ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

НАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ, VI

сборник статей

под редакцией В. С. Закаряна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Пять предыдущих сборников статей под тем же заглавием были опубликованы в Известиях Академии Наук Армении, серия математика, (№ № 2 и 3, том 33, 1998, № № 1 и 6, том 35, 2000, и № 6, том 37, 2002).

Статьи настоящего выпуска тематически объединены новым подходом к граничным задачам в классах функций, непрерывных вплоть до границы областей. При таком подходе эти задачи для правильных и неправильных эллиптических уравнении сводятся либо к Фредгольмову интегральному уравнению второго порядка, которое имеет единственное решение, либо к системе линейных алгебраических уравнений. Это может привести к эффективным численным решениям граничных задач для эллиптических уравнений в плоскости и в единичном круге. Одна из работ представляет многообещающий метод решения задачи типа Римана для эллиптического уравнения, характеристическое уравнение которого имеет несимметричные корни.

Ереван, Февраль 2004 В. С. Закарян

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 5-15

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ КОРНЯМИ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. О. Бабаян

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе рассматривается задача типа Римана в единичном круге для эллиптического уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого не имеет пар комплексно сопряженных корней. Решение ищется в классе функций n раз непрерывно дифференцируемых в круге и удовлетворяющих условию Гльдера вместе с производными до порядка $n-1$ вплоть до границы. Доказывается, что неоднородная задача всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет n^2 линейно независимых решений (над полем действительных чисел).

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = 0, \tag{1}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагается, что корни λ_k характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1),

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \lambda^{n-k} = 0, \tag{2}$$

удовлетворяют условиям

$$\lambda_k \neq \overline{\lambda_j}, \quad k, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Решения $u \in C^n(D) \bigcap C^{(n-1,\alpha)}(D \bigcup \Gamma)$ (где $\Gamma = \partial D$) уравнения (1) удовлетворяют условиям типа Римана на границе Γ

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u}{\partial r^k} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где $f_k \in C^{(n-k-1,\alpha)}(\Gamma)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ заданные на Γ действительнозначные функции.

Как известно, граничная задача (1), (4) для уравнения первого порядка $u'_{\bar{z}} = 0$ всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача (когда граничные функции $f_k \equiv 0$)имеет одно линейно независимое решение. В дальнейшем граничные условия вида (4) рассматривались (см. [1], [2]) в случае, когда число r корней уравнения(2) с положительной мнимой частью не равно s – числу корней с отрицательной мнимой частью, то есть когда уравнение (1) является неправильно эллиптическим; при этом, если $r > s$, то $r - s$ условий были условиями вида (3), остальные $2s$ условий – условия Дирихле. В настоящей работе мы покажем, что задача (1), (4) является корректно поставленной для произвольного уравнения (1), характеристическое уравнение которого не имеет пар комплексно сопряженных корней. Доказывается следующая

Теорема 1. *Граничная задача (1), (4) при условии (3) является нетеровой. Неоднородная задача (1), (4) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет n^2 линейно независимых решений. Общее решение однородной задачи – чисто мнимый многочлен порядка $2n - 2$.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Представим уравнение (1) и граничные условия (4) в комплексной форме, используя операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

При этом, если λ_k при $(k = 1, \ldots, p)$ различные корни уравнения (2) с положительной мнимой частью, а λ_{p+j} при $(j = 1, \ldots, q)$ – различные корни (2) с отрицательной мнимой частью, то уравнение (1) примет вид

$$Lu \equiv \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_k \frac{\partial}{\partial z}\right)^{l_k} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{m_j} u = 0, \tag{5}$$

где различные числа μ_k и ν_j определяются по формулам

$$\mu_k = \frac{i - \lambda_k}{i + \lambda_k}, \quad k = 1, \ldots, p, \quad \nu_j = \frac{i + \lambda_{p+j}}{i - \lambda_{p+j}}, \quad j = 1, \ldots, q,$$

а l_k и m_j – кратности корней λ_k и λ_{p+j} соответственно. Из условий (3) следует, что

$$|\mu_k| < 1, \quad |\nu_j| < 1, \quad \mu_k \neq \overline{\nu_j}, \quad \sum_{k=1}^{p} l_k + \sum_{j=1}^{q} m_j = n.$$

В дальнейшем,если $|\eta| < 1$, то через $D(\eta)$ и $D_1(\eta)$ будем обозначать образы единичного круга при отображениях $z + \eta\bar{z}$ и $\bar{z} + \eta z$ соответственно, т.е.

$$D(\eta) = \{z + \eta\bar{z} : |z| < 1\}, \quad D_1(\eta) = \{\bar{z} + \eta z : |z| < 1\}.$$

Не умаляя общности можем предполагать, что $\mu_k\nu_j \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (5) можно представить в виде (см. [3]) :

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=0}^{l_k-1} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s \Phi_{ks}(z + \mu_k\bar{z}) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{v=0}^{m_j-1} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^v \Psi_{jv}(\bar{z} + \nu_j z), \tag{6}$$

где $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ – оператор дифференцирования по аргументу φ ($z = re^{i\varphi}$), а Φ_{ks} и Ψ_{jv} – аналитические функции в областях $D(\mu_k)$ и $D_1(\nu_j)$ соответственно. Если при некотором k_0 (j_0) $\mu_{k_0} = 0$ ($\nu_{j_0} = 0$), то вместо соответствующих слагаемых в сумме (6) следует взять слагаемые вида $(1 - z\bar{z})^s\Phi_s(z)$ при $s = 0, \ldots, l_{k_0} - 1$ ($(1 - z\bar{z})^v\Psi_v(\bar{z})$ при $v = 0, \ldots, l_{j_0} - 1$), где $\Phi_s(z)$ и $\Psi_v(z)$ – аналитические в круге D функции, все дальнейшие рассуждения аналогичны.

Нам понадобится представление функций $\Phi(z+\mu\bar{z})$ и $\Psi(\bar{z}+\nu z)$ в окрестности Γ аналитическими в D функциями. В [2] доказано, что при $|z| = 1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \Psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z), \tag{7}$$

где ω и ρ – аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω и ρ, то Φ и Ψ восстанавливаются по формулам

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega\left(\frac{1}{2}\left(z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu}\right)\right) +$$

$$+\omega\left(\frac{1}{2}\left(z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu}\right)\right),$$

$$\Psi(\bar{z} + \nu z) = \rho\left(\frac{1}{2}\left(\bar{z} + \nu z + \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu}\right)\right) +$$

$$+\rho\left(\frac{1}{2}\left(\bar{z} + \nu z - \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu}\right)\right).$$

где $|z| < 1$. В этих формулах выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая аналитически продолжается вне $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \to 1$ при $\zeta \to \infty$. Используя равенства

$$z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right), \quad \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

которые выполняются при всех $z = re^{i\varphi} \neq 0$, а также тождество $Re\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} Re\, u$, граничные условия (4) можно привести к виду

$$\left.\frac{\partial^{n-1} \operatorname{Re} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{n-k-1}}\right|_\Gamma = F_{k,n-k-1}(x,y) \equiv F_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^{i+k} \operatorname{Re} u}{\partial z^i \partial \bar{z}^k}(1,0) = F_{i,k}(1,0), \quad 0 \leq i + k \leq n-1. \tag{9}$$

Граничные функции $F_{i,k}(x,y) \in C^{(n-1-i-k,\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по заданным функциям f_k (например, $F_{1,0}(x,y) = \frac{x-iy}{2}\left(f_1 - i\frac{\partial f_0}{\partial \varphi}\right)$, где $(x,y) \in \Gamma$), и $F_{i,k} = \overline{F_{k,i}}$. При доказательстве теоремы 1 вместо условий (4) будем использовать условия (8), (9).

Рассмотрим уравнение

$$L\overline{L}u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{10}$$

где L – оператор, определенный в (5), а $\overline{L}$ – его сопряженный оператор (например, если $L_0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda\frac{\partial}{\partial z}$, то $\overline{L_0} = -\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$). Решение u уравнения (10) ищется в классе $C^{(2n)}(D) \bigcap C^{(n-1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$ и удовлетворяет на Γ условиям Дирихле :

$$\frac{\partial^j u}{\partial r^j}|_\Gamma = f_j(x,y), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{11}$$

где $f_j \in C^{(n-j-1,\alpha)}(\Gamma)$. Как известно (см. [4]), задача (10), (11) фредгольмова.

Лемма 1. *Однородная задача (10), (11) (при $f_j \equiv 0$, $j = 0, \ldots, n-1$) не имеет ненулевых решений.*

Доказательство. Доказательство можно получить, используя результаты общей теории эллиптических уравнений с действительными коэффициентами (см. [4]). Для полноты изложения докажем лемму, используя представление (6). Пусть u – решение (10). Используя формулу Грина и однородные граничные условия (11), получим

$$0 \equiv \int_D L\overline{L}u\bar{u}\, dx\, dy = \int_D |Lu|^2\, dx\, dy.$$

Из этого равенства следует, что функция u является решением уравнения (5), следовательно, допускает представление в виде (6). Из однородных условий (11) следует, что все смешанные производные функции u до до порядка $n-1$ обращаются в нуль на Г. Дифференцируя обе части (6) $n-1$ раз и используя аналитичность функций Φ_{ks} и Ψ_{jv}, получим что

$$\Phi_{ks}^{(n-1)}(z+\mu_k\bar z)=0, \quad \Psi_{jv}^{(n-1)}(\bar z+\nu_j z)=0, \quad z\in\Gamma.$$

Далее, используем представление (7). Имеем

$$\Phi_{ks}^{(n-1)}(z+\mu\bar z)=\omega(z)+\omega(\mu\bar z)=0, \quad z\in\Gamma.$$

Из теоремы Лиувилля получим $\omega\equiv 0$, поскольку ω - аналитична в D, и, следовательно, $\Phi_{ks}^{(n-1)}(z+\mu_k\bar z)=0$ при $z\in D$. Аналогично, $\Psi_{jv}^{(n-1)}\equiv 0$. Итак, решение задачи (10), (11) является многочленом порядка не выше $n-2$, с другой стороны, любой ненулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (11) делится на $(1-z\bar z)^n$ (см. [3]), т.е. имеет степень не меньше, чем $2n$. Таким образом, $u\equiv 0$, и лемма доказана.

Следующая лемма доказывается прямым вычислением.

Лемма 2. *Произвольное действительное решение уравнения (10) представляется в виде* $Re\ u(x,y)$, *где* u *- решение уравнения (1).*

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ (ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА)

Рассмотрим однородную задачу (1), (4). Если u - решение уравнения (5), то $\bar u$ - решение уравнения $\overline{L}v=0$. Следовательно, $w=\ \mathrm{Re}\ u$ - решение уравнения (10), удовлетворяющее на границе Г условиям (11), так как u удовлетворяет однородным условиям (4). Из леммы 1 получаем, что

$$\mathrm{Re}\ u(x,y)\equiv 0, \qquad z\in D.$$

Далее, так же, как и при доказательстве леммы, дифференцируя обе части последнего равенства $2n-1$ раз, получаем, что

$$\Phi_{ks}^{(2n-1)}(z+\mu_k\bar z)\equiv 0, \quad \Psi_{jv}^{(2n-1)}(\bar z+\nu_j z)\equiv 0,$$

т.е. функция u является чисто мнимым многочленом порядка $2n-2$. Пусть

$$\Phi_{ks}(z+\mu_k\bar z)=\sum_{t=0}^{2n-2}c_{kst}(z+\mu_k\bar z)^t, \quad \Psi_{jv}(\bar z+\nu_j z)=\sum_{t=0}^{2n-2}d_{jvt}(\bar z+\nu_j z)^t.$$

Подставляя эти разложения в (6), получим общее решение (1) в виде суммы однородных многочленов :

$$u(x,y)=\sum_{t=0}^{2n-2}\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(z+\mu_k\bar z)^t+\sum_{j=1}^{q}\sum_{e=0}^{m_j-1}d_{jet}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^e(\bar z+\nu_j z)^t\right]. \tag{12}$$

Функция (12) – чисто мнимая, следовательно, при всех $t=0,\ldots,2n-2$ и для произвольных $z\in\Gamma$ выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(z+\mu_k\bar z)^t+\sum_{j=1}^{q}\sum_{e=0}^{m_j-1}d_{jet}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^e(\bar z+\nu_j z)^t+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}\overline{c_{kst}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(\bar z+\overline{\mu_k}z)^t+\sum_{j=1}^{q}\sum_{e=0}^{m_j-1}\overline{d_{jet}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^e(z+\overline{\nu_j}\bar z)^t=0. \tag{13}$$

Используя соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(z+\mu\bar z)^t=\sum_{e=0}^{t}C_t^e\mu^{t-e}z^{2e-t}i^s(2e-t)^s,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(\bar z+\nu z)^t=\sum_{e=0}^{t}C_t^e\nu^e z^{2e-t}i^s(2e-t)^s$$

при $|z|=1$, из (13) получим

$$\sum_{e=0}^{t}C_t^e z^{2e-t}\left(\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\mu_k{}^{t-e}i^s(2e-t)^s+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1}d_{jvt}\nu_j{}^e i^v(2e-t)^v+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}\overline{c_{kst}\mu_k{}^e}\,i^s(2e-t)^s+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1}\overline{d_{jvt}}\,\overline{\nu_j}^{t-e}i^v(2e-t)^v\right)=0.$$

Заметим, что функции z^{2e-t} при $e=0,\ldots,t$ линейно независимы, и, следовательно, из последнего соотношения получаем систему $t+1$ линейных уравнений для определения $2n$ неизвестных c_{kst}, d_{jet}, $\overline{c_{kst}}$ и $\overline{d_{jet}}$:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\mu_k{}^{t-e}i^s(2e-t)^s+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1}d_{jvt}\nu_j{}^e i^v(2e-t)^v+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}\overline{c_{kst}\mu_k{}^e}\,i^s(2e-t)^s+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1}\overline{d_{jvt}}\,\overline{\nu_j}^{t-e}i^v(2e-t)^v=0, \tag{14}$$

Основная матрица этой системы содержит детерминат порядка $t+1$, который элементарными преобразованиями приводится к обобщенному определителю Вандермонда с различными элементами. Таким образом, ранг основной матрицы этой системы равен $t+1$, и в решении этой системы $2n-t-1$ переменных можно взять произвольно. Рассмотрим однородные многочлены

$$S_t(z,\bar z)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(z+\mu_k\bar z)^t+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=0}^{m_j-1}d_{jst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(\bar z+\nu_j z)^t \qquad (15)$$

входящие в представление (12). При $t\geq n$ все слагаемые в сумме (15) являются линейно независимыми, поэтому линейно независимым решениям системы (14) соответствуют линейно независимые многочлены (15). При $t\leq n-1$ произвольный действительный многочлен порядка t является решением однородной задачи (1), (4). Окончательно, общее решение однородной задачи имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{t=n}^{2n-2}\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1}c_{kst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(z+\mu_k\bar z)^t+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=0}^{m_j-1}d_{jst}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^s(\bar z+\nu_j z)^t\right]+P_{n-1}(x,y), \qquad (16)$$

где P_{n-1} – действительный многочлен порядка $n-1$, постоянные c_{kst}, d_{jst}, $\overline{c_{kst}}$ и $\overline{d_{jst}}$ являются решениями системы (14). Количество линейно независимых решений однородной задачи (1), (4) определяется соотношением

$$K=\sum_{t=n}^{2n-2}(2n-t-1)+1+2+\cdots+n=n^2.$$

Замечание 1. Отметим, что рассуждения, приведенные выше, верны для произвольной ограниченной односвязной области G с достаточно гладкой границей, то есть в G однородная задача (1), (4) имеет n^2 линейно независимых решений и общее решение этой задачи определяется по формуле (16), где постоянные определяются из системы (14).

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ (НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА)

Перейдем к исследованию неоднородной задачи (1), (4). Рассмотрим сначала задачу (10), (11). Эта задача фредгольмова (см. [4]), следовательно, из леммы 1 получаем, что эта задача имеет действительное решение для произвольных действительных граничных функций f_k. Из леммы 2 следует, что это решение представляется в виде $\operatorname{Re} u$, где u – решение уравнения (1). Из условий Дирихле (11) имеем, что функция u удовлетворяет граничным условиям (4). Таким образом, если мы покажем, что $u \in C^{(n-1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$, то получим, что неоднородная задача (1), (4) всегда имеет решение. Чтобы доказать это, следуя схеме, изложенной в [3], подставим общее решение (6) уравнения (1) в граничные уравнения (8). Используем соотношения для дифференциальных операторов (см. [3])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^l = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + (k-m)iI\right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}$$

(где k, l и m - целые неотрицательные числа), а также разложения вида (7) на Γ :

$$\Phi_{ks}^{(n-1)}(z+\mu_k \bar{z}) = \omega_{ks}(z) + \omega_{ks}(\mu_k \bar{z}), \quad k = 1,\dots,p, \quad s = 0,\dots,l_k - 1,$$

$$\Psi_{jv}^{(n-1)}(z+\nu_j \bar{z}) = \Omega_{jv}(z) + \Omega_{jv}(\nu_j \bar{z}), \quad j = 1,\dots,q, \quad v = 0,\dots,m_j - 1. \qquad (17)$$

Получаем соотношения на Γ для функций ω_{ks} и Ω_{jv}, аналитических в D, по которым однозначно определяются слагаемые (6). Разлагая эти функции в ряд Тейлора, а функции F_w в ряд Фурье

$$\Omega_{jv}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} B_{jvN} z^N, \quad \omega_{ks}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} A_{ksN} z^N,$$

$$F_w(x,y) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} Q_{Nw} z^N, \quad z \in \Gamma, \qquad (18)$$

и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$, при $N > 0$ получаем систему $2n$ линейных уравнений для определения $2n$ неизвестных A_{ksN}, B_{jvN}, $\overline{A}_{ksN}$ and $\overline{B}_{jvN}$:

$$Q_{Nw} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1} i^s (N+2w-n+1)^s \mu_k^{n-w-1} A_{ksN} +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1} i^v (N+2w-n+1)^v \bar{\nu}_j^{n-w-1} \overline{B}_{jvN} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1} i^s (N+2w-n+1)^s \bar{\mu}_k^{N+w} \overline{A}_{ksN} +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{v=0}^{m_j-1} i^v (N+2w-n+1)^v \nu_j^{N+w} B_{jvN}, \quad w = 0,\dots,n-1, \qquad (19)$$

$$Q_{-Nw} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1} i^s (2w-n+1-N)^s \mu_k^{n+N-w-1} A_{ksN} +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=0}^{m_j-1} i^s(2w-n+1-N)^s \bar{\nu}_j^{n+N-w-1}\overline{B}_{jsN}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{l_k-1} i^s(2w-n+1-N)^s \mu_k^w \bar{A}_{ksN}+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=0}^{m_j-1} i^s(2w-n+1-N)^s \nu_j^w B_{jsN}, \quad w=0,\dots,n-1. \tag{20}$$

Рассмотрим основную матрицу полученной системы. Введем следующие обозначения : для любого комплексного числа μ такого, что $|\mu|<1$, определим n-мерный вектор-столбец $a_s(\mu)$ по формуле :

$$a_s(\mu)=\left(C_{n-1}^{s-1}\mu^{n-s}, C_{n-2}^{s-1}\mu^{n-s-1},\dots,C_s^{s-1}\mu, C_{s-1}^{s-1},0,\dots,0\right)^T, \quad s=1,\dots,n.$$

Далее, определим квадратные матрицы A и J порядка n :

$$A=\left(a_1(\mu_1)\dots a_{l_1}(\mu_1)\dots a_1(\mu_p)\dots a_{l_p}(\mu_p)a_1(\bar{\nu}_1)\dots a_{m_1}(\bar{\nu}_1)\dots a_1(\bar{\nu}_q)\dots a_{m_q}(\bar{\nu}_q)\right).$$

$$J=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

а также жорданову матрицу

$$M=diag\left(J_{l_1}(\mu_1)\dots J_{l_p}(\mu_p)J_{m_1}(\bar{\nu}_1)\dots J_{m_q}(\bar{\nu}_q)\right),$$

где $J_k(\lambda)$ – жорданова клетка порядка k с диагональными элементами λ. Положим

$$G_N=\begin{pmatrix}A & J\overline{AM}^N\\ AM^N & J\bar{A}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Преобразуя основную матрицу системы (19), (20) по столбцам, аналогично [3], получим, что эта матрица имеет вид G_NS, где S – невырожденная матрица, не зависящая от N. Очевидно, $|\det G_N|\sim|\det A|^2\neq 0$ при достаточно больших N, поскольку $|\mu_k|<1$, $|\nu_j|<1$ и $\det A$ отличается от обобщенного определителя Вандермонда с различными элементами лишь ненулевым сомножителем. Более того, из (21) следует, что

$$G_N=\begin{pmatrix}A&0\\0&J\bar{A}\end{pmatrix}+\Theta_N,$$

где элементы матрицы Θ_N при $N\to\infty$ стремятся к нулю со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Последние соотношения показывают, что коэффициенты Тейлора $A_{k s N}$, $B_{j s N}$ при $N \to \infty$ совпадают с линейными комбинациями коэффициентов Фурье функции F_s (при этом, коэффициенты линейных комбинаций не зависят от N) с точностью до слагаемых, убывающих со скоростью геометрической прогрессии, и, следовательно, функции ω_{ks} и Ω_{js} из (18) принадлежат классу $C^{(\alpha)}$. Используя (17), получаем, что $\Phi_{ks}^{(n-1)}$ и $\Psi_{js}^{(n-1)}$ также принадлежат этому классу $C^{(\alpha)}$, а значит, каждое слагаемое в сумме (6) принадлежит $C^{(n-1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$. Итак, функция u удовлетворяет (1), (4) и $u \in C^{(n-1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$, т.е. неоднородная задача (1), (4) имеет решение при произвольных граничных функциях f_k. Теорема доказана.

Замечание 2. Рассмотрим детерминант матрицы G_N. В [5] было доказано, что при $l_k = m_j = 1$ ($k = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$), т.е. когда характеристическое уравнение (2) не имеет кратных корней, $\det G_N$ отличен от нуля при всех $N \geq n$. Докажем, что и в общем случае $\det G_N \neq 0$ при $N \geq n$. Предположим, что это не так. Если при некотором $N_0 \geq n$ $\det G_{N_0} = 0$, то соответствующая однородная система (19), (20) имеет ненулевое решение $A_{k s N_0}$, $B_{j s N_0}$, $\overline{A}_{k s N_0}$ и $\overline{B}_{j s N_0}$. Тогда, предполагая остальные коэффициенты равными нулю, по формулам (18), (17), (7) и (6), получим решение однородной задачи (1), (4), которое является ненулевым многочленом порядка $N_0 + n - 1 \geq 2n - 1$, что противоречит доказанному в предыдущем параграфе (решение однородной задачи (1), (4) - многочлен порядка не выше $2n - 2$). Полученное противоречие показывает, что $\det G_N \neq 0$ при всех $N \geq n$.

