{B}_{i1} = \lambda_1 B_{i1}$, $\tilde{B}_{i2} = \lambda_2 B_{i1} + \lambda_1 B_{i2}$, где $\lambda_1 \neq 0$ и λ_2 суть скаляры. Следовательно, заключаем как и выше, что величина β является инвариантом уравнения (1.1). Кроме того, из результатов работы [14] имеем

$$\frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{B}\,\overline{J} \end{pmatrix} = |\det B|^2(\beta - \operatorname{Im}{}^2\nu),$$

и поэтому соответствующее условие (1.3) принимает вид

$$\beta \neq \operatorname{Im}{}^2\nu. \tag{3.6$_{II}$}$$

Если заданное число β удовлетворяет этому условию а также (3.5_{II}) с обратимой матрицей B, то можно доказать как и выше, что B определяет единственную эллиптическую систему, удовлетворяющую (1.3) с $J = J_{II}$.

Формулы, подобные (3.5), имеют место для $\det Y$ относительно $\det B = 1$ и $\beta = 0$. Они показывают, что функция $\det X(\zeta)$ является чётной и верны равенства (2.1). В связи с этим, важно вычислить число n_r^0 всех нулей функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = 0$. Согласно (3.5), эти нули совпадают с нулями функции

$$|\det B|^{-3}\frac{\det X_r}{\det Y_r} = 1 - \beta h, \tag{3.8}$$

где

$$h_I(\zeta) = \frac{4}{(\sin\theta_1\zeta)(\sin\theta_2\zeta)}\left[\sinh^2\left(\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\zeta + \sin^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\zeta\right],$$

$$h_{II}(\zeta) = \frac{|\delta_r|^2\zeta^2}{\sin^2\theta_{r(\nu)}\zeta}.$$

Здесь мы использовали, что $\rho_j = \rho_{r(\nu_j)}$ и $\theta_j = \theta_{r(\nu_j)}$. В частности, имеем

$$h_I(0) = \frac{4}{\theta_1\theta_2}\left[\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^2 - \left(\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\right], \quad h_{II}(0) = \frac{|\delta_r|^2}{\theta^2_{r(\nu)}}, \tag{3.9}$$

и $1 - \beta h(it) = 0$, где $\beta h(0) \geq 1$ имеет по крайней мере один корень на полуоси $t \geq 0$, так как $h(it) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, $n_r^0 \geq 2$ при $\beta h(0) \geq 1$.

Лемма 3.1. *Если $J = J_{II}$, то*

$$n_r^0 = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad \beta h(0) \geq 1, \\ 0, & \text{если} \quad \beta h(0) < 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Кроме того, подобное утверждение верно в случае $J = J_{II}$ при дополнительном требовании

$$\rho_{r(\nu_1)} = \rho_{r(\nu_2)}, \quad \theta_{r(\nu_1)} = 3\theta_{r(\nu_2)}. \tag{3.11}$$

Доказательство : На $[0, \infty)$ функция $g(x) = x^2/\sinh^2 x$ строго убывает от 1 до 0. Следовательно наше первое утверждение имеет место, поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t)$. Если $J = J_{II}$ и имеет место (3.10), т.е. $\rho_1 = \rho_2$ и $\theta_1 = 3\theta_2$, то

$$h(it) = \frac{4\sinh t\theta_1}{\sinh 3t\theta_1} = \frac{4}{3 + 4\sinh^2 t\theta_1}.$$

На $[0, \infty)$ функция $g(x) = 1/(1 + 3\sinh^2 x)$ строго убывает от 1 до 0, поэтому наше второе утверждение имеет место, поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t\theta_1)$.

На вопрос : **Существуют ли единичные векторы $q_{r\pm 0}$, для которых выполнены условия (3.11) ?** следующая лемма даёт лишь частичный ответ.

Лемма 3.2. *Для любого заданного $\nu_1 \neq \nu_2$ существуют единичные векторы $q_{r\pm 0} \in \mathbb{C}$ такие, что выполняется первое условие в (3.11).*

Доказательство : Полагая $q_{r\pm 0} = q^1_{r\pm 0} + iq^2_{r\pm 0}$, $q^j_{r\pm 0} \in \mathbb{R}$, получаем, что

$$q_k = \frac{q^1_{r-0} + \nu_k q^2_{r-0}}{q^1_{r+0} + \nu_k q^1_{r+0}}, \; k = 1, 2.$$

Теперь необходимо найти $q_{r\pm 0}$ такое, что $|q_1| = |q_2|$, или эквивалентно

$$\frac{q^1_{r-0} + \nu_1 q^2_{r-0}}{q^1_{r-0} + \nu_2 q^1_{r-0}} = \frac{q^1_{r+0} + \nu_1 q^2_{r+0}}{q^1_{r+0} + \nu_2 q^1_{r+0}}$$

или

$$\frac{1 + \nu_1 t_-}{1 + \nu_2 t_-} = \frac{1 + \nu_1 t_+}{1 + \nu_2 t_+}, \quad t_\pm = \frac{q^2_r \pm 0}{q^1_r \pm 0}. \tag{3.12}$$

На комплексной w-плоскости пусть L - образ действительной оси $\mathbb{R}$ при преобразовании

$$w = \frac{1 + \nu_1 t}{1 + \nu_2 t}. \tag{3.13}$$

Ясно, что L есть окружность, содержащая точки $w = 1$ и $w = \nu_1/\nu_2$. Точки $t = -1/\nu_j$, $j = 1, 2$, находятся в верхней полуплоскости, т.е. находятся на одной стороне прямой $\mathbb{R}$, а следовательно точка $w = 0$ лежит вне указанной окружности. Поэтому, не умаляя общности $\operatorname{Im}(\nu_1/\nu_2) > 0$. Окружность $|w| = R$, где

$$R_0 < R < R_1; \quad R_0 = \min_L |w|, \quad R_1 = \max_L |w|,$$

пересекает L в двух точках : $w_\pm$. Если $t_\pm$ соответствует $w_\pm$ преобразованием (3.13), то (3.12) определяет единичные векторы $q_{r\pm 0}$ с требуемым свойством.