Abstract. The paper considers a Riemann type problem in the unit disc for elliptic differential equations of order n with constant complex coefficients. The characteristic equation should possess no pairs of complex-conjugate roots. The solutions are assumed to be n times continuously differentiable in the disk and satisfy Hölder's condition along with their derivatives up to order $n-1$ in the closed disc. It is proved that the non-homogeneous problem always has a solution and the corresponding homogeneous problem has n^2 linearly independent solutions (over the field of real numbers).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. А. Бикчантаев, Граничная задача для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Известия вузов, Математика, том 6 (157), стр. 56 - 61, 1975.
2. N. E. Tovmasyan, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific, Singapore 1998.

3. А. О. Бабаян, "О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге. Известия НАН Армении". Математика, том 38, № 6, стр. 16 – 26, 2003.
4. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными (пер. с японского), Мир, М., 1977.
5. A. O. Babayan, "On unique solvability of the Dirichlet problem for a class of properly elliptic equations", in Topics in Analysis and its Applications. NATO Science Series, 2, vol. 147, pp. 287 - 295, 2004.

Поступила 1 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 16–30

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ ИЗ КЛАССА RO-МЕНЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

Г. М. Айрапетян

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail : hhairapet@seua.am

Резюме. В работе рассматривается задача Дирихле в полуплоскости в пространствах функций суммируемых с весом. Предполагается, что весовая функция имеет конечное число особых точек. Получено условие разрешимости задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$ ($d\mu = \rho(x)dx + d\mu_s$, где $d\mu_s$ сингулярная часть) исследованы в многочисленных работах (см. [1-8]). Было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макенхаупта (см. [6]).

Отметим, что если мера удовлетворяет этому условию, то функция $f \in L^p(d\mu)$ является также абсолютно интегрируемой по мере Лебега, то есть принадлежит классу L^1. Однако граничные задачи в классах аналитических функций и в частности задача Дирихле, когда граничные условия понимаются в смысле средней сходимости $L^p(d\mu)$ (см. [9] – [13]) допускают такое же полное исследование в весовых пространствах при нарушении условия Макенхаупта.

Задача Дирихле в единичном круге, когда весовая функция имеет конечное число особенностей неотрицательного порядка исследована в [9]. Там же описаны весовые функции обеспечивающие разрешимость этой задачи для любой функции $f \in L^p(\rho(x)dx)$. Задача Дирихле для RO – меняющейся (определение см. ниже) в особых точках весовой функции в единичном круге исследована в [10]. Эта задача в полуплоскости в случае степенной весовой функции (вида $O(|x - x_0|^\alpha)$, где α – неотрицательное целое число) исследована в [11].

2. Пусть B_1 – класс гармонических функций $u(z)$ в верхней полуплоскости $G^+ = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ удовлетворяющих, при любом $y_0 > 0$, неравенству

$$|u(z)| < C(1 + |z|)^m, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0,$$

где C постоянная, зависящая от y_0, а m зависит только от функции u. В работе рассматривается задача Дирихле в следующей постановке : *определить действительную гармоническую функцию $u(x, y) \in B_1$ так, чтобы выполнялось граничное условие*

$$\lim_{y \to +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ – измеримая неотрицательная функция на действительной оси, а $f(x) \in L^1(\rho)$.

Точку x назовем особой точкой для функции $\rho(x)$, если для любого $\delta > 0$ выполняется хотя бы одно из следующих условий : $\rho(x) \notin L^\infty(x - \delta, x + \delta)$ или $\rho^{-1} \notin L^\infty(x - \delta, x + \delta)$. Бесконечно удаленную точку также считаем особой. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ - конечные особые точки функции $\rho(x)$. Числа

$$\alpha_k = \sup \left\{ \beta : \rho(x) \left| \frac{x - x_k}{1 + |x|} \right|^{-\beta} \in L^\infty(U_k) \right\} < \infty, k = 1, 2 \ldots m, \tag{2}$$
$$\alpha_0 = \sup \left\{ \beta : \rho(x)(1 + |x|)^\beta \in L^\infty(U_0) \right\} < \infty,$$

где U_k, $k = 1, \ldots, m$ - некоторые непересекающиеся окрестности соответствующих особых точек, U_0 – окрестность бесконечно удаленной точки, будем называть *порядком особенности $\rho(x)$ в данной особой точке.*.

Функцию $g(x)$ определенную в (A_0, ∞) будем называть RO- меняющейся в бесконечно удаленной точке слева [14] если ее можно представить в виде

$$g(x) = \exp\left(g_1(x) + \int_{A_1}^{x} \frac{g_2(t)}{t} dt \right), \quad x \in (A_0, \infty),$$

где $A_1 > A_0$ и $g_1(x)$, $g_2(x)$ - измеримые и ограниченные функции на (A_0, ∞). В конечной особой точке x_0 функцию $g(x)$ будем называть RO- меняющейся слева, если ее можно представить в виде

$$g(x) = \exp\left(g_1(x) + \int_{A_1}^{x} \frac{g_2(t)}{t - x_0} dt \right), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0). \tag{3}$$

где $A_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ - действительное число, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ - измеримые и ограниченные функции на $(x_0 - \delta, x_0)$.

Аналогично определяется класс RO- меняющихся функций справа в точке x_0. Если функция в данной точке RO- меняющаяся слева и RO - меняющаяся справа, то скажем, что функция RO- меняющаяся в точке x_0. Ясно, что если $\rho(x)$ RO - меняющаяся функция, то α_k конечное число.

В дальнейшем предполагается, что $\rho(x)$ - RO- меняющаяся функция в каждой особой точке. Ясно, что функция

$$\rho_1(x) = \rho(x)(1+|x|)^{\alpha_0} \prod_{k=1}^{m} \left| \frac{|x-x_k|}{1+|x|} \right|^{-\alpha_k},$$

также является RO- меняющеййся функцией в каждой особой точке. Функцию $\rho(x)$ отнесем к классу R_0, если $g_2(x)$ из представления (3) функции $g(x) = \rho_1(x)$ в особых точках удовлетворяет соотношениям

$$\limsup_{x\to x_k} g_2(x) < \{\alpha_k\} \quad \text{и} \quad \liminf_{x\to x_k} g_2(x) > \{\alpha_k\} - 1$$

если α_k - нецелое число, и

$$\limsup_{x\to x_k} g_2(x) < 1 \quad \text{и} \quad \liminf_{x\to x_k} g_2(x) \geq 0$$

если α_k - целое число, а в бесконечно удаленной точке

$$\limsup_{x\to\infty} g_2(x) < 1 - \{\alpha_0\} \quad \text{и} \quad \liminf_{x\to\infty} g_2(x) > -\{\alpha_0\} \tag{4}$$

если α_0 - нецелое число, и

$$\limsup_{x\to\infty} g_2(x) \leq 0 \quad \text{и} \quad \liminf_{x\to\infty} g_2(x) > -1$$

если α_0 - целое число.

Введем также следующие обозначения

$$R(z) = (i+z)^{-\lambda_0} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-x_k}{i+z} \right)^{\lambda_k}, \tag{5}$$

где $\lambda_k = [\alpha_k] + 1$, если α_k нецелое число и $\lambda_k = [\alpha_k]$, если α_k целое число, и

$$\rho_0(x) = |R(x)|^{-1}\rho(x).$$

В настоящей работе доказывается, что, если $\rho(x) \in R_0$ и

$$M(\rho_0)(x) < C\rho_0(x), \quad x \in [x_1 - 1, \quad x_m + 1], \tag{6}$$

где $M(f)$ – максимальная функция Харди-Литлвуда, то задача (1) разрешима для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Отметим, что если весовая функция не имеет конечных особых точек, то условие $\rho(x) \in R_0$ достаточно для разрешимости задачи (1) для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Кроме вышеуказанных фактов приводится также полное исследование однородной задачи.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем вспомогательные утверждения, которые доказываются аналогично [10].

Лемма 2.1. *Пусть $k > 0$ – целое число, x, x_0 и $y > 0$ – произвольные действительные числа. Тогда*

$$\left|\frac{1}{(x+iy-x_0)^k} - \frac{1}{(x-iy-x_0)^k}\right| < C\frac{y(y^{k-1}+|x-x_0|^{k-1})}{((x-x_0)^2+y^2)^k}.$$

Если $|x-x_0| \geq 2ky$, то

$$\left|\frac{1}{(x+iy-x_0)^k} - \frac{1}{(x-iy-x_0)^k}\right| > C_1\frac{y}{((x-x_0)^2+y^2)^{\frac{k+1}{2}}}, \tag{7}$$

где C_1 – положительная постоянная.

Лемма 2.2. *Пусть $k > 0$ – целое число. Тогда*

$$\left|(x+iy)^k - (x-iy)^k\right| < Cy(y^{k-1}+|x|^{k-1}),$$

а если $|x| > 2ky$, то

$$\left|(x+iy)^k - (x-iy)^k\right| > C_1y|x|^{k-1},$$

где C_1 – положительная постоянная.

Функцию $g(x)$ на промежутке (a,b) будем называть почти монотонно возрастающей, если существует число $A > 0$ такое, что для любых $a < x' < x'' < b$ $g(x') < Ag(x'')$. Аналогично определяется почти монотонно убывающая функция. Положим

$$x_0' = x_1 - 1, \quad \ldots, \quad x_k' = 2^{-1}(x_k + x_{k+1}), \ldots, \quad x_m' = x_m + 1.$$

Лемма 2.3. *Пусть $\rho(x) \in R_0$. Справедливы следующие утверждения :*

a) Пусть α_0 – нецелое число, тогда существуют $\delta_0 \in (0, 1-\{\alpha_0\})$ и $\delta_1 \in (-\{\alpha_0\}, 0)$ такие, что для любого $\delta > \delta_0$ функция $|x+i|^\delta\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает в промежутке (x_m', ∞) и почти монотонно убывает в промежутке $(-\infty, x_0')$. Соответственно, функция $|x+i|^{-\delta}\rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (x'_m, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, x'_0)$ для любого $\delta < \delta_1$.

b) Если α_0 – целое число, тогда $|x+i|\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (x'_m, ∞) и почти монотонно убывает на $(-\infty, x'_0)$. Функция $|x+i|^\delta\rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (x'_m, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, x'_0)$ для любого $\delta < 0$.

c) Пусть α_k – нецелое число, тогда функция $|x-x_k|^{\{\alpha_k\}}\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (x_k, x'_k) и почти монотонно убывает на (x'_{k-1}, x_k). Соответственно, функция $|x-x_k|^{-(1-\{\alpha_k\})}\rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (x_k, x'_k) и почти монотонно возрастает на (x'_{k-1}, x_k).

d) Если α_k – целое число, тогда существует $\delta_0 \in (0,1)$ такая, что функция $|x-x_k|^\delta\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (x_k, x'_k) и почти монотонно убывает на (x'_{k-1}, x_k) для любого $\delta > \delta_0$. Функция $|x-x_k|^{-\delta}\rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (x_k, x'_k) и почти монотонно возрастает на (x'_{k-1}, x_k) для любого $\delta > 0$.

e) Для любого $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)dx}{(1+|x|)^{1+\delta}} < \infty.$$

Доказательство : Пусть, согласно (4), δ_0 выбрано так, чтобы имело место $\overline{\lim}\, g_2(x) < \delta_0 < 1 - \{\alpha_k\}$ при $|x| \to \infty$. Тогда, если $x'_m < x' < x''$ при $\delta > \delta_0$ из (2) имеем

$$\frac{|x'+i|^\delta \rho_1(x')}{|x''+i|^\delta \rho_1(x'')} = e^{g(x')-g(x'')} \exp\left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t} dt\right) <$$

$$< A \exp\left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t} dt\right).$$

Поэтому $|x'+i|^\delta \rho_1(x')\left(|x''+i|^\delta \rho_1(x'')\right)^{-1} < A$. Аналогично устанавливаются остальные утверждения a), b), c), d). Утверждение e) непосредственно следует из определения класса R_0.

Лемма 2.4. *Справедливы следующие утверждения :*

a) *Пусть функция $g(x)$ представима в виде*

$$g(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{g_2(t)dt}{t}\right),$$

где $g_2(x)$ – ограниченная функция на (A, ∞), тогда если $y \in (2^{-1}x, 2x)$, то

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x}\right|.$$

b) *Пусть $\lambda \in (0,1)$ и*

$$g(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{g_2(t)dt}{t - x_k}\right),$$

где $g_2(x)$ – ограниченная функция на (x_k, x'_k). Тогда, если $\lambda(x-x_0) < y-x_0 < x - x_0$, то

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x-x_k}\right|,$$

где C – постоянная, зависящая, вообще говоря, от λ.

Наряду с задачей (1), рассмотрим граничную задачу

$$\lim_{y\to+0}\left\|\Phi^+(x+iy) - \Phi^-(x-iy) - f(x)\right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{8}$$

где $\Phi^\pm(z)$ – искомые аналитические функции в G^+ и G^- соответственно, такие что $\Phi^+(z), \overline{\Phi^-(\overline{z})} \in B_1$, и $f(x)$ – комплекснозначная функция из класса $L^1(\rho)$.

Лемма 2.5. *Задача (1) имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$ тогда и только тогда, когда задача (8) всегда разрешима.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 подмножества действительных и комплексных функций, обращающихся в нуль в некоторых окрестностях каждой особой точки и принадлежащих классу $L^1(\rho)$. Ясно, что множества L_1 и L_2 всюду плотны в соответствующих пространствах $L^1(\rho)$. При этом задачи (1) и (22) разрешимы для функций f из плотного множества в пространствах L_1 и L_2 соответственно. Следовательно, эти задачи нормально разрешимы, если они имеют решения для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Заметим также, что в задаче (22) можно рассматривать только действительные функции f. Предположим, что задача (1) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Представим решение $u(x,y)$ в виде $u(x,y) = Re\Phi^+(z)$, где $\Phi^+(z)$ - некоторая аналитическая функция в G^+. Далее, положив $\Phi^-(z) = -\overline{\Phi^+(\overline{z})}$ получим, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (22). Верно и обратное. Если $\Phi(z)$ - является решением задачи (22), то $u(x,y) = 2^{-1}(\Phi(z) + \overline{\Phi^+(\overline{z})}$, $z \in G^+$, является решением задачи (1). Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть $\rho \in R_0$ и $u(x,y)$ удовлетворяет условию (1), тогда*

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y), \tag{9}$$

где

$$u_0(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \sum_{p=0}^{n_k} \frac{ia_{kp}}{(z-x_k)^p} + \mathrm{Re} \sum_{p=0}^{n_0} ia_{0p}z^p \tag{10}$$

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{r(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)r(t)dt}{t-z} + \frac{1}{\overline{r(\overline{z})}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\overline{r(t)}dt}{t-z}\right), \tag{11}$$

$$r(z) = (z+i)R(z), \tag{12}$$

а a_{kp}, $k = 0,1,2,\ldots,m$, $p = 0,1,\ldots,n_k$ – некоторые действительные числа.

Доказательство : Заметим, что функция $|R(t)|(\rho(t))^{-1}$ ограничена на числовой оси. Действительно, если α_k – нецелое число, то ограниченность следует из определения чисел n_k. Если α_k – целое число, то ограниченность следует из условия (6) или леммы 2.3. Поэтому, если $u(x,y)$ – произвольное решение однородной задачи (1), то

$$\lim_{y\to+0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^1(|R|)} = 0,$$

где R определяется формулой (5). Поэтому $u(x,y)$ можно представить в виде (8) (см. [11]).

Наконец, если $\rho(x) = |R(x)|$ в (12), тогда (см. [11]) общее решение задачи (12) представимо в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{r(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)r(t)dt}{t-z} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n_k}\frac{A_{kp}}{(z-x_k)^p} + \sum_{p=0}^{n_0-1} A_{0p}z^p,$$

где A_{kp}, $k = 1,2,\ldots,m$, $p = 0,1,\ldots,n_k$ – произвольные комплексные числа.

§3. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В $L^1(\rho)$

Скажем, что в особой точке x_k функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию M_0, если α_k – нецелое число, либо α_k – целое число и выполняется соотношение

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h}\rho_1(x)dx = 0. \tag{13}$$

Соответственно, функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию M_0 в бесконечно удаленной точке, если α_0 – нецелое число, либо α_0 – целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1(x)dx}{1+|x|} < \infty. \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(x) \in R_0$. Справедливы следующие утверждения :*

a) *Если $\rho(x)$ в особых точках удовлетворяет условию M_0, то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде (10), где a_{kp}, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, $p = 0, 1, \ldots, n_k$ - произвольные действительные числа.*

b) *Пусть в некоторых особых точках $\rho(x)$ не удовлетворяет условию M_0. Тогда общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде (10), где $a_{jn_j} = 0$, если в соответствующей особой точке не выполняется условие M_0.*

Доказательство : Из леммы 2.6 следует, что для доказательства утверждения a) теоремы нам предстоит доказать, что функция (10) удовлетворяет однородному условию (1) для любого действительного числа a_{kp}. Сначала предположим, что все числа α_k, $k = 0, 1, \ldots m$ - нецелые. Достаточно отдельно рассмотреть функции $\mathrm{Re}\ iz^{n_0-1}$ и $\mathrm{Re}\ i(z - x_k)^{-n_k}$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Пусть $u(x, y) = \mathrm{Re}\ iz^{n_0-1}$. Тогда в силу леммы 2.2 получим

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < \int_{-\infty}^{\infty} \left|(x+iy)^{n_0-1} - (x-iy)^{n_0-1}\right| \rho(x)dx$$
$$< C_1 y \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha_0\}-\varepsilon}}\right)$$

так как окрестности бесконечно удаленной точки $\rho_1(x) < C|x|^\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Взяв $\varepsilon < \{\alpha_0\}$, получим $\lim_{y\to+0} \|\mathrm{Re}\ iz^{n_0} - 1\|_{L^1(\rho)} = 0$.

Пусть теперь $u(x, y) = \mathrm{Re}\ i(z - x_k)^{-n_k}$. Учитывая лемму 2.1 получим

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < Cy\left(1 + \int_{x'_{k-1}}^{x'_k} \frac{y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1}}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}} |x-x_k|^{n_k-\varepsilon} dx\right).$$

где $\varepsilon < \{\alpha\}$. Обозначив $T_1 = \{x; |x - x_k| < y, x \in (x'_{k-1}, x'_k)\}$ и $T_2 = \{x; |x - x_k| > y, x \in (x'_{k-1}, x'_k)\}$, получим

$$I_1(y) = y\int_{T_1} \frac{y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1}}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}} |x-x_k|^{\alpha_k-\varepsilon} dx$$
$$< C\int_{|x-x_k|<y} \frac{y^{n_k+\alpha_k-\varepsilon}}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}} dx < Cy^{\alpha_k-\varepsilon}.$$

Поэтому $I_1(y) \to 0$ при $y \to 0$. Аналогично,

$$I_2(y) = y\int_{T_2} \frac{y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1}}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}} |x-x_k|^{\alpha_k-\varepsilon} dx < Cy\int_{T_2} \frac{ydx}{((x-x_k)^2+y^2)^{\delta}}.$$

где $\delta = 1 - 2^{-1}(\{\alpha_k\} - \varepsilon) < 1$. Следовательно, $\|\mathrm{Re}\ i(z - x_k)^{-n_k}\|_{L^1(\rho)} \to 0$ при $y \to +0$.

Если α_0 - целое число, $u(x,y) = \text{Re } iz^{n_0-1}$ и имеет место условие (14), то

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)dx}{1+|x|}\right),$$

и $\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} \to 0$ при $y \to +0$. Пусть $u(x,y) = Rei(z-x_k)^{-n_k}$, α_k - целое число и имеет место условие (13), тогда

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < Cy\left(1 + \int_{x'_{k-1}}^{x'_k} \frac{y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1}}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}}|x-x_k|^{n_k}\rho_1(x)dx\right).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ так, чтобы из $|h| < \delta$ следовало

$$\frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} \rho_1(x)dx < \varepsilon \tag{15}$$

Положим $\rho_{1k}(x) = \rho_1(x)$, $x \in (x_k-\delta, x_k+\delta)$, $\rho_{1k}(x) = 0$, $x \notin (x_k-\delta, x_k+\delta)$ и $\rho_{2k}(x) = \rho_1(x) - \rho_{1k}(x)$. Тогда из (15) получим

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\left(y + \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \frac{y\rho_{1k}(x)dx}{(x-x_k)^2+y^2} + \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \frac{y\rho_{2k}(x)dx}{(x-x_k)^2+y^2}\right)$$
$$< C\left(y + M(\rho_{1k}(x)) + \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \frac{y\rho_{2k}(x)dx}{(x-x_k)^2+y^2}\right),$$

где $M(\cdot)$ - максимальная функция Харди-Литлвуда. Так как

$$\lim_{y\to 0}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \frac{y\rho_{2k}(x)dx}{(x-x_k)^2+y^2} = 0$$

и в силу (15) $M(\rho_{1k}(x)) < \varepsilon$, то окончательно имеем $\lim \|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} = 0$ при $y \to +0$. Таким образом, утверждение а) теоремы доказано.

Предположим теперь, что условие (13) нарушено в точке x_k и пусть

$$\overline{\lim_{y\to+0}}\frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_k+h} \rho_0(x)dx > 0. \tag{16}$$

Докажем, что функция $u(x,y) = \text{Re } i(z-x_k)^{-n_k}$ в этом случае не удовлетворяет однородному условию (1). Для этого заметим, что функции

$$g_1(h) = \frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_k+h} \rho_k(x)dx \quad \text{и} \quad g_2(h) = \frac{1}{h}\int_{x_k+h}^{x_k+2h} \rho_k(x)dx$$

одновременно стремятся или не стремятся к нулю. Действительно, если $g_1(h) \to 0$, то $0 < g_2(h) < 2g_1(2h) - g_1(h)$ и $g_2(h) \to 0$. Обратно, если $g_2(h) \to 0$, то $g_2(h)$ ограничена в некоторой окрестности нуля и

$$0 < g_1(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{2^n} g_2\left(\frac{h}{2^n}\right) < \max_{\tau \in (0,2^{-1}h)} g_2(\tau).$$

Следовательно, $g_1(h) \to 0$. Далее, используя (7) будем иметь

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} > a\int_{x_k+2n_ky}^{x_k+4n_ky} \frac{y|x-x_k|^{n_k-1}\rho_1(x)dx}{((x-x_k)^2+y^2)^{2^{-1}(n_k+1)}}$$
$$> \frac{2a_1}{2n_ky}\int_{x_k+2n_ky}^{x_k+4n_ky} \rho_1(x)dx = a_1 g_2(h),$$

где $a_1 = 5^{-1}a$, $h = 2n_k y$. Из (16) следует, что $g_1(h)$ не стремится к нулю, следовательно, $g_2(h)$ также не стремится к нулю.

Рассмотрим случай, когда условие (14) не выполняется. Тогда в силу леммы 2.2 при $|x| > 2n_0y$ функция $u(x,y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ удовлетворяет неравенству $u(x,y) > ay|x|^{n_0-2}$, и поэтому не принадлежит классу $L^1(\rho)$.