Далее назовём матрицу Жордана J в (1.3) формой Жордана системы (1.1).

Теорема 3.1. *Для любых заданных матриц $J = J_I$ или $J = J_{II}$ из (3.4), существуют некоторый контур Γ с единственной угловой точкой τ и эллиптическая система (1.1) с формой Жордана J такие, что индекс задачи Дирихле (1.1), (1.2) отрицателен в классе $C^{\mu}_{(+0)}$.*

Доказательство. По Теореме 1.1 и из чётности функции $\det X_\tau(\zeta)$, индекс $æ^+$ задачи Дирихле в классе $C^{\mu}_{(+0)}$ равен $-n^0_\tau/2$. Предположим теперь $J = J_{II}$. В этом случае $h(0) > 0$ в (3.9), и можно выбрать число $\beta > 0$ так, чтобы удовлетворялись бы условия (3.6_{II}) и $\beta h(0) \geq 1$. Если матрица B обратима и связана с β соответствующим соотношением (3.5_{II}), то матрица B определяет требуемую эллиптическую систему. Если $J = J_I$, то выберем $q_{\tau\pm0}$ как и в Лемме 3.2 и рассмотрим контур Γ такой, чтобы векторы $q_{\tau\pm0}$ являлись бы касательными к боковым сторонам области D_τ в точке τ. Тогда $h(0) > 0$ в силу (3.9). Осталось повторить вышеприведённые рассуждения.

Заметим, что при $J = J_{II}$ контур Γ может быть выбран произвольным образом, и в силу Следствия 1.1 индекс задачи может быть отрицательным только в случае угловой точки τ.

§4. СИСТЕМА ЛАМЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Система (1.1), (2.2), где коэффициенты являются матрицами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

называется **системой Ламе эластичности плоскости** для $\lambda > 0$. Та же система может быть рассмотрена для $\lambda < 0$. Если $\lambda < 0$, то характеристический многочлен системы есть $(\lambda + 2)(1 + z^2)^2$, а условие эллиптичности принимает вид $\lambda \neq -2$. В случае $\lambda = -1$ система приводится к уравнению Лапласа. Если $\lambda \neq -1$, то можно непосредственно проверить, что

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & æ \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad æ = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$

удовлетворяют соотношениям (1.3). В частности, для $\lambda = -3$ система строго связана. Таким образом, условия на λ принимают вид

$$\lambda \neq -1, -2, -3. \qquad (4.2)$$

Ввиду (4.2), условия (3.6_{II}), (3.7_{II}) могут быть записаны в виде $\beta = 1/æ^2 \neq 1$, где последнее неравенство следует из $\lambda \neq -2$. Кроме того, (3.7) и (3.9_{II}) принимают вид

$$h(0) = \frac{|\delta_\tau|^2}{\theta_\tau^2}, \quad \delta_\tau = \frac{\sin\theta_\tau}{q_{\tau-0}q_{\tau+0}}.$$

При $\nu = 1$, преобразование $z \to z_\nu$ тождественно, а $h(0) = (\sin\theta_r)^2/\theta_r^2$ и (3.10) принимают вид

$$n_r^0 = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad |\sin\theta_r| \geq |æ|\theta_r, \\ 0, & \text{если} \quad |\sin\theta_r| < |æ|\theta_r. \end{cases}$$

Заметим также, что наряду с (4.2) неравенство $|\sin\theta_r| \geq |æ|\theta_r$, т.е.

$$\left|\frac{\lambda+3}{\lambda+1}\right| \leq \frac{|\sin\theta_r|}{\theta_r}, \quad 0 < \theta_r < 2\pi,\ \theta_r \neq \pi, \tag{4.3}$$

определяет два непересекающихся интервала, где $n_r^0 = 2$

$$-3 \leq \lambda < \lambda_r^0, \quad \lambda_r^1 \leq \lambda < -2. \tag{4.4}$$

$n_r^0 = 0$, для остальных значений λ.

Наконец, воспользовавшись Теоремой 1.2, мы приходим к следующему результату относительно системы (1.1), (4.1).

Теорема 4.1. *Пусть $V^\pm$ – класс всех решений $v \in C^\mu_{(\pm 0)}$ однородной задачи Дирихле для системы (1.1), (4.1). Тогда условие (2.4$^\pm$) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи в классе $C^\mu_{(\pm 0)}$, а индекс $æ^\pm$ задачи равен*

$$æ^\pm = \mp \sum\nolimits_r \chi\left(\frac{|\sin\theta_r|}{\theta_r} - \left|\frac{\lambda+3}{\lambda+1}\right|\right), \quad \chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Заметим, что система (1.1), (4.1) строго эллиптична при $\lambda > -2$. Согласно (4.4), для таких значений λ неравенство (4.3) не выполняется и поэтому $æ^+ = æ^- = 0$. Другими словами, отрицательный индекс $æ^+$ может случится только при $\lambda < -2$. Более точнее, если контур Γ имеет единственную угловую точку τ и $\lambda_\tau^0 \leq \lambda < -2$, то $æ^- = \dim V^- - \dim V^+ = 1$. Следовательно, существует только одно линейное независимое решение однородной задачи Дирихле, обладающее асимптотикой (1.20) в точке τ, вместе с функцией $\phi_\tau \neq 0$ вида (1.19^0).

Abstract. The paper considers Dirichlet problem for elliptic systems of second order with constant leading coefficients in a piecewise smooth domains of the complex plane. A Fredholm criterion and an index formula in the Hölder spaces are given together with some examples of elliptic systems, where the index of the Dirichlet problem does not vanish.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Bitsadze. Boundary value problems for elliptic equations of second order. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1968.

2. Н. Е. Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем второго рода с постоянными коэффициентами", Дифференциальные Уравнения, том 1, стр. 3–23, 1966.
3. Н. Е. Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем второго рода с постоянными коэффициентами", Дифференциальные Уравнения, том 1, стр. 163–171, 1966.
4. А. Вольперт, "Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости", Труды Моск. Мат. Общества, том 10, стр. 41–87, 1961.
5. H. Begehr and Guo Chun Wen, Boundary value problem for elliptic equations and systems, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., vol. 46, 1990.
6. М. М. Сираждинов, "Граничные задачи для общих эллиптических систем на плоскости", Изв. российской Акад. Наук, серия Математика, том 61, № 5, 1997.
7. V. P. Burskii, Investigations methods of boundary value problems for general differential equations, Naukova Dumka, Kiev, 2002.
8. А. П. Солдатов, "О первой и второй граничных задачах для эллиптических систем на плоскости", Диф. Уравнения, том 39, стр. 674–686, 2003.
9. В. А. Кондратьев, "Граничные задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками", Перев. Московского матем. общ., том 16, стр. 209 – 292, 1967.
10. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, "Граничные задачи для кусочно дифференцируемых уравнений в негладких областях", Российское мат. Общество, том 38, № 2, стр. 3–76, 1983.
11. M. Dauge and J. L. Steux, "Probleme de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone curviligne, J. Diff. Equ., vol. 70, no. 1, pp. 93–113, 1987.
12. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1994.
13. A. P. Soldatov, "Bitsadze-Samarskii problem for elliptic systems of second order", Journal of applied functional analysis, 2005 (to appear).
14. A. P. Soldatov, "Hyperanalytic functions and their applications, J. Math. Sciences, vol. 15, pp.142–199, 2004.

Поступила 7 октября 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 70–82

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ–СТИЛТЬЕСА И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Талалян

Институт математики НАН Армении

Резюме. В статье исследуются граничные свойства интегралов Пуассона-Стилтьеса и доказываются теоремы единственности рядов Фурье-Стилтьеса при некоторых ограничениях на поведении фиксированных подпоследовательностей частичных сумм и фиксированных последовательностей средних Абеля этих рядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданной периодической, с периодом 1, непрерывной функции $F(x)$ ограниченной вариации, рассмотрим ряды

$$dF \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikx}, \quad c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx} dF(x). \tag{1}$$

Имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 e^{-2\pi ikx}\, dF(x) = e^{-2\pi ikx}F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) de^{-2\pi ikx} = \\ &= 2\pi ik \int_0^1 e^{-2\pi ikx} F(x)\, dx \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\int_0^1 e^{-2\pi ikx} F(x)\, dx = \frac{c_k}{2\pi ik}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Ряд Фурье функции $F(x)$ имеет вид

$$F(x) \sim c + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_k}{2\pi ik} e^{2\pi ikx}, \tag{4}$$

где $\sum'$ – означает отсутствие члена с $k = 0$.

Рассмотрим ряд Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$ по системе Хаара :

$$dF(x) = a_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + a_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} a_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \tag{5}$$

где

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1, \quad x \in (0,1), \quad \chi_1^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in (0,1/2), \\ -1, & \text{если} \quad x \in (1/2,1). \end{cases}$$

$$\chi_k^{(m)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{если} \quad x \in \left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}}\right), \\ -\sqrt{2^m}, & \text{если} \quad x \in \left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}}\right), \\ 0, & \text{если} \quad x \in (0,1) - \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Имеем

$$a_0^{(0)} = \int_0^1 dF(x) = F(1) - F(0), \quad a_1^{(0)} = \big(F(1/2) - F(0)\big) - \big(F(1) - F(1/2)\big).$$

$$a_k^{(m)} = \sqrt{2^m}\left(\int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{m+1}}} dF(x) - \int_{\frac{2k-1}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} dF(x)\right) =$$

$$= \sqrt{2^m}\left(2F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right)\right), \tag{7}$$

где интегралы понимаются в смысле предельного перехода к концам интервала. Для краткости будем обозначать

$$\Delta_k^{(m)} = \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right); \quad \Delta_{k,2}^{(m)}F(x) = 2F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right).$$

Частные суммы $A_{2^m}(x)$ ряда (5) имеют при $m = 0,1,\dots$ и $1 \le k \le 2^m$ следующие значения

$$A_{2^m}(x) = 2^m\left(F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right), \quad x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \tag{8}$$

Так как ряд (4) равномерно сходится к $F(x)$ на $[0,1]$, то из (4), (7) и (8) получаем

$$A_{2^m}(x) = 2^m {\sum_{n=-\infty}^{+\infty}}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n\frac{k}{2^m}} - e^{2\pi i n\frac{k-1}{2^m}}\right), \quad x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right). \tag{9}$$

$$a_k^{(m)} = \sqrt{2^m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n}{2\pi i n} \Delta_{k,2}^{(m)} e^{2\pi i n x} = \sqrt{2^m} \Delta_{k,2}^{(m)} F(x). \tag{10}$$

Поэтому, в силу непрерывности $F(x)$ на $[0,1]$, для некоторой последовательности ε_m, $\varepsilon_m > 0$, $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ выполняются неравенства :

$$|a_k^{(m)}| \leq \sqrt{2^m} \varepsilon_m, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad 1 \leq k \leq 2^m. \tag{11}$$

Эти неравенства в дальнейшем будут использованы в следующей эквивалентной форме :

$$\frac{\left|a_k^{(m)}\right|}{\max_x \left|\chi_k^{(m)}(x)\right|} \leq \varepsilon_m, \quad 1 \leq k \leq 2^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0. \tag{12}$$

Заметим, что из (8) следует сходимость почти всюду ряда (5) на $[0,1]$ к интегрируемой функции $F'(x)$. Известно также, что интеграл Пуассона-Стилтьеса функции $F(x)$ по радиальным направлениям почти всюду сходится к $F'(x)$, т.е.

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} c_n e^{2\pi i n x} = F'(x) \quad \text{почти всюду на} \quad x \in [0,1]. \tag{13}$$

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ – непрерывная на $[0,1]$, периодическая, с периодом 1, функция конечной вариации и пусть $S_{N_j}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, – фиксированная последовательность частичных сумм ряда Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$, обладающая следующим свойством : Для любой подпоследовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\} \subset \{S_{N_j}(x)\}$ существует счётное множество E такое, что для произвольной точки $x \notin E$ существует $\delta(x) > 0$ такое, что*

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)} |S_{n_{j_k}}(t)| \right) < \infty. \tag{14}$$

Тогда $F(x)$ абсолютно непрерывна и этот ряд является рядом Фурье функции $F'(x)$.