§4. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В $L^1(\rho)$

Лемма 4.1. *Пусть $\rho(x) \in R_0$, тогда*

a) $$\sup_{t\in(-\infty,x_0')\cup(x_n',\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\rho_1(x)dx}{((x-t)^2+y^2)\,|x+i|^{\{\alpha_0\}}} < \infty,$$

b) $$\sup_{t\in(-\infty,x_0')\cup(x_n',\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\rho_1(x)dx}{|t-x-iy||x+i|^{1+\{\alpha_0\}}} < \infty.$$

Доказательство. Пусть $t \in (x_n', \infty)$. Тогда в силу леммы 2.3 существует $\delta \in (0, 1-\{\alpha_0\})$ такое, что функция $|x+i|^{\delta}\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (x_n', ∞). Поэтому

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{2^{-1}t} \frac{y\rho_1(x)dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} <$$

$$< C\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{2^{-1}t} \frac{y|x+i|^{\delta}\rho_1(x)dx}{|t+i|^2|x+i|^{\delta+\{\alpha_0\}}} < C_1.$$

Далее, учитывая лемму 2.4, получим

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y\rho_1(x)dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} =$$

$$= \left| \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y(\rho_1(x)-\rho_1(t))dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} + \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y|t+i|^{\{\alpha_0\}}dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} \right| <$$

$$< A\left(1+\int_{2^{-1}t}^{2t}\frac{y|t+i|^{\{\alpha_0\}}|x-t|dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}}\right) < A_1\left(1+\frac{y}{t}ln\frac{t^2+y^2}{y^2}\right) < A_2.$$

В силу леммы 2.3 $\delta \in (0.1-\{\alpha\})$ можем подобрать так, чтобы функция $|x+i|^{-\delta}\rho_1(x)$ была почти монотонно убывающей на (x_n,∞), и поэтому

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)}\int_{2t}^{\infty}\frac{y\rho_1(x)dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} <$$

$$< C\int_{2t}^{\infty}\frac{y|t+i|^{\{\alpha\}-\delta}dx}{((x-t)^2+y^2)\,|x+i|^{\{\alpha_0\}-\delta}} < C_1.$$

Утверждение а) леммы, при $t \in (x'_n,\infty)$ доказано. Аналогично устанавливаются остальные утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) \in R_0$ и выполняется условие (6). Тогда задача (1) разрешима для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Общее решение определяется формулой (9), где $a_{kp}, k = 0,1,2,\ldots,m$ и $p = 0,1,\ldots,n_k$ - произвольные действительные числа.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$ и $u(x,y)$ удовлетворяет условию (1). Аналогично доказательству теоремы 1 будем иметь

$$\lim_{y\to+0}||u(x,y)-f(x)||_{L^1(|R|)} = 0. \tag{17}$$

Теперь из леммы 2.6 следует, что $u(x,y)$ представима по формуле (9), где $a_{kp}, k = 0,1,2,\ldots,m$ и $p = 0,1,\ldots,n_k$ - некоторые действительные числа. Учитывая теорему 1 достаточно установить, что функция (11) удовлетворяет условию (1) при любой $f \in L^1(\rho)$. Для этого предварительно докажем оценку :

$$||u_1(x,y)||_{L^1(\rho)} < A||f||_{L^1(\rho)}. \tag{18}$$

Представим функцию $f(x)$ в виде суммы $f(x)$ as $f(x) = f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_m(x)$, где

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если} \quad x \in (\infty, x'_0)\cup(x'_n,\infty), \\ 0 & \text{if} \quad x \notin (\infty, x'_0)\cup(x'_n,\infty), \end{cases}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если} \quad x \in (x'_{k-1}, x'_k), \\ 0 & \text{если} \quad x \notin (x'_{k-1}, x'_k). \end{cases}$$

Обозначим через $u_{1k}(z)$ функцию (11) при $f(x) = f_k(x)$, $k = 0,1,\ldots m$. Тогда при $k > 0$

$$\int_{R_1\setminus(x'_{k-1},x'_k)}|u_{1k}(x,y)|\rho(x)dx < A||f_k||_{L^1(\rho)}. \tag{19}$$

поскольку $u_{1k}(x,y) = O(|z-x_j|^{-n_j})$ в окрестности точек x_j, $j \neq k$ и $u_{1k}(x,y) = O(|z|^{n_0-2})$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Далее имеем

$$u_{1k}(x,y) = I_1(x,y) + I_2(x,y),$$

где

$$I_1(x,y) = 2^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i r(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)r(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i r(\overline{z})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)r(t)dt}{t-\overline{z}}\right),$$

$$I_2(x,y) = 2^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i\overline{r(z)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)\overline{r(t)}dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i\overline{r(\overline{z})}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)\overline{r(t)}dt}{t-\overline{z}}\right).$$

Положим $I_1(x,y) = I_1^{(1)}(x,y) + I_2^{(2)}(x,y)$, где

$$I_1^{(1)}(x,y) = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{r(z)} - \frac{1}{r(\overline{z})}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)r(t)\,dt}{t-z}$$

$$I_1^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r(\overline{z})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_k(t)r(t)dt}{(t-x)^2+y^2},$$

и заметим, что из леммы 2.1 следует, что при $x \in (x'_{k-1}, x'_k)$

$$\left|\frac{1}{r(z)} - \frac{1}{r(\overline{z})}\right| < C\frac{y(y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1})}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}}.$$

Следовательно,

$$\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}|I_1(x,y)|\rho(x)\,dx =$$

$$= \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}<1}\left|\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}\left(\frac{1}{r(z)} - \frac{1}{r(\overline{z})}\right)\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}\frac{f_k(t)r(t)dt}{t-x-iy}g(x)dx\right| <$$

$$< C\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}|f_k(t)|\rho(t)\frac{|t-x_k|^{1-\{\alpha_k\}}}{\rho_1(t)}\times$$

$$\times\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}\frac{y(y^{n_k-1} + |x-x_k|^{n_k-1})|x-x_k|^{\alpha_k}\rho_1(x)}{((x-x_k)^2+y^2)^{n_k}|t-x-iy|}\,dx\,dt <$$

$$< C\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}|f_k(t)|\rho(t)\frac{|t-x_k|^{1-\{\alpha_k\}}}{\rho_1(t)}\int_{x'_{k-1}}^{x'_k}\frac{y|x-x_k|^{\{\alpha_k\}}\rho_1(x)}{((x-x_k)^2+y^2)|t-x-iy|}dxdt.$$

Однако, если в точке x_k имеет место условие (6), то (см. [10])

$$\int_{x'_k}^{x'_{k+1}}\frac{y|x-x_k|^{\{\alpha_k\}}\rho_1(x)}{((x-x_k)^2+y^2)|t-x-iy|}dx < C\frac{\rho_1(t)}{|t-x_k|^{1-\{\alpha_k\}}}.$$

В силу этой оценки $\left\|I_1^{(1)}(x,y)\right\|_{L^1(\rho)} < A\|f_k\|_{L^1(\rho)}$. Далее из (6) имеем

$$\int_{x'_{k-1}}^{x'_k} \left|I_1^{(2)}(x,y)\right| \rho(x)dx <$$

$$< C\int_{x'_{k-1}}^{x'_k} |f_k(t)|\rho(t)\frac{|t-x_k|^{1-(\alpha_k)}}{\rho_1(t)} \int_{x'_{k-1}}^{x'_k} \frac{y\rho_1(x)dxdt}{((x-x_k)^2+y^2)|x-x_k|^{1-(\alpha_k)}} <$$

$$< C_1\int_{x'_{k-1}}^{x'_k} |f_k(t)|\rho(t)\frac{|t-x_k|^{1-(\alpha_k)}}{\rho_1(t)} M\left(\frac{\rho_1(t)}{|x-x_k|^{1-(\alpha_k)}}\right)dt < C_2\|f_k\|_{L^1(\rho)}. \qquad (20)$$

Учитывая, что оценка (19) верна и для функции I_1, получаем $\|I_1(x,y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f_k\|_{L^1(\rho)}$. Аналогично устанавливается, что $\|I_2(x,y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f_k\|_{L^1(\rho)}$. Следовательно, с учетом (19) и (20)

$$\|u_{1k}(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f_k\|_{L^1(\rho)}, \quad k=1,2,\ldots,m.$$

Пусть теперь $k=0$. В этом случае имеем $u_{10}(x,y) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$, где в определение функций $I_1(x,y)$ и $I_2(x,y)$ следует заменить f_k на f_0. Аналогично определяются функции $I_1^{(1)}(x,y)$, $I_2^{(2)}(x,y)$. Учитывая эти определения и лемму 2.2, получим

$$\int_{U_0} |I_1^{(1)}(x,y)|\rho(x)\,dx = \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}\le 1} \left|\int_{U_0}\left(\frac{1}{r(x)}-\frac{1}{r(\overline{x})}\right)\int_{U_0}\frac{f_0(t)r(t)dt}{t-x-iy}g(x)dx\right| <$$

$$< C\int_{U_0}|f_0(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{(\alpha_0)}}{\rho_1(t)}\int_{U_0}\frac{y(y^{n_0-2}+|x|^{n_0-2})|x|^{1-(\alpha_0)}\rho_1(x)}{|x+i|^{n_0}|t-x-iy|}dxdt <$$

$$< C_1\int_{U_0}|f_0(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{(\alpha_0)}}{\rho_1(t)}\int_{U_0}\frac{y\rho_1(x)}{|x+i|^{1+(\alpha_0)}|t-x-iy|}dxdt,$$

где $U_0 = (-\infty, x'_0)\cup(x'_n,\infty)$. В силу леммы 4.1 будем иметь $\|I_1^{(1)}(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Аналогично доказывается, что $\|I_1^{(2)}(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Тем самым оценка (18) доказана.

Теперь докажем, что из оценки (18) следует, что функция (11) удовлетворяет условию (1). Действительно, пусть $G_n = \{x;|x|>n\}\cap\cup_{k=1}^m\{x;|x-x_k|<n^{-1}\}$, $n=1,2,\ldots$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x\in G_n \\ f(x) & \text{if} \quad x\notin G_n \end{cases}$$

Получим последовательность функций $f_n(x)$ такую, что

$$\|f_n(x)-f(x)\|_{L^1(\rho)} \to 0. \qquad (21)$$

Обозначив функцию (11) при $f(x) = f_n(x)$ через $u_n(x, y)$, будем иметь

$$\lim_{y \to +0} \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{22}$$

Далее, используя оценку (20) получим

$$\|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} < \|u(x, y) - u_n(x, y)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} +$$

$$+ \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} < C\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)}.$$

Из (21) и (22) теперь следует, что $u(x, y)$ удовлетворяет условию (1). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть функция $\rho(t) \in R_0$ не имеет конечных особых точек. Тогда задача (1) имеет решение для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$.*

Abstract. The paper investigates the Dirichlet problem for the half-plane in some spaces of weight-summable functions, assuming the weight function has a finite set of singular points. A condition of solvability of the problem is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хведелидзе Б.В. "О разрывной задаче Римана-Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Груз. ССР, том 17, № 10, стр. 865 – 872, 1956.
2. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$". TAM Soc., vol. 165, pp. 326 – 342, 1962.
3. Товмасян Н.Е. "О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе". Сиб. мат. журн., том 2, № 2, стр. 25 – 57, 1961.
4. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв, 1973.
5. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for conjugate functions and Hilbert transform". Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
6. Хведелидзе Б.В. Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. Современные проблемы математики, 7, Москва, 1975.
7. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва, Мир 1979.
8. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Москва, Мир, 1984.
9. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia. Math., vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
10. Айрапетян Г. М., "Задача Дирихле в пространствах с весом". Известия НАН Армении. Математика, том 36, № 3, 2001.

11. Айрапетян Г. М., "Задача Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости". Известия НАН Армении. Математика, том 36, № 6, стр. 7 – 16, 2001.
12. Айрапетян Г. М., Меликсетян П. Э., "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом". Известия НАН Армении. Математика, том 38, № 6, стр. 17 – 32, 2003.
13. Айрапетян Г. М., "О задаче Дирихле с граничными функциями из пространств с весом", Математические заметки, том 76, № 5(ноябрь), 2004.
14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва, Наука, 1985.

Поступила 1 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 31-40

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВНЕ КРУГА

Н. Е. Товмасян

Государственный Инженерный Университет Армении

Резюме. В работе рассматривается задача Римана – Гильберта для неправильно эллиптических уравнений вне круга. Решение ищется в классе функций, ограниченных в бесконечности и удовлетворяющих условию Гельдера в конечной части внешности круга вплоть до его границы. Получены условия однозначной разрешимости этой задачи и указан эффективный метод решения. Рассмотрена также задача Пуанкаре для неправильно эллиптических уравнений вне круга.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в области $D^- = \{z : |z| > 1\}$ следующую граничную задачу

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D^-, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\,(a_0(z)u(z)) = f_0(z), \quad \mathrm{Re}\,\left(a_1(z)\frac{\partial u(z)}{\partial r}\right) = f_1(z), \quad z = x+iy, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{2}$$

где A_0, A_1 и A_2 – комплексные постоянные, $A_2 \neq 0$ и a_0, a_1 – комплекснозначные, а f_0, f_1 – действительные функции на $\Gamma = \partial D^+$, u – искомое комплекснозначное решение и $\frac{\partial}{\partial r}$ $(r = |z|)$ - производная по направленинию радиус-вектора. Запишем $D^+ = \{z : |z| < 1\}$, и пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1) :

$$\det(A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2) = 0. \tag{3}$$

Обозначим $H(\overline{D})$ $(H(\Gamma))$ – класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}$ (Γ). Предположим, что уравнение (1) – неправильно эллиптическое, т.е. $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \mathrm{Im}\,\lambda_2 > 0$. Не ограничивая общности, предположим, что

$$\mathrm{Im}\,\lambda_1 > 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\,\lambda_2 > 0. \tag{4}$$

Предположим, далее, что решение u ограничено в окрестности бесконечности и

$$u_x \in H(\overline{D_R}) \quad \text{и} \quad u_y \in H(\overline{D_R}), \quad D_R = \{z : 1 < |z| < R\}. \tag{5}$$

Функции a_j, f_j, $\frac{da_j}{ds}$ $(j = 0, 1)$, $\frac{df_0}{ds}$ принадлежат классу $H(\Gamma)$ (где s – дуговая абцисса контура Γ), причем выполняется условие

$$a_0(z) \neq 0 \quad \text{и} \quad a_1(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{6}$$

Задача (1), (2) является задачей Римана–Гильберта для неправильно эллиптического уравнения (1) вне круга. При условии (6) граничные условия (2) можно записать в виде (см. [1], стр. 50 и [2], стр. 267)

$$\mathrm{Re}\,\left(z^{n_0}\omega_0(z)u(z)\right) = \tilde{f}_0(z),$$

$$\mathrm{Re}\,\left(z^{n_1}\omega_1(z)\frac{\partial u(z)}{\partial r}\right) = \tilde{f}_1(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{7}$$

где n_j – индекс функции a_j $(j = 0, 1)$ на Γ, ω_j $(j = 0, 1)$ – аналитические в области D^+ функции, удовлетворяющие условиям

$$\omega_0(z) \neq 0, \quad \omega_1(z) \neq 0, \quad z \in \overline{D^+}, \quad \omega_0', \omega_1 \in H(\overline{D^+}), \tag{8}$$

и $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1$ единственным образом определяются по a_j и f_0, f_1.

В дальнейшем, граничное условие (2) будем брать в виде (7). Задачу (1), (7) при $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$ будем называть однородной.

Теорема 1. *Для того, чтобы задача (1), (7) была однозначно разрешимой необходимо и достаточно, чтобы*

$$n_0 = 0, \quad n_1 = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\,(\omega_0'(0)(\omega_1(0))^{-1}) \neq 0. \tag{9}$$

В качестве примера функций ω_j удовлетворяющих условиям (8), (9) можно взять $\omega_j(z) = c_j + b_j z$ $(j = 0, 1)$, где $0 < |b_0| < |c_0|$, $|b_1| < |c_1|$ и $\mathrm{Im}\,(b_0 c_1^{-1}) \neq 0$. Под однозначной разрешимостью мы подразумеваем существование и единственность решения задачи (1), (7) при любых $f_j \in H(\Gamma)$ $(j = 0, 1)$ и при $\frac{df_0}{ds} \in H(\Gamma)$.

В §2 исследуется задача (1), (7) и доказывается теорема 1. В §3 исследуется задача Пуанкаре для уравнения (1) вне круга.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Предположим сначала, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и выполнено условие (9). Покажем, что задача (1), (7) – однозначно разрешима. Пусть $|\mu| < 1$. Обозначим через $D_\mu^- = \{\zeta :$

$\zeta = z + \mu\bar{z}, z \in D^-$ } внешнюю часть эллипса с центром в точке нуль. Общее решение уравнения (1) в области D^-, ограниченное в окрестности бесконечности, определяется формулой (см. [1], стр. 50) :

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1\bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2\bar{z}) + C\ln\frac{z + \mu_1\bar{z}}{z + \mu_2\bar{z}}, \tag{10}$$

где $\mu_j = (i - \lambda_j)(i + \lambda_j)^{-1}$ $(j = 1,2)$, C - произвольная постоянная и φ_j - функции, аналитические в областях $D^-_{\mu_j}$ $(j = 1,2)$ соответственно, ограниченые в окрестности бесконечности и удовлетворяющие условию $\varphi_2(\infty) = 0$. Функции φ_j $(j = 1,2)$ и постоянная C определяются по u единственным образом.

В силу (4), $|\mu_j| < 1$ $(j = 1,2)$ и, следовательно, в (10) можно выбрать непрерывную ветвь логарифма в области D^-. В частности, ее можно определить соотношением $\ln\frac{z+\mu_1\bar{z}}{z+\mu_2\bar{z}} = \ln(1 + \mu_1\bar{z}z^{-1}) - \ln(1 + \mu_2\bar{z}z^{-1})$, где $\ln(1 + \mu_j\bar{z}z^{-1})$ $(j = 1,2)$ - главная ветвь логарифма. Из условия (5) следует, что (см. [1], стр. 50), $\varphi_j(z + \mu_j\bar{z}) \in H(\overline{D_R})$ $(j = 1,2)$. Граничное условие (7) при $n_0 = 0$ и $n_1 = 1$ можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\frac{u(z)}{\omega_0(z)} = g_0(z), \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{\omega_1(z)}\frac{\partial u(z)}{\partial r}\right) = g_1(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$g_k(z) = \bar{f}_k(z)|\omega_k(z)|^{-2}. \tag{11}$$

Подставляя общее решение (10) в граничное условие (11) и учитывая, что $\bar{z} = z^{-1}$ при $z \in \Gamma$, получим

$$\operatorname{Re}\left[\delta_1^{-1}(z)\left(\varphi_1(z + \mu_1\bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2\bar{z}) + C\ln\frac{z + \mu_1\bar{z}}{z + \mu_2\bar{z}}\right)\right] = g_0(z), \quad z \in \Gamma, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}\left[z\delta_2^{-1}(z)((z + \mu_1\bar{z})\varphi_1'(z + \mu_1\bar{z}) + (z + \mu_2\bar{z})\varphi_2'(z + \mu_2\bar{z}))\right] = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{13}$$

где

$$\delta_j(z) = \overline{\omega_{j-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad j = 1,2. \tag{14}$$

Так как $|\mu_j| < 1$ и φ_j - аналитическая в области $D^-_{\mu_j}$ функция, получим, что функции

$$\sigma_j(z) = \varphi_j\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right), \quad z \in D^-, \quad j = 1,2, \tag{15}$$

являются аналитическими в области D^-. Из (15) следует, что пределы $\sigma_j(\infty)$ существуют и $\sigma_2(\infty) = 0$, а также имеет место равенство

$$\sigma_j'(z) = \frac{z^2 - \mu_j}{z^2}\varphi_j'\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right), \quad j = 1,2. \tag{16}$$

Учитывая (15), (16) и равенство $\bar{z} = z^{-1}$ $(z \in \Gamma)$, граничные условия (12), (13) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \Omega_j(z) = g_{j-1}(z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Gamma, \tag{17}$$

где

$$\Omega_1(z) = \delta_1^{-1}(z)\left(\sigma_1(z) + \sigma_2(z) + C\ln\left(1 + \frac{\mu_1}{z^2}\right) - C\ln\left(1 + \frac{\mu_2}{z^2}\right)\right), \quad z \in D^-, \tag{18}$$

$$\Omega_2(z) = \delta_2^{-1}(z)\left(\frac{z^2(z^2+\mu_1)}{z^2-\mu_1}\sigma_1'(z) + \frac{z^2(z^2+\mu_2)}{z^2-\mu_2}\sigma_2'(z)\right), \quad z \in D^-. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что Ω_j – аналитические функции в D^- и ограничены в окрестности бесконечности. Поэтому, из граничных условий (17) эти функции опрделеляются по формуле Шварца (см. [3], стр. 223) :

$$\Omega_j(z) = \Phi_j(z) + ic_j \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_{j-1}(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta + ic_j, \quad z \in D^-, \quad j = 1, 2, \tag{20}$$

где c_j $(j = 1, 2)$ - действительные постоянные. Подставляя Ω_1 из (20) в (18), получим

$$\sigma_1(z) = -\sigma_2(z) - C\ln\left(1 + \frac{\mu_1}{z^2}\right) + C\ln\left(1 + \frac{\mu_2}{z^2}\right) + ic_1\delta_1(z) + \Phi_1(z)\delta_1(z). \tag{21}$$

Подставляя Ω_2 и σ_1 из (20) и (21) в (19), получим

$$\frac{2(\mu_1-\mu_2)z^4\sigma_2'(z)}{(z^2-\mu_1)(z^2-\mu_2)} =$$

$$= \frac{2C(\mu_1-\mu_2)z^3}{(z^2-\mu_1)(z^2-\mu_2)} + ic_2\delta_2(z) + \psi_2(z) - \frac{z^4+\mu_1 z^2}{z^2-\mu_1}(ic_1\delta_1'(z) + \psi_1'(z)), \tag{22}$$

где

$$\psi_j = \delta_j\Phi_j, \quad j = 1, 2. \tag{23}$$

Поскольку σ_j, δ_j и ψ_j – аналитические в D^- функции и ограничены в окрестности бесконечности, то при $|z| \to \infty$ эти функции, а также функции $z^2\sigma_j'(z)$, $z^2\delta_j'(z)$ и $z^2\psi_j'(z)$ $(j = 1, 2)$ имеют предел. Умножая обе части (22) на z^j $(j = 0, 1)$ и переходя к пределу при $|z| \to \infty$, получим

$$\lim_{|z|\to\infty}\left(ic_2\delta_2(z) + \psi_2(z) - z^2(ic_1\delta_1'(z) + \psi_1'(z))\right) = 0, \tag{24}$$

$$2C(\mu_1-\mu_2) + \lim_{|z|\to\infty} z\left(ic_2\delta_2(z) + \psi_2(z) - z^2(ic_1\delta_1'(z) + \psi_1'(z))\right) = 0, \tag{25}$$

где существование предела в (25) следует из (24). Пусть действительные числа c_1 и c_2 удовлетворяют условию (24), а комплексная постоянная C определяется из (25). Тогда правая часть (22) стремится к нулю как z^{-2}. Поэтому из (22) функция $\sigma_2(z)$ ($\sigma_2(\infty) = 0$) определяется однозначно по формуле

$$\sigma_2(z) = -\int_z^{\infty} \frac{(\zeta^2 - \mu_1)(\zeta^2 - \mu_2)}{2(\mu_2 - \mu_1)\zeta^4} \Psi(\zeta) d\zeta, \tag{26}$$

где Ψ – правая часть (22), а интегрирование идет вдоль луча $\zeta = \rho e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg z$, $|z| \leq \rho < \infty$.