Пусть $A(r_j, x)$, $r_j \to 1$, - произвольная фиксированная последовательность средних Абеля-Пуассона $A(r,x)$ ряда Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$. Допустим, что для любой подпоследовательности $\{A(r_{j_k}, x)\} \subset \{A(r_j, x)\}$ существует счетное множество E такое, что для произвольной точки $x \overline{\in} E$ существует $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)} |A(r_{j_k}, t)| \right) < \infty. \tag{15}$$

Тогда $F(x)$ абсолютно непрерывна и ее ряд Фурье-Стилтьеса является рядом Фурье функции $F'(x)$.

Определение. Непрерывная на $[0,1]$, периодическая, с периодом 1, функция $F(x)$ конечной вариации называется **строго сингулярной**, если на любом интервале $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$ она не является абсолютно непрерывной.

Теорема 2. *Пусть $F(x)$ – непрерывная на $[0,1]$, строго сингулярная, периодическая функция и пусть $\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_j,x)\}$, $r_j\to 1$, – некоторые фиксированные последовательности частичных сумм и средних Абеля-Пуассона ряда Фурье–Стилтьеса функции $F(x)$. Тогда существуют подпоследовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\}\subset\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_{j_k},x)\}\subset\{A(r_j,x)\}$ такие, что на множествах E_1 и E_2 мощности континуума выполняются*

$$\lim_{k\to\infty}|S_{N_{j_k}}(x)|=+\infty,\quad x\in E_1\quad \text{и}\quad \lim_{k\to\infty}|A(r_{j_k},x)|=+\infty,\quad x\in E_2. \tag{16}$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Следующая лемма является аналогом леммы, доказанной в работе [4].

Лемма. *Пусть коэффициенты ряда по системе Хаара*

$$d_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x)+d_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}d_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x) \tag{17}$$

удовлетворяют условию :

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{\left|d_{k(m)}^{(m)}\right|}{\max\left|\chi_{k(m)}^{(m)}(x)\right|}=0 \tag{18}$$

для любой последовательности $\chi_{k(m)}^{(m)}(x)$, $m=0,1,2,\ldots$, носители которых содержатся в интервалах $\Delta_{k(m)}^{(m)}=\left(\frac{k(m)-1}{2^m},\frac{k(m)}{2^m}\right)$. Если частичная сумма $D_{2^m}(x)$ ряда (17) отлична от нуля на одном из своих интервалов постоянства $\Delta_k^{(m)}=\left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right)$, то существуют частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$, $m_1>m$, и два интервала постоянства $\Delta_{k_1}^{(m_1)}$, $\Delta_{k_2}^{(m_1)}$ этой суммы такие, что

$$\Delta_{k_1}^{(m_1)}\cup\Delta_{k_2}^{(m_1)}\subset\Delta_k^{(m)}\quad\text{и}\quad\overline{\Delta}_{k_1}^{(m_1)}\cap\overline{\Delta}_{k_2}^{(m_1)}=\left[\frac{k_1-1}{2^{m_1}},\frac{k_1}{2^{m_1}}\right]\cap\left[\frac{k_2-1}{2^{m_1}},\frac{k_2}{2^{m_1}}\right]=\emptyset, \tag{19}$$

а частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$ отлична от нуля на этих интервалах.

Доказательство. Пусть

$$D_{2^m}(x) = d, \quad x \in \Delta^{(m)}_{k(m)}, \quad d > 0. \tag{19}$$

Рассмотрим слагаемые $d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x)$ ряда (17), обладающие следующими свойствами : во первых

$$\Delta^{(m)}_{k(m)} \supset \Delta^{(m+1)}_{k(m+1)} \supset \Delta^{(m+2)}_{k(m+2)} \supset \cdots \supset \Delta^{(m+i)}_{k(m+i)} \cdots \tag{20}$$

а во вторых, если обозначить через $\Delta^{+(m+i)}_{k(m+i)}$ ту половину интервала $\Delta^{(m+i)}_{k(m+i)}$ где $d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x)$ неотрицательна, то

$$d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x) \geq 0, \quad x \in \Delta^{+(m+i)}_{k(m+i)}, \quad \Delta^{(m+i+1)}_{k(m+i+1)} \subset \Delta^{+(m+i)}_{k(m+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Если через $\Delta^{-(m+i)}_{k(m+i)}$ обозначить другую половину интервала $\Delta^{(m+i)}_{k(m+i)}$, то

$$d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x) \leq 0, \quad x \in \Delta^{-(m+i)}_{k(m+i)}, \quad \Delta^{-(m+i)}_{k(m+i)} = \Delta^{(m+i)}_{k(m+i)} \setminus \Delta^{+(m+i)}_{k(m+i)} \tag{22}$$

Случай

$$d + \sum_{i=1}^{p} d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x) = 0, \quad x \in \Delta^{(m)}_{k} \setminus \overline{\Delta}^{+(m+p)}_{k(m+p)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

противоречит условию (18) и следовательно не может выполнятся. Действительно, ясно, что при выполнении (23)

$$d^{(m+1)}_{k(m+1)}\chi^{(m+1)}_{k(m+1)}(x) = 2d, \quad x \in \Delta^{+(m+1)}_{k(m+1)}, \ldots, d^{(m+p)}_{k(m+p)}\chi^{(m+p)}_{k(m+p)}(x) = 2^p d,$$

$x \in \Delta^{+(m+p)}_{k(m+p)}$, и следовательно

$$\frac{\left|d^{(m+p)}_{k(m+p)}\right|}{\max\limits_{x}\left|\chi^{(m+p)}_{k(m+p)}(x)\right|} = \frac{2^p d}{2^{m+p}} = \frac{d}{2^m}, \tag{24}$$

для всех $p = 1, 2, \ldots$, что противоречит условию (18).
Итак, существует наименьшее p_0, для которого

$$d + \sum_{i=1}^{p_0} d^{(m+i)}_{k(m+i)}\chi^{(m+i)}_{k(m+i)}(x) = d_0 \neq 0, \quad x \in \Delta^{-(m+p_0)}_{k(m+p_0)}. \tag{25}$$

Она является частичной суммой $D_{2^{(m+p_0)}}$ ряда (17), принимающая отличные от нуля значения на интервалах $\Delta^{+(m+p_0)}_{k(m+p_0)}$ и $\Delta^{-(m+p_0)}_{k(m+p_0)}$. Повторяя вышеприведенные рассуждения для каждого из них, очевидно находим две частичные суммы : $D_{2^{m'}}(x)$ и $D_{2^{m''}}(x)$ и также два интервала постоянства $\Delta_{k'}^{(m')}$ и $\Delta_{k''}^{(m'')}$ этих сумм такие, что $m' > m$, $m'' > m$ и

$$D_{2^{m'}}(x) = d', \quad x \in \Delta_{k'}^{(m')}, \quad d' \neq 0, \quad D_{2^{m''}}(x) = d'', \quad x \in \Delta_{k''}^{(m'')}, \quad d'' \neq 0, \tag{26}$$

$$\overline{\Delta}_{k'}^{(m')} \cap \overline{\Delta}_{k''}^{(m'')} = \left[\frac{k'-1}{2^{m'}}, \frac{k'}{2^{m'}}\right] \cap \left[\frac{k''-1}{2^{m''}}, \frac{k''}{2^{m''}}\right] = \emptyset, \quad \Delta_{k'}^{(m')} \cup \Delta_{k''}^{(m'')} \subset \Delta_k^{(m)}.$$

В качестве числа m_1 формулировки леммы можно взять $m_1 = \max(m', m'')$ и затем, если например $m' < m''$, можно взять $m_1 = m''$, $k_1 = k''$ и выбрать интервал $\Delta_{k_1}^{(m_1)}$ в $\Delta_{k'}^{(m')}$ таким образом, чтобы все отличные от нуля слагаемые в (17) с $m' < m \leq m''$ имели бы знак числа d'.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим ряд Фурье–Хаара функции $F'(x)$:

$$F'(x) \sim c_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + c_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \quad c_k^{(m)} = \int_0^1 F'(x)\chi_k^{(m)}(x)dx, \tag{27}$$

и ряд

$$d_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x) + d_1^{(0)}\chi_1^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} d_k^{(m)}\chi_k^{(m)}(x), \tag{28}$$

где $d_0^{(0)} = a_0^{(0)} - c_0^{(0)}$, $d_1^{(0)} = a_1^{(0)} - c_1^{(0)}$, $d_k^{(m)} = a_k^{(m)} - c_k^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, $1 \leq k \leq 2^m$. Ряд (28) почти всюду сходится к нулю, так как ряды (27) и (5) почти всюду сходятся к $F'(x)$. Следовательно, чтобы доказать Теорему 1 достаточно показать, что все коэффициенты $d_k^{(m)}$ равны нулю. Действительно, если все $d_k^{(m)} = 0$, то ввиду (8)

$$F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right) = \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)dx, \quad m \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^m.$$

Поэтому, в силу непрерывности $F(x)$, эта функция должна быть абсолютно непрерывной и, следовательно, получаем

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} dF(x) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} F'(x)dx. \tag{29}$$

Допустим, что не все коэффициенты $d_k^{(m)}$ равны нулю. Тогда обозначив через $D_{2^m}(x)$ частичные суммы ряда (28), получим

$$D_{2^m}(x) = A_{2^m}(x) - B_{2^m}(x), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

где $A_{2^m}(x)$ и $B_{2^m}(x)$ – частичные суммы рядов (5) и (27), соответственно. Тогда, в силу предположения, существует частичная сумма $D_{2^{m_0}}$, которая отлична от нуля на некотором интервале $\Delta_{k_0}^{(m_0)} = \left(\frac{k_0-1}{2^{m_0}}, \frac{k_0}{2^{m_0}}\right)$ своего постоянства. Тогда, (18) выполняется для коэффициентов $d_k^{(m)}$, поскольку коэффициенты $a_k^{(m)}$ удовлетворяют условию (18), а $c_k^{(m)}$ удовлетворяют условию (18), поскольку они являются коэффициентами Фурье–Хаара интегрируемой функции $F'(x)$. Следовательно, по Лемме существует частичная сумма $D_{2^{m_1}}(x)$, $m_1 > m_0$, обладающая двумя интервалами постоянства $\Delta_{k_1'}^{(m_1)}$ и $\Delta_{k_1''}^{(m_1)}$ такая, что $\overline{\Delta}_{k_1'}^{(m_1)} \cap \overline{\Delta}_{k_1''}^{(m_1)} = \emptyset$, $\overline{\Delta}_{k_1'}^{(m_1)} \cup \overline{\Delta}_{k_1''}^{(m_1)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}$ и

$$D_{2^{m_1}}(x) = d_{k'}^{(m_1)} \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_1'}^{(m_1)}, \quad D_{2^{m_1}}(x) = d_{k''}^{(m_1)} \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_1''}^{(m_1)}. \tag{31}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим утверждением.

Утверждение. *Если некоторая частичная сумма $D_{2^{m_0}}(x)$ ряда (28) отлична от нуля на некотором интервале $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$, т.е.*

$$D_{2^{m_0}}(x) = d \neq 0, \quad x \in \left(\frac{k_0-1}{2^{m_0}}, \frac{k_0}{2^{m_0}}\right), \tag{32}$$

то для любого $M > 0$ существует $m > m_0$ такое, что условия

$$|A_{2^m}(x)| > M, \quad x \in \Delta_k^{(m)} \quad \text{и} \quad D_{2^m}(x) = d' \neq 0, \quad x \in \Delta_k^{(m)}. \tag{33}$$

выполняются на некотором интервале $\Delta_k^{(m)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}$.