Таким образом, задача (1), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (24) имеет решение относительно действительных постоянных c_j ($j = 1, 2$). Обозначим

$$b = \frac{\overline{\omega_0(0)}}{\pi i} \int_\Gamma g_0(t) dt - \frac{\overline{\omega_0'(0)}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g_0(t)}{t} dt - \frac{\overline{\omega_1(0)}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g_1(t)}{t} dt \tag{27}$$

(интегрирование идет вдоль Γ по комплексной переменной t против часовой стрелки).

Из (14) и (23) следует, что

$$\delta_2(\infty) = \overline{\omega_1(0)}, \quad \lim_{|z| \to \infty} z^2 \delta_1'(z) = -\overline{\omega_0'(0)} \quad \text{и} \quad \lim_{|z| \to \infty} (z^2 \psi_1'(z) - \psi_2(z)) = b. \tag{28}$$

и, следовательно, уравнение (24) относительно действительных постоянных c_j ($j = 1, 2$) можно записть в виде $\omega_0'(0) c_1 + c_2 \omega_1(0) = \bar{b} i$. Так как $\omega_1(0) \neq 0$, последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{\omega_0'(0)}{\omega_1(0)} c_1 + c_2 = \frac{\bar{b} i}{\omega_1(0)}. \tag{29}$$

Приравнивая действительные и мнимые части в (29), получим, что (29) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} \frac{\omega_0'(0)}{\omega_1(0)} \neq 0$. Пусть это условие выполнено и c_j ($j = 1, 2$) – решение (29). Тогда σ_j ($j = 1, 2$) и C однозначно определяются из формул (21), (25) и (26). Пусть отображение, обратное к отображению $\zeta = z + \mu_j z^{-1}$ ($z \in D^-$, $\zeta \in D^-_{\mu_j}$, $j = 1, 2$) определеляется формулой

$$\alpha_j(\zeta) = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\mu_j}}{2}, \quad j = 1, 2, \tag{30}$$

где берется ветвь, непрерывная вне отрезка $[-2\sqrt{\mu_j}, 2\sqrt{\mu_j}]$, которая удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu_j} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$. Из (10), (15) и (30) имеем

$$u(z) = \sum_{j=1}^{2} \sigma_j \left(\frac{(z + \mu_j \bar{z}) + \sqrt{(z + \mu_j \bar{z})^2 - 4\mu_j}}{2} \right) + C \ln \frac{z + \mu_1 \bar{z}}{z + \mu_2 \bar{z}}. \tag{31}$$

Таким образом, при условии (9) задача (1), (7) имеет единственное решение, которое определяется формулой (31), где σ_j $(j = 1, 2)$ и C определяются однозначно из соотношений (21), (25), (26) и (29). Следовательно, условия (9) достаточны для однозначной разрешимости задачи (1), (7).

Для доказательства необходимости покажем, что при нарушении условий (9), задача (1), (7) не является однозначно разрешимой. Действительно,

1. при $n_0 = 0$, $n_1 = 1$ и $\operatorname{Im} \frac{\omega_0'(0)}{\omega_1(0)} = 0$, используя (29) аналогично предыдущему, получим, что однородная задача (1), (7) имеет одно линейно независимое решение над полем действительных чисел, а для разрешимости неоднородной задачи (1), (7) необходимо и достаточно, чтобы f_j $(j = 0, 1)$ удовлетворяли условию $\operatorname{Re} b(\overline{\omega_1(0)})^{-1} = 0$, где b определяется формулой (27).
2. При $n_0 \leq -1$ для разрешимости неоднородной задачи (1), (7) необходимо условие $\int_0^{2\pi} f_0(e^{i\theta})d\theta = 0$.
3. При $n_1 \leq 0$ для разрешимости неоднородной задачи (1), (7) необходимо условие $\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta})d\theta = 0$.
4. Если же $n_0 \geq 1$, $n_1 \geq 1$ или $n_0 \geq 0$, $n_1 \geq 2$, то однородная задача (1), (7) имеет ненулевое решение.

Таким образом, теорема доказана при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2$ $(\operatorname{Im} \lambda_1 > 0)$. Тогда в области D^- общее решение уравнения (1), ограниченное в окрестности бесконечности, определяется формулой (см. [1], стр. 50) :

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \bar{z}\varphi_2(z + \mu_1 \bar{z}), \tag{32}$$

где φ_j $(j = 1, 2)$ – аналитические в области $D^-_{\mu_1}$ функции такие, что существуют $\varphi_1(\infty)$ и $\varphi_2(\infty) = 0$, причем φ_j определяются по u однозначно. Число μ_1 определяется аналогично (10). Используя формулу (32), аналогично случаю простых корней, доказываем теорему и в этом случае. Теорема 1 доказана.

Мы указали эффективный метод решения задачи (1), (7) при $n_0 = 0$, $n_1 = 1$. В других случаях задача может быть решена аналогично. Запишем условия, при которых задача (1), (7) имеет решение для произвольных граничных функций.

Теорема 2. *Для того, чтобы неоднородная задача (1), (7) при любых* f_0, f_1 $\left(\frac{df_0}{ds}, f_1 \in H(\Gamma)\right)$ *имела решение необходимо и достаточно выполнение одного из условий :*

1) $n_0 = 0$, $n_1 = 1$ *и* $\operatorname{Im} \omega_0'(0)(\omega_1(0))^{-1} \neq 0$;

2) $n_0 = 0$ *и* $n_1 \geq 2$;

3) $n_0 \geq 1$, $n_1 \geq 1$.

При этом, число линейно независимых решений однородной задачи (1), (7) равно $2(n_0 + n_1 - 1)$.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1, поэтому ее доказательство опускаем. Если k_0 – число линейно независимых решений однозначной задачи (1), (2), а k_1 – число действительных линейно независимых условий, при которых неоднородная задача (1), (2) имеет решение, то эти числа кончены и K – индекс задачи (1), (2), определяется соотношением

$$K \equiv k_0 - k_1 = 2(n_0 + n_1 - 1).$$

Чтобы показать, что результаты для внешней и внутренней задач Римана–Гильберта отличаются, расмотрим уравнение (1) с граничными условиями

$$\operatorname{Re} u(z) = f_0(z), \quad \operatorname{Re} \frac{du(z)}{dr} = f_1(z), \quad z \in \Gamma. \tag{33}$$

Теорема 3. *В области* D^- *однородная задача (1), (33) имеет одно* ($u_0 = i$) *линейно независимое решение , а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда граничная функция удовлетворяет условиям*

$$\int_0^{2\pi} (f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta})) \cos\theta \, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta})) \sin\theta \, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta}) \, d\theta = 0.$$

Для сравнения отметим что (см. [3], стр. 176), что в области D^+ однородная задача (1), (33) имеет четыре линейно независимых решения и соответствующая неоднородная задача в этой области всегда имеет решение.

3. ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе рассмотрим уравнение (1) с граничными условиями вида

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} - a(z)\overline{u(z)} = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{34}$$

где a и f – заданые комплекснозначные функции на Γ, удовлетворяющие условиям

$$\frac{da}{ds} \in H(\Gamma), \quad \frac{df}{ds} \in H(\Gamma), \quad a(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{35}$$

Из (35) следует, что индекс ν функции a на Γ – целое число и a можно представить в виде ([4], стр. 150)

$$a(z) = \frac{z^\nu \omega_-(z)}{\omega_+(z)}, \tag{36}$$

где $\omega_\pm$ – функции, аналитические в $D^\pm$ соответсвенно, принадлежащие классам $H(\overline{D^\pm})$ и удовлетворяющие условиям $\omega_\pm \neq 0$ $(z \in \overline{D^\pm})$, $\omega_-(\infty) = 1$.

Теорема 4. *Задача (1), (34) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\nu = -1$ и $|\omega'_+(0)| \neq 1$.*

Замечание. Функция $a(z) = z^{-2}(z + d_0)(d_1 + d_2 z)^{-1}$, где d_j $(j = 1, 2, 3)$ - постоянные, удовлетворяет условиям теоремы 4, если $|d_0| < 1$ и $|d_2| < |d_1|$, $|d_2| \neq 1$.

Доказательство теоремы 4 : Предположим сначала, что корни уравнения (3) простые и выполняются условия теоремы. Докажем, что задача (1), (34) однозначно разрешима. Используя (36), представим граничное условие (34) в виде

$$\frac{z^{-\nu}}{\omega_-(z)} \frac{\partial u(z)}{\partial r} - \frac{\overline{u(z)}}{\omega_+(z)} = g(z) \equiv \frac{f(z)}{z^\nu \omega_-(z)}, \quad z \in \Gamma. \tag{37}$$

Подставляя общее решение (10) в это уравнение и учитывая равенство $\overline{u(z)} = \overline{u((\bar{z})^{-1})}$ $(z \in \Gamma)$, получим

$$\Omega_-(z) - \Omega_+(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{38}$$

где

$$\Omega_+(z) = \frac{1}{\omega_+(z)} \left(\overline{\sigma_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \overline{\sigma_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \bar{C}(\ln(1 + \bar{\mu}_1 z^2) - \ln(1 + \bar{\mu}_2 z^2)) \right), \quad z \in D^+, \tag{39}$$

$$\Omega_-(z) = \frac{1}{\omega_-(z)} \left(\frac{z^2(z^2 + \mu_1)}{z^2 - \mu_1} \sigma'_1(z) + \frac{z^2(z^2 + \mu_2)}{z^2 - \mu_2} \sigma'_2(z) \right), \quad z \in D^-. \tag{40}$$

В этих формулах σ_j $(j = 1, 2)$ – аналитические в D^- функции, определенные в (15) $(\sigma_2(\infty) = 0)$. Функции $\Omega_\pm$ являются аналитическими в $D^\pm$ соответственно и Ω_- ограничена в окрестности бесконечности. Из (38) следует, что функции $\Omega_\pm$ определяются формулами (см. [4], стр. 137) :

$$\Omega_\pm(z) = F(z) + C_0 \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t - z} + C_0, \quad z \in D^\pm. \tag{41}$$

Обозначим

$$\beta(z) = \overline{\omega_+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad F_1(z) = \beta(z)\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad F_2(z) = \omega_-(z)F(z), \quad z \in D^-, \tag{42}$$

и заметим, что функции β и F_j $(j = 1, 2)$ - аналитические в D^-, ограниченные в окрестности бесконечности и $\beta(\infty) \neq 0$, $F_1(\infty) = 0$. Подставляя Ω_+ из (41) в (39) и заменяя $(z)^{-1}$ на z, получим

$$\sigma_1(z) = -\sigma_2(z) - C\ln\left(1 + \frac{\mu_1}{z^2}\right) + C\ln\left(1 + \frac{\mu_2}{z^2}\right) + \overline{C_0}\beta(z) + F_1(z), \quad z \in D^-. \quad (43)$$

Подставляя Ω_- и σ_1 из (41) и (43) в (40), получим

$$\frac{2(\mu_1 - \mu_2)z^4\sigma_2'(z)}{(z^2 - \mu_1)(z^2 - \mu_2)} = \frac{2C(\mu_1 - \mu_2)z^3}{(z^2 - \mu_1)(z^2 + \mu_2)} +$$

$$+C_0\omega_-(z) + F_2(z) - \frac{z^4 + \mu_1 z^2}{z^2 - \mu_1}(\overline{C_0}\beta'(z) + F_1'(z)), \quad z \in D^-. \quad (44)$$

Аналогично (24) и (25), получим, что для разрешимости уравнения (44) относительно σ_2 необходимо и достаточно, чтобы комплексные постоянные C и C_0 удовлетворяли условиям

$$C_0\omega_-(\infty) + F_2(\infty) - \lim_{|z|\to\infty} z^2(\overline{C_0}\beta'(z) + F_1'(z)) = 0. \quad (45)$$

$$2C(\mu_1 - \mu_2) + \lim_{|z|\to\infty} z(C_0\omega_-(z) + F_2(z) - z^2(C_0\beta'(z) + F_1'(z))) = 0. \quad (46)$$

Из (42) и равенств $\omega_-(\infty) = 1$ и $F(\infty) = 0$ имеем

$$F_2(\infty) = 0, \quad \lim_{|z|\to\infty} z^2\beta'(z) = -\overline{\omega_+'(0)},$$

$$\lim_{|z|\to\infty} z^2F_1'(z) = -\overline{\omega_+'(0)F(0)} - \overline{\omega_+(0)F'(0)}.$$

Следовательно, уравнение (45) примет вид

$$C_0 + \overline{\omega_+'(0)C_0} = -\overline{\omega_+'(0)F(0)} - \overline{\omega_+(0)F'(0)}. \quad (47)$$

Последнее уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $|\overline{\omega_+'(0)}| \neq 1$. Итак, при условиях теоремы 4 задача (1), (34) однозначно разрешима. Доказательство необходимости этих условий для однозначной разрешимости задачи (1), (34) аналогично доказательству необходимости условий теоремы 1. В случае, когда характеристическое уравнение (3) имеет двукратный корень, используем представление (32). Дальнейшие рассуждения аналогичны. Доказательство завершено.

Имеют место следующие утверждения, которые доказываются аналогично теореме 4.

Теорема 5. *Если $\nu = -1$ и $|\overline{\omega'_+(0)}| = 1$, то неоднородная задача (1), (34) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условию*

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}(\omega'_+(0)F(0) + \omega_+(0)F'(0))\right) = 0,$$

где $\theta = \arg\omega'_+(0)$, а F определяется из (41).

Теорема 6. *Неоднородная задача (1), (34) имеет решение для любой граничной функции $f \in H(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий :*

1) $\nu = -1$ и $|\overline{\omega'_+(0)}| \neq 1$;   2) $\nu < -2$.

При этом число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи равно $-2\nu - 2$. Индекс задачи (1), (34) определяется формулой $k_0 - k_1 = -2\nu - 2$.

Abstract. The paper studies the Riemann–Hilbert problem for improperly elliptic equations in the exterior of the unit disc. The solutions are found in the class of functions that are bounded in the neighborhood of infinity and satisfy Holder's condition in any finite part of the disc exterior, up to its boundary. Some conditions for unique solvability of the problem in question are obtained and an effective solution method is presented. The same methods also work in the Poincare problem for improperly elliptic equations in the exterior of the disc.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Римана - Гильберта для неправильно эллиптического уравнения второго порядка", Известия НАН Армении. Математика, том 30, № 3, 1997, стр. 45 – 63.
2. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Москва, Наука, 1988.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Москва, Наука, 1987.
4. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Наука, 1968.

Поступила 1 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 41–52

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян

Государственный Инженерный Университет Армении

Резюме. В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для неправильно эллиптических систем уравнений. Описываются условия, обеспечивающие нормальную разрешимость этих задач и указывается метод решения. На модельной задаче иллюстрируется различие в постановке корректных краевых задач для правильно и неправильно эллиптических уравнений.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть D – ограниченная односвязная область с гладкой границей $\Gamma = \partial D$ и $0 \in D$. В области D рассматривается система дифференциальных уравнений

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где A, B и C – постоянные, квадратные матрицы порядка n, а $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ искомая, дважды дифференцируемая вектор-функция в D. Система (1) называется *эллиптической*, если характеристическое уравнение $\det(A + B\lambda + C\lambda^2) = 0$ не имеет действительных корней. Если число корней с положительной мнимой частью равно n, то система называется *правильно эллиптической*, в противном случае – *неправильно эллиптической*. Для правильно эллиптических систем, при условии слабой связанности (см. [1]), задача Дирихле является нормально разрешимой и фредгольмовой (см. [1], [2]). В работах [2], [3] исследована правильно эллиптическая система (1) с условиями на границе :

$$a(z)u_x(z) + b(z)u_y(z) + c(z)u(z) = f(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ – квадратные матрицы порядка n, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))^T$ – заданная вектор-функция с компонентами $f_i(z)$ $(1 \le i \le n)$, удовлетворяющая условию Гельдера на Γ. Доказано в [2], [3], что если система (1) – правильно эллиптическая, а матрицы A, B, C и $a(z)$, $b(z)$ удовлетворяют дополнительному условию (условию Лопатинского), то задача (1), (2) нетерова.

Если система (1) – неправильно эллиптическая, то задача (1), (2) не является нетеровой (см. [4]). Например, в случае полуплоскости, если $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ – некоторые постоянные, то однородная задача (1), (2) в классе ограниченных функций всегда имеет бесконечное множесто линейно независимых решений.

Основная цель настоящей работы – постановка и решение нетеровой граничной задачи для неправильно эллиптической системы (1). Полученные результаты показывают, что в этом случае характерны нелокальные граничные задачи.

Пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – достаточно гладкие функции на Γ, осуществляющие взаимно-однозначное отображение Γ на себя соответственно с сохранением и изменением ориентации, и пусть $\frac{d\alpha(z)}{ds} \neq 0$ и $\frac{d\beta(z)}{ds} \neq 0$ $(z \in \Gamma)$, где s – дуговая абсцисса. Граничное условие для неправильно эллиптической системы (1) запишем в виде

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} + a(z)u(\alpha(z)) + b(z)u(\beta(z)) = f(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

где $a(z)$ и $b(z)$ – заданные на Γ достаточно гладкие квадратные матрицы порядка n, N – внутренняя нормаль к Γ в точке $z \in \Gamma$ и $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))^{\top}$ – заданная на Γ функция класса $H^1(\Gamma)$. Здесь и далее класс $H^k(G)$ – множество функций на G, удовлетворяющих вместе с производными порядка k условию Гельдера. Решение $u(x, y)$ задачи (1), (2) ищется в классе $C^2(D) \cap H^1(\overline{D})$.

Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения λ_j $(j = 1, \ldots, 2n)$ – простые и расположены в верхней полуплоскости, т.е. $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots, 2n)$. При $n = 1$ рассматривается также случай кратных корней.

Обозначим через k_0 число линейно независимых решений однородной (при $f \equiv 0$) задачи (1), (3), k_1 – число линейно независимых условий на f, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи (1), (3). Числа k_0 и k_1 называются *дефектными числами*, а $\nu = k_0 - k_1$ – *индексом* задачи (1), (3).

Теорема 1. *Если $\det b(z) \neq 0$ при всех $z \in \Gamma$, то задача (1), (3) нетерова и ее индекс определяется формулой $\nu = 2n + \nu_0$, где ν_0 – индекс функции $\det b(z)$ на Γ.*

Рассмотрим неправильно эллиптическое уравнение Бицадзе [см. 2] в единичном круге $D_0 = \{z \mid |z| < 1\}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_0, \tag{4}$$

с граничными условиями на $\Gamma = \partial D_0$:

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} + bz^n u(\beta \bar{z}) = f(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} + az^n u(\alpha z) = f(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{6}$$

где a, b, α и β - комплексные постоянные, $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 1$.

Теорема 2. *Если $b \neq 0$, то задача (4), (5) нетерова и ее дефектные числа определяются соотношениями $k_0 = \max(2 + n, 0)$ and $k_1 = \max(-2 - n, 0)$. Дефектные числа задачи (4), (6) бесконечны.*

Таким образом, если система (1) - неправильно эллиптическая, то условие $\det b(z) \neq 0$ $(z \in \Gamma)$ существенно для нетеровости задачи (1), (3).

Пусть теперь система (1) правильно эллиптическая и слабо связанная. Тогда, используя формулу индекса, полученную в [2], имеем

Теорема 3. *Задача (1), (3) для правильно эллиптический и слабо связанной системы фредгольмова.*

Таким образом, правильная или неправильная эллиптичность уравнения (1) существенно влияет не только на нетеровость задачи (1), (3), но и на индекс этой задачи. В работе указывается метод решения задачи (1), (3), а задача (4), (5) решается в явном виде.

§2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\operatorname{Im} \lambda > 0$, обозначим $D_\lambda = \{(\xi, \eta) | \quad \zeta = \xi + i\eta = x + \lambda y, (x, y) \in D\}$ и $\Gamma_\lambda = \partial D_\lambda$.

Лемма 1. *Пусть φ_1 и φ_2 - функции, аналитические в областях D_{λ_1} и D_{λ_2} соответственно, такие, что $\varphi_j \in H^1(D_{\lambda_j} \cup \Gamma_{\lambda_j})$ $(j = 1, 2)$ и $Im\, \lambda_1 > 0$, $Im\, \lambda_2 > 0$, $\varphi_2(0) = 0$. Тогда справедливы представления*

$$\varphi_1(x + \lambda_1 y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_1(\xi + i\eta) d(\xi + \lambda_1 \eta)}{\xi + \lambda_1 \eta - x - \lambda_1 y}, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma, \quad (x, y) \in D. \tag{7}$$

$$\varphi_2(x + \lambda_2 y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_2(\xi + i\eta) d(\xi + \lambda_2 \eta)}{\xi + \lambda_2 \eta - x - \lambda_2 y} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_2(\xi + i\eta)\, d(\xi + \lambda_2 \eta)}{\xi + \lambda_2 \eta}, \quad (x, y) \in D. \tag{8}$$

где ω_1 и ω_2 - аналитические в D функции, $\omega_j \in H^1(D \cup \Gamma)$ $(j = 1, 2)$ и $\omega_2(0) = 0$. Функции ω_1 и ω_2 определяются по φ_1 и φ_2 единственным образом.

Доказательство. Представление (7) и его единственность доказаны в [1]. Так как $\varphi_2(0) = 0$, то формула (8) следует из (7). Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi + \lambda_2\eta - x - \lambda_2 y)^{-1} d(\xi + \lambda_2\eta) = 1,$$

в последнем представлении функцию ω_2 можем заменить на $\omega_2(z) - \omega_2(0)$. Таким образом, можем предполагать, что $\omega_2(0) = 0$. Осталось доказать единственность представления (8). Пусть $\varphi_2(x + \lambda_2 y) \equiv 0$. Тогда (8) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\omega_2(\xi + i\eta) + c)\, d(\xi + \lambda_2\eta)}{\xi + \lambda_2\eta - x - \lambda_2 y} \equiv 0, \quad (x, y) \in D,$$

где c – второе слагаемое правой части (8). Из единственности представления (7) следует, что $\omega_2(z) + c \equiv 0$. Так как $\omega_2(0) = 0$, то $c = 0$ и $\omega_2(z) \equiv 0$. Доказательство завершено.

Пусть $t = \xi + i\eta$ и $t_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точки на Γ и $\gamma_\lambda(t) = \xi + \lambda\eta$ соответствующая t точка на Γ_λ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$). Обозначим

$$K(t, t_0) = \frac{1}{t - t_0} - \frac{\gamma'_\lambda(t_0)}{\xi + \lambda\eta - \xi_0 - \lambda\eta_0}, \quad K_1(t, z) = \frac{\gamma'_\lambda(t)}{\xi + \lambda\eta - x - \lambda y} - \frac{1}{t - z}, \tag{9}$$

и $K_2(t, t_0) = K'_1(t, t_0)$. Так как Γ – достаточно гладкая кривая, то K, K_1 и K_2 также достаточно гладкие функции на оп Γ по обеим переменным t и t_0 (см. [6], стр. 573).