Доказательство. Для любого $M > 0$ неравенства

$$|A_{2^m}(x)| \leq M + |B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \quad m > m_0, \tag{34}$$

не могут выполнятся для всех $m > m_0$ и $x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}$: в противном случае частичные суммы $A_{2^m}(x)$ имели бы равномерно-абсолютно непрерывные интегралы на $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$, так как суммы $B_{2^m}(x)$ обладают этим свойством как частичные суммы интегрируемой функции. Но при $m > m_0$

$$D_{2^m}(x) = d + \sum_{j=m_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{2^j} d_k^{(j)} \chi_k^{(j)}(x), \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \tag{35}$$

где

$$\int_{\frac{k_0-1}{2^{m_0}}}^{\frac{k_0}{2^{m_0}}} d_k^{(j)} \chi_k^{(j)}(x) dx = 0, \quad j > j_0, \tag{36}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} D_{2^m}(x) = 0 \tag{37}$$

почти всюду на $\Delta_{k_0}^{(m_0)}$. С другой стороны, при выполнении (34), для всех m,

$$|D_{2^m}(x)| \le |A_{2^m}(x)| + |B_{2^m}(x)| \le M + 2\,|B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_{k_0}^{(m_0)}, \tag{38}$$

и следовательно, $D_{2^m}(x)$ тоже будет иметь равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Переходя к пределу под знаком интеграла получили бы

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_{k_0}^{(m_0)}} D_{2^m}(x)\,dx = 0. \tag{39}$$

С другой стороны, согласно (35) и (36) имеем

$$\int_{\Delta_{k_0}^{(m_0)}} D_{2^m}(x)dx = d\cdot\frac{1}{2^{m_0}} \neq 0, \quad m > m_0. \tag{40}$$

Следовательно, для любого $M > 0$ существует некоторое $m > m_0$ и частичная сумма $A_{2^m}(x)$ такая, что

$$|A_{2^m}(x)| > M + |B_{2^m}(x)|, \quad x \in \Delta_k^{(m)}, \quad \Delta_k^{(m)} \subset \Delta_{k_0}^{(m_0)}. \tag{41}$$

Но

$$|D_{2^m}(x)| > ||A_{2^m}(x)| - |B_{2^m}(x)|| > M, \quad x \in \Delta_k^{(m)}.$$

Утверждение доказано.

Применяя это утверждение к каждому интервалу $\Delta_{k_1'}^{(m_1)}$ и $\Delta_{k_1''}^{(m_1)}$, можно определить номер $n_1 > m_1$ и два интервала $\Delta_{k_1}^{(n_1)}$ и $\Delta_{k_2}^{(n_1)}$ такие, что

$$|A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_{k_1}^{(n_1)}, \quad |A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_{k_2}^{(n_1)},$$

$$\Delta_{k_1}^{(n_1)} \subset \Delta_{k_1'}^{(m_1)}, \quad \Delta_{k_2}^{(n_1)} \subset \Delta_{k_1''}^{(m_1)}, \tag{42}$$

и, одновременно

$$D_{2^{n_1}}(x) = const \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_1}^{(n_1)}, \quad D_{2^{n_1}}(x) = const \neq 0, \quad x \in \Delta_{k_2}^{(n_1)}. \tag{42}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, очевидно можно определить последовательность $\{A_{2^{n_i}}(x)\}$ частичных сумм ряда (5) и интервалы постоянства этих частичных сумм $\Delta_{j_1 j_2 \cdots j_i}^{(n_i)}$, $j_k = 0$ или 1, обладающие следующими свойствами:

$$|A_{2^{n_i}}(x)| > i, \quad x \in \Delta_{j_1 j_2 \cdots j_i}^{(n_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

$$\overline{\Delta}^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_i} \cap \overline{\Delta}^{(n_i)}_{k_1 k_2 \dots k_i} = \emptyset \quad \text{если} \quad (j_1, j_2, \dots, j_i) \neq (k_1, k_2, \dots, k_i), \tag{45}$$

$$\overline{\Delta}^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} j_i} \subset \Delta^{(n_i)}_{j_1 j_2 \dots j_{i-1}}. \tag{46}$$

Обозначим точку пересечения интервалов $\overline{\Delta}^{(n_1)}_{j_1} \supset \overline{\Delta}^{(n_2)}_{j_1 j_2} \supset \dots \supset \overline{\Delta}^{(n_k)}_{j_1 j_2 \dots j_k} \supset \dots$ через $x_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}$, $j_k = 0$ или 1. Очевидно, что эти точки попарно отличны друг от друга и множество этих точек $\{x_{j_1 j_2 \dots j_k \dots}\}$ имеет мощность континуума. Обозначая один из интервалов $\Delta^{(n_k)}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ через $\left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right)$, получаем

$$A_{2^{n_k}}(x) = 2^{n_k}\left[F\left(\frac{\nu}{2^{n_k}}\right) - F\left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}\right)\right], \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right). \tag{47}$$

Для последовательностей $\{S_{N_j}(x)\}$ и $\{A(r_j, x)\}$ из формулировки теоремы 1, имеем

$$2^{n_k}\int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} S_{N_j}(x)\,dx = 2^{n_k}\sum_{n=-N_j}^{N_j}\frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n\frac{\nu}{2^{n_k}}} - e^{2\pi i n\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}\right), \tag{48}$$

$$2^{n_k}\int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} A(r_j, x)dx = 2^{n_k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_j^{|n|}\frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n\frac{\nu}{2^{n_k}}} - e^{2\pi i n\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}\right). \tag{49}$$

Кроме того, из (48), (49) и (9) следует

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} S_{N_j}(x)\,dx = A_{2^{n_k}}(x),$$

$$\lim_{j\to\infty} 2^{n_k}\int_{\frac{\nu-1}{2^{n_k}}}^{\frac{\nu}{2^{n_k}}} A(r_j, x)\,dx = A_{2^{n_k}}(x), \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right),$$

$$|A_{2^{n_k}}(x)| = const > k, \quad x \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right). \tag{50}$$