Лемма 2. *Если функция $\varphi_1(x + \lambda y)$ имеет представление (7), то при $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$ имеют место формулы*

$$\varphi_1(\xi_0 + \lambda_1\eta_0) = \omega_1(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_1(t, t_0)\omega_1(t)\, dt,$$

$$\varphi'_1(\xi_0 + \lambda_1\eta_0) = \frac{\omega'_1(t_0)}{\gamma'_\lambda(t_0)} + \frac{1}{2\pi i\gamma'_\lambda(t_0)}\int_\Gamma K_2(t, t_0)\omega_1(t) dt, \tag{10}$$

где

$$\varphi_1(\xi_0 + \lambda_1\eta_0) = \lim_{z = x + iy \to t_0,\, z \in D} \varphi_1(x + \lambda_1 y).$$

Доказательство : Так как функция $\omega_1(z)$ аналитична в D и $\omega_1(z) \in H^1(\overline{D})$, то формулу (7) можно представить в виде

$$\varphi_1(z) = \omega(z) + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma K_1(t, z)\omega(z)\, dt.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \to t_0 \in \Gamma$ и используя формулу Сохоцкого–Племеля (см. [7], стр. 66), получим первое соотношение в (10). Второе соотношение получаем аналогично, дифференцируя обе части (7) по z и используя интегрирование по частям. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогичным образом.

Лемма 3. *Пусть $\alpha(t)$ - сохраняющий ориентацию сдвиг из (3), $a(t)$ и $b(t)$ - достаточно гладкие функции на Γ. Если $\omega(z)$ - аналитическая в D функция из класса $H^1(\overline{D})$, то предельные значения интегралов*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a(t)\omega(\alpha(t))\,dt}{t-z}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{b(t)\omega'(t)dt}{t-z}, \quad z \in D, \qquad (11)$$

при $z \to t_0 \in \Gamma$ определяются по формулам

$$\varphi(t_0) = a(t_0)\omega(\alpha(t_0)) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_3(t, t_0)\omega(\alpha(t))\,dt,$$

$$\psi(t_0) = b(t_0)\omega'(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_4(t, t_0)\omega(t)\,dt,$$

где

$$K_3(t, t_0) = \frac{a(t)-a(t_0)}{t-t_0} + a(t_0)\left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right),$$

$$K_4(t, t_0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{b(t)-b(t_0)}{t-t_0}\right).$$

Рассмотрим одностороннюю задачу Гильберта со смещением вида

$$\varphi(t_0) + a_0(t_0)\psi(\alpha(t_0)) + a_1(t_0)\psi'(t_0) + b(t_0)\psi(\beta(t_0)) = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \qquad (12)$$

где $\varphi(z) \in H(\overline{D})$ и $\psi(z) \in H^1(\overline{D})$ - искомые аналитические в D функции, $f(t) \in H^1(\Gamma)$ и $a_0(t)$, $a_1(t)$ и $b(t)$ - заданные на Γ достаточно гладкие функции, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ - сдвиги из условия (3).

Лемма 4. *Если выполняется условие $b(t) \neq 0$ при всех $t \in \Gamma$, то задача (12) нетерова и ее индекс ν определяется формулой $\nu = \nu_0 + 1$, где ν_0 - индекс функции $b(t)$ на Γ.*

Доказательство : Рассмотрим преобразование

$$\psi(z) = \psi_1(z), \quad \varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(a_0(t)\psi_1(\alpha(t)) + a_1(t)\psi_1'(t))dt}{t-z}, \quad z \in D.$$

Легко видеть, что паре функций $(\varphi(z), \psi(z))$ (где $\varphi \in H(\overline{D})$ и $\psi \in H^1(\overline{D})$) взаимно-однозначно соответствует пара $(\varphi_1(z), \psi_1(z))$, (причем $\varphi_1 \in H(\overline{D})$ и $\psi_1 \in H^1(\overline{D})$). Переходя к пределу при $z \to t_0 \in \Gamma$, и используя лемму 3, после подстановки в граничное условие (12) получим

$$\varphi_1(t_0) + b(t_0)\psi_1(\beta(t_0)) + \int_\Gamma M(t, t_0)\psi_1(t)dt = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma.$$

где $M(t, t_0)$ – определенная функция, достаточно гладкая на Γ по обеим переменным t и t_0. Полученная граничная задача исследована в [7] (стр. 239–257) в классе $\varphi \in H(\overline{D})$, $\psi \in H(\overline{D})$. Было доказано, что при выполнении условия леммы 4, данная задача нетерова и ее индекс равен $\nu_0 + 1$. Доказано также, что если $f(t) \in H^1(\Gamma)$, то любое решение из класса $H(\overline{D})$ принадлежит также классу $H^1(\overline{D})$. Поэтому, рассматривая последнюю задачу в $H(\overline{D})$ и используя результаты [7], завершаем доказательство леммы.

Аналогично доказывается векторный вариант леммы 4.

Лемма 5. *Если в (12) $a_0(t)$, $a_1(t)$ и $b(t)$ – гладкие квадратные матрицы порядка n ($n \geq 1$), $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T \in H^1(\Gamma)$, а $\varphi(z) \in H(\overline{D})$ и $\psi(z) \in H^1(\overline{D})$ – искомые аналитические в D n-мерные вектор столбцы, то при выполнении условия $\det b(t) \neq 0$ при всех $t \in \Gamma$, задача (12) нетерова и ее индекс ν определяется формулой $\nu = \nu_0 + n$, где ν_0 – индекс функции $\det b(t)$ на Γ.*

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Пусть корни λ_j характеристического уравнения простые и расположены в верней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$. Тогда в области D общее решение системы (1) допускает представление (см. [2]) :

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \varphi_j(x + \lambda_j y), \quad (x, y) \in D, \tag{13}$$

где $\varphi_j(\zeta)$ ($j = 1, \ldots, 2n$) – аналитические в области D_{λ_j} функции такие, что $\varphi_j(0) = 0$ ($j = n+1, \ldots, 2n$), α_j ($j = 1, \ldots, 2n$) – постоянные n-мерные вектор-столбцы, определенные по коэффициентам уравнения (1) и удовлетворяюшие условиям

$$(\alpha_1 \ \ \ldots \ \ \alpha_n) = I_n, \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \lambda_1 \alpha_1 & \ldots & \lambda_{2n} \alpha_{2n} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{14}$$

где I_n – n-мерная единичная матрица. При этих условиях, функции φ_j определяются по u единственным образом, и, если $u \in H^1(\overline{D})$, то функции $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ также принадлежат тому же классу (см. [2]). Обозначим

$$\gamma_j(t) = \xi + \lambda_j \eta, \quad \delta_j(t) = \lambda_j \cos\theta(t) - \sin\theta(t), \quad t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{15}$$

где $\theta(t)$ – угол между касательной к Γ в точке t и положительным направлением оси абсцисс. Подставляя $u(z)$ из (13) в граничное условие (3), получим

$$\sum_{j=1}^{2n} (\alpha_j \delta_j(t_0) \varphi_j'(\gamma_j(t_0)) + a(t_0) \alpha_j \varphi_j(\gamma_j(\alpha(t_0))) +$$

$$+b_j(t_0)\alpha_j\varphi_j(\gamma_j(\beta(t_0))))=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma. \qquad (16)$$

Согласно лемме 1 функции φ_j можно представить в виде

$$\varphi_j(x+\lambda_j y)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega_j(t)d\gamma_j(t)}{\gamma_j(t)-x-\lambda_j y}+c_j,\quad (x,y)\in D,\quad j=1,\ldots,2n,$$

где ω_j – аналитические в D функции, $\omega_j\in H^1(\overline{D})$ и $\omega_j(0)=0$ при $j=n+1,\ldots,2n$. Постоянные c_j равны нулю при $j=1,\ldots,n$ и

$$c_j=-(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma\omega_j(t)(\gamma_j(t))^{-1}\,d\gamma_j(t),\quad j=n+1,\ldots,2n.$$

Используя лемму 2, представим граничные значения этих функций при $z\to t_0\in\Gamma$ $(z=x+iy,\ (x,y)\in D)$ в виде

$$\varphi_j(\gamma_j(t_0))=\omega_j(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_j(t,t_0)\omega_j(t)+c_j,$$

$$\varphi_j'(\gamma_j(t_0))=\frac{\omega_j'(t_0)}{\gamma_j'(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma M_j(t,t_0)\omega_j(t_0)\,dt,$$

где $K_j(t,t_0)$ и $M_j(t,t_0)$ – известные вектор-функции, гладкие по t и t_0 на Γ. Поставляя последние соотношения в (16), получим

$$\sum_{j=1}^{2n}\left(\alpha_j\frac{\delta_j(t_0)}{\gamma_j'(t_0)}\omega_j'(t_0)+a(t_0)\alpha_j\omega_j(\alpha(t_0))+b(t_0)\alpha_j\omega_j(\beta(t_0))+\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma F_j(t,t_0)\omega_j(t)\,dt\right)=f(t_0), \qquad (17)$$

где $t_0\in\Gamma$ и $F_j(t,t_0)$ $(j=1,\ldots,2n)$ - известные вектор-функции с гладкими элементами.

Введем обозначения

$$W=(\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{2n}),\quad \Lambda_1=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\quad \Lambda_2=diag(\lambda_{n+1},\ldots,\lambda_{2n}). \qquad (18)$$

Очевидно,

$$(\omega_1(z),\ldots,\omega_n(z))^T=\psi(z)-W\int_0^z\varphi(t)dt,\quad (\omega_{n+1}(z),\ldots,\omega_{2n}(z))^T=\int_0^z\varphi(t)\,dt,$$

где φ и ψ – искомые аналитические в D вектор-функции. Легко видеть, что $\omega_j\in H^1(\overline{D})$ $(j=1,\ldots,2n)$ и $\omega_k(0)=0$ при $k=n+1,\ldots,2n$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in H(\overline{D})$ и $\psi \in H^1(\overline{D})$. Используя обозначения (18) и учитывая (14), уравнение (17) примет вид

$$(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W)\varphi(t_0) + \rho(t_0)\psi'(t_0) + a(t_0)\psi(\alpha(t_0)) + b(t_0)\psi(\beta(t_0)) +$$
$$+ \int_\Gamma (F(t,t_0)\varphi(t) + G(t,t_0)\psi(t))dt = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{19}$$

где F и G – квадратные матрицы порядка n с гладкими элементами,

$$\rho(t_0) = diag\left(\frac{\delta_1(t_0)}{\gamma_1'(t_0)}, \dots, \frac{\delta_n(t_0)}{\gamma_n'(t_0)}\right), \quad \mu(t_0) = diag\left(\frac{\delta_{n+1}(t_0)}{\gamma_{n+1}'(t_0)}, \dots, \frac{\delta_{2n}(t_0)}{\gamma_{2n}'(t_0)}\right).$$

Докажем, что матрица $W\mu(t_0) - \rho(t_0)W$ невырождена на Γ. Действительно, из (15), используя равенство

$$\gamma_j'(t_0) = \frac{\cos\theta(t_0) + \lambda_j \sin\theta(t_0)}{\cos\theta(t_0) + i\sin\theta(t_0)},$$

получим

$$\frac{\delta_j(t_0)}{\gamma_j'(t_0)} - \frac{\delta_{n+k}(t_0)}{\gamma_{n+k}'(t_0)} = \frac{(\lambda_j - \lambda_{n+k})(\cos\theta(t_0) + i\sin\theta(t_0))}{(\cos\theta(t_0) + \lambda_j\sin\theta(t_0))(\cos\theta(t_0) + \lambda_{n+k}\sin\theta(t_0))}.$$

Таким образом, в обозначениях (18)

$$\det(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W) = \det(W\Lambda_2 - \Lambda_1 W)\frac{(\cos\theta(t_0) + i\sin\theta(t_0))^n}{\prod\limits_{j=1}^{2n}(\cos\theta(t_0) + \lambda_j\sin\theta(t_0))}. \tag{20}$$

Из (14) и (18) следует, что

$$\det(W\Lambda_2 - \Lambda_1 W) = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{2n} \\ \lambda_1\alpha_1 & \dots & \lambda_{2n}\alpha_{2n}\end{pmatrix} \neq 0.$$

Далее, при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функция $\cos\theta(t) + \lambda\sin\theta(t)$ не обращается в нуль на Γ и ее индекс равен единице (см. [6]). Следовательно, $\det(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W)$ не обращается в нуль на Γ и его индекс равен $-n$. Умножая обе части (19) на $(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W)^{-1}$ и применяя лемму 5, завершаем доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим задачу (4), (5). Для простоты изложения предположим, что в (5) $b = \beta = 1$. Общее решение уравнения (4) представим в виде (см. [2])

$$u(z) = \psi(z) + (1 - z\bar{z})\varphi(z) + C\bar{z}, \quad z = x + iy, \quad (x,y) \in D_0, \tag{21}$$

где φ и ψ - произвольные аналитические в D_0 функции и C - произвольная постоянная. Отметим, что φ, ψ и C определяются по u однозначно и, если $u \in H^1(\overline{D})$, то $\varphi \in H(\overline{D})$ и $\psi \in H^1(\overline{D})$ (см. [2]). Подставляя u в граничное условие (5) получим

$$z\psi'(z) - 2\varphi(z) + C\overline{z} + z^n(\psi(\overline{z}) + Cz) = f(z), \quad |z| = 1, \tag{22}$$

Пусть $n + 2 > 0$. Тогда последнее уравнение можно представить в виде

$$\Phi(z) - \Psi(z) = f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{23}$$

где

$$\Phi(z) = z\psi'(z) - 2\varphi(z) + Cz^{n+1}, \quad \Psi(z) = -Cz^{-1} - z^n\psi(z^{-1}).$$

Легко видеть, что Φ и Ψ аналитичны в областях D_0 и $\mathbb{C}\setminus\overline{D_0}$ соответственно и $|\Psi(z)| \le C_0|z|^n$. Следовательно, из (23) имеем (см. [6]) $\Phi(z) = F(z) + P_n(z)$ при $z \in D_0$ и $\Psi(z) = F(z) + P_n(z)$ при $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D_0}$. Здесь

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - z}$$

- известная функция, а $P_n(z)$ - многочлен степени не выше n. Используя представления функций Φ и Ψ получим, что функции φ и ψ определяются с точностью до многочлена степени $n + 1$ и, следовательно, однородная задача (4), (5) имеет $n + 2$ линейно независимых решений. Неоднородная задача всегда разрешима. Первая часть теоремы при $n + 2 > 0$ доказана.

Пусть теперь $n + 2 = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, после подстановки общего решения (21) в граничное условие (5) получим граничную задачу (23), где аналитические в D_0 и $\mathbb{C}\setminus\overline{D_0}$ соответсатвенно функции Φ и Ψ определяются соотношениями

$$\Phi(z) = z\psi'(z) - 2\varphi(z), \quad \Psi(z) = -2Cz^{-1} - z^{-2}\psi(z^{-1}).$$

Учитывая, что $\Psi(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, имеем

$$z\psi'(z) - 2\varphi(z) = F(z), \quad 2C + z\psi(z) = G(z),$$

где F и G - известные функции, и

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(t)dt}{1 - tz}.$$

Из второго равенства определяем $C = 0.5G(0)$ и $\psi(z) = z^{-1}(G(z) - G(0))$, а из первого равенства – φ. Таким образом, при $n + 2 = 0$ задача (4), (5) однозначно разрешима.

В случае $n + 2 < 0$, первая часть теоремы доказывается аналогично.

Рассмотрим задачу (4), (6). Здесь также для простоты изложения рассматриваем случай, когда в (6) $a = 1$, $\alpha = 1$ и $n \geq 1$. Подставляя общее решение (21) в граничное условие (6), получим

$$z\psi'(z) - 2\varphi(z) + C\overline{z} + z^n\psi(z) + Cz^{n-1} = f(z), \quad |z| = 1. \tag{24}$$

Из этого соотношения определяем

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)\,dt.$$

Равенство (24) показывает, что функция $zf(z)$ – граничное значение аналитической в D_0 функции $V(z)$. Следовательно, для разрешимости задачи (4), (6) необходимо выполнение бесконечного числа условий

$$\int_\Gamma f(t)t^k\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

При этих условиях, из (24) получим

$$z^2\psi'(z) - 2z\varphi(z) + C + z^{n+1}\psi(z) + Cz^n = V(z), \quad |z| < 1,$$

где функцию $\psi \in H^1(\overline{D_0})$ можно брать произвольно, и затем однозначно определить φ. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу (4), (3) в круге D_0. В (21) ведем новую аналитическую функцию $\varphi_1(z) = z\varphi(z) + C$, по формуле

$$C = \varphi_1(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^{-1}\varphi_1(t)\,dt, \quad \varphi(z) = \frac{\varphi_1(z) - \varphi_1(0)}{z}.$$

Подставляя общее решение (21) в граничные условия (3), получим

$$z^2\psi'(z) - 2\varphi_1(z) + a(z)z\psi(\alpha(z)) + b(z)z\psi(\beta(z)) +$$
$$+\frac{1 + z(a(z)\overline{\alpha(z)} + b(z)\overline{\beta(z)})}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_1(t)dt}{t} = zf(z),$$

при $z \in \Gamma$. Данная граничная задача отличается от (12) вполне непрерывным слагаемым, и, следовательно, используя лемму 4, доказываем утверждение теоремы 1 для задачи (4), (3) в круге.

§4. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Пусть для системы (1) корни λ_j характеристического уравнения простые и удовлетворяют условию $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$. Рассмотрим граничное условие

$$\frac{\partial u(t)}{\partial N} + a_0(z)\frac{\partial u(t)}{\partial s} + a(t)u(\alpha(t)) + b(t)u(\beta(t)) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{25}$$

где a, b, α, β и f удовлетворяют тем же условиям, что и в (3), a_0 - квадратная матрица порядка n с гладкими элементами и u - искомая вектор-функция из класса $H^1(\overline{D})$. Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Если* $\det b(z) \neq 0$ *при* $z \in \Gamma$, *то задача (1), (25) нетерова и ее индекс определяется формулой* $\nu = 2n + \nu_0$, *где* ν_0 *– индекс функции* $\det b(z)$ *на* Γ.

Рассмотрим иное граничное условие для решения системы (1)

$$\frac{\partial u(t)}{\partial N} + a_0(z)\frac{\partial u(t)}{\partial s} + a(t)u(\alpha(t)) + b(t)\overline{u(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{26}$$

где параметры и неизвестная вектор-функция удовлетворяют тем же условиям, что и в (25). Приравнивая действительные и мнимые части (26) задачи (1), (26) приводим к эквивалентной задаче Римана-Гильберта :

$$\operatorname{Re}\left(A_1(t_0)\Phi(t_0) + \int_\Gamma L(t, t_0)\Phi(t)\,dt\right) = S(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{27}$$

Напомним, что эквивалентность означает, что существует взаимно-однозначное соответствие между решениями (1), (26) и решениями (27), и в обеих задачах линейная независимость решений соответствующих однородных задач рассматривается над полем действительных чисел. Здесь $\Phi \in H(\overline{D})$ - искомая в области D $2n$-мерная вектор-функция, L – определенная квадратная матрица порядка $2n$ с гладкими элементами и

$$S(t) = (\operatorname{Re} f_1(t), \ldots, \operatorname{Re} f_n(t), \operatorname{Im} f_1(t), \ldots, \operatorname{Im} f_n(t))^{\mathsf{T}}.$$

Матрица $A_1(t_0)$ определяется соотношением

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} W\mu(t_0) - \rho(t_0)W & \overline{b(t_0)} \\ i(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W) & \overline{b(t_0)} \end{pmatrix},$$

где W, μ и ρ - матрицы, входящие в (19). Легко видеть, что

$$\det A_1(t_0) = (2i)^n \det(W\mu(t_0) - \rho(t_0)W)\det\overline{b(t_0)},$$

следовательно, если $\det b(t_0) \neq 0$ ($t_0 \in \Gamma$), то $\det A_1(t_0) \neq 0$. При этом условии задача (27) была исследована в [7] (стр. 362). Используя результаты этой работы, получим

Теорема 5. *Если* $\det b(z) \neq 0$ *при всех* $z \in \Gamma$, *то задача (1), (26) – нетерова и ее индекс определяется формулой* $\nu = 4n + 2\nu_0$, *где* ν_0 *– индекс функции* $\det b(z)$ *на* Γ.

Abstract. The paper considers non-local boundary value problems for improperly elliptic systems of second order differential equations. Some conditions for normal solvability of such problems are described together with a solution method. The difference between the boundary value problems for properly and improperly elliptic equations is demonstrated in a model case.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.
2. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
3. Н. Е. Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами", Дифференциальные уравнения, том 2, № 1, стр. 3 – 23, № 2, стр. 163 – 171, 1966.
4. А. И. Вольперт, "Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости", Труды ММО, том 10, стр. 41 – 87, 1961.
5. Н. Е. Товмасян, "Краевые задачи для нерегулярных систем дифференциальных уравнений на плоскости в классе обобщенных функций и функций полиномиального роста", Математический сборник, том 131 (173), № 2 (10), стр. 185 – 212.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1962.
7. Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Москва, Наука, 1970.

Поступила 3 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 53-66

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе рассматривается задача Неймана для эллиптических слабо связанных систем второго порядка в полуплоскости. Решение ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых в полуплоскости и непрерывных вплоть до границы функций, имеющих конечный порядок роста на бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия существования решения неоднородной задачи и выписываются в явном виде решения соответствующей однородной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $D = \{(x, y) : \ y > 0\}$ верхняя полуплоскость комплексной плоскости, и Γ - ее граница. В области D рассматривается эллиптическая система второго порядка

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A, B и C – постоянные квадратные матрицы порядка n, $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ – искомая вектор-функция. Будем предполагать, что система (1) правильно эллиптическая, т.е. для корней λ_m характеристического уравнения $\det(A + B\lambda + C\lambda^2) = 0$ выполняется соотношение $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{n+j} < 0$, при $j = 1, \ldots, n$. На границе Γ решение $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u_y(x, 0) = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u(0, 0) = U_0, \tag{2}$$

где $f(x)$ – заданная на Γ непрерывная вектор-функция, а U_0 - фиксированное число.

В монографии [1], было введено важное понятие слабой и сильной связанности системы (1) (с действительными коэффициентами) и было доказано, что задача Неймана (1), (2) и задача Дирихле для слабо связанной системы (1) в конечных односвязных областях фредгольмовы. В [2] показано, что для сильно связанной системы (1) эти задачи не фредгольмовы и не нетеровы. Далее, в [3] было получено, что для сильно связанных систем соответствующие однородные задачи в полуплоскости в классе ограниченных функций имеют бесконечное множество линейно независимых решений. Мы будем исследовать задачу (1), (2) для слабо связанной системы (1) в классе функций полиномиального роста.

Введем следующие определения

Определение 1. Обозначим N_α - класс непрерывных на Γ функций, допускающих оценку

$$|f(x)| \leq K(1+|x|^\alpha), \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где α - фиксированное неотрицательное число. (Здесь и далее через K обозначаем все постоянные).

Определение 2. Класс M_α - это множество функций u, непрерывных в $D \cup \Gamma$ и допускающих оценку

$$|u(x,y)| \leq K(1+r^\alpha), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in D \cup \Gamma, \tag{4}$$

где α - фиксированное неотрицательное число.

Решение u задачи (1), (2) ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых в D функций, удовлетворяющих условию

$$u \in M_\alpha, \quad u_y \in M_{\alpha-1}. \tag{5}$$

Предполагается, что $f \in N_\beta$ при $\beta < \alpha - 1$ (случай $\beta = \alpha - 1$ будет рассмотрен в §3). Рассмотрим также граничные условия Дирихле

$$u(x,0) = f(x), \quad u \in M_{\alpha-1}. \tag{6}$$

для решения системы (1). Задача Дирихле (1), (6) была исследована в [4], где было доказано, что

1) соответствующая однородная задача (когда $f \equiv 0$) имеет k_0 линейно независимых решений, при

$$k_0 = 0, \quad 0 \leq \alpha < 2 \quad \text{и} \quad k_0 = ([\alpha]-1)n, \quad \alpha \geq 2, \tag{7}$$

2) неоднородная задача при нецелых α и при $0 \le \alpha < 2$ всегда разрешима.

3) при $\alpha = [\alpha] \ge 2$ неоднородная задача (1), (6) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\sup_{r \ge 0} \left| \int_{-r}^{r} \frac{f(x)\,dx}{i + x^{\alpha}} \right| \le K. \tag{8}$$

Отметим также, что в [4] общее решение однородной задачи (1), (6) и частное решение неоднородной задачи построены в явном виде. В настоящей работе, используя эти результаты, исследуется задача (1), (2) при условии (5). Основные полученные результаты следующие

Теорема 1. *Пусть $m = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2), (5) (при $f \equiv 0$, $U_0 = 0$) имеет mn линейно независимых решений. Любое решение является многочленом порядка не выше m и определяется по формулам*

$$u(x,y) = cx, \quad 1 \le \alpha < 2,$$

$$u(x,y) = \int_0^y v(x,t)\,dt - A^{-1}C \int_0^x (x-t) v_y(t,0)\,dt + cx, \quad \alpha \ge 2. \tag{9}$$

где v – произвольное решение однородной задачи (1), (6), а c – постоянный вектор.

Теорема 2. *Если $\alpha > 0$, то неоднородная задача (1), (2), (5) всегда имеет решение. Если $\alpha = 0$, то неоднородная задача (1), (2), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор-функция f удовлетворяет условию*

$$\int_{\Gamma} f(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

Решение неоднородной задачи (1), (2), (5) определяется по частному решению задачи Дирихле (1), (6). Эти теоремы доказываются в §§2 и 3. В §4 исследуется более общая граничная задача для слабо связанной системы (1).

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2 : СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ

Доказательство теоремы 1. Пусть система (1) – слабо связанная и u – решение однородной задачи (1), (2), (5). Тогда функция $v = u_y \in M_{\alpha-1}$ и является решением однородной задачи (1), (6). При $0 \le \alpha < 2$ из (7) следует, что $v \equiv 0$ и, следовательно, $u(x,y) = \varphi(x)$, где φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция от x. Подставляя эту функцию в (1), получим $\varphi''(x) = 0$, т.е. $u(x,y) = c_1 + c_2 x$, где c_1 и c_2 – постоянные векторы. Из однородного граничного условия (2) следует, что $c_1 = u(0,0) = 0$. Итак, $u(x,y) = cx$. Учитывая, что $u \in M_\alpha$, при $0 \leq \alpha < 1$ имеем $c = 0$, а при $1 \leq \alpha < 2$ c – произвольный постоянный вектор. Пусть теперь $\alpha \geq 2$. В работе [4] было доказано, что в этом случае компоненты вектор-функции v являются полиномами порядка не выше $m-1$ относительно x и y. Следовательно,

$$u(x,y) = \int_0^y v(x,t)\,dt + \varphi(x). \tag{11}$$

Подставляя u в (1), и учитывая, что v также удовлетворяет (1) и однородным условиям (6), получим $A\varphi''(x) + Cv_y(x,0) = 0$, , т.е.

$$\varphi(x) = -A^{-1}C\int_0^x (x-t)v_y(t,0)dt + c_0 + c_1 x, \tag{12}$$

где c_0 и c_1 – произвольные постоянные векторы. Подставляя u в однородное граничное условие (2), получаем, что $c_0 = 0$. Из (11) и (12) получаем представление (9). Согласно формуле (7), однородная задача (1), (6) имеет $(m-1)n$ линейно независимых решений. Отсюда и из формулы (9) следует, что однородная задача (1), (2), (5) имеет mn линейно независимых решений, которые являются многочленами порядка не выше m относительно x и y. Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 2 будем использовать следующие оценки, которые доказываются простым вычислением.

Лемма 1. *Пусть λ и μ – постоянные, $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\mu \neq 0$, и*

$$w(x,y) = \int_\Gamma \frac{h(t)\,dt}{t - x - \lambda y - \lambda}, \quad s(x) = \int_\Gamma \frac{q(t)dt}{(t-x-\lambda)(t-x-\mu)}. \tag{13}$$

Тогда,

если $h \in N_r$ при $-1 < r \leq 0$, то $w \in M_\rho$ при всех $\rho > r$,

если $q \in N_r$ при $-2 < r < 0$, тогда $s \in N_r$,

если h непрерывна на Γ и $|h(x)| \leq K \ln^{-\gamma}|x|$ при $|x| \geq R > 1$ и $\gamma > 2$, то $|w(x,y)| \leq K \ln^{1-\gamma} r$ при $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq R > 1$,

если q непрерывна на Γ и удовлетворяет неравенству

$$|q(x)| \leq K|x|^{-1}\ln^{-\gamma}|x|, \quad |x| \geq R > 1, \quad \gamma > 1,$$

то s удовлетворяет той же оценке, возможно с другой постоянной K.

Доказательство теоремы 2. Пусть характеристическое уравнение системы (1) не имеет кратных корней. В этом случае общее решение (1) представляется в виде

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{14}$$

где φ_j и φ_{n+j} $(j = 1, \ldots, n)$ – произвольные функции, аналитические в D и $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ соответственно. Постоянные векторы α_j $(j = 1, \ldots, 2n)$ выражаются через коэффициенты системы (1) и, так как система слабо связанная, то эти векторы удовлетворяют некоторым условиям. Используя обозначения

$$P = (\alpha_1 \ldots \alpha_n), \quad Q = (\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{2n}),$$

$$S = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad L = diag(\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}),$$

эти условия можно представить в следующем виде

$$\det(PSP^{-1} - QLQ^{-1}) \neq 0, \quad \det P \neq 0, \quad \det Q \neq 0. \tag{15}$$

Пусть $0 < \alpha < 1$ и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - z}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{16}$$

Тогда v – решение задачи (1), (6) – определяется формулой (14), где функции φ_j определяются однозначно соотношениями (см. [4])

$$(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z))^T = P^{-1}F(z), \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

$$(\varphi_{n+1}(z), \ldots, \varphi_{2n}(z))^T = -Q^{-1}F(z), \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{17}$$

Обозначим

$$G(x) \equiv v(x,1) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k(x + \lambda_k), \quad G_1(x) = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \alpha_k \varphi_k(x + \lambda_k). \tag{18}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$u(x,y) = \int_1^y v(x,t)dt - A^{-1}B \int_0^x G(t)\,dt -$$

$$-A^{-1}C \int_0^x G_1(t)\,dt + \int_0^1 v(0,t)\,dt + U_0. \tag{19}$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (2) и, так как v – решение системы (1) и имеет вид (14), то функция (19) также является решением системы (1)

Так как $v \in M_{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$, то первое слагаемое правой части (19) принадлежит классу M_α. Функция f принадлежит N_β при $\beta < \alpha - 1$, поэтому из (17), (18) и первого утверждения леммы 1 (при $y = 0$) следует, что $G \in N_{\alpha-1}$ и $G_1(t) \in N_{\alpha-1}$. Таким образом, второе и третье слагаемые в правой части (19) принадлежит N_α, а значит $u \in M_\alpha$ является решением задачи (1), (2), (5). Теорема 2 при $0 < \alpha \leq 1$ доказана. Доказательство в случае $1 < \alpha < \infty$ аналогично, с той лишь разницей, что вместо функции (16) следует использовать функцию (см. [4])

$$F(z) = \frac{(z+i)^{m-1}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{m-1}(t-z)}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Из теоремы 1 и формулы (19) получаем следующее следствие.

Следствие 1. *При $0 < \alpha < 1$ задача (1), (2), (5) имеет единственное решение, которое определяется формулой (19).*

Итак, для завершения доказательства остается рассмотреть случай $\alpha = 0$. Из следствия 1 можем заключить, что если задача (1), (2), (5) при $\alpha = 0$ имеет решение, то оно определяется формулой (19). Функция (19) удовлетворяет системе (1) и граничным условиям (2), поэтому остается проверить условие (5). Из (19) следует, что $u_y = v$, где v однозначно определенное (см. [4]) по формулам (14) и (17) решение задачи (1), (6) в классе M_{-1}, т.е. $u_y \in M_{-1}$. Что касается доказательства второй оценки (5), из (14), (15), (17) и (18) имеем

$$G_1(x) = I_1 + I_2, \quad I_1 = \frac{PSP^{-1} - QLQ^{-1}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t - x - i}, \tag{20}$$

$$I_2 = \sum_{k=1}^{2n} \int_\Gamma \frac{\delta_k f(t) dt}{(t - x - \lambda_k)(t - x - i)},$$

$$G(x) = v(x, 1) = \sum_{k=1}^{3n} \int_\Gamma \frac{\delta_k f(t)\,dt}{(t - x - \lambda_k)(t - x - i)}, \tag{21}$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\tilde{\delta}_k f(t)\,dt}{t - x - \lambda_k y}, \tag{22}$$

где δ_j и $\tilde{\delta}_j$ $(j = 1, \ldots, 2n)$ — некоторые постоянные квадратные матрицы порядка n. Функция f по условию привадлежит классу N_r при $r < -1$, следовательно, из леммы 1 и (2) получаем, что I_2 и G принадлежат тому же классу N_r. Пусть второе условие (5) выполнено, т.е. $u \in M_0$. Тогда из определения M_0 следует, что $u(x, 0) \in N_0$. Учитывая (19), получим

$$B \int_0^x G(t)dt + C \int_0^x G_1(t)dt \in N_0. \tag{23}$$

Так как I_2 и G принадлежат N_r при $r < -1$, то для выполнения условия (23) необходимо, чтобы $\int\limits_0^x I_1\,dt \in N_0$. Представим интеграл из I_1 в следующей форме

$$\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-x-i} = -\frac{1}{x+i}\int_\Gamma f(x)dx + \frac{1}{x+i}\int_\Gamma \frac{tf(t)dt}{t-x-i}$$

Так как $tf(t) \in N_\gamma$ при $\gamma < 0$, то согласно лемме 1, второе слагаемое в правой части этого уравнения принадлежит некоторому классу N_r при $r < -1$, и, следовательно, условие (10) необходимо для выполнения (23). Итак, необходимость условия (10) для разрешимости неоднородной задачи (1), (2), (5) доказана. Пусть условие (10) выполнено. Тогда выполняется (23) и функцию (22) можно представить в виде

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\tilde{\delta}_k}{x+\lambda_k y}\int_\Gamma \frac{tf(t)dt}{t-x-\lambda_k y}.$$

Снова используя лемму 1, получим, что интегралы в последней сумме принадлежат классу M_r при $r < 0$, и, следовательно, $\int_1^y v(x,t)dt \in M_0$. Это соотношение вместе с (23) и (19), доказывает достаточность условия (10) для разрешимости задачи (1), (2) и (5) при $\alpha = 0$. Теорема доказана.

§3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СЛУЧАЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Доказательство теорем 1 и 2. Пусть характеристическое уравнение системы (1) имеет кратные корни. Для простоты изложения будем предполагать, что λ_1 и λ_2 n-кратные корни характеристического уравнения, причем $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$. Тогда общее решение системы (1) представляется в виде (см. [1])

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} u_{jk}(x,y), \tag{24}$$

где $u_{j1}(x,y) = \alpha_{j1}\varphi_{j1}(x+\lambda_j y)$, и

$$u_{jk}(x,y) = \alpha_{jk}\left(\varphi_{jk}(x+\lambda_j y) + \sum_{p=1}^{k-1} C_{jkp}\, y^{k-p}\varphi_{jp}^{(k-p)}(x+\lambda_j y)\right), \quad k = 2,\ldots,n, \tag{25}$$

где $j = 1,2$ и α_{jk} ($j = 1,2$, $k = 1,\ldots,n$) - постоянные n-мерные векторы, C_{jkp} - некоторые постоянные, φ_{1k} и φ_{2k} - произвольные функции, аналитические в D и $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$ соответственно. Векторы α_{jk} и постоянные C_{jkp} определяются по коэффициентам системы (1), при этом выполняются соотношения $\det P_j \equiv \det(\alpha_{j1}\dots\alpha_{jn}) \neq 0$ при $j = 1, 2$ (условие слабой связанности в данном случае, см. [1]). Если обозначить $\beta_{jk} = \lambda_j\alpha_{jk} + C_{j,k+1,k}\alpha_{j,k+1}$ ($j = 1, 2$, $k = 1, \dots, n-1$) и $\beta_{jn} = \lambda_j\alpha_{jn}$, то выполняется соотношение

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n}\\ \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n}\end{pmatrix} \neq 0. \tag{26}$$

Функция v — частное решение задачи (1), (6) при $g = f$ и в этом случае определяется формулой (24), где функции φ_{1j} и φ_{2j} однозначно определяются по формулам, аналогичным (17) $(\varphi_{11}(z), \dots, \varphi_{1n}(z))^T = P_1^{-1}F(z)$ ($\operatorname{Im} z > 0$) и $(\varphi_{21}(z), \dots, \varphi_{2n}(z))^T = -P_2^{-1}F(z)$ ($\operatorname{Im} z < 0$). Функция F определяется так же как и в §2. Далее, ясно, что $v_y(x, 1)$ можно представить в виде

$$v_y(x,1) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n-k+1} a_{jk\rho}\varphi_{jk}^{(\rho)}(x+\lambda_j),$$

где $a_{jk\rho}$ — некоторые определенные постоянные. Обозначим $G(x) = v(x, 1)$ и

$$G_1(x) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n-k+1} a_{jk\rho}\varphi_{jk}^{(\rho-1)}(x+\lambda_j).$$

В этих обозначениях частное решение задачи (1), (2), (5) также определяется по формуле (19) $\alpha \geq 0$ (так как функция v определяется по формуле (24)), причем при $\alpha = 0$ необходимо выполнение условия (10). Из (19) следует, что $u_y = v \in M_{\alpha-1}$, и, аналогично параграфу §2, используя (19) и (26), получим, что $u \in M_\alpha$. Доказательство теоремы 1 аналогично случаю простых корней. Теоремы доказаны.

Условие теоремы 2 $f \in N_\beta$ при $\beta < \alpha - 1$ можно ослабить. Если предположить, что $f \in C(\Gamma)$ допускает оценку $|f(x)| \leq K|x|^{\alpha-1}(\ln|x|)^{-\gamma}$ при $|x| > R$, где $\gamma > 1$ при $\alpha > 0$ и $\gamma > 2$ при $\alpha = 0$, то, используя лемму 1, (3) и (4) аналогично доказываем теоремы 1 и 2 и в этом случае .

Рассмотрим предельный случай $f \in N_{\alpha-1}$, когда характеристическое уравнение уравнения (1) имеет простые корни. Если задача (1), (2), (5) имеет решение u, то функция $v = u_y$ будет решением задачи (1), (6), следовательно, при $\alpha = [\alpha] \geq 2$ функция f необходимо удовлетворяет условию (8) (см. [4]).

Пусть $\alpha > 0$ и $f \in N_{\alpha-1}$. Тогда, согласно вышеизложенному, вектор-функция u_0 определенная формулой (19), является решением задачи (1), (2) и для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем $u_0 \in M_{\alpha+\varepsilon}$ и $u_y \in M_{\alpha+\varepsilon-1}$. Пусть задача (1), (2),

(5) имеет решение u. Тогда функция $u_\varepsilon = u - u_0$ является решением однородной задачи (1), (2), (5) когда α в (5) заменено на $\alpha + \varepsilon$. Следовательно, согласно теореме 1 функция u_ε является многочленом от x и y порядка не выше $m = [\alpha]$, то есть принадлежит классу M_α. Поэтому функция $u_0 = u - u_\varepsilon$ также принадлежит классу M_α.

Обратное очевидно, и, таким образом, задача (1), (2), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда $u_0 \in M_\alpha$. Так как в (19) $v \in M_{\alpha-1}$, то при $\alpha > 0$ первое и второе слагаемые в правой части этой формулы принадлежат M_α. Поэтому, $u_0 \in M_\alpha$ тогда и только тогда, когда третье слагаемое в правой части формулы (19) принадлежит N_α. Таким образом, получена

Теорема 3. *Пусть функция f принадлежит $N_{\alpha-1}$ при $\alpha > 0$ и удовлетворяет условию (8) при $\alpha = [\alpha] \geq 2$. Если v — частное решение задачи Дирихле (1), (6), то неоднородная задача (1), (2), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_0^x G_1(t)dt \in N_\alpha. \tag{27}$$

При этом частное решение задачи (1), (2), (5) определяется формулой (19). Функция G_1 определяется из (18).

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $f \in N_{-1}$ и v — частное решение задачи Дирихле (1), (6) при $\alpha = 0$. Тогда неоднородная задача (1), (2), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_1^y v(x,t)dt \in M_0,$$

$$B\int_0^x v(t,1)dt + C\int_0^x G_1(t)dt \in N_{-1}. \tag{28}$$

Частное решение задачи (1), (2), (5) определяется формулой (19).

Применим полученные результаты для изучения неоднородной задачи (1), (2), (5) когда непрерывная на Γ вектор-функция f в окрестности бесконечно удаленной точки допускает представление

$$f(x) = x^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{l} c_k^+ e^{i a_k x}, \quad x > R,$$

$$f(x) = x^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{l} c_k^- e^{i a_k x}, \quad x < -R. \tag{29}$$

где R – положительное число, $c_k^{\pm}$ – n-мерные постоянные векторы, a_k ($k = 1,\dots,l$) – отличные от нуля действительные постоянные. При нецелых α $x^{\alpha-1}$ – непрерывная ветвь этой функции при $|x| > R$. Для простоты изложения рассмотрим скалярный случай $n = 1$ при $0 < \alpha \leq 1$. В этом случае частное решение v задачи (1), (6) определяется по формуле (см. [4])

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)\left(\frac{1}{t-x-\lambda_1 y} - \frac{1}{t-x-\lambda_2 y}\right)dt, \tag{30}$$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения, $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$. При этом имеем

$$G_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\tau)\left(\frac{\lambda_1}{\tau-x-\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\tau-x-\lambda_2}\right)d\tau. \tag{31}$$

Для оценки интеграла от функции G_1 представим функцию f в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l}\psi_k(x)x^{\alpha-1}e^{ia_k x} + h(x), \tag{32}$$

где h – финитная непрерывная вектор-функция на Γ, ψ_k – бесконечно дифференцируемая на Γ функция такая, что $\psi_k(x) = c_k^+$ при $x > R$, $\psi_k(x) = c_k^-$ при $x < -R$ и $\psi_k(x) = 0$ при $|x| < 1$ ($k = 1,\dots,l$). Интегрируя по частям, получим

$$\int_\Gamma \frac{\psi_k(t)t^{\alpha-1}e^{ia_k t}dt}{t-x-\lambda_j} = \frac{i}{a_k}\int_\Gamma \frac{\psi_k'(t)t^{\alpha-1}e^{ia_k t}dt}{t-x-\lambda_j} +$$

$$+\frac{i(\alpha-1)}{a_k}\int_\Gamma \frac{\psi_k(t)e^{ia_k t}dt}{t^{2-\alpha}(t-x-\lambda_j)} - \frac{i}{a_k}\int_\Gamma \frac{\psi_k(t)t^{\alpha-1}e^{ia_k t}dt}{(t-x-\lambda_j)^2}.$$

Функция ψ_k' – финитная, следовательно, первое слагаемое в правой части этой суммы принадлежит N_{-1}, второе и третье слагаемые принадлежат $N_{\alpha-1}$ по лемме 1 и (2). Очевидно, что G_1 состоит из слагаемых такого же вида, откуда получаем, что $G_1 \in N_{\alpha-1}$, т.е. интеграл (27) от этой функции принадлежит N_α. Следовательно, неоднородная задача (1), (2), (5) с граничной функцией f вида (19) имеет решение. При $\alpha = 0$, рассуждая аналогично, можно доказать, что условие (10) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородной задачи (1), (2), (5).

§4. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ (1)

Пусть α – заданное неотрицательное число, $m = [\alpha]$ и $f \in N_\alpha$. Решение $u \in C^2(D)$ слабо связанной системы (1) удовлетворяет условиям

$$u_y(x,0) - au(x,0) = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u \in M_\alpha, \quad u_y \in M_\alpha, \tag{33}$$

где $a \neq 0$ – некоторая постоянная. Рассмотрим также условия Дирихле, аналогичные (6) :

$$u(x,0) = f(x), \ x \in \Gamma, \quad u \in M_\alpha, \tag{34}$$

где f – функция из (33). В этом параграфе мы решим задачу (1), (33), используя решение задачи (1), (34). Предположим сначала, что

$$\mathrm{Re}\, a < 0, \qquad \mathrm{Re}\, \lambda_j a^{-1} \neq 0, \quad j = 1, \dots, 2n, \tag{35}$$

где λ_j - корни характеристического уравнения для системы (1). Имеет место следующая

Теорема 5. *Однородная задача (1), (33) имеет mn линейно независимых решений. Любое решение этой задачи – полином порядка не выше m и определяется формулой*

$$u(x,y) = e^{ay} \int_0^y e^{-at} v(x,t)\, dt + e^{ay} \varphi(x), \tag{36}$$

где v – произвольное решение однородной задачи ((1), (34), а φ – решение дифференциального уравнения

$$A\varphi''(x) + aB\varphi'(x) + a^2 C\varphi(x) = -Cv_y(x,0), \tag{37}$$

в классе полиномов порядка не выше $m-1$.