Поэтому, существуют некоторые подпоследовательности $\{N_{j_k}\}$ и $\{r_{j_k}\}$, $N_{j_k} \uparrow +\infty$, $r_{j_k} \to 1$, и некоторые точки $\xi_k, \xi'_k \in \left(\frac{\nu-1}{2^{n_k}}, \frac{\nu}{2^{n_k}}\right)$ такие, что

$$|S_{N_{j_k}}(\xi_k)| > k \quad \text{и} \quad |A(r_{j_k}, \xi'_k)| > k. \tag{51}$$

Ясно, что $\{N_{j_k}\}$ и $\{r_{j_k}\}$ можно выбрать одновременно для всех интервалов $\Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$, и тогда найдем точки

$$\xi_{\nu_1 \dots \nu_k} \in \Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \dots \nu_k}, \quad \xi'_{\nu_1 \dots \nu_k} \in \Delta^{(n_k)}_{\nu_1 \dots \nu_k}, \quad \nu_i = 0 \text{ or } 1, \tag{52}$$

такие, что

$$|S_{N_{j_k}}(\xi_{\nu_1 \dots \nu_k})| > k \quad \text{и} \quad |A(r_{j_k}, \xi'_{\nu_1 \dots \nu_k})| > k. \tag{53}$$

Из определения множества $Q = \{x_{\nu_1 \dots \nu_k \dots}\}$ следует, что

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)}|S_{N_{j_k}}(t)|\right) = +\infty,$$

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\max_{t\in(x-\delta,x+\delta)}|A(r_{j_k},t)|\right) = +\infty \tag{53}$$

для любого $x \in Q$ и $\delta(x) > 0$. Таким образом, предположение, что утверждение Теоремы 1 не верно, приводит к противоречию ((53) противоречит (14) и (15)). Теорема 1 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Если $F(x)$ – непрерывная, строго сингулярная функция конечной вариации и $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$ – произвольный интервал, то равенство

$$F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right) = \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)\,dx$$

не может выполнятся для всех $\left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right) \subset (\alpha,\beta)$. Поэтому, для любого $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$ существует двоичный интервал $\Delta_k^{(m)} = \left(\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m}\right)$ такой, что

$$\Delta_k^{(m)} \subset (\alpha,\beta) \quad \text{и} \quad \left(F\left(\frac{k}{2^m}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right) - \int_{\frac{k-1}{2^m}}^{\frac{k}{2^m}} F'(x)\,dx \neq 0.$$

Это означает, что

$$D_{2^m}(x) = A_{2^m}(x) - B_{2^m}(x) = d \neq 0, \quad x \in \Delta_k^{(m)}, \tag{54}$$

где $A_{2^m}(x)$ и $B_{2^m}(x)$ суть частичные суммы рядов (5) и (27). Как и в предыдущем случае, (см. доказательство Теоремы 1), существуют некоторое $n_1 > m$ и два интервала $\Delta_{i_1}^{(n_1)}$, $i_1 = 0,1$, постоянства сумм $A_{2^{n_1}}(x)$ и $D_{2^{n_1}}(x)$ такие, что

$$\overline{\Delta}_0^{(n_1)} \cap \overline{\Delta}_1^{(n_1)} = \emptyset, \quad \overline{\Delta}_0^{(n_1)} \cup \overline{\Delta}_1^{(n_1)} \subset \Delta_k^{(m)}, \tag{55}$$

$$|A_{2^{n_1}}(x)| > 1, \quad x \in \Delta_0^{(n_1)} \cup \Delta_1^{(n_1)}, \quad D_{2^{n_1}}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_0^{(n_1)} \cup \Delta_1^{(n_1)}. \tag{56}$$

Если $\{N_j\}$ и $\{r_j\}$ суть последовательности из формулировки Теоремы 2, то согласно (50) имеем

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|\Delta_{i_1}^{(n_1)}|}\int_{\Delta_{i_1}^{(n_1)}} S_{N_j}(x)dx = A_{2^{n_1}}(x).$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|\Delta_{i_1}^{(n_1)}|}\int_{\Delta_{i_1}^{(n_1)}} A(r_j,x)dx = A_{2^{n_1}}(x), \quad x\in\Delta_{i_1}^{(n_1)}. \tag{57}$$

Следовательно, согласно (56) существуют некоторые интервалы δ_{i_1}, $i_1=0$ или 1, и числа N_{j_1}, r_{j_1} такие, что

$$\overline{\delta}_{i_1}\subset\Delta_{i_1}^{(n_1)}, \quad i_1=0 \text{ or } 1, \tag{58}$$

$$|S_{N_{j_1}}(x)|>1, \quad |A(r_{j_1},x)|>1, \quad x\in\overline{\delta}_0\cup\overline{\delta}_1. \tag{59}$$

С другой стороны, повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1 найдем $n_2>n_1$, некоторые интервалы постоянства $\Delta_{i_1 i_2}^{(n_2)}$, $i_1=0,1$, $i_2=0,1$, и некоторые суммы $A_{2^{n_2}}(x)$ такие, что

$$\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}\subset\delta_{i_1}, \quad |A_{2^{n_2}}(x)|>2, \quad x\in\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}, \quad i_1=0 \text{ или } 1, \quad i_2=0 \text{ или } 1. \tag{60}$$

Продолжая этот процесс, находим интервалы $\Delta_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}$ и $\delta_{i_1i_2\dots i_k}$, а также некоторые последовательности $\{S_{N_{j_k}}(x)\}$ и $\{A(r_{j_k},x)\}$, обладающие следующими свойствами :

$$\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\subset\Delta_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}, \quad \overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\cap\overline{\delta}_{i'_1i'_2\dots i'_k}=\emptyset, \quad \text{если} \quad (i_1i_2\dots i_k)\neq(i'_1i'_2\dots i'_k), \tag{61}$$

$$\overline{\Delta}_{i_1i_2\dots i_{k+1}}^{(n_{k+1})}\subset\delta_{i_1i_2\dots i_k}, \tag{62}$$

$$|S_{N_{j_k}}(x)|>k, \quad |A(r_{j_k},x)|>k, \quad x\in\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}. \tag{63}$$