Доказательство : Пусть u решение однородной задачи (1), (33). Тогда $u_y(x,y) - au(x,y) = v(x,y)$ ($(x,y) \in D$), где v - решение однородной задачи (1), (34). В [4] было доказано, что $v \equiv 0$ при $0 \leq \alpha < 1$ и v - полином порядка не выше m при $\alpha \geq 1$. Решая дифференциальное уравнение (39), получим представление (36), где φ – некоторая дважды дифференцируемая функция, подлежащая определению. Так как $u \in M_\alpha$, то $\varphi(x) = u(x,0) \in N_\alpha$. Подставляя (36) в систему (1) и учитывая, что v удовлетворяет системе (1) и однородному граничному условию $v(x,0) = 0$, получим уравнение (37) для определения φ. Характеристическим уравнением уравнения (37) является

$$\det(A\mu^2 + aB\mu + a^2 C) = 0,$$

корни которого μ_j определяются соотношением $\mu_j = a\lambda_j^{-1}$, $j = 1, \dots, 2n$ (где λ_j – корни характеристического уравнения системы (1)). Так как v – полином порядка не выше m, то $v_y(x,0)$ - полином порядка не выше $m-1$. Из (35) следует, что $\mathrm{Re}\, \mu_j \neq 0$ и поэтому (см. [5]) уравнение (37) в классе N_α имеет единственное решение, являющееся полиномом порядка $m-1$. Так как однородная задача (1),

(34) имеет mn линейно независимых решений (см. (7)), то из (36) следует, что однородная задача (1), (33) также имеет mn линейно независимых решений.

Докажем, что решение однородной задачи (1), (33) является полиномом относительно x и y порядка не выше m. Действительно, учитывая, что в (36) v и φ – полиномы порядка не выше m и $m-1$ соответственно, из (36) имеем

$$u(x,y) = P_1(x,y) + e^{ay}\varphi_1(x),$$

где P_1 и φ_1 – полиномы порядка не выше m. Так как u – решение системы (1), то

$$0 \equiv \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}(Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy}) = a^{m-1}e^{ay}(A\varphi_1''(x) + Ba\varphi_1'(x) + Ca^2\varphi_1(x)).$$

Таким образом, учитывая, что $a \neq 0$, получаем, что φ_1 – решение однородной системы (37). Так как решение системы (37) в классе полиномов порядка m единственно, то $\varphi_1 \equiv 0$ и, следовательно $u \equiv P_1$. Теорема доказана.

Отметим, что, так как $a \det A \det C \neq 0$, то решение системы (37) можно искать в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k x^k$. Подставляя эту сумму в (37) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получим систему уравнений для определения искомых постоянных векторов C_k $(k = 0, \ldots, m-1)$, которая имеет единственное решение (см. [5]).

Чтобы сформулировать утверждение о неоднородной задаче, введем следующее обозначение. Пусть функция $f \in N_\alpha$ и при натуральном α удовлетворяет условию (8), с заменой α на $\alpha + 1$. Обозначим V – частное решение задачи (1), (34), которое существует и определяется в явном виде [4].

Theorem 6. *Неоднородная задача (1), (33) при ненатуральном $\alpha > 0$ всегда разрешима, а при $\alpha \in \mathbb{N}$ она имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию (8), с заменой α на $\alpha + 1$. Частное решение задачи (1), (33) определяется по формуле*

$$u(x,y) = e^{ay}\int_1^y e^{-at}V(x,t)\,dt + e^{ay}\varphi_0(x), \tag{38}$$

где φ_0 – решение дифференциального уравнения

$$A\varphi''(x) + aB\varphi'(x) + a^2C\varphi(x) = \psi_0(x) \equiv$$

$$\equiv -e^{-a}(aCV(x,1) + BV_x(x,1) + CV_y(x,1)). \tag{39}$$

Доказательство : Пусть V - решение задачи (1), (34). Тогда легко проверить, что функция (38) является решением системы (1). Далее, из (38) имеем

$$u_y(x,y) - au(x,y) = V(x,y),$$

и так как $V(x,0) = f(x)$ $(x \in \Gamma)$, то функция (38) удовлетворяет первому граничному условию (33). Поскольку $V \in M_\alpha$, то, если $u \in M_\alpha$, из равенства $u_y = au + V$ получим, что $u_y \in M_\alpha$. Таким образом, осталось доказать, что функция (38) принадлежит M_α. Функция V принадлежит M_α и $\operatorname{Re} a < 0$, поэтому первое слагаемое в (38) принадлежит M_α. Для завершения доказательства теоремы осталось доказать существование решения системы (39) в классе N_α. Сначала докажем, что $\psi_0 \in N_\alpha$. Действительно, так как $V \in M_\alpha$, то $V(x,1) \in N_\alpha$. Явный вид функции V (см. §2 и §3), а также лемма 1 позволяют заключить, что $V_x(x,1)$ и $V_y(x,1)$ также принадлежат классу N_α. Итак, $\psi_0 \in N_\alpha$ а значит система (39) имеет решение в классе N_α (см. [5]). Теорема доказана.

Пусть теперь условия (35) заменяются условием

$$\operatorname{Re} a \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_k a^{-1} = 0, \quad k = 1,\ldots,p; \quad \operatorname{Re} \lambda_k a^{-1} \neq 0, \quad k = p+1,\ldots,2n.$$

В этом случае теоремы 5 и 6 также остаются в силе с той лишь разницей, что однородная задача (1), (33) имеет $mn + p$ линейно независимых решений, и при $\operatorname{Re} a > 0$ правые части (36) и (38) следует заменить на

$$-e^{ay}\int_y^\infty e^{-at}v(x,t)\,dt \quad \text{и} \quad -e^{ay}\int_y^\infty e^{-at}V(x,t)\,dt$$

соответственно.

Abstract. The paper investigates Neyman's problem for elliptic, weakly connected systems of second order in the half-plane. The solutions are looked for in the class of twice continuously differentiable in the half-plane and continuous up to the boundary functions, that have finite growth order at infinity. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the non-homogeneous problem are obtained and the solutions of the corresponding homogeneous problem are found in an explicit form.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
2. А. И. Вольперт, "Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических уравнений на плоскости", Труды ММО, том 10, стр. 41 – 80, 1961.

3. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1998.
4. Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян, "Задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка", Изв. НАН Армении. Математика, том. 39, № 5, стр. 67 - 78, 2004.
5. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970.

Поступила 2 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 67-73

КОРРЕКТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе рассматривается граничная задача для эллиптических систем второго порядка в единичном круге. Решение ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых в круге и удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы функций. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты, обеспечивающие однозначную разрешимость данной задачи, а также определяется в явном виде количество линейно независимых решений соответствующей однородной задачи, когда эти условия нарушаются.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости. Рассмотрим в D систему дифференциальных уравнений второго порядка :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A, B и C - постоянные квадратные матрицы порядка n с действительными элементами, $\det C \neq 0$. Предполагается, что характеристическое уравнение $\det(A + B\lambda + C\lambda^2) = 0$ не имеет действительных корней, и все корни этого уравнения простые. Решение u уравнения (1) - действительная вектор-функция, принадлежащая классу $C^2(\Gamma) \cap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условиям :

$$A_0 u_x(x, y) + B_0 u_y(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

$$u(x_0, y_0) = a_0, \quad A_1 u_x(x_0, y_0) + B_1 u_y(x_0, y_0) = a_1, \quad (x_0, y_0) \in \Gamma, \tag{3}$$

где A_0, B_0, A_1, B_1 - постоянные действительные квадратные матрицы порядка n такие, что $\det \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} \neq 0$, a_0 и a_1 - действительные заданные постоянные векторы, а $f \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$. Нетеровость задачи (1), (2) была исследована в [1]. В случае одного уравнения в единичном круге данная задача была полностью исследована в [2] (были получены в явном виде решения однородной задачи, а также условия разрешимости неоднородной задачи).

Цель настоящей статьи – получить условия на коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) и (3), обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2) и (3), а также определить в явном виде количество решений соответствующей однородной задачи (при $f \equiv 0$, $a_0 = a_1 = 0$).

Для формулировки полученных результатов запишем общее решение системы (1). В [3] доказано, что при сделанных предположениях общее решение этой системы можно представить в виде

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x + \lambda_k y)\right] + b, \tag{4}$$

где λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ – корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, φ_k – аналитическая в области $D_k = \{x + \lambda_k y | (x,y) \in D\}$ функция такая, что $\varphi_k(0) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, b – произвольный постоянный действительный вектор, а векторы α_k – нетривиальные решения системы

$$(A + B\lambda_k + C\lambda_k^2)\alpha_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \operatorname{Im} \lambda_k > 0. \tag{5}$$

При этом, в [3] доказано, что φ_k $(k = 1, \ldots, n)$ и b определяются по функции u единственным образом.

Обозначим

$$\mu_k = \frac{i - \lambda_k}{i + \lambda_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad M = \operatorname{diag}(\mu_1 \ldots \mu_n). \tag{6}$$

Предполагаем, что задача (1), (2) нетерова, т.е. выполняется условие (см. [3]) :

$$\det G \equiv \det((A_0 + \lambda_1 B_0)\alpha_1 \ldots (A_0 + \lambda_n B_0)\alpha_n) \neq 0. \tag{7}$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *При условии (7), задача (1) - (3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\det \Omega_l \equiv \det \begin{pmatrix} G & \overline{GM}^l \\ GM^l & \overline{G} \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Если условие (8) нарушается при некоторых $l \geq 1$, то K_0 – число линейно независимых над полем действительных чисел решений однородной задачи (1), (2), (3) определяется по формуле

$$K_0 = \sum_{l=1}^{\infty} (2n - \operatorname{rank} \Omega_l). \tag{9}$$

Замечание 1. Так как при $l \to \infty$ $\det \Omega_l \to |\det G|^2 \neq 0$, то в сумме (9) содержится конечное число слагаемых, отличных от нуля.

Замечание 2. Используя равенство

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -M^l G^{-1} & G^{-1} \end{pmatrix} \Omega_l = \begin{pmatrix} G & \overline{GM}^l \\ 0 & G^{-1}\overline{G} - M^l G^{-1}\overline{GM}^l \end{pmatrix},$$

получаем, что при условии (7), $\det \Omega_l$ отличается от детерминанта матрицы $W_l = G^{-1}\overline{G} - M^l G^{-1}\overline{GM}^l$ ненулевым сомножителем.

Доказательство теоремы 1. Подставим общее решение (4) в граничное условие (2). Получим

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k \varphi_k'(x + \lambda_k y)\right] = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Переходя к комплексным переменным $x = 0.5(z + \bar{z})$ и $y = 0.5i(\bar{z} - z)$, а также используя (6), последнее равенство представим в виде

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k \psi_k(z + \mu_k \bar{z})\right] = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{10}$$

где

$$\psi_k(z + \mu_k \bar{z}) = \varphi_k'\left(\frac{i + \lambda_k}{2i}(z + \mu_k \bar{z})\right) \tag{11}$$

аналитические функции в областях $\widetilde{D}_k = \{z + \mu_k \bar{z} | (x, y) \in D\}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Далее, используем представление функций $\psi_k(z + \mu_k \bar{z})$ в окрестности Γ аналитическими в D функциями. В [4] доказано, что на Γ функции ψ_k допускают представление :

$$\psi_k(t + \mu_k \bar{t}) = \omega_k(t) + \omega_k(\mu_k \bar{t}), \quad k = 1, \ldots, n, \quad t = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{12}$$

где ω_k – аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω_k, то ψ_k восстанавливаются по формулам :

$$\psi_k(z + \mu_k \bar{z}) = \omega_k\left(\frac{1}{2}\left(z + \mu_k \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_k \bar{z})^2 - 4\mu_k}\right)\right) +$$

$$+ \omega_k\left(\frac{1}{2}\left(z + \mu_k \bar{z} - \sqrt{(z + \mu_k \bar{z})^2 - 4\mu_k}\right)\right), \quad |z| < 1,$$

где выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu_k}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu_k}, 2\sqrt{\mu_k}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu_k} \to 1$ при $\zeta \to \infty$. Таким образом, общее решение u уравнения (1) при помощи формул (4), (11) и (12) однозначно представляется через ω_k ($k = 1, \dots, n$) и b. Используя (12), представим соотношение (10) в виде

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k(\omega_k(t) + \omega_k(\mu_k \bar{t}))\right] = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

или

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k\omega_k(t) + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k\overline{\omega_k(\mu_k \bar{t})}\right] = f(x, y). \tag{13}$$

Функции $\omega_k(t)$ и $\overline{\omega_k(\mu_k \bar{t})}$ аналитически продолжаются в D, следовательно, функция в квадратных скобках в (13) определяется по своей действительной части (см. [5]) :

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k\omega_k(z) + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k\overline{\omega_k(\mu_k \bar{z})} = F(z) + iC_0, \tag{13a}$$

где C_0 – действительная постоянная, а

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)(t+z)dt}{t(t-z)}.$$

При $z = 0$ сумма в левой части (13а) действительное число. Далее, $F(0)$ – также действительное число (так как f – вещественная функция), следовательно, $C_0 = 0$. Итак, равенство (13а) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k\omega_k(z) + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k\overline{\omega_k(\mu_k \bar{z})} = F(z). \tag{14}$$

Подставляя в (14) разложения

$$\omega_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} z^j, \quad F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \tag{15}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки нуль и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z, получим соотношения для определения коэффициентов A_{kj} :

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k A_{k0} = 0.5q_0 + iD, \tag{16}$$

при $j = 0$, где D – проивольный постоянный действительный вектор, и при $j \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k A_{kj} + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k \bar{\mu}_k^j \bar{A}_{kj} = q_j.$$

Добавляя к этим уравнениям их комплексно сопряженные, получаем систему для определения неизвестных A_{kj} и $\bar{A}_{kj}$ $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k A_{kj} + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k \bar{\mu}_k^j \bar{A}_{kj} = q_j,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0 + \lambda_k B_0)\alpha_k \mu_k^j A_{kj} + \sum_{k=1}^{n}(A_0 + \bar{\lambda}_k B_0)\bar{\alpha}_k \bar{A}_{kj} = \bar{q}_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Матрицей системы (17) при фиксированном j является определенная в (8) матрица Ω_j, которая при достаточно больших j в силу (6) имеет вид

$$\Omega_j = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{pmatrix} + O(\delta^j), \quad |\delta| = \max_k |\mu_k| < 1.$$

Так как условие (7) выполняется, то при достаточно больших j коэффициенты A_{kj} совпадают с линейными комбинациями q_j (с коэффициентами, не зависящими от j) с точностью до слагаемых, убывающих со скоростью геометрической прогрессии. Это означает, что система уравнений (16), (17) эквивалентна системе уравнений (1), (2).

Пусть условие (8) выполняется, тогда из системы (16), (17) при $D = 0$ однозначно определяем A_{kj} $(j \geq 0)$ и, следовательно, используя (14), однозначно определяем функции $\omega_k(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Далее, из (11) определяем ψ_k и, следовательно, функции φ_k. Итак, при выполнении условий (8), граничная функция f и коэффициенты A, B, C, A_0, B_0 однозначно определяют действительную функцию $u_0(x, y)$, удовлетворяющую (1) и (2). Так как в (16), D – произвольный действительный вектор, то общее решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + b_1 x + b_2 y + b, \tag{18}$$

где b, b_1, b_2 – действительные постоянные векторы, подлежащие определению. Отметим, что так как u_0 удовлетворяет условию (2), то, после подстановки функции u в (2), получаем уравнение $A_0 b_1 + B_0 b_2 = 0$. Добавляя второе условие (3)

$$A_1 b_1 + B_1 b_2 = a_1 - A_1 u_{0x}(x_0, y_0) - B_1 u_{0y}(x_0, y_0),$$

получаем систему для определения b_1 и b_2. Используя невырожденность матрицы $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix}$, однозначно определяем b_1 и b_2. Вектор b также единственным образом определяется из первого условия (3). Первая часть теоремы 1 доказана.

Пусть условие (8) не выполняется при некотором $j \geq 1$ и K_0 определяется формулой (9). Тогда однородная система (17) при $q_j = 0$, $j = 1, \ldots$ имеет K_0 линейно независимых решений, а однородная система (16) при $q_0 = 0$ имеет n линейно независимых решений. Таким образом, однородная система (16), (17) при $q_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ имеет $K_0 + n$ линейно независимых решений. Из единственности представления решения u по функциям ω_k, $k = 1, \ldots, n$ и b следует, что однородная задача (1), (2) при $f \equiv 0$ имеет $K_0 + 2n$ линейно независимых решений. Обозначим эти решения через u_{0m}, $m = 1, \ldots, K_0 + 2n$. Тогда общее решение однородной задачи (1), (2) представляется в виде :

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{K_0+2n} c_m u_{0m}(x, y),$$

где c_m, $m = 1, \ldots, K_0 + 2n$ – произвольные постоянные. Подставляя это решение в граничные условия (3), при $a_0 = a_1 = 0$ получаем, что однородная задача (1), (2), (3) имеет не менее K_0 линейно независимых решений.

Перейдем к доказательству обратного неравенства. Подставляя линейно независимые решения однородной системы (17) и $A_{k0} = 0$, $k = 1, \ldots, n$ в (15), получим K_0 линейно независимых аналитических вектор-функций $\omega_s = (\omega_{s1}, \ldots, \omega_{sn})$, $s = 1, \ldots, K_0$. Из этих вектор-функций, по формулам (12), (11) и (4), при $b = 0$ получим K_0 линейно независимых решений v_s, $s = 1, \ldots, K_0$ однородной задачи (1), (2). Тогда, аналогично (18), получим; что произвольное решение однородной задачи (1), (2) представляется в виде

$$u(x, y) = \sum_{s=1}^{K_0} c_s v_s(x, y) + b_0 + b_1 x + b_2 y, \tag{19}$$

где b_0, b_1, b_2 – действительные постоянные векторы, а c_s – действительные постоянные. Определим решения w_s однородной задачи (1) – (3) по формулам

$$w_s(x, y) = v_s(x, y) + b_{0s} + b_{1s} x + b_{2s} y, \quad s = 1, \ldots, K_0. \tag{20}$$

Подставляя эти формулы в однородные условия (3) и, учитывая, что v_s удовлетворяют однородному условию (2), однозначно получим векторы b_{0s}, b_{1s} и b_{2s}. Определяя функции v_s из (20)и подставляя эти функции в (19), получим

$$u(x, y) = \sum_{s=1}^{K_0} c_s w_s(x, y) + b_{10} + b_{11} x + b_{12} y. \tag{21}$$

где b_{1m} $(m = 0, 1, 2)$ - действительные векторы. Подставляя u из (21) в однородные условия (2), (3), получим $b_{10} = b_{11} = b_{12} = 0$ поскольку w_s - решения однородной задачи (1) - (3). Итак, общее решение однородной задачи (1) - (3) определяется соотношением

$$u(x, y) = \sum_{s=1}^{K_0} c_s w_s(x, y),$$

где c_s — произвольные постоянные, которое показывает, что однородная задача (1) - (3) имеет не более K_0 линейно независимых решений. Используя уже доказанное утверждение, что количество линейно независимых решений однородной задачи (1) - (3) не меньше K_0, завершаем доказательство теоремы.

Abstract. The paper studies boundary value problems for the systems of second order elliptic differential equations in the unit disc. Solutions are expected to be twice continuously differentiable in the disc and satisfy Holder's condition up to its boundary. Some necessary and sufficient conditions for coefficients providing the unique solvability are obtained. For the case where these conditions are not satisfied, the number of linearly independent solutions of the corresponding homogeneous problem is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Е.Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка", Труды Тбилисского матем. института АН Груз.ССР им. А.М.Размадзе, том 33, стр. 93 – 111, 1967.
2. А. О. Бабаян, "Об эффективном решении граничной задачи для эллиптического уравнения второго порядка в единичном круге". Математика в высшей школе, том 4, стр. 28 – 38, Ереван, 2004.
3. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
4. N. E. Tovmasyan, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electrodynamic Fields, World Scientific, Singapore, 1998.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1986.

Поступила 4 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 5, 2005, 74-86

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Н. Е. Товмасян и В. С. Закарян

Государственный Инженерный Университет Армении

Резюме. В работе рассматриваются дифференциальные уравнения в классе аналитических функций в многосвязной области. Получены условия однозначной разрешимости таких уравнений и указан эффективный метод решения. Полученные результаты используются для решения задачи Пуанкаре для уравнения Лапласа в многосвязной области.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D^+ – ограниченная, $m+1$-связная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{m} \Gamma_j = \partial D^+$ и $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$, где Γ_j $(j = 0, \dots, m)$ – простые замкнутые достаточно гладкие контуры, причем контур Γ_0 охватывает все остальные. В области D^+ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varphi'(z) - a(z)\varphi(z) = f(z), \quad z \in D^+, \tag{1}$$

где a и f – заданные, а φ – искомая функции, аналитические в D^+ такие, что $a, f, \varphi' \in C(D^+ \cup \Gamma)$. Уравнение (1) при $f \equiv 0$ будем называть однородным.

В односвязной области уравнение (1) с особенностями было исследовано в работе [1], стр. 23-28. В многосвязной области это уравнение эквивалентно следующей задаче Римана – Гильберта

$$\mathrm{Re}\,(\varphi'(z) - a(z)\varphi(z)) = \mathrm{Re}\, f(z), \quad \mathrm{Im}\,(\varphi'(z_0) - a(z_0)\varphi(z_0)) = \mathrm{Im}\, f(z_0),$$

где z_0 – фиксированная точка в D^+. В монографии [2] задача (1) сведена к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. Наша цель – получить более полные и окончательные результаты для уравнения (1) в многосвязной области. Если D^+ – односвязная область, то, как известно, уравнение (1) всегда имеет решение и общее решение определяется формулой

$$\varphi(z) = C\varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \varphi_0(z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt\right),$$

$$\varphi_1(z) = \varphi_0(z)\int_{z_0}^{z} \frac{f(t)}{\varphi_0(t)}dt, \tag{2}$$

где $z_0 \in D^+$ – фиксированная точка, а C – произвольная постоянная. Отсюда следует, что однородное уравнение (1) в односвязной области имеет одно линейно независимое решение.

В многосвязной области ситуация меняется. Например, если $a \equiv 0$ и $f(z) = (z - z_j)^{-1}$, где z_j – произвольная точка внутри контура Γ_j $(j = 1, \ldots, m)$, то уравнение (1) не имеет решения. Если же $a(z) = \alpha(z - z_j)^{-1}$, где z_j та же точка, а α – нецелое число, то однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Это означает, что существование и единственность решения существенно зависят от a, f и числа связности области. В многосвязной области функции φ_0 и φ_1 из формулы (2), вообще говоря, многозначные, и постоянную C не всегда можно выбрать так, чтобы решение φ было однозначным.

Будем считать, коэффициент a уравнения (1) задан. В настоящей работе описываются все аналитические функции f, при которых (1) имеет решение, и это решение получено в явном виде.

Для формулировки основных результатов введем некоторые обозначения. Пусть

$$\alpha_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} a(z)dz, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \beta(z) = \exp\int_{z_0}^{z}\left(a(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{t - t_j}\right)dt, \tag{3}$$

где t_j – фиксированная точка, охваченная контуром Γ_j $(j = 1, \ldots, m)$. Здесь и в дальнейшем интегрирование на Γ идет по положительному направлению обхода (которое оставляет область D^+ слева). Из (3) следует, что функция β аналитична в D^+ и $\beta(z) \neq 0$ при $z \in D^+ \cup \Gamma$. В уравнении (1) сделаем замену $\varphi(z) = \beta(z)\psi(z)$. Получим

$$\psi'(z) - A(z)\psi(z) = F(z), \quad z \in D^+, \tag{4}$$

где

$$A(z) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{z - t_j}, \quad F(z) = \frac{f(z)}{\beta(z)}. \tag{5}$$

Итак, уравнение (1) привели к уравнению (4). Пусть $z_j \in \Gamma_j$ и $z_{j0} \in \Gamma_0$ $(j = 1, \ldots, m)$ – фиксированные точки. Соединим точки z_j с z_{j0}, соответственно, гладкими кривыми L_j $(j = 1, \ldots, m)$ так, чтобы область $G = D^+ \setminus (\bigcup_{j=1}^m L_j)$ была односвязной. Тогда формула (2) для уравнения (4) примет вид

$$\psi(z) = C\psi_0(z) + \psi_1(z), \quad \psi_0(z) = \prod_{j=1}^m (z - t_j)^{\alpha_j}, \quad \psi_1(z) = \psi_0(z) \int_{z_0}^z \frac{F(t)}{\psi_0(t)} dt, \quad (6)$$

где $z_0 \in G$, и интегрирование идет по области G и, если α_j – нецелое число, то $(z - t_j)^{\alpha_j}$ – некоторая непрерывная в $D^+ \setminus L_j$ ветвь этой функции. Таким образом, функции ψ, ψ_0 и ψ_1 аналитичны на G, но могут иметь разрывы на линиях разреза L_j $(j = 1, \ldots, m)$. Далее, соединим точку z_0 с точками z_j, соответственно, линиями $l_j \subset G$ $(j = 1, \ldots, m)$. Зафиксируем эти линии и в дальнейшем будем интегрировать от z_0 до z_j по ним. Следовательно, функции ψ, ψ_0 и ψ_1 однозначно определены в G и в точках z_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Теорема 1. *Если α_j $(j = 1, \ldots, m)$ – целые числа, то однородное уравнение (4) имеет одно линейно независимое решение. В остальных случаях оно не имеет ненулевых решений.*

Теорема 2. *Если α_j $(j = 1, \ldots, m)$ – целые числа, то неоднородное уравнение (4) имеет решение тогда и только тогда, когда F удовлетворяет условиям*

$$\int_{\Gamma_j} \frac{F(t)dt}{\psi_0(t)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad (7)$$

При этом решение определяется формулой (6), где C – произвольная постоянная.

Теорема 3. *Пусть одно из чисел α_j $(j = 1, \ldots, m)$, скажем, α_m – нецелое число. Тогда, неоднородное уравнение (4) имеет решение тогда и только тогда, когда F удовлетворяет условиям*

$$(e^{2\pi i\alpha_j} - 1)\left(\int_{l_j} \frac{F(t)dt}{\psi_0(t)} - C_m\right) + e^{2\pi i\alpha_j} \int_{\Gamma_j} \frac{F(t)dt}{\psi_0(t)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m-1, \quad (8)$$

где

$$C_m = \frac{e^{2\pi i\alpha_m}}{e^{2\pi i\alpha_m} - 1} \int_{\Gamma_m} \frac{F(t)dt}{\psi_0(t)} - \int_{l_m} \frac{F(t)dt}{\psi_0(t)}, \quad (9)$$

При этом решение определяется формулой (6), где $C = C_m$.

Эти теоремы доказываются в §2. Далее, в §3 рассматриваются дифференциальные уравнения высшего порядка в многосвязной области. В §4 полученные результаты применяются для исследования краевых задач типа Пуанкаре для уравнения Лапласа в многосвязной области.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 И 3

Доказательство теоремы 1 : Решение $\varphi(z)$ однородного уравнения (4) в области G представляется в виде $\varphi(z) = C\psi_0(z)$, где ψ_0 определена в (6), а C - некоторая постоянная. Из (6) следует, что, если α_j $(j = 1, \dots, m)$- целые, то C - произвольная постоянная, в остальных случаях $C = 0$.

Доказательство теоремы 2 : Пусть α_j $(j = 1, \dots, m)$ - целые. Тогда функция ψ_0 аналитична в области D^+. Следовательно, функция ψ из (6) аналитична в D^+ тогда и только тогда, когда выполнены условия (7). При этом в (6) постоянная C произвольная. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 : Пусть α_m - нецелое число и пусть ψ решение уравнения (4) в области D^+. Тогда очевидно, что

$$\lim_{\substack{z \to z_j \\ z \in G}} \psi(z) = \psi(z_j), \quad j = 1, \dots, m. \tag{10}$$

В области G функция $\psi(z)$ определяется формулой (6), где C – некоторая постоянная. Из (6) следует, что предел (10) существует тогда и только тогда, когда $C = C_m$ и выполняются условия (8). Следовательно, условия (8) необходимы для того, чтобы эта задача имела решение. Пусть эти условия выполнены и $C = C_m$. Тогда легко проверить, что функция (6) непрерывна в области D^+. Следовательно, она является решением уравнения (4) в области D^+. Теорема доказана.

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В области D^+ рассмотрим уравнение :

$$L\varphi \equiv \varphi^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{(k)}(z) = f(z), \quad z \in D^+, \tag{11}$$

где f - заданная функция, аналитическая в области D^+, a_k $(k = 1, \dots, n)$ - постоянные, а $\varphi(z)$ - искомая аналитическая функция в D^+. Если область D^+ - односвязная, то методы решения уравнения (11) в классе аналитических функций и на отрезке $[a, b]$ не отличаются. Это уравнение можно решить методом вариации постоянных, лишь с той разницей, что действительную переменную x везде надо заменить комплексной переменной z. В многосвязных областях картина меняется. Например, уравнение $\varphi'(z) = f(z)$ имеет решение уже не для всех аналитических функций в области D^+.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — различные корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k = 0, \tag{12}$$

а $k_1, \ldots, k_l$ — их кратности, $k_1 + \ldots + k_l = n$.

Теорема 4. *Для того, чтобы уравнение (11) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла условиям*

$$\int_{\Gamma_q} e^{-\lambda_j z} z^p f(z)\, dz = 0, \quad p = 0, \ldots, k_j - 1; \quad j = 1, \ldots, l; \quad q = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Число линейно независимых условий в (13) равно mn.

Доказательство: Область $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ состоит из $m+1$ связных компонент $D_0^-, D_1^+, \ldots, D_m^+$ с границами $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_m$ соответственно, причем D_0^- содержит окрестность бесконечно удаленной точки. В работе [1] доказано, что уравнение (11) имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет конечному числу условий вида

$$\int_\Gamma f(z)\psi_j(z)dz = 0, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{14}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_p$ — некоторые линейно независимые аналитические в области D^- функции, исчезающие в бесконечности. Эти функции не зависят от f. Покажем, что условия (14) совпадают с условиями (13). Пусть $f(z) = L\omega(z)$, где ω — произвольная аналитическая в D^+ функция из класса $C^n(\overline{D^+})$, а L — оператор (11). Ясно, что для такой функции f уравнение (11) имеет решение и этим решением является функция ω. Поэтому, из (14) имеем

$$\int_\Gamma \psi_j(z)(L\omega)(z)dz = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_\Gamma \omega(z)(L^* \psi_j)(z)dz = 0, \tag{15}$$

где

$$L^* \psi_j \equiv (-1)^n \psi_j^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k \psi_j^{(k)}(z). \tag{16}$$

Так как ω — произвольная аналитическая функция в D^+, то из (15) имеем (см. [2], стр. 131), что функция $L^* \psi_j$ аналитически продолжается в D^+. Используя то, что эта функция аналитична в D^- и исчезает в бесконечности, получаем, что

$$L^* \psi_j(z) = 0, \quad z \in D_0^-, \quad (\psi_j(\infty) = 0), \tag{17}$$

$$L^* \psi_j(z) = 0, \quad z \in D_k^+, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Так как общее решение уравнения $L^*\psi = 0$ определяется формулой

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\rho=0}^{k_j-1} C_{j\rho} e^{-\lambda_j z} z^\rho. \tag{19}$$

где $C_{j\rho}$ - произвольные постоянные, то уравнение (17) имеет только нулевое решение. Из (19) следует, что в каждой области D_k^+ линейно независимыми решениями уравнения (18) являются функции $e^{-\lambda_j z} z^\rho$ ($\rho = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, l$).

Следовательно, условия (13) достаточны для разрешимости уравнения (11). Теперь докажем необходимость этих условий. Пусть уравнение (11) имеет решение φ. Тогда $f = L\varphi$ и, следовательно,

$$\int_{\Gamma_s} e^{-\lambda_j z} z^\rho f(z) dz = \int_{\Gamma_s} e^{-\lambda_j z} z^\rho (L\varphi)(z) f(z) dz = \int_{\Gamma_s} \varphi(z) L^*(e^{-\lambda_j z} z^\rho) dz = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть G - односвязная область, определенная в §1. Определим интегральный оператор M_j соотношением

$$(M_j f)(z) = e^{\lambda_j z} \int_{z_0}^{z} f(t) e^{-\lambda_j t} dt,$$

где z_0 - фиксированная точка в G (см. §2). Имеет место следующая

Теорема 5. *Если условия (13) выполнены, то общее решение уравнения (11) в области D^+ определяется формулой*

$$\varphi(z) = \gamma(z) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{\rho=0}^{k_j-1} C_{j\rho} e^{\lambda_j z} z^\rho, \tag{20}$$

где $\gamma = M_1^{k_1} \ldots M_m^{k_m} f$ и $C_{j\rho}$ - произвольные постоянные.

Доказательство. Функция γ является частным решением уравнения (11) в области G. Пусть f удовлетворяет условиям (13). Тогда, согласно теореме 4, уравнение (11) имеет решение φ. Так как φ является решением этого уравнения также и в области G, то оно представляется в виде (20), и, следовательно, функция γ аналитична в D^+ и удовлетворяет уравнению (11) в этой области. Таким образом, общее решение (11) в области D^+ определяется формулой (20). Теорема доказана.

Рассмотрим в области D^+ систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi'(z) - A\varphi(z) = f(z), \quad z \in D^+, \tag{21}$$

где A – квадратная матрица порядка n, $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}$ – заданная, а $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^{\mathrm{T}}$ – искомая аналитические в D^+ вектор-функции D^+, $f, \varphi' \in C(\overline{D^+})$. Рассмотрим также сопряженную к (21) однородную систему уравнений

$$\psi'(z) + \psi(z)A = 0, \tag{22}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ – искомая аналитическая во всей комплексной плоскости вектор-функция. Известно, что (22) имеет n линейно независимых решений. Чтобы построить эти решения, можно решить систему (21) на действительной оси и затем продолжить на всю комплексную плоскость. Аналогично теоремам 4 и 5, получим

Теорема 6. *Система (21) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть f удовлетворяет условиям*

$$\int_{\Gamma_j} \psi_s(z) f(z) dz \equiv \int_{\Gamma_j} (\psi_{s1}(z) f_1(z) + \ldots + \psi_{sn}(z) f_n(z)) dz = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

где $\psi_s = (\psi_{s1}, \ldots, \psi_{sn})$ $(s = 1, \ldots, n)$ – линейно независимые решения системы (22).

Отметим, что (23) содержит mn линейно независимых условий на f.

Теорема 7. *Если f удовлетворяет условиям (23), то общие решения уравнения (21) в областях G и D^+ совпадают.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

В односвязной области система (21) решается теми же методами, что и на отрезке действительной оси.

Теперь рассмотрим уравнение (11) с переменными коэффициентами, т.е. уравнение

$$\varphi^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \varphi^{(k)}(z) = f(z), \quad z \in D^+, \tag{24}$$

где a_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ – заданные аналитические в D^+ функции, принадлежащие классу $H(\overline{D^+})$. Пусть G – односвязная область и $z_j \in \Gamma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ фиксированные точки, определенные в §1. Если $\psi(z)$ – функция, заданная на Γ_j при $z \neq z_j$, то обозначим через $\psi(z_j^+)$ (или $\psi(z_j^-)$) предел $\psi(z)$ при $z \to z_j$ в положительном (или отрицательном) направлении. Рассмотрим следующую задачу

$$\varphi^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \varphi^{(k)}(z) = f(z), \quad z \in G, \quad \varphi^{(k)}(z_j^+) = \varphi^{(k)}(z_j^-), \tag{25}$$

при $k = 0, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, m$.

Теорема 8. *Функция φ удовлетворяет уравнению (24) тогда и только тогда, когда является решением задачи (25).*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (24) в односвязной области, поэтому доказательство опускаем.

Рассмотрим задачу (25). Общее решение уравнения (24) в односвязной области G запишется в виде

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho \varphi_\rho(z), \tag{26}$$

где φ_* – частное решение уравнения (24), а φ_ρ $(\rho = 1, \ldots, n)$ – линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения в области G. Эти функции строятся аналогично случаю действительных переменных. Подставляя φ из (26) в граничное условие (25), для определения постоянных $C_1, \ldots, C_n$ получим систему уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{n} C_\rho \left(\varphi_\rho^{(k)}(z_j^+) - \varphi_\rho^{(k)}(z_j^-) \right) =$$

$$= -\left(\varphi_*^{(k)}(z_j^+) - \varphi_*^{(k)}(z_j^-) \right), \quad k = 0, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{27}$$

Таким образом, из теоремы 8 следует

Теорема 9. *Уравнение (24) в D^+ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система уравнений (27). Общее решение уравнения (24) определяется формулой (26), где $C_1, \ldots, C_n$ – общее решение системы (27). Число линейно независимых решений однородного уравнения (24) равно количеству линейно независимых решений однородной системы (27) (при $\varphi_* \equiv 0$).*

Итак, решение уравнения (24) в $m+1$-связной области D^+ сводится к решению этого уравнения в односвязной области D и алгебраической системе линейных уравнений (27).

§4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Применим полученные результаты для исследования краевых задач для уравнения Лапласа в многосвязной области.

Пусть D – двусвязная область, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ – ее граница, причем $\Gamma_1 \subset \mathrm{int}\Gamma_0$. Пусть, далее, z_0 – фиксированная точка в D, а точка 0 находится внутри контура Γ_1. В области D рассмотрим уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{28}$$

с граничным условием

$$r\frac{\partial u(z)}{\partial r} - \alpha u(z) = f(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{29}$$

где $r = |z|$, $\frac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производная u по направлению радиус-вектора $\overrightarrow{0z}$, α – действительная постоянная, $f \in H(\Gamma)$ – заданная действительная функция, а u – искомая действительная функция такае, что $u_x, u_y \in H(\overline{D})$. Задачу (28), (29) при $f \equiv 0$ будем называть однородной. Имеет место следующая

Теорема 10. *Для того, чтобы задача (28), (29) была однозначно разрешимой, для любой функции $f \in H(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы постоянная α не была целым числом.*

Доказательство. Если α - целое число, то легко проверить, что функция $u(z) = \mathrm{Re}\, z^{\alpha}$ является решением однородной задачи (28), (29). Таким образом, условие теоремы необходимо для однозначной разрешимости задачи (28), (29). Пусть α – нецелое число. Докажем, что в этом случае задача (28), (29) однозначно разрешима. Представим обшее решение уравнения (28) в виде (см. [2], стр. 256)

$$u(z) = \mathrm{Re}\, \varphi(z) + C \ln r, \quad z \in D, \tag{30}$$

где φ – аналитическая в области D функция, а C - действительная постоянная. Отметим, что в этом представлении постоянная C определяется по функции u однозначно, а функция φ – с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. В частности, если $u \equiv 0$, то $C = 0$ и $\varphi(z) = ic$, где c произвольная действительная постоянная. Подставляя u из (30) в (29), получим

$$\mathrm{Re}\, \psi(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{31}$$

где

$$\psi(z) = z\varphi'(z) - \alpha\varphi(z) + C - C\alpha \ln r. \tag{32}$$

Пусть U – решение уравнения (28), удовлетворяющее условию Дирихле

$$U(z) = f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{33}$$

Как известно, задача (28), (33) имеет единственное решение. В [2], стр. 255, указан простой метод решения этой задачи в многосвязной области. Подставляя f из (33) в (31), получим $\mathrm{Re}\,\psi(z) = U(z)$ $(z \in \Gamma)$. Так как $\mathrm{Re}\,\psi(z)$ и $U(z)$ удовлетворяют уравнению (33), то из последнего равенства имеем

$$\mathrm{Re}\,\psi(z) = U(z), \quad z \in D. \tag{34}$$

Представим $U(z)$ в виде (30) $U(z) = \mathrm{Re}\,\Phi(z) + c_0 \ln r$, где c_0 – постоянная, $\Phi(z)$ – аналитическая в D функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{Im}\,\Phi(z_0) = 0$, где $z_0 \in D$ – фиксированная точка. Отметим, что $\Phi(z)$ и c_0 определяются по функции U и, следовательно, по f однозначно. Подставляя полученное выражение для U в (34), и учитывая (32), получим

$$\mathrm{Re}\,\big(z\varphi'(z) - \alpha\varphi(z) + C - \Phi(z)\big) - (c_0 + \alpha C)\ln r = 0, \quad z \in D. \tag{35}$$

Следовательно,

$$z\varphi'(z) - \alpha\varphi(z) - \Phi(z) + C = ic_1, \quad z \in D, \quad c_0 + \alpha C = 0, \tag{36}$$

где c_1 – действительная постоянная. Из (36) получим $C = -c_0\alpha^{-1}$ и

$$z\varphi'(z) - \alpha\varphi(z) = \Phi(z) - \frac{c_0}{\alpha} + ic_1. \tag{37}$$

Так как α – нецелое число, то согласно теореме 3 уравнение (37) относительно φ имеет решение при произвольной постоянной c_1. В частности, можно решить это уравнение при $c_1 = 0$ методом, указанным в §1. Итак, неоднородная задача (28), (29) при нецелом α всегда имеет решение. Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу. В этом случае $c_0 = 0$ и $\Phi \equiv 0$. Решая уравнение (37) указанным в §1 методом, получим $\varphi(z) = -ic_1\alpha^{-1}$. Так как c_1 и α – действительные постоянные, то из (30) получим $u(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично можно исследовать эту задачу при целых α. Приведем полученные результаты.

Теорема 11. *Пусть $\alpha \neq 0$ – целое, не равное нулю число. Тогда однородная задача (28), (29) имеет два линейно независимых решения, $u_1(z) = \mathrm{Re}\, z^\alpha$ и $u_2 = \mathrm{Im}\, z^\alpha$, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо и достаточно условие*

$$\int_{\Gamma_1} z^{-\alpha-1}\Phi(z)dz = 0,$$

где Φ – функция из (37).

Теорема 12. *Пусть $\alpha = 0$. Тогда однородная задача (28), (29) имеет одно линейно независимое решение $u(z) = 1$, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_1} t^{-1}\Phi(t)\,dt = 0.$$

Так как Φ и c_0 определяются по функции f однозначно, то условия теорем 11 и 12 являются условиями на функцию f. В частности, если D является кольцом $R_1 < |z| < R_2$ и $\alpha = 0$, то условие $c_0 = 0$ совпадает с известным условием существования решения задачи Неймана для уравнения Лапласа : $\int_\Gamma f(t)\,ds = 0$. Пусть теперь D^+ - $m+1$-связная область (см. §1) с границей $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{m} \Gamma_j$ и $t_j \in int\Gamma_j$ $(j = 1,\ldots,m)$. В области D рассмотрим уравнение (28) с граничным условием

$$au_x(z) + bu_y(z) + cu(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{38}$$

где a, b и c – действительные постоянные, $a^2+b^2 \neq 0$, f – заданная действительная функция из класса $H(\Gamma)$, а u - искомая действительная функция такая, что $u_x, u_y \in H(\overline{D})$. Обозначим

$$v(z) = au_x(z) + bu_y(z) + cu(z), \quad z \in D \tag{39}$$

Так как u удовлетворяет уравнению (28), то v также удовлетворяет этому уравнению и граничному условию Дирихле $v(z) = f(z)$ $(z \in \Gamma)$. Пусть V - решение этой задачи Дирихле. Подставляя V в (39), получим

$$au_x(z) + bu_y(z) + cu(z) = V(z), \quad z \in D. \tag{40}$$

Итак, задача (28), (38) эквивалентна задаче (28), (40). Представим функции u и V в виде (см. [2], стр. 256)

$$u(z) = \operatorname{Re}\varphi(z) + \sum_{k=1}^{m} c_k \ln|z-t_k| \quad \text{и} \quad V(z) = \operatorname{Re}\Phi(z) + \sum_{k=1}^{m} a_k \ln|z-t_k|, \tag{41}$$

где φ и Φ - аналитические в области D функции, а c_k и a_k $(k = 1,\ldots,m)$ - действительные постоянные. Пусть функция Φ удовлетворяет дополнительному условию $\operatorname{Im}\Phi(z_0) = 0$, где $z_0 \in D$ – фиксированная точка. Тогда Φ и постоянные a_k определяются по функции V однозначно. Постоянные c_k определяются по u единственным образом, а φ - с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Подставляя u и V из (41) в (40), получим

$$\operatorname{Re}\Psi(z) + \sum_{k=1}^{m}(cc_k - a_k)\ln|z-t_k| = 0, \quad z \in D, \tag{42}$$

где

$$\Psi(z) = (a + ib)\varphi'(z) + c\varphi(z) - \Phi(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(a + ib)c_k}{z - t_k}. \tag{43}$$

Из (42) имеем

$$\Psi(z) = id_0, \quad cc_k - a_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{44}$$

где d_0 - действительная постоянная.

Пусть $c \neq 0$, тогда из (43), (44) имеем $c_k = a_k c^{-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$ и

$$(a + ib)\varphi'(z) + c\varphi(z) = \varphi_1(z) + id_0, \quad z \in D. \tag{45}$$

где

$$\varphi_1(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(a + ib)a_k}{c(z - t_k)}.$$

Применяя теоремы 4, 5 к уравнению (45), получим

Теорема 13. *Пусть $c \neq 0$ и $\lambda = -c(a + ib)^{-1}$. Тогда однородная задача (28), (38) имеет два линейно независимых решения : $u_1 = \operatorname{Re} e^{\lambda z}$ и $u_2 = \operatorname{Im} e^{\lambda z}$, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Gamma_j} e^{-\lambda z}\varphi_1(z)dz = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{46}$$

Условия (46) являются условиями на f, так как Φ и a_k однозначно определяются по функции V, которая является решением задачи Дирихле для уравнения (28). Аналогично получим

Теорема 14. *Пусть $c = 0$. Тогда однородная задача (28), (38) имеет два линейно независимых решения : $u_1 = 1$, $u_2 = \operatorname{Re} iz(a + ib)^{-1}$, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$a_k = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\Gamma_k} \frac{\Phi(z)dz}{a + ib} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Abstract. The paper studies differential equations in the class of analytic functions in multiply connected domains. Some unique solvability conditions of such equations are obtained and an effective solution method is given. The results are applied to the Poincare problem for the Laplace equation in multiply connected domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Дифференциальное уравнение с особенностями и сдвигами в классе аналитических функций", Известия НАН Армении. Математика, том 33, № 3, стр. 5 - 43, 1998.
2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Наука, 1968.

Поступила 1 февраля 2004

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ. МАТЕМАТИКА

Том 40. Номер 5. 2005

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ, VI

Сборник статей

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 40, No. 5, 2005

ANALYTICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS, VI

Contents