Из (61) и (62) следует, что последовательность вложенных отрезков $\overline{\Delta}_{i_1}^{(n_1)}\supset\overline{\Delta}_{i_1i_2}^{(n_2)}\supset\cdots\supset\overline{\Delta}_{i_1i_2\dots i_k}^{(n_k)}\supset\cdots$ и $\overline{\delta}_{i_1}\supset\overline{\delta}_{i_1i_2}\supset\cdots\supset\overline{\delta}_{i_1i_2\dots i_k}\supset\cdots$ имеют одну и ту же точку пересечения $x_{i_1i_2\dots i_k\dots}$. Множество $E=\{x_{i_1\dots i_k\dots}\}$ этих точек имеет мощность континуума, и кроме того, для любого k, имеем

$$|S_{N_{j_k}}(x_{i_1\dots i_k\dots})|>k, \quad |A(r_{j_k},x_{i_1\dots i_k\dots})|>k, \tag{64}$$

причем последовательности $\{N_{j_k}\}$, $\{r_{j_k}\}$ являются подпоследовательностями фиксированных в формулировке Теоремы 2 последовательностей. Из (64) следует, что

$$\liminf_{k\to\infty}|S_{N_{j_k}}(x)|=+\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{k\to\infty}|A(r_{j_k},x)|=+\infty$$

для всех точек $x\in E=\{x_{i_1i_2\dots i_k\dots}\}$. Доказательство Теоремы 2 завершено.

§6. ЗАМЕЧАНИЯ

1. По Теореме 1, если гармоническая функция $u(r,x)$ является интегралом Пуассона-Стилтьеса непрерывной, периодической функции конечной вариации, которая не является абсолютно непрерывной, то из любой последовательности $\{u(r_j,x)\}$, $r_j \to 1$, можно выбрать подпоследовательность $\{u(r_{j_k},x)\}$ такую, что для любой точки x принадлежащей некоторому множеству E мощности континуум, и для любого $\delta = \delta(x) > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in(x-\delta,x+\delta)} |u(r_{j_k},t)| = +\infty.$$

Это означает, что в отличии от случая, когда $F(x)$ имеет разрывы только первого рода, множество граничных особых точек при приближении к которым гармоническая функция не ограничена, имеет мощность континуума. В случае же, когда $F(x)$ – строго сингулярная функция, то последовательность $|u(r_{j_k},x)|$ может стремится к $+\infty$ на множестве, любая порция которого на единичной окружности имеет мощность континуум. Это легко усмотреть из доказательства Теоремы 2.

Следующее утверждение следует из Теоремы 1.

Теорема. *Пусть для некоторой последовательности $\{S_{n_k}(x)\}$ частичных сумм ряда Фурье-Стилтьеса непрерывной периодической функции $F(x)$ с конечной вариацией выполняются условия*

$$\sup_k \left(\max_{t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)} |S_{n_k}(t)| \right), \quad \delta_x = \delta(x) > 0,$$

для всех x, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества. Тогда ряд Фурье-Стилтьеса функции $F(x)$ является рядом Фурье функции $F'(x)$.

2. Множество E лебеговой меры нуль называется M–множеством для метода суммирования T, если существует тригонометрический ряд, не все коэффициенты которого равны нулю и который методом T суммируется к нулю во всех точках множества $[0,2\pi]\setminus E$. Такой тригонометрический ряд называется нуль-рядом относительно метода T.

Первый пример нуль-ряда в случае, когда T совпадает со сходимостью ряда, был построен Д. Е. Меньшовым в 1916 году, но до сих пор не известно поведение ряда Меньшова на соответствующем M-множестве. Например, не известно может ли некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Меньшова сходиться или оставаться ограниченной на этом множестве. В связи с этим заметим, что если в формулировке Теоремы 2 полагать $F(x)$ строго сингулярной с $F'(x) = 0$

почти всюду, то соответствующий ряд Фурье–Стилтьеса будет нуль-рядом относительно метода суммирования Абеля, а абсолютные значения некоторых последовательностей средних Абеля стремятся к $+\infty$ на некоторых подмножествах мощности континуум исключительного M-множества.

3. Сравним теоремы о поведении средних Абеля-Пуассона рядов Фурье-Стилтьеса, доказанные в данной статье, с классическими результатами Райхмана и Верблюнского. Поскольку мы рассматриваем фиксированные подпоследовательности $A(r_k, x)$ средних Абеля (в работах [1] – [3] условия налагаются на все средние значения Абеля $A(r, x)$), то класс рядов, рассмотренных в [1] – [3] в некотором смысле более широкий, чем ряды Фурье-Стилтьеса. Дело в том, что коэффициенты Фурье-Стилтьеса непрерывных функций конечной вариации могут не стремится к нулю.

4. Если $f(x)$ непрерывная, периодическая, сингулярная функция конечной вариации, принимающая постоянные значения на смежных интервалах некоторого совершенного множества P меры нуль, то средние Абеля-Пуассона ряда Фурье-Стилтьеса функции $f(x)$ не могут быть ограниченными в окрестностях точек, принадлежащих P, т.е.

$$\limsup_{(r,x)\to(1,x_0)} |A(r,x)| = +\infty, \quad x_0 \in P.$$

Этот факт доказывается повторением рассуждений, приведенных при доказательстве Теоремы 1.

Abstract. The paper studies the boundary properties of the Poisson–Stieltyes integrals and establishes uniqueness theorems of Fourier–Stieltyes series under restrictions on the behavior of subsequences of partial sums.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1, 1965.
2. S. Verblunsky, "On the theory of trigonometric series", P.L.M.S. vol. 34, pp. 441 – 491, 1932.
3. A. Rajchman, "Series trigonometriques summables par le procede de Poisson", Prace Mathematyczno-Fizyczne, vol. 30, pp. 19 – 88, 1919.
4. Ф. Арутюнян, А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, серия Математика, том 28, № 6, стр. 1301 – 1408, 1964.

Поступила 4 сентября 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 40 НОМЕРА 1 — 6 2005

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 40. Номер 6, 2005

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРИБЛИЖЕНИЯ
Сборник статей

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 40. No. 6, 2005

HARMONIC ANALYSIS AND APPROXIMATIONS
Collection of Papers

Contents